Ejercicios Tema 1

Curvas y superficies

Blanca Cano Camarero

10 de abril de 2021

Índice

Ejercicio 7

Sea la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, t^3)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(a) Comprueba que es regular.

(b) Prueba que $k(t) = \frac{6t}{(1+9t^4)^{\frac{3}{2}}}$ y que, en particular $k(t) = -k(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) Observa que la $Img(\alpha)$ es simétrica respecto del punto $\alpha(0)$ (es decir, que el giro de centro $\alpha(0)$ y el ángulo π deja a $Img(\alpha)$ invariante).

(d) Motivado por lo anterior, si $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $\epsilon > 0$ o $\epsilon > \infty$, es una curva regular cuya curvatura cumple que $k(t) = -k(-t)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, ¿podemos afirmar que $Img(\alpha)$ es simétrica respecto del punto $\alpha(0)$.

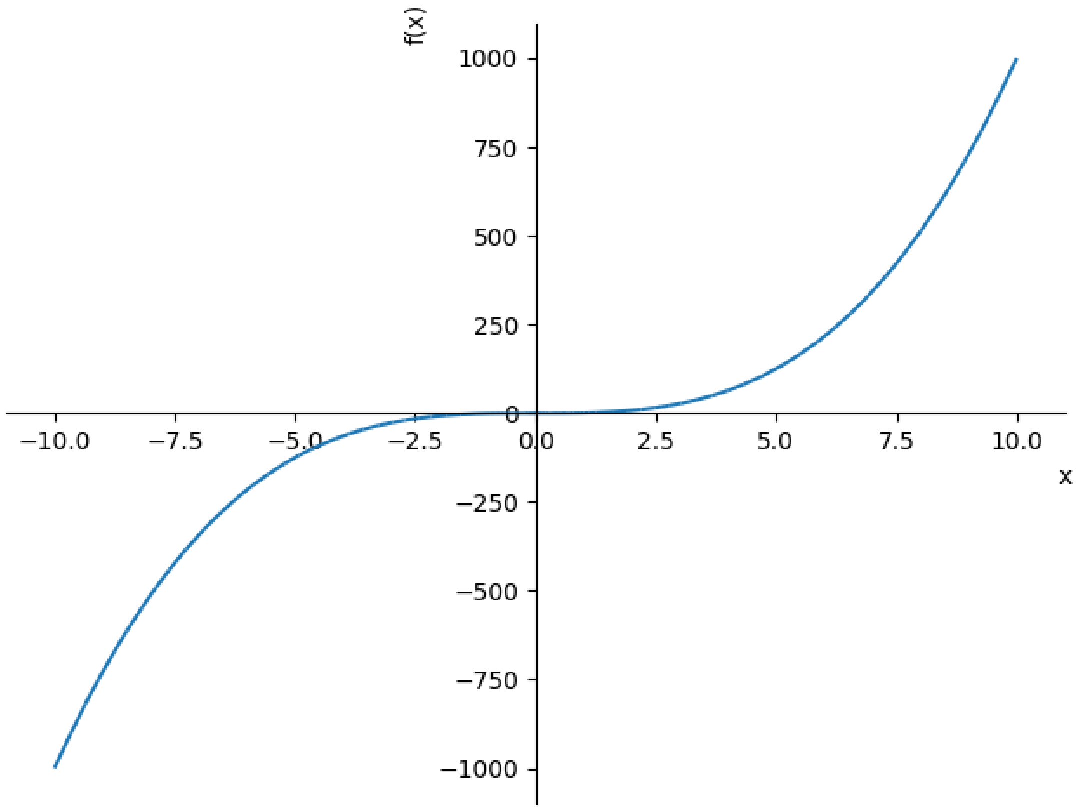
a) Regularidad

Se tiene que $\alpha(t)' = (1, 3t^2)$ que no se anula sea cual sea $t \in \mathbb{R}$ gracias a su primera componente, luego es regular. O de otra manera, por ser una norma $|\alpha(t)'| = 0$ si y solo si $\alpha(t)' = 0$; si $|\alpha(t)'| = 0$ equivale a que $|\alpha(t)'|^2 = 0$ y sabemos que $|\alpha(t)'|^2 = 1+3t^4 \geq 1 > 0$ para todo t, de donde deducimos que no se anula, es decir $\alpha(t)$ es regular.

b) Cálculo de su curvatura y ver que es impar.

Para este apartado veremos que $\alpha(t)$ es la parametrización natural de la gráfica de la función cúbica $f(x) = x^3$.

Esto es $\alpha(t) = (t, f(t))$



Además para este tipo de curvas su curvatura puede calcularse de la expresión:

$$k(t) = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

calculando $f'(t) = 3t^2$ y $f''(t) = 6t$, podemos concluir que

$$k(t) = \frac{6t}{(1 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

como se quería probar.

Finalmente veamos que independientemente del valor de $t \in \mathbb{R}$

$$-k(-t) = -\frac{6(-t)}{(1 + 9(-t)^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6t}{(1 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}} = k(t).$$

c) Simetría de $Img(\alpha)$ respecto del punto $\alpha(0)$

Sea $G(x, y) = (-x, -y)$ para todo $t \in \mathbb{R}^2$ el giro de π radianes respecto del origen.

Observemos que $G\alpha(t) = G(t, t^3) = (-t, -t^3) = \alpha(-t)$, es decir, que el giro lo deja invariante como queríamos ver.

d) Simetría de la imagen por paridad de la función curvatura

Como hipótesis tenemos una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ regular, que además su curvatura cumple $k(t) = -k(-t)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Consideremos el movimiento rígido M de $\mathbb{R}^2$ que cumple que $M(\alpha(0)) = (0, 0)$, que $\overrightarrow{M}_{e_1(0)} = (1, 0)$ y que $\overrightarrow{M}_{e_2(0)} = (0, 1)$.

Luego la curva $M \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es regular y congruente con α, cumple además que que $e_1^{M\circ\alpha}(0) = (1, 0)$ y $e_2^{M\circ\alpha}(0) = (0, 1)$ Si probamos que

$$G(M \circ \alpha(-t)) = M \circ \alpha(t) \text{ para todo } t,$$

siendo $G(x, y) = (-x, -y)$ la aplicación giro definida en el apartado anterior, tendríamos que $Img(M \circ \alpha)$ es invariante a un giro de π radianes con centro 0.

Por tanto $M^{-1} \circ G \circ M \circ \alpha(-t) = \alpha(t)$ y $M^{-1} \circ G \circ M$ es un giro de π radianes con centro en p.

Por geometría afín sabemos que $p \in \mathbb{R}^2$ es el único punto fijo del giro:

$M^{-1}GM(p) = p$ o equivalentemente $GM(p) = M(p)$, el único punto figo para G.

$M^{-1} \circ G \circ M$ es un movimineto rígido directo con un único punto fijo, luego es un giro.

FALTA UNA CONSIDERACIÓN

Sólo tenemos que ver que

$$G(M \circ \alpha)(-t) = (M \circ \alpha)(t), \text{ para todo } t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

Para ello definimos $\gamma = M \circ \alpha$ y $\beta(t) = G \circ \gamma(-t)$.

Se cumple que

$$\gamma(0) = \beta(0) \tag{1}$$

ya que $G\gamma(0) = \gamma(0)$ al ser el centro de giro.

Además, por la regla de la cadena:

$$\beta'(t) = -G\gamma'(-t) = -G(\gamma'(-t)_x, \gamma'(-t)_y) = -(-\gamma'(-t)_x, -\gamma'(-t)_y) = \gamma'(-t) \qquad (2)$$

Donde $\gamma'(t) = (\gamma'(t)_x, \gamma'(t)_y)) \in \mathbb{R}^2$ es una mera notación de un vector como sus respectivas coordenadas.

Luego en el caso particular del origen:

$$\beta'(0) = -G\gamma'(0) = -G(1,0) = -(-1,0) = (1,0) = \gamma'(0)$$

Esto quiere decir que $J\beta'(0) = J\alpha'(0)$ ya que tienen el mismo vector velocidad y α es congruente a $\gamma = M\alpha$.

O equivalentemente

$$\begin{aligned} e_1^\gamma(0) &= \frac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|} = \frac{\beta'(0)}{|\beta'(0)|} = e_1^\beta(0) \\ e_2^\gamma(0) &= Je_1^\gamma(0) = Je_2^\beta(0) = e_2^\beta(0) \end{aligned}$$

Además de manera más general tenemos que:

De manera más general en virtud de (2):

$$e_1^\beta(t) = \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = \frac{\gamma'(-t)}{|\gamma'(-t)|} = e_1^\gamma(-t) \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e_2}^\beta(t) &= \beta''(t) - < \beta''(t), e_1^\beta(t) > e_1^\beta(t) \\ &= -\gamma''(-t) - < -\gamma''(-t), e_1^\gamma(-t) > e_1^\gamma(-t) \\ &= -\gamma''(-t) + < \gamma''(-t), e_1^\gamma(-t) > e_1^\gamma(-t) \\ &= -(\gamma''(-t) - < \gamma''(-t), e_1^\gamma(-t) > e_1^\gamma(-t)) \\ &= -\tilde{e_2}^\gamma(-t) \end{aligned}$$

$$e_2^\beta(t) = \frac{\tilde{e_2}^\beta(t)}{|\tilde{e_2}^\beta(t)|} = \frac{-\tilde{e_2}^\gamma(-t)}{|-\tilde{e_2}^\gamma(-t)|} = -e_2^\gamma(-t) \qquad (4)$$

Veamos ahora que $k_\gamma(t) = k_\beta(t)$ para todo t.

Como $\gamma = M \circ \alpha$, con M movimiento rigído cualquiera distinguiremos si éste es positivo o negativo:

- Si es directo entonces $k_\gamma(t) = k_\alpha(t)$ y bastará con aplicar la hipótesis del problema en la segunda igualdad para ver que

$$-k_\gamma(-t) = -k_\alpha(-t) = k_\alpha(t) = k_\gamma(t), \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

- Si M es un movimiento rígido inverso, entonces $k_\gamma(t) = -k_\alpha(t)$ y de igual forma se tiene que

$$-k_\gamma(-t) = -(-k_\alpha(-t)) = -k_\alpha(t) = k_\gamma(t), \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

De donde deducimos que independientemente del movimiento rígido aplicado

$$-k_\gamma(-t) = k_\gamma(t) \text{ para todo } t \in (-\epsilon, \epsilon). \tag{5}$$

Observemos ahora además que β es una reparemetrización de γ compuesta con un movimiento rígido directo G. Donde $\phi(t) = -t$ es el difeomorfismo de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\beta = G \circ \gamma \circ \phi$.

La curvatura se mantiene por movimientos rígidos directos, mientras que para reparametrizaciones con derivada negativa ($\phi'(t) = -1 < 0$) es opuesta, se tiene que

$$k_\beta(t) = k_{G\circ\gamma\circ\phi}(t) = k_{\gamma\circ\phi}(t) = -k_{\gamma\circ\phi}(-t)$$

Y en virtud de la igualdad (-2)

$$k_\beta(t) = k_\gamma(t)$$

Alternativamente se podía haber usado la definición de curvatura y (2):

$$k_\beta(t) = \frac{a_{12}^\beta(t)}{|\beta'(t)|} = \frac{< \beta''(t), J\beta'(t) >}{|\beta'(-t)|^3} = \frac{< -\gamma''(-t), J\gamma'(-t) >}{|\gamma'(-t)|^3} = -k_\gamma(-t)$$

Y utilizando de nuevo (_) se tendría que $k_\beta(t) = -k_\gamma(-t) = k_\gamma(t)$.

El teorema de unicidad global afirma que existe un único movimiento rígido directo F tal que $\beta = F \circ \gamma$.

Además por (1) sabemos que $F(\gamma(0)) = \beta$ y que $\overrightarrow{F}(e_i^\beta(0)) = e_i^\gamma(0)$ para $i \in \{1, 2\}$. Así que tenemos que F deja fijo un punto y además $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{Id}$.

Por lo que por geometría a fin necesariamente $F = Id_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}$ y que

$$\gamma = \beta = G(\gamma(-t)) \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

Ejercicio 11

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud del arco y tal que $\alpha''(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, y con $k > 0$, $\tau > 0$. Se considera la curva $\beta(t) = \int_{t_0}^{t} e_3(s)ds$, donde $e_3(t)$ es el vector binormal a α en t.

(a) Comprueba que β está parametrizada por la longitud del arco.

(b) Construye del triedro de Frenet de β.

(c) Calcula las funciones curvatura y torsión, k_β y τ_β.

a) Comprueba que β está parametrizada por la longitud del arco.

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que $\beta'(t) = e_3(t)$, por ser $e_3(t)$ el vector binormal a α en t, su módulo será siempre uno para todo t, luego acabamos de probar que β está parametrizada por la longitud del arco.

b) Construcción del triedro de Frenet de β.

Para no confundirnos con el triedro de Frenet de α $\{e_1, e_2, e_3\}$, utilizaré la notación $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ para referirme al triedro de Frenet de β.

Por definición y estar parametrizada sabemos que

$$\epsilon_1(t) = \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = \beta'(t) = e_3(t) \tag{1}$$

Con lo que acabamos de calcular ϵ_1. Por otro lado

$$\tilde{\epsilon_2}(t) \quad = \quad \beta''(t) - \quad < \quad \beta''(t), \epsilon_1(t) \quad > \quad \epsilon_1(t) \quad = \quad e_3'(t) - \quad < \quad e_3'(t), e_3(t) \quad > \quad e_3(t)$$

Gracias a las ecuaciones de Frenet conocemos que $e_3'(t) = -a_{23}e_2$; sustituyendo en la ecuación anterior y teniendo en cuenta la linealidad del producto escalar y la perpendicularidad entre los vectores del triedro de Frenet de α:

$$\tilde{\epsilon_2}(t) = -a_{23}e_2 - < -a_{23}e_2, e_3(t) > e_3(t) = -a_{23}e_2$$

Luego podemos concluir que

$$\epsilon_2 = \frac{\tilde{\epsilon_2}(t)}{|\tilde{\epsilon_2}(t)|} = \frac{-a_{23}e_2}{|-a_{23}e_2|} = -e_2 \tag{2}$$

Finalmente

$$\epsilon_3(t) = \epsilon_1 \times \epsilon_2 = e_3 \times -e_2 = e_1 \tag{3}$$

Gracias a las igualdades (1), (2) y (3) podemos afirmar que el triedro de Frenet de β es $\{e_3, -e_2, e_1\}$.

c) Cálculo de las funciones curvatura y torsión, k_β y τ_β.

Por definición de curvatura, estar α y β parametrizadas por la longitud del y el apartado (b)

$$k_\beta(t) = \frac{a_{12}^\beta(t)}{|\beta'(t)|} =< \epsilon_1^{'}(t), \epsilon_2(t) >=< e_3'(t), -e_2(t) >= -a_{32}^\alpha(t) = a_{23}^\alpha(t) = \tau_\alpha(t)|\alpha'(t)| = \tau_\alpha(t).$$

Veamos ahora la torsión

$$\tau_\beta(t) = \frac{a_{23}^\beta(t)}{|\beta'(t)|} =< \epsilon_2^{'}(t), \epsilon_3(t) >=< -e_2'(t), e_1'(t) >= -a_{21}^\alpha(t) = a_{12}^\alpha(t) = k_\alpha(t)|\alpha'(t)| = k_\alpha(t).$$