Ejercicios Tema 1

Curvas y superficies

Blanca Cano Camarero

2 de abril de 2021

Índice

Ejercicio 7

Sea la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, t^3)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
(a) Comprueba que es regular.

(b) Prueba que $k(t) = \frac{6t}{(1+9t^4)^{\frac{3}{2}}}$ y que, en particular $k(t) = -k(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) Observa que la $Img(\alpha)$ es simétrica respecto del punto $\alpha(0)$ (es decir, que el giro de centro $\alpha(0)$ y el ángulo π deja a $Img(\alpha)$ invariante).

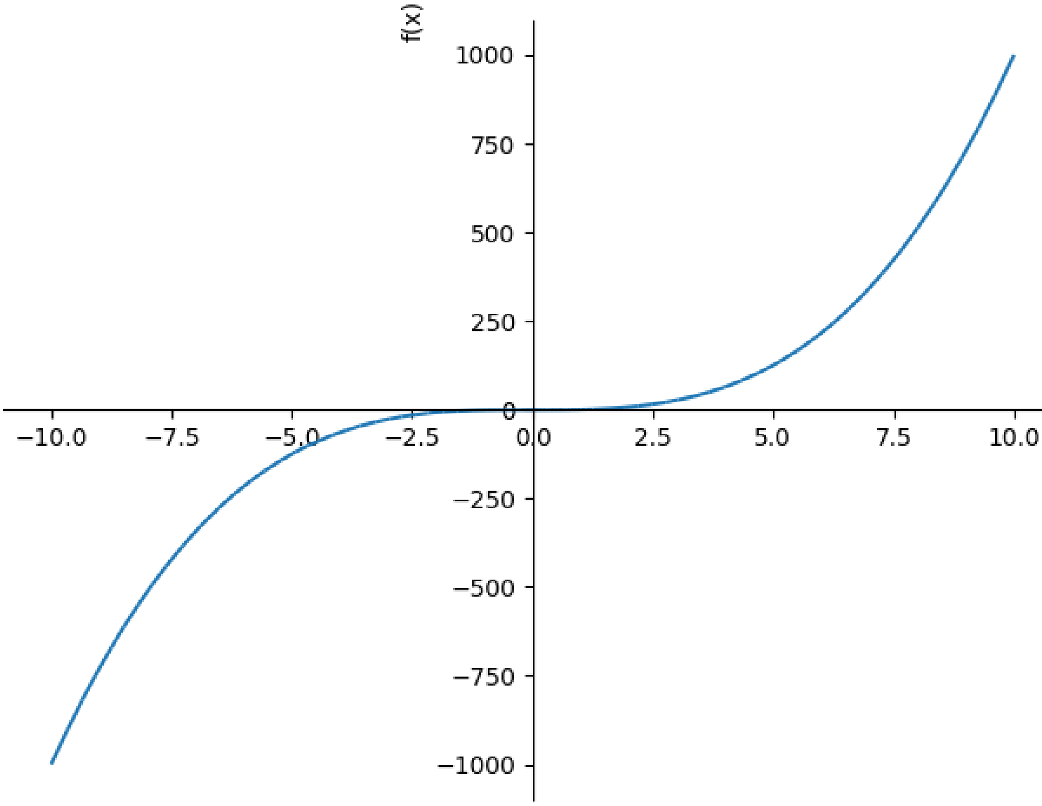
(d) Motivado por lo anterior, si $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $\epsilon > 0$ o $\epsilon > \infty$, es una curva regula cuya curvatura cumple que $k(t) = -k(-t)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, ¿podemos afirmar que $Img(\alpha)$ es simétrica respecto del punto $\alpha(0)$.

a) Regularidad

Se tiene que $\alpha(t)' = (1, 3t^2)$ que no se anula sea cual sea $t \in \mathbb{R}$ gracias a su primera componente, luego es regular.

b) Cálculo de su curvatura y ver que es impar.

Para este aparatado veremos que $\alpha(t)$ es la parametrización natural de la gráfica de la función cúbica $f(x) = x^3$.



Esto es $\alpha(t) = (t, f(t))$

Además para este tipo de curvas conocemos la siguiente expresión para calcular su curvatura

$$k(t) = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

luego como $f'(t) = 3t^2$ y $f''(t) = 6t$, podemos concluir que

$$k(t) = \frac{6t}{(1 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

como se quería probar.

Finalmente veamos que independientemente del valor de $t \in \mathbb{R}$

$$-k(-t) = -\frac{6(-t)}{(1 + 9(-t)^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6t}{(1 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}} = k(t).$$

c) Simetría de $Img(\alpha)$ respecto del punto $\alpha(0)$

Sea $G(x, y) = (-x, -y)$ para todo $t \in \mathbb{R}^2$ el giro de π radianes respecto del origen (o quivalentemente la simetría respecto a la recta $y = -x$).

Observemos que $G\alpha(t) = G(t, t^3) = (-t, -t^3) = \alpha(-t)$, es decir, que el giro lo deja invariante como queríamos ver.

d) Simetría de la imagen por paridad de la función curvatura

Como hipótesis tenemos una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ regular, que aemá su curvatura cumple $k(t) = -k(-t)$.

Consideremos el movimiento rígido M de $\mathbb{R}^2$ que cumple que $M(\alpha(0)) = (0, 0)$, que $\overrightarrow{M}_{e_1(0)} = (1, 0)$ y que $\overrightarrow{M}_{e_2(0)} = (0, 1)$.

Si probamos que

$$S(M \circ \alpha(t))\text{para todo } t, \tag{1}$$

siendo G la aplicación giro definida en el apartado anterior, tendríamos que $Im(\alpha(M \circ \alpha)$ es simétrica respecto al origen.