Ejercicios Tema 1

Curvas y superficies

Blanca Cano Camarero

10 de abril de 2021

Índice

Ejercicio 7

Sea la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, t^3)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(a) Comprueba que es regular.

(b) Prueba que $k(t) = \frac{6t}{(1+9t^4)^{\frac{3}{2}}}$ y que, en particular $k(t) = -k(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) Observa que la $Img(\alpha)$ es simétrica respecto del punto $\alpha(0)$ (es decir, que el giro de centro $\alpha(0)$ y el ángulo π deja a $Img(\alpha)$ invariante).

(d) Motivado por lo anterior, si $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $\epsilon > 0$ o $\epsilon > \infty$, es una curva regular cuya curvatura cumple que $k(t) = -k(-t)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, ¿podemos afirmar que $Img(\alpha)$ es simétrica respecto del punto $\alpha(0)$.

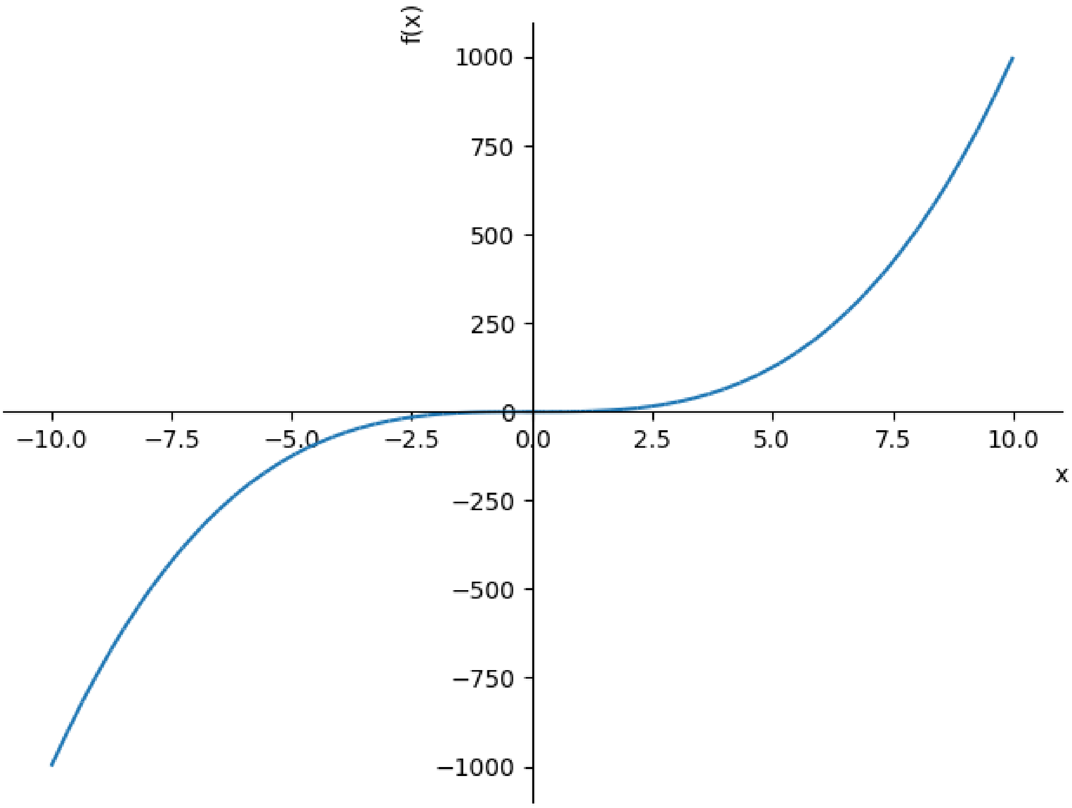
a) Regularidad

Se tiene que $\alpha(t)' = (1, 3t^2)$ que no se anula sea cual sea $t \in \mathbb{R}$ gracias a su primera componente, luego es regular. O de otra manera, por ser una norma $|\alpha(t)'| = 0$ si y solo si $\alpha(t)' = 0$; si $|\alpha(t)'| = 0$ equivale a que $|\alpha(t)'|^2 = 0$ y sabemos que $|\alpha(t)'|^2 = 1+3t^4 \geq 1 > 0$ para todo t, de donde deducimos que no se anula, es decir $\alpha(t)$ es regular.

b) Cálculo de su curvatura y ver que es impar.

Para este apartado veremos que $\alpha(t)$ es la parametrización natural de la gráfica de la función cúbica $f(x) = x^3$.

Esto es $\alpha(t) = (t, f(t))$



Además para este tipo de curvas su curvatura puede calcularse de la expresión:

$$k(t) = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

calculando $f'(t) = 3t^2$ y $f''(t) = 6t$, podemos concluir que

$$k(t) = \frac{6t}{(1 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

como se quería probar.

Finalmente veamos que independientemente del valor de $t \in \mathbb{R}$

$$-k(-t) = -\frac{6(-t)}{(1 + 9(-t)^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6t}{(1 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}} = k(t).$$

c) Simetría de $Img(\alpha)$ respecto del punto $\alpha(0)$

Sea $G(x,y) = (-x,-y)$ para todo $t \in \mathbb{R}^2$ el giro de π radianes respecto del origen.

Observemos que $G\alpha(t) = G(t,t^3) = (-t,-t^3) = \alpha(-t)$, es decir, que el giro lo deja invariante como queríamos ver.

d) Simetría de la imagen por paridad de la función curvatura

Como hipótesis tenemos una curva $\alpha : (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ regular, que además su curvatura cumple $k(t) = -k(-t)$ para todo $t \in (-\epsilon,\epsilon)$.

Consideremos el movimiento rígido M de $\mathbb{R}^2$ que cumple que $M(\alpha(0)) = (0,0)$, que $\overrightarrow{M}_{e_1(0)} = (1,0)$ y que $\overrightarrow{M}_{e_2(0)} = (0,1)$.

Luego la curva $M \circ \alpha : (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es regular y congruente con α, cumple además que que $e_1^{M\circ\alpha}(0) = (1,0)$ y $e_2^{M\circ\alpha}(0) = (0,1)$.
Queremos por tanto probar que para $G(x,y) = (-x,-y)$ la aplicación giro definida en el apartado anterior, la $Img(M \circ \alpha)$ es invariante a un giro de π radianes con centro 0.

Es decir, solo tenemos que ver que

$$G(M \circ \alpha)(-t) = (M \circ \alpha)(t), \text{ para todo } t \in (-\epsilon,\epsilon)$$

Con el fin de simplificar la notación llamaremos a los términos de la ecuación anterior: $\gamma = M \circ \alpha$ y $\beta(t) = G \circ \gamma(-t)$.

Se cumple que

$$\gamma(0) = \beta(0) \tag{1}$$

ya que $G\gamma(0) = \gamma(0)$ al ser el centro de giro.

Además, por la regla de la cadena:

$$\beta'(t) = -G\gamma'(-t) = -G(\gamma'(-t)_x, \gamma'(-t)_y) = -(-\gamma'(-t)_x, -\gamma'(-t)_y) = \gamma'(-t) \tag{2}$$

Donde $\gamma'(t) = (\gamma'(t)_x, \gamma'(t)_y)) \in \mathbb{R}^2$ es una mera notación de un vector como sus respectivas coordenadas.

Luego en el caso particular del origen:

$$\beta'(0) = -G\gamma'(0) = -G(1,0) = -(-1,0) = (1,0) = \gamma'(0)$$

Por lo que $J\beta'(0) = J\gamma'(0)$.

Equivalentemente

$$e_1^\gamma(0) = \frac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|} = \frac{\beta'(0)}{|\beta'(0)|} = e_1^\beta(0)$$
$$e_2^\gamma(0) = Je_1^\gamma(0) = Je_2^\beta(0) = e_2^\beta(0)$$

Comprobemos ahora que la curvatura de γ también cumple la hipótesis del enunciado.

Como $\gamma = M \circ \alpha$, con M movimiento rigído cualquiera distinguiremos si éste es positivo o negativo:

- Si es directo entonces $k_\gamma(t) = k_\alpha(t)$ y bastará con aplicar la hipótesis del problema en la segunda igualdad para ver que

$$-k_\gamma(-t) = -k_\alpha(-t) = k_\alpha(t) = k_\gamma(t), \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

- Si M es un movimiento rígido inverso, entonces $k_\gamma(t) = -k_\alpha(t)$ y de igual forma se tiene que

$$-k_\gamma(-t) = -(-k_\alpha(-t)) = -k_\alpha(t) = k_\gamma(t), \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

De donde deducimos que independientemente del movimiento rígido aplicado

$$-k_\gamma(-t) = k_\gamma(t) \text{ para todo } t \in (-\epsilon, \epsilon). \tag{3}$$

Veamos ahora que $k_\gamma(t) = k_\beta(t)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Observemos ahora además que β es una reparemetrización de γ compuesta con un movimiento rígido directo G. Donde $\phi(t) = -t$ es el difeomorfismo de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\beta = G \circ \gamma \circ \phi$.

La curvatura se mantiene por movimientos rígidos directos, mientras que para reparametrizaciones con derivada negativa ($\phi'(t) = -1 < 0$) es opuesta, se tiene que

$$k_\beta(t) = k_{G\circ\gamma\circ\phi}(t) = k_{\gamma\circ\phi}(t) = -k_{\gamma\circ\phi}(-t)$$

Y en virtud de la igualdad (3)

$$k_\beta(t) = k_\gamma(t)$$

Alternativamente se podía haber usado la definición de curvatura y (2):

$$k_\beta(t) = \frac{a_{12}^\beta(t)}{|\beta'(t)|} = \frac{< \beta''(t), J\beta'(t) >}{|\beta'(-t)|^3} = \frac{< -\gamma''(-t), J\gamma'(-t) >}{|\gamma'(-t)|^3} = -k_\gamma(-t)$$

Y utilizando de nuevo (3) se tendría que $k_\beta(t) = -k_\gamma(-t) = k_\gamma(t)$.

El teorema de unicidad global afirma que existe un único movimiento rígido directo F tal que $\beta = F \circ \gamma$.

Además por (1) sabemos que $F(\gamma(0)) = \beta(0)$ y que $\overrightarrow{F}(e_i^\beta(0)) = e_i^\gamma(0)$ para $i \in \{1, 2\}$. Así que tenemos que F deja fijo un punto y además $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{Id}$.

Por lo que por geometría a fin necesariamente $F = Id$ y que $\gamma = \beta$, es decir hemos probado que es invariante mediante un giro de π radianes respecto $\alpha(0)$:

$$G(M \circ \alpha(-t)) = M \circ \alpha(t) \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

Ejercicio 11

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud del arco y tal que $\alpha''(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, y con $k > 0$, $\tau > 0$. Se considera la curva $\beta(t) = \int_{t_0}^{t} e_3(s)ds$, donde $e_3(t)$ es el vector binormal a α en t.

(a) Comprueba que β está parametrizada por la longitud del arco.

(b) Construye del triedro de Frenet de β.

(c) Calcula las funciones curvatura y torsión, k_β y τ_β.

a) Comprueba que β está parametrizada por la longitud del arco.

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que $\beta'(t) = e_3(t)$, por ser $e_3(t)$ el vector binormal a α en t, su módulo será siempre uno para todo t, luego acabamos de probar que β está parametrizada por la longitud del arco.

b) Construcción del triedro de Frenet de β.

Como observación previa tiene sentido calcularlo por las hipótesis del ejercicio.
Para no confundirnos con el triedro de Frenet de α $\{e_1, e_2, e_3\}$, utilizaré la notación $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ para referirme al triedro de Frenet de β.

Por definición y estar parametrizada sabemos que

$$\epsilon_1(t) = \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = \beta'(t) = e_3(t) \tag{1}$$

Con lo que acabamos de calcular ϵ_1. Por otro lado

$$\tilde{\epsilon_2}(t) = \beta''(t) - < \beta''(t), \epsilon_1(t) > \epsilon_1(t) = e_3'(t) - < e_3'(t), e_3(t) > e_3(t)$$

Gracias a las ecuaciones de Frenet conocemos que $e_3'(t) = -a_{23}e_2$; sustituyendo en la ecuación anterior y teniendo en cuenta la linealidad del producto escalar y la perpendicularidad entre los vectores del triedro de Frenet de α:

$$\tilde{\epsilon_2}(t) = -a_{23}e_2 - < -a_{23}e_2, e_3(t) > e_3(t) = -a_{23}e_2$$

Luego podemos concluir que

$$\epsilon_2 = \frac{\tilde{\epsilon_2}(t)}{|\tilde{\epsilon_2}(t)|} = \frac{-a_{23}e_2}{|-a_{23}e_2|} = -e_2 \tag{2}$$

Finalmente

$$\epsilon_3(t) = \epsilon_1 \times \epsilon_2 = e_3 \times -e_2 = e_1 \tag{3}$$

Gracias a las igualdades (1), (2) y (3) podemos afirmar que el triedro de Frenet de β es $\{e_3, -e_2, e_1\}$.

c) Cálculo de las funciones curvatura y torsión, k_β y τ_β.

Por definición de curvatura, estar α y β parametrizadas por la longitud del y el apartado (b)

$$k_\beta(t) = \frac{a^\beta_{12}(t)}{|\beta'(t)|} =< \epsilon_1'(t), \epsilon_2(t) >=< e_3'(t), -e_2(t) >= -a^\alpha_{32}(t) = a^\alpha_{23}(t) = \tau_\alpha(t)|\alpha'(t)| = \tau_\alpha(t).$$

Veamos ahora la torsión

$$\tau_\beta(t) = \frac{a^\beta_{23}(t)}{|\beta'(t)|} =< \epsilon_2'(t), \epsilon_3(t) >=< -e_2'(t), e_1'(t) >= -a^\alpha_{21}(t) = a^\alpha_{12}(t) = k_\alpha(t)|\alpha'(t)| = k_\alpha(t).$$

Acabamos de calcular que

$$k_\beta(t) = \tau_\alpha(t)$$
$$\tau_\beta(t) = k_\alpha(t).$$