Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Enunciado

Sean X e Y variables aleatorias definidas sobre el el espacio $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tales que existan $E[X^2]$ y $E[Y^2]$ y $E[XY]$. Entonces se cumple

$$(E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2]$$

Además, la igualdad se da si y solo si

- O bien X o Y son degeneradas en 0.
- O bien existen a y b no nulos tales que

$$P(aX + bY = 0) = 1$$

Demostración

Consideremos primero el caso $E[X^2] \neq 0$. Definimos la variable aleatoria $Z = \lambda X + Y$, donde $\lambda = -\frac{E[XY]}{E[X^2]}$. Entonces se cumple

$$E[Z^2] = E[(\lambda X + Y)^2] = E[\lambda^2 X^2 + Y^2 + 2\lambda XY] =$$

$$\lambda^2 E[X^2] + E[Y^2] + 2\lambda E[XY] =$$

$$\frac{E[XY]^2}{E[X^2]} + E[Y^2] - 2\frac{E[XY]^2}{E[X^2]} = E[Y^2] - \frac{E[XY]^2}{E[X^2]}$$

Como $Z^2 \geq 0$, necesariamente tiene que ser $E[Z^2] \geq 0$. Por lo tanto

$$E[Y^2] - \frac{E[XY]^2}{E[X^2]} \geq 0$$

$$(E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2]$$

Quedando probada la desigualdad.

Si $E[X^2] = 0$, como $X^2 \geq 0$ entonces $P[X^2 = 0] = 1$ y $P[X = 0] = 1$. Se sigue que $E[XY] = 0$, por lo que se verifica la desigualdad.

Demostraremos ahora la segunda parte del enunciado. Supongamos que se da la igualdad

$$E[XY]^2 = E[X^2]E[Y^2]$$

Si $E[X^2] = 0$, entonces X es degenerada en 0, y lo mismo ocurre para la Y. Queda considerar entonces cuando ambas esperanzas son no nulas. La igualdad implica $E[Z^2] = 0$, luego $P[Z = 0] = P[\lambda X + Y = 0] = 1$. Faltaría con ver que λ no sea cero. Pero $E[X^2] \neq 0$ y $E[Y^2] \neq 0$, luego $E[XY] \neq 0$ y $\lambda = -\frac{E[XY]}{E[X^2]} \neq 0$. Vamos ahora con el recíproco. Si X o Y son degeneradas la igualdad es evidente. En caso contrario, partimos de que existen a y b no nulos con

$$P(aX + bY = 0) = 1$$

Equivalentemente

$$P(Y = -\frac{a}{b}X) = 1$$

Entonces, se tiene

$$E[Y^2] = \frac{a^2}{b^2}E[X^2]$$

y

$$E[XY] = E[-\frac{a}{b}X^2] = -\frac{a}{b}E[X^2]$$

Comprobamos que se verifica la igualdad.

$$E[XY]^2 = E[X^2]E[Y^2]$$

$$\frac{a^2}{b^2}E[X^2] = E[X^2]\frac{a^2}{b^2}E[X^2]$$

Corolario

En las condiciones anteriores,

$$(Cov(X,Y))^2 \leq Var(x)Var(Y)$$

Además, se da la igualdas si y solo si alguna variable es degenerada o existen a y b no nulos y $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$P(aX + bY = c) = 1$$

Demostración

Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz a $X - E[X]$ y $Y - E[Y]$.

$$(E[(X - E[X])(Y - E[Y])])^2 \leq E[(X - E[X])^2]E[(Y - E[Y])^2]$$

$$(Cov(X,Y))^2 \leq Var(X)Var(Y)$$

Para la segunda parte, si X e Y son no degeneradas, por el teorema anterior si se da la igualdad existen $a, b \neq 0$ con

$$P(a(X - E[X]) + b(Y - E[Y]) = 0) = 1$$

Basta con tomar $c = aE[X] + bE[Y]$. Para el recíproco, partimos ahora de que exiten $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$P(aX + bY = c) = 1$$

Procedemos de manera análoga a la demostración anterior.

$$P(Y = \frac{c - aX}{b}) = 1$$

Luego

$$Var(Y) = E[(Y - E[Y])^2] = E[(\frac{c - aX}{b} - \frac{c - aE[X]}{b})^2]$$

$$= E[(-\frac{a}{b}(X - E[X]))^2] = \frac{a^2}{b^2} Var(X)$$

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = -\frac{a}{b} Var(X)$$

De esta manera se verifica la igualdad.

$$(Cov(X, Y))^2 = Var(X)Var(Y)$$

En el caso de que X e Y sean degeneradas la igualdad es evidente, por lo que queda concluida la demostración.