Propiedades de la esperanza matemática

Blanca Cano Camero, Daniel Krell Calvo

1 de Diciembre del 2019

Consideraciones previas

Definición de la Esperanza matemática

Sea un vector aleatorio n-dimensional:

$$\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^{\ltimes}, \mathcal{B}^{\setminus}, P_x)$$

La esperanza matemática $E[\mathbf{X}]$de $\mathbf{X}$ si existe se define como un vector cuyas componentes son las esperanzas matemáticas de sus componentes aleatorias.

Algunas propiedades de la esperanza matemática unidimensional:

Linealidad si existe $E[\mathbf{X}]$ entontes $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \exists E[a\mathbf{X} + b] = aE[\mathbf{X}] + b$

Demostración de la existencia: - Caso discreto: Por convergencia absoluta de una serie :

$$\sum_{x \in E_x} |ax + b| P[\mathbf{X} = x] + b \leq |a| \sum_{x \in E_x} (xP[\mathbf{X} = x]) + |b| < \infty$$

- Caso continuo: Por convergencia absoluta de la integral

$$\int_{x \in E_x} |ax + b| f_{\mathbf{X}}(x) + b \quad dx \leq |a| \int_{x \in E_x} x f_{\mathbf{X}}(x) dx + |b| < \infty$$

Demostración de la linealidad: Por la linealidad de los operadores suma e integral;

- Caso discreto:

$$\sum_{x \in E_x} (ax + b) P[\mathbf{X} = x] + b = a \sum_{x \in E_x} (xP[\mathbf{X} = x]) + b$$

- Caso continuo

$$\int_{x \in E_x} (ax + b) f_{\mathbf{X}}(x) + b \quad dx = a \int_{x \in E_x} (x f_{\mathbf{X}}(x)) dx + b$$

Propiedades de la esperanza matemática n-dimensional

Linealidad

Se quiere probar que para cualquier $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^{\ltimes}$,

$$\exists E[X_i] \Rightarrow \exists E[a_i X_i + b_i]$$

y además si existe $E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b_i]$ entonces es igual a $\sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i] + b_i$

Demostración La existencia es consecuencia de la definición de esperanza matemática y la linealidad de la esperanza matemática unidimensional de cada una de sus componenetes, que está ya demostrada en consideraciones previas y además aplicando tal linealidad en la variable aleatoria definida como $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b_i$ tenemos que

$$E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b_i] = \sum_{i=1}^{n} (a_i E[X_i] + b_i)$$

Monotomía

Sean X_1 X_2 variabels aleatoria unidimensionales para las cuales existen sendas esperanzas , entontes se tiene que si

$$X_1 \leq X_2 \Rightarrow E[X_1] \leq E[X_2]$$

Demostración

Como la suma de varibles aleatorias es una variable aleatoria podemos definir $Z = X_2 - X_1$

Dada la no negatividad de la esperanza tenemos que $E[Z] > 0$ Aplicando la linealidad de la variable aleatoria

$$E[Z] = E[X_2] - E[X_1] \geq 0 \Rightarrow [X_2] > E[X_1]$$