

Ejercicio 10

Blanca Cano Camero, Daniel Krell Calvo

2 de Diciembre del 2019

Ejercicio 10

Sean X, Y variables con función de densidad

$$f_{(X,Y)}(x,y) = x + y \text{ en } (x,y) \in [0,1] \times [0,1], 0 \text{ en el resto del intervalo.}$$

Calcular

(a) Curvas de regresión de Y/X y X/Y , así como los errores cuadráticos medios asociados.

Curvas de regresión de Y/X y X/Y

La curva de regresión Y/X es $Y = E[Y/X]$ Para ello procederé a calcular las respectivas marginales:

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \int_0^1 (x+y) dy = [xy + \frac{y^2}{2}]_0^1 = x + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ f_y(y) &= \int_0^1 (y+x) dx = [yx + \frac{x^2}{2}]_0^1 = y + \frac{1}{2} & 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

Veamos ahora las condicionadas:

$$f_{x/y=y_0}(x) = \frac{f_{(x,y)}(x, y_0)}{f_y(y_0)} = \frac{x + y_0}{y_0 + \frac{1}{2}}$$

$$f_{y/x=x_0}(y) = \frac{f_{(x,y)}(x_0, y)}{f_x(x_0)} = \frac{x_0 + y}{x_0 + \frac{1}{2}}$$

A partir de las cuales tenemos que

$$E[Y/X] = \int_0^1 y f_{y/x=x_0}(y) dy = \int_0^1 y \frac{x_0 + y}{x_0 + \frac{1}{2}} dy = [\frac{x_0 y^2}{2x_0 + 1} + \frac{y^3}{3(x_0 + \frac{1}{2})}]_{y=0}^{y=1}$$

$$E[Y/X] = \frac{x_0}{2x_0 + 1} + \frac{1}{3(x_0 + \frac{1}{2})} = \frac{3x_0 + 2}{6x_0 + 3}$$

De igual manera

$$E[X/Y] = \int_0^1 x f_{x/y=y_0}(x) dx = \int_0^1 x \frac{y_0 + x}{y_0 + \frac{1}{2}} dx = [\frac{y_0 x^2}{2y_0 + 1} + \frac{x^3}{3(y_0 + \frac{1}{2})}]_{x=0}^{x=1}$$

$$E[X/Y] = \frac{y_0}{2y_0 + 1} + \frac{1}{3(y_0 + \frac{1}{2})} = \frac{3y_0 + 2}{6y_0 + 3}$$

Cálculo del error cuadrático medio

El **ECM** de la curva de regresión X/Y se calcula como como $E[Var(X/Y)] = E[X^2] - E[(E[X/Y])^2]$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 f_x(x) dx = \int_0^1 x^2(x + \frac{1}{2}) dx = \frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned} E[(E[X/Y])^2] &= \int_0^1 E[X/Y = y]^2 f_y(y) dy = \int_0^1 (\frac{3y+2}{6y+3})^2 (y + \frac{1}{2}) dy = \\ &= \int_0^1 \frac{(3y+2)^2}{6^2(y + \frac{1}{2})} dy = \int_0^1 \frac{9y^2 + 12y + 4}{36y + 18} dy = \frac{1}{4} \int_0^1 (y + \frac{5}{6} + \frac{1}{36y + 18}) dy = \\ &= \frac{1}{4} [\frac{y^2}{2} + \frac{5}{6}y + \frac{\log(36y + 18)}{36}]_0^1 = \frac{1}{4} (\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{\log(54)}{36} - \frac{\log(18)}{36}) \simeq 0,34096 \end{aligned}$$

$$E[(E[X/Y])^2] \simeq 0,3508$$

$$ECM = E[Var(X/Y)] = E[X^2] - E[(E[X/Y])^2] = 0.07571$$

Repetimos el proceso para la curva de regresión Y/X .

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2 f_y(y) dy = \int_0^1 y^2(y + \frac{1}{2}) dy = [\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{6}]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned} E[(E[Y/X])^2] &= \int_0^1 E[Y/X = x]^2 f_x(x) dx = \int_0^1 (\frac{3x+2}{6x+3})^2 (x + \frac{1}{2}) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{(3x+2)^2}{6^2(x + \frac{1}{2})} dx = \int_0^1 \frac{9x^2 + 12x + 4}{36x + 18} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (x + \frac{5}{6} + \frac{1}{36x + 18}) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x + \frac{\log(36x+18)}{36} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{\log(54)}{36} - \frac{\log(18)}{36} \right) \simeq 0,34096$$

$$E[(E[Y/X])^2] \simeq 0,3508$$

$$ECM = E[Var(Y/X)] = E[Y^2] - E[(E[Y/X])^2] = 0.07571$$

(b) Las razones de correlación Y/X y X/Y

Las razones de correlación se definen como

$$\eta_{X/Y}^2 = \frac{Var(E[X/Y])}{Var(X)} = 1 - \frac{E[Var(X/Y)]}{Var(X)}$$

Puesto que $E[Var(X/Y)]$ ya la tenemos calculados calcularemos las respectivas varianzas:

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X] = \int_0^1 x f_x(x) dx = \int_0^1 x(x + \frac{1}{2}) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Por consiguiente

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144} \simeq 0,07639$$

Y finalmente

$$\eta_{X/Y}^2 = 1 - \frac{E[Var(X/Y)]}{Var(X)} = 1 - \frac{0.07571}{0.07639} = 0.00890$$

ALGO VA MAL Xd DEBERÍA SER MENOR QUE 1 {#algo-va-mal-xd-debería-ser-menor-que-1 }

(c) Rectas de regresión $X/Y, Y/X$

La recta de regresión Y/X se calcula como:

$$Y = aX - b = E[Y] + a(x - E[x]); \text{ donde } a = \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)}; b = E[Y] - aE[X];$$

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$E[XY] = \int_0^1 \int_0^1 xy f_{(X,Y)}(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) dy dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} dx = \frac{1}{3}$$

(d) Coeficiente de correlación lineal

Queremos calcular

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Solo nos faltaría calcular la covarianza $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$E[XY] = \int_0^1 \int_0^1 xy f_{(X,Y)}(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) dy dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} dx = \frac{1}{3}$$