

## Ejercicio 10

Blanca Cano Camero, Daniel Krell Calvo

22 de Diciembre del 2019

### Ejercicio 10

Sean  $X, Y$  variables con función de densidad

$$f_{(X,Y)}(x, y) = x + y \text{ en } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], 0 \text{ en el resto del intervalo.}$$

Calcular

**(a) Curvas de regresión de  $Y/X$  y  $X/Y$ , así como los errores cuadráticos medios asociados.**

**Curvas de regresión de  $Y/X$  y  $X/Y$**

La curva de regresión  $Y/X$  es  $Y = E[Y/X]$  Para ello procederé a calcular las respectivas marginales:

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \int_0^1 (x + y) dy = [xy + \frac{y^2}{2}]_0^1 = x + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ f_y(y) &= \int_0^1 (y + x) dx = [yx + \frac{x^2}{2}]_0^1 = y + \frac{1}{2} & 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

Veamos ahora las condicionadas:

$$\begin{aligned} f_{x/y=y_0}(x) &= \frac{f_{(x,y)}(x, y_0)}{f_y(y_0)} = \frac{x + y_0}{y_0 + \frac{1}{2}} \\ f_{y/x=x_0}(y) &= \frac{f_{(x,y)}(x_0, y)}{f_x(x_0)} = \frac{x_0 + y}{x_0 + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

A partir de las cuales tenemos que

$$E[Y/X] = \int_0^1 y f_{y/x=x_0}(y) dy = \int_0^1 y \frac{x_0 + y}{x_0 + \frac{1}{2}} dy = [\frac{x_0 y^2}{2x_0 + 1} + \frac{y^3}{3(x_0 + \frac{1}{2})}]_{y=0}^{y=1}$$

$$E[Y/X] = \frac{x_0}{2x_0 + 1} + \frac{1}{3(x_0 + \frac{1}{2})} = \frac{3x_0 + 2}{6x_0 + 3}$$

$$\varphi(x) = \frac{3x + 2}{6x + 3}$$

De igual manera

$$E[X/Y] = \int_0^1 x f_{x/y=y_0}(x) dx = \int_0^1 x \frac{y_0 + x}{y_0 + \frac{1}{2}} dx = [\frac{y_0 x^2}{2y_0 + 1} + \frac{x^3}{3(y_0 + \frac{1}{2})}]_{x=0}^{x=1}$$

$$E[X/Y] = \frac{y_0}{2y_0 + 1} + \frac{1}{3(y_0 + \frac{1}{2})} = \frac{3y_0 + 2}{6y_0 + 3}$$

$$\varphi(y) = \frac{3y + 2}{6y + 3}$$

### Cálculo del error cuadrático medio

El **ECM** de la curva de regresión  $X/Y$  se calcula como como  $E[Var(X/Y)] = E[X^2] - E[(E[X/Y])^2]$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 f_x(x) dx = \int_0^1 x^2(x + \frac{1}{2}) dx = \frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned} E[(E[X/Y])^2] &= \int_0^1 E[X/Y = y]^2 f_y(y) dy = \int_0^1 (\frac{3y + 2}{6y + 3})^2 (y + \frac{1}{2}) dy = \\ &= \int_0^1 \frac{(3y + 2)^2}{6^2(y + \frac{1}{2})} dy = \int_0^1 \frac{9y^2 + 12y + 4}{36y + 18} dy = \frac{1}{4} \int_0^1 (y + \frac{5}{6} + \frac{1}{36y + 18}) dy = \\ &= \frac{1}{4} [\frac{y^2}{2} + \frac{5}{6}y + \frac{\log(36y + 18)}{36}]_0^1 = \frac{1}{4} (\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{\log(54)}{36} - \frac{\log(18)}{36}) \simeq 0,34096 \end{aligned}$$

$$ECM = E[Var(X/Y)] = E[X^2] - E[(E[X/Y])^2] = 0.07571$$

Repetimos el proceso para la curva de regresión  $Y/X$ .

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2 f_y(y) dy = \int_0^1 y^2(y + \frac{1}{2}) dy = [\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{6}]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned}
E[(E[Y/X])^2] &= \int_0^1 E[Y/X = x]^2 f_x(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{3x+2}{6x+3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \\
&= \int_0^1 \frac{(3x+2)^2}{6^2(x+\frac{1}{2})} dx = \int_0^1 \frac{9x^2+12x+4}{36x+18} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(x + \frac{5}{6} + \frac{1}{36x+18}\right) dx = \\
&= \frac{1}{4} \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x + \frac{\log(36x+18)}{36} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{\log(54)}{36} - \frac{\log(18)}{36} \right) \simeq 0,34096
\end{aligned}$$

$$ECM = E[Var(Y/X)] = E[Y^2] - E[(E[Y/X])^2] = 0.07570408$$

### (b) Las razones de correlación $Y/X$ y $X/Y$

Las razones de correlación se definen como

$$\eta_{X/Y}^2 = \frac{Var(E[X/Y])}{Var(X)} = 1 - \frac{E[Var(X/Y)]}{Var(X)}$$

Puesto que  $E[Var(X/Y)]$  ya la tenemos calculado, procederemos con las respectivas varianzas:

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X] = \int_0^1 x f_x(x) dx = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Por consiguiente

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144} \simeq 0,07638889$$

Y finalmente

$$\eta_{X/Y}^2 = 1 - \frac{E[Var(X/Y)]}{Var(X)} = 1 - \frac{0.07571}{0.07639} \simeq 0.00890$$

$$\eta_{X/Y}^2 \simeq 0.008964753515282142$$

Puesto que los cálculos para  $\eta_{Y/X}^2$  son iguales que para  $\eta_{X/Y}^2$  podemos afirmar que:

$$\eta_{Y/X}^2 \simeq 0.008964753515282142$$

Nota: El ajuste no es muy bueno, ya que  $\eta_{X/Y}^2$  es prácticamente 0.

### (c) Rectas de regresión $X/Y, Y/X$

La recta de regresión  $Y/X$  se calcula como:

$$Y = aX - b = E[Y] + a(x - E[x]); \text{ donde } a = \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)}; b = E[Y] - aE[X];$$

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$E[XY] = \int_0^1 \int_0^1 xy f_{(X,Y)}(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) dy dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} dx = \frac{1}{3}$$

Por consiguiente

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{-1}{144}$$

Y la recta de regresión  $Y/X$  es:

$$\varphi(x) = \frac{7}{12} - \frac{1}{11}\left(x - \frac{7}{12}\right) = -\frac{1}{11}x + \frac{917}{132}$$

Por la simetría de los cálculos tenemos que la recta de regresión  $X/Y$ :

$$\varphi(y) = -\frac{1}{11}y + \frac{917}{132}$$

### (d) Coeficiente de correlación lineal

Queremos calcular

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{-1}{11} \simeq -0,09090909$$

### Consideraciones del coeficiente de correlación lineal

Sabemos que  $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

- Si  $\rho = 1$ , existe una correlación positiva perfecta. El índice indica una dependencia total entre las dos variables denominada relación directa.
- Si  $0 < \rho < 1$ , existe una correlación positiva.
- Si  $\rho = 0$ , no existe relación lineal. Pero esto no necesariamente implica que las variables son independientes: pueden existir todavía relaciones no lineales entre las dos variables.

- Si  $-1 < \rho < 0$ , existe una correlación negativa.
- Si  $\rho = -1$ , existe una correlación negativa perfecta. El índice indica una dependencia total entre las dos variables llamada relación inversa: cuando una de ellas aumenta, la otra disminuye en proporción constante.