Ejercicio: Extra teórico tema 1

Sea $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ continua y T-periódica dondde $T > 0$ y sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ la matriz fundamental principal en $t = 0$ de la EDO lineal homogénea

$$(*)x' = A(t)x.$$

Prueba:

1. Prueba que existe una matriz M, llamada matriz de monondromía, tal que $\phi(t + T) = \phi(t)\dot{M}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. Prueba que (*) es asintóticamente estable sii $\lim_{n\longrightarrow\infty} M^n = 0$.
3. Prueba que (*) es estable sii $\{M^n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotada.
4. Los valores propios de M reciben el nombre de multiplicadores de Floquet ¿Puedes caracterizar la estabilidad, inestabilidad y estabilidad asintótica de (*) en función de los multiplicadores de Floque?

0.1. Existencia matriz de monodromía

Por ser matriz fundamental sabemos que es invertible y además cumple que $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$ despejamos $A(t) = \phi'(t)\phi^{-1}(t)$ (1).

Utilizando ahora la $T-$periodicidad tenemos que $\phi'(t + T) = A(t + T)\phi(t + T) = A(t)\phi(t + T)$ (2).

Sustituyendo el valor de $A(t)$ de (1) en (2) llegamos a que :

$$\phi'(t + T) = \phi'(t)\phi^{-1}(t)\phi(t + T)$$

Multiplicando a la izquierda por la inversa de $\phi'(t)\phi^{-1}(t)$

$$\phi(t)\phi'(t)^{-1}\phi'(t + T) = \phi(t + T)$$

Si llamamos $M = \phi'(t)^{-1}\phi'(t + T)$ acabamos de encontrar la matriz de monodromía buscada.

0.2. Prueba que (*) es asintóticamente estable sii $\lim_{n\longrightarrow\infty} M^n = 0$.

Veamos primero la siguiente observación:

Cuando t es lo suficientemente grande, podemos escribir $t = t_0 + nT$ con $t_0 \in [0, T)$ y $n \in \mathbb{N}$.

De donde podemos ver que:

$$\phi(t) = \phi(t_0 + nT) = \phi(t_0 + (n - 1)T)M = \phi(t_0)M^n$$

Recordemos ahora caracterización equivalente de asintóticamente estable:

(*) será asintóticamente estable (un atractor) si la matriz fundamente de (**) converge hacia 0 cuando t tiende a infinito.

Como no tiene porqué darse el caso trivial de que $\phi(t_0) = 0$ para todo $t_0 \in [0, T)$, entonces necesariamente (y suficientemente) $\lim_{n\longrightarrow\infty} M^n = 0$ sii $\lim_{t\longrightarrow} \phi(t) = 0$

0.3. Prueba que (*) es estable sii $\{M^n : n \in N\}$ es acotada.

Recordemos que por las equivalencias de estabilidad, (*) será estable sii la matriz fundamental está acotada en $[0,\infty)$ (La estabilidad es invariante del punto seleccionado como extremo inferior, por ello he seleccionado el 0).

Sabemos que $\phi(t_0)$ está acotada en $t \in [0,T]$ por ser compacto.

Teniendo presente la observación anterior:

Para $t > 0$ podemos escribir $t = t_0 + nT$ con $t_0 \in [0,T)$ y $n \in \mathbb{N}$.

$$\phi(t) = \phi(t_0)M^n$$

Ya hemos visto que $\phi(t_0)$ está acotada, luego $\phi(t)$ estará acotada si y solo si $\{M^n : n \in \mathbb{N}\}$ lo está.

0.4. Caracterización de la estabilidad, inestabilidad y estabilidad asintótica de (*).

En los apartado 2 y 3 de la demostración ya hemos caracterizado la estabilidad y la estabilidad asintótica en función de M.

A partir de sus valores propios podemos ver $M = PJP^{-1}$ donde J es una matriz de Jordan y P su respectiva matriz de paso. Además $M^n = PJ^nP^{-1}$.

Podemos pues ligar el compartamiento asintótico de M^n al de J^n que depende exclusivamente de los valores propios de M.

Recordemao que si J_m una caja de jordan de la forma:

$$J_m = \begin{bmatrix} a & 1 & ... & .. & 0 \\ 0 & a & 1 & ... & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & ... & .. & 0 & a \end{bmatrix}_{m\times m}$$

Entonces con $\mathcal{X}_{n-(m-fila)>0}$ la función característica.

$$J_m^n = \begin{bmatrix} a^n & a^{n-1}n & & .. & \frac{a^{n-(m-1)}(n+m-fila)!}{(m-1)!}\mathcal{X}_{n-(m-fila)>0} \\ 0 & a^n & a^{n-1}n & ... & \frac{a^{n-(m-fila)}(n+m-fila)!}{(m-fila)!}\mathcal{X}_{n-(m-fila)>0} \\ & & ... & & \\ 0 & ... & .. & 0 & a^n \end{bmatrix}_{m\times m}$$

Asintóticamente los componentes de la matriz triangular superior dependen esclusivamente de a.

Finalemente y para estudiar el caso complejo podemos pensar los valores en su forma polar $\lambda = re^{i\theta}$ y está claro que $\lambda^n = r^n e^{in\theta}$. Donde $r = |\lambda|$ es el módulo, θ el ángulo que forman y n un número natural. Como la exponencial compleja nunca se anula, necesariamente el valor asíntótico también dependerá del módulo.

1. **Estabilidad asintótica.** Si M^n tiende a la matriz 0 cuando n tiende a infinito o equivalentemente si J^n tiende a la matriz 0 cuando n tiende a infinito.
   Esto será si $|\lambda| < 1$ para todo $\lambda \in \sigma(M)$.

2. **Estabilidad** Si $\{M^n : n \in N\}$ está acotada o quivalentemente si $\{J^n : n \in N\}$ está acotada.
   Esto será si $|\lambda| \leq 1$ para cualquier $\lambda \in \sigma(M)$.

3. **Inestabilidad** Teniendo en cuenta los casos anteriores esto será si existe un valor propio de M con módulo estrictamente mayor que uno.