Métodos Numéricos II: Grado en Matemáticas (UGR). Curso 14/15

Relación de Ejercicios: *Resolución numérica de ecuaciones no lineales*

1 Encuentre el punto (x, y) del plano en el que se cortan las gráficas de las funciones $y = x^2 - 2$, $y = \mathrm{e}^x$, para $x < 0$, con cinco dígitos correctos.

2 Demuestre que para encontrar la raíz r–ésima de un número a, la fórmula iterativa del método de Newton–Raphson puede expresarse de la siguiente forma

$$x_{n+1} = \frac{1}{r}\left[(r-1)\cdot x_n + \frac{a}{x_n^{r-1}}\right].$$

¿Cuántas iteraciones es necesario realizar para calcular $25^{1/3}$ con diez dígitos correctos? Como aplicación calcule $25^{1/3}$ con diez dígitos correctos.

3 En 1224 Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, trató de hallar una raíz de la ecuación $x^3 + 2\,x^2 + 10\,x = 20$.

a) Demuestre rigurosamente que la ecuación anterior tiene una única raíz real.

b) Proporcione un intervalo de longitud menor o igual a 1 en el que se encuentre la única raíz real de la ecuación anterior.

c) Proporcione la expresión algebraica explícita de la iteración de Newton–Raphson aplicada a la ecuación anterior.

d) Proporcione el valor la única raíz real de la ecuación anterior con 32 cifras decimales correctas.

4 *a*) Determine el valor de los parámetros a y b para que la sucesión generada iterativamente por

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{a} + \frac{b}{x_n},$$

converja cuadráticamente a $\sqrt{2}$, tomando x_0 apropiado.

b) Determine que relación existe entre el método obtenido en el apartado anterior y el método proporcionado por la aplicación del método de Newton–Raphson para el cálculo de $\sqrt{2}$.

c) ¿ Cuantas veces será necesario aplicar el método del primer apartado para obener 32 cifras decimales correctas de dicha raíz ?

5 Sea $f(x)$ una función suficientemente regular en un intervalo $[a, b]$. Sea $s \in (a, b)$ una solución de la ecuación $f(x) = 0$. Si $f'(s) = 0$, esto es, s es una raíz múltiple, entonces existe $m \geq 2$ tal que $f(x) = (x-s)^m\, q(x)$, con $q(s) \neq 0$. En este caso, el método de Newton–Raphson puede fallar.

a) Pruebe que el método de Newton–Raphson converge linealmente.

b) Se define la función

$$g(x) = x - m\,\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Demuestre que el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a s con orden de convergencia al menos cuadrático.

c) Aplique el método definido en el apartado anterior a la función $f(x) = x^4 - 4\,x^2 + 4$, con $m = 2$, y obtenga x_2 partiendo de $x_0 = 1$.

6 Una espira conductora sometida a un campo magnético gira hasta que el ángulo θ verifica la ecuación:

$$\theta - 1/2\,\mathrm{sen}(2\,\theta) = 2{,}5,$$

donde θ está medido en radianes. Se desea determinar el valor de θ utilizando el método de Newton–Raphson.

a) Demuestre rigurosamente que la ecuación anterior posee una única raíz real.

b) Obtenga un intervalo en el cual se encuentre la solución, y proporcione un punto inicial adecuado para garantizar (mediante justificación teórica) la convergencia del método propuesto.

c) Calcule el ángulo θ de parada con un error absoluto inferior a 0,00001.

7 Considere la ecuación $0{,}05x^2 - 0{,}7x + 0{,}6 + \ln x = 0$.

a) Determine exactamente cuántas raíces reales posee, y obtenga intervalos disjuntos que las contengan.

b) Proporcione una función $F(x)$ cuyos únicos puntos fijos sean dichas raíces, y tal que el método iterativo $x_{n+1} = F(x_n)$ sea localmente convergente para ellas, con velocidad al menos cuadrática.

c) Considerando la mayor de dichas raíces, ¿cómo habrá que elegir el punto inicial x_0 en el método iterativo anterior para poder garantizar la convergencia ? ¿Cuántas veces será necesario aplicarlo para obener 32 cifras decimales correctas de la raíz?

8 *a*) Demostrar que la ecuación $\cos x = 2 - 3x$ posee una única solución real. Determinar un intervalo de longitud no nayor que uno que contenga a dicha raíz.

b) Construir un método de punto fijo que, tras la elección adecuada del punto inicial, converja cuadráticamente a la única raíz de la ecuación $\cos x = 2 - 3x$. ¿ Cómo podemos garantizar la convergencia ? ¿ Cuantas veces será necesario aplicarlo para obener 32 cifras decimales correctas de dicha raíz ?

9 *a*) Construya una función $f(x)$ que permita definir una fórmula de iteración de Newton para calcular $\sqrt[3]{R}$ donde $R > 0$. Realice un análisis gráfico de la función $f(x)$ para determinar cuáles son los puntos iniciales para los que la iteración converge.

b) Demuestre que el siguiente método iterativo tiene orden de convergencia cúbico para calcular $\sqrt{R}$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3R)}{3x_n^2 + R}$$

10 *a*) Determine a, b, y c para que el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + a)}{bx_n^2 + c},$$

converja cúbicamente a $\sqrt{2}$.

b) Si se aplica el método anterior con valor inicial $x_0 = 1$, ¿cuántas iteraciones serán necesarias, cómo mínimo, para conseguir 50 cifras correctas ?

11 Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ para la cual se sabe que la ecuación de punto fijo

$$x = F(x)$$

posee una solución s tal que $F'(s) < 1$.

a) Justifique que esta condición no implica que el método iterativo

$$x_{n+1} = F(x_n) \tag{1}$$

sea localmente convergente.

b) Para acelerar la convergencia del método (1) se considera un valor fijo $\alpha \in]0, 1[$ y se construye el método iterativo

$$x_{n+1} = (1 - \alpha)x_n + \alpha F(x_n) \tag{2}$$

Determine para qué valores del parámetro $\alpha \in]0, 1[$ el método (2) converge localmente a la solución s.

c) Supongamos ahora que $F'(s) < 0$, determine para que valores de $\alpha \in]0, 1[$ el método (2) converge localmente a la solución s más rapidamente que el método (1). Determine el valor óptimo del parámetro α.

12 Se propone el método iterativo $x_{n+1} = F(x_n)$, donde $F(x) = \sqrt{(1 + x)}$.

a) Demuestre la existencia de un punto fijo s de la función de iteración F entre 1 y 3.

b) Demuestre rigurosamente que no hay más puntos fijos de F entre 1 y 3 que el referido en el anterior apartado.

c) Justifique razonadamente si el método propuesto es localmente convergente hacia s. En tal caso, obtenga y explique el orden de convergencia del método.

d) Estime cuántas iteraciones del método anterior serán necesarias para conseguir 15 decimales correctos para s.

13 La ecuación logística $x = a\,x(1-x)$, con $a > 0$, es una ecuación de punto fijo cuyas iteraciones se utilizan para modelizar el comportamiento de una población cuyo crecimiento está limitado.

a) Determine el valor exacto de los puntos fijos de la ecuación logística.

b) ¿ Para qué valores de a son atractores los puntos fijos ? (Nota: un punto fijo se dice que es un atractor si existe al menos una sucesión de valores generados por el método iterativo que convergen hacia él).

c) ¿ Para que valor de a las iteraciones convergen cuadráticamente?

d) Para $a = 3{,}2$, calcule las primeras iteraciones del método de punto fijo, partiendo de $x_0 = 0{,}5$. ¿ Qué puede observarse en esta tabla de valores ? Comente el resultado y muestre gráficamente el comportamiento de la sucesión.

14 Nos ofrecen un préstamo de 18000 euros, a devolver en 60 mensualidades de 360 euros. Llamando C al importe del préstamo, N al número de pagos, a al importe del plazo e i al tipo de interés por periodo, se verifica la siguiente ecuación

$$Cr^N = a\frac{r^N - 1}{r - 1}$$

donde $r = 1 + i$.

Construya un método de punto fijo que, tras tomar como estimación inicial $r = 1{,}1$, converja cuadráticamente y permita estimar el interés del crédito. Obtenga el valor del interés con 5 cifras significativas.

15 Se considera la ecuación de punto fijo $x = F(x)$ con

$$F(x) = \frac{1}{2 + x}$$

a) Escriba el método iterativo que genera la ecuación de punto fijo $x = F(x)$, partiendo del valor inicial $x_0 = \frac{1}{2}$.

b) Demuestre que el método converge linealmente al único punto fijo de la ecuación $x = F(x)$ que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.

c) Utilice los apartados anteriores para determinar el valor de la "fracción continua"

$$c = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}.$$

16 El presente problema pretende estudiar el **método de Steffensen** para la resolución de ecuaciones no lineales. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real suficientemente regular y sea $s \in (a, b)$ la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Supongamos además que $f'(x)$ no se anula en $[a, b]$. Se define la función $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la expresión

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)} & x \neq s \\ \\ \lim\limits_{x \to s} \dfrac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)} & x = s. \end{cases}$$

a) Utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que $g(s) = f'(s)$.

b) Demuestre que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

c) Se define la función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Demuestre que $F(s) = F'(s) = 0$.

d) A partir de los apartados anteriores, encuentre condiciones suficientes para que el método de iteración funcional definido por

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{f(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$$

converja localmente a s, con velocidad de convergencia al menos cuadrática.

17 Se desea construir un método iterativo con convergencia local al menos cúbica, para aproximar $\sqrt{k}$, $k \in \mathbb{R}^+$.

a) Pruebe que los métodos iterativos $x_{n+1} = F_1(x_n)$ y $x_{n+1} = F_2(x_n)$ donde

$$F_1(x_n) = \frac{x_n^2 + k}{2\,x_n}, \qquad F_2(x_n) = \frac{x_n(3\,k - x_n^2)}{2\,k},$$

tienen orden de convergencia cuadrático, tomando x_0 apropiado.

b) ¿Existen constantes α y β para las que el método iterativo

$$x_{n+1} = \alpha\, F_1(x_n) + \beta\, F_2(x_n),$$

tiene orden de convergencia cúbico? Explique el resultado.

18 Se considera la ecuación de punto fijo:

$$x = \pi + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right).$$

a) Demuestre rigurosamente que existe una única solución real de dicha ecuación, y proporcione un intervalo en el que esté contenida dicha raíz.

b) Demuestre rigurosamente que la iteración de punto fijo es convergente. Indique el orden de convergencia.

c) Obtenga por dicho método la solución con error menor que $\epsilon = 10^{-4}$, tomando como punto inicial $x_0 = 0,0$.

d) ¿Cuántos pasos se habrían necesitado con el método de bisección para asegurar un error absoluto menor que el ϵ dado?

19 Para el estudio del movimiento de los cuerpos celestes con órbitas elípticas, es necesario resolver la ecuación de Kepler

$$x - \varepsilon\,\mathrm{sen} x = \mu,$$

donde x representa la anomalía excéntrica, y son conocidas la excentricidad de la órbita $\varepsilon \sim 0,96$ y la anomalía media $\mu = 4,5 \times 10^{-3}$.

a) Demuestre rigurosamente que la ecuación anterior posee una única raíz real y positiva.

b) Obtenga un método de punto fijo (distinto del método de Newton–Raphson), y demuestre que converge hacia la única solución. Determine el orden de convergencia. Proporcione cinco iteraciones partiendo de un valor inicial apropiado.

20 En las profudas y oscuras galerías de las minas de Moria, Frodo y el resto de sus compañeros de la Comunidad del Anillo corren, huyendo de los orcos, por una galería de apenas 6 pasos de ancha. Arrastran una larga escalera que necesitarán para atravesar el abismo del puente de Kazhad–dûm. De repente, el camino gira a la izquierda en ángulo recto.

- ¡La escalera no pasa, señor Frodo!

- ¿Cuanto mide la nueva galería Sam?

- ¡Sólo cuatro pasos!

- Puedo ampliar la galería - gruñó Gimli blandiendo su hacha.

- ¡No hay tiempo, los orcos se acercan!

- Pues cortemos la escalera - volvió a gruñir Gimli acariciando el filo del hacha.

- ¡Gandalf! ¡Necesitamos saber cual es el tamaño máximo de la escalera! ¡Pero de una forma rápida!

- Los orcos se acercan ... - murmuró Frodo contemplando el espectral brillo azulado de Dardo.