Métodos Numéricos II. Curso 2014/15

Grado en Matemáticas. Segundo curso

Relación de Ejercicios: Derivación e Integración Numérica

1 Sabiendo que la longitud de una curva $y = f(x)$ definida sobre un intervalo $[a, b]$ viene dada por la expresión

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

determine el número mínimo de subintervalos para aproximar la longitud de la curva dada por la función $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi/4]$ usando la fórmula del trapecio compuesta, de modo que el error cometido sea inferior a 10^{-2}.

2 Calcule una aproximación a $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ utilizando los datos $f(0)$, $f'(1)$ y $f''(1)$ que sea exacta en $\mathcal{P}_2$. ¿Es exacta en $\mathcal{P}_3$?

3 Se considera la *fórmula del trapecio corregida*

$$\int_a^b f(x)dx \approx a_0\, f(a) + a_1\, f(b) + a_2\, f'(a) + a_3\, f'(b).$$

a) Obtenga los coeficientes a_0, a_1, a_2 y a_3 para que sea de tipo interpolatorio.

b) Determine el error.

c) Deduzca la fórmula compuesta, y la expresión del error.

4 Estime en cuántos subintervalos hay que dividir $[0, 1]$ para calcular la integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con seis dígitos exactos (esto es, con error menor que $0,5 \times 10^{-6}$) usando la fórmula del trapecio compuesta, y la fórmula de Simpson compuesta.

5 La siguiente fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i\, f(x_i),$$

se llama de *Chebyschev* si es exacta en $\mathcal{P}_{n+1}$ y $a_0 = a_1 = \cdots = a_n$. Encuentre la fórmula para $n = 1$ (S. Bernstein demostró que no es posible para $n = 7$ ni para $n \geq 9$).

6 Se considera la fórmula de integración numérica

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}\, f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\, f(0) + \frac{5}{9}\, f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

a) Demuestre que es una fórmula de cuadratura gaussiana.

b) Modifíquela para que sea posible calcular $\int_a^b f(x)dx$.

c) Use la fórmula anterior para calcular $\int_0^2 e^{x^2} dx$ y acote el error.

7 Halle los coeficientes y los nodos de las fórmulas

a) de Gauss–Legendre para $n = 2$,

b) de Gauss–Chebyshev para $n = 1$.

8 ¿Es gaussiana la fórmula siguiente

$$\int_{-1}^{1} x^2\, f(x)\, dx \approx \frac{1}{3}\, f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2}{3}\, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) ?$$

9 Estudie la exactitud de las fórmulas de derivación numérica

$$\begin{aligned} f'(c) &\sim \frac{1}{2\,h}\,[-3\,f(c) + 4\,f(c+h) - f(c+2h)] \\ f''(c) &\sim \frac{1}{h^2}\,[f(c) - 2\,f(c+h) + f(c+2h)]\,. \end{aligned}$$

Usando la serie de Taylor, proporcione las expresiones para los errores de las fórmulas anteriores.

10 Se considera la fórmula de integración numérica

$$\int_a^b f(x)dx \sim a_0\, f\Big(\frac{2a+b}{3}\Big) + a_1\, f\Big(\frac{a+2b}{3}\Big). \tag{1}$$

a) Determine los coeficientes a_0 y a_1 para que la fórmula anterior sea de tipo interpolatorio.

b) Indique el grado de exactitud de la fórmula anterior. ¿Es el grado de exactitud superior al esperado?

c) Construya la fórmula de integración numérica compuesta asociada a (1).

11 *a*) Determine los valores de las constantes α, β y γ que hacen que la fórmula de integración numérica

$$\int_0^{3h} f(x)dx \simeq \alpha f(0) + \beta f(h) + \gamma f(3h) \qquad (h > 0),$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

b) Aplique dicha fórmula para el cálculo de $\int_0^3 x^2\, e^x dx$.

c) ¿Es el grado de exactitud de la fórmula obtenida en a) superior al esperado?

12 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & 0,0 \le x < 0,1; \\ 1,001 + 0,03\,(x - 0,1) + 0,3\,(x - 0,1)^2 + 2\,(x - 0,1)^3, & 0,1 \le x < 0,2; \\ 1,009 + 0,15\,(x - 0,2) + 0,9\,(x - 0,2)^2 + 2\,(x - 0,2)^3, & 0,2 \le x \le 0,3. \end{cases}$$

a) Estudie la clase de $f(x)$.

b) Estime $\int_0^{0,3} f(x)\, dx$ usando la regla del trapecio compuesta con $N = 6$, y estime el error.

c) Estime $\int_0^{0,3} f(x)\, dx$ usando la regla de Simpson compuesta con $N = 6$. ¿Son mejores los resultados?

13 Se considera la fórmula de integración numérica:

$$\int_0^1 f(x)dx = Af(x_0) + 2Af(x_1) + R(f).$$

Se desea ver cuales son los puntos x_0, x_1 del intervalo $[0, 1]$ y cual es el valor de A para que esta fórmula alcance el mayor grado de exactitud, indicando cuál es éste. (No es necesario suponer $x_0 < x_1$).

14 Se desea calcular la integral de la función $f(x) = e^x$ entre $x = 1,8$ y $x = 3,4$ usando la fórmula del trapecio compuesta de forma que sea correcta hasta cinco cifras decimales (error$<$ 0,000005). ¿Cómo hay que elegir h? ¿Cuánto vale la integral?

15 Se pretende encontrar una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio en $[-1, 1]$, usando los puntos x_0, x_1 y 0, y que alcance orden de exactitud máximo. Construya dicha fórmula.

16 *a*) Estudie el grado máximo de exactitud que puede tener una fórmula de integración numérica del tipo:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq a_0 f(\alpha) + a_1 f(0) + a_2 f(1/2)$$

y construya una de ese grado. ¿Es única?

b) Para la fórmula construida anteriormente, proporcione la expresión del error.

17 Dada la fórmula de integración numérica

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, x^2 dx \simeq a_0 f(-1) + a_1 f(1),$$

a) Obtenga los coeficientes a_0 y a_1 para que la fórmula sea de tipo interpolatorio.

b) Proporcione una expresión para el error.

c) Aplique dicha fórmula para estimar el valor de la integral

$$\int_{-1}^{1} x^2\, e^x dx.$$

Compare con el valor exacto.

18 Dada la tabla de valores

i	0	1	2	3	4	5	6
x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
$f(x)$	0,9588	0,8415	0,6650	0,4546	0,2394	0,047	-0,1002

se pide

a) aproxime la derivada de la función en todos los nodos usando fórmulas de tres puntos. Si la función de la que provienen los datos es $f(x) = \sin(x)/x$, proporcione cotas teóricas para el error cometido.

b) estime $f''(x_2)$. Justifique la aproximación.

19 Calcule el número de subintervalos N que se necesitan para aproximar la integral

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x+2} dx$$

con un error menor o igual a 10^{-6} usando las fórmulas compuestas del trapecio y de Simpson. Compare los resultados.

20 En el presente ejercicio se pretende deducir una fórmula de derivación numérica del siguiente tipo

$$f'(a) \approx \alpha f(a) + \beta f(a-2h) + \gamma f(a-3h).$$

a) Deduzca el valor de los coeficientes α, β y γ para que la fórmula anterior sea de tipo interpolatorio.

b) Calcule el error de dicha aproximación.

(septiembre, 2013)

21 A veces, para construir fórmulas de resolución numérica de Problemas de Valores Iniciales es corriente utilizar nodos que se encuentran fuera del intervalo de integración. Considere la fórmula:

$$\int_{a}^{a+h} f(x)\, dx \simeq a_0\, f(a-h) + a_1\, f(a). \qquad (2)$$

a) Determine los valores de los coeficientes a_0, a_1, para que la fórmula de cuadratura alcance el grado máximo de exactitud.

b) Proporcione una expresión para el error de integración numérica asociado a la fórmula (2).

c) Construya la fórmula compuesta y el error asociado.

(mayo, 2013)