TEMA II

APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

En este tema se aborda uno de los temas clásicos del Cálculo Numérico, como es el de aproximación de funciones por otras más simples como pueden ser polinomios o funciones trigonométricas.

2.1. Teorema de Aproximación de Weierstrass mediante polinomios de Bernstein.

Enunciado: Si $f(x)$ es continua y acotada en el intervalo finito $[a, b]$, dado cualquier $\varepsilon>0$, existe un número entero n y un polinomio de grado n, $P_n(x)$, que cumple

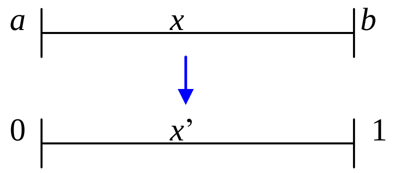
$$|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon, \quad \forall\ x\in[a,b].$$

Es decir, podemos aproximar una función mediante un polinomio tanto como queramos.

Demostración: Nuestra demostración se debe a Bernstein (1.912).

1ª consideración: Sin perder generalidad, consideraremos el intervalo [0,1] en lugar del genérico $[a, b]$, ya que cualquier intervalo genérico $[a, b]$ se puede reducido al intervalo [0,1], por simple cambio de variable.

Veamos esta última afirmación. Si tenemos una variable x que se mueve entre a y b, podemos definir una variable x' que se mueva entre cero y uno.



Para esto definimos x' mediante la relación lineal con x, $x'=Ax+B$, donde A y B son dos constantes a determinar, que obtendremos de imponer que cuando $x=a \Rightarrow x'=0$, y que cuando $x=b \Rightarrow x'=1$; es decir

$$\left\{\begin{array}{l} x' = Ax+B \\ con\left\{\begin{array}{l} x'=0 \Rightarrow x=a \\ x'=1 \Rightarrow x=b \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x'=0 \Rightarrow 0 = Aa+B \Rightarrow B = -aA \\ x'=1 \Rightarrow 1 = Ab+B \Rightarrow 1 = Ab-aA = \\ A(b-a)=1 \Rightarrow A=\dfrac{1}{b-a} \Rightarrow \\ B=\dfrac{-a}{b-a} \Rightarrow x'=\dfrac{x-a}{b-a}, \\ \text{o bien, despejando } x \Rightarrow\ x=a+x'(b-a) \end{array}\right.$$

2ª consideración. Lema:

Son ciertas, las siguientes identidades:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = x$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = (1-\frac{1}{n})x^2+\frac{1}{n}x$$

Por combinación de las tres expresiones anteriores, puede obtenerse

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

Demostración del lema:

Para cualquier x e y se cumple la fórmula binomial

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \qquad (1)$$

También serán válidas las derivadas primera y segunda, respecto de x, de la expresión anterior. Derivando una vez respecto de x:

$$n\,(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k\,x^{k-1}\,y^{n-k}$$

Multiplicando, a izquierda y derecha, la expresión anterior por $\left(\frac{x}{n}\right)$:

$$x(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k y^{n-k} \qquad (2)$$

Derivando, de nuevo, la expresión anterior respecto de x:

$$(x+y)^{n-1}+x(n-1)(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}k\,x^{k-1}y^{n-k}$$

Y multiplicando, de nuevo, a la izquierda y derecha por $\left(\frac{x}{n}\right)$:

$$\frac{x}{n}(x+y)^{n-1}+x^2\frac{(n-1)}{n}(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k^2}{n^2}x^k y^{n-k} \qquad (3)$$

Si las expresiones (1), (2) y (3), son válidas para cualquier x e y, también serán válidas las particularizaciones para x e y que cumplan $x+y=1$.

Con $x+y=1\Rightarrow$

$$(1) \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

$$(2) \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x$$

$$(3) \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (1-\frac{1}{n})x^2 + \frac{1}{n}x$$

que son las tres primeras expresiones que queríamos obtener. Si combinamos estas expresiones, en la forma

3ª expresión- (2x) 2ª expresión + (x^2) 1ª expresión $\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} - 2x\frac{k}{n} + x^2 \right) \left[\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= (1-\frac{1}{n})x^2 + \frac{x}{n} - 2x^2 + x^2 = x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n} - 2x^2 + x^2 = \frac{x}{n}(1-x)$$

que es la última expresión que queríamos demostrar.

3ª consideración: El polinomio de Bernstein de grado n se define como:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$$

siendo k un contador cuyo valor máximo es n, $k = 0,..., n \Rightarrow \frac{k}{n} \in [0,1]$. El polinomio de Bernstein se define en el intervalo [0, 1] y está ligado a una determinada función $f(x)$.

Última fase: Con las tres consideraciones anteriores, podemos demostrar el teorema. Para esto, multiplicamos la primera de las identidades por $f(x)$ y restamos $B_n(x)$:

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Como la función $f(x)$ es continua y acotada en [0,1] $\Rightarrow$

$f(x)$ continua $\Rightarrow$ $\exists \delta \,/\, |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$, si $|x_1 - x_2| < \delta$; $\quad x_1, x_2 \in [0, 1]$

$f(x)$ acotada $\Rightarrow$ $|f(x)| < M$; $\quad x \in [0, 1]$

donde ε es el dado en el enunciado del teorema.

- Para cualquier x, dividimos los puntos k (k =0, 1, 2,..., n) en dos conjuntos a los que llamamos A y B, tales que

$$k \in A \quad \text{si} \quad \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$$

$$k \in B \quad \text{si} \quad \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$$

De esta forma la sumatoria que aparece a la derecha de $f(x)-B_n(x)$ puede ser expresada como

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}[\ldots] = \sum_{k\in A}[\ldots] + \sum_{k\in B}[\ldots]$$

- El módulo de la sumatoria sobre los k incluidos en A será

$$\left|\sum_{k\in A}\left[f(x) - f(\frac{k}{n})\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in A}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ya que por estar en el conjunto A, $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(\frac{k}{n})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ y donde hemos hecho uso de la primera identidad que demostramos en el lema de la 2ª consideración. En definitiva

$$\left|\sum_{k\in A}\left[f(x) - f(\frac{k}{n})\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- Nos centramos ahora en la sumatoria de los elementos k pertenecientes al conjunto B:

$$\left|\sum_{k\in B}\left[f(x) - f(\frac{k}{n})\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| < 2M\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

ya que si $\left|f(x)\right| < M \Rightarrow \left|f(x) - f(\frac{k}{n})\right| < 2M$.

Multiplicamos y dividimos el miembro derecho de la desigualdad por $\left(\frac{k}{n} - x\right)^2$, con la finalidad de hacerlo igual a la última expresión que demostramos en la 2ª consideración. Como estamos con el conjunto B, $\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \geq \delta^2 \Rightarrow$

$$\left|\sum_{k\in B}\left[f(x) - f(\frac{k}{n})\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| < 2M\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{(\frac{k}{n} - x)^2}{\underbrace{(\frac{k}{n} - x)^2}_{\geq\delta^2}} \leq$$

$$\leq \frac{2M}{\delta^2}\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \leq \frac{2M}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n}$$

donde para realizar la última desigualdad hemos tenido en cuenta la cuarta identidad, obtenida en la 2ª consideración, como combinación lineal de las tres identidades primeras.

Para proseguir adelante, analizamos la función $x(1-x)$ que aparece en el último término, y a la que vamos a llamar $g(x)$.

$$g(x) = x(1-x) \qquad x \in [0,1]$$

La función es nula en los extremos del intervalo:

$$g(0) = 0 \quad \text{y} \quad g(1) = 0$$

La derivada de la función viene dada por

$$g'(x) = (1-x) - x = 1-2x$$

Y la función tendrá un máximo o un mínimo donde se anula la derivada:

$$g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{(extremo)}$$

Como la derivada segunda es de valor constante y negativo, $g''(x) = -2$, el extremo encontrado es un máximo en el que la función vale

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Volvemos a la desigualdad anterior y reemplazamos $x(1-x)$ por su valor máximo, quedándonos

$$\left|\sum_{k\in B}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| < \frac{2M}{\delta^2}\frac{1}{4n}$$

Eligiendo n de forma que $n \geq \dfrac{M}{\delta^2 \varepsilon} \Rightarrow$

$$\left|\sum_{k\in B}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ambas sumatorias, $\sum_{k\in A}$ y $\sum_{k\in B}$, han resultado ser menores que $\dfrac{\varepsilon}{2}$ eligiendo un n lo suficientemente grande $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|f(x) - B_n(x)\right| < \varepsilon$$

Identificando el polinomio $P_n(x)$ con el polinomio de Bernstein hemos demostrado el teorema $\Rightarrow$ Podemos aproximar una función por un polinomio tanto como queramos.

2.2. Aproximación polinomial de funciones por mínimos cuadrados.

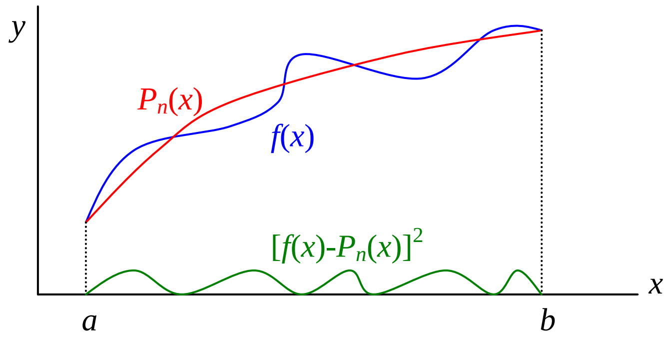
Mediante los polinomios de Bernstein hemos demostrado que podemos acercarnos, tanto como queramos, a una función mediante un polinomio. Desafortunadamente los polinomios de Bernstein presentan una convergencia muy lenta hacia la función y aunque conducen a una demostración elegante del teorema de Weierstrass, no son generalmente, por sí mismos, útiles aproximaciones polinomiales. Veremos en este apartado una técnica muy simple y directa para obtener un polinomio de aproximación a una función, llamada "Aproximación polinomial de funciones por mínimos cuadrados".

- Definición:

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b] \Rightarrow f(x) \in C[a, b]$. La aproximación polinomial de funciones por mínimos cuadrados busca un polinomio $P_n(x)$, de grado máximo n, que se aproxime lo más posible a $f(x)$, reduciendo al mínimo el error E , definido como

$$E = \int_a^b \left[f(x) - P_n(x) \right]^2 dx \,,$$

es decir, haciendo mínima el área entre ambas funciones.



Al polinomio $P_n(x)$ que consigue minimizar E se le llama aproximación polinomial de $f(x)$ por mínimos cuadrados.

- Cálculo de los coeficientes del polinomio de aproximación polinomial:

Sea $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ el polinomio que va a aproximar a la función $f(x)$. El error

$$E\,(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right]^2 dx$$

es una función de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$, y debemos de encontrar un conjunto de coeficientes $\{a_j\}_{j\,=\,0,\ldots,n}$ que minimicen el error E. La condición necesaria para que el conjunto $\{a_j\}$ minimice E es

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0, \ \forall j \quad (j = 0,1,2,\ldots,n) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j}=\frac{\partial}{\partial a_j}\int_a^b\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k x^k\right]^2 dx=$$

$$=\frac{\partial}{\partial a_j}\int_a^b\left\{f^2(x)-2f(x)\sum_{k=0}^{n}a_k x^k+\left(\sum_{k=0}^{n}a_k x^k\right)^2\right\}dx=$$

$$=\int_a^b\left\{0-2f(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial a_k}{\partial a_j}x^k+2\left(\sum_{k=0}^{n}a_k x^k\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial a_k}{\partial a_j}x^k\right\}dx\ =$$

$$=\int_a^b\left\{-2f(x)\sum_{k=0}^{n}\delta_{j,k}x^k+2\left(\sum_{k=0}^{n}a_k x^k\right)\sum_{k=0}^{n}\delta_{j,k}x^k\right\}dx\ =$$

$$=\int_a^b\left\{-2f(x)x^j+2\sum_{k=0}^{n}a_k x^{k+j}\right\}dx=0\Rightarrow$$

$$\int_a^b\sum_{k=0}^{n}a_k x^{k+j}dx=\int_a^b f(x)x^j\,dx\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}a_k\int_a^b x^{k+j}dx=\int_a^b f(x)x^j dx},\ \text{para } j=0,1,2,\ ...,\ n$$

La expresión anterior, con j= 0,1,2,...,n, constituye un sistema de n+1 ecuaciones que nos permiten calcular las n+1 incógnitas que forman el conjunto de coeficientes, $\{a_j\}$, del polinomio $P_n(x)$. En su obtención hemos hecho uso de la función delta de Kronecker, definida como $\delta_{i,j}=\begin{cases}1, & \text{si } i=j\\ 0, & \text{si } i\neq j\end{cases}$

Ejemplo: **Buscamos un polinomio de 2º grado por aproximación de mínimos cuadrados de la función $f(x)$ = sin πx, en el intervalo [0,1].**

El polinomio buscado, como es de 2º grado, tiene la forma $P_2(x)= a_0 + a_1x + a_2x^2$. El sistema de ecuaciones, desarrollado para a_0, a_1 y a_2, es:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Para}\quad j=0: & \displaystyle\sum_{k=0}^{2}a_k\int_0^1 x^k dx=\int_0^1\sin\pi x\,dx\\[2ex] \text{Para}\quad j=1: & \displaystyle\sum_{k=0}^{2}a_k\int_0^1 x^{k+1}dx=\int_0^1 x\sin\pi x\,dx\\[2ex] \text{Para}\quad j=2: & \displaystyle\sum_{k=0}^{2}a_k\int_0^1 x^{k+2}dx=\int_0^1 x^2\sin\pi x\,dx\end{array}\right\}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0\int_0^1 dx + a_1\int_0^1 x dx + a_2\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \sin \pi x\, dx \\ a_0\int_0^1 x dx + a_1\int_0^1 x^2 dx + a_2\int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 x\sin \pi x\, dx \\ a_0\int_0^1 x^2 dx + a_1\int_0^1 x^3 dx + a_2\int_0^1 x^4 dx = \int_0^1 x^2\sin \pi x\, dx \end{cases}$$

Realizamos las integrales:

$$\int_0^1 \sin \pi x dx = \left[-\frac{\cos \pi x}{\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$\int_0^1 x\sin \pi x dx = \left[\frac{\sin \pi x}{\pi^2} - \frac{x\cos \pi x}{\pi}\right]_0^1 = 0 + \frac{1}{\pi} - 0 + 0 = \frac{1}{\pi}$$

$$\int_0^1 x^2 \sin \pi x dx = \left[\frac{2x}{\pi^2}\sin \pi x + \left(\frac{2}{\pi^3} - \frac{x^2}{\pi}\right)\cos \pi x\right]_0^1 = 0 + \left(\frac{2}{\pi^3} - \frac{1}{\pi}\right)(-1) - 0 - \frac{2}{\pi^3} =$$

$$= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3} = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$$

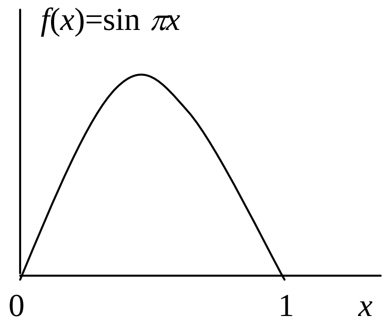
Llevando estos resultados al sistema, éste queda como

$$\left.\begin{aligned} a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 &= \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 &= \frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 &= \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} \end{aligned}\right\}$$

Cuya solución es

$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \cong -0.050465$$

$$a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \cong 4.12251$$



El polinomio de 2º grado, por aproximación por mínimos cuadrados, para $f(x) = \sin \pi x$, en el intervalo [0,1], es

$$P_2(x) = -4.12251x^2 + 4.12251x - 0.050465$$

que toma los siguientes valores en los extremos y centro del intervalo:

$P_2(0)= P_2(1)= -0.050465$ y $P_2(0.5)= 0.98016$,

lógicamente cercanos a los valores de la función que aproxima. Es fácil comprobar que el área bajo la función es la misma que bajo el polinomio. Esta última viene dada por

$$\int_a^b P_n(x)dx = \int_0^1 (a_2x^2 + a_1x + a_0)dx = \left[a_2\frac{x^3}{3} + a_1\frac{x^2}{2} + a_0x \right]_0^1 = \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}a_1 + a_0 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)a_1 + a_0 = \frac{1}{6}\frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} + \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} = \frac{120 - 10\pi^2 + 12\pi^2 - 120}{\pi^3} = \frac{2\pi^2}{\pi^3} = \frac{2}{\pi}$$

2.3. Ajuste de una nube de puntos mediante un polinomio de grado *n* por mínimos cuadrados. (También llamado regresión polinomial).

Si en lugar de una función $f(x)$, tenemos sólo el conjunto de N+1 parejas de puntos, $\{x_i,y_i\}_{i=0,\dots,N}$, procedentes del muestreo de la función, también podemos proceder a ajustar un polinomio a este conjunto de datos, actuando de manera similar al apartado anterior.

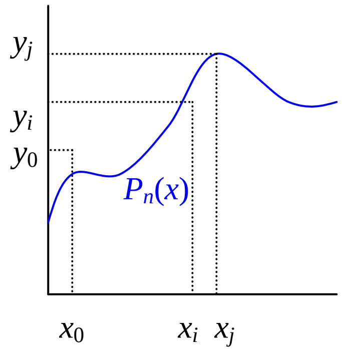
Sea $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, el polinomio de grado n que vamos a ajustar a la nube de puntos.

El error cometido en el punto x_i será

$e_i = y_i - P_n(x_i)$

La suma de todos los errores al cuadrado es

$$E = \sum_{i=0}^{N} e_i^2 = \sum_{i=0}^{N} [y_i - P_n(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{N}\left[y_i - \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k \right]^2$$



Para calcular los n+1 coeficientes de polinomio$\{a_j\}_{j=0,\dots,n}$, imponemos que $\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0$, que con j = 0,...,n, dará lugar a las n+1 ecuaciones que necesitamos.

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j}\left\{ \sum_{i=0}^{N}\left[y_i - \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k \right]^2 \right\} = \frac{\partial}{\partial a_j}\left\{ \sum_{i=0}^{N}\left[y_i^2 - 2y_i\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k + (\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k)^2 \right] \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^{N}\left[\frac{\partial(y_i^2)}{\partial a_j} - 2y_i\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial(a_k x_i^k)}{\partial a_j} + 2(\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k)\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial(a_k x_i^k)}{\partial a_j} \right] \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^{N}\left[-2y_i\sum_{k=0}^{n}\delta_{j,k}x_i^k + 2(\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k)\sum_{k=0}^{n}\delta_{j,k}x_i^k \right] \right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{N}\left[-2y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^{k+j}\right] = 0 \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^{N} y_i x_i^j$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{N} x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^{N} y_i x_i^j}\text{, con } j = 0,1,\ldots,n$$

Ecuaciones que guardan un total paralelismo con las obtenidas para el ajuste de funciones en el apartado anterior.

Particularización para n=1.

Para n=1, ajustamos a la nube de puntos una línea recta, $P_1(x) = a_1x + a_0$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Con } j = 0 \Rightarrow & a_0 \underbrace{\sum_{i=0}^{N} \overbrace{x_i^0}^{1}}_{N+1} + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i = \sum_{i=0}^{N} y_i \\ \text{Con } j = 1 \Rightarrow & a_0 \sum_{i=0}^{N} x_i^1 + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i^2 = \sum_{i=0}^{N} y_i x_i \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 (N+1) + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i = \sum_{i=0}^{N} y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i^2 = \sum_{i=0}^{N} y_i x_i \end{array}\right.$$

Resolviendo el sistema anterior se obtiene, aplicando la regla de Cramer

$$a_1 = \frac{(N+1)\sum_{i=0}^{N} x_i y_i - \sum_{i=0}^{N} x_i \sum_{i=0}^{N} y_i}{(N+1)\sum_{i=0}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{N} x_i\right)^2}$$

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{i=0}^{N} x_i^2\right)\left(\sum_{i=0}^{N} y_i\right) - \left(\sum_{i=0}^{N} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=0}^{N} x_i\right)}{(N+1)\left(\sum_{i=0}^{N} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=0}^{N} x_i\right)^2}$$

que son las expresiones de ajuste de un conjunto de puntos por una línea recta.

Ejemplo: Ajustar, a las parejas de puntos siguientes, un polinomio de 3^er grado.

x =	-2	-1	0	1	2
y =	4	0	-2	-2	0

El polinomio buscado, por ser de tercer grado, tendrá la forma

$$P_3(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Para encontrar sus coeficientes, haremos uso de la ecuación general

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{N} x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^{N} y_i x_i^j}$$

donde $\left\{ \begin{array}{l} n\text{=3, por ser } n \text{ el grado del polinomio de ajuste.} \\ N\text{=4, porque tenemos cinco parejas de puntos } (i\text{= 0, 1, 2, 3, 4).} \\ j \text{ = 0, 1, 2, 3 } (j \text{ entre cero y } n) \text{ nos da 4 ecuaciones con las que podemos} \\ \quad\text{encontrar los 4 coeficientes del polinomio.} \end{array} \right.$

Desarrollando la expresión anterior:

$$j=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{3} a_k \sum_{i=0}^{4} x_i^k = \sum_{i=0}^{4} y_i \Rightarrow a_0 \sum_{i=0}^{4} 1 + a_1 \sum_{i=0}^{4} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{4} x_i^2 + a_3 \sum_{i=0}^{4} x_i^3 = \sum_{i=0}^{4} y_i$$

$$j=1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{3} a_k \sum_{i=0}^{4} x_i^{k+1} = \sum_{i=0}^{4} x_i y_i \Rightarrow a_0 \sum_{i=0}^{4} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{4} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{4} x_i^3 + a_3 \sum_{i=0}^{4} x_i^4 = \sum_{i=0}^{4} x_i y_i$$

$$j=2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{3} a_k \sum_{i=0}^{4} x_i^{k+2} = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 y_i \Rightarrow a_0 \sum_{i=0}^{4} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{4} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{4} x_i^4 + a_3 \sum_{i=0}^{4} x_i^5 = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 y_i$$

$$j=3 \Rightarrow \sum_{k=0}^{3} a_k \sum_{i=0}^{4} x_i^{k+3} = \sum_{i=0}^{4} x_i^3 y_i \Rightarrow a_0 \sum_{i=0}^{4} x_i^3 + a_1 \sum_{i=0}^{4} x_i^4 + a_2 \sum_{i=0}^{4} x_i^5 + a_3 \sum_{i=0}^{4} x_i^6 = \sum_{i=0}^{4} x_i^3 y_i$$

Para calcular los coeficientes del sistema hacemos una tabla, en la que colocamos una columna última adicional con la suma de las anteriores columnas.

						Σ
x_i =	-2	-1	0	1	2	0
x_i^2 =	4	1	0	1	4	10
x_i^3 =	-8	-1	0	1	8	0
x_i^4 =	16	1	0	1	16	34
x_i^5 =	-32	-1	0	1	32	0
x_i^6 =	64	1	0	1	64	130
y_i =	4	0	-2	-2	0	0
$x_i y_i$ =	-8	0	0	-2	0	-10
$x_i^2 y_i$=	16	0	0	-2	0	14
$x_i^3 y_i$=	-32	0	0	-2	0	-34

Quedando el sistema que nos da los coeficientes de los polinomios:

$$\left. \begin{array}{r} 5a_0 + 0a_1 + 10a_2 + 0a_3 = 0 \\ 0 + 10a_1 + 0a_2 + 34a_3 = -10 \\ 10a_0 + 0a_1 + 34a_2 + 0a_3 = 14 \\ 0 + 34a_1 + 0a_2 + 130a_3 = -34 \end{array} \right\}$$

En realidad son dos sistemas desacoplados. Uno para a_0 y a_2 y otro para a_1 y a_3. Dividiendo la 1ª ecuación por 5, y las otras por 2 ⇒

$$\left.\begin{cases} a_0 + 2a_2 = 0 \\ 5a_0 + 17a_2 = 7 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} a_0 = -2a_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow -10a_2 + 17a_2 = 7 \Rightarrow 7a_2 = 7 \Rightarrow \underline{a_2 = 1} \end{cases}\right\} \; \underline{a_0 = -2}$$

$$\left.\begin{cases} 5a_1 + 17a_3 = -5 \\ 17a_1 + 65a_3 = -17 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} a_1 = -\dfrac{17}{5}a_3 - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\dfrac{17^2}{5}a_3 - 17 + 65a_3 = -17 \Rightarrow \left(65 - 17^2\right)a_3 = 0 \Rightarrow \underline{a_3 = 0} \end{cases}\right\} \; \underline{a_1 = -1}$$

El polinomio que ajusta las parejas de datos a resultado ser de grado 2, con la forma:

$$P(x) = x^2 - x - 2$$

El error cometido viene dado por

$$E = \sum_{i=0}^{N} (y_i - P_n(x_i))^2$$

que para nuestro caso particular queda

$$E = \left[y_0 - P(x_0)\right]^2 + \left[y_1 - P(x_1)\right]^2 + \left[y_2 - P(x_2)\right]^2 + \left[y_3 - P(x_3)\right]^2 + \left[y_4 - P(x_4)\right]^2 =$$
$$= \left(4-4\right)^2 + \left(0-0\right)^2 + \left(-2-(-2)\right)^2 + \left(-2-(-2)\right)^2 + \left(0-0\right)^2 = 0$$

Siendo el error nulo porque el polinomio ajusta perfectamente a los puntos.