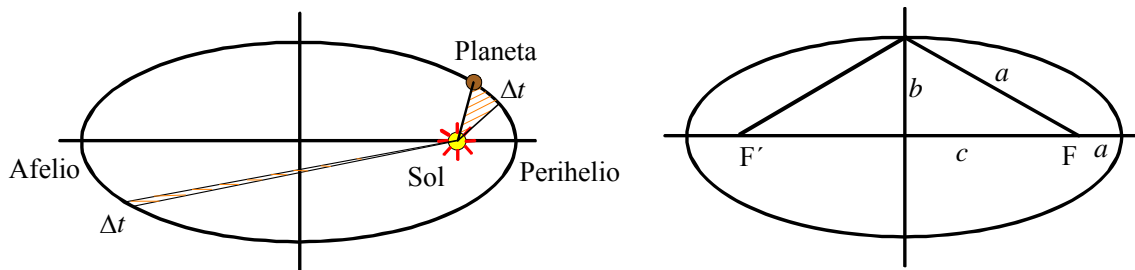


TEMA VI

ECUACIONES NO LINEALES. BÚSQUEDA DE CEROS DE FUNCIONES.**6.1. Introducción.****6.1.1. Una ecuación no lineal histórica: La ecuación de Kepler.**

Johanes Kepler (1571-1630) fue empleado por Tycho Brahe (1564-1600) poco antes de morir este último y heredó las observaciones sobre el movimiento de los planetas, en especial las exactas medidas sobre Marte, que había realizado Tycho Brahe durante muchos años. Con estos datos formuló sus famosas leyes. La primera de ellas nos dice que los planetas se mueven en órbitas elípticas que tienen al Sol en uno de sus focos. La segunda, que el radio vector que une el Sol con el planeta, barre áreas iguales en tiempos iguales. Así los planetas irán más rápidos cuando están cerca del perihelio (punto que marca la distancia más corta entre el Sol y el planeta) que cuando están en el afelio (punto en el que la órbita de un planeta se encuentra más distante del Sol).



Supongamos una elipse, órbita de un planeta, de semieje mayor a , de semieje menor b y de distancia focal $2c$, centrada en un sistema de coordenadas plano (x, y) . La ecuación de los puntos que pertenecen a la elipse (ecuación de la elipse) viene dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, la superficie de la elipse es $S = \pi ab$, y se define la **excentricidad** de la

elipse como $e = \frac{c}{a}$. Dado que por la propia definición de la elipse, es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos, F y F' , es una cantidad constante de valor $2a$, utilizando la elipse de la derecha de la figura anterior: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \Rightarrow b^2 = a^2(1 - e^2)$.

A la circunferencia de radio a , con el mismo centro que la elipse y en la cual está inscrita la elipse se le llama **circunferencia principal**. Esta circunferencia se utiliza porque, como veremos a continuación, es inmediato conocer las coordenadas (x, y) del planeta en el tiempo t , conocido en ángulo E , llamado **anomalía excéntrica**, formado entre el perihelio, el centro de la elipse y el punto de intersección entre la circunferencia principal y una vertical al eje x que pase por el punto ocupado por el planeta.

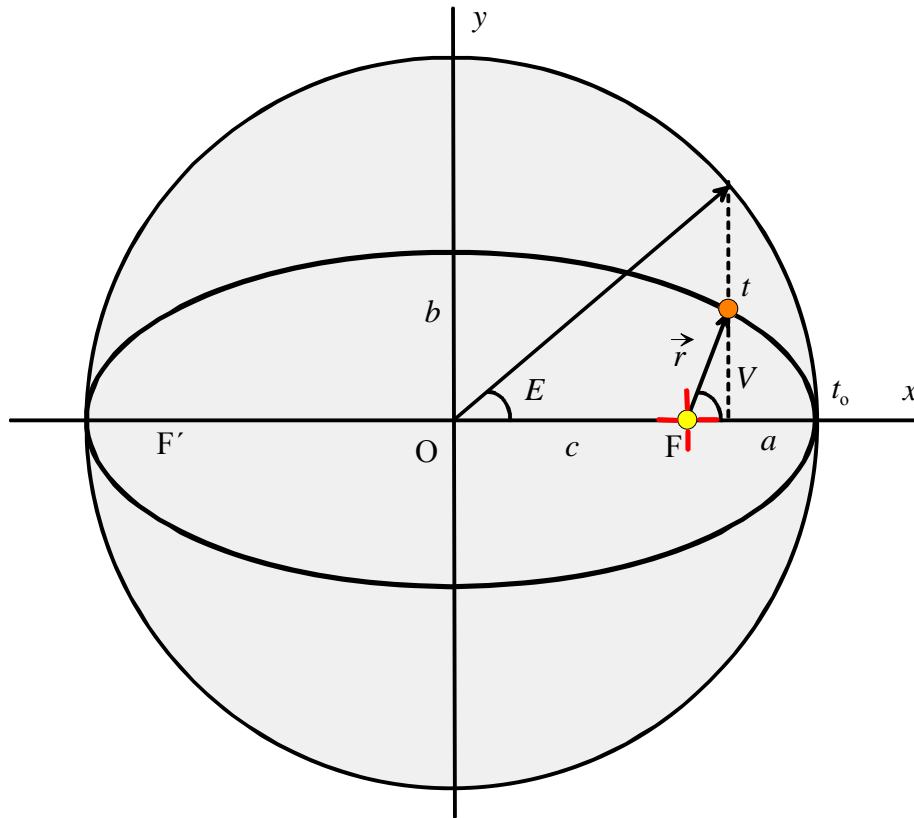
Conocido el ángulo E , $x = a \cos E$, y de la ecuación de la elipse

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 (1 - \cos^2 E)} = \pm b \sin E.$$

Por tanto, supuesto que el planeta esté en la parte superior de la elipse como aparece en la figuras, la pareja de ecuaciones

$$\begin{cases} x = a \cos E \\ y = b \sin E \end{cases}$$

nos facilita las coordenadas del planeta, conocida la anomalía excéntrica E .



La palabra anomalía procede, originalmente, del movimiento aparente no uniforme (anómalo) de los planetas. En el uso actual, se definen tres tipos de anomalías:

Anomalía verdadera, V : Ángulo formado por el perihelio, el Sol (centro de masas) y el planeta.

Anomalía excéntrica, E : Definida anteriormente.

Anomalía media, M (no dibujada): Ángulo formado por el perihelio, el Sol y el punto que ocuparía el planeta si éste siguiese una trayectoria descrita por una velocidad angular constante.

Volviendo a la segunda ley de Kepler, el área barrida por el radio vector del planeta, con origen en la estrella, en un dt , viene dada por $dA = \frac{1}{2} r dl$; y el área barrida

desde el tiempo t_0 en que el planeta pasa por el perihelio, hasta el tiempo t en el que alcanza el punto descrito por el radio vector \vec{r} , que define la anomalía verdadera, V , y

la anomalía excéntrica, E , viene dada por $A = \int_{E=0}^E \frac{1}{2} r dl$.

Evaluamos las funciones que forman parte del integrando anterior, con el fin de expresarlos en función de la anomalía excéntrica E . Con $r^2 = (x - c)^2 + y^2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} r^2 &= (a \cos E - ae)^2 + (b \sin E)^2 = a^2 \cos^2 E + a^2 e^2 - 2a^2 e \cos E + b^2 \sin^2 E = \\ &= a^2 \cos^2 E + a^2 e^2 - 2a^2 e \cos E + a^2 (1 - e^2) \sin^2 E = [a(1 - e \cos E)]^2 \Rightarrow \\ r &= a(1 - e \cos E). \end{aligned}$$

Por otro lado, $d\vec{l} = \hat{x} dx + \hat{y} dy = -a \sin E dE \hat{x} + b \cos E dE \hat{y} \Rightarrow$

$$(dl)^2 = (a^2 \sin^2 E + b^2 \cos^2 E)(dE)^2 \Rightarrow dl = dE \sqrt{a^2 \sin^2 E + b^2 \cos^2 E}$$

Para puntos cercanos al perihelio, $\sin^2 E \simeq 0$ y $\cos^2 E \simeq 1 \Rightarrow dl \simeq b dE$.

Llevando a la integral los valores encontrados de r y dl en función de la anomalía excéntrica E , el área barrida en un tiempo $(t - t_0)$, desde que el planeta pasó por el perihelio, viene dada por

$$A = \int_{E=0}^E \frac{1}{2} r dl = \frac{1}{2} \int_{E=0}^E ab(1 - e \cos E) dE = \frac{1}{2} ab(E - e \sin E),$$

y ésta debe ser el área que se barre en cualquier intervalo de tiempo $(t - t_0)$ para que se cumpla la segunda ley de Kepler.

Si esta misma área se cubre en el mismo tiempo por un móvil ficticio que se desplaza con velocidad angular constante ω_0 y que tardaría un tiempo T en dar una órbita completa, entonces

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\text{Área elipse}}{\text{Periodo}} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{1}{2} ab \omega_0 \Rightarrow dA = \frac{1}{2} ab \omega_0 dt \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2} ab \omega_0 (t - t_0) = \frac{1}{2} ab M.$$

Igualando las dos expresiones del área barrida encontramos la histórica ecuación de Kepler

$$\boxed{E - e \sin E = M}$$

que debe de cumplir el planeta si sigue una órbita elíptica. Pero la solución de esta ecuación, supuestos conocidos e y M , no es fácil ya que la ecuación de Kepler es una ecuación trascendente y no puede ser resuelta algebraicamente.

6.1.2. Planteamiento general.

Este capítulo se ocupa del problema de determinar las raíces de funciones o soluciones de ecuaciones no lineales. Este tipo de problemas se plantea con cierta frecuencia en Física. Como ejemplo acabamos de ver el caso de la ecuación de Kepler que tiene la forma:

$$x - a \sin x = b$$

cuyas raíces son necesarias para comprobar que los planetas siguen órbitas elípticas.

Más habitual suele ser la búsqueda de raíces de polinomios. Si las raíces no son enteras no es viable la popular regla de Ruffini y extraer la raíz real, no entera, del polinomio

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

puede ser un problema de relativa dificultad, si no se conoce una metodología eficiente.

El planteamiento general del problema es el siguiente:

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en el intervalo $[a, b]$ y sea r una raíz de $f(x)$; es decir $f(r)=0$. Buscamos una metodología numérica para encontrar la raíz r .

6.2. Métodos iterativos.**6.2.1. Planteamiento del problema.**

Los métodos iterativos suministran, con unos conocimientos básicos de programación, una vía rápida y sencilla para encontrar la raíz buscada. Su planteamiento es el siguiente:

El problema de encontrar una solución a la ecuación $f(x)=0$, lo transformamos en otro equivalente $x=g(x)$. La ecuación anterior nos sugiere el proceso iterativo

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

que finalizará cuando encontremos un punto fijo de la función $g(x)$, tal que $r=g(r)$.

Así, la ecuación de Kepler $x - a \sin x - b = 0$ la expresamos como

$$x = b + a \sin x$$

que sugiere el proceso iterativo

$$x_{k+1} = b + a \sin x_k$$

el cual necesita de una semilla inicial x_0 .

El siguiente programa Fortran es una implementación de este método, para el caso particular en que $a=b=1$ y se utilice una semilla inicial $x_0=0$.

```
PROGRAM KEPLER
A = 1.0
B = 1.0
X = 0.0
DO I = 1,15
  X = A*SIN(X)+B
  PRINT *, X
END DO
STOP
END
```

La respuesta generada por este programa es

```
1.000000
1.841471
1.963591
1.923843
1.938324
1.933219
1.935041
1.934393
1.934624
1.934542
1.934571
1.934560
1.934564
1.934563
1.934563
Stop - Program terminated.
Press any key to continue
```

Encontrándose un punto fijo, con un número relativamente pequeño de iteraciones, para $x = 1.934563$.

De manera análoga podemos proceder para encontrar la raíz real del polinomio que pusimos como ejemplo en el apartado anterior. En primer lugar la expresamos en la forma $x=g(x)$, esto es

$$x = (3x^2 + 3x + 1)^{1/3}$$

que sugiere el proceso iterativo

$$x_{k+1} = (3x_k^2 + 3x_k + 1)^{1/3}$$

Este proceso es llevado a cabo por el programa

```

PROGRAM RAIZ
X=1.0
DO I=1,20
    X=(3.0*(X**2)+3.0*X+1.0)**(1./3.)
    PRINT*,X
END DO
STOP
END

```

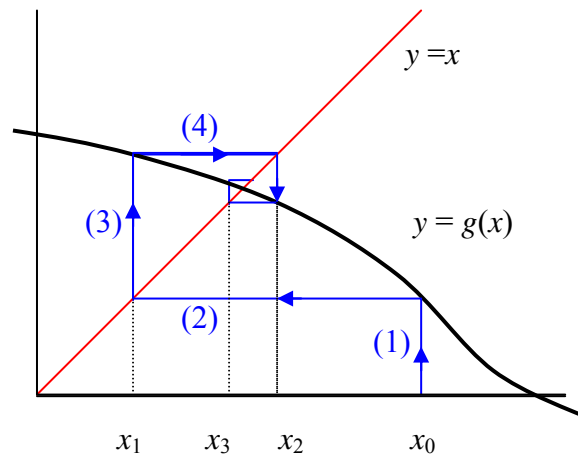
que suministra el resultado $x=3.847322$ en pocas iteraciones. El número de iteraciones necesarias para encontrar un punto fijo depende de lo acertado de la raíz propuesta. Si queremos un resultado con mayor exactitud sólo tenemos que declarar la variable x como de doble precisión mediante la proposición

```
DOUBLE PRECISION X
```

Este método, como otros que veremos a lo largo de este capítulo, sólo suministra una raíz de las posibles que puede tener la función, pero con diferentes semillas pueden encontrarse las diferentes soluciones.

6.2.2. Interpretación geométrica de los métodos iterativos.

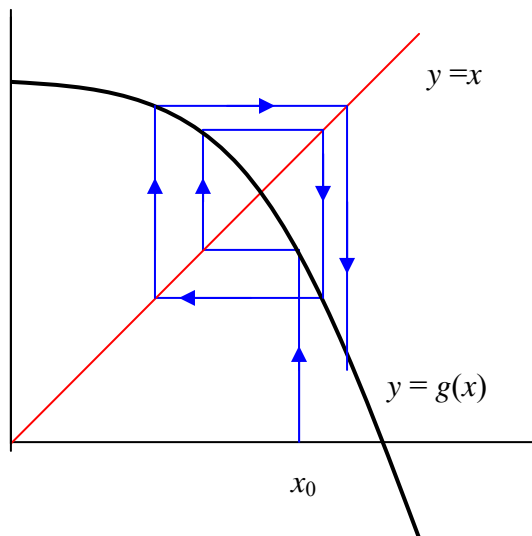
La expresión de la ecuación $f(x)=0$ en la forma $x=g(x)$ nos dice que si representamos las funciones $y=g(x)$ y $y=x$, la intersección de ambas curvas es la solución buscada. En la siguiente figura se muestra el proceso iterativo que nos lleva a encontrar el punto de intersección, raíz de la función $f(x)$.



El proceso iterativo consta de los siguientes pasos:

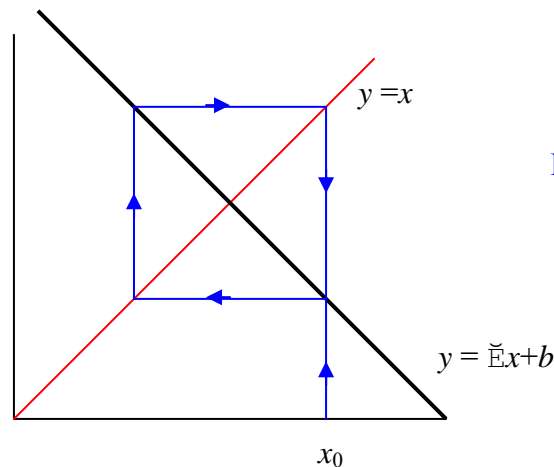
- (1) Damos una semilla x_0 y evaluamos $g(x_0)$.
- (2) Haciendo $x_1=g(x_0)$ obtenemos un nuevo valor para la variable independiente.
- (3) Con x_1 volvemos a evaluar la función $g(x)$, obteniéndose $g(x_1)$.
- (4) De nuevo obtenemos un nuevo valor para x , haciendo $x_2=g(x_1)$.

El proceso gráfico anterior se muestra claramente convergente. Pero una pequeña variación en la forma de $g(x)$, nos muestra, en la figura siguiente, un caso de no convergencia.



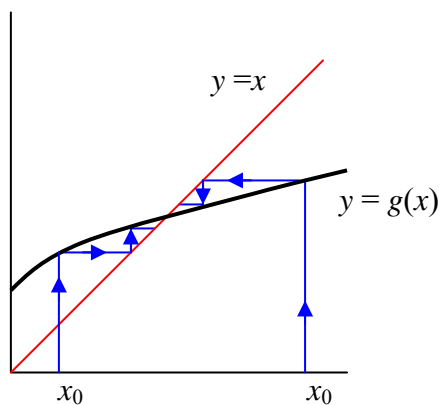
Proceso no convergente

El límite entre la convergencia y la no convergencia la marca la pendiente de la función $g(x)$. En la siguiente figura se muestra un proceso límite entre ambos en el que la función $g(x)$ es una recta de pendiente -1 .

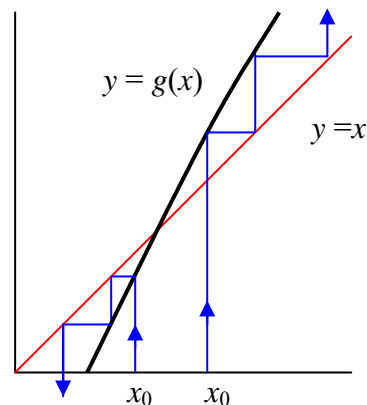


Proceso límite

Hemos hecho las gráficas con pendiente negativa para $g(x)$, pero podemos repetirlas con pendiente positiva y de nuevo encontraremos que si la curva $y = g(x)$ tiene pendiente inferior a 1, el proceso iterativo converge.



Procesos convergentes



Procesos no convergentes

En definitiva, y aunque podamos hacer una demostración más rigurosa, podemos decir que encontraremos convergencia cuando

$$\boxed{0 < g'(x) < 1}$$

y, en cambio, para $g'(x) > 1$ ó $g'(x) < 0$ no se puede esperar que haya convergencia.

6.3. Método de la bisección ó de la bipartición.

6.3.1. Fundamento del método.

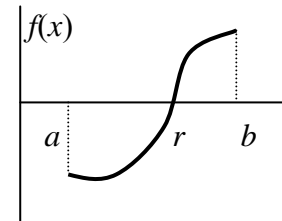
- El método de la bisección se basa en el [teorema de Bolzano](#), que recordamos dice lo siguiente:

Sea $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f(x)$ continua en $[a, b]$.

Si $f(a)f(b) < 0$ ($f(a)$ y $f(b)$ tienen diferente signo) \Rightarrow

$\Rightarrow \exists$ un punto $r \in [a, b] / f(r) = 0$.

A r lo llamaremos raíz de la función $f(x)$.



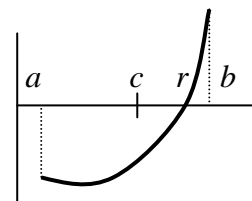
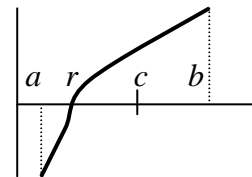
El teorema es tan evidente que no necesita demostración. Aunque debemos notar que pueden existir múltiples puntos en el intervalo donde se anula la función $f(x)$.

- El método de la bisección explota esta idea de la siguiente forma:

Si $f(a)f(b) < 0$, calculamos $c = \frac{a+b}{2}$ y averiguamos si $f(a)f(c) < 0$,

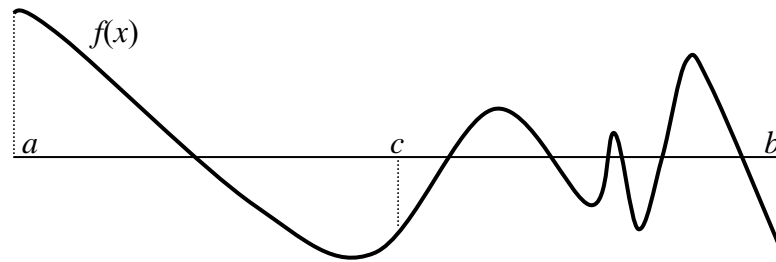
pudiéndose dar diferentes posibilidades:

- Si $f(a)f(c) < 0 \Rightarrow f(x)$ tiene al menos un cero en $[a, c]$. Rebautizamos a c como b y comenzamos de nuevo con el nuevo intervalo $[a, b]$.
- Si $f(a)f(c) > 0$, entonces $f(c)f(b) < 0 \Rightarrow f(x)$ tiene al menos un cero en $[c, b]$. Rebautizamos a c como a y comenzamos de nuevo con el nuevo intervalo $[a, b]$.
- Si $f(a)f(c) = 0 \Rightarrow f(c) = 0$ y hemos encontrado la raíz.



Esta última posibilidad es poco factible en un ordenador debido a los errores de redondeo. El criterio para concluir un cálculo de este tipo debe de permitir una tolerancia razonable, por ejemplo, $|f(x)| < 10^{-5}$ en simple precisión o $|f(x)| < 10^{-14}$ con doble precisión.

La figura siguiente muestra una situación, con $f(a) > 0 > f(b)$, en la que el método de la bisección encontrará el cero en $[a, c]$, pero no detectará los existentes en $[c, b]$.



6.3.2. Análisis del error.

Para analizar el error que se va cometiendo en las diferentes etapas de la aplicación de este método, llamamos $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ..., $[a_n, b_n]$ a los diferentes intervalos que surgen en el proceso. Sobre estos números podemos hacer las siguientes observaciones:

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_0$$

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots \geq a_0$$

También, la longitud del intervalo $[a_n, b_n]$ viene dado por:

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2} \frac{1}{2}(b_{n-2} - a_{n-2}) = \frac{1}{2^3}(b_{n-3} - a_{n-3}) \Rightarrow$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$

Con la primera sucesión de desigualdades podemos decir que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente, debido a que es **creciente** y está **acotada superiormente**. Con el segundo conjunto de desigualdades, la sucesión $\{b_n\}$ también es convergente por ser **decreciente** y estar **acotada inferiormente**.

Así, si calculamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n}(b_0 - a_0) = 0 \Rightarrow$$

las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienen el mismo límite al que llamamos $r \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$$

Entonces, si tomamos límites en la desigualdad $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, obtenemos

$$[f(r)]^2 = 0 \Rightarrow f(r) = 0$$

y encontramos la raíz buscada.

Si detenemos el proceso en una cierta etapa, definida por el intervalo $[a_n, b_n]$, la raíz se encontrará ciertamente en el interior del intervalo, pero la mejor estimación de la raíz no es ni a_n ni b_n , sino el punto medio entre ambos

$$c_n = \frac{b_n + a_n}{2}$$

La distancia entre el punto medio del intervalo, c_n , y la raíz, r , será menos que la mitad del intervalo. Por tanto, el error que se comete se acota de la siguiente forma:

$$|r - c_n| \leq \frac{1}{2}|b_n - a_n| \leq \frac{1}{2}2^{-n}(b_0 - a_0) \Rightarrow \boxed{|r - c_n| \leq 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)}$$

que depende del número de iteraciones y de la longitud del intervalo inicial, no siendo dependiente de la función $f(x)$ de las que buscamos sus raíces.

Ejemplo. Encontrar un cero de la función $f(x) = x + e^x$ en el intervalo $[-1, 0]$ con un error inferior a 10^{-3} .

En primer lugar comprobamos que la función tiene un cero en el intervalo indicado:

$$\begin{cases} f(a) = f(-1) = -0.63 \\ f(b) = f(0) = 1 \end{cases}$$

La función pasa de negativo a positivo en el intervalo y por tanto dentro de él existe al menos un cero.

Como queremos un error inferior a $10^{-3} \Rightarrow$

$$|r - c_n| \leq 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0) < 10^{-3}$$

$$\text{Con } (b_0 - a_0) = 1 \Rightarrow |r - c_n| \leq 2^{-(n+1)} < 10^{-3} \Rightarrow 10^3 < 2^{n+1}$$

Tomando logaritmos decimales en la última expresión:

$$3 < (n+1)\log 2 \Rightarrow n+1 > \frac{3}{\log 2} \Rightarrow n > \frac{3}{\log 2} - 1 = 8.97 \Rightarrow$$

Con $n = 9$ tenemos aseguradas 3 decimales exactas.

Si hubiésemos querido 4 cifras decimales exactas:

$$n > \frac{4}{\log 2} - 1 = 12.29 \Rightarrow n = 13 \text{ asegura 4 cifras decimales exactas.}$$

Para obtener el cero de la función hacemos una tabla. Recordando la forma de la función que pasa de negativa a positiva, cuando $f(c_n)$ sea (+) rebautizaremos a c_n como b_n y cuando $f(c_n)$ sea (−) rebautizaremos c_n a como a_n .

n	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$	
0	1	0	0.5	0.11	>0
1	1	0.5	0.75	0.28	<0
2	0.75	0.5	0.625	0.090	<0
3	0.625	0.5	0.5625	0.00728	>0
4	0.625	0.5625	0.59375	0.041520	<0
5	0.59375	0.5625	0.578125	0.0328	<0
6	0.578125	0.5625	0.578125	0.0496	<0
7	0.5703125	0.5625	0.56640625	0.001155	>0
8	0.5703125	0.56640625	0.568359375	0.0019	<0
9	0.568359375	0.56640625	0.5673828125	0.000375	<0

La raíz con un error inferior a 10^{-3} , viene dada por $r = 0.567$. El mayor inconveniente de este método es su lenta convergencia.

6.4. Método de la Newton-Raphson.

El método de Newton-Raphson es otra alternativa para buscar ceros reales de funciones reales, y en este caso con una convergencia muy rápida. Newton en su libro *Principia* encuentra una raíz de un polinomio de grado tres utilizando este método, sin embargo su desarrollo global y su expresión en la forma en que hoy lo conocemos se la debemos fundamentalmente a Raphson.

6.4.1. Fundamento del método.

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $r \in [a, b] / f(r) = 0$ (r es una raíz de $f(x)$).

Si $f'(x)$ existe y es continua, y x es una aproximación a r , ($r = x + h$), utilizando el teorema de Taylor, podemos escribir:

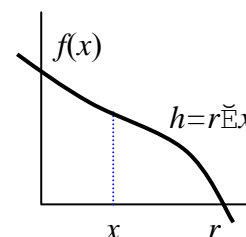
$$0 = f(r) = f(x+h) = f(x) + h f'(x) + O(h^2)$$

Si h es pequeño, ignorando los términos de 2º orden:

$$0 \approx f(x) + h f'(x) \Rightarrow h \approx -\frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = x + h \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow$$

Si x es una aproximación a r , $x - \frac{f(x)}{f'(x)} \approx r$ deberá estar más próximo a la raíz.



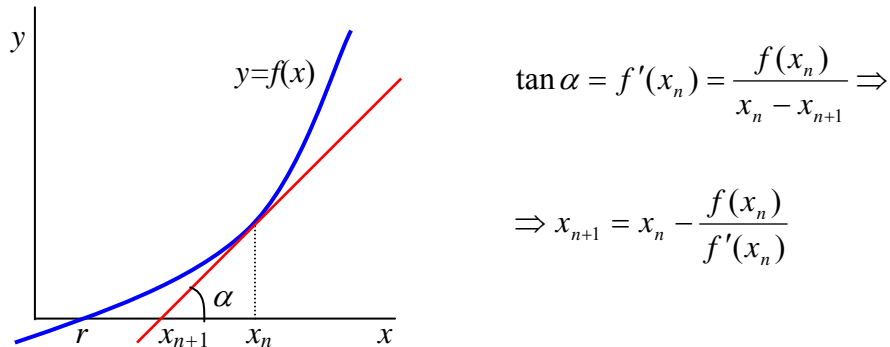
El método de Newton-Raphson comienza con una estimación x_0 de r , a partir de la cual se define inductivamente una sucesión de aproximaciones cada vez más cercanas a r .

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{con } n \geq 0$$

En este método es necesario evaluar $f(x)$ y $f'(x)$.

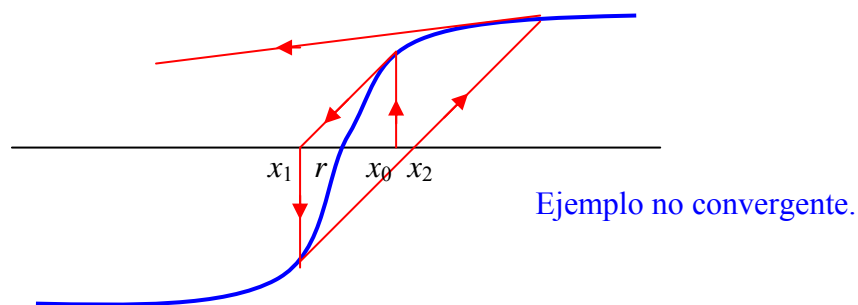
6.4.2. Interpretación gráfica.

Lo que acabamos de hacer, quedándonos solamente con términos de primer orden en el desarrollo de Taylor, es una linealización de la función.



Trazamos la derivada en el punto x_n a la curva $y = f(x)$. El corte con el eje x , punto x_{n+1} , es una mejor aproximación a la raíz r . El punto x_{n+1} puede servirnos de punto de partida para volver a iniciar el proceso y, de manera iterativa, ir acercándonos a la raíz.

Con esta interpretación gráfica en mente, es fácil imaginar funciones y puntos iniciales para los que este método fracasa. Por ejemplo:



Ejemplo no convergente.

Que nos recuerda que el método de Newton-Raphson parte de la suposición de que x_0 está suficientemente próximo a una raíz. Si no es así, para que haya convergencia, la curva debe tener un comportamiento lo suficientemente bueno.

Ejemplo 1. Cálculo de raíces cuadradas con la fórmula de Herón de Alejandría.

Sea un número $R > 0$ y queremos calcular $x = \sqrt{R}$ ó $x^2 - R = 0 \Rightarrow$ La x buscada es la raíz de la función $f(x) = x^2 - R$.

Utilizando el método de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

con $f'(x) = 2x \Rightarrow$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - R}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + R}{2x_n} \Rightarrow$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{R}{x_n} \right)}$$
 que es conocida como fórmula de Herón.

Esta fórmula es muy antigua y se atribuye a Herón de Alejandría, un ingeniero y arquitecto griego que vivió en tiempos de Cristo, aunque no se tiene constancia de cómo llegó a ella.

Si queremos calcular $\sqrt{17}$ e iniciamos con $x_0 = 4 \Rightarrow$

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{17}{4} \right) = 4.125 \quad (\text{dos dígitos exactos})$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(4.125 + \frac{17}{4.125} \right) = 4.123\ 106\ 061 \quad (6 \text{ dígitos exactos})$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(4.123106061 + \frac{17}{4.123106061} \right) = 4.123\ 105\ 625\ 617\ 7 \quad (13 \text{ exactos})$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left(4.1231056256177 + \frac{17}{4.1231056256177} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_4 = 4.123\ 105\ 625\ 617\ 660\ 549\ 821\ 409\ 856$$

que contiene 27 cifras decimales exactas, no fáciles de conseguir con calculadoras, ordenadores o cualquier otro sistema informático.

Ejemplo 2. Encontrar un cero de la función $f(x) = x + e^x$ en el intervalo $[-1, 0]$. (Ejemplo ya resuelto con el método de la bisección o bipartición).

$$\text{Con } f(x) = x + e^x \Rightarrow f'(x) = 1 + e^x. \text{ De } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + e^{x_n}}{1 + e^{x_n}} = \frac{x_n + x_n e^{x_n} - x_n - e^{x_n}}{1 + e^{x_n}} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{(x_n - 1)e^{x_n}}{1 + e^{x_n}}$$

Damos valores comenzando con una semilla en el centro del intervalo:

$$x_0 = -0.5$$

$$x_1 = \frac{(-0.5 - 1)e^{-0.5}}{1 + e^{-0.5}} = -0.566\ 311\ 003$$

$$x_2 = \frac{(-0.566\ 311\ 003 - 1)e^{-0.566\ 311\ 003}}{1 + e^{-0.566\ 311\ 003}} = -0.567\ 143\ 165$$

$$x_3 = \frac{(-0.567\ 143\ 165 - 1)e^{-0.567\ 143\ 165}}{1 + e^{-0.567\ 143\ 165}} = -0.567\ 143\ 290$$

$$x_4 = \frac{(-0.567\ 143\ 290 - 1)e^{-0.567\ 143\ 290}}{1 + e^{-0.567\ 143\ 290}} = -0.567\ 143\ 290$$

Repitiéndose el mismo resultado a partir de la cuarta iteración, indicándonos que hemos conseguido un punto fijo con la exactitud que aportan los diez dígitos de una calculadora. Si comparamos el proceso de convergencia de este método con el método de la bipartición, vemos que éste es muchísimo más rápido.

El proceso anteriormente descrito es implementado fácilmente mediante el siguiente programa Fortran:

```
DOUBLE PRECISION  X
PRINT *, ' Semilla? '
READ *, X
DO  K = 1, 6
    X = ((X-1.0)*EXP(X))/(1.0+EXP(X))
    PRINT *, X
END DO
STOP
END
```

Que genera el siguiente resultado:

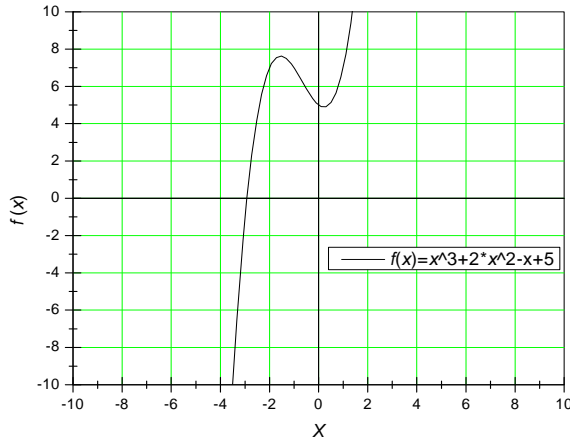
```
Semilla?
-0.5
-5.663110031972182E+001
-5.671431650348623E+001
-5.671432904097811E+001
-5.671432904097838E+001
-5.671432904097840E+001
-5.671432904097840E+001
Stop - Program terminated.
```

Press any key to continue

donde vemos que se obtiene una raíz con 15 cifras decimales exactas en cinco iteraciones.

Ejemplo 3. Raíces complejas.

El método de Newton encuentra raíces complejas si se proporciona un valor complejo como semilla inicial. A continuación estudiamos la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$ que al ser un polinomio de tercer grado tiene tres raíces. Si hacemos una representación gráfica de este polinomio vemos que sólo tiene un cruce por cero cerca de -3 por lo que debe de tener dos raíces complejas conjugadas.



$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 3}}{6} = \begin{cases} 0.22 \\ -1.55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0.22) \approx 4.89 \\ f(-1.55) \approx 7.63 \end{cases}$$

Aplicamos el método de Newton $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ con la semilla inicial $x_0 = 1 + j$. El siguiente programa Fortran implementa esta situación.

```

Program NwCmplx
complex x
x=(1.0,1.0)
do i=1,5
x=x-((x**3+2.0*x**2-x+5.0)/(3.0*x**2+4.0*x-1.0))
print *, x
end do
stop
end

```

```

(4.862385E-01, 1.045872)
(4.481399E-01, 1.236655)
(4.627205E-01, 1.222425)
(4.629258E-01, 1.222540)
(4.629258E-01, 1.222540)

```

```

Stop - Program terminated.
Press any key to continue

```

Hemos obtenido una raíz compleja y habrá otra que será la compleja conjugada de la anterior que se puede obtener directamente con la raíz $x_0 = 1 - j$. Si en el programa anterior, declaramos x como real y cambiamos la semilla compleja, $x=(1.0,1.0)$, por la real $x=\sqrt[3]{-3.0}$, encontramos la raíz real $x=\sqrt[3]{-2.925852}$.

6.4.3. Análisis de errores.

Si nuestro proceso iterativo lo cortamos en la etapa n , cometeremos un error en la estimación de r ya que el valor más próximo encontrado es $x_n \Rightarrow$ El error viene dado por

$$e_n = x_n - r.$$

De aquí

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Por otra parte, utilizando el teorema de Taylor,

$$0 = f(r) = f(x_n - e_n) = f(x_n) - e_n f'(x_n) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi_n) \quad \text{con } \xi_n \in [x_n, r]$$

Despejando de esta ecuación el numerador de la anterior

$$e_n f'(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi_n)$$

y sustituyendo este numerador

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2 = \rho_n e_n^2 = \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} e_n^2 = \text{cte } e_n^2$$

Esta ecuación nos dice que e_{n+1} es aproximadamente e_n^2 multiplicado por una constante. Este envidiable estado de cosas se llama **convergencia cuadrática**. La convergencia cuadrática explica que en muchos casos (dependiendo del valor de la constante) se duplique en cada iteración el número de cifras exactas que se obtienen. Si en una iteración tenemos una sola cifra decimal exacta (un error del orden de 10^{-2}) en la siguiente el error será de 10^{-4} (tres cifras decimales exactas), en la siguiente el error sería 10^{-8} , con siete cifras exactas.

Podemos resumir diciendo, que si r es un cero de $f(x)$, existe una vecindad alrededor de r , dentro de la cual, si comenzamos el proceso iterativo marcado por el método de Newton-Raphson, el proceso converge aproximándose cada vez más a la raíz de la función.

6.4.4. Resolución de sistemas de ecuaciones no lineales.

El método de Newton-Raphson permite la obtención de sistemas de ecuaciones no lineales siguiendo el mismo proceso de linealización y resolución que se ha aplicado a una sola ecuación.

Sea $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ el sistema de ecuaciones a resolver y sea (x_1, y_1) una aproximación a la solución que se separa por (h, k) de la solución; es decir

$$\begin{cases} f(x_1 + h, y_1 + k) = 0 \\ g(x_1 + h, y_1 + k) = 0 \end{cases}, \text{ siendo } (x_1 + h, y_1 + k) \text{ la solución buscada.}$$

Si (x_1, y_1) está cercana a la solución podemos hacer el desarrollo en serie:

$$\begin{cases} f(x_1 + h, y_1 + k) = 0 \simeq f(x_1, y_1) + h \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x_1, y_1)} + k \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(x_1, y_1)} \\ g(x_1 + h, y_1 + k) = 0 \simeq g(x_1, y_1) + h \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{(x_1, y_1)} + k \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{(x_1, y_1)} \end{cases}$$

que podemos expresar en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x_1, y_1)} & \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(x_1, y_1)} \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{(x_1, y_1)} & \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{(x_1, y_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -f(x_1, y_1) \\ -g(x_1, y_1) \end{bmatrix}$$

La ecuación anterior nos permite obtener (h, k) para acercarnos a la solución. Este acercamiento puede realizarse en sucesivas etapas, ideando el proceso iterativo:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + k_n \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_n \\ k_n \end{pmatrix}$$

donde los (h_n, k_n) los obtenemos de

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x_n, y_n)} & \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(x_n, y_n)} \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{(x_n, y_n)} & \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{(x_n, y_n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_n \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_n, y_n) \\ -g(x_n, y_n) \end{bmatrix}$$

Hemos dado las pautas para la resolución de un sistema de ecuaciones de sólo dos ecuaciones, para un sistema de n ecuaciones la extensión es obvia.

6.5. Método de la secante.

6.5.1. Fundamento del método.

El proceso iterativo de Newton-Raphson se define mediante la expresión:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Una de las posibles desventajas del método de Newton-Raphson es que necesita la derivada de la función cuyo cero se busca. Para superar esta dificultad, el método de la secante propone reemplazar $f'(x)$ por un cociente en diferencias:

$$f'(x_n) \cong \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

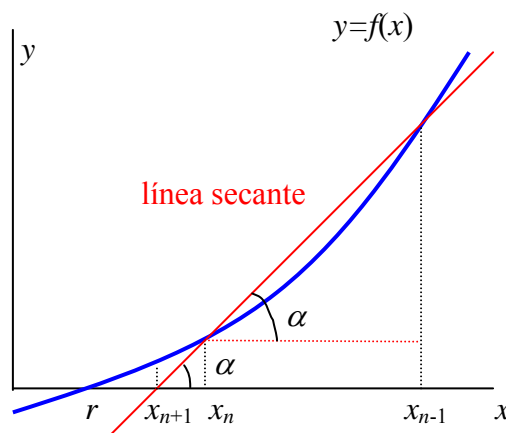
Llevando a cabo la sustitución:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \Rightarrow \boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n) \left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right]}$$

Ya que el cálculo de x_{n+1} requiere conocer a x_n y x_{n-1} , se deben dar al principio dos valores iniciales o semillas; pero, sin embargo, para la evaluación de x_{n+1} sólo se requiere una nueva evaluación de $f(x)$.

6.5.2. Interpretación gráfica.

La interpretación gráfica del método de la secante es similar a la del método de Newton-Raphson, sin más que reemplazar la línea tangente por la línea secante, como se ve en la siguiente figura:



Con el ángulo α superior :

$$\tan \alpha = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$$

Con el ángulo α inferior :

$$\tan \alpha = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

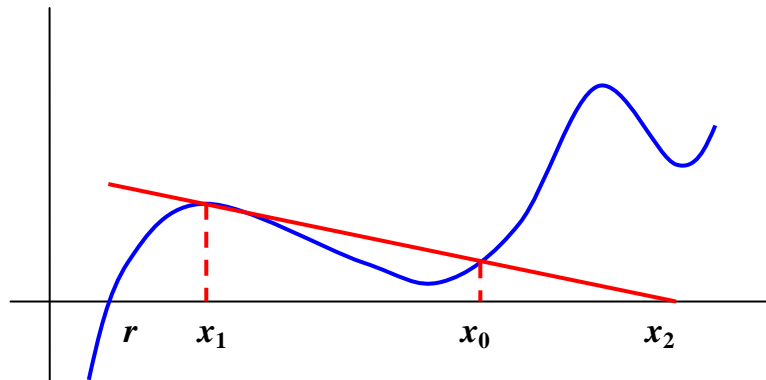
Igualando las dos expresiones para $\tan \alpha$ y despejando x_{n+1} :

$$\frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - f(x_n) \left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right]$$

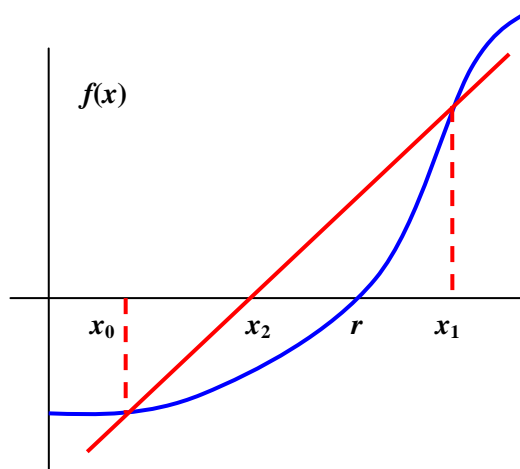
que es la expresión utilizada por el método de la secante.

6.6. Método de falsa posición o regula falsi.

Algunas veces se presenta una objeción sobre el método de la secante: Si la función está lejos de ser lineal cerca de la raíz, las iteraciones sucesivas pueden ir hacia puntos alejados de la raíz, tal como se observa en la figura.



Una forma de evitar esta patología es utilizar el método de la falsa posición (regula falsi, en latín). Esta técnica es un híbrido entre la bisección o bipartición y la de la secante. Se parte de dos puntos, uno por debajo de la raíz y otro por encima, pero en lugar de tomar la mitad del intervalo, como siguiente punto de acotamiento de la raíz, tal como se haría en la técnica de la bipartición, se toma el punto que suministra la regla de la secante; es decir la intersección del eje x con la recta que une los dos puntos de la función asociados a las dos abscisas de partida. Este punto se calcula aplicando la regla de la secante con un punto por encima y otro por debajo de la raíz.



Este método tiene una convergencia más rápida que el método de la bipartición, pero a expensas de un algoritmo más complejo.

Ejemplo. Encontrar un cero de la función $f(x) = 3x + \sin x - e^x$ en el intervalo $[0, 1]$, por el método de la secante y de la falsa posición.

Comprobamos, en primer lugar, los valores de la función en los extremos del intervalo:

$$f(0) = -1 \quad \text{y} \quad f(1) = 1.123189$$

Efectivamente, por ser la función de distinto signo en los dos puntos del intervalo, debe existir una raíz en $[0, 1]$.

- **Con el método de la secante:** $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right]$

Iteración	x_0	x_1	x_2	$f(x_2)$
1	0	1	0.4709896	0.2651588
2	1	0.4709896	0.3075084	-0.1348221
3	0.4709896	0.3075084	0.3626132	0.0054785
4	0.3075084	0.3626132	0.3604615	0.0000995
5	0.3626132	0.3604615	0.3604217	$-1.14 \cdot 10^{-7}$
6	0.3604615	0.3604217	0.3604217	$3.55 \cdot 10^{-8}$

Por tanto $r = 0.3604217$, encontrándose un valor que se repite, con siete cifras decimales, en 6 iteraciones.

- **Con el método de la falsa posición.**

Con este método debemos de tener en cuenta que el valor de la función en el extremo inferior del intervalo, donde tenemos encerrada la raíz, va a ser siempre del mismo signo, en nuestro caso particular siempre negativo, debiéndose intercambiar x_2 por x_0 ó x_1 , en la siguiente tabla, dependiendo del signo de $f(x_2)$.

Iteración	x_0	x_1	x_2	$f(x_2)$
1	0	1	0.4709896	0.2651588
2	0	0.4709896	0.3722771	0.02953367
3	0	0.3722771	0.3615977	0.002941
4	0	0.3615977	0.3605374	$2.89 \cdot 10^{-4}$
5	0	0.3605374	0.3604331	$2.84 \cdot 10^{-5}$
6	0	0.3604331	0.3604228	$2.79 \cdot 10^{-6}$

En la sexta iteración el valor para la raíz es $r = 0.36042$.

El método “regula falsi” converge más lentamente que el de la secante porque lo hace desde un solo lado de la raíz. Al tener una convergencia más lenta y ser algo más complejo en su implementación, normalmente se prefiere el de la secante al de la falsa posición.

6.7. Polinomios y ecuación característica de un sistema físico.

En Física existen diversos sistemas (dispositivos mecánicos, circuitos eléctricos, etc.) cuyo comportamiento es descrito a través de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes. Si el sistema es de segundo orden, su ecuación diferencial toma la forma

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = F(t),$$

donde y es la variable dependiente que se quiere estudiar, t la independiente (en muchas ocasiones el tiempo), $F(t)$ es la acción externa y a_0 , a_1 , y a_2 son coeficientes reales, supuesto que el sistema sea un sistema real.

La solución de la ecuación diferencial mostrada anteriormente se puede conseguir como suma de la solución general de la ecuación diferencial homogénea con una solución particular de la ecuación general (no homogénea), siendo la ecuación diferencial homogénea la que se obtiene con la anulación de la acción externa; es decir,

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0.$$

El estudio de la ecuación diferencial homogénea es importante porque representa la evolución propia del sistema, una vez la acción externa ha desaparecido. La solución de la ecuación diferencial homogénea es de la forma $y(t) = e^{\gamma t}$. Si esta función se sustituye en la ecuación anterior, se obtiene

$$a_2 \gamma^2 e^{\gamma t} + a_1 \gamma e^{\gamma t} + a_0 e^{\gamma t} = 0$$

y cancelando los términos exponenciales

$$a_2 \gamma^2 + a_1 \gamma + a_0 = 0$$

que no es más que una ecuación cuya solución son las raíces del polinomio en γ asociado a la ecuación diferencial y que recibe el nombre de **polinomio característico**.

Este polinomio tiene dos raíces γ_1 y γ_2 :

$$\left. \begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2} \right.$$

pudiéndose dar diferentes posibilidades. Si el discriminante es positivo ($a_1^2 - 4a_2 a_0 > 0$), las raíces son reales y la solución general de la homogénea queda

$$y(t) = A e^{\gamma_1 t} + B e^{\gamma_2 t}$$

donde A y B son constantes que se determinan por las condiciones iniciales. Este es el denominado **caso sobreamortiguado**; en él, una o las dos raíces deben de ser negativas porque de lo contrario tendríamos una solución que aumenta exponencialmente con el tiempo, en un sistema en ausencia de excitación externa, lo cual es incompatible con las leyes de conservación.

Si el discriminante es nulo, tendremos una única raíz γ y la solución de la ecuación diferencial homogénea puede ser formulada como

$$y(t) = (A + Bt)e^{\gamma t}$$

Este es el llamado **caso críticamente amortiguado** y la compatibilidad con la condiciones físicas exige de nuevo valores negativos para γ .

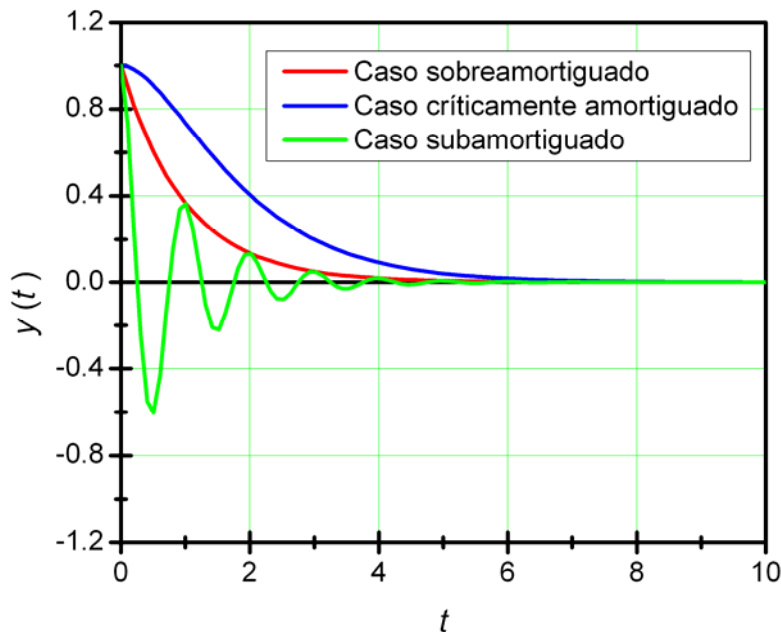
Si el discriminante es negativo, $(a_1^2 - 4a_2a_0) < 0$, las raíces son números complejos conjugados

$$\left. \begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{matrix} \right\} = \alpha \pm j\omega$$

donde $j = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. Este es el **caso subamortiguado** cuya solución toma la forma

$$y(t) = Ae^{\alpha t} e^{j\omega t} + Be^{\alpha t} e^{-j\omega t}$$

que con $e^{-j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ representa una respuesta oscilatoria, amortiguada por el factor $e^{\alpha t}$.



6.8. Raíces de polinomios.

En el caso de que la función a la que deseamos encontrar una raíz sea un polinomio, evidentemente podemos seguir aplicando los métodos anteriormente descritos. Sin embargo, las características especiales de los polinomios hacen que se haya desarrollado o particularizado métodos específicos para ellos.

Un polinomio en la forma

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

con valores $a_k \in \mathbb{R}$, tiene grado n si el coeficiente líder a_n es distinto de cero ($a_n \neq 0$). Factorizando, el polinomio puede ser expresado en la forma

$$P_n(x) = a_n (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n),$$

Expresión que muestra cómo un polinomio de grado n posee n raíces; si bien, algunas de ellas pueden ser iguales entre sí, llamándose multiplicidad de una raíz al número al número de veces que aparece una de ellas. También conviene recordar que las raíces z_k pueden ser reales o complejas. En este último caso, deben de aparecer en parejas de complejos conjugados dado que los coeficientes a_k son reales.

En el caso de que las raíces sean enteras, puede intentarse la factorización y el cálculo de las raíces a través de la conocida Regla de Ruffini. Por ejemplo, el polinomio

$$\begin{aligned} P_5(x) &= x^5 - 7x^4 - 3x^3 + 79x^2 - 46x - 120 = \\ &= (x+1)(x-4)(x-5)(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

tiene 5 raíces reales. Si desconociésemos el valor de estas raíces, podríamos calcularlas con esta regla, que busca divisiones exactas del polinomio por factores $(x-z_k)$. A continuación, se recuerda el cálculo para la raíz $x = 5$:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -7 & -3 & 79 & -46 & -120 \\ 5 & & 5 & -10 & -65 & 70 & 120 \\ \hline & 1 & -2 & -13 & 14 & 24 & 0 \end{array}$$

Al ser la división exacta hemos comprobado que $(x-5)$ es un factor de $P_5(x)$.

6.8.1. Deflación.

Se conoce como deflación el proceso por el cual se cancela un factor lineal de un polinomio $P_n(x)$, obteniéndose otro polinomio de grado $n-1$, $Q_{n-1}(x)$, que contiene las mismas raíces que excepto la que se ha utilizado para llevar a cabo la deflación:

$$Q_{n-1}(x) = \frac{P_n(x)}{x - z_k},$$

siendo $(x - z_k)$ un factor de $P_n(x)$.

En el ejemplo anterior,

$$Q_{n-1}(x) = \frac{P_n(x)}{x - 5} = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24.$$

6.8.2. Algoritmo de Horner.

Este algoritmo puede entenderse como una ampliación o generalización de la regla de Ruffini. También se conoce con los nombres de **multiplicación anidada** y **división sintética**.

Sea $P_n(x)$ un polinomio de grado n y z_0 un número real o complejo, la división $\frac{P_n(x)}{z - z_0}$ nos dará como cociente un polinomio $Q_{n-1}(x)$ y un resto R , tal que

$$P_n(x) = Q_{n-1}(x)(z - z_0) + R$$

Si en la expresión anterior sustituimos x por z_0 , $P_n(z_0) = R$, y

$$P_n(x) = Q_{n-1}(x)(z - z_0) + P_n(z_0)$$

que nos indica que el valor del polinomio en z_0 , $P_n(z_0)$, está dado por el resto de la división $\frac{P_n(x)}{z - z_0}$.

Una forma útil de llevar acabo estas operaciones es la división sintética. Si

$$Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^n - b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0,$$

la división podemos llevarla a cabo de la forma

z_0	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\cdots	a_1	a_0
		$z_0 b_{n-1}$	$z_0 b_{n-2}$	\cdots	$z_0 b_1$	$z_0 b_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\cdots	b_0	$P_n(z_0)$

de donde

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n \\
b_{n-2} &= a_{n-1} + z_0 b_{n-1} \\
b_{n-3} &= a_{n-2} + z_0 b_{n-2} \\
&\dots \\
b_k &= a_{k+1} + z_0 b_{k+1} \\
&\dots \\
b_0 &= a_1 + z_0 b_1 \\
P_n(z_0) &= a_0 + z_0 b_0
\end{aligned}$$

Ejemplo. Evalúese $P_4(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x - 2$ en $x = 3$ mediante el algoritmo de Horner.

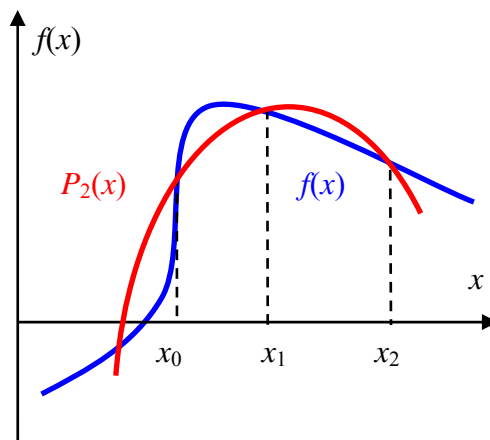
$$\begin{array}{r|rrrrr}
& 1 & -4 & 7 & -5 & -2 \\
3 & & 3 & -3 & 12 & 21 \\
\hline
& 1 & -1 & 4 & 7 & 19
\end{array}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= (x-3)(x^3 - x^2 + 4x + 7) + 19 \\
P_4(x) &= 19
\end{aligned}$$

6.8.3. Método de Müller.

El método de Müller puede ser aplicado a cualquier función $f(x)$ para calcular alguna raíz r tal que $f(r) = 0$, aunque con frecuencia es usado con polinomios cuando se quieren encontrar sus raíces complejas. Es similar al método de la secante, pero en lugar de trazar una línea recta entre dos valores de la función cercanos a la raíz buscada, traza una parábola utilizando tres puntos de la función $\{f(x_0), f(x_1), f(x_2)\}$, cercanos a la raíz.



Por sencillez, a la parábola que se va a insertar entre los puntos $\{[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)]\}$ la vamos a expresar como

$$P_2(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

y sus coeficientes $\{a, b, c\}$ los podemos obtener de las condiciones

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c$$

$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c$$

$$f(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c$$

De la tercera ecuación anterior, $c = f(x_2)$ y sustituyendo este resultado en las dos ecuaciones anteriores, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} f(x_0) - f(x_2) &= a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) \\ f(x_1) - f(x_2) &= a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) \end{aligned} \right\}$$

Definiendo los parámetros siguientes

$$h_0 = x_1 - x_0, \quad h_1 = x_2 - x_1 \quad \Rightarrow \quad h_0 + h_1 = x_2 - x_0$$

$$\delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0}, \quad \delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \delta_0 h_0 + \delta_1 h_1 = f(x_2) - f(x_0),$$

el sistema de ecuaciones toma la forma

$$\left. \begin{aligned} (h_0 + h_1)b - (h_0 + h_1)^2 a &= h_0 \delta_0 + h_1 \delta_1 \\ h_1 b - h_1^2 a &= h_1 \delta_1 \end{aligned} \right\}$$

que da como resultado

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 - h_0}, \quad b = ah_1 + \delta_1, \quad c = f(x_2)$$

Obtenidos los parámetros a , b y c del polinomio $P_2(x)$, podemos resolver la ecuación $P_2(x) = 0$ de la que obtenemos dos soluciones o raíces de la parábola $P_2(x)$:

$$x - x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = x_2 + \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entre las dos soluciones obtenidas, debemos de discriminar qué valor le asignamos a x_3 que será una mejor aproximación a la raíz de $f(x)$ que las existentes $\{x_0$,

$x_1, x_2\}$. El proceso debe repetirse ahora con los valores $\{x_1, x_2, x_3\}$ hasta encontrar un valor satisfactorio para la raíz buscada.

Ejemplo con raíz real: Calcular una raíz de $f(x) = x^3 - 13x - 12$ mediante el método de Müller con los valores iniciales $\{x_0 = 4, x_1 = 5.5, x_2 = 5\}$.

En primer lugar se evalúa la función en los puntos iniciales

$$f(4.5) = 20.625, \quad f(5.5) = 82.875, \quad f(5) = 48$$

A continuación se calculan los parámetros h_0, h_1, δ_0 y δ_1 :

$$h_0 = 5.5 - 4.5 = 1, \quad h_1 = 5 - 5.5 = -0.5,$$

$$\delta_0 = \frac{82.875 - 20.625}{5.5 - 4.5} = 62.25, \quad \delta_1 = \frac{48 - 82.875}{5 - 5.5} = 69.75,$$

que sustituidos en la expresiones para los coeficientes de la parábola, dan como resultado

$$a = \frac{69.75 - 62.25}{-0.5 + 1} = 15, \quad b = 15(-0.5) + 69.75 = 62.25, \quad c = 48.$$

Por tanto, $P_2(x) = 15(x - x_2)^2 + 62.25(x - x_2) + 48$. Finalmente, haciendo $P_2(x) = 0$, se obtiene

$$x = 5 + \frac{-62.25 \pm \sqrt{62.25^2 - 4 \cdot 15 \cdot 48}}{2 \cdot 15} = \begin{cases} 3.976487 \\ 1.873513 \end{cases}$$

De los resultados obtenidos, elegimos $x_3 = 3.976487$ y volvemos a iniciar el proceso con $\{x_0 = 5.5, x_1 = 5, x_2 = 3.976487\}$. Esta nueva etapa aporta una mejor aproximación para la raíz en 4.00105 y, con una posterior iteración, se encuentra el valor 4.0 para la raíz. Este último valor vuelve a repetirse con el mismo valor en posteriores iteraciones.

Ejemplo con raíz compleja: El polinomio $P_4(x) = x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10$ puede factorizarse en la forma

$$P_4(x) = (x - 1 + j)(x - 1 - j)(x - 1 + 2j)(x - 1 - 2j),$$

teniendo sólo raíces complejas conjugadas. Calcular estas raíces haciendo uso del método de Müller.

Para resolver el problema vamos a dar los mismos pasos ya marcados en el desarrollo teórico y en el ejemplo anterior. Estos se implementan en el siguiente

algoritmo de *Mathematica* en el que partiendo de los valores iniciales $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2\}$ se obtiene la raíz compleja $x = 1 + j$.

```
f[x]:=x^4-4 x^3+11 x^2-14 x+10
Solve[f[x]==0,x] (*Se comprueban las raíces del polinomio*)
{{x->1-i},{x->1+i},{x->1-2 i},{x->1+2 i}}
x0=0.;
x1=1.;
x2=2.;
(*Implementación algoritmo Müller*)
Do[h0=x1-x0;
  h1=x2-x1;
  d0=(f[x1]-f[x0])/h0;
  d1=(f[x2]-f[x1])/h1;
  a=(d1-d0)/(h1+h0);
  b=a h1+d1;
  c=f[x2];
  p2[x]:=a (x-x2)^2+b (x-x2)+c;
  n=Solve[p2[x]==0,x] ;
  x0=x1;
  x1=x2;
  x2=n[[2,1,2]]/N;
  Print[x2] ,
{i,6}]
1. +0.816497 i
1.01069 +0.945003 i
1.00329 +0.994773 i
1.00003 +0.999971 i
1. +1. i
1. +1. i
```

Obtenida esta raíz, el polinomio debe de contener también la raíz compleja conjugada $x = 1 - j$. La otra pareja de raíces complejas conjugadas puede obtenerse fácilmente llevando a cabo la deflación del polinomio de 4º grado para convertirlo en uno de 2º grado, del cual se pueden obtener las raíces sin más que resolver la ecuación de 2º grado asociada.

6.8.4. Método de Bairstow.

El método de Bairstow aporta raíces complejas de un polinomio $P_n(x)$ siguiendo un proceso similar al algoritmo de Horner, pero dividiendo el polinomio $P_n(x)$ por un polinomio cuadrático $(x^2 - ux - v)$. Esto es, si hacemos

$$\begin{array}{l} P_n(x) \quad | \quad x^2 - ux - v \\ R_1(x) \quad Q_{n-2}(x) \end{array}$$

el resto $R_1(x)$ es un polinomio lineal (ya que estamos utilizando como cociente un polinomio de grado 2) que dependerá de u y v . Haciendo $R_1(x,u,v) = 0$ podemos encontrar los valores de u y v que hacen que el resto de la división sea nulo y que, por tanto, convierten a $(x^2 - ux - v)$ en un polinomio que contiene dos raíces complejas conjugadas de $P_n(x)$.

Ejemplo: Calcular mediante el método de Bairstow las raíces complejas del polinomio

$$P_4(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 11x + 10.$$

Haciendo la división de $P_4(x)$ entre $(x^2 - ux - v)$:

x^4	$+x^3$	$+x^2$	$+11x$	$+10$	$x^2 - ux - v$
$-x^4$	$+ux^3$	$+vx^2$			$x^2 + (u+1)x + [(v+1)+u(u+1)]$
	$+(u+1)x^3$	$+(v+1)x^2$	$+11x$		
	$-(u+1)x^3$	$+u(u+1)x^2$	$+v(u+1)x$		
	$+[(v+1)+u(u+1)]x^2$	$+[(v+1)+11]x$	$+10$		
	$-[(v+1)+u(u+1)]x^2$	$+u[(v+1)+u(u+1)]x$	$+v[(v+1)+u(u+1)]$		
$\{v(u+1)+11+u[(v+1)+u(u+1)]\}x - v[(v+1)+u(u+1)]+10$					

se obtiene el resto $R_1(x)$ que lo hacemos cero, imponiendo que sean nulos el coeficiente que acompaña a x y el término independiente. Esto es:

$$\left\{ \begin{array}{l} v(u+1)+11+u[(v+1)+u(u+1)]=0 \\ v[(v+1)+u(u+1)]+10=0 \end{array} \right.$$

Las soluciones reales de este sistema son

$$\{u=2, \quad v=-5\} \quad \text{y} \quad \{u=-3, \quad v=-2\}$$

Con la primera alternativa, el divisor $(x^2 - ux - v)$ toma la forma:

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm 4j}{2} = 1 \pm 2j$$

que nos aporta dos raíces complejas conjugadas para el polinomio. Mientras que con la segunda alternativa queda

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

que son las raíces reales del polinomio. Por tanto

$$\begin{aligned} P_4(x) &= x^4 + x^3 + x^2 + 11x + 10 = \\ &= (x^2 - 2x + 5)(x+1)(x+2) = \\ &= (x-1-2j)(x-1+2j)(x+1)(x+2). \end{aligned}$$