Métodos Numéricos II

Tema 3: Métodos Numéricos para resolver PVI

Teresa E. Pérez y Miguel Piñar

Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

18 de mayo de 2015

Introducción

Ecuación algebraica

Igualdad en la que intervienen una o más incógnitas.

Ejemplo: $x^2 - 2x + 1 = 0$

Introducción

Ecuación algebraica

Igualdad en la que intervienen una o más incógnitas.

Ejemplo: $x^2 - 2x + 1 = 0$

Solución

Valor particular de la(s) incógnita(s) de una ecuación, que la satisfacen.

Ejemplo: $x = 1$

Ecuaciones diferenciales

Ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.)

Ecuación funcional en la que intervienen la función incógnita y sus derivadas.

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0$$

- t variable independiente
- $x = x(t)$ variable dependiente
- n orden de la ecuación

Ejemplo: E.d.o. de orden $n = 1$:

$$x(t)^2 + x'(t)^2 = 1.$$

Ecuaciones diferenciales

Solución de la ecuación diferencial

Función $x = \phi(t)$, con $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica

$$F(t, \phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{(n)}(t)) = 0$$

para todo t en el intervalo I.

Observación

Para que la función $\phi(t)$ sea solución debe verificar

$$\phi(t) \in \mathcal{C}^n(I).$$

Ejemplo: $x(t) = \sin t$ es una solución de $x(t)^2 + x'(t)^2 = 1$ pues

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Ecuaciones diferenciales

Solución de la ecuación diferencial

Función $x = \phi(t)$, con $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica

$$F(t, \phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{(n)}(t)) = 0$$

para todo t en el intervalo I.

Observación

Para que la función $\phi(t)$ sea solución debe verificar

$$\phi(t) \in \mathcal{C}^n(I).$$

Ejemplo: $x(t) = \sin t$ es una solución de $x(t)^2 + x'(t)^2 = 1$ pues

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

¿ Hay otra solución ?

Ecuaciones diferenciales

Definiciones:

- Una ecuación diferencial se dice autónoma si no depende explícitamente de t

$$F(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

(pero siempre $x = x(t)$)

- Una ecuación diferencial se dice lineal si la función F es lineal en $x, x', \dots, x^{(n)}$
- Una ecuación diferencial se dice que está en forma normal si la derivada $x^{(n)}$ está despejada

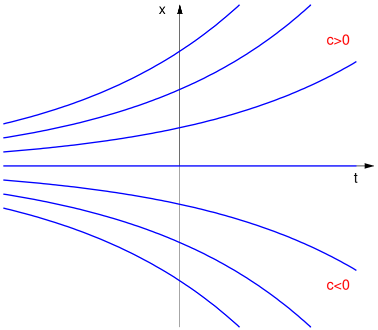
$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

Ejemplo

Dada la ecuación diferencial

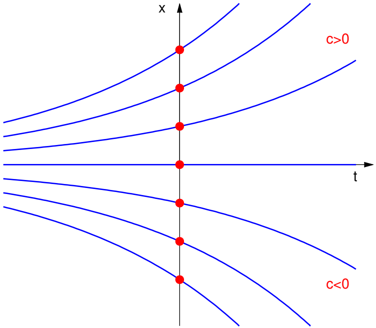
$$x' = x,$$

las funciones $x(t) = C\,e^t$, para $C \in \mathbb{R}$, son soluciones de la ecuación.



Ejemplo

Observamos que por cada punto del plano pasa una única curva solución. La curva queda determinada por su valor en el punto $t = 0$.



Problema de Cauchy para una EDO

Un problema de Cauchy (también llamado problema de valor inicial o PVI) consiste en resolver una EDO sujeta a unas ciertas condiciones iniciales.

De ahora en adelante supondremos una ecuación diferencial de primer orden en forma normal

Problema de Cauchy o de valores iniciales (PVI)

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \quad t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

Primeros ejemplos

Ejemplo 1

La función $x(t) = 500\, e^t$ es una solución del problema de Cauchy de primer orden

$$\begin{cases} x' = x, & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 500 \end{cases}$$

Primeros ejemplos

Ejemplo 1

La función $x(t) = 500\, e^t$ es una solución del problema de Cauchy de primer orden

$$\begin{cases} x' = x, & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 500 \end{cases}$$

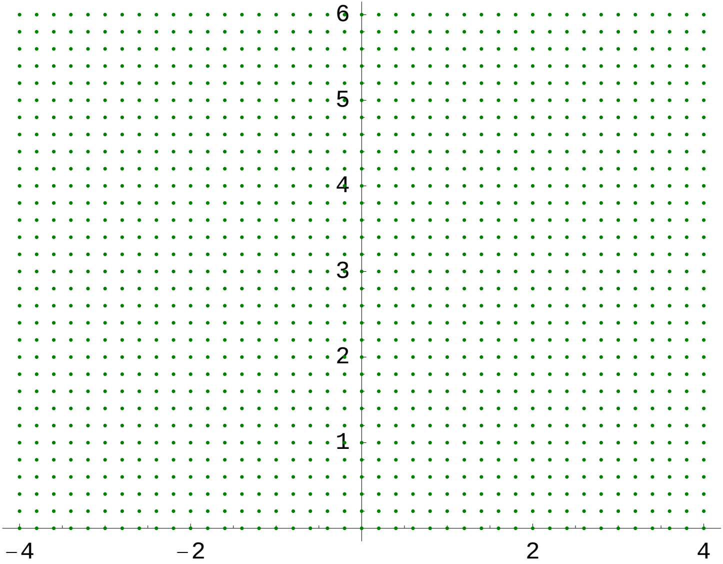
Ejemplo 2

Consideremos la e.d.o.

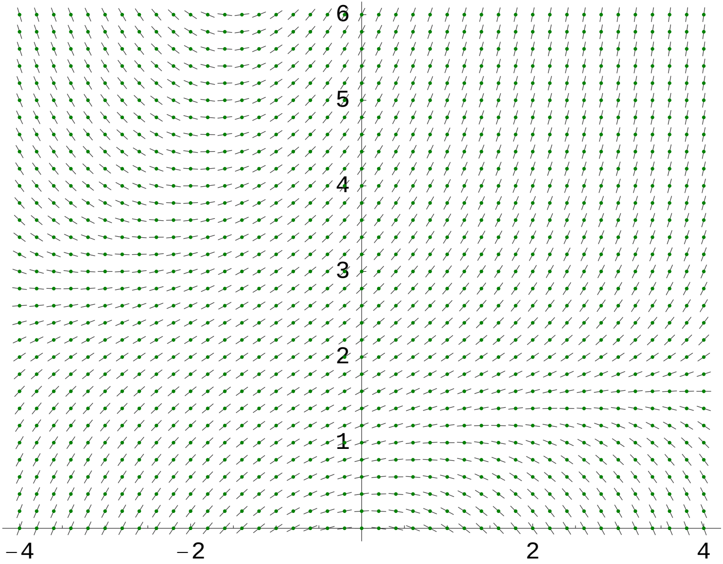
$$x' = \frac{1}{3}(t\,x - 2\,t + x).$$

A partir de la ecuación, para cada punto $t \in [-4, 4]$, $x \in [0, 6]$, podemos calcular x'. La representación en el plano se llama campo de direcciones o campo de pendientes.

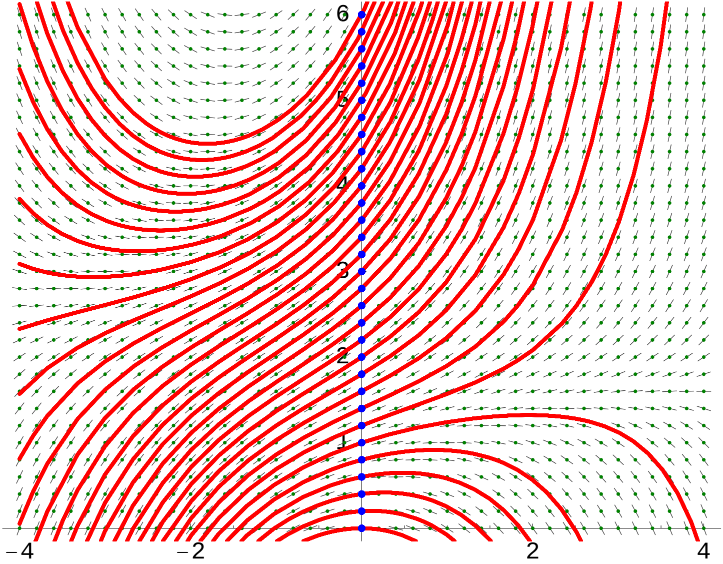
Interpretación geométrica: campo de pendientes



Interpretación geométrica: campo de pendientes



Interpretación geométrica: campo de pendientes



Problema de Cauchy para el ejemplo 2

Podemos considerar el PVI

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(t\,x - 2\,t + x), \quad t \in [-4, 4], \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Una solución será la curva del campo de pendientes que pase por el punto $(0, 1)$.

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema (local de Picard-Lindelöf)

Sea $f(t,x) : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde Ω es un conjunto abierto, una función continua y localmente Lipschitziana respecto de x . Entonces, dado $(t_0, x_0) \in \Omega$, podemos encontrar un intervalo cerrado $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$ donde existe una única solución del siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

que cumple que los pares $(t, x(t)) \in \Omega, \forall t \in I_\alpha$.

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema (global de Picard-Lindelöf)

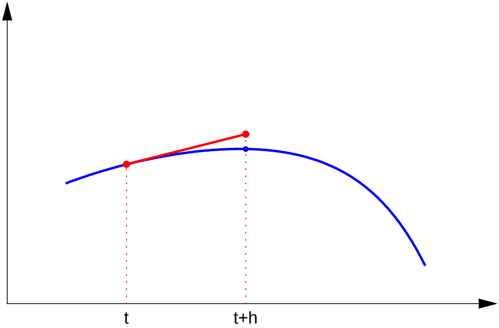
Si f y $\partial f/\partial x$ son continuas en el rectángulo centrado en (t_0, x_0)

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n / |t - t_0| \leq \alpha, \quad \|x - x_0\| \leq \beta\},$$

entonces el p.v.i. tiene una única solución $x(t)$ definida en el intervalo $|t - t_0| < \text{mín}\{\alpha, \beta/M\}$, donde M es el máximo de la función $|f(t, x)|$ en el rectángulo D.

Deducción del método de Euler

$$x(t+h) = x(t) + x'(t)h + x''(\xi)\frac{h^2}{2} = x(t) + hf(t, x(t)) + x''(\xi)\frac{h^2}{2}$$



El método de Euler

Partición del intervalo $[t_0, t_0 + a]$ en N partes iguales

$$t_n = t_0 + nh,\ \ h = \frac{a}{N},\ \ n = 0, \ldots, N$$

El método de Euler

Partición del intervalo $[t_0, t_0 + a]$ en N partes iguales

$$t_n = t_0 + nh, \; h = \frac{a}{N}, \; n = 0, \dots, N$$

Notaremos

- $x(t_n)$ el valor exacto de la solución
- x_n el valor aproximado en t_n

El método de Euler

Partición del intervalo $[t_0, t_0 + a]$ en N partes iguales

$$t_n = t_0 + nh, \; h = \frac{a}{N}, \; n = 0, \ldots, N$$

Notaremos

- $x(t_n)$ el valor exacto de la solución
- x_n el valor aproximado en t_n

Generamos

$$x(t_1) = x(t_0 + h) \approx x(t_0) + x'(t_0)h = x(t_0) + hf(t_0, x(t_0)) = x_0 + hf(t_0, x_0)$$

esto es

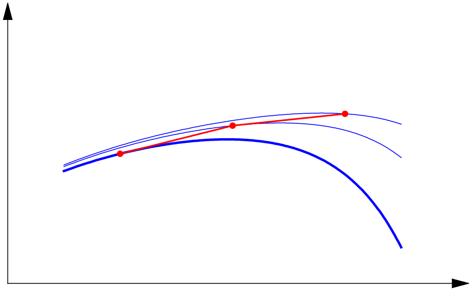
$$x(t_1) \approx x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0)$$

El método de Euler

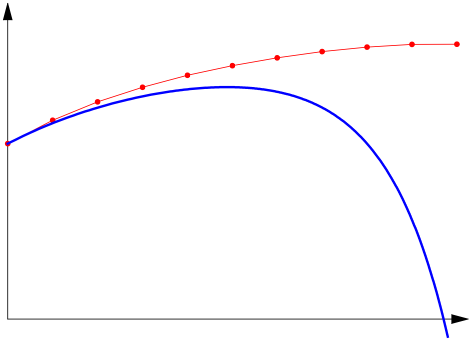
Método de Euler

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t_0) \\ x_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

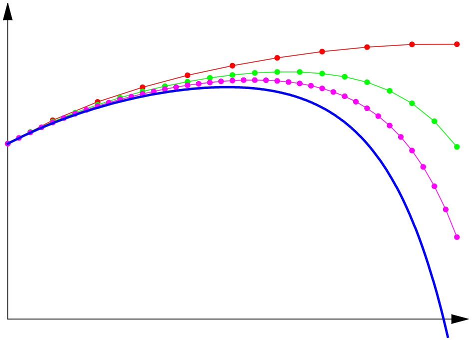
Acumulación de errores en el método de Euler



El método de Euler, h=0.4



El método de Euler, h=0.4, h=0.2, h=0.1



Convergencia del método de Euler

Lema 1

Sean $x \geq -1$ y $m \geq 0$ entonces $0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}$.

Lema 2

Sean t, s dos números positivos y $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión que verifica $a_0 > -t/s$, y $a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t$, $\forall i \geq 0$, entonces

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}, \quad \forall i \geq 0.$$

Convergencia del método de Euler

Teorema (Convergencia del método de Euler)

Supongamos que f es continua y verifica una condición de Lipschitz (uniforme en t) de constante L en la variable x,

$$|f(t,x) - f(t,x^*)| \leq L|x - x^*|, \quad \forall x, x^*$$

y supongamos que existe una constante M tal que

$$|x''(t)| < M, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + a],$$

entonces se verifica

$$|x(t_i) - x_i| \leq \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i - t_0)} - 1\right].$$

Métodos de discretización

Partición del intervalo $[t_0, t_0 + a]$ en N partes iguales

$$t_n = t_0 + nh,\ \ h = \frac{a}{N},\ \ n = 0, \ldots, N$$

Métodos de discretización

Partición del intervalo $[t_0, t_0 + a]$ en N partes iguales

$$t_n = t_0 + nh, \; h = \frac{a}{N}, \; n = 0, \ldots, N$$

Notaremos

- $x(t_n)$ el valor exacto de la solución
- x_n el valor aproximado en t_n

Métodos de discretización

Partición del intervalo $[t_0, t_0 + a]$ en N partes iguales

$$t_n = t_0 + nh, \;\; h = \frac{a}{N}, \;\; n = 0, \ldots, N$$

Notaremos

- $x(t_n)$ el valor exacto de la solución
- x_n el valor aproximado en t_n

Métodos iterativos de k pasos:
utilizan $x_{n-k+1}, \ldots, x_n$ para obtener x_{n+1}, partiendo de $x_0, \ldots, x_{k-1}$.

Métodos de discretización

Partición del intervalo $[t_0, t_0 + a]$ en N partes iguales

$$t_n = t_0 + nh, \; h = \frac{a}{N}, \; n = 0, \ldots, N$$

Notaremos

- $x(t_n)$ el valor exacto de la solución
- x_n el valor aproximado en t_n

Métodos iterativos de k pasos:
utilizan $x_{n-k+1}, \ldots, x_n$ para obtener x_{n+1}, partiendo de $x_0, \ldots, x_{k-1}$.
Explícitos: $x_{n+1} = F(x_{n-k+1}, \ldots, x_n)$;
Implícitos: $F(x_{n-k+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0$ (resolviendo la ecuación)

Métodos de Taylor

Métodos de Taylor de orden r:

Métodos de 1 paso, explícitos

$$x_{n+1} = x_n + hf^{(0)}(t_n, x_n) + \frac{h^2}{2!} f^{(1)}(t_n, x_n) + \cdots + \frac{h^r}{r!} f^{(r-1)}(t_n, x_n)$$

donde

$$\begin{aligned} f^{(0)}(t,x) &= f(t,x) \\ f^{(k+1)}(t,x) &= \frac{\partial f^{(k)}(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial f^{(k)}(t,x)}{\partial x} f(t,x) \end{aligned}$$

Métodos de Taylor

Método de Taylor de orden 1: Método de Euler

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$$

Métodos de Taylor

Método de Taylor de orden 1: Método de Euler

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$$

Método de Taylor de orden 2:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial x} f(t_n, x_n)\right)$$

Métodos de Taylor

Método de Taylor de orden 1: Método de Euler

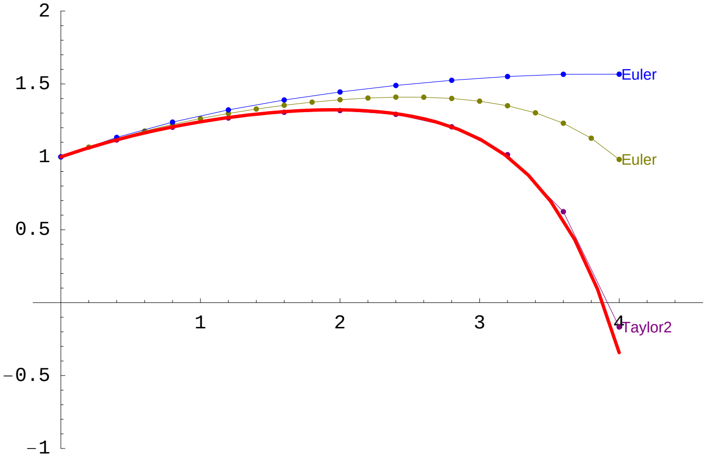
$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$$

Método de Taylor de orden 2:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial x} f(t_n, x_n)\right)$$

Inconveniente Mayor precisión, pero hay que evaluar derivadas de f.

Métodos de Taylor



Métodos de Runge-Kutta

Métodos de Runge-Kutta con R evaluaciones:

Son métodos de 1 paso, explícitos

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h \sum_{r=1}^{R} c_r K_r, \\
K_1 &= f(t_n, x_n) \\
K_r &= f\left(t_n + h a_r, x_n + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} K_s \right), \quad r = 2, 3, \ldots, R
\end{aligned}
$$

$$
\text{donde} \sum_{r=1}^{R} c_r = 1, \qquad a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}, \quad r = 2, 3, \ldots, R
$$

Métodos de Runge-Kutta con R evaluaciones:

Tabla de Butcher

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 = a_1 & & & & & \\
a_2 & b_{21} & & & & \\
a_3 & b_{31} & b_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
a_R & b_{R1} & b_{R2} & \dots & b_{RR-1} & \\
\hline
 & c_1 & c_2 & \dots & c_{R-1} & c_R
\end{array}
$$

Runge-Kutta con 1 o 2 evaluaciones

Runge-Kutta con 1 evaluación: Método de Euler

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$$

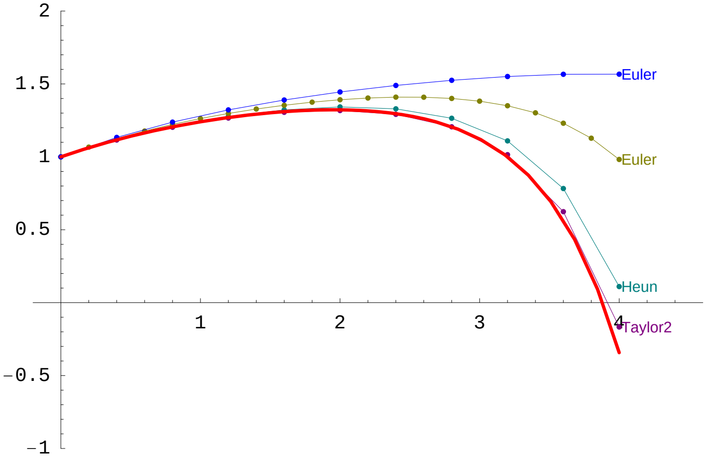
Método de Heun

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n) + \frac{h}{2} f(t_n + h, x_n + hf(t_n, x_n))$$

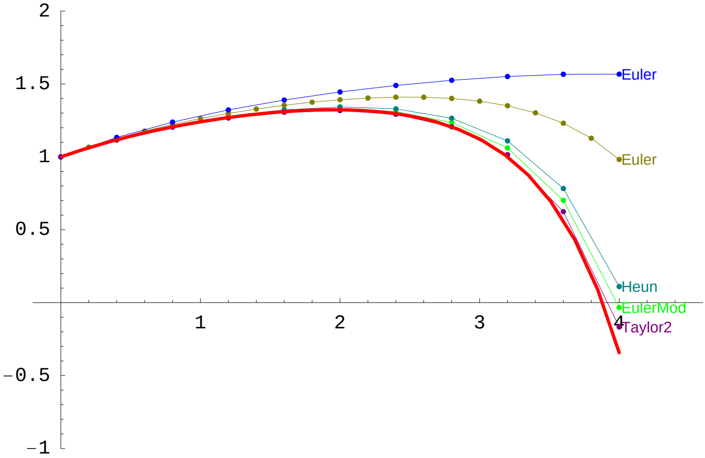
Método de Euler modificado:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n))$$

Método de Heun



Método de Euler modificado

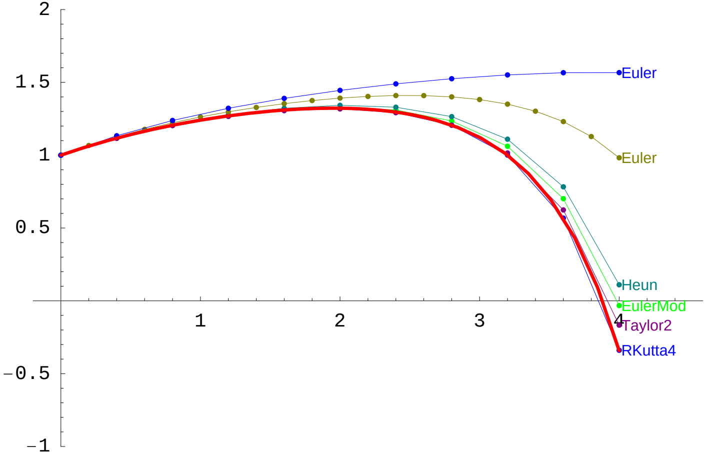


Método de Runge-Kutta con 4 evaluaciones:

Método de Runge-Kutta clásico

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \tfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 &= f(t_n, x_n) \\
K_2 &= f(t_n + \tfrac{h}{2}, x_n + \tfrac{h}{2}K_1) \\
K_3 &= f(t_n + \tfrac{h}{2}, x_n + \tfrac{h}{2}K_2) \\
K_4 &= f(t_n + h, x_n + hK_3)
\end{aligned}
$$

Método de Runge-Kutta con 4 evaluaciones:



Métodos de un paso generales

- Forma general

$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h)$$

Métodos de un paso generales

- Forma general
$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h)$$
- El *error local de discretización* en el punto t_{n+1} se define como la cantidad
$$\mathcal{E}_{n+1}(h) = \frac{1}{h}\big(x(t_{n+1}) - x(t_n) - h\Phi\big(t_n, x(t_n), h\big)\big)$$

Métodos de un paso generales

- Forma general
$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h)$$
- El *error local de discretización* en el punto t_{n+1} se define como la cantidad
$$\mathcal{E}_{n+1}(h) = \frac{1}{h}\big(x(t_{n+1}) - x(t_n) - h\Phi\big(t_n, x(t_n), h\big)\big)$$
- El *error global* se define como $e_{n+1} = x(t_{n+1}) - x_{n+1}$

Orden de los métodos de un paso

Orden de un método

Un método es de orden p si es p el mayor entero para el cual se verifica

$$\mathcal{E}(h) = \frac{1}{h}\big(x(t+h) - x(t) - h\Phi\big(t, x(t), h\big)\big) = O(h^p),$$

donde $x(t)$ es la solución teórica del problema de valores iniciales

Orden de los métodos de un paso

Orden de un método

Un método es de orden p si es p el mayor entero para el cual se verifica

$$\mathcal{E}(h) = \frac{1}{h}\big(x(t+h) - x(t) - h\Phi\big(t, x(t), h\big)\big) = O(h^p),$$

donde $x(t)$ es la solución teórica del problema de valores iniciales

- El método de Euler es orden 1.
- El método de Taylor de orden p es, realmente, orden p.
- Los métodos de Heun y de Euler Modificado son de orden 2.
- El método de Runge-Kutta clásico es orden 4.

Desarrollo de Taylor en dos variables

Supongamos que $f(t,x)$ y todas sus derivadas parciales de orden $\leq n+1$ existen y son continuas en $D = \{(t,x)/a \leq t \leq b,\ c \leq x \leq d\}$, y sean $h_1 > 0$ y $h_2 > 0$. Para todo $(t,x) \in D$ existen ξ entre t y $t+h_1$, y μ entre x y $x+h_2$ tales que

$$f(t+h_1, x+h_2) = P_n(t+h_1, x+h_2) + R_n(t+h_1, x+h_2),$$

donde

$$\begin{aligned} P_n(t+h_1, x+h_2) &= f(t,x) + \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) + 2\,h_1\,h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t,x)\right. \\ &\qquad \left. + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right] + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} h_1^{n-i}\,h_2^i \frac{\partial^n f}{\partial t^{n-i} \partial x^i}(t,x)\right], \\ R_n(t+h_1, x+h_2) &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} h_1^{n+1-i}\,h_2^i \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-i} \partial x^i}(\xi, \mu). \end{aligned}$$

Consistencia de los métodos de un paso

Consistencia

Se dice que un método es consistente con el problema de valores iniciales si

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(x(t+h) - x(t) - h\Phi\big(t, x(t), h\big)\big) = 0$$

Consistencia de los métodos de un paso

Consistencia

Se dice que un método es consistente con el problema de valores iniciales si

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(x(t+h)-x(t)-h\Phi\big(t,x(t),h\big)\big)=0$$

En este caso el orden será $p \geq 1$

Consistencia de los métodos de un paso

Consistencia

Se dice que un método es consistente con el problema de valores iniciales si

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(x(t+h) - x(t) - h\Phi\big(t, x(t), h\big)\big) = 0$$

En este caso el orden será $p \geq 1$

Teorema

Un método es consistente si y sólo si

$$\lim_{h \to 0} \Phi\big(t, x(t), h\big) = f(t, x(t))$$

Estabilidad de los métodos de un paso

Estabilidad

Se dice que el método es estable si, cuando $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ son las soluciones de

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), && \text{con } x_0 \text{ dado,} \\ z_{n+1} &= z_n + h\big[\Phi(t_n, z_n, h) + \varepsilon_n\big], && \text{con } z_0 \text{ dado,} \end{aligned}$$

se tiene

$$\max_{1\le n\le N} |x_n - z_n| \le M_1|x_0 - z_0| + M_2 \max_{0\le n\le N-1} |\varepsilon_n|$$

donde M_1 y M_2 son constantes que no dependen de h.

Estabilidad de los métodos de un paso

Estabilidad

Se dice que el método es estable si, cuando $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ son las soluciones de

$$\begin{array}{rcll} x_{n+1} & = & x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), & \text{con } x_0 \text{ dado,} \\ z_{n+1} & = & z_n + h\big[\Phi(t_n, z_n, h) + \varepsilon_n\big], & \text{con } z_0 \text{ dado,} \end{array}$$

se tiene

$$\max_{1\le n\le N} |x_n - z_n| \le M_1 |x_0 - z_0| + M_2 \max_{0\le n\le N-1} |\varepsilon_n|$$

donde M_1 y M_2 son constantes que no dependen de h.

Basta con que $\Phi(t, x, h)$ verifique una condición de Lipschitz en la variable x

Convergencia de los métodos de un paso

Convergencia

Se dice que un método de un paso es convergente si

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-t_0}} x_n = x(t)$$

para todo $x \in [t_0, t_0 + a]$ y para toda solución

$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h)$$

Convergencia de los métodos de un paso

Convergencia

Se dice que un método de un paso es convergente si

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-t_0}} x_n = x(t)$$

para todo $x \in [t_0, t_0 + a]$ y para toda solución

$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h)$$

Teorema

Todo método de un paso consistente y estable es convergente

Métodos lineales multipaso

Un método lineal de k pasos tiene la forma

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i}, \quad \text{siendo } f_{n+i} = f(t_{n+i}, x_{n+i})$$

donde $\alpha_k = 1, \ |\alpha_0| + |\beta_0| > 0$.
El método será explícito si $\beta_k = 0$, e implícito en otro caso.

Construcción de los métodos multipaso

Mediante integración numérica: integramos la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ en el intervalo $[t_{n+r}, t_{n+k}] \quad (0 \leq r < k)$ y usando la igualdad:

$$x(t_{n+k}) - x(t_{n+r}) = \int_{t_{n+r}}^{t_{n+k}} x'(x)dt, \quad k > r$$

llegamos a

$$x(t_{n+k}) - x(t_{n+r}) = \int_{t_{n+r}}^{t_{n+k}} f(t, x(t))dt, \quad k > r$$

y se sustituye la integral por una fórmula de cuadratura con nodos: $t_{n+k}, t_{n+k-1}, \ldots, t_n$

Métodos de Adams-Bashforth

Métodos de Adams-Bashforth: se parte de la siguiente identidad:

$$x(t_{n+k}) - x(t_{n+k-1}) = \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} x'(x)dt,$$

es decir

$$x(t_{n+k}) - x(t_{n+k-1}) = \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} f(t, x(t))dt,$$

y se sustituye la integral por una fórmula de cuadratura con nodos: $t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+k-1}$.

Métodos de Adams-Bashforth

Son, pues, métodos explícitos de k pasos de la forma:

$$x_{n+k} - x_{n+k-1} = h(\beta_{k-1} f_{n+k-1} + \ldots + \beta_0 f_n)$$

k	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4
1	1				
2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$			
3	$\frac{5}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{23}{12}$		
4	$-\frac{9}{24}$	$-\frac{37}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{55}{24}$	
5	$\frac{251}{720}$	$-\frac{637}{360}$	$\frac{109}{30}$	$-\frac{1387}{360}$	$\frac{1901}{720}$

Métodos de Adams-Moulton

Métodos de Adams-Moulton: se parte de la siguiente identidad:

$$x(t_{n+k}) - x(t_{n+k-1}) = \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} x'(x)dt,$$

es decir

$$x(t_{n+k}) - x(t_{n+k-1}) = \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} f(t, x(t))dt,$$

y se sustituye la integral por una fórmula de cuadratura con nodos: $t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+k-1}, t_{n+k}$.

Métodos de Adams-Moulton

Son, pues, métodos implícitos de k pasos de la forma:

$$x_{n+k} - x_{n+k-1} = h(\beta_k f_{n+k} + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \ldots + \beta_0 f_n)$$

k	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
2	$-\frac{1}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{5}{12}$		
3	$\frac{1}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{19}{24}$	$\frac{9}{24}$	
4	$-\frac{19}{720}$	$\frac{106}{720}$	$-\frac{264}{720}$	$\frac{646}{720}$	$\frac{251}{720}$

Construcción de los métodos multipaso

Mediante derivación numérica: aproximamos la derivada en la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ mediante una fórmula de derivación numérica con nodos: $t_{n+k}, t_{n+k-1}, \ldots, t_n$.
Los métodos así obtenidos se denominan BDF (*backward differentiation formulas*) y son métodos de k pasos implícitos de la forma

$$x_{n+k} + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \ldots + \alpha_0 x_n = h\beta f_{n+k}$$

k	β	α_0	α_1	α_2	α_3
1	1	-1			
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$		
3	$\frac{6}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{18}{11}$	
4	$\frac{12}{25}$	$\frac{3}{25}$	$-\frac{16}{25}$	$\frac{36}{25}$	$-\frac{48}{25}$

Orden de los métodos multipaso

Error de truncatura local

Dado un método lineal de k pasos definimos el *Error de truncatura local* mediante

$$\tau(h) = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_j x(t+jh) - h\beta_j x'(t+jh)\right]$$

para $x(t)$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ solución del PVI.

Orden de los métodos multipaso

Error de truncatura local

Dado un método lineal de k pasos definimos el *Error de truncatura local* mediante

$$\tau(h) = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{k}\left[\alpha_j x(t+jh) - h\beta_j x'(t+jh)\right]$$

para $x(t)$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ solución del PVI.

Un método será consistente si

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = 0.$$

Orden de los métodos multipaso

Al método lineal de k pasos anterior le asociamos el operador lineal en diferencias $\mathcal{L}$ definido por

$$\mathcal{L}\big(x(t);h\big) = \sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_j x(t+jh) - h\beta_j x'(t+jh)\right]$$

donde x es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a,b]$

Si $x(t)$ es suficientemente regular, entonces desarrollando $x(t+jh)$, $x'(t+jh)$, $j=0,\ldots,k$ entorno a t, se tiene

$$\mathcal{L}\big(x(t);h\big) = C_0 x(t) + C_1 h x'(t) + \cdots + C_q h^q x^{(q)}(t) + \cdots$$

donde $C_0,\ldots,C_q,\ldots,$ son constantes.

Orden de los métodos multipaso

Orden de un método

El método lineal de k pasos se dice que es de orden p si $C_0 = C_1 = \cdots = C_p = 0$, y $C_{p+1} \neq 0$;

Orden de los métodos multipaso

Orden de un método

El método lineal de k pasos se dice que es de orden p si $C_0 = C_1 = \cdots = C_p = 0$, y $C_{p+1} \neq 0$;

Teorema

El método lineal de k pasos es de orden p si los coeficientes verifican el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 + \cdots + \alpha_k &= 0 \\
\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k &= \beta_0 + \cdots + \beta_k \\
&\vdots \\
\frac{1}{p!}(\alpha_1 + 2^p\alpha_2 + \cdots + k^p\alpha_k) &= \frac{1}{(p-1)!}(\beta_1 + 2^{p-1}\beta_2 + \cdots + k^{p-1}\beta_k)
\end{aligned}
$$

Consistencia de los métodos multipaso

Consistencia

El método lineal de k pasos es consistente si y sólo si $C_0 = C_1 = 0$.
Por tanto el método es consistente si y sólo si

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0; \quad \sum_{j=0}^{k} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{k} \beta_j.$$

Consistencia de los métodos multipaso

Consistencia

El método lineal de k pasos es consistente si y sólo si $C_0 = C_1 = 0$.
Por tanto el método es consistente si y sólo si

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0; \quad \sum_{j=0}^{k} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{k} \beta_j.$$

En este caso el orden será $p \geq 1$

Estabilidad de los métodos multipaso

Introducimos ahora los polinomios

$$\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \lambda^j; \quad \sigma(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \lambda^j$$

llamados primer y segundo polinomio característico asociado al método.

Estabilidad de los métodos multipaso

Introducimos ahora los polinomios

$$\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \lambda^j; \quad \sigma(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \lambda^j$$

llamados primer y segundo polinomio característico asociado al método.

Polinomio estable

Un polinomio $\rho(\lambda)$ se dice que es estable (o que verifica la *condición de estabilidad*) si

- ninguna raíz de $\rho(\lambda)$ tiene módulo mayor que 1,
- las raíces que tienen módulo igual a 1 son simples.

Convergencia de los métodos de varios pasos

Convergencia

Se dice que un método de k pasos es convergente si

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-t_0}} x_n = x(t)$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + a]$ y para toda solución de

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i},$$

que verifique las condiciones iniciales:

$$x_j = \mu_j(h), \quad j = 0, \ldots, k-1, \quad \text{donde } \lim_{h\to 0} \mu_j(h) = x_0.$$

Convergencia de los métodos multipaso

Teorema de Dahlquist

Todo método lineal multipaso es convergente si y sólo si se verifican las siguientes condiciones

1. $\rho(1) = 0$
2. $\rho'(1) = \sigma(1)$
3. $\rho(\lambda) = 0 \Rightarrow |\lambda| \leq 1$
4. $\rho(\lambda) = 0, |\lambda| = 1 \Rightarrow \rho'(\lambda) \neq 0$