Métodos Numéricos II. Curso 2014/15

Grado en Matemáticas. Segundo curso

Relación de Ejercicios: Resolución Numérica de PVI

1 Compruebe que la función $x(t) = \frac{t^2}{4}$ resuelve el problema de valores iniciales

$$x' = \sqrt{x}, \quad x(0) = 0.$$

Aplique el método de Euler y explique por qué la solución numérica difiere de la solución $\frac{t^2}{4}$. ¿Qué ocurre con el método de Taylor de segundo orden? ¿Y si aplicamos el método de Runge–Kutta clásico?

2 Estudie las características del método tipo Runge–Kutta cuya tabla de Butcher es la siguiente:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & \alpha & 1-\alpha \end{array}$$

3 Estudie el orden y la convergencia del método de Euler modificado

$$x_{n+1} = x_n + hK_2$$

donde

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, x_n) \\ K_2 &= f(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hK_1) \end{aligned}$$

4 Estudie el orden y la convergencia del método de Heun

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

donde

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, x_n) \\ K_2 &= f(t_n + h, x_n + h\,K_1) \end{aligned}$$

5 Considérese el problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -K\,x(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

donde K es una constante estrictamente positiva. Analice los valores máximos del paso h que aseguran la positividad y decrecimiento de la solución aproximada que se obtenga al resolver dicho problema mediante el método de Euler modificado.

6 Dado el método Runge–Kutta de 2 evaluaciones con tabla de Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \alpha & \alpha & \\ \hline & \frac{1-\alpha}{2} & \frac{1+\alpha}{2} \end{array}$$

a) Determine el orden del método según los valores de α.

b) Verifique si el método es estable para todo α.

7 Demuestre que cuando el método de Runge–Kutta clásico se aplica a la ecuación $x' = \lambda x$, la fórmula para generar la solución es

$$x(t+h) = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2!}h^2\lambda^2 + \frac{1}{3!}h^3\lambda^3 + \frac{1}{4!}h^4\lambda^4\right)x(t)$$

Demuestre que en este caso el error de discretización local es $O(h^4)$

8 Demuestre que el método de Runge–Kutta clásico es de orden 4 en el caso particular en que $f(t,x)$ sea independiente de x. Demuestre que en este caso el método de Runge–Kutta clásico es equivalente a la fórmula de Simpson.

9 *a*) ¿Qué relaciones deben existir entre los parámetros b_0, b_1 y b_2 para que el método implícito de dos pasos

$$x_{n+2} - x_n = h(b_2 f_{n+2} + b_1 f_{n+1} + b_0 f_n)$$

sea convergente?

b) ¿Qué nombre genérico reciben los métodos como el descrito en el apartado anterior?

c) ¿Cuál es el orden máximo de convergencia que puede alcanzar un método implícito de dos pasos como el del primer apartado? ¿Cuántos de estos métodos de orden máximo existen? Calcule los coeficientes de uno de ellos.

10 *a*) ¿Qué relaciones deben existir entre los parámetros b_0, b_1 y b_2 para que el método explícito de tres pasos

$$x_{n+3} - x_{n+2} = h(b_2 f_{n+2} + b_1 f_{n+1} + b_0 f_n)$$

sea convergente?

b) ¿Cuál es el orden máximo de convergencia que puede alcanzar un método explícito de tres pasos como el del apartado anterior? ¿Cuántos de estos métodos de orden máximo existen? Calcule los coeficientes de uno de ellos.

11 Para aproximar la solución del p.v.i.

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

se considera el método multipaso

$$x_{n+3} - x_n = h(b_2\, f_{n+2} + b_1\, f_{n+1})$$

a) ¿Qué relaciones deben existir entre los parámetros b_1 y b_2 para que el método anterior sea convergente?

b) Calcule los coeficentes b_1 y b_2 para que el orden de convergencia sea máximo.

12 A veces, para construir fórmulas de integración numérica es posible utilizar nodos que se encuentran fuera del intervalo de integración. Considere la fórmula:

$$\int_a^{a+h} f(t)\,dt \simeq \frac{5\,h}{12}\,f(a+h) + \frac{2\,h}{3}\,f(a) - \frac{h}{12}\,f(a-h)$$

a) Utilice la fórmula anterior para construir un método lineal multipaso de la forma

$$x_{n+2} - x_{n+1} = h(b_2\,f_{n+2} + b_1\,f_{n+1} + b_0\,f_n)$$

b) ¿Cuál es el orden de convergencia que alcanza el método anterior?

c) Estudie la convergencia del método.

d) ¿Qué nombre genérico reciben los métodos como el descrito en el apartado anterior?

e) Utilizando el método de Euler para generar la primera iteración, aplique el método obtenido para aproximar $x(1)$ donde $x(t)$ es la solución del p.v.i.

$$\begin{cases} x' = 3\,x - 2, & t \in [0,1] \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

tomando $h = 0{,}25$.