TEMA III

INTERPOLACIÓN NUMÉRICA

3.1. Planteamiento del problema de la interpolación.

3.1.1. Planteamiento general.

Supongamos conocidos los valores de una función $f(x)$ en un conjunto de $n+1$ valores de su argumento que denominamos $x_0, x_1, ..., x_n = \{x_j\}_{j=0,...,n}$. El problema de la interpolación trata de encontrar una función $g(x, a_0, a_1,..., a_n)$ que coincida con $f(x)$ en los $n+1$ puntos dados; es decir

$$g(x_j, a_0, a_1,..., a_n) = f(x_j) \quad \text{con} \quad j = 0,1, \ldots, n$$

Los parámetros $a_0, a_1,..., a_n$ quedarán determinados por las $n+1$ condiciones de coincidencia que expresa la ecuación anterior.

La función $g(x)$ así determinada, a la que llamaremos función de interpolación, representa una aproximación a $f(x)$ para cualquier valor de x.

Si $x \in [x_0, x_n]$ se habla propiamente de interpolación.

Si $x \notin [x_0, x_n]$ se hable de extrapolación.

Si bien se utiliza el término interpolación para referirse conjuntamente a interpolación y extrapolación.

La interpolación representa un enfoque diferente a la aproximación de funciones. En la aproximación de funciones, la función aproximante está cerca de todos los puntos que debe aproximar, pero puede que no coincida con ninguno. En la interpolación, la función interpolante pasa por todos y cada uno de la nube de puntos que debe interpolar.

3.1.2. Resolución mediante polinomios.

Consideraremos ahora que la función de interpolación $g(x)$ es de tipo polinómico ya que este tipo de funciones son sencillas y manejables y según nos dice el teorema de Weierstrass nos podemos aproximar tanto como queramos a $f(x)$, por lo que la interpolación polinómica constituye la base de la mayor parte de los problemas relacionados con la interpolación y la de los métodos numéricos que se basan en ella. Rebautizamos a la función de interpolación $g(x)$ como $L_n(x)$ para los casos en que la función de interpolación sea un polinomio. Sea pues

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

cuyos coeficientes $\{a_j\}_{j=0,...,n}$ se determinan con las $n+1$ condiciones siguientes:

$L_n(x_j) = f(x_j)$ para $j = 0,1,..., n$ (n +1 condiciones)

Desarrollando, obtenemos explícitamente el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} j=0 \Rightarrow a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^{\,2} + \cdots + a_n x_0^{\,n} = f(x_0) \\ j=1 \Rightarrow a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^{\,2} + \cdots + a_n x_1^{\,n} = f(x_1) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ j=n \Rightarrow a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^{\,2} + \cdots + a_n x_n^{\,n} = f(x_n) \end{array}\right\}$$

que podemos poner en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,2} & x_0^{\,3} & & \cdots & x_0^{\,n-1} & x_0^{\,n} \\ 1 & x_1 & x_1^{\,2} & x_1^{\,3} & & \cdots & x_1^{\,n-1} & x_1^{\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{\,2} & x_n^{\,3} & & \cdots & x_n^{\,n-1} & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de coeficientes, de dimensiones (n+1)(n+1) es de tipo Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,2} & x_0^{\,3} & \cdots & x_0^{\,n-1} & x_0^{\,n} \\ 1 & x_1 & x_1^{\,2} & x_1^{\,3} & \cdots & x_1^{\,n-1} & x_1^{\,n} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{\,2} & x_n^{\,3} & \cdots & x_n^{\,n-1} & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i,j=0 \\ j<i}}^{n} (x_i - x_j)$$

Si $x_i \neq x_j$, este determinante es distinto de cero. En nuestro caso, como los puntos del conjunto $\{x_j\}_{j=0,\ldots,n}$ son distintos entre sí, el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero y el problema de la interpolación mediante un polinomio de grado n tiene una única solución.

Apéndice. Cálculo del valor del determinante de una matriz tipo Vandermonde.

Utilizaremos dos teoremas conocidos:

1er teorema: El valor de un determinante no cambia si a los elementos de una fila (o columna) se les añade los correspondientes elementos de otra fila (o columna) multiplicados por el mismo número.

2º teorema: Si cada elemento de una fila (o columna) de un determinante se multiplica por un número, el determinante queda multiplicado por este mismo número.

Partimos de nuestro determinante de tipo Vandermonde, formado por (n+1) filas y (n+1) columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^{2} & x_0^{3} & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^{n} \\ 1 & x_1 & x_1^{2} & x_1^{3} & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^{n} \\ 1 & x_2 & x_2^{2} & x_2^{3} & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{2} & x_n^{3} & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^{n} \end{vmatrix} =$$

(En primer lugar restamos de cada fila, la fila número 1, excepto de la 1ª fila que la dejamos tal como está⇒)

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^{2} & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^{n} \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^{2} - x_0^{2} & \cdots & x_1^{n-1} - x_0^{n-1} & x_1^{n} - x_0^{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^{2} - x_0^{2} & \cdots & x_n^{n-1} - x_0^{n-1} & x_n^{n} - x_0 \end{vmatrix} =$$

(Desarrollamos el determinante por la 1ª columna, quedando un determinante con dimensiones n x n⇒)

$$= 1 \times \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1^{2} - x_0^{2} & x_1^{3} - x_0^{3} & \cdots & x_1^{n-1} - x_0^{n-1} & x_1^{n} - x_0^{n} \\ x_2 - x_0 & x_2^{2} - x_0^{2} & x_2^{3} - x_0^{3} & \cdots & x_2^{n-1} - x_0^{n-1} & x_2^{n} - x_0^{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^{2} - x_0^{2} & x_n^{3} - x_0^{3} & \cdots & x_n^{n-1} - x_0^{n-1} & x_n^{n} - x_0 \end{vmatrix} =$$

(Sacando factor común $(x_1 - x_0)$ de la 1ª fila, $(x_2 - x_0)$ de la 2ª fila,…, $(x_n - x_0)$ del n-ésima fila⇒)

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\cdots(x_n - x_0)\cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_0 & x_1^{2} + x_1 x_0 + x_0^{2} & x_1^{3} + x_1^2 x_0 + x_1 x_0^{2} + x_0^{3} & \cdots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_0 - x_1^{n-3} x_0^2 + \cdots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ 1 & x_2 + x_0 & x_2^{2} + x_2 x_0 + x_0^{2} & x_2^{3} + x_2^2 x_0 + x_2 x_0^{2} + x_0^{3} & \cdots & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_0 - x_2^{n-3} x_0^2 + \cdots + x_2 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n + x_0 & x_n^{2} + x_n x_0 + x_0^{2} & x_n^{3} + x_n^2 x_0 + x_n x_0^{2} + x_0^{3} & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} x_0 - x_n^{n-3} x_0^2 + \cdots + x_n x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \end{vmatrix} =$$

(Observando el determinante anterior vemos o podemos comprobar que la columna k-ésima se puede obtener de la siguiente manera:

$$\text{Columna } k\text{-ésima} = \begin{pmatrix} x_1^{k-1} \\ x_2^{k-1} \\ \vdots \\ x_n^{k-1} \end{pmatrix} + x_0 \cdot \text{Columna } k-1.$$

Por tanto, restando a cada columna, la anterior multiplicada por x_0, salvo la primera columna que la dejamos como está, queda)

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\cdots(x_n - x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^{\ 2} & x_1^{\ 3} & \cdots & x_1^{\ n-2} & x_1^{\ n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^{\ 2} & x_2^{\ 3} & \cdots & x_2^{\ n-2} & x_2^{\ n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^{n-2} & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{\ 2} & x_n^{\ 3} & \cdots & x_n^{\ n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

(Que resulta ser el determinante inicial sin la 1ª fila y sin la última columna. Repitiendo el proceso reiteradamente, por inducción)

$$= \prod_{\substack{i,j=0 \\ j<i}}^{n} (x_i - x_j)\,.$$

Para esclarecer este proceso vamos a calcular el determinante de una matriz de tipo Vandermonde de dimensiones 3 x 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{vmatrix} =$$

Restamos de todas las filas, menos de la 1ª, la 1ª fila

Desarrollamos el determinante por la 1ª columna

Sacamos factor común ($x_1 - x_0$) de la 1ª fila y ($x_2 - x_0$) de la 2ª fila.

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_0 \\ 1 & x_2 + x_0 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\,.$$

Restamos de cada columna, la anterior multiplicada por x_0, salvo de la 1ª que la dejamos como está

Nuevo determinante de tipo Vandermonde

3.2. Interpolación de Lagrange.

3.2.1. Polinomio de interpolación de Lagrange.

- Es posible determinar el polinomio de interpolación sin recurrir a la resolución directa del sistema de ecuaciones, siguiendo la siguiente estrategia:

Construimos $n+1$ polinomios $l_i(x)$ de grado n, tales que $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ para $i,j = 0, 1, ..., n$ donde x_j son los puntos de interpolación y δ_{ij} es la delta de Kronecker $\Rightarrow$

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

El polinomio

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)}$$

es el polinomio de interpolación buscado ya que

$$L_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\delta_{ij} = f(x_j)$$

$l_i(x)$ son los llamados polinomios de Lagrange.

$L_n(x)$, construido a partir de los polinomios $l_i(x)$, es el polinomio de interpolación de Lagrange. Aunque recordemos que el polinomio de interpolación es único, independientemente de su construcción.

- Construcción de los polinomios de Lagrange $l_i(x)$.

Para construir este conjunto de polinomios hacemos uso de que, con $i \neq$j, $l_i(x_j) = 0$ $\Rightarrow$ $l_i(x)$ tiene una raiz en x_j $\Rightarrow$ contiene el término $(x - x_j)$ $\forall j \neq i \Rightarrow$

$$l_i(x) = k \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)$$

donde k es una constante y donde vemos que, construido de esta forma, $l_i(x)$ es ya un polinomio de grado n, tal como se definía inicialmente.

La constante k se determina con la condición que resta; es decir $l_i(x_i) = 1 \Rightarrow$

$$l_i(x_i) = k \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j) = 1 \Rightarrow \quad k = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)} \Rightarrow$$

$$\boxed{l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}$$

Si los desarrollamos para ver más explícitamente sus propiedades

$$l_i(x) = \frac{x-x_0}{x_i-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_i-x_1}\,\cdots\,\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\,\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\,\cdots\frac{x-x_n}{x_i-x_n}$$

donde claramente se aprecia que el polinomio de Lagrange se anula para $x= x_j$, $\forall j \neq i$, y se hace la unidad para $x= x_i$.

- Llevando los polinomios de Lagrange $l_i(x)$ al polinomio de interpolación de Lagrange $L_n(x)$, obtenemos

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}}$$

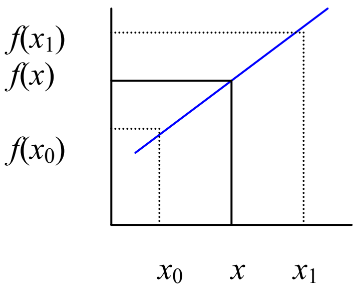
que recibe el nombre de fórmula de interpolación de Lagrange.

- Con n =1 obtenemos la familiar interpolación lineal

$$L_1(x) = \sum_{i=0}^{1} f(x_i) \prod_{\substack{j=o\\ j\neq i}}^{1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

Si se suma y se resta x_0 al numerador que acompaña a $f(x_0)$, la expresión anterior se convierte fácilmente en

$$L_1(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{valor inicial}} + \underbrace{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}_{\text{pendiente}}\underbrace{(x-x_0)}_{\text{desplazamiento}}$$



- Una forma alternativa de representar $L_n(x)$ resulta de introducir el polinomio

$$w_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x-x_j) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

que tiene n+1 ceros en x_0, x_1, ..., x_n y es un polinomio de grado n+1.

La derivada de la función anterior

$$w'_{n+1}(x) = (x-x_1)\ \cdots\ (x-x_n) + (x-x_0)(x-x_2)\ \cdots\ (x-x_n) + \cdots +$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x-x_j)\right]$$

En $w'_{n+1}(x)$ vemos que todos los sumandos contienen el término $(x-x_i)$ excepto el sumando $k=i \Rightarrow$ Si particularizamos para x_i se anularán todos los sumandos excepto $k=i \Rightarrow$

$$w'_{n+1}(x_i)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)$$

Llevamos esta expresión al polinomio de interpolación de Lagrange, para lo cual, previamente, modificamos éste

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}=$$

$= w'_{n+1}(x_i)$

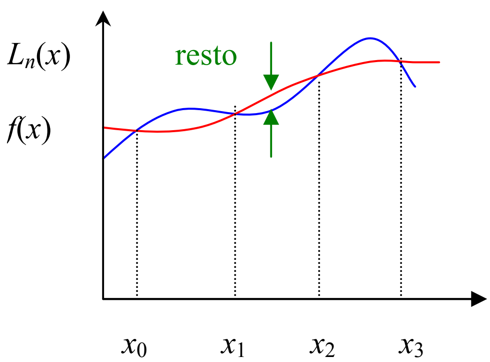
$$=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{x-x_i}{x-x_i}\frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j)}{w'_{n+1}(x_i)}\Rightarrow$$

$= w_{n+1}(x)$

$$\boxed{L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_i)\,w'_{n+1}(x_i)}}$$

$= l_i(x)$

3.2.2. Evaluación del resto del polinomio de interpolación de Lagrange.



El polinomio de interpolación $L_n(x)$ ajusta a la función $f(x)$ (y por tanto sus valores coinciden) en el conjunto de puntos $\{x_j\}_{j=0,\ldots,n}$. Pero fuera de este conjunto finito de puntos, la función y el polinomio de interpolación no tienen porqué coincidir, existiendo, en general, una cierta diferencia entre ambos. El resto o error de interpolación en un cierto punto x viene dado por la diferencia $f(x) - L_n(x)$.

Para evaluar este resto o diferencia construimos la función

$$\varphi(z)=f(z)-L_n(z)-kw_{n+1}(z)$$

donde k es una constante que calculamos imponiendo que $\varphi(x)=0$ para el punto x donde se está evaluando el error $\Rightarrow$

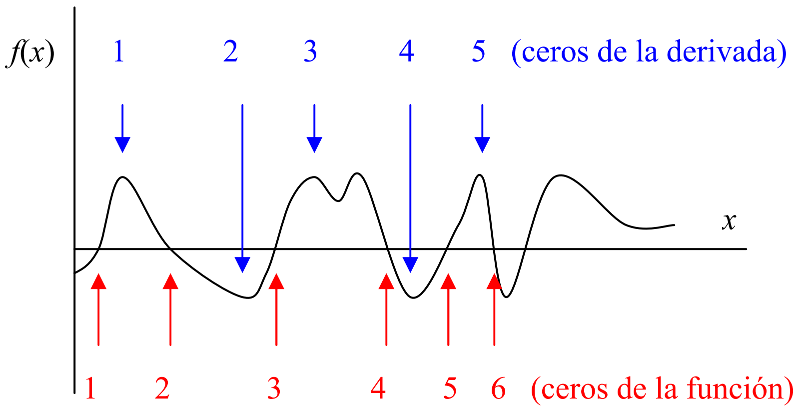
$$0 = f(x) - L_n(x) - k w_{n+1}(x) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{f(x) - L_n(x)}{w_{n+1}(x)},$$

obteniéndose una expresión para la constante k que utilizaremos posteriormente.

Es claro que la función $\varphi(z)$ se anula en $z=x$ por la definición de k, pero también se anula en x_0, x_1,..., x_n (n+1 puntos), ya que estos son los puntos donde el polinomio interpolante $L_n(x)$ coincide con la función $f(x)$ y también en estos puntos se anula, por su propia definición, el polinomio w_{n+1} (x). En definitiva, la función $\varphi(z)$ se anula en n+2 puntos.

Según el **Teorema de Rolle**, si una función tiene n+2 ceros, su derivada primera se anula, al menos, en n+1 puntos; la derivada segunda se anulará, al menos, en n puntos, ... Siguiendo este razonamiento, la derivada (n+1)-ésima se anulará en al menos un punto al que llamamos ξ, tal que

$$\xi \in \left[\min(x, x_0, \cdots, x_n),\ \max(x, x_0, \cdots, x_n)\right]$$



Esquemáticamente podemos expresar el párrafo anterior:

$$\begin{array}{lll}
\varphi(z) & \rightarrow & \text{al menos } n+2 \text{ ceros} \\
\varphi'(z) & \rightarrow & \text{al menos } n+1 \text{ ceros} \\
\varphi''(z) & \rightarrow & \text{al menos } n \text{ ceros} \\
\varphi'''(z) & \rightarrow & \text{al menos } n-1 \text{ ceros} \\
\vdots & & \\
\varphi^{n+1)}(z) & \rightarrow & \text{al menos 1 cero}
\end{array}$$

Con $\varphi(z) = f(z) - L_n(z) - k\, w_{n+1}(z)$, calculamos la derivada (n+1)-ésima de $\varphi(z)$:

$$\varphi^{n+1)}(z) = f^{n+1)}(z) - \underbrace{L_n^{\ n+1)}(z)}_{0} - \underbrace{k\, w_{n+1}^{\ \ n+1)}(z)}_{Cte}$$

En la expresión anterior $L_n(z)$ es un polinomio de orden n $\Rightarrow$ Su n-ésima derivada es constante y si (n+1)-ésima derivada es nula. Por su parte $w_{n+1}(x)$ es un polinomio de grado n+1,

$$w_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = x^{n+1} + \cdots$$

cuyo coeficiente del término x^{n+1} es la unidad. Al derivar este polinomio, las contribuciones de los otros términos, con x^n o potencias inferiores, se anularán, quedando, como resultado de la derivada $(n+1)$-ésima de $w_{n+1}(x)$, una constante de valor

$$(n+1)n\,(n-1)\ \ldots\ 1 = (n+1)! \quad \Rightarrow \quad w_{n+1}{}^{n+1)}(z) = (n+1)!$$

Por tanto

$$\varphi^{n+1)}(z) = f^{\,n+1)}(z) - k(n+1)!$$

Para el punto ξ, donde $\varphi^{n+1)}(\xi) = 0 \Rightarrow$

$$\varphi^{n+1)}(\xi) = 0 = f^{\,n+1)}(\xi) - k(n+1)! \quad \Rightarrow \quad k = \frac{f^{\,n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Si unimos esta expresión para la constante k con la que obtuvimos al principio de este párrafo, obtenemos la siguiente expresión para el resto del polinomio de Lagrange

$$\boxed{f(x) - L_n(x) = \frac{f^{\,n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, w_{n+1}(x)}$$

que estima el error cometido en un punto arbitrario x al aproximar una función $f(x)$ por un polinomio de interpolación $L_n(x)$.

Ejemplo. Sea $f(x) = \ln x$. Dada la tabla de valores

$x =$	0.40	0.50	0.70	0.80
$\ln x =$	−0.916291	−0.693147	−0.356675	−0.223144

estimar el valor de ln 0.60.

Tenemos cuatro puntos donde conocemos la función, a los que denominamos respectivamente x_0, x_1, x_2, x_3; es decir, $x_0 = 0.40$, $x_1 = 0.50$, $x_2 = 0.70$ y $x_3 = 0.80$, y por tanto $n=3$.
Con $n=3$, el polinomio de interpolación de Lagrange tiene la forma

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)l_i(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) + f(x_3)l_3(x)$$

con $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{3} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Para $i=0$, $l_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}\dfrac{x - x_2}{x_0 - x_2}\dfrac{x - x_3}{x_0 - x_3} \quad \Rightarrow$

$$l_0(x = 0.60) = \frac{0.60 - 0.50}{0.40 - 0.50}\ \frac{0.60 - 0.70}{0.40 - 0.70}\ \frac{0.60 - 0.80}{0.40 - 0.80} = -\frac{1}{6}$$

Para i=1, $l_1(x) = \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\dfrac{x-x_3}{x_1-x_3} \quad\Rightarrow\quad l_1(x=0.60)=\dfrac{2}{3}$

Para i=2, $l_2(x) = \dfrac{x-x_0}{x_2-x_0}\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\dfrac{x-x_3}{x_2-x_3} \quad\Rightarrow\quad l_2(x=0.60)=\dfrac{2}{3}$

Para i=3, $l_3(x) = \dfrac{x-x_0}{x_3-x_0}\dfrac{x-x_1}{x_3-x_1}\dfrac{x-x_2}{x_3-x_2} \quad\Rightarrow\quad l_3(x=0.60)=-\dfrac{1}{6}$

$$L_3(x=0.60) = -\frac{1}{6}(-0.916291)+\frac{2}{3}(-0.693147)+$$
$$+\frac{2}{3}(-0.356675)-\frac{1}{6}(-0.223144) = -0.5099755$$

Una vez calculado el valor de la función de forma aproximada, vamos a estimar el error cometido, utilizando para ello la expresión del resto de la interpolación:

$$f(x)-L_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)\, w_{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

Con n=3, evaluamos cada uno de los términos que integran la expresión anterior:

1º. $(n+1)! = 4!$

2º. $w_4(x) = \prod_{j=0}^{3}(x-x_j) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \Rightarrow$

$$w_4(0.60) = (0.60-0.40)(0.60-0.50)(0.60-0.70)(0.60-0.80) = 4\cdot 10^{-4}$$

3º. $f(x) = \ln x \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'''(x)=\dfrac{2}{x^3} \Rightarrow f^{IV}(x) = -\dfrac{6}{x^4}$

Como la función $f(x)$ debe ser evaluada en un punto intermedio $\xi\in[0.4,\ 0.8]$ que desconocemos exactamente cuál es, tomamos el punto más desfavorable, transformando el resto de la interpolación en una cota de error

$$\left|f^{IV}(\xi)\right| = \left|\frac{-6}{\xi^4}\right| \le \left|\frac{-6}{0.4^4}\right| \quad\Rightarrow$$

$$\left|f(x)-L_n(x)\right| \le \left|\frac{6\cdot 4\cdot 10^{-4}}{0.4^4\cdot 4!}\right| = \frac{1}{256} \approx 0.004$$

Quedando definitivamente

$$\ln 0.60 = -0.510 \pm 0.004$$

El valor exacto es ln 0.60 = -0.5108 que cae dentro del intervalo de error.

3.3. Construcción del polinomio de interpolación mediante la forma de Newton.

La interpolación de Lagrange tiene el inconveniente de que al añadir una nueva pareja de puntos, $\{x_{n+1}, f(x_{n+1})\}$, se debe de rehacer todo el cálculo para encontrar el nuevo polinomio de interpolación. La forma de Newton permite ir incorporando nuevos puntos y construir el nuevo polinomio a partir del trabajo ya realizado. Así, la idea básica es construir la solución en pasos sucesivos. Como en los casos anteriores, partimos de un conjunto de puntos $\{x_k\}_{k=0,\ldots,n}$, frecuentemente llamados nodos, distintos entre sí, a los que corresponde el conjunto de valores de la función $\{f(x_k)\}_{k=0,\ldots,n}$. Primero, construiremos el polinomio de grado cero, P_0 (una constante), que coincide con el valor de la función en x_0. Luego, construiremos el polinomio P_1, de grado igual o inferior a 1, que coincida con los valores de la función en x_0 y x_1. A continuación, construiremos el polinomio de grado igual o inferior a 2 que coincida con el valor de la función en x_0, x_1 y x_2, y así hasta llegar al polinomio de grado igual o inferior a *n* que pase por todos y cada uno de los puntos de la función. Observemos que en cada paso el polinomio P_i existe y es único en virtud de la existencia y unicidad del polinomio de interpolación. Pasando a plasmar estas ideas en ecuaciones, podemos construir la sucesión de polinomios de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&P_0(x) = c_0 \\
&P_1(x) = c_0 + c_1(x-x_0) \\
&P_2(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) \\
&P_3(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&\ldots \\
&P_k(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_k(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1}) \\
&\ldots \\
&P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

que pueden ser escritas en forma compacta como:

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \quad \text{con } k = 0, \ldots, n .$$

Queda claro, por lo expuesto anteriormente, que llegaremos a construir el polinomio de interpolación de grado *n* después de *n*+1 etapas, apoyándonos, en cada etapa, en el polinomio calculado en la etapa anterior. Es decir:

$$
\begin{aligned}
&P_0(x) = c_0 \\
&P_1(x) = P_0(x) + c_1(x-x_0) \\
&P_2(x) = P_1(x) + c_2(x-x_0)(x-x_1) \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + c_k(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})$$
$$\cdots$$
$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + c_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

Las $(n+1)$ constantes $\{c_k\}_{k=0,\ldots,n}$, que nos quedan por determinar, las encontramos de imponer sucesivamente las condiciones que debe de cumplir el polinomio; esto es, $P_n(x_k) = f(x_k)$, así:

De $\quad P_0(x_0) = f(x_0) = c_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = f(x_0)$

De $\quad P_1(x_1) = f(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \quad \Rightarrow \quad c_1 = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

De $\quad P_2(x_2) = f(x_2) = c_0 + c_1(x_2-x_0) + c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) \quad \Rightarrow$

$$c_2 = \frac{f(x_2)-f(x_0)-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$$

Y así sucesivamente. Apareciendo que la serie de coeficientes $\{c_k\}_{k=0,\ldots,n}$ está formada por las llamadas diferencias divididas de la función $f(x)$, cuyo estudio en profundidad se lleva a cabo en un apéndice de este capítulo. La definición de diferencias divididas y su relación con los coeficientes del polinomio de interpolación es la siguiente:

Diferencia dividida de orden cero $\equiv f[x_0] = f(x_0)$, $\qquad c_0 = f[x_0]$

Diferencia dividida de orden uno $\equiv f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, $\qquad c_1 = f[x_0,x_1]$

Diferencia dividida de orden dos $\equiv f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$, $c_2 = f[x_0,x_1,x_2]$

ya que, tal como se comprueba en el apéndice, las diferencias divididas son simétricas respecto de sus argumentos; esto es, $f[x_i,x_j,x_k] = f[x_k,x_i,x_j]$.

Diferencia dividida de orden $k \equiv f[x_0,x_1,\ldots,x_k] =$

$$= \frac{f[x_1,\ldots,x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}, \qquad c_k = f[x_0,x_1,\ldots,x_k]$$

Ejemplo. En el conjunto de puntos {1, 2, 3, 4,}, la función Gamma de Euler toma los siguientes valores: Γ (1) = 1, Γ (2) = 1, Γ (3) = 2 y Γ (4) = 6, recordando que para valores enteros Γ (*n*+1) = *n*!. Utilizando el enfoque de Newton, calcular un polinomio cúbico que interpole estos valores.

De forma sucesiva, utilizando las expresiones

$$
\begin{aligned}
&P_0(x) = c_0 \\
&P_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0) \\
&P_2(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) \\
&P_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)
\end{aligned}
$$

obtenemos:

$$P_0(x_0) = f(x_0) = c_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 1$$

$$P_1(x_1) = f(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$P_2(x_2) = f(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2 = 1 + 0(3-1) + c_2(3-1)(3-2) \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{2}$$

$$P_3(x_3) = c_0 + c_1(x_3 - x_0) + c_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 6 = 1 + 0(4-1) + \frac{1}{2}(4-1)(4-2) + c_3(4-1)(4-2)(4-3) \; \Rightarrow \; 6 = 4 + 6c_3 \Rightarrow \; c_3 = \frac{1}{3}$$

Por tanto, el polinomio buscado (se incluye el término de c_1 aunque sea nulo) es:

$$P(x) = 1 + 0(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + \frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2) + \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \Rightarrow$$

$$P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x.$$

3.4. Interpolación polinomial de Hermite.

3.4.1. Planteamiento del problema y búsqueda del polinomio de interpolación de Hermite.

Supongamos conocidos los valores de una función $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$ en un conjunto de n+1 valores de su argumento que denominamos $\{x_0, x_1, ..., x_n\} = \{x_j\}_{j=0,...,n}$. El problema de la interpolación de Hermite trata de encontrar un polinomio P_q, de grado q lo menor posible, de forma que en los nudos x_j (j=0,1,...,n) coincidan los valores de la función y de su derivada con los valores del polinomio y de sus derivadas, respectivamente; es decir

$$\begin{cases} P_q(x_0) = f(x_0),\ P_q(x_1) = f(x_1), \cdots, P_q(x_n) = f(x_n) \\ P_q'(x_0) = f'(x_0),\ P_q'(x_1) = f'(x_1), \cdots, P_q'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$$

Un desarrollo algo más complejo del llevado a cabo en la interpolación de Lagrange nos lleva a la siguiente expresión para el polinomio de interpolación de Hermite, que resulta ser un polinomio de grado $2n$+1:

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[1 - 2(x - x_i)\, l_i'(x_i)\right] l_i^2(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} (x - x_i)\, l_i^2(x) f'(x_i)$$

3.4.2. Resto del polinomio de interpolación de Hermite.

Un proceso similar al seguido para calcular el resto de la interpolación de Lagrange nos facilita el resto en la interpolación de Hermite, encontándose el siguiente resultado:

$$f(x) - P_{2n+1}(x) = \frac{f^{2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\, w_{n+1}^2(x)$$

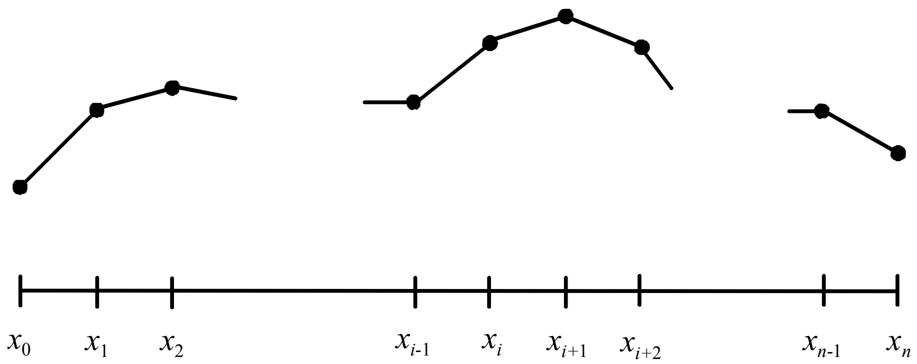
3.5. Interpolación con un *spline* (tira, trazador) cúbico.

La interpolación de Lagrange o Hermite tienen el inconveniente de que el polinomio de interpolación involucra a todos y cada uno del conjunto de puntos a interpolar. Si su número es elevado, el grado del polinomio también lo es, y por otra parte es intuitivo conocer que el efecto de puntos alejados a uno dado va a tener poca influencia sobre la forma del polinomio en dicho punto. Hay otra forma de ajustar un polinomio a un conjunto de datos que sólo involucra a los puntos más cercanos: Un *spline* ajusta una *curva suave* al conjunto de puntos, siguiendo la idea de las barras flexibles y plantillas que se utilizan para dibujar curvas.

Supongamos, como en los casos anteriores, que tenemos un conjunto de n+1 parejas de puntos, no necesariamente equiespaciados:

$$\{x_i, y_i\}_{i=0,1,2,\cdots,n}$$

La interpolación con un *spline* ajusta un polinomio de un determinado grado entre cada pareja de puntos adyacentes. Si el grado del *spline* fuese uno, los puntos se unirían mediante líneas rectas, tal como muestra la figura, pero la pendiente sería discontinua en los puntos o nodos.

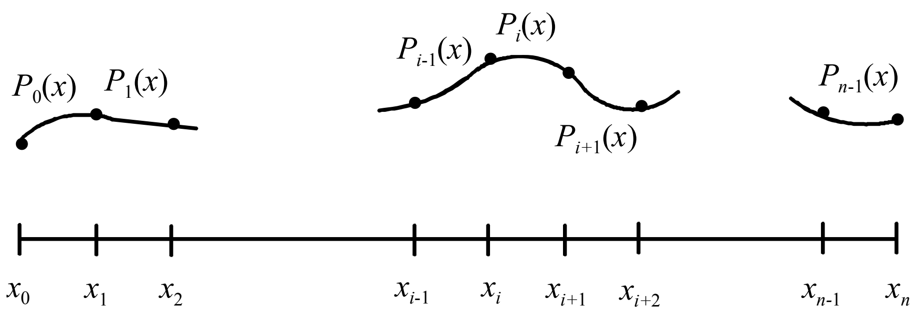


Como mencionamos anteriormente, el concepto de *curva spline* se deriva de los instrumentos que los delineantes usan para trazar una curva suave. Estos instrumentos se flexionan o acomodan de modo que tanto la pendiente (derivada primera) como la curvatura (derivada segunda) sean continuas sobre los puntos por donde debe de pasar la curva. Por tanto, aunque los *splines* pueden ser de cualquier grado, los polinomios o *spline* de grado tres es el más utilizado y el que nosotros estudiaremos aquí.

Vamos a crear, por lo dicho anteriormente, un *spline* formado por una sucesión de polinomios cúbicos, $P_i(x)$, con $i = 0,1,2,\ldots, n-1$. Cada uno de ellos se ajustará entre dos puntos sucesivos, i e i+1 de nuestro conjunto, pero no sólo darán lugar entre todos ellos a una función $g(x)$, definida a trozos, en la forma:

$$g(x) = P_i(x) \text{ con } x \in [x_i, x_{i+1}] \text{ e } i = 0,1,2,\cdots,n-1$$

que pasa por todos y cada uno de los puntos a interpolar, sino que las derivadas primera y segunda de la función en los puntos a interpolar debe de coincidir en sus valores al acercarnos al punto por la izquierda y por la derecha.



Escribimos la ecuación del polinomio cúbico, $P_i(x)$, entre los puntos (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}), en la forma:

$$P_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i \text{ ; con } i = 0,1,...,n-1.$$

Los polinomios que integran el *spline* cúbico tienen que cumplir las siguientes condiciones:

- Los polinomios pasan por los nodos o puntos a interpolar ⇒

$$P_i(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\cdots,n-1 \quad \text{y} \quad P_{n-1}(x_n) = y_n. \tag{1}$$

- La función de interpolación debe ser continua en los nodos ⇒

$$P_i(x_{i+1}) = P_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 0,1,\cdots,n-2. \tag{2}$$

- La pendiente es continua en los nodos ⇒

$$P_i'(x_{i+1}) = P_{i+1}'(x_{i+1}) = y_{i+1}', \quad i = 0,1,\cdots,n-2. \tag{3}$$

- La curvatura es continua en los nodos ⇒

$$P_i''(x_{i+1}) = P_{i+1}''(x_{i+1}) = y_{i+1}'', \quad i = 0,1,\cdots,n-2. \tag{4}$$

donde hemos llamado y_i' e y_i'' a los valores de la primera y segunda derivada del polinomio en los nodos o puntos a interpolar, respectivamente.

Como para conocer un polinomio necesitamos cuatro coeficientes, $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$, y debemos encontrar n polinomios, el número de incógnitas que tenemos que encontrar es $4n$. Si recontamos las condiciones que hemos impuesto a través de las ecuaciones (1)-(4), el número de condiciones es $(n+1)+(n-1)+(n-1)+(n-1) = 4n-2$, quedándonos dos condiciones para igualar al número de incógnitas. Estas dos condiciones se extraen de las condiciones que se le quieran poner a la pendiente y a la curvatura de los polinomios extremos en los puntos extremos x_0 y x_n. Si no se tiene información adicional sobre el conjunto de puntos a interpolar, se suele usar el llamado *spline natural* que anula la curvatura de los polinomios extremos, $P_0(x)$ y $P_{n-1}(x)$, en los puntos extremos x_0 y x_n, respectivamente, haciendo que los *splines* se aproximen linealmente a sus dos valores extremos; es decir:

$$P_0''(x_0) = y_0'' = 0 \qquad \text{y} \qquad P_{n-1}''(x_n) = y_n'' = 0.$$

Conocidas las condiciones, vamos a ir imponiéndolas paulatinamente para ir encontrando los coeficientes de los polinomios de interpolación. En primer lugar, haciendo que se cumpla las $n-1$ primeras condiciones de la ecuación (1):

$$P_i(x_i) = y_i = a_i(x_i - x_i)^3 + b_i(x_i - x_i)^2 + c_i(x_i - x_i) + d_i \text{ ; con } \Rightarrow$$

$$\boxed{d_i = y_i; \quad i = 0,1,\ldots,n-1,}$$

que nos aporta el término independiente de todos y cada uno de los polinomios.

Imponemos a continuación la ecuación (2) y la última condición de (1) que nos dicen $P_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$, con $i = 0,1,\ldots,n-1 \Rightarrow$

$$P_i(x_{i+1}) = a_i(x_{i+1} - x_i)^3 + b_i(x_{i+1} - x_i)^2 + c_i(x_{i+1} - x_i) + y_i = y_{i+1} \Rightarrow$$

$$a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + y_i = y_{i+1}, \quad i = 0,1,\ldots,n-1. \tag{5}$$

ecuación que dejamos guardada para su uso posterior y donde hemos definido h_i como el acho del i-ésimo intervalo; es decir, $h_i = (x_{i+1} - x_i)$.

Para imponer las condiciones que restan, se prefiere expresar todo en función de las derivadas segundas de los polinomios. Con

$$P_i'(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i\,,$$
$$P_i''(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i\,, \text{ para } i = 0,1,\ldots,n-1.$$

A partir de la ecuación anterior se tiene

$$P_i''(x_i) = y_i'' = 6a_i(x_i - x_i) + 2b_i = 2b_i \Rightarrow \boxed{b_i = \frac{y_i''}{2}},$$

y

$$P_i''(x_{i+1}) = 6a_i(x_{i+1} - x_i) + 2b_i = 6a_i h_i + y_i'' = \text{(con la condición (4))} = P_{i+1}''(x_{i+1}) = y_{i+1}'' \Rightarrow$$

$$\boxed{a_i = \frac{y_{i+1}'' - y_i''}{6h_i}} \text{ para } i = 0,1,\ldots,n-1.$$

Sustituyendo las expresiones recuadradas para a_i y b_i en la ecuación (5), se obtiene la expresión de c_i en función de las derivadas segundas de la función de interpolación en los nudos:

$$\left(\frac{y''_{i+1}-y''_i}{6h_i}\right)h_i^3+\left(\frac{y''_i}{2}\right)h_i^2+c_ih_i+y_i=y_{i+1}\Rightarrow$$

$$\boxed{c_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{\left(2y''_i+y''_{i+1}\right)h_i}{6}}.$$

Es, pues, claro que conseguidos los valores de las derivadas segundas, la obtención de los coeficientes de los polinomios que constituyen el *spline* cúbico es inmediata con la utilización de las expresiones recuadradas para a_i, b_i, c_i y d_i.

Finalmente, invocamos la única condición que todavía no hemos impuesto, la condición (3) que hace que las pendientes de los polinomios sean continuas en los nudos. Vamos a imponerla en el punto genérico (x_i, y_i) para lo cual tendremos que cambiar i por $i-1$ en la ecuación (3), quedando esta expresada como

$$P'_{i-1}(x_i)=P'_i(x_i)=y'_i,\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

Evaluamos los dos polinomios de la expresión anterior:

$$P'_{i-1}(x_i)=3a_{i-1}(x_i-x_{i-1})^2+2b_{i-1}(x_i-x_{i-1})+c_{i-1}=3a_{i-1}h_{i-1}^2+2h_{i-1}b_{i-1}+c_{i-1},$$

$$P'_i(x_i)=3a_i(x_i-x_i)^2+2b_i(x_i-x_i)+c_i=c_i\,.$$

Al igualar las dos pendientes anteriores y sustituir a_i, b_i, c_i y d_i por sus relaciones con las derivadas segundas, se obtiene

$$3\left(\frac{y''_i-y''_{i-1}}{6h_{i-1}}\right)h_{i-1}^2+2\left(\frac{y''_{i-1}}{2}\right)h_{i-1}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}-\frac{\left(2y''_{i-1}+y''_i\right)h_{i-1}}{6}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{\left(2y''_i+y''_{i+1}\right)h_i}{6}$$

Reordenando:

$$h_{i-1}y''_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)y''_i+h_iy''_{i+1}=6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)\text{ con } i=1,2,\ldots,n-1,$$

que podemos poner en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y''_0\\ y''_1\\ y''_2\\ \vdots\\ y''_n\end{pmatrix}=$$

$$= 6 \begin{pmatrix} \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{pmatrix}$$

La anterior ecuación matricial iguala el producto de dos matrices de dimensiones ($n-1$)x($n+1$) y ($n+1$)x1, respectivamente, con el de una matriz de dimensiones ($n-1$)x1. Si se especifican los valores para la curvatura en los puntos extremos; es decir, los valores para y_0'' y y_n'', se obtiene un sistema de $n-1$ ecuaciones y $n-1$ incógnitas. Con la condición de *spline* natural que describíamos anteriormente, en el que $y_0'' = 0$ y $y_n'' = 0$, la ecuación matricial anterior toma la forma:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ \\ \vdots \\ y_{n-1}'' \end{pmatrix} =$$

$$= 6 \begin{pmatrix} \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{pmatrix}$$

Una vez obtenidos los valores de las segundas derivadas del polinomio en los nodos, sólo es necesario sustituir sus valores en las ecuaciones

$$a_i = \frac{y_{i+1}'' - y_i''}{6h_i}$$

$$b_i = \frac{y_i''}{2}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{\left(2y_i'' + y_{i+1}''\right)h_i}{6}$$

$$d_i = y_i$$

para obtener los coeficientes de los polinomios buscados.

Ejemplo. Interpolar los puntos de la tabla con un *spline* cúbico natural y estímense los valores en $x = 0.66$ y $x = 1.75$.

i	x	$f(x)$
0	0.00	2.0000
1	1.00	4.4366
2	1.50	6.7134
3	2.25	13.9130

Con h_0=1, h_1=0.5 y h_2=0.75, particularizamos el sistema de ecuaciones anterior (de $n-1$ ecuaciones e incógnitas) para nuestro ejemplo concreto en el que n=3, quedando

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} \dfrac{y_2-y_1}{h_1} - \dfrac{y_1-y_0}{h_0} \\ \dfrac{y_3-y_2}{h_2} - \dfrac{y_2-y_1}{h_1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2(1+0.5) & 0.5 \\ 0.5 & 2(0.5+0.75) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} \dfrac{6.7134-4.4366}{0.5} - \dfrac{4.4366-2.000}{1} \\ \dfrac{13.9130-6.7134}{0.75} - \dfrac{6.7134-4.4366}{0.5} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3.0 & 0.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.7020 \\ 30.2754 \end{pmatrix}$$

que podemos resolver mediante el método de Gauss y su correspondiente tabla:

Coeficiente de y_1''	Coeficiente de y_2''	Término independiente
3.0	0.5	12.7020
0.5	2.5	30.2754
	$2.5-\dfrac{0.5\cdot 0.5}{3.0}=2.41\widehat{6}$	$30.2754-\dfrac{12.7020\cdot 0.5}{3}=28.1584$

De la última fila $2.41\widehat{6}\, y_2'' = 28.1584 \Rightarrow y_2'' = 11.6517$. Llevando este resultado a la primera fila:

$$y_1'' = \frac{12.7020 - 0.5\cdot 11.6517}{3} = 2.2920\,.$$

Con i= 0, 1, 2, y las ecuaciones

$$a_i = \frac{y_{i+1}'' - y_i''}{6h_i}$$

$$b_i = \frac{y_i''}{2}$$

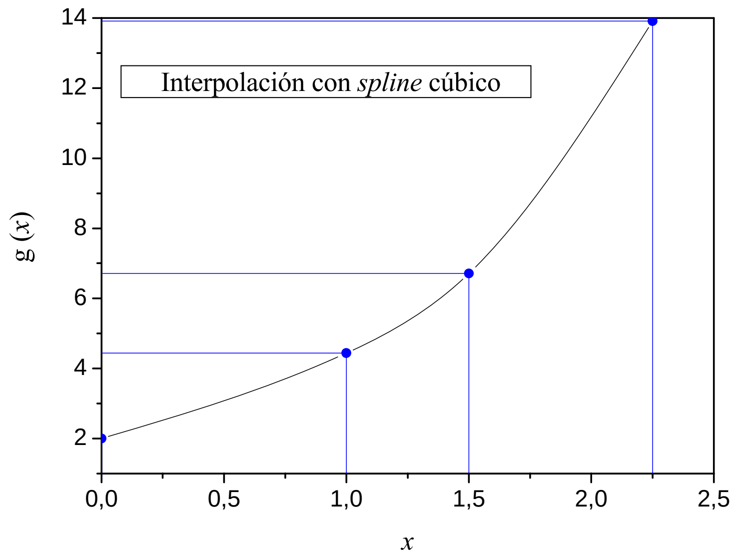
$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{\left(2y_i'' + y_{i+1}''\right)h_i}{6}$$

$$d_i = y_i$$

teniendo en cuenta que $y_0'' = y_3'' = 0$, obtenemos los tres polinomios que forman el *spline* cúbico, que recogemos en la siguiente tabla:

i	intervalo	$P_i(x)=$
0	[0.0, 1.0]	$0.3820(x-0)^3+0(x-0)^2+2.0546(x-0)+2.0000$
1	[1.0, 1.5]	$3.1199(x-1)^3+1.146(x-1)^2+3.2005(x-1)+4.4366$
2	[1.5, 2.25]	$-2.5893(x-1.5)^3+5.8259(x-1.5)^2+6.6866(x-1.5)+6.7134$

La figura siguiente muestra los resultados obtenidos.



El valor para la interpolación en x =0.66 (intervalo [0.0,1.0]) es g(0.66)= 3.4659, y para x =1.75 (intervalo [1.5, 2.25]), $g(x)$= 8.4467.

Observamos en este ejemplo como, partiendo de un conjunto de cuatro puntos a interpolar, el sistema que hemos tenido que resolver ha sido de dos ecuaciones. Esto es debido a la introducción de las derivadas segundas como incógnitas que reduce el número de incógnitas desconocidas al imponer la condición de *spline* natural u otras alternativas posibles en los dos puntos extremos.