

TEMA V**SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES****5.1. Planteamiento del problema.**

- Consideremos un sistema de n ecuaciones algebraicas lineales y n incógnitas, con determinante distinto de cero.

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\ \quad \quad \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1} \end{array} \right\}$$

que podemos expresar, en forma matricial, como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

o, en forma más compacta, (utilizaremos letras mayúsculas para las matrices cuadradas y minúsculas para las matrices columnas), donde cada uno de los elementos es una matriz:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Con $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, el sistema tiene solución única que podemos encontrar utilizando la regla de Cramer:

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \overbrace{a_{1,n+1}}^{\text{columna } j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & & \cdots & \\ & & & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}$$

donde, en aplicación de esta regla, para obtener x_j , sustituimos la columna j de la matriz \mathbf{A} , por la matriz columna de los términos independientes, \mathbf{b} , y dividimos el determinante de la matriz así obtenida, por el determinante de la matriz de coeficientes.

Aplicando esta regla, para determinar las n incógnitas del sistema, necesitamos calcular $n+1$ determinantes (el determinante de la matriz de coeficientes \mathbf{A} , que sirve para todas las incógnitas, y un determinante distinto para cada incógnita).

- Operaciones a realizar para calcular un determinante.

Para evaluar el costo que conlleva aplicar la regla de Cramer, calculamos el número de operaciones que hay que realizar para evaluar un determinante:

$$\text{Orden } 1 \Rightarrow |a_{1,1}| = a_{1,1}$$

$$\text{Orden } 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

$$\begin{aligned} \text{Orden } 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} &= a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} = \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \end{aligned}$$

$$\text{Orden } n \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n a_{1,k} \alpha_{1,k} \quad \text{con} \quad \alpha_{j,k} = (-1)^{j+k} D_{j,k}$$

En la expresión anterior, hemos obtenido el determinante desarrollando por la 1ª fila. $\alpha_{j,k}$ es el cofactor del elemento $a_{j,k}$ de la matriz y $D_{j,k}$ es el determinante de la matriz, de dimensiones $(n-1) \times (n-1)$, resultante de suprimir en \mathbf{A} la fila j y la columna k . Para calcular el determinante debemos realizar la sumatoria en la que intervienen n sumandos, pero cada una de estos sumandos contiene a su vez un determinante de un orden inferior por lo que se convierte, cada uno de los sumandos, en $n-1$ sumandos. A su vez, cada una de los $n(n-1)$ sumandos obtenidos contiene un determinante de orden $n-2$, por lo que se convierte en $n(n-1)(n-2)$ sumandos. Continuando con este razonamiento llegamos a determinar que, en un determinante de orden n , **tenemos $n!$ sumandos**.

Número de sumas: En el cálculo de un determinante hay $n!$ sumandos que suponen $[(n!)-1]$ sumas.

Número de multiplicaciones: En cada sumando (hay $n!$ sumandos), hay n factores que suponen $(n-1)$ productos \Rightarrow Esto supone $[n! (n-1)]$ productos por determinante.

- Operaciones a realizar para aplicar la regla de Cramer.

Llevando en mente que debemos realizar $(n+1)$ determinantes:

$$\text{Número de sumas} = [(n!)-1] (n+1)$$

$$\text{Número de multiplicaciones} = [n! (n-1)] (n+1) = n! (n^2-1)$$

Número de divisiones = n (Realizamos n divisiones entre los determinantes).

Número total de operaciones para la regla de Cramer =

$$= [(n!)-1](n+1) + n! (n^2-1) + n = (n!)n - n + n! - 1 + n^2 n! - n! + n = n! n(n+1) - 1 \approx \approx (n+1)! n \approx n! n^2$$

donde para realizar las aproximaciones, hemos tenido en cuenta que $n \gg 1$.

En resumen, una aplicación directa de la regla de Cramer supone un total de $n!n^2$ operaciones, aproximadamente.

- FLOPS (acrónimo de floating point operations per second).

La capacidad de un ordenador puede medirse por el número de operaciones en coma flotante que puede hacer en un segundo o FLOPS. Para algunos ordenadores tipo, trabajando en configuración óptima, esta capacidad es la que se muestra en la tabla.

Ordenador	MFLOPS
486 DX2 a 100 MHz	5
Pentium II	80
Estación de trabajo SUN SPARC 10	160
Pentium III a 700 MHz	180
AMD-K7 ó Pentium 4 a 1.4 GHz	360
CRAY C-90 (16 CPUs)	10^3
IBM Pacific Blue- ASCI Program (ganó a Kasparov)	$4 \cdot 10^6$
ASCI (Accelerated Strategic Computing Initiative) White. IBM-2001.	$10 \cdot 10^6$
Tormenta Azul de IBM (Centro Europeo de Previsiones Meteorológicas)	$20 \cdot 10^6$
New-CRAY (10.000 chips Opteron de AMD)	$40 \cdot 10^6$
BlueGene/L de IBM (Centro de Energía Nuclear EEUU, NNSA)	$280 \cdot 10^6$

Un ordenador no tarda el mismo tiempo en realizar una suma que una resta, multiplicación o división. Mientras que una suma o resta consume algo menos de tiempo que una multiplicación, una división tarda más de cuatro veces en ejecutarse que una suma. El diferente tiempo que tardan las operaciones básicas, hace que el MFLOPS no sea una unidad muy estricta para medir la capacidad de una máquina. Con la intención de solventar este hecho, se define el MFLOPS normalizado; así, una operación de dividir se hace equivalente a cuatro operaciones básicas de sumar, restar o multiplicar. Si no se hacen unas pruebas rigurosas, el número de operaciones en coma flotante que realiza una máquina puede variar bastante de un usuario a otro en función del sistema operativo que tenga cargado y de otras tareas, que al margen de la prueba, está realizando el ordenador.

Con los datos anteriores podemos hacer una tabla donde exponemos el número de ecuaciones, n , del sistema, el número de operaciones que siguiendo de regla de Cramer hay que realizar, y el tiempo que tardaría una máquina que realiza 1 GFLOPS, tal como una CRAY C-90.

n	Número de operaciones $n! \ n^2$	Tiempo con una máquina de 1GFLOPS
3	54	$54 \cdot 10^{-9}$ s
10	$3.6 \cdot 10^8$	0.36 s
15	$2.9 \cdot 10^{14}$	3.5 días
20	$9.7 \cdot 10^{20}$	$3.1 \cdot 10^4$ años
50	$7.6 \cdot 10^{67}$	$2.4 \cdot 10^{51}$ años
100	$9.3 \cdot 10^{161}$	$2.9 \cdot 10^{145}$ años

Es claro que la sistemática de Cramer es inviable y como, por otra parte, muchos problemas conducen a sistemas de ecuaciones algebraicas de orden elevado, es natural que se hayan elaborado y se empleen otras técnicas más efectivas. Estos métodos pueden clasificarse en:

Métodos directos: Constituyen, al igual que la regla de Cramer, algoritmos finitos; es decir, permiten obtener la solución final mediante un número finito de operaciones.

Métodos iterativos: Se basan en algoritmos infinitos que se detienen al encontrarse un grado de error apropiado.

5.2. Método de Gauss.

El método de Gauss es un método directo. Este método recibe el nombre de método de Gauss o de eliminación gaussiana por haber sido este matemático (1,777–1,855) el primero en describirlo sistemáticamente, aunque no el primero en utilizarlo, puesto que es antiquísimo.

5.2.1. Ejemplo.

Resolvemos, siguiendo la sistemática de Gauss, el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 5 \\ 6x_1 + 15x_2 + 19x_3 + 23x_4 &= 30 \\ 8x_1 + 42x_2 + 60x_3 + 70x_4 &= 98 \\ 12x_1 + 60x_2 + x_3 + 17x_4 &= 144 \end{aligned} \right\}$$

En primer lugar, eliminamos el término de x_1 de las ecuaciones 2ª, 3ª y 4ª (ecuaciones subsecuentes de la primera ecuación); para esto, restamos, de las tres ecuaciones anteriores, la 1ª ecuación multiplicada respectivamente por 3, 4 y 6 \Rightarrow

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 5 \\ 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 15 \\ 30x_2 + 44x_3 + 50x_4 &= 78 \\ 42x_2 - 23x_3 - 13x_4 &= 114 \end{aligned} \right\}$$

Ahora, eliminamos el término de x_2 de las ecuaciones subsecuentes a la 2ª ecuación (3ª y 4ª ecuación). Para esto, restamos, de estas ecuaciones, la 2ª ecuación multiplicada por 5 y 7 respectivamente \Rightarrow

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 5 \\ 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 15 \\ 9x_3 + 10x_4 &= 3 \\ -72x_3 - 69x_4 &= 9 \end{aligned} \right\}$$

Finalmente, eliminamos el término de x_3 de la 4ª ecuación. Para esto, restamos, de esta ecuación, la 3ª ecuación multiplicada por $-8 \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 5 \\ 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 15 \\ 9x_3 + 10x_4 &= 3 \\ 11x_4 &= 33 \end{aligned} \right\}$$

Hemos concluido la eliminación de incógnitas y llegado a un sistema equivalente al primero, pero **triangular superior**. Este tipo de sistema se resuelve inmediatamente por sustitución regresiva; es decir, de la última ecuación se obtiene la última incógnita. Llevado el valor de ésta a la penúltima ecuación se obtiene la penúltima incógnita, y así sucesivamente hasta llegar a la primera ecuación \Rightarrow

$$\text{De la 4ª ecuación: } x_4 = \frac{33}{11} = 3$$

$$\text{De la 3ª ecuación: } x_3 = \frac{3 - 10 \cdot 3}{9} = -3$$

$$\text{De la 2ª ecuación: } x_2 = \frac{15 - 7(-3) - 8 \cdot 3}{6} = 2$$

$$\text{De la 1ª ecuación: } x_1 = \frac{5 - 3 \cdot 2 - 4(-3) - 5 \cdot 3}{2} = -2$$

Y el sistema queda resuelto. Observamos que en su resolución hemos llevado a cabo dos etapas bien definidas:

1ª. Eliminación de las incógnitas necesarias para obtener un sistema triangular (**marcha directa**).

2ª. La solución del sistema triangular superior por sustitución regresiva (**marcha inversa**).

5.2.2. Eliminación de incógnitas.

La mayoría de los métodos directos, incluido el método de Gauss, se basan en la idea de eliminación de incógnitas que describimos en el esquema siguiente:

Sobre el sistema de ecuaciones, marcamos las ecuaciones p e i y las columnas q y j .

Elemento pivote

		Columna pivote q		Columna j	
		
Ecuación pivote p	...	$a_{p,q} x_q$...	$a_{p,j} x_j$... = $a_{p,n+1}$
		
Ecuación i	...	$a_{i,q} x_q$...	$a_{i,j} x_j$... = $a_{i,n+1}$
		

Término a eliminar

Al término $a_{p,q} \neq 0$ se le llama coeficiente pivote, y a la ecuación y columna que lo contiene también se les denomina con el adjetivo pivote.

El coeficiente $a_{i,q}$ es el coeficiente del término a eliminar, utilizando para ello la ecuación pivote. Para eliminar $a_{i,q}$ dividimos la ecuación pivote por el elemento pivote, con la finalidad de dar el valor unidad al término de x_q en la ecuación pivote; y posteriormente, multiplicamos por el valor del coeficiente del término que vamos a eliminar; de esta manera, transformamos la ecuación pivote en otra equivalente pero con un término igual al que vamos a eliminar. Sólo resta hacer la diferencia entre ambas ecuaciones. Obtenemos una nueva ecuación i de la forma:

$$(\text{Nueva ecuación } i) = (\text{Vieja ecuación } i) - \frac{a_{i,q}}{a_{p,q}} (\text{ecuación } p)$$

El nuevo sistema, después de la reforma en la ecuación i , queda:

		Columna pivote q		Columna j	
		
Ecuación pivote p	...	$a_{p,q} x_q$...	$a_{p,j} x_j$... = $a_{p,n+1}$
		
Ecuación i	...	$0 x_q$...	$a'_{i,j} x_j$... = $a'_{i,n+1}$
		

donde los elementos de la ecuación i son nuevos y han sido renombrados con una prima. Sus valores vienen dados por

$$a'_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{i,q} a_{p,j}}{a_{p,q}}$$

proyecciones en el sistema original del elemento $a_{i,j}$ sobre la columna y la fila pivote

nuevo viejo coeficiente pivote

Observamos que el nuevo coeficiente $a'_{i,j}$ es el coeficiente viejo menos el producto de las proyecciones de $a_{i,j}$ sobre la fila y columna pivote en el viejo sistema (estas proyecciones son $a_{i,q}$ y $a_{p,j}$), dividido por el coeficiente pivote.

Siguiendo este proceso podemos eliminar todos los coeficientes de la columna pivote, excepto el de la ecuación pivote. Si repetimos el proceso, eliminando los coeficientes de las ecuaciones por debajo de la ecuación pivote, llegamos a un sistema triangular.

5.2.3. TEOREMA.

Enunciado:

Si en el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= a_{2,n+1} \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n &= a_{n,n+1} \end{aligned} \right\} (1)$$

se cumple que todos los determinantes principales son distintos de cero; es decir :

$$\Delta_1 = |a_{1,1}| \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, \Delta_n = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0$$

el sistema puede ser reducido a un sistema triangular equivalente en la forma:

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= a_{1,n+1} \\ & a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{2,n}x_n = a'_{2,n+1} \\ & \vdots \\ & + a^{(n-1)}_{n,n}x_n = a^{(n-1)}_{n,n+1} \end{aligned} \right\} (2)$$

siendo distintos de cero todos los coeficientes de la diagonal principal:

$$a_{1,1} \neq 0, \quad a'_{2,2} \neq 0, \quad a''_{3,3} \neq 0, \quad \dots, \quad a^{(n-1)}_{n,n} \neq 0$$

Demostración:

En (1), como $a_{1,1} \neq 0$, podemos tomar este coeficiente como pivote y eliminar la incógnita x_1 de todas las ecuaciones menos de la 1ª, quedando el sistema equivalente

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a'_{2,2}x_2 + a'_{2,3}x_3 + \dots + a'_{2,n}x_n &= a'_{2,n+1} \\ a'_{3,2}x_2 + a'_{3,3}x_3 + \dots + a'_{3,n}x_n &= a'_{3,n+1} \\ &\dots \\ a'_{n,2}x_2 + a'_{n,3}x_3 + \dots + a'_{n,n}x_n &= a'_{n,n+1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

donde los elementos del sistema (3) se han obtenido, a partir de los elementos del sistema (1), mediante la regla de las proyecciones; es decir

$$a'_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{i,1}a_{1,j}}{a_{1,1}}$$

Como un determinante no se altera si a alguna de sus filas (o columnas) se agrega otra fila (o columna) multiplicada por un número arbitrario, los determinantes principales de (3) son iguales a los de (1), así

$$\Delta_2 = \Delta'_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & a'_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a'_{2,2}$$

Con $\Delta_2 \neq 0$ y $a_{1,1} \neq 0 \Rightarrow a'_{2,2} \neq 0$ y este elemento puede servirnos de coeficiente pivote en el sistema (3) para eliminar todos los términos de x_2 , salvo los de las ecuaciones 1ª y 2ª; es decir, en todas las ecuaciones subsecuentes a la ecuación 2. De esta forma se obtiene

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a'_{2,2}x_2 + a'_{2,3}x_3 + \dots + a'_{2,n}x_n &= a'_{2,n+1} \\ a''_{3,3}x_3 + \dots + a''_{3,n}x_n &= a''_{3,n+1} \\ a''_{4,3}x_3 + \dots + a''_{4,n}x_n &= a''_{4,n+1} \\ &\dots \\ a''_{n,3}x_3 + \dots + a''_{n,n}x_n &= a''_{n,n+1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Sistema equivalente a los anteriores, en el que los coeficientes nuevos se han obtenido mediante la expresión

$$a''_{i,j} = a'_{i,j} - \frac{a'_{i,2}a'_{2,j}}{a'_{2,2}}$$

De nuevo, con $\Delta_3 \neq 0$, $\Delta_3 = \Delta''_3$, $\Delta''_3 = a_{1,1}a'_{2,2}a''_{3,3} \neq 0$, $a_{1,1} \neq 0$ y $a'_{2,2} \neq 0 \Rightarrow a''_{3,3} \neq 0$, y este coeficiente puede ser elegido como coeficiente pivote.

De manera iterativa llegamos a obtener el sistema triangular dado en (2). Esta sistemática lleva en su interior una forma para el cálculo del determinante de una matriz, que en nuestro caso se concreta en la matriz cuadrada de los coeficientes del sistema de ecuaciones. Como $\Delta_n = \Delta_n^{(n-1)}$ y $\Delta_n^{(n-1)}$ corresponde a una matriz triangular superior $\Rightarrow \Delta_n = \Delta_n^{(n-1)} = a_{1,1}a'_{2,2}a''_{3,3} \dots a_n^{(n-1)}$ es el determinante de la matriz de coeficientes.

5.2.4. Sistemática del método de Gauss.

- El método de Gauss es la realización literal de las ideas expresadas anteriormente:

1º) **MARCHA DIRECTA**: Se convierte el sistema de ecuaciones en un sistema triangular equivalente.

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a'_{2,2}x_2 + a'_{2,3}x_3 + \dots + a'_{2,n-1}x_{n-1} + a'_{2,n}x_n &= a'_{2,n+1} \\ &\dots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n &= a_{n-1,n+1}^{(n-2)} \\ a_{n,n}^{(n-1)}x_n &= a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{aligned} \right\}$$

2º) **MARCHA INVERSA**: Se despejan las incógnitas partiendo de x_n hasta llegar a x_1 :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{a_{n,n+1}^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}} \\ x_{n-1} &= \frac{a_{n-1,n+1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} \\ x_{n-2} &= \frac{a_{n-2,n+1}^{(n-3)} - a_{n-2,n-1}^{(n-3)}x_{n-1} - a_{n-2,n}^{(n-3)}x_n}{a_{n-2,n-2}^{(n-3)}} \\ &\vdots \\ x_1 &= \frac{a_{1,n+1} - a_{1,2}x_2 - \dots - a_{1,n}x_n}{a_{1,1}} \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores pueden generalizarse en la expresión:

$$x_i = \frac{a_{i,n+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}^{(i-1)}x_j}{a_{i,i}^{(i-1)}}$$

- Los cálculos referentes al método de Gauss suelen ordenarse en tablas llamadas tablas de Gauss, donde vamos anotando los coeficientes de las sucesivas ecuaciones. Para el caso de $n=4$, una tabla de Gauss tiene la siguiente forma:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$
	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$
	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$
	$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$
1		$a'_{2,2}$	$a'_{2,3}$	$a'_{2,4}$	$a'_{2,5}$
		$a'_{3,2}$	$a'_{3,3}$	$a'_{3,4}$	$a'_{3,5}$
		$a'_{4,2}$	$a'_{4,3}$	$a'_{4,4}$	$a'_{4,5}$
2			$a''_{3,3}$	$a''_{3,4}$	$a''_{3,5}$
			$a''_{4,3}$	$a''_{4,4}$	$a''_{4,5}$
3				$a'''_{4,4}$	$a'''_{4,5}$

$$a'_{2,2} = a_{2,2} - \frac{a_{2,1}a_{1,2}}{a_{1,1}}$$

$$a'_{2,3} = a_{2,3} - \frac{a_{2,1}a_{1,3}}{a_{1,1}}$$

$$a'_{2,4} = a_{2,4} - \frac{a_{2,1}a_{1,4}}{a_{1,1}}$$

$$a'_{2,5} = a_{2,5} - \frac{a_{2,1}a_{1,5}}{a_{1,1}}$$

⋮

$$a'_{3,4} = a_{3,4} - \frac{a_{3,1}a_{1,4}}{a_{1,1}}$$

⋮

$$a''_{4,3} = a'_{4,3} - \frac{a'_{4,2}a'_{2,3}}{a'_{2,2}}$$

⋮

$$a''_{4,5} = a'_{4,5} - \frac{a'_{4,2}a'_{2,5}}{a'_{2,2}}$$

$$a'''_{4,5} = a''_{4,5} - \frac{a''_{4,3}a''_{3,5}}{a''_{3,3}}$$

(Sobre la tabla se muestra como se calculan, utilizando la regla de las proyecciones

$$a'_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{i,q}a_{p,j}}{a_{p,q}}, \text{ los términos } a'_{2,2}, a'_{3,4} \text{ y } a''_{4,5})$$

Marcha inversa, utilizando las ecuaciones pivote destacadas en la tabla anterior:

$$x_4 = \frac{a'''_{4,5}}{a'''_{4,4}}$$

$$x_3 = \frac{a''_{3,5} - a''_{3,4}x_4}{a''_{3,3}}$$

$$x_2 = \frac{a'_{2,5} - a'_{2,4}x_4 - a'_{2,3}x_3}{a'_{2,2}}$$

$$x_1 = \frac{a_{1,5} - a_{1,4}x_4 - a_{1,3}x_3 - a_{1,2}x_2}{a_{1,1}}$$

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones, mediante el método de Gauss.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 12x_3 + 8x_4 &= 27 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 4 \\ -3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= 11 \\ 6x_1 - 12x_2 - 8x_3 + 3x_4 &= 49 \end{aligned} \right\}$$

Construimos un tabla de Gauss:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	2	-12	8	27
5	4	7	-2	4
-3	7	9	5	11
6	-12	-8	3	49
	-6	67	-42	-131
	13	-27	29	92
	-24	64	-45	-113
		118.166666	-62	-191.833333
		-204	123	411
			-15.9647385	-79.8236952

La construcción de esta tabla supone la marcha directa. Las ecuaciones marcadas con una flecha roja son la que forman el sistema triangular. Los coeficientes en un círculo son los coeficientes utilizados como pivotes.

Para encontrar los valores de las incógnitas, realizamos la marcha inversa:

$$x_4 = \frac{-79.8236952}{-15.9647385} \Rightarrow x_4 = 5$$

$$x_3 = \frac{-191.83333 + 62 \cdot 5}{118.16666} \Rightarrow x_3 = 1$$

$$x_2 = \frac{-131 + 42 \cdot 5 - 67 \cdot 1}{-6} \Rightarrow x_2 = -2$$

$$x_1 = \frac{27 - 8 \cdot 5 + 12 \cdot 1 + 2 \cdot 2}{1} \Rightarrow x_1 = 3$$

5.2.4. Operaciones aritméticas requeridas por el método de Gauss.

Para cerciorarnos de que el método de Gauss es viable numéricamente, y no le sucede lo mismo que a la regla de Cramer, debemos de estimar el número de operaciones necesarias para llevar a cabo este método.

• Para esto tenemos en cuenta que, siguiendo la regla de las proyecciones, $a'_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{i,1}a_{1,j}}{a_{1,1}}$, para el cálculo de cada uno de los nuevos coeficientes de los sistemas auxiliares se precisa una suma, una multiplicación y una división. Para contabilizar estas operaciones hacemos una tabla.

MARCHA DIRECTA							
	1 ^{er} paso	2 ^o paso	...	k-ésimo paso	...	paso n-2	paso n-1
+	$n(n-1)$	$(n-1)(n-2)$...	$(n-k+1)(n-k)$...	$3 \cdot 2$	$2 \cdot 1$
\times	"	"	...	"	...	"	"
\div	"	"	...	"	...	"	"

donde hemos tenido en cuenta que en el primer paso se calculan $(n-1)$ ecuaciones con n coeficientes cada una (incluido el término independiente), y que en cada paso hay una ecuación y un coeficiente menos.

Sumamos las operaciones de un tipo que hacemos en los $(n-1)$ pasos, para lo cual tenemos que hacer la siguiente suma

$$\begin{aligned} \text{Nº de operaciones de un tipo} &= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k+1)(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} \{n^2 - 2nk + k^2 + n - k\} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \{k^2 - (2n+1)k + n(n+1)\} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - (2n+1)\frac{n(n-1)}{2} + n(n-1)(n+1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + \dots + n = \frac{(1+n)n}{2} \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= 1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$$= n(n-1) \left[\frac{2n-1-6n-3+6n+6}{6} \right] = n(n-1) \frac{(n+1)}{3} \Rightarrow$$

$$\text{Nº de operaciones } + \text{ ó } \times \text{ ó } \div \text{ en la marcha directa} = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1) = \frac{1}{3}n(n^2-1)$$

• Por su parte, en la marcha inversa, para calcular x_n sólo se necesita una división, para x_{n-1} se necesita una división, una multiplicación y una suma; si seguimos avanzando en la marcha inversa, en cada paso, se necesita una sola división, pero una

suma y una multiplicación más. Hasta llegar a x_1 que necesita $(n-1)$ multiplicaciones y $(n-1)$ sumas. Hacemos una tabla donde esquematizamos las operaciones:

MARCHA INVERSA								
	1 ^{er} paso	2 ^o paso	3 ^{er} paso	...	paso k	...	paso $n-1$	paso n
+	0	1	2		$k-1$		$n-2$	$n-1$
\times	0	1	2		$k-1$		$n-2$	$n-1$
\div	1	1	1		1		1	1

El número de sumas y multiplicaciones viene dado por una suma aritmética:

$$\text{Nº de } + \text{ ó } \times \text{ en la marcha inversa} = \sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{0 + (n-1)}{2} n = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{Nº de } \div \text{ en la marcha inversa} = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

• Para calcular el número de operaciones totales, vamos a contabilizar por un lado el número de operaciones de sumar o de multiplicar, que son las mismas, y por otro lado las de dividir, para posteriormente, sumarlas todas.

$$\text{Nº de } + \text{ ó } \times \text{ total} = n(n-1) \left[\frac{1}{3}(n+1) + \frac{1}{2} \right] = n(n-1) \frac{2n+5}{6}$$

$$\text{Nº de } \div \text{ total} = n \left[1 + \frac{1}{3}(n^2 - 1) \right] = n \frac{n^2 + 2}{3}$$

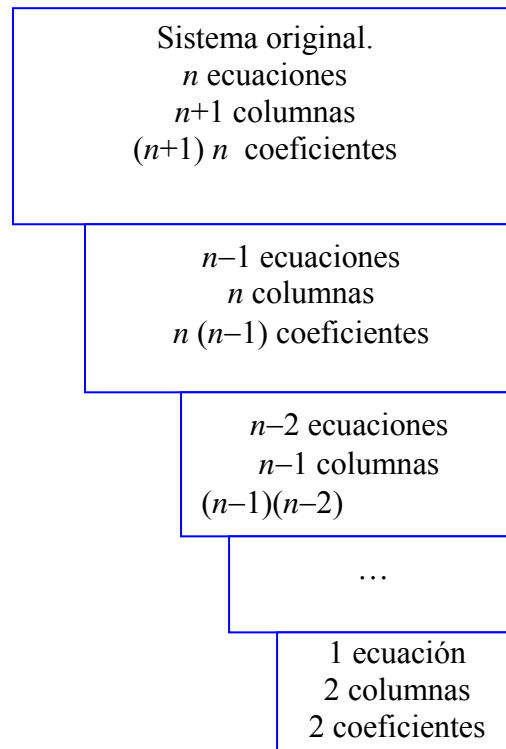
$$\begin{aligned} \text{Nº total de operaciones} &= n(n-1) \frac{2n+5}{3} + n \frac{n^2+2}{3} = \frac{n}{3} [2n^2 + 5n - 2n - 5 + n^2 + 2] = \\ &= \frac{n}{3} [3n^2 + 3n - 3] = n[n^2 + n - 1] \approx n^3 \text{ para } n \text{ grande.} \end{aligned}$$

Este número de operaciones es muy inferior a los $n!n^2$ que necesitas la regla de Cramer. Por ejemplo, para el caso de un sistema de orden $n=10^3$, un ordenador de la escala más baja que se puede encontrar en el mercado de segunda mano, como un 486 DX2 que realiza 5 MFLPOS, tardaría aproximadamente: $(10^3)^3$ operaciones / $(5 \cdot 10^6)$ operaciones/segundo = $10^9 / 5 \cdot 10^6$ segundos = 200 segundos = 3.3 minutos.

5.2.5. Necesidades de almacenamiento.

Otro factor que debemos evaluar a la hora de estudiar la viabilidad de un método numérico son las necesidades de memoria que requiere el método. En el método de Gauss tenemos los coeficientes originales del sistema a resolver y los coeficientes auxiliares que se generan en los $n-1$ pasos de que consta la marcha directa.

Podemos hacer el siguiente recuento, observando una tabla de Gauss:



Paso 0 $\rightarrow n(n+1)$ coeficientes originales del sistema.

Paso 1 $\rightarrow n(n-1)$ coeficientes auxiliares.

...

Paso $k \rightarrow (n-k+1)(n-k)$ coeficientes auxiliares.

...

Paso $n-1 \rightarrow 2 \cdot 1$ coeficientes auxiliares.

Por tanto,

número de coeficientes originales = $N_{orig} = n(n+1)$

número de coeficientes auxiliares = $N_{aux} = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

ya que la suma que contabiliza el número de coeficientes auxiliares es el mismo que el de un tipo de operaciones en la marcha directa. Sumando los coeficientes originales con los auxiliares, nos queda

$$\begin{aligned}
 \text{número total de coeficientes} &= N_{tot} = n(n+1) + \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = n(n+1) \left[1 + \frac{n-1}{3} \right] = \\
 &= n(n+1) \frac{n+2}{3} \approx \frac{1}{3} n^3 \text{ para } n \text{ grande}
 \end{aligned}$$

Ejemplo:

Para $n = 10^3 \Rightarrow N_{tot} = \frac{1}{3} 10^9$ coeficientes (en simple precisión, con 1 palabra o dato $\equiv 4$ bytes) $= \frac{4}{3} 10^9$ bytes ≈ 1 Gbyte.

Para $n = 10^2 \Rightarrow N_{tot} = \frac{1}{3} 10^6$ coeficientes $= \frac{4}{3} 10^6$ bytes ≈ 1 Mbyte.

Podemos hacer una implementación numérica más eficaz del método, en la que necesitamos disponer de menos memoria, si tenemos en cuenta que, una vez realizado el primer paso, de los coeficientes originales sólo necesitamos los de la primera fila, que son los únicos del sistema original que forman parte del sistema triangular equivalente. El resto de coeficientes del sistema original pueden ser eliminados (machacados o sobrescritos por otros coeficientes), una vez calculados los coeficientes del primer paso que denominamos como primas. Este razonamiento puede ser aplicado al resto de pasos, con lo que concluimos que sólo necesitamos tener reservado espacio en la memoria para los coeficientes del paso k que estamos calculando, para los coeficientes del paso $k-1$ que estamos utilizando para calcular los del paso k , y para los que forman las ecuaciones del sistema triangular. Por tanto, podemos elaborar un algoritmo numérico que reserve en la memoria solamente espacio para los coeficientes originales y los coeficientes del primer paso (coeficientes prima) y que posteriormente vaya utilizando este espacio para el resto de coeficientes. Con este algoritmo la memoria necesaria sería :

$$N_{tot} = N_{orig} + N_{primer\ paso} = n(n+1) + (n-1)n = n(n+1+n-1) = 2n^2$$

Ejemplo:

Para $n = 10^3 \Rightarrow N_{tot} = 2 \cdot (10^3)^2$ datos = 8 Mbytes

Para $n = 10^2 \Rightarrow N_{tot} = 2 \cdot (10^2)^2$ datos = 80 kbytes

5.3. Modificaciones al método de Gauss.

5.3.1. Método de la división única.

Este método es una ligera variante del método de Gauss que permite reducir el número de operaciones que de manera repetitiva hace el método de Gauss, reduciendo el número de operaciones de división que son aquellas que requieren más tiempo.

Para comprender la razón que fundamenta este método, nos fijamos en un sistema de tres ecuaciones y llevamos a cabo el primer paso de la marcha directa.

Aplicando la regla de las proyecciones, $a'_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{i,1}a_{1,j}}{a_{1,1}}$, a los elementos de la segunda y tercera fila del sistema, con $a_{1,1}$ como elemento pivote.

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 &= a_{1,4} \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 &= a_{2,4} \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 &= a_{3,4} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \left(a_{2,2} - \frac{a_{2,1}a_{1,2}}{a_{1,1}} \right) x_2 + \left(a_{2,3} - \frac{a_{2,1}a_{1,3}}{a_{1,1}} \right) x_3 &= \left(a_{2,4} - \frac{a_{2,1}a_{1,4}}{a_{1,1}} \right) \\ \left(a_{3,2} - \frac{a_{3,1}a_{1,2}}{a_{1,1}} \right) x_2 + \left(a_{3,3} - \frac{a_{3,1}a_{1,3}}{a_{1,1}} \right) x_3 &= \left(a_{3,4} - \frac{a_{3,1}a_{1,4}}{a_{1,1}} \right) \end{aligned}$$

Donde vemos que ciertas operaciones se repiten, en concreto y tal como hemos marcado en las ecuaciones anteriores, los coeficientes de la ecuación pivote se dividen sucesivamente por el coeficiente pivote, y esta repetición la llevamos a cabo en todos los pasos de la marcha directa con los diferentes elementos pivotes. El método de la división única, tal como indica su nombre, hace esta división una sola vez, dividiendo inicialmente la ecuación pivote por el elemento pivote con lo que éste pasa a ser la unidad

Por tanto, la primera acción es convertir la ecuación primera del sistema (la ecuación pivote inicial) en una ecuación de coeficiente unidad para la primera incógnita:

$$x_1 + t_{1,2}x_2 + \dots + t_{1,n}x_n = t_{1,n+1} \quad \text{con} \quad t_{1,j} = \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}},$$

quedando, la ecuación conocida como regla de las proyecciones, de la forma:

$$a'_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{i,1}a_{1,j}}{a_{1,1}} = a_{i,j} - a_{i,1}t_{1,j}$$

Posteriormente, debemos realizar esta misma operación con todas y cada una de las ecuaciones pivote, eliminando los sucesivos coeficientes de las ecuaciones subsecuentes que vayan transformando el sistema en diagonal. En cada uno de estos pasos la regla de las proyecciones tomará la forma:

$$a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - a_{i,p}^{(k-1)}t_{p,j}, \quad \text{con} \quad t_{p,j} = \frac{a_{p,j}^{(k-1)}}{a_{p,p}^{(k-1)}}$$

donde se ha utilizado un elemento de la diagonal principal como pivote.

Concluida la marcha directa, el sistema inicial se ha visto reducido a un sistema triangular equivalente con coeficientes unidad en todos los elementos de la diagonal principal.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + t_{1,2}x_2 + t_{1,3}x_3 + \cdots + t_{1,n-1}x_{n-1} + t_{1,n}x_n &= t_{1,n+1} \\ x_2 + t_{2,3}x_3 + \cdots + t_{2,n-1}x_{n-1} + t_{2,n}x_n &= t_{2,n+1} \\ &\vdots \\ x_{n-1} + t_{n-1,n}x_n &= t_{n-1,n+1} \\ x_n &= t_{n,n+1} \end{aligned} \right\}$$

La marcha inversa también se facilita con coeficientes unidad en la diagonal principal:

$$\begin{aligned} x_n &= t_{n,n+1} \\ x_{n-1} &= t_{n-1,n+1} - t_{n-1,n}x_n \\ &\vdots \\ x_1 &= t_{1,n+1} - t_{1,2}x_2 - \cdots - t_{1,n}x_n \end{aligned}$$

- **Operaciones requeridas para la realización del método de la división única.**

En este método se realizan el mismo número de operaciones de sumar y multiplicar que se realizan en el método de Gauss, pero diferente número de divisiones. Mientras que en la marcha inversa no se realizan divisiones, en la marcha directa se hacen las siguientes:

Paso 0 $\rightarrow n$

Paso 1 $\rightarrow n-1$

...

Paso $k \rightarrow n-k$

...

Paso $n-1 \rightarrow 1$

Por tanto,

$$\text{Nº de } \div \text{ en la marcha directa} = n + (n-1) + \dots + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Utilizando los resultados anteriores del método de Gauss, sumando el número de operaciones de dividir con el de sumar y multiplicar, que eran las mismas, obtenemos el número de operaciones totales en el método de la división única.

$$\begin{aligned} \text{Nº total de operaciones} &= 2 \frac{n(n-1)(2n+5)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{n}{6} \{2(n-1)(2n+5) + 3(n+1)\} = \frac{n}{6} \{4n^2 + 10n - 4n - 10 + (3n+3)\} = \\ &= \frac{n}{6} \{4n^2 + 9n - 7\} \approx \frac{2}{3}n^3, \text{ para } n \text{ grandes.} \end{aligned}$$

Esta variante del método de Gauss realiza $\frac{1}{3}$ menos de las operaciones que lleva a cabo el clásico método de Gauss, con la particularidad de que las operaciones ahorradas son divisiones, y como ya hemos comentado, estas son las operaciones en coma flotante que necesitan mayor tiempo de CPU (Central Processing Unit).

5.3.2. Método de Gauss-Jordan.

- **Ejemplo:** Comenzaremos resolviendo el siguiente sistema

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 0x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \end{array} \right\}$$

de la siguiente manera:

- 1) En un primer paso eliminamos x_1 de todas las ecuaciones menos de la 1ª ecuación, tal como se hace en el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 0x_3 - x_4 = 2 \\ 0 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 0 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -8 \\ 0 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = -10 \end{array} \right\}$$

- 2) En un segundo paso, eliminamos x_2 , pero a diferencia del método de Gauss, la eliminamos también de la 1ª ecuación; es decir eliminamos de todas las ecuaciones, excepto de la 2ª.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 0 + 2x_3 - 3x_4 = -8 \\ 0 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 0 + 0 + x_3 - x_4 = -3 \\ 0 + 0 - 7x_3 + 10x_4 = 30 \end{array} \right\}$$

- 3) Repetimos la operación anterior, eliminando x_3 de todas las ecuaciones menos de la tercera.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 0 + 0 - x_4 = -2 \\ 0 + x_2 + 0 + 0 = 2 \\ 0 + 0 + x_3 - x_4 = -3 \\ 0 + 0 + 0 + 3x_4 = 9 \end{array} \right\}$$

- 4) Finalmente, eliminamos x_4 de todas las ecuaciones, excepto de la 4ª, quedando un sistema diagonal que no necesita marcha inversa para su solución.

Ejemplo: Resolver, por el método de Gaus-Jordan, el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{array} \right\}$$

Teniendo en cuenta que la fila pivote la pasamos al siguiente paso tal como está, que la columna pivote pasa a tener todos los elementos nulos, salvo el elemento pivote, y aplicando sucesivamente la regla de la proyecciones para calcular el resto de coeficientes auxiliares, podemos realizar la siguiente tabla, donde se destacan con diferentes fondos de color los elementos, las filas y las columnas pivote.

x_1	x_2	x_3	b	
2	1	1	8	} paso 0
1	0.5	0.5	4	
-1	2	2	6	
2	1	-2	2	
1	0.5	0.5	4	} paso 1
0	2.5	2.5	10	
0	1	1	4	
0	0	-3	-6	
1	0	0	2	} paso 2
0	1	1	4	
0	0	-3	-6	
0	0	1	2	
1	0	0	2	} paso 3
0	1	0	2	
0	0	1	2	

$\Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 2$ es la solución del sistema.

Ejemplo: Resolvemos ahora, utilizando una tabla de Gauss-Jordan, el sistema de cuatro ecuaciones que se propuso como ejemplo al principio del apartado. De idéntica forma a como hemos construido la anterior tabla, realizamos la siguiente:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	2	0	-1	2
2	5	-1	-1	9
1	1	2	-3	-6
3	-2	1	-1	-4
1	2	0	-1	2
0	1	-1	1	5
0	-1	2	-2	-8
0	-8	1	2	-10
1	0	2	-3	-8
0	1	-1	1	5
0	0	1	-1	-3
0	0	-7	10	30
1	0	0	-1	-2
0	1	0	0	2
0	0	1	-1	-3
0	0	0	3	9
1	0	0	1	3
1	0	0	0	1
0	1	0	0	2
0	0	1	0	0
0	0	0	1	3

5.4. Factorización triangular LU de una matriz.

• Como hemos visto en el algoritmo de Gauss, se busca transformar la matriz de coeficientes del sistema, \mathbf{A} , en una matriz triangular porque una matriz triangular aporta de manera fácil la solución del sistema. En lo que sigue, utilizaremos letras mayúsculas para referirnos a las matrices cuadradas y letras minúsculas para las matrices columna.

Supongamos que la matriz \mathbf{A} puede descomponerse como producto de dos matrices triangulares (una triangular superior y otra triangular inferior); es decir $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$, con

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & l_{n,3} & \cdots & l_{n,n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & \cdots & u_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

El sistema $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ lo podemos escribir como $\mathbf{LUx}=\mathbf{b}$. Llamando \mathbf{z} a \mathbf{Ux} , tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{LUx} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Ux} = \mathbf{z} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{Lz} = \mathbf{b}. \text{ Con esta última ecuación, dado que } \mathbf{L} \text{ es triangular, es}$$

inmediato el cálculo de la matriz columna \mathbf{z} . Conocida la matriz \mathbf{z} , de $\mathbf{Ux}=\mathbf{z}$ es inmediato obtener la matriz columna de las incógnitas, \mathbf{x} .

- Veamos como podemos llevar a cabo la factorización $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$. El producto

$$\begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

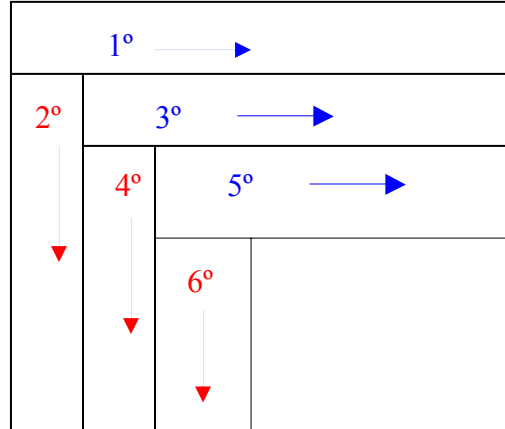
que supone un sistema de n^2 ecuaciones con n^2+n incógnitas, no determina unívocamente los elementos de las matrices \mathbf{L} y \mathbf{U} que factorizan la matriz \mathbf{A} , existiendo un conjunto infinito de posibles coeficientes para las matrices \mathbf{L} y \mathbf{U} que cumplen la ecuación anterior. Una decisión, llamada factorización de Doolittle, que suministra una única solución, es hacer la unidad a todos los elementos de la diagonal principal de la matriz \mathbf{L} ; es decir, $l_{j,j}=1$ ($j=1,\dots,n$), haciendo a \mathbf{L} una “matriz triangular inferior unitaria”. Otra posible elección es hacer que \mathbf{U} sea una “matriz triangular superior unitaria”, haciendo la unidad a todos sus coeficientes de la diagonal principal; esta elección se llama factorización de Crout. Ambas factorizaciones llevan a procesos paralelos, por lo que aquí sólo se desarrollará la factorización de Doolittle. Con esta elección

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & l_{n,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & \cdots & u_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix} =$$

The diagram illustrates the Doolittle factorization process. It shows the calculation of the elements of the lower triangular matrix \mathbf{L} and the upper triangular matrix \mathbf{U} . The diagram is divided into four numbered steps:

- 1°**: Initial values of $u_{1,1}, u_{1,2}, u_{1,3}, \dots, u_{1,n}$ are shown in the first row of \mathbf{U} .
- 2°**: The first column of \mathbf{L} is calculated using the formula $l_{i,1} = a_{i,1} / u_{1,1}$. The elements $l_{2,1}u_{1,1}, l_{3,1}u_{1,1}, \dots, l_{n,1}u_{1,1}$ are shown in the first column of \mathbf{L} .
- 3°**: The second row of \mathbf{U} is calculated using the formula $u_{2,2} = a_{2,2} - l_{2,1}u_{1,2}$. The elements $l_{2,1}u_{1,2} + u_{2,2}, l_{2,1}u_{1,3} + u_{2,3}, \dots, l_{2,1}u_{1,n} + u_{2,n}$ are shown in the second row of \mathbf{U} .
- 4°**: The second column of \mathbf{L} is calculated using the formula $l_{i,2} = (a_{i,2} - l_{i,1}u_{1,2}) / u_{2,2}$. The elements $l_{3,1}u_{1,2} + l_{3,2}u_{2,2}, l_{3,1}u_{1,3} + l_{3,2}u_{2,3} + u_{3,3}, \dots, l_{3,1}u_{1,n} + l_{3,2}u_{2,n} + u_{3,n}$ are shown in the second column of \mathbf{L} .

Siguiendo la sistemática que se muestra en el siguiente esquema podemos ir calculando, sucesivamente, las diferentes filas de \mathbf{U} y columnas de \mathbf{L} .



1º) En el primer paso, se calcula la primera fila de la matriz **U**.

$$u_{1,1} = a_{1,1}, \quad u_{1,2} = a_{1,2}, \quad \dots, \quad u_{1,n} = a_{1,n}$$

2º) En el segundo paso, se calcula la primera columna de la matriz **L**.

$$l_{2,1}u_{1,1} = a_{2,1} \Rightarrow l_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{u_{1,1}}$$

$$l_{3,1}u_{1,1} = a_{3,1} \Rightarrow l_{3,1} = \frac{a_{3,1}}{u_{1,1}}$$

...

$$l_{n,1}u_{1,1} = a_{n,1} \Rightarrow l_{n,1} = \frac{a_{n,1}}{u_{1,1}}$$

3º) En el tercer paso, se calcula la segunda fila de la matriz **U**.

$$l_{2,1}u_{1,2} + u_{2,2} = a_{2,2} \Rightarrow u_{2,2} = a_{2,2} - l_{2,1}u_{1,2}$$

...

$$l_{2,1}u_{1,n} + u_{2,n} = a_{2,n} \Rightarrow u_{2,n} = a_{2,n} - l_{2,1}u_{1,n}$$

4º) En el cuarto paso, se calcula la segunda columna de la matriz **L**.

$$l_{3,1}u_{1,2} + l_{3,2}u_{2,2} = a_{3,2} \Rightarrow l_{3,2} = \frac{a_{3,2} - l_{3,1}u_{1,2}}{u_{2,2}}$$

...

$$l_{n,1}u_{1,2} + l_{n,2}u_{2,2} = a_{n,2} \Rightarrow l_{n,2} = \frac{a_{n,2} - l_{n,1}u_{1,2}}{u_{2,2}}$$

y así, sucesivamente, hasta completar el cálculo de todos coeficientes de la matrices de factorización **L** y **U**.

Observando la matriz producto y las expresiones obtenidas, podemos obtener las siguientes expresiones generales:

$$u_{1,j} = a_{1,j} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n \quad (i = 1)$$

$$l_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{u_{1,1}} \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n \quad (j = 1)$$

$$u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} u_{k,j} \quad i \leq j, \quad i \neq 1, \quad j = 2, 3, \dots, n$$

$$l_{i,j} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} u_{k,j}}{u_{j,j}} \quad j < i, \quad j \neq 1, \quad i = 3, \dots, n$$

Ejemplo. Resolver, utilizando una factorización **LU** de la matriz de coeficientes, el sistema

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 21 \\ 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 &= 52 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 8x_4 &= 79 \\ 4x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 6x_4 &= 82 \end{aligned} \right\}$$

Factorizamos la matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 & 8 \\ 4 & 12 & 10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & 0 \\ l_{4,1} & l_{4,2} & l_{4,3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & u_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & u_{4,4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ l_{2,1}u_{1,1} & l_{2,1}u_{1,2} + u_{2,2} & l_{2,1}u_{1,3} + u_{2,3} & l_{2,1}u_{1,4} + u_{2,4} \\ l_{3,1}u_{1,1} & l_{3,1}u_{1,2} + l_{3,2}u_{2,2} & l_{3,1}u_{1,3} + l_{3,2}u_{2,3} + u_{3,3} & l_{3,1}u_{1,4} + l_{3,2}u_{2,4} + u_{3,4} \\ l_{4,1}u_{1,1} & l_{4,1}u_{1,2} + l_{4,2}u_{2,2} & l_{4,1}u_{1,3} + l_{4,2}u_{2,3} + l_{4,3}u_{3,3} & l_{4,1}u_{1,4} + l_{4,2}u_{2,4} + l_{4,3}u_{3,4} + u_{4,4} \end{bmatrix}$$

Seguimos los diferentes pasos descritos anteriormente:

1º) En el primer paso, se calcula la primera fila de la matriz **U**.

$$u_{1,1} = a_{1,1} = 1, \quad u_{1,2} = a_{1,2} = 2, \quad u_{1,3} = a_{1,3} = 4, \quad u_{1,4} = a_{1,4} = 1$$

2º) En el segundo paso, se calcula la primera columna de la matriz **L**.

$$l_{2,1}u_{1,1} = a_{2,1} = 2 \quad \Rightarrow \quad l_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{u_{1,1}} = 2$$

$$l_{3,1}u_{1,1} = a_{3,1} = 3 \quad \Rightarrow \quad l_{3,1} = \frac{a_{3,1}}{u_{1,1}} = 3$$

$$l_{4,1}u_{1,1} = a_{4,1} = 4 \quad \Rightarrow \quad l_{4,1} = \frac{a_{4,1}}{u_{1,1}} = 4$$

3º) En el tercer paso, se calcula la segunda fila de la matriz **U**.

$$\begin{aligned}l_{2,1}u_{1,2} + u_{2,2} &= a_{2,2} = 8 \Rightarrow u_{2,2} = a_{2,2} - l_{2,1}u_{1,2} = 4 \\l_{2,1}u_{1,3} + u_{2,3} &= a_{2,3} = 6 \Rightarrow u_{2,3} = a_{2,3} - l_{2,1}u_{1,3} = -2 \\l_{2,1}u_{1,4} + u_{2,4} &= a_{2,4} = 4 \Rightarrow u_{2,4} = a_{2,4} - l_{2,1}u_{1,4} = 2\end{aligned}$$

4º) En el cuarto paso, se calcula la segunda columna de la matriz **L**.

$$\begin{aligned}l_{3,1}u_{1,2} + l_{3,2}u_{2,2} &= a_{3,2} = 10 \Rightarrow l_{3,2} = \frac{a_{3,2} - l_{3,1}u_{1,2}}{u_{2,2}} = 1 \\l_{4,1}u_{1,2} + l_{4,2}u_{2,2} &= a_{4,2} = 12 \Rightarrow l_{4,2} = \frac{a_{4,2} - l_{4,1}u_{1,2}}{u_{2,2}} = 1\end{aligned}$$

5º) En el quinto paso, se calcula la tercera fila de **U**.

$$\begin{aligned}l_{3,1}u_{1,3} + l_{3,2}u_{2,3} + u_{3,3} &= a_{3,3} = 8 \Rightarrow u_{3,3} = a_{3,3} - l_{3,1}u_{1,3} - l_{3,2}u_{2,3} = -2 \\l_{3,1}u_{1,4} + l_{3,2}u_{2,4} + u_{3,4} &= a_{3,4} = 8 \Rightarrow u_{3,4} = a_{3,4} - l_{3,1}u_{1,4} - l_{3,2}u_{2,4} = 3\end{aligned}$$

6º) En el sexto paso, se calcula el único coeficiente desconocido de la tercera fila de **L**.

$$l_{4,1}u_{1,3} + l_{4,2}u_{2,3} + l_{4,3}u_{3,3} = a_{4,3} = 10 \Rightarrow l_{4,3} = \frac{a_{4,3} - l_{4,1}u_{1,3} - l_{4,2}u_{2,3}}{u_{3,3}} = 2$$

7ª) En el séptimo y último paso, se calcula el único coeficiente de la última fila de **U**.

$$l_{4,1}u_{1,4} + l_{4,2}u_{2,4} + l_{4,3}u_{3,4} + u_{4,4} = a_{4,4} = 6 \Rightarrow u_{4,4} = a_{4,4} - l_{4,1}u_{1,4} - l_{4,2}u_{2,4} - l_{4,3}u_{3,4} = -6$$

Ordenando en su lugar los coeficientes obtenidos, nos queda

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Del sistema triangular } \mathbf{Lz} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 6 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Y finalmente, del otro sistema triangular $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

5.5. Métodos iterativos.

- El método de Gauss y sus variantes son conocidos como **métodos directos** de resolución de un sistema de ecuaciones, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, porque suministran la solución en un número finito de pasos. La solución generada sería exacta si no fuese por los errores de redondeo.
- Los **métodos iterativos**, también llamados indirectos, generan sucesivas soluciones aproximadas que convergen a la solución exacta del sistema. El cálculo se detiene cuando se alcanza un determinado grado de precisión.
- Para **sistemas lineales grandes**, con miles de ecuaciones, los métodos iterativos presentan con frecuencia ventajas decisivas frente a los directos en cuanto a velocidad y requerimientos de memoria.
- En **sistemas raros** (sistemas de ecuaciones en el que un gran número de coeficientes de la matriz \mathbf{A} son cero), los métodos iterativos son, con frecuencia, muy eficientes.
- Otra ventaja de los métodos iterativos es que, cuando convergen, son usualmente estables y de hecho amortiguan errores conforme el proceso se desarrolla.
- El gran inconveniente de los métodos iterativos reside en el hecho de que no existe una metodología iterativa que asegure la convergencia del proceso para cualquier sistema de ecuaciones.

5.5.1. Ejemplo.

Resolvemos el sistema $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 = 3 \\ -8x_1 + 9x_2 = -4 \end{cases}$ mediante un proceso iterativo.

El sistema anterior, dejando la primera incógnita despejada en la parte izquierda de la primera ecuación y la segunda incógnita en la segunda ecuación, queda

$$\begin{cases} x_1 = \frac{6}{7}x_2 + \frac{3}{7} \\ x_2 = \frac{8}{9}x_1 - \frac{4}{9} \end{cases}$$

Esta forma del sistema sugiere el proceso iterativo descrito por

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{6}{7}x_2^{(k-1)} + \frac{3}{7} \\ x_2^{(k)} = \frac{8}{9}x_1^{(k-1)} - \frac{4}{9} \end{cases}$$

donde k es un contador ($k = 0, 1, 2, \dots$) que utilizado como superíndice en los elementos de la matriz incógnita, indica el paso del proceso iterativo. Este proceso iterativo necesita de una semilla o valores iniciales para las incógnitas:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}$$

que suministra una primera solución:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{6}{7}x_2^{(0)} + \frac{3}{7} \\ x_2^{(1)} &= \frac{8}{9}x_1^{(0)} - \frac{4}{9} \end{aligned} \right\}$$

y de la que a su vez podremos generar otra mejor, supuesto que este proceso converja a una pareja de soluciones (x_1 y x_2) que nos devuelvan sus mismos valores y que por tanto son la solución del sistema. Si la semilla suministrada está cerca de la solución del sistema, el proceso iterativo será corto y la convergencia rápida. Si desconocemos la solución final podemos dar inicialmente el valor cero a todas las incógnitas.

Un programa FORTRAN que implementa el proceso iterativo anterior es

```

100 DIMENSION X1(0:50), X2(0:50)
    OPEN (7, FILE='SOLUC.TXT')
    X1(0) = 0.0
    X2(0) = 0.0
    DO K= 1,50
        X1(K) = (6./7.)*X2(K-1)+(3./7.)
        X2(K) = (8./9.)*X1(K-1)-(4./9.)
        WRITE (7,100) X1(K),X2(K)
        PRINT*, X1(K),X2(K)
    END DO
    STOP
    FORMAT (2X,E13.7,2X,E13.7)
    END

```

Los resultados que se obtienen son:

$$X1(25) = 0.2087464 \qquad X2(25) = -0.2734694$$

$$X1(50) = 0.1997769 \qquad X2(50) = -0.2663692$$

siendo los valores exactos

$$x_1 = 1/5 = 0.2 \qquad x_2 = -4/15 = -0.2\bar{6}$$

Este proceso iterativo, que se denomina de Jacobi, será estudiado detenidamente más tarde.

Es casi evidente que hubiésemos mejorado el procedimiento anterior, si al evaluar $x_2^{(k)}$ hubiésemos utilizado $x_1^{(k)}$ en lugar de $x_1^{(k-1)}$; es decir, si hubiésemos implementado el proceso iterativo

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{6}{7}x_2^{(k-1)} + \frac{3}{7} \\ x_2^{(k)} &= \frac{8}{9}x_1^{(k)} - \frac{4}{9} \end{aligned} \right\}$$

para lo cual sólo es necesario cambiar la instrucción FORTRAN

por

$$X2(K) = (8./9.)*X1(K)-(4./9.)$$

En este caso hubiésemos implementado el que llamaremos método iterativo de Gauss-Seidel, que genera unos mejores resultados en el mismo número de iteraciones:

$$X1(25) = 0.2003347 \quad X2(25) = -0.2663692$$

$$X1(50) = 0.2000004 \quad X2(50) = -0.2666663$$

En este ejemplo, como ocurre generalmente, las iteraciones de Jacobi y Gauss-Seidel convergen al mismo punto, pero estas últimas lo hacen más rápidamente. Se observa también en el ejemplo, que la exactitud obtenida depende del momento en que se detenga el proceso.

5.5.2. Conceptos Básicos.

El sistema a resolver, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, podemos escribirlo, con la ayuda de una matriz \mathbf{Q} que llamaremos matriz de descomposición, como

$$\mathbf{Qx} = (\mathbf{Q} - \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

que sugiere el proceso iterativo:

$$\boxed{\mathbf{Qx}^{(k)} = (\mathbf{Q} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}} \quad \text{con } k \geq 1$$

El vector (matriz columna) $\mathbf{x}^{(0)}$ puede ser cualquiera, pero mientras más se aproxime a la solución final, más rápido y exacto será el cálculo.

Diremos que el método iterativo anterior converge, si para unas determinadas matrices \mathbf{A} y \mathbf{Q} , se encuentra la convergencia para cualquier vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

Debemos elegir una matriz de descomposición \mathbf{Q} que:

- 1°. Permita calcular fácilmente $\mathbf{x}^{(k)}$.
- 2°. Suministre una rápida convergencia.

5.5.3. Estudio teórico de la convergencia.

Para asegurar que el sistema tiene una solución única, supondremos que \mathbf{A} es una matriz no singular, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, y vamos a exigir a \mathbf{Q} que también sea no singular, $\det(\mathbf{Q}) \neq 0$.

De la ecuación del proceso iterativo, si multiplicamos por la izquierda por \mathbf{Q}^{-1} , obtenemos

$$\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}$$

La solución \mathbf{x} , a la que converge la sucesión de vectores cumple

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}$$

Restando las dos anteriores ecuaciones

$$\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})(\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x})$$

Eligiendo una norma vectorial y su norma matricial subordinada

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}\|$$

Repitiendo este proceso, relacionando $\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}\|$ con $\|\mathbf{x}^{(k-2)} - \mathbf{x}\|$, y así sucesivamente hasta llegar a $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|$, obtenemos

$$\boxed{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\|^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|}$$

Si $\|\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\| < 1 \Rightarrow \|\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\|^k \rightarrow 0 \Rightarrow \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \rightarrow 0 \quad \forall \mathbf{x}^{(0)}$ y el proceso es convergente.

Con lo visto en este apartado podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema: Si $\|\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\| < 1$ para cualquier norma matricial subordinada de una norma vectorial, entonces la sucesión de vectores $\mathbf{x}^{(k)}$, generados por $\mathbf{Q}\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{Q} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$, converge a la solución del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para cualquier vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

Como podemos definir varios tipos de norma, está claro que podemos encontrar diversas condiciones suficientes para asegurar la convergencia de un proceso iterativo, pero no tenemos una condición necesaria \Rightarrow En muchas ocasiones, la forma de saber si podemos encontrar la solución de un sistema de ecuaciones mediante un método iterativo es llevarlo a cabo y ver el resultado. En la literatura científica, podemos encontrar páginas y páginas sobre condiciones que aseguran la convergencia, pero que en general son excesivamente restrictivas.

5.5.4. Método de Richardson.

En este método $\mathbf{Q} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$.

Desarrollando la expresión anterior, que marca el proceso iterativo:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k)} &= (1 - a_{1,1})x_1^{(k-1)} - a_{1,2}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{1,n}x_n^{(k-1)} + b_1 \\ x_2^{(k)} &= -a_{2,1}x_1^{(k-1)} + (1 - a_{2,2})x_2^{(k-1)} - \dots - a_{2,n}x_n^{(k-1)} + b_2 \\ &\dots \\ x_n^{(k)} &= -a_{n,1}x_1^{(k-1)} - a_{n,2}x_2^{(k-1)} - \dots + (1 - a_{n,n})x_n^{(k-1)} + b_n \end{aligned} \right\}$$

5.5.5. Método de Jacobi.

En este método, la matriz de descomposición \mathbf{Q} es una matriz diagonal cuyos elementos son los de la diagonal de \mathbf{A} .

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{1,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{2,2}} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{n,n}} \end{pmatrix}$$

La ecuación del proceso iterativo, $\mathbf{Q}\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{Q} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$, toma la forma:

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}x_1^{(k)} &= \text{ } - a_{1,2}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{1,n}x_n^{(k-1)} + b_1 \\ a_{2,2}x_2^{(k)} &= -a_{2,1}x_1^{(k-1)} - \text{ } - \dots - a_{2,n}x_n^{(k-1)} + b_2 \\ &\dots \\ a_{n,n}x_n^{(k)} &= -a_{n,1}x_1^{(k-1)} - a_{n,2}x_2^{(k-1)} - \dots - \text{ } + b_n \end{aligned} \right\}$$

El efecto que produce esta matriz de descomposición es llevarse las incógnitas al lado izquierdo de las ecuaciones y ponerlas en función de los valores anteriores del resto de incógnitas, dejando los huecos que se marcan en las ecuaciones. Esta fue la sistemática que utilizamos, en primera instancia, para resolver el ejemplo inicial.

5.5.6. Método de Gauss-Seidel.

En este método, se define \mathbf{Q} como la parte triangular inferior de \mathbf{A} , incluyendo la diagonal principal.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

La ecuación $\mathbf{Q}\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{Q} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$ que marca el proceso iterativo, desarrollada, toma la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \cdots & -a_{1,n} \\ 0 & 0 & -a_{2,3} & \cdots & -a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

y puesta como sistema de ecuaciones, llevando a cabo las multiplicaciones y sumas de matrices:

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}x_1^{(k)} &= -a_{1,2}x_2^{(k-1)} - a_{1,3}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{1,n}x_n^{(k-1)} + b_1 \\ a_{2,1}x_1^{(k)} + a_{2,2}x_2^{(k)} &= -a_{2,3}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2,n}x_n^{(k-1)} + b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1^{(k)} + a_{n,2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{n,n}x_n^{(k)} &= b_n \end{aligned} \right\}$$

Ordenando

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}x_1^{(k)} &= \textcircled{0} - a_{1,2}x_2^{(k-1)} - a_{1,3}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{1,n}x_n^{(k-1)} + b_1 \\ a_{2,2}x_2^{(k)} &= -a_{2,1}x_1^{(k)} - \textcircled{0} - a_{2,3}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2,n}x_n^{(k-1)} + b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,n}x_n^{(k)} &= -a_{n,1}x_1^{(k)} - a_{n,2}x_2^{(k)} - a_{n,3}x_3^{(k)} - \cdots - \textcircled{0} + b_n \end{aligned} \right\}$$

que es justamente lo que hicimos en el segundo tratamiento del ejemplo inicial.

Este método presenta la ventaja de que los elementos calculados de x_i sustituyen de inmediato a los anteriores para el cálculo de x_{i+1} , ..., x_n . Por esta razón el método de Gauss-Seidel suele tener una convergencia más rápida.

Ejercicio: Se proponen a continuación dos sistemas de ecuaciones, en principio bastante parecidos, para ser resueltos mediante un método iterativo basado en el algoritmo de Gauss-Seidel. Ambos tienen igual solución exacta:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4.$$

$$\left. \begin{array}{rrcr} 4x_1 + & 3x_2 + & 2x_3 + & x_4 = & 20 \\ 3x_1 + & 4x_2 + & 2x_3 + & x_4 = & 21 \\ x_1 + & 3x_2 + & 4x_3 + & 2x_4 = & 27 \\ x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 + & 4x_4 = & 30 \end{array} \right\} \text{Sistema 1}$$

$$\left. \begin{array}{rrcr} x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 + & 4x_4 = & 30 \\ 3x_1 + & x_2 + & 2x_3 + & 4x_4 = & 27 \\ 4x_1 + & 3x_2 + & x_3 + & 2x_4 = & 21 \\ 4x_1 + & 3x_2 + & 2x_3 + & x_4 = & 20 \end{array} \right\} \text{Sistema 2}$$

Los algoritmos utilizados son similares. Para el sistema 1:

```

program sistemaal
real x1, x2, x3, x4
open (7, file='solu1.txt')
x1=0.
x2=0.
x3=0.
x4=0.
do i=1,40
x1=(20./4.)-(3./4.)*x2-(2./4.)*x3-(1./4.)*x4
x2=(21./4.)-(3./4.)*x1-(2./4.)*x3-(1./4.)*x4
x3=(27./4.)-(1./4.)*x1-(3./4.)*x2-(2./4.)*x4
x4=(30./4.)-(1./4.)*x1-(2./4.)*x2-(3./4.)*x3
print *, i, x1,x2,x3,x4
write (7,100) i, x1,x2,x3,x4
end do
100 format (2x, i4,4(2x,e13.6))
end

```

Para el sistema 2:

```

program sistema2
real x1, x2, x3, x4
open (7, file='solu2.txt')
x1=0.
x2=0.
x3=0.
x4=0.
do i=1,40
x1=30.-2.*x2-3.*x3-4.*x4
x2=27.-3.*x1-2.*x3-4.*x4
x3=21.-4.*x1-3.*x2-2.*x4
x4=20.-4.*x1-3.*x2-2.*x3
print *, i, x1,x2,x3,x4
write (7,100) i, x1,x2,x3,x4
end do
100 format (2x, i4,4(2x,e13.6))
end

```

Pero los resultados que se obtienen son diferentes. Para el sistema 1:

n	x_1	x_2	x_3	x_4
1	.500000E+01	.150000E+01	.437500E+01	.221875E+01
2	.113281E+01	.165820E+01	.411377E+01	.330237E+01
3	.873871E+00	.171212E+01	.359626E+01	.372828E+01
4	.985711E+00	.178052E+01	.330404E+01	.388528E+01
5	.104127E+01	.184571E+01	.316276E+01	.394476E+01
6	.104815E+01	.189632E+01	.309335E+01	.396979E+01
7	.103864E+01	.193190E+01	.305652E+01	.398200E+01
8	.102732E+01	.195575E+01	.303536E+01	.398878E+01
9	.101831E+01	.197139E+01	.302249E+01	.399286E+01
10	.101200E+01	.198154E+01	.301441E+01	.399542E+01
11	.100778E+01	.198810E+01	.300927E+01	.399705E+01
12	.100503E+01	.199233E+01	.300597E+01	.399810E+01
13	.100324E+01	.199506E+01	.300384E+01	.399878E+01
14	.100209E+01	.199682E+01	.300248E+01	.399921E+01
15	.100135E+01	.199795E+01	.300160E+01	.399949E+01
16	.100087E+01	.199868E+01	.300103E+01	.399967E+01
17	.100056E+01	.199915E+01	.300066E+01	.399979E+01
18	.100036E+01	.199945E+01	.300043E+01	.399986E+01
19	.100023E+01	.199965E+01	.300027E+01	.399991E+01
20	.100015E+01	.199977E+01	.300018E+01	.399994E+01
21	.100010E+01	.199985E+01	.300011E+01	.399996E+01
22	.100006E+01	.199991E+01	.300007E+01	.399998E+01
23	.100004E+01	.199994E+01	.300005E+01	.399998E+01
24	.100003E+01	.199996E+01	.300003E+01	.399999E+01
25	.100002E+01	.199997E+01	.300002E+01	.399999E+01
26	.100001E+01	.199998E+01	.300001E+01	.400000E+01
27	.100001E+01	.199999E+01	.300001E+01	.400000E+01
28	.100000E+01	.199999E+01	.300001E+01	.400000E+01
29	.100000E+01	.200000E+01	.300000E+01	.400000E+01
30	.100000E+01	.200000E+01	.300000E+01	.400000E+01
31	.100000E+01	.200000E+01	.300000E+01	.400000E+01
32	.100000E+01	.200000E+01	.300000E+01	.400000E+01
33	.100000E+01	.200000E+01	.300000E+01	.400000E+01
34	.100000E+01	.200000E+01	.300000E+01	.400000E+01
35	.100000E+01	.200000E+01	.300000E+01	.400000E+01
36	.100000E+01	.200000E+01	.300000E+01	.400000E+01
37	.100000E+01	.200000E+01	.300000E+01	.400000E+01
38	.100000E+01	.200000E+01	.300000E+01	.400000E+01
39	.100000E+01	.200000E+01	.300000E+01	.400000E+01
40	.100000E+01	.200000E+01	.300000E+01	.400000E+01

Para el sistema 2:

n	x_1	x_2	x_3	x_4
1	.300000E+02	-.630000E+02	.900000E+02	-.910000E+02
2	.250000E+03	-.539000E+03	.820000E+03	-.100300E+04
3	.266000E+04	-.558100E+04	.813000E+04	-.101370E+05
4	.273500E+05	-.577350E+05	.841000E+05	-.104375E+06
5	.280700E+06	-.592773E+06	.864290E+06	-.107304E+07
6	.288487E+07	-.609100E+07	.887962E+07	-.110257E+08
7	.296460E+08	-.625943E+08	.912505E+08	-.113302E+09
8	.304645E+09	-.643228E+09	.937708E+09	-.116431E+10
9	.313058E+10	-.660991E+10	.963603E+10	-.119646E+11
10	.321703E+11	-.679245E+11	.990213E+11	-.122951E+12
11	.330587E+12	-.698003E+12	.101756E+13	-.126346E+13
12	.339717E+13	-.717278E+13	.104566E+14	-.129835E+14
13	.349098E+14	-.737087E+14	.107454E+15	-.133421E+15
14	.358739E+15	-.757442E+15	.110421E+16	-.137105E+16
15	.368646E+16	-.778359E+16	.113470E+17	-.140891E+17

16	.378826E+17	-.799854E+17	.116604E+18	-.144782E+18
17	.389288E+18	-.821943E+18	.119824E+19	-.148781E+19
18	.400039E+19	-.844642E+19	.123133E+20	-.152889E+20
19	.411086E+20	-.867967E+20	.126534E+21	-.157111E+21
20	.422438E+21	-.891937E+21	.130028E+22	-.161450E+22
21	.434104E+22	-.916568E+22	.133619E+23	-.165909E+23
22	.446093E+23	-.941880E+23	.137309E+24	-.170491E+24
23	.458412E+24	-.967891E+24	.141101E+25	-.175199E+25
24	.471071E+25	-.994620E+25	.144997E+26	-.180037E+26
25	.484080E+26	-.102209E+27	.149001E+27	-.185009E+27
26	.497448E+27	-.105031E+28	.153116E+28	-.190118E+28
27	.511186E+28	-.107932E+29	.157345E+29	-.195368E+29
28	.525303E+29	-.110912E+30	.161690E+30	-.200764E+30
29	.539809E+30	-.113975E+31	.166155E+31	-.206308E+31
30	.554717E+31	-.117123E+32	.170744E+32	-.212005E+32
31	.570036E+32	-.120357E+33	.175459E+33	-.217860E+33
32	.585778E+33	-.123681E+34	.180304E+34	-.223876E+34
33	.601955E+34	-.127097E+35	.185284E+35	-.230059E+35
34	.618578E+35	-.130607E+36	.190400E+36	-.236412E+36
35	.635660E+36	-.134213E+37	.195658E+37	-.242941E+37
36	.653215E+37	-.137920E+38	.201062E+38	-.249650E+38
37	.671254E+38	-.141729E+39	.206614E+39	-.256544E+39

Mientras que se encuentra convergencia rápida para el sistema 1 y el método iterativo aporta la solución válida, para el sistema 2 se produce un overflow por la no convergencia de la solución. La razón de este comportamiento tan opuesto en ambos sistema radica en el hecho de que mientras en el primer sistema los valores más elevados de los coeficientes se encuentran la diagonal principal de la matriz de coeficientes y en las diagonales cercanas a la principal, en el sistema 2 ocurre lo contrario.