Métodos Numéricos II

Tema 1: Resolución numérica de ecuaciones y sistemas no lineales

Teresa E. Pérez y Miguel Piñar

Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

17 de febrero de 2015

Problema básico

Problema: resolución de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$, es decir, el cálculo del valor o valores de x, si existen, para los cuales se verifica

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Problema básico

Problema: resolución de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$, es decir, el cálculo del valor o valores de x, si existen, para los cuales se verifica

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Definición

A un número (real o complejo) s tal que $f(s) = 0$ se le llama solución de la ecuación (1), o bien raíz o cero de la función $f(x)$.

¿Por qué necesitamos métodos numéricos?

En general, no existen métodos directos de resolución

¿Por qué necesitamos métodos numéricos?

En general, no existen métodos directos de resolución

Incluso para las ecuaciones polinómicas, N. Abel demostró que si el grado es mayor que cuatro no existe ningún método general y basado en radicales para resolver las ecuaciones.

Niels H. Abel [1802–1829]

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Abel.html

Existencia y unicidad de las soluciones

Teorema de Bolzano

Dada una función f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, verificando que $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un punto $s \in (a, b)$ tal que $f(s) = 0$.

No da ninguna información acerca del número de soluciones.

Existencia y unicidad de las soluciones

Teorema de Bolzano

Dada una función f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, verificando que $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un punto $s \in (a, b)$ tal que $f(s) = 0$.

No da ninguna información acerca del número de soluciones.

Número de soluciones

Si una función f es estrictamente monótona en un intervalo dado $[a, b]$, la gráfica de la función cortará al eje de abcisas a lo sumo una vez, es decir, la ecuación $f(x) = 0$ posee a lo más una raíz en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo

Determínese el número de soluciones de la ecuación $x + e^x = 0$.

Ejemplo

Determínese el número de soluciones de la ecuación $x + e^x = 0$.

Puesto que la función $f(x) = x + e^x$ es continua en toda la recta real y se verifica $f(-1) < 0$ y $f(0) > 0$, el Teorema de Bolzano nos garantiza la existencia de una solución en el intervalo $[-1, 0]$.

Como la función f es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$, su gráfica sólo cortará al eje de abcisas una sola vez.

De este modo la ecuación $x + e^x = 0$ posee una única solución situada en el intervalo $[-1, 0]$.

Método de bisección

En las condiciones del teorema de Bolzano, sea $s \in (a, b)$ la única solución de la ecuación $f(x) = 0$.
Se aplica el teorema de Bolzano para aproximar la solución mediante sucesivas subdivisiones del intervalo.

Sea $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Sólo pueden darse tres situaciones:

$$\begin{aligned} f(a)f(c) = 0 \qquad & \Rightarrow s = c \\ f(a)f(c) < 0 \qquad & \Rightarrow s \in (a, c) \\ f(a)f(c) > 0 \qquad & \Rightarrow s \in (c, b) \end{aligned}$$

En el peor de los casos, habremos encontrado un intervalo, de longitud mitad de la del intervalo original, que contiene a la raíz de la ecuación.

Ejemplo: Utilícese el método de bisección para aproximar la raíz de la ecuación $x + e^x = 0$

Sea $a_0 = a = -1{,}0$, $b_0 = b = 0{,}0$. Entonces

n	a_n	b_n	x_n	$C_n = (b-a)/2^{n+1}$
0	$-1{,}0$	$0{,}0$	$-0{,}5$	$0{,}5$
1	$-1{,}0$	$-0{,}5$	$-0{,}75$	$0{,}25$
2	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}625$	$0{,}125$
3	$-0{,}625$	$-0{,}5$	$-0{,}5625$	$0{,}0625$
4	$-0{,}625$	$-0{,}5625$	$-0{,}59375$	$0{,}03125$
5	$-0{,}59375$	$-0{,}5625$	$-0{,}578125$	$0{,}015625$
6	$-0{,}578125$	$-0{,}5625$	$-0{,}570312$	$0{,}0078125$
7	$-0{,}570312$	$-0{,}5625$	$-0{,}566406$	$0{,}00390625$
8	$-0{,}570312$	$-0{,}566406$	$-0{,}568359$	$0{,}001953125$
9	$-0{,}568359$	$-0{,}566406$	$-0{,}567383$	$0{,}0009765625$

Ventajas del método de bisección

- El método converge siempre.

Ventajas del método de bisección

- El método converge siempre.
- Es posible encontrar cotas efectivas para el error cometido:

$$|s - x_n| < \frac{1}{2}|b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Ventajas del método de bisección

- El método converge siempre.
- Es posible encontrar cotas efectivas para el error cometido:

$$|s - x_n| < \frac{1}{2}|b_n - a_n| = \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

- Esta acotación es independiente de la función f.

Ventajas del método de bisección

- El método converge siempre.
- Es posible encontrar cotas efectivas para el error cometido:

$$|s - x_n| < \frac{1}{2}|b_n - a_n| = \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

- Esta acotación es independiente de la función f.
- Esta acotación puede utilizarse para establecer un criterio de parada: si desea determinar el número de veces que ha de aplicarse el proceso de subdivisión para obtener una precisión determinada ε, basta determinar el menor valor de n para el que se verifica la desigualdad

$$\frac{b - a}{2^{n+1}} < \varepsilon.$$

Ejemplo:

¿ Cuantas veces ha de aplicarse el método de bisección en el ejemplo anterior para obtener el valor de la raíz con un error relativo menor que 10^{-5} ?

Ejemplo:

¿ Cuantas veces ha de aplicarse el método de bisección en el ejemplo anterior para obtener el valor de la raíz con un error relativo menor que 10^{-5} ?

Puesto que el error relativo es $\varepsilon = 10^{-5}$

$$\frac{|s - x_n|}{|s|} < 10^{-5}.$$

De este modo,

$$\frac{|s - x_n|}{|s|} < \frac{|s - x_n|}{0{,}5} < 10^{-5},$$

puesto que $-1 < s < -0{,}5$.

Así

$$|s - x_n| < \frac{-0{,}5 - (-1)}{2^{n+1}} < 0{,}5 \times 10^{-5}.$$

Despejando en esta desigualdad obtenemos

$$n > \frac{\log_{10)} 10^5}{\log_{10)} 2} - 1 = \frac{5}{\log_{10)} 2} - 1 = 15,609\ldots$$

es decir, serán necesarias, al menos, 16 aplicaciones del método.

Desventajas del método de bisección

- La mayor desventaja de este método es su extremada lentitud.

Desventajas del método de bisección

- La mayor desventaja de este método es su extremada lentitud.
- El método proporciona sólo una raíz de la ecuación y ninguna información adicional acerca de la posible existencia de más raíces en el mismo intervalo.

Desventajas del método de bisección

- La mayor desventaja de este método es su extremada lentitud.
- El método proporciona sólo una raíz de la ecuación y ninguna información adicional acerca de la posible existencia de más raíces en el mismo intervalo.
- Como no se utiliza información alguna acerca de la forma de la curva que representa a la propia función f, el método puede proporcionar aproximaciones intermedias que sean mejores que la aproximación final.

El método de Newton–Raphson

Es uno de los métodos más utilizados en la resolución aproximada de ecuaciones (y sistemas) no lineales.

Supongamos que la ecuación $f(x) = 0$ posee una solución $s \in (a, b)$. Si f es derivable en un entorno del punto s, dado un punto cualquiera x_0 próximo a la solución s, la gráfica de la función f no se alejará demasiado de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_0, f(x_0))$ y de este modo, podremos aproximar la raíz s mediante el punto de corte de dicha recta con el eje de abcisas, que llamaremos x_1.

Puesto que la ecuación de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

si $f'(x_0) \neq 0$, intersecamos la recta con el eje de abcisas ($y = 0$), obteniendo el punto

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

que será una nueva aproximación a la raíz s.

El método de Newton–Raphson se basa en esta idea para construir un procedimiento iterativo para aproximar la raíz de la ecuación. Partiendo de una aproximación inicial x_0, se construye una sucesión recurrente mediante la expresión

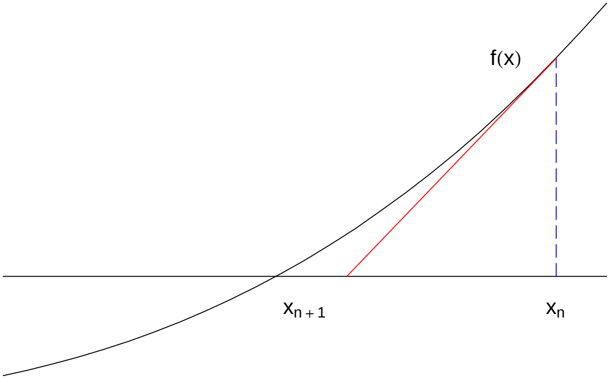
El método de Newton–Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Con x_0 un punto inicial

Diremos que el método es convergente si la sucesión generada por (2) converge hacia la solución de la ecuación.

Interpretación gráfica del método de Newton



Ejemplo 1

Utilícese el método de Newton–Raphson para aproximar $\sqrt{2}$

Ejemplo 1

Utilícese el método de Newton–Raphson para aproximar $\sqrt{2}$

Puesto en el intervalo $[1,2]$, la función $f(x) = x^2 - 2$ es continua y derivable; $f(1)f(2) < 0$, y es estrictamente creciente, la ecuación posee una única solución en el intervalo $[1,2]$.

Ejemplo 1

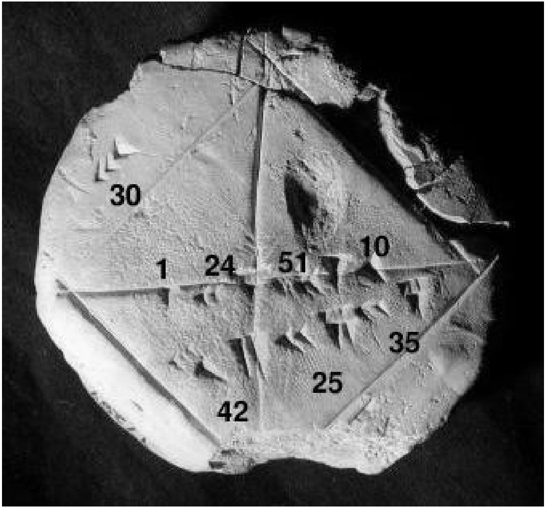
Utilícese el método de Newton–Raphson para aproximar $\sqrt{2}$

Puesto en el intervalo $[1, 2]$, la función $f(x) = x^2 - 2$ es continua y derivable; $f(1)f(2) < 0$, y es estrictamente creciente, la ecuación posee una única solución en el intervalo $[1, 2]$.

El método de Newton–Raphson proporciona la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),$$

que se atribuye a Herón de Alejandría (siglo I a.C.).



Tablilla babilónica con el valor en sexagésimal de $\sqrt{2}$

n	x_n
0	2,0
1	1,5
2	1,41666666666666
3	1,41421568627451
4	1,41421356237469
5	1,41421356237309 5

Los resultados de la tabla muestran una rápida convergencia de las iteraciones hacia la raíz cuadrada positiva de 2, cuyo valor, con 16 cifras significativas, es $\sqrt{2} = 1{,}414213562373095$. De hecho, el número de cifras correctas en una iteración es el doble o más que el número de cifras correctas en la iteración anterior.

Ejemplo 2

Aplíquese el método de Newton–Raphson para estimar la raíz de $x + e^x = 0$

Ejemplo 2

Aplíquese el método de Newton–Raphson para estimar la raíz de $x + e^x = 0$

Aplicando el método de Newton–Raphson se obtiene la siguiente tabla de valores

n	x_n
0	0,0
1	$-0{,}5$
2	$-0{,}5663110031972182$
3	$-0{,}5671431650348622$
4	$-0{,}5671432904097811$
5	$-0{,}5671432904097839$

Teorema de convergencia global para el método de Newton–Raphson

Sea f una función de clase $\mathcal{C}^2[a, b]$ verificando las siguientes hipótesis:
i) $f(a)f(b) < 0$
ii) $f'(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a, b]$
iii) $f''(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$

Entonces, existe una única raíz $s \in [a, b]$ de la ecuación $f(x) = 0$ y la sucesión generada mediante el método de Newton–Raphson converge hacia s, si el punto inicial x_0 verifica la condición

$$f(x_0)f''(x_0) \geq 0.$$

Ventajas del método de Newton–Raphson

- La convergencia muy rápida.
- Sencillo de implementar

Ventajas del método de Newton–Raphson

- La convergencia muy rápida.
- Sencillo de implementar

Desventajas de método de Newton–Raphson

- Exige más condiciones analíticas sobre la función f para asegurar la convergencia: clase 2 en el intervalo, y condiciones sobre las derivadas primera y segunda.
- Necesita evaluar la función y su derivada primera en cada iteración.
- No permite conocer a priori una estimación para el error.

Método de la secante

Es una modificación del método de Newton–Raphson para evitar el uso de la derivada.
De la definición de la derivada de una función en un punto en términos de un límite:

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

podremos aproximar el valor de $f'(x)$ por un cociente de diferencias

$$f'(x) \approx \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \frac{f(x) - f(t)}{x - t},$$

para valores próximos de t y x.

Método de la secante

De este modo, en el método de Newton–Raphson podemos reemplazar el valor de $f'(x_n)$ por el cociente

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

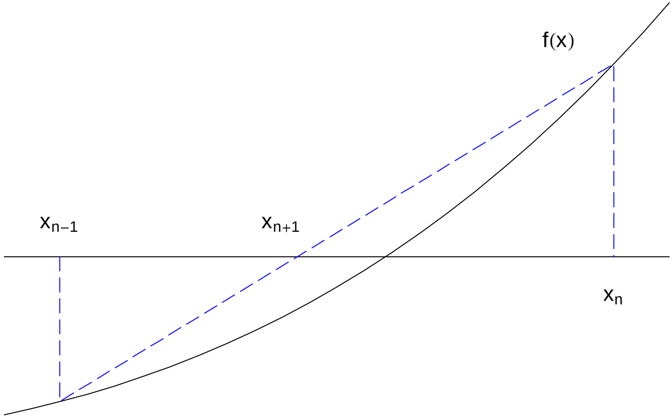
Al efectuar tal sustitución, se obtiene un algoritmo denominado método de la secante

Método de la secante

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right], \quad n = 1, 2, \ldots$$

Puntos iniciales x_0 y x_1.

Interpretación gráfica del método de la secante



Ejemplo

Aplíquese el método de la secante para aproximar la raíz de la ecuación $x + e^x = 0$
Se obtiene la siguiente tabla de valores

n	x_n
0	$-1{,}0$
1	$0{,}0$
2	$-0{,}6126998367802821$
3	$-0{,}5721814120905076$
4	$-0{,}5671020801718737$
5	$-0{,}567143327950002$
6	$-0{,}5671432904100639$
7	$-0{,}5671432904097839$

Ventajas del método de la secante

El esfuerzo computacional es menor en el método de la secante, pues cada nueva iteración requiere la evaluación de un solo valor de la función f .

Ventajas del método de la secante

El esfuerzo computacional es menor en el método de la secante, pues cada nueva iteración requiere la evaluación de un solo valor de la función f .

Desventajas del método de la secante

El método de la secante converge más lentamente que el método de Newton–Raphson.

Técnicas de iteración funcional

Muchos métodos de resolución de ecuaciones no lineales se basan en la transformación de la ecuación $f(x) = 0$ en otra equivalente de la forma:

$$x = F(x)$$

Técnicas de iteración funcional

Muchos métodos de resolución de ecuaciones no lineales se basan en la transformación de la ecuación $f(x) = 0$ en otra equivalente de la forma:

$$x = F(x)$$

Definición

A una solución de la ecuación $x = F(x)$ se le llama un punto fijo para la función F.

Técnicas de iteración funcional

Muchos métodos de resolución de ecuaciones no lineales se basan en la transformación de la ecuación $f(x) = 0$ en otra equivalente de la forma:

$$x = F(x)$$

Definición

A una solución de la ecuación $x = F(x)$ se le llama un punto fijo para la función F.

El nombre proviene de considerar F como una transformación y observar que una solución de $x = F(x)$ es un punto que queda invariante mediante la transformación.

Técnicas de iteración funcional

Dada la ecuación $x = F(x)$, y partiendo de un punto x_0 arbitrario, podemos construir una sucesión de la forma

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Este algoritmo se suele llama método de iteración funcional.

Técnicas de iteración funcional

Dada la ecuación $x = F(x)$, y partiendo de un punto x_0 arbitrario, podemos construir una sucesión de la forma

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Este algoritmo se suele llama método de iteración funcional. Supongamos que la iteración funcional es convergente, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l.$$

Si F es continua, entonces

$$F(l) = F(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = l.$$

Así, $F(l) = l$, y l es un punto fijo de F.

Ejemplos

Ejemplo 1

Un ejemplo método de iteración funcional es el método de Newton para resolver la ecuación $f(x) = 0$, dado por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Para el método de Newton, la función F viene dada por

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Ejemplos

Ejemplo 2

La fórmula

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

puede generar sucesiones que no converjan, como por ejemplo la sucesión $1, 3, 9, 27, \dots$, que aparece si $x_0 = 1$ y $F(x) = 3x$.

Utilización de métodos de iteración funcional

La utilización de un método iterativo para resolver una ecuación plantea varios problemas

Utilización de métodos de iteración funcional

La utilización de un método iterativo para resolver una ecuación plantea varios problemas

- Construcción del método.

Utilización de métodos de iteración funcional

La utilización de un método iterativo para resolver una ecuación plantea varios problemas

- Construcción del método.
- Estudio de la convergencia de la sucesión.

Utilización de métodos de iteración funcional

La utilización de un método iterativo para resolver una ecuación plantea varios problemas

- Construcción del método.
- Estudio de la convergencia de la sucesión.
- Estudio de la velocidad de convergencia.

Utilización de métodos de iteración funcional

La utilización de un método iterativo para resolver una ecuación plantea varios problemas

- Construcción del método.
- Estudio de la convergencia de la sucesión.
- Estudio de la velocidad de convergencia.
- Estimación del error.

Utilización de métodos de iteración funcional

La utilización de un método iterativo para resolver una ecuación plantea varios problemas

- Construcción del método.
- Estudio de la convergencia de la sucesión.
- Estudio de la velocidad de convergencia.
- Estimación del error.
- Elección del punto inicial.

Convergencia

Definición

Una función F se dice que es contractiva si existe una constante λ con $0 \leqslant \lambda < 1$, tal que

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \lambda |x - y|$$

para cualesquiera x e y en el dominio de F.

Convergencia

Definición

Una función F se dice que es contractiva si existe una constante λ con $0 \leqslant \lambda < 1$, tal que

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \lambda |x - y|$$

para cualesquiera x e y en el dominio de F.

Proposición

Si $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1([a, b])$ y existe una constante λ tal que $|F'(x)| \leqslant \lambda < 1, \quad \forall x \in [a, b]$, entonces F es una función contractiva.

Teorema del punto fijo

Sea $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función contractiva verificando $F([a, b]) \subset [a, b]$. Entonces F posee un único punto fijo en $[a, b]$. Además, cualquier sucesión $\{x_n\}_{n \geqslant 0}$ obtenida mediante iteración funcional

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

converge a dicho punto fijo, independientemente del punto inicial $x_0 \in [a, b]$ elegido.

Teorema de convergencia local

Supongamos que existe una raíz s de la ecuación $x = F(x)$ en un intervalo $[a, b]$, en el cual F es de clase $\mathcal{C}^1([a, b])$ y $|F'(s)| \leq \lambda < 1$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|x_0 - s| < \varepsilon$, la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida mediante la iteración funcional

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

verifica

$$|x_n - s| < \varepsilon, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

y además

$$\lim_{n\to\infty} x_n = s.$$

Ejemplo

La ecuación $x - \frac{1}{2}\cos x = 0$, posee una única solución en $[0, \frac{\pi}{2}]$. Si escribimos la ecuación en la forma

$$x = \frac{1}{2}\cos x,$$

podemos observar que la función $F(x) = \frac{1}{2}\cos x$ verifica

$$|F'(x)| = \frac{1}{2}|\operatorname{sen} x| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Por el teorema anterior, la sucesión

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos x_n$$

converge a la solución, tomando el punto inicial x_0 suficientemente próximo a la raíz.

De esta forma, la tabla de valores

n	x_n
0	0,5
1	0,438791
2	0,452633
3	0,449649
4	0,4503
5	0,450158
6	0,450189
7	0,450182
8	0,450184
9	0,450184

nos indica que el valor de la raíz, con 6 cifras significativas, es $s = 0{,}450184$.

Acotación del error

Proposición

En las condiciones del teorema de convergencia, la sucesión obtenida mediante iteración funcional verifica

$$|x_n - s| \leq \lambda^n (b - a), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

De la desigualdad (3), se deduce que la velocidad de convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ al punto fijo s depende esencialmente del tamaño de la constante λ, puesto que el error convergerá hacia cero más rápidamente cuanto menor sea el valor de λ.

Criterio de parada

Teorema

En las condiciones de los teoremas de convergencia, la sucesión obtenida mediante iteración funcional verifica

$$|x_n - s| \leq \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 - \lambda}, \tag{4}$$

para n suficientemente grande.

Como consecuencia de la anterior proposición deducimos que, para valores de λ que no estén próximos a 1, podemos utilizar como criterio de parada en la iteración funcional el que la diferencia entre dos iteraciones consecutivas sea menor que una tolerancia prefijada.

Orden de convergencia

Definición

Si existen unas constantes positivas r y K tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|^r} = K,$$

se dice que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a s con orden de convergencia r. A K se le llama la constante asintótica del error.

Interpretación del orden de convergencia

Las nociones de orden y constante asintótica no son puramente teóricas:

Interpretación del orden de convergencia

Las nociones de orden y constante asintótica no son puramente teóricas:
Si notamos $u_n = |e_n| = |x_n - s|$, y por $t_n = -\log_{10)} u_n$, para n suficientemente grande se tiene

$$\frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|^r} \simeq K \Longrightarrow |x_{n+1} - s| \simeq K|x_n - s|^r$$

Interpretación del orden de convergencia

Las nociones de orden y constante asintótica no son puramente teóricas:
Si notamos $u_n = |e_n| = |x_n - s|$, y por $t_n = -\log_{10)} u_n$, para n suficientemente grande se tiene

$$\frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|^r} \simeq K \Longrightarrow |x_{n+1} - s| \simeq K|x_n - s|^r$$

y tomando logaritmos

$$t_{n+1} \approx r t_n + R, \quad \text{con } R = -\log_{10)} K,$$

con t_n el número de cifras exactas de x_n.

Si $r = 1$ y $K = 0,999$ entonces $R = 4/10{,}000$, y por tanto se necesitan

Si $r = 1$ y $K = 0,999$ entonces $R = 4/10{,}000$, y por tanto se necesitan 2.500 términos más para una sola cifra significativa adicional de exactitud.

Si $r = 1$ y $K = 0,999$ entonces $R = 4/10{,}000$, y por tanto se necesitan 2.500 términos más para una sola cifra significativa adicional de exactitud.

Por el contrario, si $r > 1$, se multiplica por r el número de cifras significativas exactas al pasar de x_n a x_{n+1}. Se ve, pues, el interés de las sucesiones de orden mayor que 1 y la importancia de la constante asintótica K cuando $r = 1$.

Cálculo del orden de convergencia

Teorema

Si $F \in \mathcal{C}^r[a, b]$, y verifica $F'(s) = F''(s) = \cdots = F^{(r-1)}(s) = 0$, con $F^{(r)}(s) \neq 0$, entonces el método tiene orden de convergencia r.

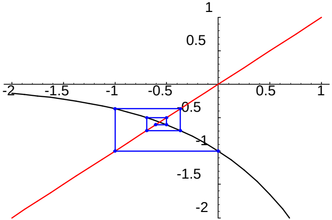
Ejemplo

Si f es de clase $\mathcal{C}^2$ y tiene un cero simple, el método de Newton–Raphson posee orden de convergencia $r = 2$ (cuadrática). En efecto,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

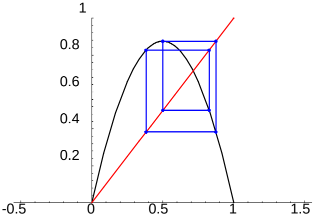
entonces se tiene $F'(s) = 0$.

Interpretación gráfica de los métodos iterativos



Primeras iteraciones para $F(x) = -e^x$, $x_0 = 0$. Gráfico típico para funciones que verifican $-1 < F'(s) < 0$. Convergencia.

Si $|F'(s)| > 1$, en general no se da la convergencia, y es posible obtener o bien una sucesión divergente o situaciones mucho más complejas



Proceso iterativo para $F(x) = 3{,}5x(1-x)$, $x_0 = 0{,}5$. En este caso, $\{x_n\}$ posee ¡cuatro puntos acumulación!

Este ejemplo es un caso particular de la ecuación de Malthus

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n),$$

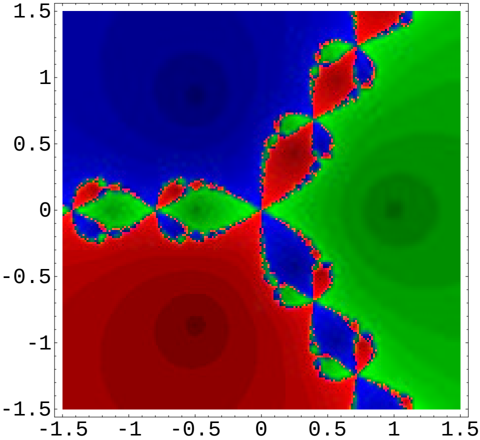
que representa un modelo para el crecimiento de poblaciones. En este proceso iterativo a medida que aumentan los valores de k la situación se hace mucho más complicada, llegándose a dar incluso un proceso caótico.

La elección del punto inicial

Problema

Determinar el conjunto de puntos x_0 tales que se pueda garantizar la convergencia hacia una solución dada.
A tal conjunto de puntos se le denomina el dominio de atracción de la raíz.

Para ilustrar la dificultad de este problema, hemos programado el método de Newton en variable compleja para el cálculo de las raíces de la ecuación $x^3 - 1 = 0$. El siguiente gráfico ilustra este proceso.


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

Se toma x_0 cada punto del plano complejo.

Se le asigna un color en función de la raíz a la cuál converge,

y un tono en función de la velocidad de la convergencia.

El plano complejo queda dividido en tres zonas de color, correspondientes a cada uno de los dominios de atracción de las tres raíces de la ecuación.

Obsérvese la frontera de los dominios: tiene carácter fractal.

Polinomios

Polinomio:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde

- $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$,
- $a_n \neq 0$, llamado coeficiente líder o conductor,
- n es el grado del polinomio,
- a_0 es el término independiente.

Algoritmo de Horner (o de la división sintética)

Se utiliza para evaluar un polinomio en un número real c, minimizando el número de operaciones para minimizar los errores. Se trata de sacar factor común, y disponer los cálculos de forma adecuada.

$$
\begin{aligned}
p(c) &= a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0 = \\
&= (a_n c^{n-1} + a_{n-1} c^{n-2} + \cdots + a_2 c + a_1) c + a_0 = \\
&= ((a_n c^{n-2} + a_{n-1} c^{n-3} + \cdots + a_2) c + a_1) c + a_0 = \\
&= \cdots \\
&= (\cdots (a_n c + a_{n-1}) c + a_{n-2}) c + \cdots + a_2) c + a_1) c + a_0
\end{aligned}
$$

Algoritmo de Horner

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n, \\
b_{n-1} &= b_n c + a_{n-1}, \\
b_{n-2} &= b_{n-1} c + a_{n-2}, \\
\ldots & \\
b_0 &= b_1 c + a_0 = p(c).
\end{aligned}
$$

Algoritmo de Horner

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n, \\
b_i &= b_{i+1} c + a_i, \quad i = n-1, \ldots, 0, \\
p(c) &= b_0.
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Calcular $p(-2)$, esto es $c = -2$, donde

$$p(x) = 2\,x^5 - 7\,x^3 + 2\,x^2 - x + 1.$$

Aquí, $a_5 = 2$, $a_4 = 0$, $a_3 = -7$, $a_2 = 2$, $a_1 = -1$, $a_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
b_5 &= a_5 = 2,\\
b_4 &= b_5\,c + a_4 = 2 \times (-2) + 0 = -4,\\
b_3 &= b_4\,c + a_3 = (-4) \times (-2) - 7 = 1,\\
b_2 &= b_3\,c + a_2 = 1 \times (-2) + 2 = 0,\\
b_1 &= b_2\,c + a_1 = 0 \times (-2) - 1 = -1,\\
b_0 &= b_1\,c + a_0 = (-1) \times (-2) + 1 = 3 = p(-2).
\end{aligned}$$

Otra disposición de los cálculos

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \\
c & & c\,b_n & c\,b_{n-1} & \cdots & c\,b_3 & c\,b_2 & c\,b_1 & \\
\hline
 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 & = p(c)
\end{array}
$$

Otra disposición de los cálculos

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \\
c & & c\,b_n & c\,b_{n-1} & \cdots & c\,b_3 & c\,b_2 & c\,b_1 & \\
\hline
 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 & = p(c)
\end{array}
$$

Así, el algoritmo de Horner no es más que la conocida regla de Ruffini para la evaluación de un polinomio.

Además,

- $q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_3 x^2 + b_2 x + b_1$,
  es el polinomio cociente al dividir $p(x)$ entre $x - c$, esto es,

  $$p(x) = q(x)(x - c) + r,$$

  donde r es el resto de la división (y es una constante).

Además,

- $q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_3 x^2 + b_2 x + b_1$,
  es el polinomio cociente al dividir $p(x)$ entre $x - c$, esto es,

  $$p(x) = q(x)(x - c) + r,$$

  donde r es el resto de la división (y es una constante).

- $q(c) = p'(c)$, esto es, al implementar el método de Newton–Raphson para polinomios, se debe aplicar dos veces el algoritmo de Horner para obtener $p(x_n)$ y $p'(x_n)$ en cada iteración.

Ejemplo

Sea $x_0 = -2$, y $p(x) = 2\,x^5 - 7\,x^3 + 2\,x^2 - x + 1$. Utilizando el algoritmo de Horner, calcule x_1 por el método de Newton–Raphson.

$$
\begin{array}{r|rrrrrrl}
 & 2 & 0 & -7 & 2 & -1 & 1 & \\
-2 & & -4 & 8 & -2 & 0 & 2 & \\
\hline
 & 2 & -4 & 1 & 0 & -1 & 3 & = p(-2) \\
-2 & & -4 & 16 & -34 & 68 & & \\
\hline
 & 2 & -8 & 17 & -34 & 67 & & = p'(-2)
\end{array}
$$

De este modo, $x_1 = x_0 - p(x_0)/p'(x_0) = -2 - 3/67 = -2{,}04478$

Localización de las raíces de un polinomio

Teorema

Todas las raíces reales de un polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

se encuentran en el intervalo $[-1-\rho, 1+\rho]$, donde

$$\rho = \frac{1}{|a_n|} \max\{|a_{n-1}|, \cdots, |a_1|, |a_0|\}.$$

Ejemplo

Localice todas las raíces del polinomio $p(x) = 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + x - 3$. En este caso,

$$\rho = \frac{1}{2} \text{máx}\{|-6|, |-4|, |1|, |-3|\} = 3.$$

De este modo, todas las raíces reales están en el intervalo $[-4, 4]$.

Ejemplo

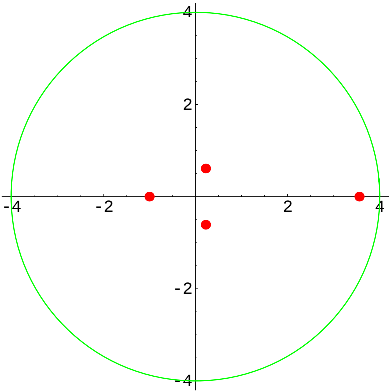
Localice todas las raíces del polinomio $p(x) = 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + x - 3$.
En este caso,

$$\rho = \frac{1}{2}\,\text{máx}\{|-6|, |-4|, |1|, |-3|\} = 3.$$

De este modo, todas las raíces reales están en el intervalo $[-4, 4]$.
De hecho las raíces del polinomio son

$$\begin{aligned} x_1 &= -1, \\ x_2 &= 0{,}221894 - 0{,}610377i, \\ x_3 &= 0{,}221894 + 0{,}610377i, \\ x_4 &= 3{,}55621. \end{aligned}$$

Las raíces del polinomio $2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + x - 3$



Referencias

- R. L. Burden, J. D. Faires, Análisis Numérico, 9ª ed. Thomson–Learning, México, 2011.
- D. Kincaid, W. Cheney, Análisis Numérico: las Matemáticas del cálculo científico. Addison Wesley, Argentina, 1994.