Tema 4: Ejercicio 4

$\sum_{n\geq 0} f_n \qquad f_n(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$

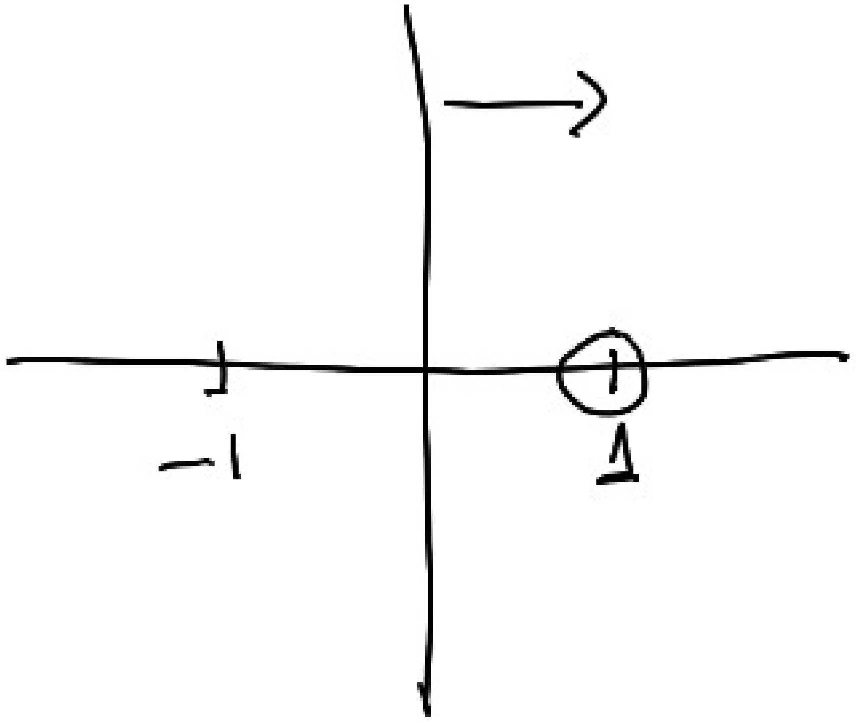
Sabemos que $\sum w^n$ converge absolutamente en $D(0,1)$ y converge uniformemente en cada compacto de $D(0,1)$. No converge fuera de $D(0,1)$

$$\varphi(z) = \frac{z-1}{z+1} \qquad \sum_{n\geq 0} f_n = \sum_{n\geq 0} \varphi(z)^n$$

$A = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{1\} \,/\, \varphi(z) \in D(0,1)\}$ La serie $\sum f_n$ converge absolutamente en todo punto de A y la serie no converge en ningún punto de $(\mathbb{C}\setminus\{1\})\setminus A$.

$$A = \{ z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\} \ / \ \varphi(z) \in D(0,1) \}$$

$$\varphi(z) \in D(0,1) \iff \left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1 \iff \underline{|z-1|} < \underbrace{|z+1|}_{\substack{\parallel \\ |z-(-1)|}} \iff \operatorname{Re} z > 0$$



La serie $\sum f_n$ converge absolutamente en $A = \{ z \in \mathbb{C} \ ; \ \operatorname{Re} z > 0 \}$ y no converge en ningún punto de $(\mathbb{C}\setminus\{-1\})\setminus A$

Si $K \subset A$ es compacto, como φ es continua $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$

$\varphi(K)$ compacto $\Rightarrow$ y está contenido $\varphi(A) = D(0,1)$

Como la serie geométrica converge uniformemente en cada compacto de $D(0,1)$, converge uniformemente en $\varphi(K)$. Luego la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en K.