Tema 9:

(1) $|f(z)| \le \frac{1}{1-|z|}$ $\forall z \in D(0,1)$ $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$

$n \in \mathbb{N}$ fijo

Para $0<r<1$ usamos la fla. de Cauchy para las derivadas en la cfa. $C(0,r)$ $\quad C(0,r)^* \subset D(0,1)$

$$|f^{(n)}(0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz \right| \le \frac{n!}{2\pi} \int_{C(0,r)} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}\,dz \le \frac{n!\,\cancel{2\pi} r}{\cancel{2\pi}} \frac{1}{(1-r)r^{\cancel{n+1}}} =$$

$$= \frac{n!}{(1-r)r^n} \quad \forall r \in \left]0,1\right[$$

$|z| = r$ si $z \in C(0,r)^*$ $\quad |f(z)| \underset{\text{hip.}}{\le} \frac{1}{1-|z|} = \frac{1}{1-r}$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(0)| \le n! \inf_{r \in]0,1[} \frac{1}{(1-r)r^n}$$

se calcula exactamente en función de n y se comprueba que ese valor es $\le e$.

(2) Como f es entera, por el teorema de Taylor tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Fijamos $n > \beta$ y aplicamos la fla. de Cauchy para las derivadas en la cfa. $C(0,R)$ con $R > \rho$:

$$|f^{(n)}(0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz \right| \le \frac{n!}{\cancel{2\pi}} \cancel{2\pi} R\, \alpha \cdot \frac{R^\beta}{R^{n+\cancel{1}}} = \alpha n! \frac{1}{R^{n-\beta}} \quad \forall R > \rho \Rightarrow$$

$|f(z)| \le \alpha |z|^\beta$ si $|z| > \rho$ $\qquad n > \beta \Rightarrow n-\beta > 0$

$$\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} \le \frac{\alpha |z|^\beta}{|z|^{n+1}} = \alpha \frac{R^\beta}{R^{n+1}} \quad z \in C(0,R)^*$$

$\Rightarrow$ tomando límite con $R \to \infty$ obtenemos $|f^{(n)}(0)| = 0 \Rightarrow f^{(n)}(0) = 0$

$\rightsquigarrow f$ es un polinomio de grado $\le \beta$

Ω conexo $\Rightarrow$ $\mathcal{H}(\Omega)$ es dominio de integridad

$0 \equiv fg$ en Ω $\Rightarrow$ $f(z)g(z)=0 \quad \forall z \in \Omega$

$\Omega = Z(f) \cup Z(g)$ o bien $Z(f)$ o $Z(g)$ tiene puntos de acumulación en Ω $\underset{\text{principio de identidad}}{\Rightarrow}$ esa función es cero en Ω.