06/06/2020

<u>Dudas convocatoria ordinaria:</u>

<u>Relación 9 ej. 9:</u>

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Consideramos la función

$g(z) = \dfrac{1}{f(\frac{1}{z})}$ Como $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ $\exists R > 0$ tq si $|z| > R$ entonces $|f(z)| > 1$.

Si $z \in D(0, 1/R)\setminus\{0\}$ entonces $\frac{1}{z} \in \mathbb{C}\setminus D(0,R)$ es decir

$|\frac{1}{z}| > R$ y $|f(1/z)| > 1$. Por tanto podemos definir

$g: D(0, 1/R)\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, por $g(z) = \dfrac{1}{f(1/z)}$.

$g \in \mathcal{H}(D(0,1/R)\setminus\{0\})$ y además $\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \dfrac{1}{f(1/z)} = 0 \Longrightarrow$

$\xRightarrow[\text{de Riemann}]{\text{T. extensión}}$ $g \in \mathcal{H}(D(0,1/R))$ y $g(0) = 0$ $\xRightarrow[\text{de funciones holomorfas}]{\text{ceros}}$ $\exists k \in \mathbb{N}$ y

$\psi \in \mathcal{H}(D(0,1/R))$ con $\psi(0) \neq 0$ tq. $g(z) = z^k \cdot \psi(z)$ $\forall z \in D(0, 1/R)$

$g(z) = \dfrac{1}{f(1/z)} \Rightarrow \underbrace{f(1/z)} = \dfrac{1}{g(z)} = \underbrace{\dfrac{1}{z^k} \cdot \dfrac{1}{\psi(z)}}$

$\forall z \in D(0, 1/R)$

Como $\psi(0) \neq 0$ $\exists r > 0$ ($1/R >$) tq $\forall z \in D(0,r)$ $|\psi(z)| > \delta \Rightarrow$
$\exists \delta > 0$

$\dfrac{1}{|\psi(z)|} < \dfrac{1}{\delta}$ $\forall z \in D(0,r)$

Si $|z| > \frac{1}{r} \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < r \rightsquigarrow z \in D(0,r)$ y $0 < |\psi(z)| < \frac{1}{\delta}$

además $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z^k} \cdot \frac{1}{\psi(z)} \Rightarrow$

$\left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{z}\right|^k \cdot \frac{1}{|\psi(z)|} < \frac{1}{\delta} \cdot \left|\frac{1}{z}\right|^k$

llamando $w = 1/z$ $\quad \underline{|f(w)| < \frac{1}{\delta}|w|^k \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus D(0, 1/r)}$

ej. 2) $\Rightarrow$ f es un polinomio de grado $\leq k$.

Junio 2019

① $(f \circ g)(1/n) = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

$A = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\}$ tiene al origen como punto de acumulación.
Como f y g son continuas y $\{\frac{1}{n}\} \to 0$ y $(f \circ g)(1/n) = \frac{1}{n}$ tenemos que

$(f \circ g)(0) = 0$. Luego el principio de identidad nos dice que

$(f \circ g)(z) = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$. (*)

Por un lado tenemos que g es inyectiva:
Si existen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$ tq. $g(z_1) = g(z_2)$ podemos escribir

$z_1 \overset{(*)}{=} f(g(z_1)) = f(g(z_2)) \overset{(*)}{=} z_2$!!

$\left.\begin{array}{c} g \text{ es inyectiva.} \\ \hline + \\ g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \exists \alpha \in \mathbb{C}^* \text{ tq } g(z) = \alpha z + \beta.$

Demostramos esto:

Tenemos 2 posibilidades: g es un polinomio o g es una función entera no polinómica. Suponemos que g es una función entera no polinómica. Como consecuencia del T. de Casorati vimos que $g(\mathbb{C}\setminus D(0,1))$ es denso en $\mathbb{C}$. Por otra parte, si tomamos

$0<\delta<1$, como g es inyectiva y $g\in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ el teorema de aplicación abierta nos dice que $g(D(0,\delta))$ es abierto. Entonces

$$\underbrace{g(D(0,\delta))}_{\text{abierto}} \cap \underbrace{g(\mathbb{C}\setminus D(0,1))}_{\text{denso en } \mathbb{C}} \neq \emptyset \Rightarrow \exists z_1 \in D(0,\delta),\ \exists z_2 \in \mathbb{C}\setminus D(0,1) \text{ t.q. } g(z_1)=g(z_2)$$

contradicción porque g es inyectiva. Es decir, g no puede ser una función entera no polinómica. Luego g es un polinomio, digamos de grado $k\in\mathbb{N}$ ($k\neq 0$ porque g es inyectiva).

Veamos que k no puede ser ≥ 2:

Si $k\geq 2$ el teorema fundamental del álgebra nos dice que

$$g(z) = M(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_k) \quad \text{con } a_1,a_2,\dots,a_k\in\mathbb{C}$$

Si existen dos números en $\{a_1,\dots,a_k\}$ distintos tendríamos que g no es inyectiva!! Luego $a_1=a_2=\dots=a_k \leadsto$

$\leadsto g(z) = M(z-a)^k$ esta función tampoco es inyectiva!

Sean $\lambda_1\neq\lambda_2$ dos raíces k-ésimas de 1 entonces los puntos $z_1=a+\lambda_1$ y $z_2=a+\lambda_2$ verifican

$$\left.\begin{array}{l} g(z_1)=M(z_1-a)^k = M\lambda_1^k = M \\ g(z_2)=M(z_2-a)^k = M\lambda_2^k = M \end{array}\right\} \text{!! con la inyectividad de } g$$

Entonces g ha de ser un polinomio de grado 1.

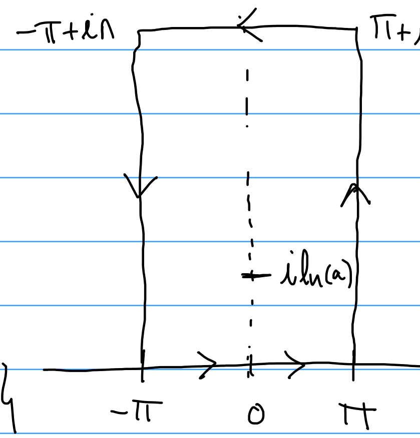
Por tanto, existen $\alpha \in \mathbb{C}^*$ y $\beta \in \mathbb{C}$ de modo que $\boxed{g(z)=\alpha z+\beta \quad \forall z \in \mathbb{C}}$

$f(g(z)) = z \ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(\alpha z+\beta) = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Llamando $w = \alpha z + \beta$ tenemos que $f(w) = \frac{w-\beta}{\alpha} \quad \forall w \in \mathbb{C}$ #

$\Downarrow$

$\frac{w-\beta}{\alpha}$



② $a>1$ $\quad f(z) = \frac{z}{a-e^{-iz}} \quad n \in \mathbb{N}$

Veamos cuáles son las singularidades de f

$e^{-iz} = a \iff -iz \in \mathrm{Log}(a) = \{\ln|a| + i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$\iff z \in i\mathrm{Log}(a) = \{i\ln a + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

$A = \{2k\pi + i\ln(a);\ k \in \mathbb{Z}\}$ es el cjto. de singularidades de f

$f: \mathbb{C}\setminus A \rightarrow \mathbb{C} \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus A)$

A partir de ahora $\underline{n > \ln(a)}$. $\Omega = \mathbb{C}$ $\quad \Gamma_n = [-\pi, \pi, \pi+in, -\pi+in, -\pi]$

$$\left.\begin{array}{l} A' \cap \mathbb{C} = \emptyset \\ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus A) \\ \Gamma_n^* \subset \mathbb{C}\setminus A \\ \Gamma_n \text{ es trivialmente} \\ \text{nulhomólogo respecto a } \mathbb{C} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{Residuos}]{\text{T.}} \int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \underbrace{\mathrm{Ind}_{\Gamma_n}(i\ln a)}_{=1} \mathrm{Res}(f(z), i\ln(a))$$

(**)

$$\underset{\text{T.R.}}{2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z), i\ln a)} = \int_{\Gamma_n} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{[-\pi,\pi]} f(z)\,dz}_{(3)} + \underbrace{\int_{[\pi,\pi+in]} f(z)\,dz}_{(1)} + \underbrace{\int_{[\pi+in,-\pi+in]} f(z)\,dz}_{(4)\ \xrightarrow{n\to\infty} 0} + \underbrace{\int_{[-\pi+in,-\pi]} f(z)\,dz}_{(2)}$$

$\sigma : [0,n] \to \mathbb{C}$

$\sigma(x) = \pi + ix$

$\sigma'(x) = i$

$$\int_{[\pi,\pi+in]} f(z)\,dz = \int_0^n \frac{(\pi+ix)i}{a - e^{-i(\pi+ix)}}\,dx \qquad e^{-i(\pi+ix)} = e^{-i\pi}e^{x} = -e^{x}$$

$$= \int_0^n \frac{i\pi - x}{a+e^x}\,dx$$

$$f(z) = \frac{z}{a - e^{-iz}}$$

$\gamma : [0,n] \to \mathbb{C}$

$\gamma(x) = -\pi + ix$

$\gamma'(x) = i$

$$\int_{[-\pi+in,-\pi]} f(z)\,dz = -\int_{[-\pi,-\pi+in]} f(z)\,dz =$$

$$= -\int_0^n \frac{(-\pi+ix)i}{a - e^{-i(-\pi+ix)}}\,dx = \int_0^n \frac{\pi i + x}{a+e^x}\,dx$$

$$e^{-i(-\pi+ix)} = e^{i\pi}\cdot e^{x}, \quad e^{i\pi} = -1$$

$$\boxed{(1) + (2) = \int_0^n \frac{2\pi i}{a+e^x}\,dx = 2\pi i \int_0^n \frac{dx}{a+e^x}}$$

$\int_0^\infty \frac{dx}{a+e^x}$ se calcula

$\sigma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, (3)

$\sigma(x) = x$

$\sigma'(x) = 1$

$$\int_{[-\pi,\pi]} f(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - e^{-ix}}\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\,\overline{(a-e^{-ix})}}{(a-e^{-ix})\overline{(a-e^{-ix})}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x(a-e^{ix})}{|a-e^{ix}|^2}\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x(a-e^{ix})}{1+a^2-2a\cos x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x(a-\cos x) - ix\,\mathrm{sen}\,x}{1+a^2-2a\cos x}\,dx$$

$$|a-e^{ix}|^2 = |a - \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x|^2 = (a-\cos x)^2 + \mathrm{sen}^2(x) = a^2 - 2a\cos x + \underbrace{\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x)}_{1}$$

$$= 1 + a^2 - 2a\cos x$$

$$\left| \int_{[\pi+in,-\pi+in]} f(z)\,dz \right| \le 2\pi \cdot \frac{(\pi+n)}{e^n - a} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{[\pi+in,-\pi+in]} f(z)\,dz = 0$$

Si $z \in [\pi+in, -\pi+in] \rightsquigarrow z = x+in$ con $x \in [-\pi,\pi]$

$$|f(z)| = \left| \frac{x+in}{a - e^{-i(x+in)}} \right| \le \frac{|x|+n}{e^n - a} \le \frac{\pi+n}{e^n-a} \qquad n > \ln a$$

$\left|e^{-i(x+in)}\right| = \underbrace{\left|e^{-ix}e^{n}\right|}_{= e^{n}}$ luego $\left|a - e^{-i(x+in)}\right| \geq \left|e^{-i(x+in)}\right| - a = e^{n} - a$

Tomando $\lim n \to \infty$ en $(**)$ obtenemos

$$2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i\ln a) = 2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{dx}{a+e^x} - i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1+a^2-2a\cos(x)}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x(a-\cos x)\,dx}{1+a^2-2a\cos(x)}$$

despejando tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1+a^2-2a\cos(x)}\,dx = \underbrace{2\pi\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a+e^x}}_{= 2\pi \frac{\ln(1+a)}{a}} - 2\pi \operatorname{Re}\left(\operatorname{Res}(f(z), i\ln a)\right)$$

$$\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{a\,dx}{a+e^x} = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{a+e^x-e^x}{a+e^x}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\left[1 - \frac{e^x}{a+e^x}\right]dx = \frac{1}{a}\Big[x - \ln(a+e^x)\Big]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a}\Big[\lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{=\ln(e^x)} - \ln(a+e^x) + \ln(1+a)\Big] = \frac{\ln(1+a)}{a}$$

$$\lim_{x\to\infty} x - \ln(a+e^x) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) = 0$$

$$f(z) = \frac{z}{a - e^{-iz}} \qquad \operatorname{Res}(f(z), i\ln a)$$

$$\lim_{z\to i\ln(a)} (z - i\ln a) f(z) = \lim_{z\to i\ln(a)} \frac{(z - i\ln a)}{a - e^{-iz}} \cdot z = i\ln a \lim_{z\to i\ln(a)} \frac{z - i\ln a}{a - e^{-iz}} \overset{LH}{=}$$

$$= i\ln(a) \lim_{z\to i\ln(a)} \frac{1}{\cancel{i}e^{-iz}} = \frac{\ln(a)}{\underbrace{e^{+\ln(a)}}_{=a}} = \frac{\ln(a)}{a} \neq 0 \Rightarrow$$ f tiene un polo de orden 1 en $i\ln a$ y $\operatorname{Res}(f(z), a) = \frac{\ln(a)}{a}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\operatorname{sen}(x)\,dx}{1+a^2-2a\cos(x)} = 2\pi\frac{\ln(1+a)}{a} - 2\pi\frac{\ln(a)}{a} = \frac{2\pi}{a}\ln\left(\frac{1+a}{a}\right) //$$