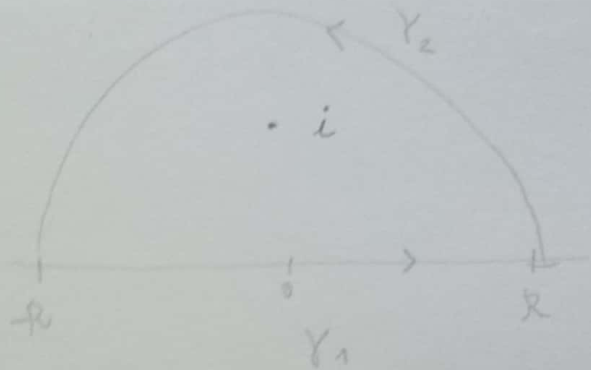
Blanca Cano Camarero

Examen

$\boxed{3}$ Integrando la función $z \longmapsto \dfrac{z e^{iz}}{(1+z^2)^2}$, sobre un camino cerrado $D(0,R)$ mitad superior

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x)}{(1+x^2)^2} \, dx$$



$f(z) = \dfrac{z e^{iz}}{(1+z^2)^2}$

Ciclos

$\gamma_1 \, [-R, R] \to \mathbb{C}$ $\qquad$ $\gamma_2 \, [0, \pi] \to \mathbb{C}$

$\gamma_1(x) = x$ $\qquad$ $\gamma_2(x) = R e^{ix}$

$\gamma_1'(x) = 1$ $\qquad$ $\gamma_2'(x) = R i e^{ix}$

$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

Puntos singulares A

$0 = (1+z^2)^2 = (z+i)^2 (z-i)^2 \Rightarrow A = \{\pm i\}$ (que además son de orden 2)

Llamemos a $\Omega = \mathbb{C}$, es un abierto

Entonces para cada R^+ se verifican las hipótesis del teorema de los residuos.

- Ω abierto
- $A \subset \Omega$ finito y por ende $A \cap \Omega = \emptyset$
- f producto de holomorfa dividido por un polinomio que no se anula en $\Omega \setminus A$.

  por tanto $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$
- Γ_R es trivialmente un ciclo nul-homólogo.

Luego

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{ind}_{\Gamma_R}(a) \operatorname{Res}(f(a); a)$$

Notemos que para $R>0$ $\text{Ind}_{\Gamma_R}(-i)=0$,

Si $R>1$ $\text{Ind}_{\Gamma_R}(i)=1$ y para $0<R<1$ $\text{Ind}_{\Gamma}(i)=0$

Por tanto solo nos interesa el residuo en i

$$\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{2-1}}{dz}(z-i)^2 f(z) =$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{ze^{iz}}{(z+i)^2} = \lim_{z\to i}\frac{\left(e^{iz}+zie^{iz}\right)(z+i)^2-2(z+i)\,ze^{iz}}{(z+i)^4}$$

$$= \frac{1}{(2i)^4}\left((2i)^2(e^{-1}-e^{-1})-2(2i)\cdot i\,e^{-1}\right] = -\frac{1}{(2i)^2}\cdot\frac{1}{e} =$$

$$= \frac{1}{4e}$$

$S=\{|z|=R\ ,\ \text{img}(z)\geq 0\}$

dado real

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int_S f(z)dz$$

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{(Re^{ix})\,e^{i(Re^{ix})}}{\left(1+(R(e^{ix}))^2\right)^2}\cdot R\cdot ie^{ix}\,dx$$

$$|I_2| = \left|\int_0^\pi \cdot \ /\!/ \ \ dx\right| \leq \int_0^\pi \frac{\left|R^2e^{2ix}i\right|\left|e^{i(R\cdot(\cos x+i\sin x))}\right|}{\left|\left(1+(Re^{ix})^2\right)^2\right|}dx \leq$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{R^2\cdot\left|\frac{1}{e^{R\sin x}}\right|}{R^4}dx \leq \frac{1}{R^2}\cdot\frac{1}{e^R}\,\pi.$$

Entonces $\lim_{R\to\infty} I_2 = 0$

Por tanto volviendo a la igualdad proporcionada por el teorema del residuo.

$$\int_\Gamma f(z)dz \int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int_S f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f(z), i)$$

de donde deducimos que

$$\int_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{(1+x^2)^2}\,dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{4e} = \frac{\pi i}{2e}$$

$$\|$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{x\ (\cos x + i \sin x)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Notemos que la parte imaginaria es la integral que se nos pedía. Concluimos pues.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2}\,dx = \operatorname{Img}\left[\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)\,dz\right] = \operatorname{Img}\left(\frac{\pi}{2e} i\right) = \frac{\pi}{2e}$$

$\boxed{4}$ Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea $f_n: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\sin(t^n + z)\cos(t^n + z)}{1+t^2}\, dt \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

a) $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

Para cada n defino $\gamma_n = [n, n+1]^* \subset \mathbb{R}_0^+$

$\phi: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $\phi(t,z) = \frac{\sin(t^n+z)\cos(t^n+z)}{1+t^2}\, dt$

ϕ es continua en ambas variables por ser producto de continuas y división de polinomio que no se anula.

Fijando un t cualquiera $\phi_t(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ya que $\sin(z), \cos(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Se verifican las hipótesis del teorema de holomorfía y por tanto:

$f_n(z) = \int_{\gamma_n} \phi_t(z)\, dz \quad \forall z \in \mathbb{C}$ es una función entera.

b) $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y su suma es una función entera.

Tenemos $K \subseteq \mathbb{C}$ un compacto arbitrario cualquiera y veamos que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformemente en él.

$$\left| \int_{\gamma_n} \frac{\sin(t^n+z)\cos(t^n+z)}{1+t^2}\, dt \right| \leq \int_{\gamma_n} \left| \frac{\sin(t^n+z)(\cos t^n+z)}{1+t^2} \right| dt$$

$$\leq \int_{\gamma_n} \frac{1}{|1+t^2|}\frac{1}{4}\left|\left(e^{i(t^n+z)} - e^{-i(t^n+z)}\right)\left(e^{i(t^n+z)} + e^{-i(t^n+z)}\right)\right| dt$$

$$= \int_{\gamma_n} \frac{1}{4|1+t^2|} \left| e^{2i(t^n+z)} - e^{-2i(t^n+z)} \right| dt$$

$$\leq \int_{\gamma_n} \frac{1}{4|1+t^2|} \left| e^{2iz} \right| + \left| e^{-2iz} \right| dz$$

Como estamos en un compacto existirá $M \in \mathbb{R}^+$

tal que $M = \max\{|e^{2iz}|, |e^{-2iz}| \ \forall z \in K\}$

seguimos acotando

$$\leq \int_{\gamma_n} \frac{2M}{4|1+t^2|} dt \leq \int_{\gamma_n} \frac{M}{2t^2} dt \leq \frac{M}{2n^2}(n+1-n) \leq \frac{M}{n^2} = S_n$$

$\sum_{n\geq 0} S_n$ es una serie convergente

luego el test de weierstrass nos asegura que

$\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absoluta y uniformemente en K

y como estamos en el abierto $\mathbb{C}$ y f_n es entera y converge uniformemente en cada compacto el teorema de weierstrass nos asegura que; $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \ \forall z \in \mathbb{C}$, su suma es una función entera.

$\boxed{1}$ Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$.

. $\exists K \in \mathbb{N}$ $f^K(z) = g^K(z)$ $\forall z \in \Omega$. |

. Probar que $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ con $\lambda^K = 1$ tal que $f(z) = \lambda g(z)$ para cada $z \in \Omega$.

Si $g(z)$ es la función constantemente 0 entonces f también lo será y por tanto con $\lambda = 1$ bastaría. ($f^K(z) = 0 \Leftrightarrow f^{1/K}(z) = 0 \Leftrightarrow f(z) = 0 \;\forall z \in \Omega$).

Si no el conjunto $Z(g)$ será numerable (ya que de lo contrario por el principio de identidad $g \equiv 0$)

Y podemos, por estar en un dominio tomar un disco de radio $r > 0$. con $a \in \Omega$ y $D(a, r) \subseteq \Omega$ que cumpla que $\forall z \in D(a, r)$ $g(z) \neq 0$.

Ahora podemos definir $\forall z \in D(a, r)$

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \quad \forall z \in D(a, r) \quad \text{(holomorfa, continua)}$$

Por hipótesis $h^K(z) = 1$ $\forall z \in D(a, r)$, y sabemos

$$R = [1^{1/K}] = \{ x^K = 1 \} = \{ e^{\frac{2r\pi i}{K}} : r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < K \}$$

es decir un conjunto finito de cardinalidad K.

$D(a, r)$ es un abierto, por tanto un conexo y h es continua entonces $h(D(a, r)) \subseteq R$ será un conexo, y como R es finito necesariamente h será constante, (ya que de haber más sería denso)

$h(z) = \lambda$ $\forall z \in D(a, r)$.

y por hipótesis

$$f^k(z) = g^k(z) = \lambda^k g^k(z) \Rightarrow \lambda^k = 1.$$

Ahora falta probar que el λ deducido para $D(a,r)$ es el mismo para cualquier otro dominio de Ω.

Esto nos lo regala el principio de identidad:

$D'(a,r) = D(a,r)$; $D(a,r)' \cap \Omega = D(a,r) \neq \emptyset$

luego $f(z) = \lambda g(z)$ $\forall z \in \Omega$, como se quería ver.

$\boxed{3}$ Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verificando que $f(g(z)) = z^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Probar que una f y g es un polinomio de grado uno y la otra de grado 2.

g no puede ser cte, ya que eso supondría que f también lo fuera.

Ahora veamos que g es polinómica

Razonando por contradicción,

Si g no fuera polinómica usando como es entera, tendríamos que $\{ g(z) \; z \in \mathbb{C}, |z| > r \}$ es denso en $\mathbb{C}$.

Esto es

$$a \in g(D(0,1)) \cap g(\mathbb{C} \setminus D(0,1)) \neq \emptyset \qquad f(a) = a^2$$

pero ya hemos visto que si $a \in D(0,1) \Rightarrow |a| < 1 \Rightarrow a^2 < 1$

y si $a \in \mathbb{C} \setminus D(0,1) \Rightarrow |a| > 1$ lo cual es una contradicción

Consideremos ahora

$$A = \{ g(z) : |z| < 1 \; z \in \mathbb{C} \}$$

Con el mismo razonamiento se llega a que

f tiene que ser polinómica, ya que si no

$\exists z \in f(A) \cap f(\mathbb{C}/A)$ dando lugar a una contradicción de módulos

Tenemos pues que estamos componiendo dos funciones polinómicas, y que su resultado es z^2, es decir un polinomio de grado 2.

Si f es de grado k_1 y g es de grado k_1 s $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$

$f(g)$ será de grado $k_1 \cdot k_2 = 2$

Luego necesariamente una será de grado 1 y otra de grado 2.