Prueba de variable compleja

Blanca Cano Camarero

22 de abril de 2020

Índice

1. Ejercicio 1

Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie $\sum_{n\geq 0} f_n$ donde

$$f_n(z) = \left(\frac{z^2 - i}{z^2 + i}\right)^n \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\pm\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right\}$$

Llamando $\phi(z) = \frac{z^2-i}{z^2+i}$ tenemos que nuestra serie a estudiar es $\sum_{n\geq 0} \phi(z)^n$, una serie geométrica.

Sabemos que toda serie geométrica $\sum_{n\geq 0} w^n$:

- Será absolutamente convergente para $w \in D(0,1)$.
- Uniformemente convergente para $w \in k$ con k un compacto de $D(0,1)$.

Por lo tanto nos interesa estudiar el conjunto de puntos Ω para el que está definida la serie y que cumpla que $\forall z \in \Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \left\{\pm\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right\}$ se tenga que $|\phi(z)| < 1$.

Deducción analítica de Ω.

Denotaremos todo número complejo z como $z = x + yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z^2 - i = (x^2 - y^2) + (2xy - 1)i$$
$$z^2 + i = (x^2 - y^2) + (2xy + 1)i$$

Y sus respectivos módulos son:

$$|z^2 - i| = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy - 1)^2}$$
$$|z^2 + i| = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy + 1)^2}$$

Por tanto

$$\left|\frac{z^2 - i}{z^2 + i}\right| < 1 \iff \frac{|z^2 - i|}{|z^2 + i|} < 1 \iff \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy - 1)^2} < \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy + 1)^2}$$

$$\iff (2xy-1)^2 < (2xy+1)^2 \iff 0 < xy$$

Por tanto concluimos que esto válido para puntos del primer y tercer cuadrante en que esté definida la función, es decir

$$\Omega = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}^+ \vee x, y \in \mathbb{R}^-\} \setminus \left\{\pm\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right\}.$$

- **Convergencia absoluta**: La serie converge absolutamente en Ω.
- **Convergencia uniforme**: La serie será uniformemente convergente en cualquier compacto de Ω.
- **Convergencia puntual**: Convergencia absoluta implica puntual, por tanto converge puntualmente en Ω.
- Para puntos fuera de Ω la serie diverge.

2. Ejercicio 2

> Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

2.1. $f(z) = z^2 e^{\bar{z}}$

z^2 es un polinomio que es derivable en todo $\mathbb{C}$ y solo se anula en 0.
Si despejamos la exponencial llegamos a la siguiente ecuación:

$$\frac{f(z)}{z^2} = e^{\bar{z}}.$$

La cual nos va ayudar a conocer los puntos en los que f NO es derivable, pues por la regla de derivación de la división tenemos que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ entonces

$$\frac{f(z)}{z^2} = e^{\bar{z}} \in \mathcal{H}(\Omega \cap \mathbb{C}^*)$$

(Nótese que se ha excluido z=0).

Estudiemos la derivabilidad de $e^{\bar{z}}$.

Para simplificar la notación denotaré a $x = Rez$, $y = Imz$ Con $z \in \Omega \cap \mathbb{C}^*$

$$e^{\bar{z}} = e^x(cos(-y) + isin(-y)) = e^x cos(y) - ie^x sin(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} Ree^{\bar{z}} = e^x cos(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} Ree^{\bar{z}} = -e^x sin(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} Ime^{\bar{z}} = -e^x sin(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} Ime^{\bar{z}} = -e^x cos(y)$$

Lo puntos derivables tienen que cumplir las ecuaciones de Cauchy-Rieman:

$$\frac{\partial}{\partial x} Ree^{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial y} Ime^{\bar{z}} \wedge \frac{\partial}{\partial y} Ree^{\bar{z}} = -\frac{\partial}{\partial x} Ime^{\bar{z}}.$$

Esto es un sistema incompatible, por tanto $e^{\bar{z}} \notin \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \cap \Omega)$ lo que implica que $f(z) \notin \mathcal{H}(\Omega)$ con Ω cualquier conjunto contenido en $\mathbb{C}^*$.

Estudiamos el caso que nos faltaba por estudiar su derivabilidad $z = 0$

$$f'(0) = lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = lim_{z \to 0} \frac{z^2 e^{\bar{z}}}{z} = 0$$

Con lo que concluimos que f es derivable en el 0.

2.2. $g(z) = sin(z)f(z)$

Razonaremos de la misma manera:
Despejamos $\frac{g(z)}{sin(z)} = f(z)$ Los puntos que tendremos que estudiar de manera particular serán:

- Para los que $sin(z) = 0$, estos son los de la forma $z = \pi k$ con k entero.
- El $z = 0$ ya que aquí $f(z)$ es derivable.

Llamaré $\Lambda = \pi\mathbb{Z} \cup \{0\}$ al conjunto de estos puntos.

Puesto que $f(z)$ no es derivable en $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ tampoco $g(z)$ lo será ahí.

Analizaremos ahora la derivabilidad en Λ por la definición de derivada.

$\forall a \in \pi\mathbb{Z}$ se tiene

$$lim_{z \longrightarrow a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = f(a) lim_{z \longrightarrow a} \frac{sin(z)}{z - a}$$

Si escribios $sin(z)$ como el polinomio de taylor centrado en a tenemos:

$$f(a) lim_{z \longrightarrow a} \frac{sin(z)}{z - a} = f(a) lim_{z \longrightarrow a} \frac{1}{z - a} (sin(a) + cos(a)(z - a) + \frac{-sin(a)}{2!}(z - a)^2 + \dots)$$

$$= f(a) lim_{z \longrightarrow a} (\frac{sin(a)}{z - a} + cos(a)(z - a)^0 + \frac{-sin(a)}{2!}(z - a)^{2-1} + \dots)$$

$$= f(a) lim_{z \longrightarrow a} (0 + cos(a) + \frac{-sin(a)}{2!}(z - a)\dot{)} = f(a) cos(a)$$

Que tine límite y por tanto existe la derivada en esos puntos.

Veamos ahora el caso $z = 0$.

$$lim_{z\longrightarrow a}\frac{g(z)-g(0)}{z-0} = lim_{z\longrightarrow a}\frac{sin(z)}{z}$$

Que si volvemos a escribir $sin(z)$ como el polinomio de taylor centradon en 0 tenemos:

$$lim_{z\longrightarrow 0}\frac{g(z)-g(0)}{z-0} = cos(0).$$

Concluimos por tanto que $g \in \mathcal{H}(\Lambda)$.

3. Ejercicio 3

Calcular
$$\int_{C(0,1)} \frac{cos(z)}{z(z-2)^2} dz$$

Sea $\Omega = D(0,r)$ con $1 < r < 2$ un abierto. Se tiene que $cos(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y que $(z-2)^2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y además no se anula en Ω. Por tanto definimos $f(z) = \frac{cos(z)}{(z-2)^2}$ y esta función es holomorfa en Ω.

Tenemos además que $\bar{C}(0,1) \subseteq \Omega$ y con esto se cumplen todas las hipótesis necesarias para poder aplicar la fórmula de Cauchy para la circunferencia:

$$\int_{C(0,1)} \frac{cos(z)}{z(z-2)^2} dz = \int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z-0} dz = 2\pi i f(0) = \frac{\pi i}{2}$$

4. Ejercicio 4

Sean $a, b \in \mathbb{C}$ y sea $R > 0$ de modo que $R > max\{|a|, |b|\}$. Probar que, si f es una función entera, se tiene que:

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 2\pi i \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante (Teorema de Liouville).

4.1. Igualdad

Sean $a, b \in \mathbb{C}$ dos elementos distintos cualesquiera y $R > max\{|a|, |b|\}$.

$$2\pi i \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{b - a}(2\pi i f(b) - 2\pi i f(a))$$

Y como $f$es una función entera se cumplen las hipótesis de la fórmula de Cauchy para la circunferencia, lo que nos permite escribir:

$$\frac{1}{b-a}(2\pi i f(b) - 2\pi i f(a)) = \frac{1}{b-a}\left(\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b} dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a} dz\right)$$

Aplicamos la aditividad de la integral, suma fraciones y sacar factor común $f(z)$:

$$= \frac{1}{b-a} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)(z-a) - f(z)(z-b)}{(z-b)(z-a)} dz = \frac{1}{b-a} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)(b-a)}{(z-b)(z-a)} dz$$

y finalmente por linealidad de la integral nos queda lo que buscábamos:

$$= \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

4.2. Teorema de Liouville

Sean $a, b \in \mathbb{C}$ dos elementos cualesquiera distintos y $R > 0$ de modo que $R > max\{|a|, |b|\}$. Como f es entera el ejercicio anterior nos da la la siguiente

igualdad:
$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz = 2\pi i\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
Lo que implica que
$$\left|\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz\right| = \left|2\pi i\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|. \tag{1}$$
Por otro lado tenemos
$$\left|\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz\right| \leq \int_{C(0,R)} \frac{|f(z)|}{|(z-a)(z-b)|}dz$$

Por estar acotada la función entera $\exists M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$. Y además aplicando desigualdades triangulares: $|z-a| \geq ||z|-|a|| = |R-|a|| \in \mathbb{R}$

De donde deducimos sacando escalar
$$\leq \int_{C(0,R)} \frac{M}{|R-|a|||R-|b||}dz = \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)}.$$
Y como R puede ser cualquier real siempre que $R > max\{|a|,|b|\}$, tenemos que para cualquier $\varepsilon > 0$ siempre se va a poder conseguir un radio para el cual (volviendo a la ecuación (1))
$$\left|\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz\right| = \left|2\pi i\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| < \varepsilon.$$
y puesto que a, b son dos número complejos distintos cualesquiera; concluimos que sea cuales sean $a, b \in \mathbb{C}$ distintos, sus imágenes se pueden acercar todo lo que queramos $|f(a) - f(b)| < \varepsilon_2$ o lo que es lo mismo, la función f es constante.

5. Ejercicio 5

> Sea $\emptyset \neq \Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y sean $g, g_n : \Omega \to \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g en cada compacto de Ω si, y solo si, para cada $a \in \Omega$ existe un entorno de a en el que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g.

5.1. Condición suficiente

Por ser Ω un abierto para cualquiera de sus puntos a podemos encontrar un disco $D(a, r)$ que quede contenido en Ω. Consideremos ahora $\bar{D}(a, \frac{r}{2}) \subset D(a, r)$ que es un compacto de Ω y por hipótesis g_n convergirá uniformemente.

Como a era un punto cualquiera hemos probado que para todo punto existe un entorno en que g_n converge uniformemente.

5.2. Condición necesaria

Sea K un compacto cualquiera de Ω. Como para cada $a \in K$ existe un entorno de a en el que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g. Podemos escribir K como unión de abiertos en los que converge uniformemente.

$$K = \cup_{a \in K} D(a, r_a)$$

Donde $D(a, r_a)$ es un entorno abierto en el que hay convergencia uniformemente.

Como además estamos en un compacto existirá un subrecubrimiento finito, $\Lambda \subset \Omega$ finito.

$$K \subset \cup_{a \in \Lambda} D(a, r_a)$$

Como para cada entorno del subrecubrimiento converge uniformemente tenemos que sea cual sea el $a \in \Lambda$ existirá $n_0^a \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n^a > n_0^a$ se cumple que

$$|g_{n^a}(z) - g(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in D(a, r_a)$$

Como Λ es finito existe n_0, el máximo de los n_0^a anteriores. Entontes concluiremos con que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 para que sea cual seal el

$n > n_0$ natura se cumpla que

$$|g_n(z) - g(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in \cup_{a \in \Lambda} D(a, r_a) \supseteq K$$

Es decir, que hay convergencia uniforme en ese compacto k. Con lo que hemos probado lo que buscábamos.