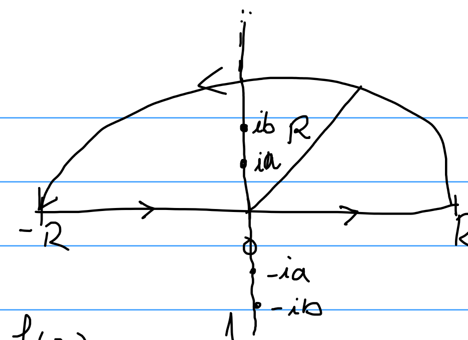
Ejemplo   Sup. que $a \neq b$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$$

$\Omega = \mathbb{C}$, $A = \{\pm ia, \pm ib\}$ $f : \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}$

$f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus A)$. Consideramos el camino cerrado $\Gamma_R = \sigma_R + \gamma_R$ donde

$\sigma_R : [-R, R] \to \mathbb{C}$ $\gamma_R : [0, \pi] \to \mathbb{C}$

$\sigma_R(x) = x$ $\gamma_R(t) = Re^{it}$

$\sigma_R'(x) = 1$

Tomamos a partir de ahora $R > \max\{|a|, |b|\}$. Para estos valores de R el camino cerrado Γ_R está en $\Omega\setminus A$ y además Γ_R es nulhomólogo con respecto a $\Omega = \mathbb{C}$ (trivialmente porque todos los ciclos son nulhomólogos con respecto a $\mathbb{C}$)

$\forall R > \max\{|a|, |b|\}$

$f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus A)$
A finito $\Rightarrow A' \cap \Omega = \emptyset$
Γ_R es un ciclo en $\Omega\setminus A$
Γ_R es nulhomólogo con respecto a Ω

$\xRightarrow{\text{Teorema de los residuos}}$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\overset{1}{\operatorname{Ind}_{\Gamma_R}(ia)} \operatorname{Res}(f(z), ia) + \overset{1}{\operatorname{Ind}_{\Gamma_R}(ib)} \operatorname{Res}(f(z), ib) \right)$$

$$= \underbrace{2\pi i \left[\operatorname{Res}(f(z), ia) + \operatorname{Res}(f(z), ib) \right]}_{\text{¡No depende de } R!}$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \boxed{\int_{\sigma_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \underbrace{2\pi i \left[\operatorname{Res}(f(z), ia) + \operatorname{Res}(f(z), ib) \right]}_{\text{No depende de } R}} \quad \forall R > \max\{|a|, |b|\} \quad (1)$$

$$\int_{\sigma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} \quad \text{luego} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$$

Tomamos límite con $R \to \infty$ en (1) y obtenemos que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz}_{=0} = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f(z), ia) + \operatorname{Res}(f(z), ib) \right]}$$

Veamos que $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$:

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \le \overset{\pi_i R}{\ell(\gamma_R)} \cdot \frac{1}{(R^2-|a|^2)(R^2-|b|^2)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

si $z \in \gamma_R^* \leadsto |z| = R$

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+a^2||z^2+b^2|^2} \le \frac{1}{(R^2-|a|^2)(R^2-|b|^2)^2}$$

$$|z^2+a^2| \ge |z^2| - |a^2| = R^2 - |a|^2 > 0, \qquad |z^2+b^2| \ge R^2-|b|^2$$

Observación: Este procedimiento es válido para calcular integrales en $\mathbb{R}$ (entre $-\infty$ y $+\infty$) de funciones racionales verificando que el denominador no se anula en $\mathbb{R}$ y que el grado del denominador menos el grado del numerador es al menos 2.

Calculamos los residuos para obtener el valor de la integral:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2} = \frac{1}{(z+ia)(z-ia)(z+ib)^2(z-ib)^2}$$

f tiene un polo de orden 1 en ia:

$$\lim_{z\to ia} (z-ia)f(z) = \lim_{z\to ia} \frac{1}{(z+ia)(z^2+b^2)^2} = \frac{1}{2ia(b^2-a^2)^2} \neq 0 \Rightarrow f \text{ tiene}$$

un polo de orden 1 en ia y $\operatorname{Res}(f(z), ia) = \frac{1}{2ia(b^2-a^2)^2}$

f tiene un polo de orden 2 en ib:

$$\lim_{z\to ib} (z-ib)^2 f(z) = \lim_{z\to ib} \frac{1}{(z^2+a^2)(z+ib)^2} \neq 0$$

$$\operatorname{Res}(f(z), ib) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to ib} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-ib)^2 f(z)\right) = \lim_{z\to ib} \frac{-[2z(z+ib)^2 + 2(z+ib)(z^2+a^2)]}{(z^2+a^2)^2(z+ib)^4} = (*)$$

$k=2$

$$\left((z-ib)^2 f(z)\right)' = \left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z+ib)^2}\right)' = \frac{-[2z(z+ib)^2 + 2(z+ib)(z^2+a^2)]}{(z^2+a^2)^2(z+ib)^4}$$

$$(*) = -2\,\frac{-4ib^3 + 2ib(a^2-b^2)}{(b^2-a^2)^2\, 16b^4} = i\,\frac{2b^3 - b(a^2-b^2)}{(b^2-a^2)^2\, 4b^4} = i\,\frac{3b^2-a^2}{4(b^2-a^2)^2\, b^3}$$

Finalmente

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = 2\pi i\left[\frac{1}{2ia(b^2-a^2)^2} + i\,\frac{3b^2-a^2}{4(b^2-a^2)^2 b^3}\right]$$

$$=\pi\left[\frac{1}{a(b^2-a^2)^2} - \frac{(3b^2-a^2)}{2b^3(b^2-a^2)^2}\right] = \pi\,\frac{2b^3-(3b^2-a^2)a}{2ab^3(b^2-a^2)^2} =$$

$$=\pi\,\frac{2b^3-3ba^2+a^3}{2ab^3\underbrace{(b^2-a^2)^2}_{\parallel\ (b-a)^2(b+a)^2}} = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2}$$

$$2b^3-3ba^2+a^3 = (b-a)^2\cdot(a+2b)$$

Si $a=b$ tomamos $\{b_n\}\to a$ $\quad b_n\neq 0$ $\quad\forall n\in\mathbb{N}$

$$f_n(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b_n^2)^2} \qquad f(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{(x^2+a^2)^3}$$

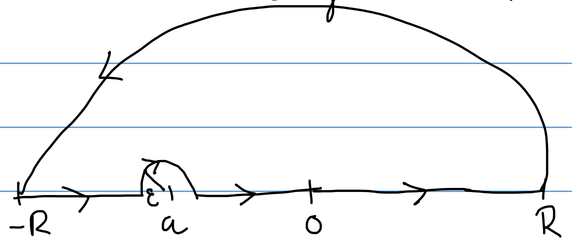
$\{f_n\}\longrightarrow f$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ luego

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$\parallel \leftarrow$ fla. que hemos obtenido

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(a+2b_n)}{2ab_n^3(a+b_n)} = \frac{\pi 3a}{8a^4\cdot a} = \boxed{\frac{\pi 3}{8a^4}}$$

*) Si el denominador se anula en $\mathbb{R}$ y es un polo de orden 1 se puede rodear a esas singularidades:



$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{y} \quad Q(a)=0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = -\pi i\,\mathrm{Res}(f(z),a)$$

Con $\gamma_\varepsilon = -$ semicircunferencia centrada en a y de radio ε

Proposición:

Sea $R>0$, $f\in \mathcal{H}(D(a,R)\setminus\{a\})$ con un polo de orden 1 en a. Para $0<\varepsilon<R$ consideramos el arco $\sigma_\varepsilon:[c,d]\to\mathbb{C}$, dado por $\sigma_\varepsilon(t)=a+\varepsilon e^{it}$.
Entonces $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma_\varepsilon} f(z)\,dz = i(d-c)\,\mathrm{Res}(f(z),a)$.

Ejercicio: