Algoritmi e Strutture Dati

Lezione 24

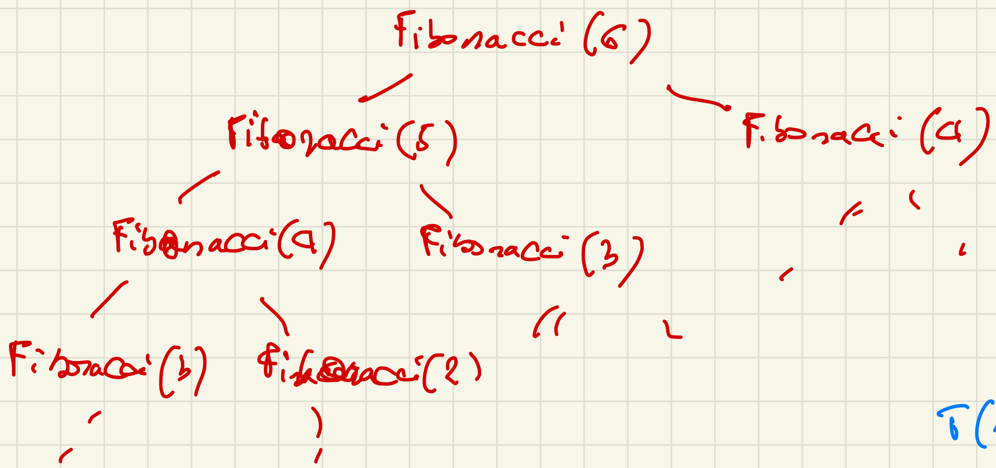
17 novembre 2025

Programmazione dinamica

Calcolo dei numeri di Fibonacci

$F_1 = F_2 = 1 \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geq 3$

```
ALGORITMO Fibonacci (intero n) → intero
    IF n=1 OR n=2 THEN RETURN 1
    ELSE RETURN Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2)
```



n° di linee di codice eseguite

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \text{ o } n=2 \\ 2 + T(n-1) + T(n-2) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$T(n) \cong 3F_n - 2 \simeq 3\phi^n$$

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ALGORITMO Fibonacci (intero n) → intero n

Sia Fib[1.. n] un array di interi

Fib[1] ← 1

Fib[2] ← 1

FOR i ← 3 TO n DO

    Fib[i] ← Fib[i-1] + Fib[i-2]

RETURN Fib[n]

(si può evitare l'array)

ESEMPIO: Cammini di valore minimo su matrici

1	3	8	5	17 19
4	2	7	6	21
2	1	5	1	11
9	8	2	3	

Problema

Data una matrice $n \times n$ di interi determinare un "cammino" dalla prima all'ultima colonna di valore minimo

"Cammino"

INIZIO: posizione qualunque della prima colonna

DA UNA POSIZIONE:

si può raggiungere la posizione nella colonna successiva:

- sulla riga sopra
- sulla stessa riga
- sulla riga sotto

FINE: posizione qualunque dell'ultima colonna

$$
\begin{matrix}
1 & 3 & 8 & 5 \\
4 & 2 & 7 & 6 \\
2 & 1 & 5 & 1 \\
9 & 8 & 2 & 3
\end{matrix}
$$

"valore" somma dei valori lungo il cammino

CAMMINO DI VALORE MINIMO SU MATRICI

Ricerca esaustiva: esamino tutti i possibili cammini

Quanti sono?

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$n = 1$ 1

$n = 2$ 4

⋮

$n > 2$

1^a colonna: n scelte

2^a colonna: almeno 2 scelte

3^a " " " "

⋮

n colonna "

almeno $n \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = n2^{n-1}$ scelte

\# exp di scelte!

CAMMINO DI VALORE MINIMO SU MATRICI

Programmazione dinamica

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{matrix}$$

P: problema del cammino di valore minimo in una matrice $n \times n$

Per $i, j = 1, \dots, n$ considero il problema:

Sottoproblema

$P(i,j)$: trovare il cammino di valore minimo che inizia nella colonna 1 e termina nella posizione (i,j)

La soluzione di P si ricava dalle soluzioni di

$P(1,n), P(2,n), \dots, P(n,n)$

CAMMINO DI VALORE MINIMO SU MATRICI: Programmazione dinamica

MATRICE C DEI RISULTATI DEI PROBLEMI $\mathcal{P}(i,j)$

$C[i,j]$ = valore cammino minimo che inizia nella colonna 1 e termina nella posizione (i,j)

IL VALORE DEL CAMMINO MINIMO SULLA MATRICE E'

$$\min \{ C[i,n] \mid i = 1, \dots, n \}$$

CALCOLO DI $C[i,j]$

valore cammino minimo che inizia nella colonna 1 e termina nella posizione (i,j)

1^a colonna

$$C[i,1] = M[i,1] \qquad i=1,\dots,n$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

input

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 15 \\ 4 & 3 & 10 & 14 \\ 2 & 3 & 8 & 6 \\ 9 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

j-esima colonna

$j>1$

$(i-1,j-1) \rightarrow$

$(i,j-1) \rightarrow$ $\boxed{}$ (i,j)

$(i+1,j-1) \rightarrow$

$$C[i,j] = M[i,j] + \min\{C[i-1,j-1],\ C[i,j-1],\ C[i+1,j-1]\}$$

se $i>1$ se $i<n$

sol: $\min\{C[i,n] \mid i=1,\dots,n\}$

```
ALGORITMO camminoMinimo(matrice M[1..n, 1..n]) → intero
    Sia C[1..n, 1..n] un matrice
    FOR i ← 1 TO n DO
    | C[i,1] ← M[i,1]

    FOR j ← 2 TO n DO
    |   FOR i ← 1 TO n DO
    |   |   min ← C[i, j-1]
    |   |   IF i>1 AND C[i-1, j-1] < min THEN min ← C[i-1, j-1]
    |   |   IF i<n AND C[i+1, j-1] < min THEN min ← C[i+1, j-1]
    |   |   C[i,j] ← M[i,j] + min

    min ← C[1,n]
    FOR i ← 2 TO n DO
    |   IF C[i,n] < min THEN
    |   |   min ← C[i,n]

    RETURN min
```

$C[i,1] = M[i,1] \quad i = 1, \dots, n$

$O(n)$

$C[i,j] = M[i,j] + \min\{C[i-1,j-1], C[i,j-1], C[i+1,j-1]\}$

$O(n^2)$

$\min\{C[i,n] \mid i = 1, \dots, n\}$

$O(n)$

Tempo totale $O(n^2)$

PROGRAMMAZIONE DINAMICA

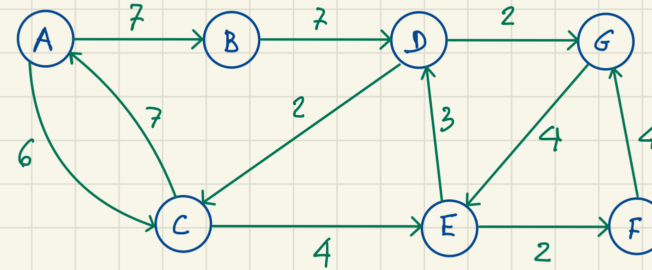
Soluzione di un problema a partire da sottoproblemi più semplici

- Si individuano sottoproblemi del problema dato
- Si risolvono i sottoproblemi a partire dai più semplici
  - sottoproblemi "base": soluzione immediata → memorizzata in tabella
  - altri sottoproblemi: soluzione ottenuta utilizzando le soluzioni di sottoproblemi risolti in precedenza → consultazione e aggiornamento tabella
- Soluzione finale: ricavata dalle soluzioni dei sottoproblemi → funzione degli elementi della tabella

Cammini minimi

$G = (V, E)$ grafo orientato

$w : E \to \mathbb{R}$ funzione peso



$\pi = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ cammino da v_0 a v_k

$$w(\pi) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$ peso del cammino

A, B, D, G 16

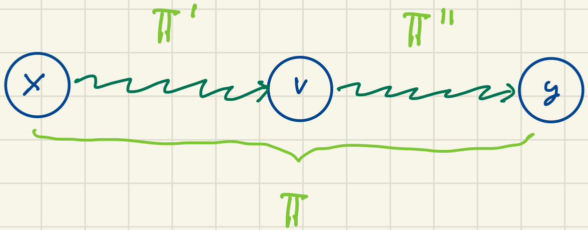
A C E F G 16

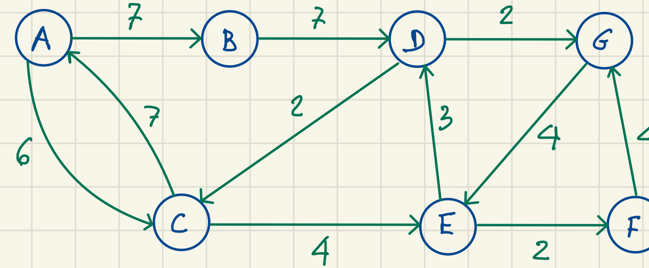
A C E D G 15

π è un cammino MINIMO da x a y se:

- π è un cammino da x a y
- $\forall \pi'$ cammino da x a y: $w(\pi) \le w(\pi')$

CAMMINI MINIMI: proprietà



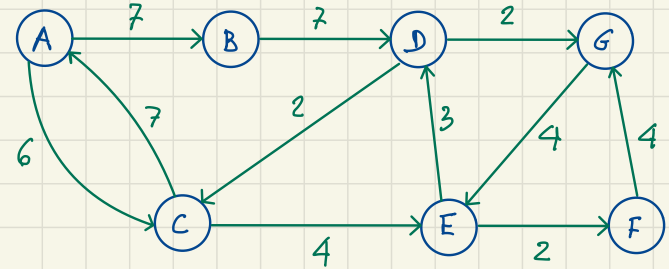


A C E D G

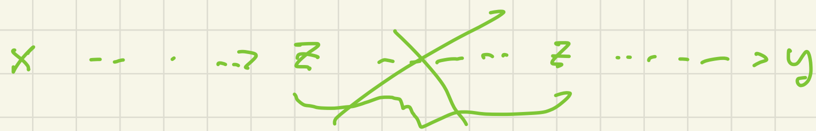
Se π è un cammino
da x a y allora
π' è un cammino minimo da x a v
π'' " " " " " v a y

PRINCIPIO DI OTTIMALITA'

CAMMINI MINIMI: proprietà



- Se tutti i pesi sono positivi allora ogni cammino minimo è un cammino semplice

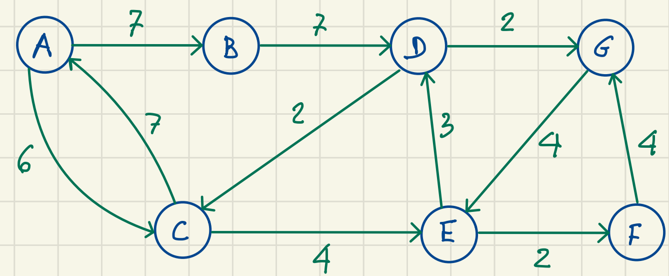


- Se ci sono pesi negativi ma non ci sono cicli negativi e tra x e y esiste un cammino allora tra x e y " " " minimo semplice

GRAFI PESATI: alcune rappresentazioni

LISTA DI ADIACENZA CON PESI

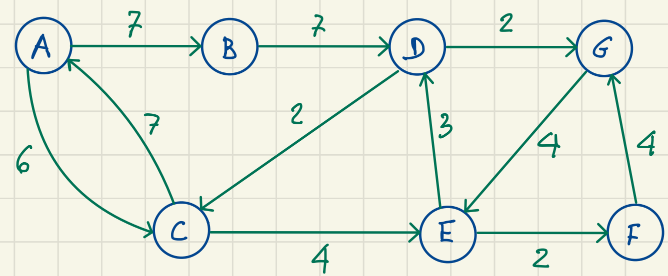
A → B 7 → C 6
B → D 7
C → A 7 → E 4
D → C 2 → G 2
E → D 3 → F 2
F → G 4
G → E 4



GRAFI PESATI: alcune rappresentazioni

MATRICE DEI PESI

	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	7	6	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	7	∞	∞	∞
C	7	∞	∞	∞	4	∞	∞
D	∞	∞	2	∞	∞	∞	2
E	∞	∞	∞	3	∞	2	∞
F	∞	∞	∞	∞	∞	∞	4
G	∞	∞	∞	∞	4	∞	∞

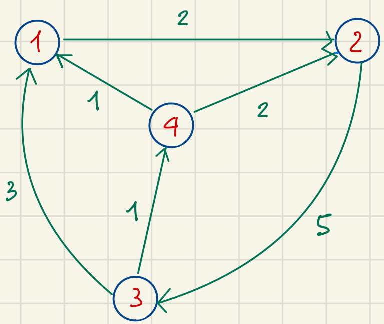


PROBLEMI "CAMMINI MINIMI"

- Trovare il cammino minimo tra due vertici
- Trovare i cammini minimi tra un vertice s e tutti gli altri
- Trovare i cammini minimi tra ogni coppia di vertici

Cammini minimi tra tutte le coppie di vertici

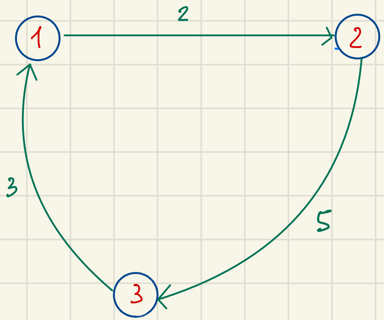
input



output

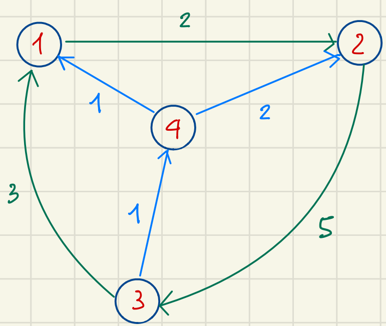
da \ a	1	2	3	4
1	0	2	7	8
2	7	0	5	6
3	2	3	0	1
4	1	2	7	0

matrice delle "distanze"



de \ a	1	2	3
1	0	2	7
2	8	0	5
3	3	5	0

$2 \xrightarrow{6} 4 \xrightarrow{1} 1$



de \ a	1	2	3	4
1	0	2	7	8
2	7	0	5	6
3	2	3	0	1
4	1	2	7	0

CAMMINI MINIMI TRA TUTTE LE COPPIE DI VERTICI:

L'ALGORITMO DI Floyd & Warshall

Supponiamo $V = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$

d_{ij} = peso del cammino minimo da v_i a v_j

"lunghezza"

Problema P: determinare d_{ij} $i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n$

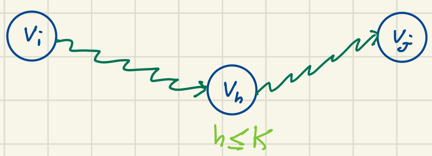
Problema $\mathcal{P}$: determinare d_{ij} $(i=1,\dots,n,\ \ j=1,\dots,n)$

PROGRAMMAZIONE DINAMICA

Per $k=0,\dots,n$ considero il problema vincolato:

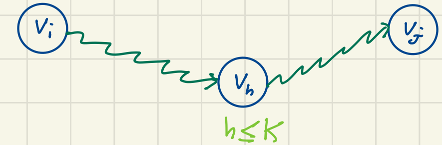
Problema $\mathcal{P}(k)$: determinare $d_{ij}^{(k)}$ $(i=1,\dots,n,\ \ j=1,\dots,n)$

$d_{ij}^{(k)}$ = peso del cammino minimo da v_i a v_j che nei passi intermedi visita esclusivamente vertici di indice $\leq k$



Allora $\mathcal{P} = \mathcal{P}(n)$

Come risolvere $P(k)$?

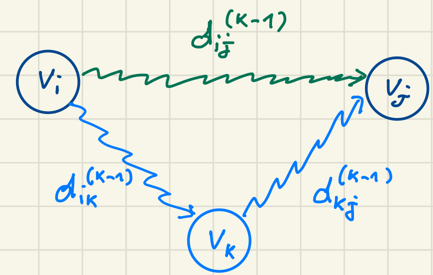


$\boxed{k=0}$ → vietati i vertici intermedi

$$d_{ij}^{(0)} = \begin{cases} w(v_i, v_j) & \text{se } \exists (v_i, v_j) \in E \text{ e } i \neq j \\ 0 & \text{se } v_i = v_j \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\boxed{k>0}$

$$d_{ij}^{(k)} = \min \left\{ d_{ij}^{(k-1)}, \; d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \right\}$$



$d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} < d_{ij}^{(k-1)}$?

ALGORITMO FloydWarshall (Grafo G) → Matrice

Siano $D_0[1..n, 1..n], \dots, D_n[1..n, 1..n]$ matrici

```
FOR i ← 1 TO n DO
    FOR j ← 1 TO n DO
        IF i = j THEN D_0[i,j] ← 0
        ELSE IF (v_i, v_j) ∈ E THEN D_0[i,j] ← ω(v_i, v_j)
        ELSE D_0[i,j] ← ∞
```

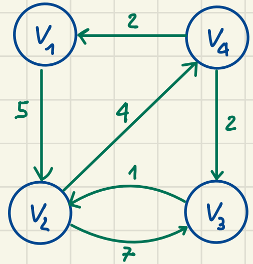
$$d_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \omega(v_i, v_j) & \text{se } (v_i, v_j) \in E \text{ e } v_i \neq v_j \\ 0 & \text{se } v_i = v_j \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

```
FOR k ← 1 TO n DO
    FOR i ← 1 TO n DO
        FOR j ← 1 TO n DO
            IF D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j] < D_{k-1}[i,j] THEN
                D_k[i,j] ← D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]
            ELSE
                D_k[i,j] ← D_{k-1}[i,j]
```

$$d_{ij}^{(k)} = \min\left\{ d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \right\}$$

RETURN D_n

Esempio



$$M = \begin{pmatrix} \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 4 \\ \infty & 1 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

matrice dei pesi

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 7 & 4 \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ 2 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

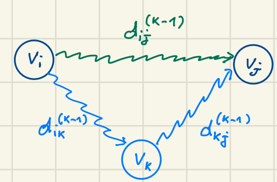
$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 7 & 4 \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ 2 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 12 & 9 \\ \infty & 0 & 7 & 4 \\ \infty & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 12 & 9 \\ \infty & 0 & 7 & 4 \\ \infty & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 11 & 9 \\ 6 & 0 & 6 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_{ij}^{(0)} = \begin{cases} w(v_i, v_j) & \text{se } (v_i, v_j) \in E \text{ e } v_i \neq v_j \\ 0 & \text{se } v_i = v_j \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$d_{ij}^{(k)} = \min\{ d_{ij}^{(k-1)},\ d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \}$$