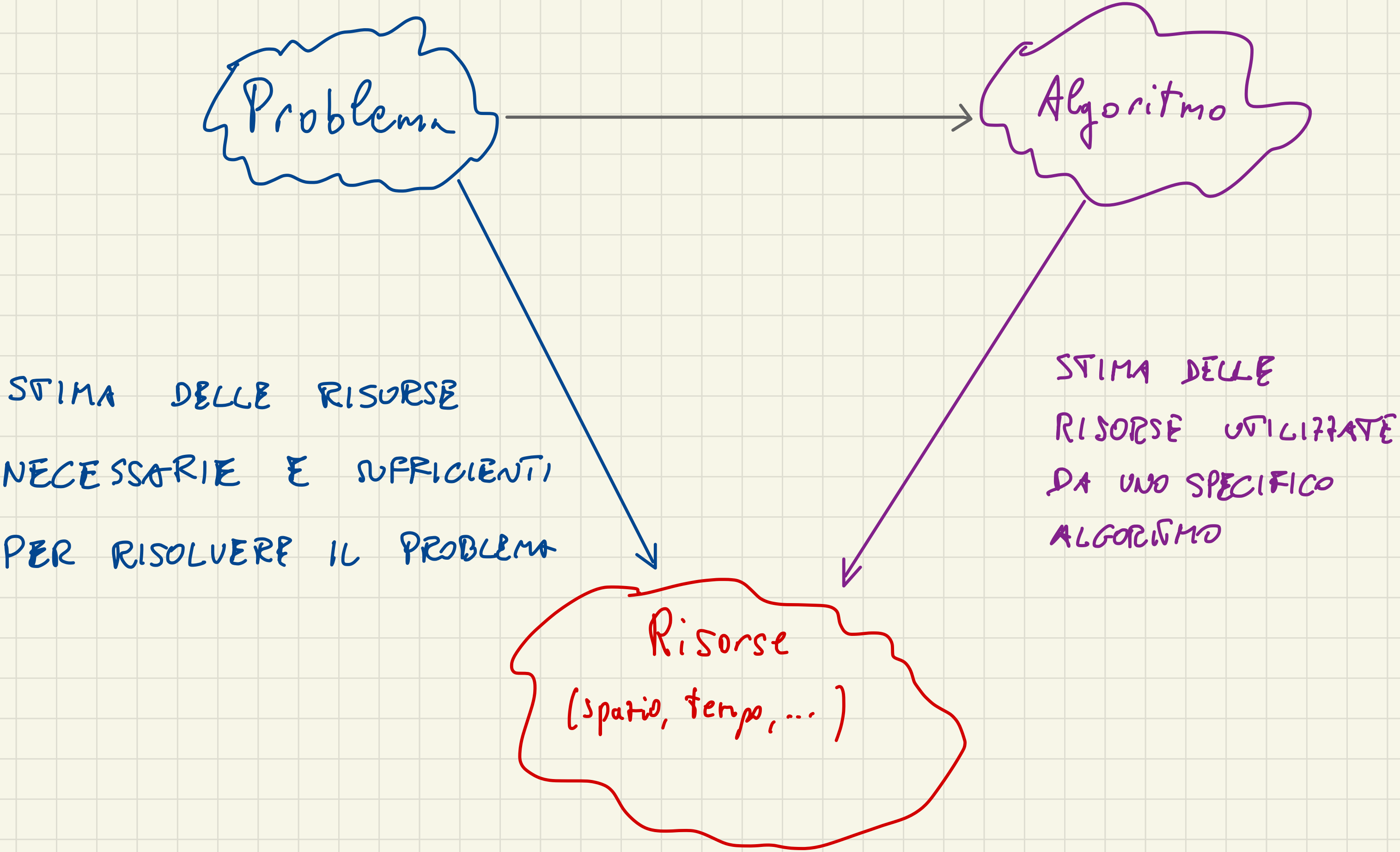
Algoritmi e Strutture Dati

Lezione 32

5 dicembre 2025


Problema
Algoritmo
Risorse
(spazio, tempo, ...)
STIMA DELLE RISORSE NECESSARIE E SUFFICIENTI PER RISOLVERE IL PROBLEMA
STIMA DELLE RISORSE UTILIZZATE DA UNO SPECIFICO ALGORITMO

COMPLESSITA' COMPUTAZIONALE

Classificazione dei problemi in base alle risorse utilizzate per la loro soluzione

CLASSE DI COMPLESSITA'

Insieme di problemi che possono essere risolti utilizzando la stessa quantità di una determinata risorsa

PROBLEMA

$$\Pi \subseteq I \times S$$

universo delle possibili istanze (input)

universo delle soluzioni

$(x, s) \in \Pi$ sse s è una soluzione di Π su input x

TIPOLOGIE DI PROBLEMI

PROBLEMA $\Pi \subseteq I \times S$

universo delle possibili istanze (input)

universo delle soluzioni

$(x,s) \in \Pi$ sse s è una soluzione di Π su input x

- **RICERCA**

Data $x \in I$ trovare $s \in S$ t.c. $(x,s) \in \Pi$

- **OTTIMIZZAZIONE**

Data $x \in I$ trovare $s \in S$ t.c. $(x,s) \in \Pi$ che soddisfi un criterio di ottimalità fissato (es min / max)

- **DECISIONE** $S = \{0,1\}$ risposta binaria

$(x, 1) \in \Pi$ istanze positive

$(x, 0) \in \Pi$ istanze negative

NO CONTRADDIZIONI

$\Pi(x) = 1$

$\Pi(x) = 0$

ALBERO RICOPRENTE

I = grafi non orientati

S = alberi

$(x,s) \in \Pi$ sse s è un albero ricoprente per il grafo x

← problema di ricerca

ALBERO RICOPRENTE MINIMO

I = grafi non orientati pesati S = alberi

$(x,s) \in \Pi$ sse s è un albero ricoprente per il grafo x

MINIMO: tra tutti gli alberi s t.c. $(x,s) \in \Pi$ cerchiamo

s^* t.c. $\text{peso}(s^*) \leq \text{peso}(s)$ ← problema di ottimizzazione

ALBERO RICOPRENTE DI PESO LIMITATO

I = grafi non orientati pesati $\times \mathbb{N}$

$S = \{0,1\}$

problema di decisione

$((x,k),1) \in \Pi$ sse il grafo x ha un albero ricoprente di peso $\leq k$

PROBLEMI DI DECISIONE: alcune classi

$$P = \bigcup_{c=0}^{\infty} \mathrm{TIME}(n^c)$$ tempo polinomiale

$$\mathrm{PSPACE} = \bigcup_{c=0}^{\infty} \mathrm{SPACE}(n^c)$$ spazio polinomiale

$$\mathrm{EXPTIME} = \bigcup_{c=0}^{\infty} \mathrm{TIME}(2^{n^c})$$ tempo esponenziale

$$P \subseteq \mathrm{EXPTIME}$$

RELAZIONI SPAZIO / TEMPO

- In tempo t quanto spazio riusciamo a utilizzare?

→ ogni istruzione macchina utilizza al max k celle, con k fissato

→ # di celle di memoria utilizzabili in tempo t è $\leq kt$

Se tempo polinomiale → spazio polinomiale

tempo $f(n)$, spazio $\leq k f(n)$

$P \subseteq PSPACE$

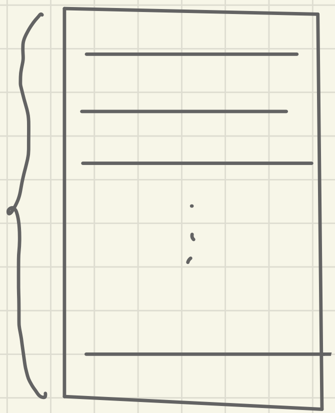
RELAZIONI SPAZIO / TEMPO

- In spazio s quanto tempo posso utilizzare senza entrare in loop?

```
x, y, z boolean
while (x v y ≠ z) {

}
```

s celle
↓
k bit ciascuna



Programma P formato da p istruzioni

→ se eseguo la stessa istruzione con lo stesso contenuto della memoria → loop infinito

$(2^k)^s = 2^{k \cdot s}$ possibili contenuti della memoria

Se $t > 2^{k \cdot s} \cdot p$ allora loop infinito $\Rightarrow$ Programmi che terminano: $t \leq 2^{k \cdot s} \cdot p$

$2^{k \cdot s}$: possibili contenuti della memoria

p: possibili istruzioni

SPAZIO poly $\Rightarrow$ TEMPO al più EXP

PSPACE $\subseteq$ EXPTIME

$$P \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME$$

almeno una delle due è un'inclusione propria

$$P \subset EXPTIME$$

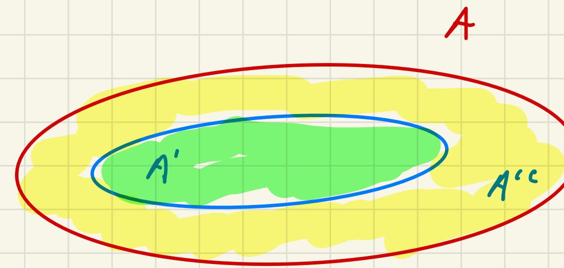
inclusione propria

Problema PARTIZIONE

Istanza Insieme finito A di oggetti

Fz peso $s: A \to \mathbb{N}$

Questione $\exists A' \subseteq A$ t.c. $\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A \setminus A'} s(a)$?



22 1 7 12 16

30 44 56 22 15 19 38 77 29

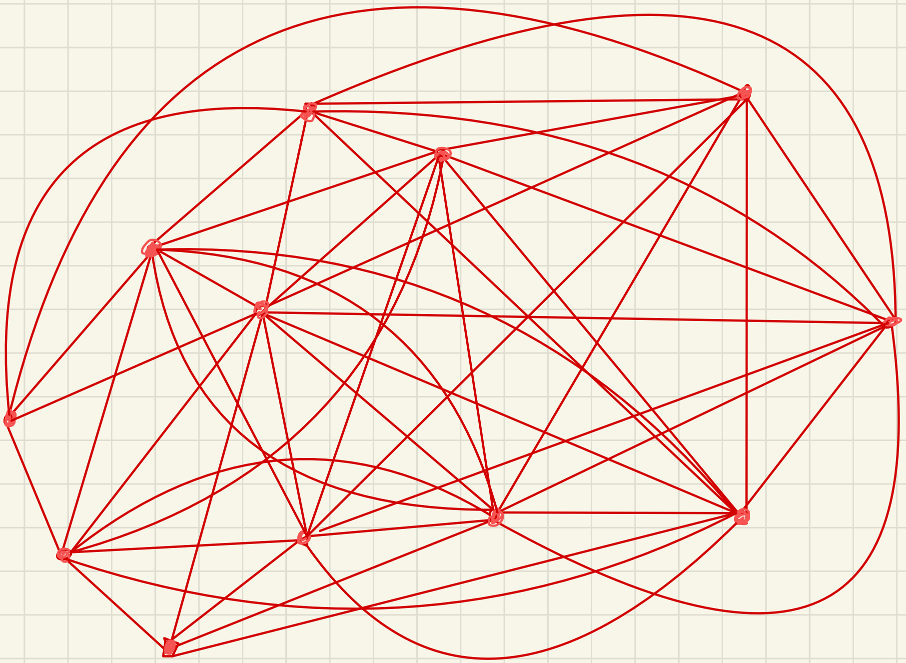
Problema CLIQUE

$\binom{n}{k} \approx n^k$

Istanza Grafo non orientato $G = (V, E)$

Intero $K \geq 0$

Questione $\exists$ sottografo completo di G con K vertici?



$K = 7$?

FORMULE BOOLEANE in forma normale congiuntiva

- V insieme finito di variabili $\qquad x, y, z, \ldots$
- LETTERALE variabile o variabile negata $\qquad x \quad \bar{x}$
- CLAUSOLA disgiunzione di letterali $\qquad x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$

  disgiunzione → OR
- FORMULA congiunzione di clausole

  congiunzione → AND

$$\phi(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z})$$

- ASSEGNAMENTO $f: V \to \{0,1\}$

  $\phi(f)$ valore della formula f assegnando a ogni variabile x il valore $f(x)$

$f(x) = 0$
$f(y) = 1$ $\quad f(z) = 1 \qquad \phi(f) = 1$

Problema SODDISFACIBILITA' (SODD)

<u>Istanza</u> Formula booleana ϕ in forma normale congiuntiva con insieme di variabili V

<u>Questione</u> $\exists$ un assegnamento alle variabili in V che rende vera ϕ, cioè t.c. $\phi(f)=1$?

Esempio

$$\phi = (x \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z})$$

	f
x	1
y	1
z	0

$\phi(f) = 1$ $\quad$ ϕ è soddisfacibile

Esempio

$$\phi = (x \vee \bar{y}) \wedge \bar{x} \wedge y$$

x	y	
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Esempio

$$\phi = (x \vee \bar{y} \vee z \vee w) \wedge (\bar{z} \vee w \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{w} \vee \bar{z})$$

x	1
y	0
w	1
z	0

ϕ è SODDISFACIBILE

SODD

- $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ formula con n variabili
- Per decidere se ϕ è soddisfacibile, proviamo tutti i possibili assegnamenti di valori alle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$

#assegnamenti possibili 2^n

Tempo $O(2^n)$

SODD $\in$ EXPTIME

ALGORITMI NON DETERMINISTICI

- ISTRUZIONE indovina $b \in \{0,1\}$
- TRA LE POSSIBILI SCELTE L'ALGORITMO INDOVINA SEMPRE QUELLA "GIUSTA" (se c'è)

ALGORITMO sodd (Formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$) $\to$ boolean

FOR $i \leftarrow 1$ TO n DO

$z_i \leftarrow$ indovina un valore in $\{0, 1\}$

$r \leftarrow \phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$

RETURN r

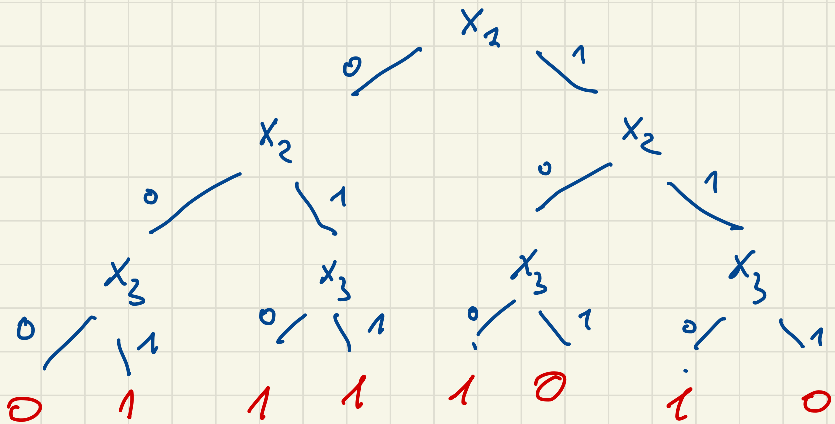
Esempio

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$$

ALGORITMO sodd (Formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$) $\longrightarrow$ boolean

indovina

```
FOR i ← 1 TO n DO
    z_i ← indovina un valore in {0, 1}
r ← φ(z_1, z_2, ..., z_n)   ← verifica
RETURN r
```



← albero di computazione

CLASSE NP

NP = Classe dei problemi di decisione risolubili in tempo polinomiale da algoritmi nondeterministici

= Classe dei problemi di decisione con certificati verificabili in tempo polinomiale

NP

nondeterministico

polinomiale

SODD $\in$ NP

Problema PARTIZIONE

Istanza Insieme finito A di oggetti

Fz peso $s: A \to \mathbb{N}$

Questione $\exists A' \subseteq A$ t.c. $\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A \setminus A'} s(a)$?

Problema PARTIZIONE

Istanza: Insieme finito A di oggetti

Fz peso $s: A \to \mathbb{N}$

Questione: $\exists A' \subseteq A$ t.c. $\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A \setminus A'} s(a)$?

ALGORITMO partizione (Array S[1..n]) → boolean

Sia b[1..n] un array di {0, 1}

FOR i ← 1 TO n DO

b[i] ← indovina un valore in {0, 1}

→ indovina

sommaScelti ← 0

sommaAltri ← 0

FOR i ← 1 TO n DO

IF b[i] = 1 THEN sommaScelti ← sommaScelti + S[i]

ELSE sommaAltri ← sommaAltri + S[i]

IF sommaScelti = sommaAltri THEN RETURN true

ELSE RETURN false

verifica

PARTIZIONE ∈ NP

Problema CLIQUE

<u>Istanza</u> Grafo non orientato $G = (V, E)$

Intero $K \geq 0$

<u>Questione</u> $\exists$ sottografo completo di G con K vertici?

ALGORITMO clique (Grafo $G=(V,E)$, intero K) $\rightarrow$ boolean

```
V' ← ∅
FOR EACH v ∈ V DO
    b ← indovina un valore in {0,1}
    IF b = 1 THEN V' ← V' ∪ {v}
IF #V' ≠ K THEN RETURN false
risposta ← true
FOR EACH v ∈ V' DO
    FOR EACH u ∈ V' DO
        IF u ≠ v AND (u,v) ∉ E THEN
            risposta ← false
RETURN risposta
```

indovina

verifica

Problema CLIQUE

<u>Istanza</u> Grafo non orientato $G=(V,E)$

Intero $K \geq 0$

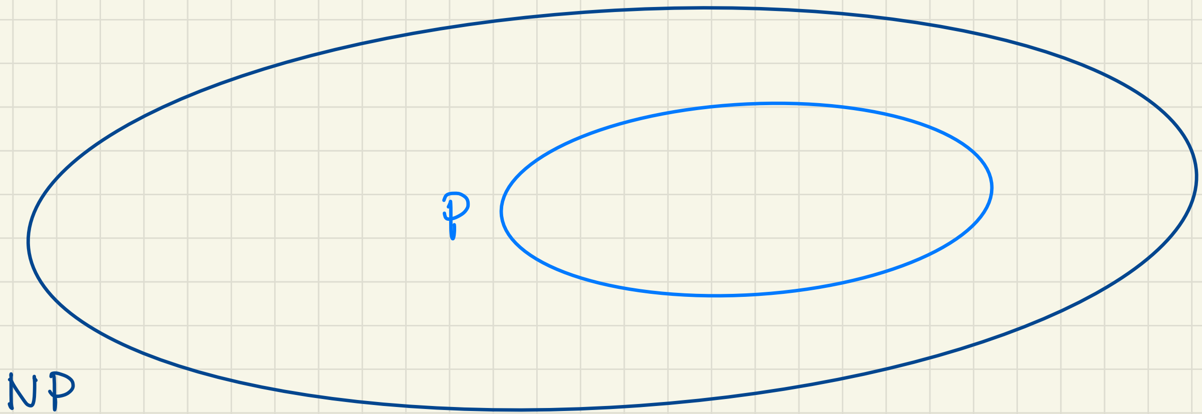
<u>Questione</u> $\exists$ sottografo completo di G con K vertici?

CLIQUE $\in$ NP

PROBLEMI NP

ALGORITMO
- FASE NON DETERMINISTICA — costruzione del certificato
- FASE DETERMINISTICA — verifica del certificato in tempo polinomiale

$$P \subseteq NP$$



$P \neq NP$?

Problem: NP-complete