Lógica de Primeira Ordem

Capítulo 8

Sumário

- Necessidade da Lógica de Primeira Ordem (LPO)
- Sintaxe e Semântica da LPO
- Uso da LPO
- Mundo do Wumpus em LPO
- Engenharia do Conhecimento em LPO

Lógica proposicional: revisão

- Lógica proposicional é uma lógica muito simples

- Sintaxe: símbolos proposicionais S, S_1, S_2, etc representam factos e são frases da linguagem

  – Se S é uma frase, $\neg S$ é uma frase (negação)
  – Se S_1 e S_2 são frases, $S_1 \wedge S_2$ é uma frase (conjunção)
  – Se S_1 e S_2 são frases, $S_1 \vee S_2$ é uma frase (disjunção)
  – Se S_1 e S_2 são frases, $S_1 \Rightarrow S_2$ é uma frase (implicação)
  – Se S_1 e S_2 são frases, $S_1 \Leftrightarrow S_2$ é uma frase (equivalência)

Lógica proposicional: revisão

- Semântica: Cada modelo atribui verdadeiro/falso a cada símbolo proposicional
- Regras para avaliar se um modelo é verdadeiro ou falso:
  - $\neg S$ é verdadeiro sse S é falso
  - $S_1 \wedge S_2$ é verdadeiro sse S_1 é verdadeiro e S_2 é verdadeiro
  - $S_1 \vee S_2$ é verdadeiro sse S_1 é verdadeiro ou S_2 é verdadeiro
  - $S_1 \Rightarrow S_2$ é verdadeiro sse S_1 é falso ou S_2 é verdadeiro, i.e. é falso sse S_1 é verdadeiro e S_2 é falso
  - $S_1 \Leftrightarrow S_2$ é verdadeiro sse $S_1 \Rightarrow S_2$ é verdadeiro e $S_2 \Rightarrow S_1$ é verdadeiro

Prós e Contras da Lógica Proposicional

☺ Lógica proposicional é declarativa

☺ Lógica proposicional permite informação parcial / disjuntiva / negada

– Ao contrário de muitas estruturas de dados e bases de dados

☺ Lógica proposicional é composta

– Significado de $P \wedge Q$ é derivado do significado de P e de Q

☺ Significado em lógica proposicional é independente do contexto

– Ao contrário da linguagem natural, onde o significado depende do contexto

☹ Lógica proposicional tem poder de expressividade limitado

– Ao contrário da linguagem natural

– E.g., não se pode dizer "*todas as pessoas são simpáticas*"

- Excepto se escrevermos uma frase para cada pessoa

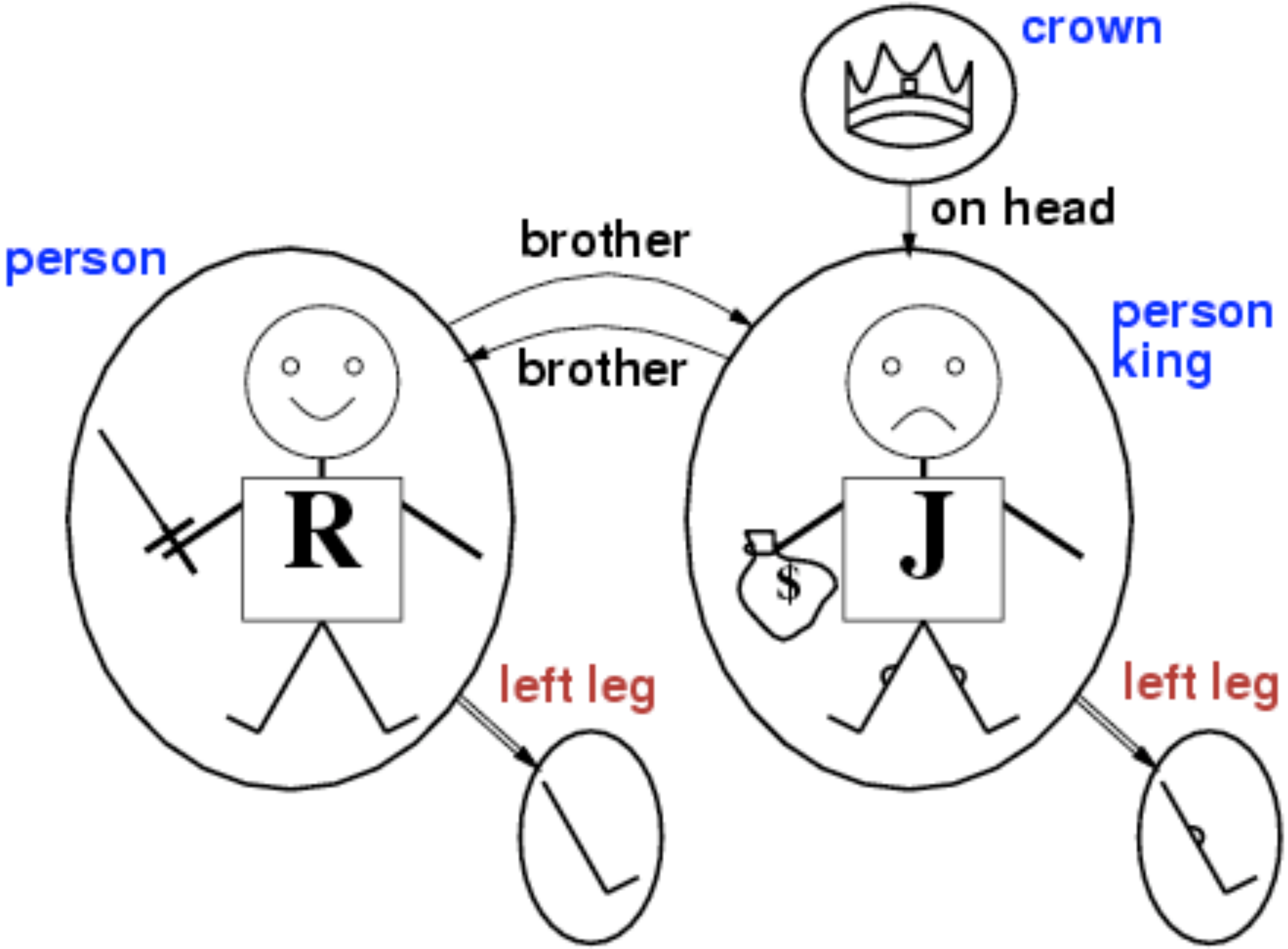
Lógica de Primeira Ordem

- Enquanto que a lógica proposicional assume que o mundo contém factos
- A lógica de primeira ordem (tal como a linguagem natural) assume que o mundo contém:
  - Objectos: pessoas, casas, números, cores, jogos de baseball, guerras, …
  - Relações: vermelho, redondo, par, irmão de, maior do que, parte de, está entre, …
  - Funções: pai de, melhor amigo, incremento, soma, …

Sintaxe LPO: elementos básicos

- Constantes   ReiJoao, 2, ...
- Predicados   Irmaos, >,...
- Funções   Raiz, PernaEsquerdaDe,...
- Variáveis   x, y, a, b,...
- Conectivas $\neg$, $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$
- Igualdade   =
- Quantificadores $\forall$, $\exists$

Modelos para LPO: Exemplo



Modelos são mundos possíveis

Modelos para LPO: Exemplo

- Constantes
  - RicardoCoracaoLeao, ReiJoao, PernaEsqDeRicardoCoracaoLeao, PernaEsqDeReiJoao, Coroa
- Predicados

  Aridade=2
  - Irmãos: (RicardoCoracaoLeao, ReiJoao), (ReiJoao, RicardoCoracaoLeao)
  - NaCabeca: (Coroa, ReiJoao)

  Aridade=1 (propriedades)
  - Pessoa: (RicardoCoracaoLeao),(ReiJoao)
  - Rei: (ReiJoao)
  - ECoroa: (Coroa)
- Funções
  - PernaEsqDe: (RicardoCoracaoLeao,PernaEsqDeRicardoCoracaoLeao), (ReiJoao,PernaEsqDeReiJoao), (PernaEsqDeRicardoCoracaoLeao,INV), (PernaEsqDeReiJoao,INV), (Coroa,INV)

  INV é uma perna “invisível”!

  Funções em LPO são totais, i.e. estão definidas para todos os objectos

Frases Atómicas

FraseAtómica →
Predicado(Termo,...) | *Termo = Termo*

Termo → *Função(Termo,…)* | *Constante* | *Variável*

E.g.

- *PernaEsqDe(ReiJoao)*
- *Irmãos(ReiJoao,RicardoCoracaoLeao)*
- *>(Comprimento(PernaEsqDe(RicardoCoracaoLeao)), Comprimento(PernaEsqDe(ReiJoao)))*
- *Pai(ReiJoao) = Henrique*

Frases Complexas

FraseComplexa $\rightarrow$

FraseAtómica |

(FraseComplexa Conectiva FraseComplexa) |

Quantificador Variável,… FraseComplexa |

$\neg$ FraseComplexa

Conectiva $\rightarrow \wedge \mid \vee \mid \Rightarrow \mid \Leftrightarrow$

Quantificador $\rightarrow \forall \mid \exists$

Frases Complexas

Exemplos

- $Irmãos(ReiJoao,RicardoCoracaoLeao) \Rightarrow Irmãos(RicardoCoracaoLeao,ReiJoao)$

- $\neg Irmãos(PernaEsqDe(RicardoCoracaoLeao), ReiJoao)$

- $\forall x,y\ Irmãos(x,y) \Rightarrow Irmãos(y,x)$

Verdade em LPO

- Frases são verdadeiras em relação a um modelo/conceptualização e uma interpretação

- Modelo contém objectos (elementos do domínio) e relações entre eles

- Interpretação especifica referências para

Símbolos de constante	→	objectos
Símbolos de predicado	→	relações
Símbolos de função	→	relações funcionais

- Uma frase atómica com a forma *predicado(termo*$_1$*,...,termo*$_n$*)* é verdadeira *sse* os objectos referidos por *termo*$_1$*,...,termo*$_n$ pertencem à relação referida pelo *predicado*

Quantificador Universal

- $\forall$<*variáveis*> <*frase*>

Todos os reis são pessoas:
$\forall x\ Rei(x) \Rightarrow Pessoa(x)$

- $\forall x$ *P* é verdadeiro num modelo *m* sse *P* é verdadeiro para *x* em que x são todos os objectos existente no modelo *m*

- Por outras palavras, é equivalente à conjunção de instanciações de *P*

  Rei(ReiJoao) ⇒ Pessoa(ReiJoao)
  ∧ Rei(RicardoCoracaoLeao) ⇒ Pessoa(RicardoCoracaoLeao)
  ∧ Rei(PernaEsqDeRicardoCoracaoLeao) ⇒
  Pessoa(PernaEsqDeRicardoCoracaoLeao)
  ∧ ...

Erro comum a evitar

- Tipicamente, $\Rightarrow$ é a principal conectiva usada com $\forall$
- Erro comum: usar $\wedge$ como conectiva com $\forall$:

  $\forall x\ Rei(x) \wedge Pessoa(x)$

  significa “Todos são reis e são pessoas”

Quantificador Existencial

- ∃<*variáveis*> <*frase*>

- O Rei João tem uma coroa na cabeça:
- $\exists x$ ECoroa(x) ∧ NaCabeca(x,ReiJoao)

- $\exists x\ P$ é verdadeiro num modelo *m* sse *P* é verdadeiro para *x* em que *x* é um objecto existente no modelo *m*

- Por outras palavras, é equivalente à disjunção das instanciações de *P*

  ECoroa(ReiJoao) ∧ NaCabeca(ReiJoao,ReiJoao)
  ∨ ECoroa(RicardoCoracaoLeao) ∧ NaCabeca(RicardoCoracaoLeao,ReiJoao)
  ∨ ...
  ∨ ECoroa(Coroa) ∧ NaCabeca(Coroa,ReiJoao)
  ∨ ...

Outro erro comum a evitar

- Tipicamente, $\wedge$ é a principal conectiva usada com $\exists$
- Erro comum: usar $\Rightarrow$ como conectiva com $\exists$:

$$\exists x \text{ ECoroa}(x) \Rightarrow \text{NaCabeca}(x,\text{ReiJoao})$$

é verdadeiro se não existe nenhuma coroa!

Propriedades dos quantificadores

- $\forall x\ \forall y$ é o mesmo que $\forall y\ \forall x$
- $\exists x\ \exists y$ é o mesmo que $\exists y\ \exists x$

- $\exists x\ \forall y$ não é o mesmo que $\forall y\ \exists x$
- Exº para o domínio das pessoas:
  $\exists x\ \forall y$ Gosta(x,y)
  - "Existe alguém que gosta de todas as pessoas"

  $\forall y\ \exists x$ Gosta(x,y)
  - "Todas as pessoas têm alguém que gosta delas"

- Dualidade dos quantificadores: cada quantificador pode ser expresso usando o outro quantificador
  $\forall x$ Gosta(x,Gelado) $\neg\exists x\ \neg$Gosta(x,Gelado)
  $\exists x$ Gosta(x,Brócolos) $\neg\forall x\ \neg$Gosta(x,Brócolos)

Igualdade

- $termo_1 = termo_2$ é verdadeiro para uma dada interpretação se e só se $termo_1$ e $termo_2$ se referem ao mesmo objecto
  - Pai(ReiJoao) = Henrique

- E.g. para uma frase complexa

“Ricardo Coração de Leão tem pelo menos dois irmãos”

$\exists x,y$ Irmao(x,RicardoCoracaoLeao) $\wedge$
Irmao(y,RicardoCoracaoLeao) $\wedge \neg(x = y)$

Uso da LPO

Domínio do Reino:

- Irmãos são parentes

  $\forall x,y\ Irmãos(x,y) \Rightarrow Parentes(x,y)$

- A mãe é o elemento feminino dos progenitores

  $\forall m,c\ Mãe(c) = m \Leftrightarrow (Feminino(m) \wedge Progenitor(m,c))$

- Parentesco é uma relação simétrica

  $\forall x,y\ Parentes(x,y) \Leftrightarrow Parentes(y,x)$

Uso da LPO: n^{os} naturais
(Axiomas de Peano)

- NumNat(0)
- $\forall_n$ NumNat(n) $\Rightarrow$ NumNat(Suc(n))

- $\forall_n$ 0 $\neq$ Suc(n)
- $\forall_{m,n}$ m $\neq$ n $\Rightarrow$ Suc(m) $\neq$ Suc(n)

- $\forall_m$ NumNat(m) $\Rightarrow$ Soma(0,m) = m
- $\forall_{m,n}$ NumNat(m) $\wedge$ NumNat(n) $\Rightarrow$
  Soma(Suc(m),n) = Suc(Soma(m,n))

Uso da LPO: conjuntos

Domínio dos conjuntos:

- $\forall_c \ Conj(c) \Leftrightarrow (c = \{\}) \vee (\exists_{x,c2} \ Conj(c_2) \wedge c = \{x|c_2\})$
- $\neg \exists_{x,c} \ \{x|c\} = \{\}$
- $\forall_{x,c} \ x \in c \Leftrightarrow c = \{x|c\}$
- $\forall_{x,c} \ x \in c \Leftrightarrow [\ \exists_{y,c2} \ (c = \{y|c_2\} \wedge (x = y \vee x \in c_2))]$
- $\forall_{c1,c2} \ c_1 \subseteq c_2 \Leftrightarrow (\forall_x \ x \in c_1 \Rightarrow x \in c_2)$
- $\forall_{c1,c2} \ (c_1 = c_2) \Leftrightarrow (c_1 \subseteq c_2 \wedge c_2 \subseteq c_1)$
- $\forall_{x,c1,c2} \ x \in (c_1 \cap c_2) \Leftrightarrow (x \in c_1 \wedge x \in c_2)$
- $\forall_{x,c1,c2} \ x \in (c_1 \cup c_2) \Leftrightarrow (x \in c_1 \vee x \in c_2)$

- $\{x|c\}$ equivale a $\{x\} \cup c$

Exercícios

- Todos os As são Bs
- Nenhum A é B
- Alguns As são Bs
- Alguns As não são Bs
- Somente os As são Bs
- Nem todos os As são Bs
- Todos os As não são Bs

Exercícios

- Todos os As são Bs: $\forall_x A(x) \Rightarrow B(x)$
- Nenhum A é B: $\neg \exists_x A(x) \wedge B(x)$
- Alguns As são Bs: $\exists_x A(x) \wedge B(x)$
- Alguns As não são Bs: $\exists_x A(x) \wedge \neg B(x)$
- Somente os As são Bs: $\forall_x B(x) \Rightarrow A(x)$
- Nem todos os As são Bs
  - Alguns As não são Bs: $\exists_x A(x) \wedge \neg B(x)$
- Todos os As não são Bs
  - Nenhum A é B: $\neg \exists_x A(x) \wedge B(x)$

Exercícios

- Todas as pessoas gostam de outra pessoa
- Existe uma pessoa de quem todas as outras pessoas gostam
- O João frequenta a cadeira de IA ou PE (pode frequentar as duas)
- O Rui frequenta ou a cadeira de IA ou PE (somente uma das duas)
- A Ana tem no máximo uma irmã
- A Ana tem exactamente uma irmã
- A Ana tem pelo menos duas irmãs

Exercícios

- Todas as pessoas gostam de outra pessoa
  - $\forall_x$ Pessoa(x) $\Rightarrow$ $\exists_y$ Pessoa(y) $\wedge$ Gosta(x,y) $\wedge$ $\neg$(x=y)
- Existe uma pessoa de quem todas as outras pessoas gostam
  - $\exists_x$ Pessoa(x) $\wedge$ $\forall_y$ Pessoa(y) $\wedge$ $\neg$(x=y) $\Rightarrow$ Gosta(y,x)
- O João frequenta a cadeira de IA ou PE (pode frequentar as duas)
  - Frequenta(João,IA) $\vee$ Frequenta(João,PE)
- O Rui frequenta ou a cadeira de IA ou a cadeira de PE (somente uma das duas)
  - Frequenta(Rui,IA) $\Leftrightarrow$ $\neg$Frequenta(Rui,PE)

Exercícios

- A Ana tem no máximo uma irmã
  - $\forall_{x,y}$ Irmã(x,Ana) $\wedge$ Irmã(y,Ana) $\Rightarrow$ x=y
- A Ana tem exactamente uma irmã
  - $\exists_{x}$ Irmã(x,Ana) $\wedge$ $\forall_{y}$ Irmã(y,Ana) $\Rightarrow$ x=y
- A Ana tem pelo menos duas irmãs
  - $\exists_{x,y}$ Irmã(x,Ana) $\wedge$ Irmã(y,Ana) $\wedge$ $\neg$(x=y)

- Mais exercícios em

http://www-scf.usc.edu/~csci561a/docs/lecture/logic.pdf