Fundamentos Avanzados y Aplicaciones Multidisciplinarias del Álgebra Lineal

El álgebra lineal constituye el núcleo matemático de las ciencias exactas y la ingeniería moderna, proporcionando un lenguaje formal para describir y manipular estructuras en dimensiones arbitrarias. Este campo ha evolucionado desde la resolución de sistemas de ecuaciones lineales simples hasta convertirse en el marco axiomático esencial para teorías tan diversas como la mecánica cuántica, la relatividad general y la inteligencia artificial.[1] El estudio profundo del álgebra lineal no solo implica la comprensión de algoritmos computacionales, sino también una apreciación de la geometría subyacente que rige las transformaciones del espacio.[3]

Sistemas de Ecuaciones y el Álgebra de Matrices

La matriz es la unidad fundamental de representación en el álgebra lineal. Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede condensarse en la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es una matriz de coeficientes de tamaño $m \times n$, $\mathbf{x}$ es el vector de variables y $\mathbf{b}$ es el vector de términos constantes.[1] Esta representación no es meramente una conveniencia notacional, sino que permite tratar a toda una colección de datos como una única entidad matemática sujeta a operaciones algebraicas complejas.

Propiedades y Operatoria de Matrices

Las matrices operan bajo reglas que, aunque análogas a las de los escalares, presentan distinciones críticas. La adición de matrices es conmutativa y asociativa, requiriendo que ambas matrices tengan las mismas dimensiones.[5] Sin embargo, la multiplicación de matrices es fundamentalmente distinta: el producto AB solo está definido si el número de columnas de A es igual al número de filas de B, y en general, $AB \neq BA$.[6] Esta no conmutatividad refleja que el orden de las transformaciones espaciales altera el resultado final, un concepto que tiene profundas implicaciones en la física cuántica y la rotación de objetos en computación gráfica.[2]

La matriz identidad I actúa como el elemento neutro multiplicativo, permitiendo definir la inversa de una matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} =$. No todas las matrices cuadradas poseen una inversa; aquellas que no la tienen se denominan matrices singulares, lo que indica que la transformación que representan colapsa el espacio, perdiendo información de manera irreversible.[4]

Operación	Definición Matemática	Requisito de Dimensión
Suma ($A +$)	$c_{ij} = a_{ij} +$	Dimensiones idénticas ($m \times n$).[5]
Multiplicación Escalar	$c_{ij} = \alpha \cdot$	Cualquier dimensión.[10]
Producto Matricial (AB)	$c_{ij} =$	Col(A) = Fil(B).[6]
Traspuesta (A^T)	$a'_{ij} =$	$m \times n \to n \times$.[6]
Inversa (A^{-1})	$AA^{-1} =$	Cuadrada y $\det(A) \neq$.[9]

Determinantes y el Factor de Escala Espacial

El determinante es una función escalar que resume propiedades críticas de una matriz cuadrada. Geométricamente, el determinante de una matriz A representa el factor de escala por el cual la transformación asociada modifica el volumen de un objeto en el espacio.[4] Si el determinante es 2, el volumen se duplica; si es 0.5, el volumen se reduce a la mitad.[4] Un determinante de cero es la marca de una matriz singular, indicando que el objeto transformado ha sido "aplastado" en una dimensión inferior, resultando en un volumen nulo.[9]

El signo del determinante indica la preservación o inversión de la orientación del espacio. Un determinante negativo sugiere que la transformación incluye una reflexión, similar a mirar un objeto a través de un espejo.[4] Para una matriz de 2×2, el determinante se calcula como $ad - bc$, lo que físicamente corresponde al área de un paralelogramo cuyos lados son los vectores columna de la matriz.[4] Para dimensiones superiores, el cálculo se vuelve recursivo a través de la expansión por cofactores, utilizando un patrón de "tablero de ajedrez" para alternar los signos de los determinantes de submatrices más pequeñas.[4]

El Rango y la Independencia Lineal

El rango de una matriz es una medida de su "no degeneración" y se define como el número máximo de filas o columnas linealmente independientes.[12] El concepto de rango fue acuñado por F. G. Frobenius en 1879 y es fundamental para comprender la estructura de las soluciones de un sistema lineal.[14] Un resultado central del álgebra lineal es que el rango por filas siempre es igual al rango por columnas, lo que significa que la dimensión del espacio generado por las filas es la misma que la del espacio generado por las columnas.[12]

Una matriz de $m \times n$ tiene "rango completo" si su rango es igual al menor de sus dimensiones, $\min(m, n)$. Si el rango es menor que este valor, la matriz es "deficiente en rango", lo que implica que existe redundancia en las ecuaciones o que la transformación lineal mapea el dominio a un subespacio de menor dimensión en el codominio.[12] En términos prácticos, el rango determina si un sistema de ecuaciones tiene una solución única, infinitas soluciones o ninguna.[1]

Espacios Vectoriales: El Marco Axiomático

Un espacio vectorial es una abstracción matemática que generaliza las propiedades de los vectores en el plano y el espacio tridimensional. Para que un conjunto V sea considerado un espacio vectorial sobre un cuerpo F (usualmente los números reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$), debe cumplir con diez axiomas fundamentales que rigen la suma de vectores y la multiplicación por escalares.[10]

Axiomas y Estructura

Los axiomas de un espacio vectorial garantizan que las operaciones sean consistentes y predecibles. Entre ellos se incluyen la clausura (la suma de dos vectores en V debe estar en V), la conmutatividad ($u + v = v + u$), la existencia de un vector cero tal que $v + 0 = v$, y la distributividad respecto a la suma de escalares y vectores.[10] Estos principios permiten que el álgebra lineal se aplique no solo a listas de números, sino también a funciones, matrices y soluciones de ecuaciones diferenciales, todos los cuales pueden ser tratados como "vectores" en sus respectivos espacios.[10]

Bases y Dimensión

Una base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores linealmente independientes que generan (span) todo el espacio.[1] La independencia lineal asegura que no hay vectores redundantes en el conjunto: ninguno puede expresarse como una combinación lineal de los demás.[12] El número de vectores en cualquier base de un espacio vectorial de dimensión finita es siempre el mismo y se define como la dimensión del espacio.[12]

El concepto de base permite el uso de coordenadas. Una vez elegida una base, cada vector en el espacio puede representarse de forma única mediante una lista de coeficientes (escalares).[17] Sin embargo, la elección de la base es arbitraria. En muchas aplicaciones, es beneficioso cambiar de la base estándar a una "base natural" que simplifique la estructura de un problema específico, como los ejes principales de rotación de un cuerpo rígido.[20]

Concepto	Definición	Relevancia en Ingeniería
Independencia Lineal	Ningún vector es combinación de otros.	Evita redundancia en sensores y datos.[12]
Conjunto Generador	El conjunto cubre todo el espacio.	Asegura que todas las soluciones son alcanzables.[18]
Base	Conjunto independiente y generador.	Proporciona un sistema de coordenadas único.[19]
Dimensión	Número de vectores en la base.	Define los grados de libertad de un sistema.[18]

Espacios con Producto Interno y Ortogonalidad

Un espacio con producto interno es un espacio vectorial equipado con una operación adicional que asigna un escalar a cada par de vectores, permitiendo definir nociones geométricas como longitud (norma) y ángulo.[1] En $\mathbb{R}^n$, el producto interno estándar es el producto punto. Dos vectores se denominan ortogonales si su producto interno es cero, lo que físicamente corresponde a que son perpendiculares.[15]

Las bases ortonormales, donde cada vector tiene longitud unitaria y es ortogonal a todos los demás, son particularmente valoradas en computación y física. Facilitan enormemente el cálculo de coordenadas mediante proyecciones directas, eliminando la necesidad de resolver sistemas complejos de ecuaciones para encontrar los coeficientes de representación.[19] El proceso de Gram-Schmidt es un algoritmo estándar para transformar cualquier base en una base ortonormal, un paso crítico en la factorización QR de matrices.[19]

Transformaciones Lineales y Dinámica Espacial

Una transformación lineal $T : V \to W$ es una función entre espacios vectoriales que preserva la estructura de las operaciones lineales: $T(u + v) = T(u) + T(v)$ y

$T(cv) = cT(v)$.[18] Estas funciones modelan cómo los vectores se mueven y cambian de forma cuando se les aplica un proceso, como una rotación, un estiramiento o una proyección.[4]

El Núcleo y la Imagen

Toda transformación lineal está intrínsecamente ligada a dos subespacios fundamentales:

1. **Núcleo (Kernel):** El conjunto de todos los vectores en el dominio V que son mapeados al vector cero en el codominio W.[24] El núcleo mide la cantidad de información que la transformación "colapsa" o pierde.
2. **Imagen (Range):** El conjunto de todos los vectores en W que pueden ser alcanzados desde el dominio.[24] La dimensión de la imagen es, por definición, el rango de la transformación.

La relación entre estos subespacios está dictada por el Teorema del Rango-Nulidad, que establece que la suma de la dimensión del núcleo (nulidad) y la dimensión de la imagen (rango) es igual a la dimensión del dominio.[26] Este teorema es una ley de conservación de la dimensión: cada dimensión del espacio de entrada debe terminar ya sea en la imagen o ser aplastada en el núcleo.[13]

Representación Matricial y Cambio de Base

Aunque una transformación lineal es un concepto abstracto, puede representarse de manera concreta mediante una matriz una vez que se han fijado las bases para el dominio y el codominio.[19] Si cambiamos la base, la matriz que representa la misma transformación también cambia. Dos matrices A y B que representan la misma transformación lineal en bases diferentes se denominan matrices similares y están relacionadas por la ecuación $B = P^{-1}AP$, donde P es la matriz de cambio de base.[19]

Esta relación de similitud es vital porque permite buscar una base en la cual la matriz de la transformación sea lo más simple posible, idealmente una matriz diagonal. En una representación diagonal, la transformación actúa de forma independiente en cada eje de coordenadas, lo que simplifica drásticamente el análisis de sistemas complejos.[28]

Autovalores y Autovectores: El Corazón de la Estabilidad

En el estudio de los operadores lineales, surgen direcciones especiales que no cambian de orientación bajo la transformación. Un vector no nulo v es un autovector de una matriz A si la aplicación de A sobre v solo produce un escalamiento de v: $Av = \lambda v$, donde λ es el autovalor correspondiente.[20] El prefijo "eigen" proviene del alemán y significa "propio" o "característico", reflejando que estos valores y vectores son propiedades intrínsecas de la matriz.[20]

El Polinomio Característico y la Diagonalización

Para hallar los autovalores, se resuelve la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$. Las raíces de este polinomio proporcionan los factores de escala de la transformación.[29] Una vez obtenidos los autovalores, los autovectores se encuentran resolviendo el sistema homogéneo $(A - \lambda I)v = 0$, lo que equivale a encontrar el espacio nulo de la matriz desplazada.[29]

Si una matriz de $n \times n$ tiene n autovectores linealmente independientes, puede ser diagonalizada. Este proceso descompone la matriz en $A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal que contiene los autovalores en su diagonal principal.[23] La diagonalización es una herramienta poderosa para calcular potencias de matrices y resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, transformando variables acopladas en variables independientes.[28]

Concepto	**Significado Geométrico**	**Aplicación Física**
Autovector	Dirección que no rota.	Ejes de vibración o modos normales.[29]
Autovalor	Factor de estiramiento/compresión.	Frecuencia de resonancia o tasa de crecimiento.[29]
Espectro	Conjunto de todos los autovalores.	Niveles de energía en átomos (mecánica cuántica).[15]
Diagonalización	Alineación con los ejes naturales.	Desacoplamiento de señales e imágenes.[28]

Álgebra Lineal en la Mecánica Cuántica

La mecánica cuántica es quizás el campo donde el álgebra lineal encuentra su aplicación más profunda y elegante. En la formulación de Dirac, los estados físicos de un sistema cuántico se representan como vectores en un espacio de Hilbert complejo, y las magnitudes físicas observables (como la energía, la posición o el espín) se representan como operadores lineales que actúan sobre esos vectores.[10]

Notación Bra-Ket y Espacios de Hilbert

Dirac introdujo la notación "bra-ket" para facilitar el manejo de estos vectores. Un estado se denota como un "ket" $|\psi\rangle$, que matemáticamente es un vector columna en el espacio de Hilbert.[16] El "bra" $\langle\psi|$ representa el vector dual, un funcional lineal que mapea kets a números complejos mediante el producto interno $\langle\phi|\psi\rangle$.[15]

Este producto interno es la clave de la interpretación probabilística de la mecánica cuántica. El valor absoluto al cuadrado de la amplitud de probabilidad, $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$, representa la probabilidad de que un sistema en el estado $|\psi\rangle$ se encuentre en el estado $|\phi\rangle$ tras una medición.[15] La normalización de los kets, asegurando que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, garantiza que la probabilidad total sea siempre la unidad.[15]

Operadores Hermíticos y Observables

Debido a que los resultados de las mediciones físicas deben ser números reales, los observables en cuántica se representan mediante operadores Hermíticos (o autoadjuntos), tales que $A = A^\dagger$ (donde el símbolo $\dagger$ representa la traspuesta conjugada).[15] Una propiedad fundamental de los operadores Hermíticos es que sus autovalores son siempre reales y sus autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.[15]

Cuando realizamos una medición de un observable A, el sistema "colapsa" a uno de los autovectores de A, y el valor medido es el autovalor correspondiente.[15] Esta es la razón por la que la teoría espectral es tan crucial: conocer los autovalores de un operador Hamiltoniano (el operador de energía) equivale a conocer todos los niveles de energía permitidos para un átomo o molécula.[30]

Relatividad General y el Cálculo Tensorial

Mientras que la mecánica cuántica opera en espacios de Hilbert abstractos, la relatividad general de Einstein utiliza el álgebra lineal para describir la geometría física del universo. En esta teoría, el espacio y el tiempo se fusionan en un continuo de cuatro dimensiones llamado espacio-tiempo, cuya curvatura es dictada por la presencia de masa y energía.[35]

El Tensor Métrico y la Geometría Local

El objeto central de la relatividad es el tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, que es una forma bilineal simétrica definida en cada punto del espacio-tiempo.[35] En términos de álgebra lineal, el tensor métrico es una generalización del producto punto que permite medir distancias y ángulos en un espacio curvado.[35] A diferencia del espacio euclídeo plano, donde la métrica es constante, en presencia de gravedad la métrica varía de punto a punto.[35]

El tensor métrico actúa como un puente entre dos tipos de vectores: los vectores contravariantes (columnas) y los vectores covariantes o uno-formas (filas).[36] Esta operación de "subir y bajar índices" mediante la métrica es análoga a la relación entre bras y kets en cuántica, demostrando una unidad matemática subyacente entre lo muy pequeño y lo muy grande.[36]

Tensores como Funciones Multilineales

Un tensor de rango (m, n) se define formalmente como una función multilineal que toma m uno-formas y n vectores para producir un escalar.[36] Esta definición jerárquica permite que el álgebra lineal maneje estructuras de datos mucho más complejas que los vectores simples. Por ejemplo, el Tensor de Curvatura de Riemann, que describe cómo las líneas paralelas divergen o convergen en el espacio-tiempo, es un tensor de cuarto rango.[37] Einstein demostró que la gravedad no es una fuerza externa, sino una manifestación de la geometría de estos tensores.[35]

Inteligencia Artificial y Procesamiento de Datos

En el siglo XXI, el álgebra lineal ha encontrado un nuevo dominio de dominación en la inteligencia artificial (IA). Los modelos de aprendizaje profundo (Deep Learning) son, en esencia, secuencias masivas de multiplicaciones de matrices y transformaciones lineales que procesan datos a una escala sin precedentes.[8]

Redes Neuronales y Tensores de Datos

En una red neuronal, los "pesos" que conectan las neuronas se organizan en matrices. El paso de información a través de la red consiste en multiplicar vectores de entrada por estas matrices de pesos.[8] El entrenamiento de la IA implica ajustar los millones de parámetros en estas matrices para minimizar el error, un proceso que utiliza el cálculo multivariable pero cuya infraestructura es puramente de álgebra lineal.[8]

El término "Tensor" en bibliotecas como TensorFlow se refiere a arreglos multidimensionales de datos. Una imagen, por ejemplo, puede representarse como un tensor de rango 3 (alto x ancho x canales de color).[40] Las operaciones de convolución en visión por computadora son transformaciones lineales locales aplicadas a estos tensores para extraer características como bordes y formas.[39]

Reducción de Dimensionalidad: PCA y SVD

Uno de los mayores retos en IA es la "maldición de la dimensionalidad". El Análisis de Componentes Principales (PCA) es una técnica estadística que utiliza la descomposición en autovalores para proyectar datos de alta dimensión en un espacio de menor dimensión, preservando la mayor cantidad posible de varianza.[31]

Técnica	Mecanismo Matemático	Aplicación en IA
PCA	Autovalores de la matriz de covarianza.	Visualización de datos y compresión.[31]
SVD	Factorización $U\Sigma V^T$ para cualquier matriz.	Sistemas de recomendación (Netflix).[40]
Word Embeddings	Espacios vectoriales de palabras.	Traducción automática y ChatGPT.[39]
Regularización	Restricciones en la norma de los pesos.	Evita el sobreajuste (overfitting).[8]

La Descomposición en Valores Singulares (SVD) es una generalización de la diagonalización que funciona para cualquier matriz, no solo las cuadradas. SVD es la base de algoritmos de compresión de imágenes y de los motores de recomendación, donde se utiliza para descubrir "factores latentes" que explican las preferencias de los usuarios basándose en matrices de interacción dispersas.[40]

Simulaciones Numéricas y Computación Científica

El álgebra lineal es el motor detrás de las simulaciones que permiten diseñar aviones, predecir el clima y modelar el flujo sanguíneo en arterias. Estos problemas se formulan típicamente como ecuaciones diferenciales que, al ser discretizadas para una computadora, se transforman en sistemas masivos de ecuaciones lineales con millones de incógnitas.[8]

Implementación en NumPy vs. MATLAB

Para los ingenieros y científicos de datos, la elección de la herramienta de software es crucial. MATLAB nació originalmente como una interfaz para bibliotecas de álgebra lineal (LAPACK y BLAS), tratando a todos los datos como matrices por defecto.[6] En contraste, el ecosistema de Python utiliza NumPy, que ofrece mayor flexibilidad pero requiere una comprensión clara de las dimensiones y el "broadcasting" de arreglos.[6]

Una diferencia técnica significativa es que MATLAB utiliza indexación basada en 1 (la primera posición es 1), mientras que Python/NumPy utiliza indexación basada en 0, lo cual es estándar en ciencias de la computación pero puede causar errores de "off-by-one" al traducir algoritmos matemáticos.[6] Además, en NumPy, la multiplicación con el símbolo * realiza una operación elemento a elemento, mientras que la multiplicación de matrices requiere el operador @ o la función dot().[6]

Estabilidad Numérica y Matrices Dispersas

En simulaciones reales, las matrices suelen ser "dispersas" (sparse), lo que significa que la gran mayoría de sus entradas son cero. Almacenar y operar solo con los elementos no nulos permite resolver problemas que de otro modo excederían la memoria de cualquier supercomputadora.[40] La estabilidad numérica es otra preocupación mayor: pequeños errores de redondeo en una computadora pueden amplificarse drásticamente si una matriz está "mal condicionada", lo que ocurre cuando sus autovalores tienen magnitudes muy dispares.[12]

Conclusiones

El álgebra lineal no es simplemente una rama de las matemáticas, sino la infraestructura sobre la cual se construye nuestra comprensión técnica del mundo. Desde el nivel subatómico de la mecánica cuántica hasta las vastas escalas de la relatividad general, y desde los algoritmos abstractos de la inteligencia artificial hasta las simulaciones físicas concretas, los conceptos de matrices, espacios vectoriales y autovalores proporcionan un marco de análisis coherente y universal.[8]

La transición del aprendizaje procedimental —resolver sistemas de ecuaciones a mano— al aprendizaje conceptual —comprender las transformaciones del espacio— es lo que define a un experto en el área. Las instituciones líderes, como la PUC y la Universidad de Chile, reflejan esta jerarquía de conocimiento en sus currículos, priorizando la abstracción de los espacios vectoriales como base para la resolución de problemas de ingeniería complejos.[1] A medida que avanzamos hacia una era dominada por los datos y la computación cuántica, el álgebra lineal seguirá siendo, sin duda, la herramienta más poderosa en el arsenal intelectual de la humanidad.

Obras citadas

1. Contenido del Curso de Álgebra Lineal | PDF | Mapa lineal | Espacio vectorial -

Scribd, fecha de acceso: enero 28, 2026,
https://es.scribd.com/document/445488627/Algebra-lineal
2. Applications of Linear Algebra - GeeksforGeeks, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://www.geeksforgeeks.org/maths/applications-of-linear-algebra/
3. PROGRAMA DE ASIGNATURA I. IDENTIFICACIÓN DE LA ..., fecha de acceso: enero 28, 2026, https://eic.pucv.cl/wp-content/uploads/2023/01/2-MAT1004-Algebra-Lineal-FIN.pdf
4. Determinants (article) | Khan Academy, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://www.khanacademy.org/a/determinants-mvc
5. Linear Algebra and Python Basics | Rob Hicks, fecha de acceso: enero 28, 2026, http://rlhick.people.wm.edu/stories/linear-algebra-python-basics.html
6. NumPy for MATLAB users, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://numpy.org/doc/stable/user/numpy-for-matlab-users.html
7. Matrix Operations in NumPy vs. Matlab - Chris McCormick, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://mccormickml.com/2019/10/28/matrix-operations-in-numpy-vs-matlab/
8. How important is Linear Algebra? : r/computerscience - Reddit, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://www.reddit.com/r/computerscience/comments/1jtgdi7/how_important_is_linear_algebra/
9. Determinant - Wikipedia, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant
10. Linear Algebra and Quantum Mechanics - Nicholas Rui, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://nicholasrui.com/2018/05/14/linear-algebra-and-quantum-mechanics/
11. linear_algebra:determinants - No bullshit guide, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://minireference.com/linear_algebra/determinants
12. Rank (linear algebra) - Wikipedia, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://en.wikipedia.org/wiki/Rank_(linear_algebra)
13. Rank and Nullity - GeeksforGeeks, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://www.geeksforgeeks.org/maths/rank-and-nullity/
14. How to interpret "rank" of a matrix intuitively? [closed] - Math Stack Exchange, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://math.stackexchange.com/questions/383293/how-to-interpret-rank-of-a-matrix-intuitively
15. Linear Algebra In Dirac Notation - CMU Quantum Theory Group, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://quantum.phys.cmu.edu/CQT/chaps/cqt03.pdf
16. Dirac Notation Introduction - Academics, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://academics.hamilton.edu/physics/smajor/Courses/320Info/braket.pdf
17. Change of Basis – Calculus Tutorials, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://math.hmc.edu/calculus/hmc-mathematics-calculus-online-tutorials/linear-algebra/change-of-basis/
18. The rank-nullity theorem - StatLect, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://www.statlect.com/matrix-algebra/rank-nullity-theorem

19. Math 217: Summary of Change of Basis and All That..., fecha de acceso: enero 28, 2026, https://sites.lsa.umich.edu/kesmith/wp-content/uploads/sites/1309/2024/06/CoordinateChange.pdf
20. Eigenvalues and eigenvectors - Wikipedia, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors
21. Change of basis - Wikipedia, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://en.wikipedia.org/wiki/Change_of_basis
22. Change of basis matrix to convert standard basis to another basis - Math Stack Exchange, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://math.stackexchange.com/questions/340978/change-of-basis-matrix-to-convert-standard-basis-to-another-basis
23. Understanding Eigenvalues, Eigenvectors, and Diagonalization in Python | by Ogiri Agbehi, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://medium.com/@ogiriagbehi/understanding-eigenvalues-eigenvectors-and-diagonalization-in-python-b2a3fc5961dd
24. 7.2 Kernel and Image of a Linear Transformation, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://math.emory.edu/~lchen41/teaching/2021_Spring_Math221/Section_7-2.pdf
25. 23. Kernel, Rank, Range - UC Davis Mathematics, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://www.math.ucdavis.edu/~linear/old/notes23.pdf
26. fecha de acceso: enero 28, 2026, https://www.statlect.com/matrix-algebra/rank-nullity-theorem#:~:text=The%20rank%2Dnullity%20theorem%20states,zero%20vector%20in%20the%20codomain).
27. Rank–nullity theorem - Wikipedia, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://en.wikipedia.org/wiki/Rank%E2%80%93nullity_theorem
28. Notes on Eigenvalues, eigenvectors, and diagonalization, fecha de acceso: enero 28, 2026, http://www.science.smith.edu/~rmehta/teaching/Diagonalization.pdf
29. ES.1803 S24: Reading: Topic 16: Eigenvalues, Diagonalization, and ..., fecha de acceso: enero 28, 2026, https://ocw.mit.edu/courses/es-1803-differential-equations-spring-2024/mites_1803_s24_topic16.pdf
30. Eigenvalues, Eigenvectors and Diagonalization - AlmaBetter, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://www.almabetter.com/bytes/tutorials/applied-statistics/eigenvalues-eigenvectors-diagonalization
31. Machine Learning — Singular Value Decomposition (SVD) & Principal Component Analysis (PCA) | by Jonathan Hui, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://jonathan-hui.medium.com/machine-learning-singular-value-decomposition-svd-principal-component-analysis-pca-1d45e885e491
32. Bra–ket notation - Wikipedia, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://en.wikipedia.org/wiki/Bra%E2%80%93ket_notation
33. Linear algebra - Duke Physics, fecha de acceso: enero 28, 2026, http://webhome.phy.duke.edu/~mehen/760/ProblemSets/Cahill_ch1.pdf
34. Good resources for bra ket? : r/quantum - Reddit, fecha de acceso: enero 28,

2026,
https://www.reddit.com/r/quantum/comments/1lcveqa/good_resources_for_bra_ket/
35. Metric tensor (general relativity) - Wikipedia, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_tensor_(general_relativity)
36. Introduction to Tensor Calculus for General Relativity - DSpace@MIT, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/36859/8-962Spring2002/NR/rdonlyres/Physics/8-962Spring2002/CA9AEFF5-C494-464B-A97E-579CF3D6B7A1/0/gr1_1.pdf
37. Introduction to Tensors - Einstein Relatively Easy, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://einsteinrelativelyeasy.com/index.php/general-relativity/54-introduction-to-tensors
38. Tips on Teaching General Relativity (with Tensors) to Undergraduates - AAPT, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://www.aapt.org/doorway/TGRU/articles/Moore%20GRArticle.pdf
39. Quantum Mathematics in Artificial Intelligence, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://www.jair.org/index.php/jair/article/download/12702/26749/29146
40. Linear algebra on n-dimensional arrays - Numpy Tutorials, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://numpy.org/numpy-tutorials/tutorial-svd/
41. Dimensionality Reduction Techniques — PCA, LCA and SVD | by Indraneel Dutta Baruah | Nerd For Tech | Medium, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://medium.com/nerd-for-tech/dimensionality-reduction-techniques-pca-lca-and-svd-f2a56b097f7c
42. Principal Component Analysis from Scratch Using Singular Value Decomposition with C# -- Visual Studio Magazine, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://visualstudiomagazine.com/articles/2024/02/16/pca-using-svd-for-ml.aspx
43. Understanding Dimension Reduction with Principal Component Analysis (PCA), fecha de acceso: enero 28, 2026, https://blog.paperspace.com/dimension-reduction-with-principal-component-analysis/
44. Quantum Mathematics in Artificial Intelligence, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://arxiv.org/pdf/2101.04255
45. VIDA CIENCIA - Ingeniería UC, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://www.ing.uc.cl/wp-content/uploads/2021/04/Libro-novatos-2021-compressed_V5.pdf
46. Conoce por dentro la - Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Universidad de Chile, fecha de acceso: enero 28, 2026, https://ingenieria.uchile.cl/dam/jcr:84fc80f8-5cce-46e7-9a30-5ab03bed27b2/CONOCE%20POR%20DENTRO%20LA%20FCFM%202025.pdf