Chương 4: Vec tơ ngẫu nhiên

4.1 Vec tơ ngẫu nhiên rời rạc

Nguyễn Văn Hợi

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Bộ môn Toán - Lý

Nội dung

- Khái niệm.
- Phân phối xác suất (ppxs) đồng thời (the joint probability mass functions).
- Phân phối xác suất thành phần (the marginal mass functions).
- Phân phối xác suất có điều kiện (the conditional mass function).

	Y=0	Y=1	Y=2	Tổng
X=0	0,15	0,20	0,20	0,55
X=1	0,10	0,30	0,05	0,45
Tổng	0,25	0,50	0,25	1

Hình: X: giới tính; Y: sở thích.

Chuẩn hóa phát biểu trước bằng ký hiệu toán học:

$$P(\textit{nam,cine}) = P(X = 0, Y = 0) = p_{XY}(0, 0). \qquad \text{(ppxs đồng thời).} \qquad (1)$$

$$P(\textit{nam}) = P(X = 0) = \sum_{i=0}^{2} p_{XY}(0, i) = p_X(0). \qquad \text{(ppxs thành phần theo X).} \qquad (2)$$

$$P(\textit{nữ}|\textit{café}) = \frac{p_{XY}(1, 0)}{p_Y(0)} = p_{X|Y}(1|0).$$

	Y=0	Y=1	Y=2	Tổng
X=0	0,15	0,20	0,20	0,55
X=1	0,10	0,30	0,05	0,45
Tổng	0,25	0,50	0,25	1

Hình: X: giới tính; Y: sở thích.

Chuẩn hóa phát biểu trước bằng ký hiệu toán học:

$$P(\textit{nam,cine}) = P(X = 0, Y = 0) = p_{XY}(0, 0). \quad \text{(ppxs đồng thời).} \quad (1)$$

$$P(\textit{nam}) = P(X = 0) = \sum_{i=0}^{2} p_{XY}(0, i) = p_X(0). \quad \text{(ppxs thành phần theo X).} \quad (2)$$

$$P(\textit{nữ}|\textit{café}) = \frac{p_{XY}(1, 0)}{p_Y(0)} = p_{X|Y}(1|0). \quad \text{(ppxs có điều kiện).} \quad (3)$$

❒ Nếu X, Y là 2 biến ngẫu nhiên thì (X, Y) được gọi là một vec tơ ngẫu nhiên. Phân phối xác suất có điều kiện được cho bởi:

$$p_{X|Y}(x_i|y_j) = \frac{p_{XY}(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)}, \qquad p_{Y|X}(y_j|x_i) = \frac{p_{XY}(x_i, y_j)}{p_X(x_i)}. \tag{4}$$

	$Y = y_1$	$\cdots$	$Y = y_n$	Tổng
$X = x_1$	$p_{XY}(x_1, y_1)$	$\cdots$	$p_{XY}(x_1, y_n)$	$p_X(x_1) = \sum_j p_{XY}(x_1, y_j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X = x_m$	$p_{XY}(x_1, y_n)$	$\cdots$	$p_{XY}(x_1, y_n)$	$p_X(x_m) = \sum_j p_{XY}(x_m, y_j)$
Tổng	$p_Y(y_1) = \sum_i p_{XY}(x_i, y_1)$		$p_Y(y_n) = \sum_i p_{XY}(x_i, y_n)$	1

	$Y = y_1$	$\cdots$	$Y = y_n$	Tổng
$X = x_1$	$p_{XY}(x_1, y_1)$	$\cdots$	$p_{XY}(x_1, y_n)$	$p_X(x_1) = \sum_j p_{XY}(x_1, y_j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X = x_m$	$p_{XY}(x_1, y_n)$	$\cdots$	$p_{XY}(x_1, y_n)$	$p_X(x_m) = \sum_j p_{XY}(x_m, y_j)$
Tổng	$p_Y(y_1) = \sum_i p_{XY}(x_i, y_1)$		$p_Y(y_n) = \sum_i p_{XY}(x_i, y_n)$	1

❒ X, Y độc lập với nhau nếu và chỉ nếu

$$p_{XY}(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j), \quad \forall i, j. \tag{5}$$

❒ Ở ví dụ mở đầu, hãy tìm phân phối xác suất có điều kiện? Hai biến ngẫu nhiên X và Y có độc lập với nhau không?

	Y=0	Y=1	Y=2	Tổng
X=0	0,15	0,20	0,20	0,55
X=1	0,10	0,30	0,05	0,45
Tổng	0,25	0,50	0,25	1

$$p_{X|Y}(0|0) = 0,15/0,25 \quad p_{X|Y}(0|1) = 0,2/0,5 \quad p_{X|Y}(0|2) = 0,2/0,25$$
$$p_{X|Y}(1|0) = 0,1/0,25 \quad p_{X|Y}(1|1) = 0,3/0,5 \quad p_{X|Y}(1|2) = 0,05/0,25. \tag{6}$$

$$p_{Y|X}(0|0) = 0,15/0,55 \quad p_{Y|X}(1|0) = 0,2/0,55 \quad p_{Y|X}(2|0) = 0,2/0,55$$
$$p_{Y|X}(0|1) = 0,1/0,45 \quad p_{Y|X}(1|1) = 0,3/0,45 \quad p_{Y|X}(2|1) = 0,05/0,45. \tag{7}$$

Nhận thấy $p_{XY}(0,1) \neq p_X(0)p_Y(1)$, nên X và Y không độc lập.

Ví dụ: Một chương trình bao gồm hai mô-đun. Đặt X là biến ngẫu nhiên số lỗi trong mô-đun 1 và Y là biến ngẫu nhiên chỉ số lỗi trong mô-đun 2 có xác suất đồng thời như sau $p_{XY}(0,0) = p_{XY}(0,1) = p_{XY}(1,0) = 0,2;$
$p_{XY}(1,1) = p_{XY}(1,2) = p_{XY}(1,3) = 0,1;\, p_{XY}(0,2) = p_{XY}(0,3) = 0,05.$
a. Tìm phân phối xác suất thành phần của X và Y. Các lỗi trong hai mô-đun có xảy ra độc lập hay không?
Giải: Lập bảng phân phối xác suất

	Y=0	Y=1	Y=2	Y=3	Tổng
X=0	0,2	0,2	0,05	0,05	0,5
X=1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,5
Tổng	0,4	0,3	0,15	0,15	1

	Y=0	Y=1	Y=2	Y=3	Tổng
X=0	0,2	0,2	0,05	0,05	0,5
X=1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,5
Tổng	0,4	0,3	0,15	0,15	1

Dựa vào bảng trên ta được: Phân phối xác suất thành phần theo X được cho bởi

$$p_X(0) = 0,5, \qquad p_X(1) = 0,5.$$

Phân phối xác suất thành phần theo Y được cho bởi

$$P_Y(0) = 0,4, \quad p_Y(1) = 0,3, \quad p_Y(2) = 0,15, \quad p_Y(3) = 0,15.$$

Ngoài ra, vì

$$p_{XY}(0,1) = 0,2 \neq 0,15 = p_X(0)p_Y(1)$$

nên hai biến ngẫu nhiên X và Y không độc lập.

b. Tìm phân phối của tổng số lỗi trong chương trình.

$$Z = X + Y.$$

Các giá trị mà Z có thể nhận được và xác suất của nó:

- $P(Z = 0) = P(X = 0, Y = 0) = 0,2$.
- $P(Z = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) = 0,2 + 0,2 = 0,4$.
- $P(Z = 2) = P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 1) = 0,05 + 0,1 = 0,15$.
- $P(Z = 3) = P(X = 0, Y = 3) + P(X = 1, Y = 2) = 0,05 + 0,1 = 0,15$.
- $P(Z = 4) = P(X = 1, Y = 3) = 0,1$.

c. Giả sử chương trình có lỗi. Tính xác suất mô-đun 1 có lỗi.

$$P(X \geq 1|Z \geq 1) = P(X = 1|Z \geq 1) = \frac{P(X = 1 \cap Z \geq 1)}{P(Z \geq 1)} = \frac{P(X = 1)}{P(Z \geq 1)} = \frac{0,5}{0,8}.$$

d. Giả sử mô-đun 1 có lỗi. Tính xác suất mô-đun 2 có lỗi.

$$P(Y \geq 1|X \geq 1) = \frac{P(X = 1 \cap Y \geq 1)}{P(X = 1)} = \frac{p_{XY}(1,1) + p_{XY}(1,2) + p_{XY}(1,3)}{p_X(1)} = \frac{0,3}{0,5}.$$

Bài tập

Câu 1: Một hộp có 7 bi đỏ, 2 bi vàng và 3 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 5 bi từ hộp. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số bi đỏ và Y là biến ngẫu nhiên chỉ số bi vàng trong 5 bi lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất đồng thời của X và Y.
- Tính $P(X + Y \leq 1)$ và $P(1 \leq X \leq 4)$.
- Tìm các phân phối xác suất thành phần của X và Y.
- Tìm phân phối xác suất có điều kiện. Hai biến ngẫu nhiên X, Y có độc lập với nhau không?

Câu 2: Hoàn thành bảng sau biết $P(Y = 1|X = 0) = 0,5$, $P(Y = 1|X = 1) = 0,25$ và $P(Y = 0) = 0,2$.

	X=0	X=1	Tổng
Y=0			
Y=1			
Y=2		30	
Tổng	120	80	200