Chương 1: Các khái niệm cơ bản về xác suất

Nguyễn Minh Trí

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Bộ môn Toán - Lý

Chương 1. Các khái niệm cơ bản về xác suất

Mục tiêu

- Xác định được không gian mẫu và tính được xác suất của một biến cố theo kiểu cổ điển.
- Biết cách sử dụng được công thức cộng, nhân xác suất
- Tìm được xác suất có điều kiện
- Biết cách sử dụng công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes

1.1 Phép thử và biến cố

1.1 Phép thử và biến cố

Định nghĩa 1.1

1. Một **phép thử** (experiment): Việc thực hiện một hành động để quan sát một số kết quả (outcomes) nào đó mà ta không biết chính xác kết quả nào sẽ xuất hiện.
2. **Không gian mẫu** (sample space): Tập hợp tất cả các kết quả của một phép thử, ký hiệu Ω.
3. **Biến cố** (event): Một tập con của không gian mẫu, ký hiệu $A, B, C, \ldots$
4. Biến cố **sơ cấp** (simple event): là một kết quả của một lần thực hiện phép thử hay là một phần tử của không gian mẫu.
5. **Biến cố không** (null event) là biến cố không thể xảy ra, kí hiệu $\varnothing$.

Ví dụ 1.2 Phép thử: gieo một con xúc xắc

- Đặt A_i là biến cố "Mặt trên có i chấm" với $i = 1, 2, \dots, 6$.
- Không gian mẫu: $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$.
- $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ là các biến cố sơ cấp.
- Biến cố A: Mặt trên có số chấm chẵn. Khi đó

$$A = \{A_2, A_4, A_6\}.$$

Ví dụ 1.3 Mỗi đồng tiền xu có hai mặt, một mặt có in giá trị bằng tiền của đồng xu, gọi là mặt sấp (S). Mặt còn lại được gọi là mặt ngửa (N).

- Phép thử: Tung một đồng xu nhiều lần đến khi xuất hiện mặt sấp.
- Không gian mẫu: $\Omega = \{S, NS, NNS, NNNS, \ldots\}$.
- Đặt B là biến cố "Có mặt sấp trong 3 lần tung đầu tiên"

$$B = \{S, NS, NNS\}.$$

Ví dụ 1.4 Chạy lại một chương trình máy tính, đo thời gian (phút) mà chương trình cần để được xử lý trong bộ xử lý trung tâm.

- Phép thử: Chạy một chương trình và đo thời gian chương trình cần để được xử lý.
- Không gian mẫu: $\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$.
- Đặt E là biến cố "thời gian chương trình cần để được xử lý lớn hơn 5 phút"

$$E = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 5\}.$$

Định nghĩa 1.5 Cho A, B là các biến cố của một phép thử.

1. Nếu A và B không đồng thời xảy ra thì ta nói A và B là hai **biến cố xung khắc** (mutually exclusive).
2. **Tích** (intersection) của hai biến cố A và B, kí hiệu $A \cap B$ hoặc AB, là biến cố khi A và B cùng xảy ra.
3. **Tổng** (union) của hai biến cố A và B, kí hiệu $A \cup B$, là biến cố khi có ít nhất một trong hai biến cố A, B xảy ra.
4. Biến cố **đối** (complement) của biến cố A, kí hiệu $\overline{A}$, là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.

Ví dụ 1.6 Phép thử: gieo một con xúc xắc.

- Biến cố A_i "Mặt trên có i chấm," với $i = 1, 2, \ldots, 6$.
- Nếu $i \neq j$ thì A_i và A_j là hai biến cố xung khắc.
- Đặt A là biến cố "Mặt trên có số chấm lẻ", B là biến cố "Mặt trên có số chấm là số nguyên tố". Khi đó

$$A = \{A_1, A_3, A_5\}; B = \{A_2, A_3, A_5\}$$

- $A \cap B = \{A_3, A_5\}; A \cup B = \{A_1, A_2, A_3, A_5\}$
- Biến cố D: "Mặt trên có số chấm nhỏ hơn 3" $\rightarrow$ biến cố $\overline{D}$: "Mặt trên có số chấm không nhỏ hơn 3".

Tính chất. Cho A, B, C là các biến cố của một phép thử có không gian mẫu là Ω. Khi đó

1. $A \cap \Omega = A$
2. $A \cup \Omega = \Omega$
3. $A \cap \varnothing = \varnothing$
4. $A \cup \varnothing = A$
5. $A \cap \overline{A} = \varnothing$
6. $A \cup \overline{A} = \Omega$
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
9. $A \cap A = A$

Tính chất. Cho A, B, C là các biến cố của một phép thử có không gian mẫu là Ω. Khi đó

10. $A \cup A = A$
11. $A \cap B = B \cap A$
12. $A \cup B = B \cup A$
13. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
14. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
15. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
16. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
17. $A \cup (A \cap B) = A$
18. $A \cap (A \cup B) = A$

1.2 Xác suất và các tính chất

1.2 Xác suất và các tính chất

Xác suất của một biến cố A là một số nằm giữa 0 và 1, đo khả năng xuất hiện của biến cố A, ký hiệu $P(A)$.

Định nghĩa 1.7 Cho một phép thử có n biến cố sơ cấp có khả năng xảy ra như nhau. Giả sử biến cố A chứa $n(A)$ biến cố sơ cấp. Khi đó xác suất của A là

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Cách định nghĩa xác suất bên trên được gọi là **định nghĩa xác suất cổ điển**.

Ví dụ 1.8 Cửa hàng UIT-computer có 10 laptop HP, 8 laptop Dell và 6 laptop Sony. An vào cửa hàng và chọn ngẫu nhiên 3 laptop. Tính xác suất chọn được 2 laptop HP và 1 laptop Dell.

Giải.

- Số biến cố sơ cấp: $C^3_{10+8+6} = C^3_{24} = 2024.$
- Biến cố A : Chọn được 2 laptop HP và 1 laptop Dell.
- Số biến cố sơ cấp chứa trong A bằng số cách chọn 2 laptop HP và 1 laptop Dell:

$$C^2_{10}C^1_8 = 360.$$

- Xác suất của A là

$$P(A) = \frac{360}{2024} = 0,1779.$$

Định nghĩa 1.9 (Định nghĩa theo quan điểm thống kê)[1] Thực hiện n phép thử độc lập với các điều kiện giống nhau có k lần xuất hiện biến cố A. Tỉ số

$$f(A) = \frac{k}{n}$$

được gọi là **tần suất** xuất hiện biến cố A trong n phép thử.
Khi số phép thử n càng lớn thì tần suất xuất hiện biến cố A tiến về một giá trị xác định. Ta định nghĩa giá trị đó là xác suất của biến cố A.
Ví dụ 1.10 Để tìm xác suất mặt 1 chấm (biến cố A) khi gieo một *con xúc xắc không cân đối*. Giả sử con xúc xắc được gieo nhiều lần. Gọi $n(A)$ là số lần xuất hiện mặt 1 chấm trong n phép thử. Khi đó, xác suất của mặt 1 chấm được định nghĩa là

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}.$$

[1] Được giới thiệu bởi R. von Mises năm 1936

Định nghĩa 1.11 (Định nghĩa xác suất theo hệ tiên đề)[2] Cho một phép thử có không gian mẫu Ω. Xác suất là một quy tắc cho tương ứng mỗi biến cố A của phép thử với duy nhất một số $P(A)$ thỏa mãn các điều kiện

1. Với mỗi biến cố A, ta có $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Với bất kì họ đếm được các biến cố đôi một xung khắc $A_1, A_2, \ldots$ ta có

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{i \geq 1} P(A_i)$$

[2] Giới thiệu bởi A. N. Kolmogorov năm 1933

Ví dụ 1.12 Cho một con xúc xắc không cân đối. Giả sử xác suất xuất hiện mặt i chấm là ik với $i = 1, 2, \ldots, 6$ và k là một hằng số.

a. Tìm k.

b. Tính xác suất xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 4.

Giải. a. Đặt A_i là biến cố xuất hiện mặt i chấm, với $i = 1, 2, \ldots, 6$. Khi đó không gian mẫu $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$. Ta có

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = 1$$
$$k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1$$

Suy ra $k = \dfrac{1}{21}$

Ví dụ 1.12 Cho một con xúc xắc không cân đối. Giả sử xác suất xuất hiện mặt i chấm là ik với $i = 1, 2, \ldots, 6$ và k là một hằng số.

a. Tìm k.

b. Tính xác suất xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 3.

Giải. b. Đặt B là biến cố xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 3. Khi đó $B = \{A_4, A_5, A_6\}$ và

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) \\
&= \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{15}{21}
\end{aligned}
$$

Định lý 1.13 Cho A, B là các biến cố của một phép thử. Khi đó

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Ví dụ 1.14 Một lớp học có 20 sinh viên trong đó có 10 sinh viên biết lập trình C++, 8 sinh viên biết lập trình Java và 6 sinh biết lập trình C++ và Java. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên. Tính xác suất sinh viên này biết ít nhất một ngôn ngữ lập trình.

Giải.

- Biến cố A : Sinh viên biết lập trình C++.
- Biến cố B : Sinh viên biết lập trình Java.
- Biến cố C : Sinh viên biết ít nhất một ngôn ngữ lập trình. Khi đó $C = A \cup B$ và

$$\begin{aligned} P(C) = P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{C_{10}^1}{C_{20}^1} + \frac{C_8^1}{C_{20}^1} - \frac{C_6^1}{C_{20}^1} = 0,6. \end{aligned}$$

Định lý 1.15 Cho A là một biến cố của một phép thử. Khi đó

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Ví dụ 1.16 Một lớp học có 20 sinh viên trong đó có 12 sinh viên biết thiết kế web. Chọn ngẫu nhiên 5 sinh viên. Tính xác suất có ít nhất một sinh viên biết thiết kế web.

Giải.

- Biến cố C : Có ít nhất một sinh viên biết thiết kế web.
- Biến cố $\overline{C}$: Không có sinh viên nào biết thiết kế web.

Khi đó

$$P(\overline{C}) = \frac{C_{20-12}^5}{C_{20}^5} = \frac{C_8^5}{C_{20}^5} = \frac{7}{1938}$$

và

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{7}{1938} = 0,9964$$

Tính chất. Cho A, B, C là các biến cố của một phép thử. Khi đó

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $P(A \cap \overline{A}) = 0$
3. $P(A \cup \overline{A}) = 1$
4. $P(A \cup B \cup C) =$
   $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
5. $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$
6. $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$
7. Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ví dụ 1.17 Cho A, B là các biến cố của một phép thử và

$$P(A) = 0,24; P(B) = 0,67; P(A \cap B) = 0,09.$$

Tính

a. $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

b. $P(A \cap \overline{B})$

c. $P(A \cup \overline{B})$

Giải. a. Tính $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{B}) &= P(\overline{A \cap B}) \\ &= 1 - P(A \cap B) \\ &= 1 - 0,09 = 0,91 \end{aligned}$$

Ví dụ 1.18 Cho A, B là các biến cố của một phép thử và

$$P(A) = 0,24; P(B) = 0,67; P(A \cap B) = 0,09.$$

Giải. b. Tính $P(A \cap \overline{B})$

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

Suy ra

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) - P((A \cap B) \cap (A \cap \overline{B})) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) - P(A \cap (B \cap \overline{B})) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) - P(A \cap \varnothing) \end{aligned}$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,24 - 0,09 = 0,15$$

Ví dụ 1.18 Cho A, B là các biến cố của một phép thử và

$$P(A) = 0,24; P(B) = 0,67; P(A \cap B) = 0,09.$$

Giải. c. Tính $P(A \cup \overline{B})$

$$\begin{aligned} P(A \cup \overline{B}) &= P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) \\ &= 0,24 + (1 - 0,67) - 0,15 = 0,42 \end{aligned}$$

Bài tập

Bài 1.1 Cửa hàng máy tính UITLap giới thiệu cho khách hàng 15 laptop hiệu X và 8 laptop hiệu Y trong đó có 3 laptop hiệu X và 4 laptop hiệu Y có 8G RAM. Tính xác suất khách hàng chọn được một laptop hiệu X hoặc có 8G RAM.

Giải. Gọi A là biến cố chọn laptop hiệu X, B là biến cố chọn laptop có 8G RAM. Khi đó

$$P(A) = \frac{15}{23}, P(B) = \frac{7}{23}, P(A \cap B) = \frac{3}{23}$$

Do đó xác suất để khách hàng chọn được một laptop hiệu X hoặc có 8G RAM là

$$P(A \cup B) = \frac{15}{23} + \frac{7}{23} - \frac{3}{23} = \frac{19}{23}$$

Bài 1.2 Một công ty phần mềm đang tuyển dụng các ứng viên cho 4 vị trí quan trọng trong ban quản lý văn phòng mới của họ ở Thủ Đức. Có 5 ứng cử viên đến từ Việt Nam và 3 đến từ Nhật. Xác suất ít nhất 1 người Nhật được chọn là bao nhiêu?

Giải. Đặt A là biến cố "Có ít nhất một người Nhật" thì $\overline{A}$ là biến cố "Không có người Nhật nào", tức là cả 4 người đều là người Việt Nam. Ta có

$$P(\overline{A}) = \frac{C_5^4}{C_8^4} = \frac{1}{14}$$

và do đó xác suất cần tìm là

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$

Bài 1.3 Kiểm tra 20 bài tập xác suất thống kê của Bình, giáo viên thấy có 4 bài sai. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 2 bài để chấm lấy điểm. Tìm xác suất

a. Cả 2 bài đều đúng. (Đáp số: 0,623)

b. Có ít nhất một bài sai. (Đáp số: 0,368)

c. Cả hai bài đều đúng biết rằng có ít nhất một bài đúng. (Đáp số: 0,652)

Bài 1.4 Cho A, B là các biến cố của một phép thử. Giả sử xác suất có ít nhất một trong hai biến cố A, B xảy ra là 0,2 và xác suất xảy ra A nhưng không xảy ra B là 0,1. Tính $P(B)$.

Bài 1.5 Cho A, B là các biến cố của một phép thử với

$$P(A) = 0,3; P(B) = 0,5 \text{ và } P(A \cup B) = 0,7.$$

Tính $P(A \cap B); P(\overline{A} \cup \overline{B}); P(\overline{A} \cap B)$. (Đáp số: 0,1; 0,9; 0,4)

Bài 1.6 Cho A, B là các biến cố của một phép thử với

$$P(\overline{A \cup B}) = 0,5; P(A \cap B) = 0,2.$$

Tính xác suất có ít nhất một trong hai biến cố A, B xảy ra nhưng A, B không đồng thời xảy ra. (Đáp số: $0,3$)

Bài 1.7 Cho A, B, C là các biến cố của một phép thử với

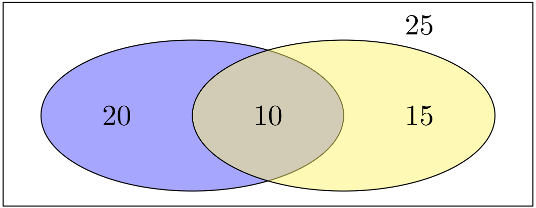
$$P(A) = 0,2; P(B) = 0,1; P(C) = 0,3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P(\overline{A \cup B \cup C})$. (Đáp số: $0,4$)

1.3 Xác suất có điều kiện

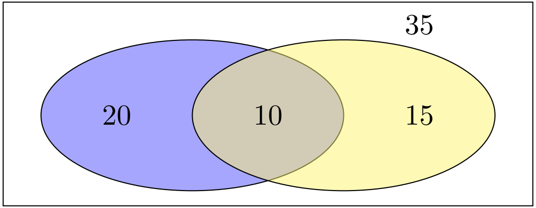
1.3 Xác suất có điều kiện

Bài toán. Một lớp học có 70 sinh viên. Giáo viên thấy rằng có 30 sinh viên có hộ khẩu tại Thành phố Hồ Chí Minh, 25 sinh viên thuộc khoa Công nghệ phần mềm, 10 sinh viên có hộ khẩu tại Thành phố Hồ Chí Minh học khoa Công nghệ phần mềm. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên.



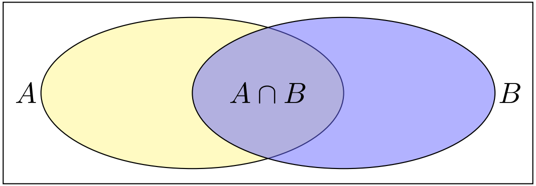
- Xác suất sinh viên học khoa công nghệ phần mềm là $\dfrac{25}{70}$.
- Xác suất sinh viên học khoa công nghệ phần mềm và có hộ khẩu tại Thành phố Hồ Chí Minh là bao nhiêu? **Đáp số:** $\mathbf{\dfrac{10}{70}}$.

1.3 Xác suất có điều kiện



- Xác suất sinh viên học khoa công nghệ phần mềm và có hộ khẩu tại Thành phố Hồ Chí Minh là bao nhiêu? **Đáp số:** $\mathbf{\frac{10}{70}}$.
- Xác suất sinh viên học khoa công nghệ phần mềm biết rằng sinh viên này có hộ khẩu tại Thành phố Hồ Chí Minh là bao nhiêu? **Đáp số:** $\mathbf{\frac{10}{30}}$.

Định nghĩa 1.18 **Xác suất có điều kiện** (conditional probability) của biến cố A biết rằng biến cố B đã xảy ra và $P(B) > 0$, ký hiệu $P(A|B)$, được xác định bởi



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Tương tự,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ với } P(A) > 0.$$

Ví dụ 1.19 Cho A, B là các biến cố của một phép thử và các xác suất

$$P(A) = 0,7; P(B) = 0,5 \text{ và } P(A \cup B) = 0,8.$$

Tính $P(A|B)$.

Giải. Đầu tiên, ta tính $P(A \cap B)$.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0,7 + 0,5 - 0,8 \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{0,4}{0,5} = 0,8 \end{aligned}$$

Ví dụ 1.20 Sau khi kiểm tra 200 bộ máy tính bàn, người ta thấy rằng có 20 bộ máy thiếu bàn phím, 15 bộ máy thiếu chuột; 4 bộ máy thiếu cả bàn phím và chuột. Chọn ngẫu nhiên một bộ máy. Giả sử bộ máy được chọn thiếu bàn phím. Tính xác suất bộ máy đó thiếu chuột.

Giải.

- Biến cố A : Bộ máy thiếu chuột.
- Biến cố B : Bộ máy thiếu bàn phím.
- Biến cố $A \cap B$: Bộ máy thiếu chuột và bàn phím.

Khi đó

$$P(A \cap B) = \frac{4}{200} \text{ và } P(B) = \frac{20}{200}$$

Như vậy

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4/200}{20/200} = \frac{4}{20} = 0,2$$

Trong một số trường hợp, ta thấy rằng $P(A|B) = P(A)$, tức là việc đã xảy ra biến cố B không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố A.

Định nghĩa 1.21 Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** (independent) nếu

$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

Định lý 1.22 Các điều sau đây là tương đương:

1. A và B độc lập (tức là $P(A \cap B) = P(A)P(B)$);
2. $P(B|A) = P(B)$;
3. $P(A|B) = P(A)$.

Ví dụ 1.23 Tung một đồng xu và gieo một con xúc xắc cùng một lúc.

a. Tính xác suất xuất hiện mặt ngửa và 4 chấm.

b. Biến cố xuất hiện mặt ngửa và biến cố xuất hiện mặt 4 chấm có độc lập không?

Giải. a. Các biến cố sơ cấp của phép thử:

$$S1; S2, S3, S4, S5, S6, N1, N2, N3, N4, N5, N6$$

(N ký hiệu mặt ngửa, S ký hiệu mặt sấp của đồng xu; các số phía sau là số chấm của xúc xắc)

Như vậy

$$P(N4) = \frac{1}{12}$$

b. Đặt các biến cố

- Biến cố A : đồng xu xuất hiện mặt ngửa,
- Biến cố B: xúc xắc xuất hiện mặt 4 chấm.

Khi đó

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}; P(A) = \frac{1}{2} \text{ và } P(B) = \frac{1}{6}$$

Do đó

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Vậy biến cố xuất hiện mặt ngửa và biến cố xuất hiện mặt 4 chấm là độc lập.

Ví dụ 1.24 Trong một thành phố nọ có 51% nam và 49% nữ, và tỉ lệ sử dụng điện thoại thông minh của họ được thể hiện trong bảng tỉ lệ dưới đây:

	Nam	Nữ	Tổng cộng
Sử dụng điện thoại thông minh	0,14	0,18	0,32
Không sử dụng điện thoại thông minh	0,37	0,31	0,68
Tổng	0,51	0,49	1,00

a. Gặp ngẫu nhiên một người nam. Tính xác suất người nam này có sử dụng điện thoại thông minh.

b. Biến cố gặp người nam và biến cố gặp người sử dụng điện thoại thông minh có độc lập không?

	Nam	Nữ	Tổng cộng
Sử dụng điện thoại thông minh	0,14	0,18	0,32
Không sử dụng điện thoại thông minh	0,37	0,31	0,68
Tổng	0,51	0,49	1,00

Giải.

- Biến cố A : Gặp người nam.
- Biến cố B : Gặp người sử dụng điện thoại thông minh.

a. Ta cần tính $P(B|A)$.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,14}{0,51} = 0,2745.$$

b. Ta có $P(B) = 0,32.$

- Suy ra $P(B|A) \neq P(B)$.
- Như vậy A, B không độc lập.

Định lý 1.25 Cho A, B là các biến cố độc lập. Khi đó

1. A và $\overline{B}$ là hai biến cố độc lập.
2. $\overline{A}$ và B là hai biến cố độc lập.
3. $\overline{A}$ và $\overline{B}$ là hai biến cố độc lập.

Ví dụ 1.26 Một công ty đang thăm dò dầu khí tại hai dự án, một ở châu Á và một ở châu Âu. Gọi A là biến cố dự án Châu Á thành công và B là biến cố dự án Châu Âu thành công. Giả sử A và B là các biến cố độc lập với $P(A) = 0,4$ và $P(B) = 0,7$.

a. Nếu dự án châu Á không thành công thì xác suất dự án châu Âu cũng không thành công là bao nhiêu?

b. Xác suất ít nhất một trong hai dự án thành công là bao nhiêu?

c. Giả sử rằng có ít nhất một trong hai dự án thành công. Xác suất chỉ dự án châu Á thành công là bao nhiêu?

- A là biến cố dự án Châu Á thành công
- B là biến cố dự án Châu Âu thành công
- A và B là các biến cố độc lập
- $P(A) = 0,4$ và $P(B) = 0,7$.

Giải. a. Nếu dự án châu Á không thành công thì xác suất dự án châu Âu cũng không thành công là bao nhiêu?
Ta cần tính $P(\overline{B}|\overline{A})$. Vì A, B là hai biến cố độc lập nên $\overline{B}, \overline{A}$ cũng là hai biến cố độc lập. Do đó

$$P(\overline{B}|\overline{A}) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

- A là biến cố dự án Châu Á thành công
- B là biến cố dự án Châu Âu thành công
- A và B là các biến cố độc lập
- $P(A) = 0,4$ và $P(B) = 0,7.$

Giải. b. Xác suất ít nhất một trong hai dự án thành công là bao nhiêu?

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0,4 + 0,7 - 0,4.0,7 \\ &= 0,82 \end{aligned}$$

- A là biến cố dự án Châu Á thành công
- B là biến cố dự án Châu Âu thành công
- A và B là các biến cố độc lập
- $P(A) = 0,4$ và $P(B) = 0,7.$

Giải. c. Giả sử rằng có ít nhất một trong hai dự án thành công. Xác suất chỉ dự án châu Á thành công là bao nhiêu?

$$P(A \cap \overline{B} | A \cup B) = \frac{P((A \cap \overline{B}) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(A)P(\overline{B})}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{0,4.(1 - 0,7)}{0,82} = \frac{6}{41}$$

Định nghĩa 1.27 Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập với nhau nếu

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Nhận xét: Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các biến cố độc lập thì $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ là các biến cố độc lập, trong đó A'_i là A_i hoặc $\overline{A}_i$.

Ví dụ 1.28 Tỉ lệ người dân bị mù màu (không phân biệt được màu đỏ và xanh lá) của một nước nọ là 9%. Chọn ngẫu nhiên 3 người. Tính xác suất cả 3 người này đều bị mù màu.

Giải. Biến cố A_i : người thứ i bị mù màu ($i = 1, 2, 3$).

Theo đề bài $P(A_i) = 0,09$ với $i = 1, 2, 3$. Vì ba người được chọn là độc lập với nhau nên

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ &= 0,09.0,09.0,09 = 0,000729. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.29 Một nghiên cứu về một loại pin của đồng hồ đeo tay được sản xuất năm 2020 thấy rằng xác suất pin của các công ty A, B, C sử dụng được đến hết năm 2023 lần lượt là 0,7; 0,9 và 0,3. Chọn 3 viên pin mới của các công ty trên và lắp vào 3 đồng hồ. Giả sử việc chọn các viên pin độc lập với nhau. Tính xác suất chỉ có duy nhất một viên pin không còn sử dụng được đến hết năm 2023.

Giải. Đặt các biến cố

- Biến cố A : Pin do công ty A sản xuất dùng được hết năm 2023
- Biến cố B : Pin do công ty B sản xuất dùng được hết năm 2023
- Biến cố C : Pin do công ty C sản xuất dùng được hết năm 2023
- Biến cố D : Chỉ có duy nhất một viên pin không còn dùng được hết năm 2023

Khi đó

$$D = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$$

Vì ba biến cố $(A \cap B \cap \overline{C}), (A \cap \overline{B} \cap C), (\overline{A} \cap B \cap C)$ là đôi một xung khắc nên

$$P(D) = P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C)$$

Vì việc chọn các viên pin là độc lập với nhau nên xác suất của tích các biến cố bên trên bằng tích các xác suất. Như vậy

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C) \\ &= P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(C) \\ &= 0,7.0,9.(1-0,3) + 0,7.(1-0,9).0,3 + (1-0,7).0,9.0,3 \\ &= 0,543 \end{aligned}$$

Định lý 1.30 (Quy tắc nhân xác suất) Cho A, B là các biến cố. Khi đó

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

hoặc

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B).$$

Tổng quát: Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các biến cố bất kì. Khi đó

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Ví dụ 1.31 Công ty bảo hiểm BVV thấy rằng 35% người dân trong một thành phố nọ có hợp đồng bảo hiểm xe máy với họ. Trong số những khách hàng này, có 12% có hợp đồng bảo hiểm nhân thọ với công ty. Chọn ngẫu nhiên một người dân của thành phố đó. Tính xác suất người này có cả hợp đồng bảo hiểm xe máy và bảo hiểm nhân thọ với công ty BVV.

Giải. Đặt các biến cố

- Biến cố A : người có hợp đồng bảo hiểm xe máy với công ty BVV.
- Biến cố B : người có hợp đồng bảo hiểm nhân thọ với công ty BVV.

Theo đề bài $P(A) = 0,35$ và $P(B|A) = 0,12$. Do đó

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= 0,35.0,12 = 0,042. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.32 Một đội gồm 15 sinh viên trong đó có 3 sinh viên biết thiết kế web. Chia đội này thành 3 nhóm, mỗi nhóm 5 người. Tính xác suất nhóm nào cũng có một sinh viên biết thiết kế web.

Giải. Biến cố A_i : Nhóm i có một sinh viên biết thiết kế web, $i = 1, 2, 3$. Sử dụng quy tắc nhân xác suất

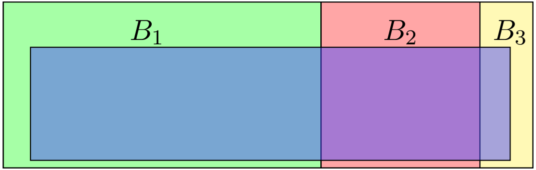
$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \\
&= \frac{C_3^1 C_{12}^4}{C_{15}^5} \cdot \frac{C_2^1 C_8^4}{C_{10}^5} \cdot \frac{C_1^1 C_4^4}{C_5^5} = 0,2747
\end{aligned}
$$

1.4 Công thức Bayes

1.4 Công thức Bayes

Bài toán. Một nhà máy sản xuất máy tính bảng đặt hàng các màn hình LED từ 3 nhà cung cấp khác nhau: 60% đến từ nhà cung cấp B_1, 30% đến từ nhà cung cấp B_2 và 10% đến từ nhà cung cấp B_3. Giả sử có 80% màn hình của nhà cung cấp B_1, 70% màn hình của nhà cung cấp B_2 và 60% màn hình của nhà cung cấp B_3 đáp ứng đủ tiêu chuẩn. Chọn 1 màn hình LED từ nhà máy và tính xác suất màn hình này đủ tiêu chuẩn.

- Biến cố A : màn hình đủ tiêu chuẩn.
- Biến cố B_i : màn hình của nhà cung cấp B_i với $i = 1, 2, 3$



$$A = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$$

Khi đó

$$A = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$$

trong đó B_1, B_2, B_3 là các biến cố đôi một xung khắc ($B_i \cap B_j = \varnothing$ với $i \neq j$). Do đó $A \cap B_1, A \cap B_2, A \cap B_3$ các biến cố đôi một xung khắc.

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$

Áp dụng quy tắc nhân xác suất

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

Theo đề bài, ta có

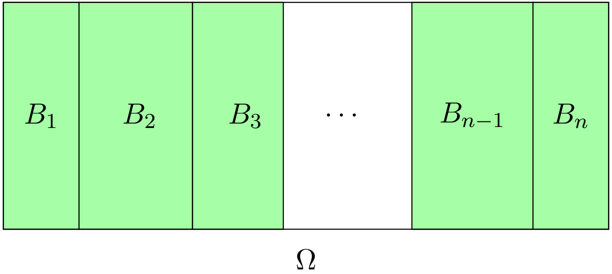
$$\begin{aligned} &P(B_1) = 0,6; \quad &&P(B_2) = 0,3; \quad &&P(B_3) = 0,1 \\ &P(A|B_1) = 0,8; \quad &&P(A|B_2) = 0,7; \quad &&P(A|B_3) = 0,6 \end{aligned}$$

Như vậy

$$P(A) = 0,6.0,8 + 0,3.0,7 + 0,1.0,6 = 0,75$$

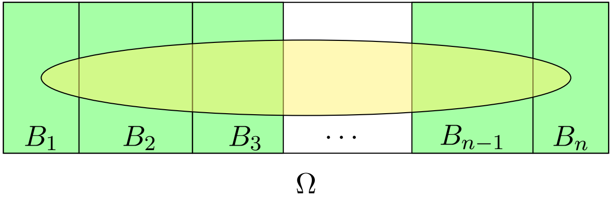
Định nghĩa 1.33 Tập các biến cố $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ được gọi là **đầy đủ** nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau:

- $B_i \cap B_j = \varnothing$ với mọi $i \neq j$;
- $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$.



Ví dụ 1.34 Một thư mục có 4 tập tin Word và 6 tập tin pdf. Chọn ngẫu nhiên 3 tập tin. Đặt B_i: "Chọn được i tập tin Word" với $i = 0, 1, 2, 3$. Khi đó $\{B_0, B_1, B_2, B_3\}$ là một tập đầy đủ.

Định lý 1.35 (**Công thức xác suất đầy đủ** (rule of total probability))
Cho $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ là một tập đầy đủ các biến cố và A là một biến cố của một phép thử.



Khi đó

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \ldots + P(B_n)P(A|B_n)$$

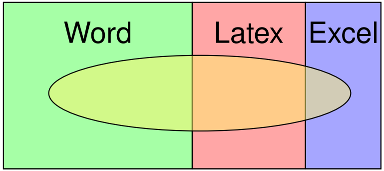
Ví dụ 1.36 Tại một trường đại học nọ, có 50% các văn bản viết bằng Word, 30% được viết bằng Latex và 20% viết bằng Excel. Người ta thấy rằng tỉ lệ văn bản có nhiều hơn 10 trang được viết bằng Word, Latex và Excel tương ứng là 40%, 20% và 30%. Chọn ngẫu nhiên một văn bản. Tính xác suất văn bản đó có nhiều hơn 10 trang.

Giải.

- Biến cố B_1 : văn bản viết bằng Word
- Biến cố B_2 : văn bản viết bằng Latex
- Biến cố B_3 : văn bản viết bằng Excel
- Biến cố A : văn bản có nhiều hơn 10 trang
- Ta có $\{B_1, B_2, B_3\}$ là một tập đầy đủ và

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \\ &= 0,5.0,4 + 0,3.0,2 + 0,2.0,3 = 0,32. \end{aligned}$$

Bài toán. Trong số những văn bản có nhiều hơn 10 trang, chọn ngẫu nhiên 1 văn bản. Tính xác suất văn bản đó được viết bằng Latex.



$$
\begin{aligned}
P(B_2|A) &= \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)} \\
&= \frac{0,3.0,2}{0,32} = 0,1875
\end{aligned}
$$

Định lý 1.37 (Định lý Bayes[3]) Cho tập đầy đủ các biến cố $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ và B là một biến cố bất kì với $P(B) \neq 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} P(A_i|B) &= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)} \end{aligned}$$

[3]Thomas Bayes (1701-1761) là nhà thống kê học, nhà triết học người Anh

Ví dụ 1.38 Trong tủ sách của bộ môn Toán - Lý, người ta thấy rằng có 30% là sách toán. Tỉ lệ sách toán tiếng Anh là 60%, tỷ lệ các sách khác được viết bằng tiếng Anh là 5%. Chọn ngẫu nhiên 1 quyển sách.

a. Tính xác suất sách đó viết bằng tiếng Anh.

b. Ta thấy nó được viết bằng tiếng Anh. Tính xác suất sách đó là sách toán.

Giải.

- Biến cố A : Chọn sách viết bằng tiếng Anh.
- Biến cố B_1 : Chọn được sách toán.
- Biến cố B_2 : Không chọn được sách toán.

a. Tập các biến cố $\{B_1, B_2\}$ là đầy đủ và

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) \\ &= 0,3.0,6 + 0,7.0,05 = 0,215 \end{aligned}$$

Ví dụ 1.29 Trong tủ sách của bộ môn Toán - Lý, người ta thấy rằng có 30% là sách toán. Tỉ lệ sách toán tiếng Anh là 60%, tỷ lệ các sách khác được viết bằng tiếng Anh là 5%. Chọn ngẫu nhiên 1 quyển sách.

a. Tính xác suất sách đó viết bằng tiếng Anh.

b. Ta thấy nó được viết bằng tiếng Anh. Tính xác suất sách đó là sách toán.

Giải.

- Biến cố A : Chọn sách viết bằng tiếng Việt.
- Biến cố B_1 : Chọn được sách toán.
- Biến cố B_2 : Không chọn được sách toán.

b. Tính

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{0,3.0,6}{0,215} = 0,8372.$$

Bài tập

Bài 1.8 Cho A, B là các biến cố của một phép thử thỏa mãn $P(A \cap \overline{B}) = 0,3$; $P(\overline{A \cup B}) = 0,2$ và $P(A \cap B) = 0,1$. Tính $P(A|B)$.

Bài 1.9 Một hộp có 5 bi trắng, 4 bi đen và 3 bi đỏ. Lấy ra lần lượt 4 viên bi (sau khi lấy ra không bỏ lại vào hộp). Tính xác suất 4 bi lấy ra theo thứ tự trắng, đỏ, trắng, đen.

Bài 1.10 Sinh viên tại một trường đại học có hai cơ hội để vượt qua một kỳ thi tốt nghiệp. Xác suất một sinh viên thi đậu lần thứ nhất là 0,8. Đối với những người trượt lần thứ nhất, xác suất đậu lần thứ hai là 0,6. Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên.

a. Tìm xác suất sinh viên đó thi đậu. (0,92)

b. Nếu sinh viên đó vượt qua bài thi thì xác suất sinh viên đó thi đậu trong lần thi đầu tiên là bao nhiêu? (0,87)

Bài 1.11 Hai nhà máy cùng sản xuất một loại sản phẩm. Tỉ lệ sản phẩm tốt của nhà máy thứ nhất là 0,9; của nhà máy thứ hai là 0,85. Từ một kho chứa 1/3 số sản phẩm của nhà máy thứ nhất và 2/3 số sản phẩm còn lại của nhà máy thứ hai, người ta lấy ra 1 sản phẩm để kiểm tra.

a. Tính xác suất để lấy được sản phẩm không tốt.

b. Giả sử sản phẩm lấy là sản phẩm tốt. Tính xác suất sản phẩm đó do nhà máy thứ 2 sản xuất.

Bài 1.12 Có hai lô hàng: lô thứ nhất có 7 sản phẩm loại A và 3 sản phẩm loại B; lô thứ hai có 8 sản phẩm loại A và 4 sản phẩm loại B.

a. Lấy ngẫu nhiên một lô hàng, rồi từ lô hàng đó lấy ra 2 sản phẩm. Tính xác suất trong 2 sản phẩm lấy ra có loại A.

b. Nếu 2 sản phẩm lấy ra có loại A thì xác suất để các sản phẩm loại A đó thuộc lô thứ 2 là bao nhiêu?