Chương 7. Kiểm định giả thuyết thống kê

Nguyễn Minh Trí

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

Mục tiêu

- Biết cách kiểm định sự khác biệt giữa hai trung bình tổng thể.
- Biết cách kiểm định sự khác biệt giữa hai tỷ lệ tổng thể.

7.4 Kiểm định giả thuyết đối với hai trung bình

- Cho hai tổng thể: tổng thể 1 và tổng thể 2
- Đặt μ_1, μ_2 lần lượt là trung bình của tổng thể 1 và tổng thể 2.
- Đặt σ_1, σ_2 lần lượt là độ lệch chuẩn của tổng thể 1 và tổng thể 2.
- Chọn mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ có kích thước n_1 từ tổng thể 1
- Chọn mẫu ngẫu nhiên $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ có kích thước n_2 từ tổng thể 2
- Giả sử hai mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ và $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ là độc lập
- Đặt $\delta = \mu_1 - \mu_2$

Định lý 7.1 Nếu n_1, n_2 đủ lớn ($n_1, n_2 \geq 30$) thì biến ngẫu nhiên

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

xấp xỉ phân phối chuẩn chuẩn tắc.

Nếu σ_1, σ_2 chưa biết thì ta lần lượt tính phương sai mẫu S_1^2, S_2^2 của hai mẫu ngẫu nhiên.

Định lý 7.2 Nếu n_1, n_2 đủ lớn ($n_1, n_2 \geq 30$) thì biến ngẫu nhiên

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$$

xấp xỉ phân phối chuẩn chuẩn tắc.

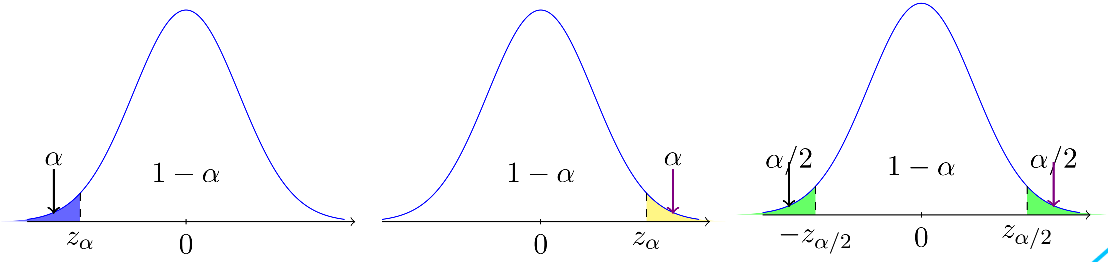
Bài toán. Kiểm định với mức ý nghĩa α

- Giả thuyết $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$
- Đối thuyết $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$ (hoặc $\mu_1 - \mu_2 < \delta$, hoặc $\mu_1 - \mu_2 > \delta$)

trong đó δ là một hằng số.

Các tổng thể có phân phối chuẩn với σ_1, σ_2 đã biết hoặc kích thước mẫu lớn $n_1, n_2 \geq 30$.

Đối thuyết H_1	Bác bỏ H_0 nếu	
$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$z < z_\alpha$	$\Phi(z_\alpha) = \alpha$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	$z > z_\alpha$	$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$\lvert z\rvert > z_{\alpha/2}$	$\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$



Ví dụ 7.3 Kiểm định:

Giả thuyết: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$; Đối thuyết: $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Giả sử các tổng thể có phân phối chuẩn với $\sigma_1 = \sigma_2 = 10$.

- Mẫu 1: $\overline{x}_1 = 82, n_1 = 30$
- Mẫu 2: $\overline{x}_2 = 78, n_2 = 40$

Với mức ý nghĩa 5%, hãy kiểm định giả thuyết đã cho.

Giải. Tính

$$z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \frac{82 - 78 - 0}{\sqrt{10^2/30 + 10^2/40}} = 1,66.$$

Mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ suy ra $z_{\alpha/2} = 1,96$.

Vì $|z| < z_{\alpha/2}$ nên ta không bác bỏ H_0.

Ví dụ 7.4 Để kiểm tra tuyên bố rằng điện trở của dây điện có thể giảm hơn $0,05$ ohm bằng cách hợp kim hóa, người ta khảo sát 32 dây điện thông thường và thấy rằng chúng có điện trở trung hình $\overline{x} = 0,136$ ohm và $s_X = 0,004$ ohm và 32 dây hợp kim có điện trở trung bình $\overline{y} = 0,083$ ohm và $s_Y = 0,005$ ohm. Ở mức ý nghĩa 0,05, điều này có hỗ trợ cho tuyên bố trên không?

Giải.

- Giả thuyết: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0,05$ và Đối thuyết $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0,05$
- Mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ suy ra $z_\alpha = 1,645$
- Tính
$$z = \frac{\overline{x} - \overline{y} - \delta}{\sqrt{s_X^2/n_1 + s_Y^2/n_2}} = \frac{0,136 - 0,083 - 0,05}{\sqrt{0,004^2/32 + 0,005^2/32}} = 2,65.$$
- Vì $z > z_\alpha$ nên ta không chấp nhận H_0, tức là tuyên bố đã cho là chấp nhận được.

Kích thước mẫu nhỏ và $\sigma_1 = \sigma_2$ chưa biết

- Các mẫu là độc lập và $n_1 < 30$ hoặc $n_2 < 30$
- Các tổng thể có phân phối chuẩn
- Các độ lệch chuẩn tổng thể $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (chưa biết)
- Biến ngẫu nhiên

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sigma\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$$

  có phân phối chuẩn
- Đặt

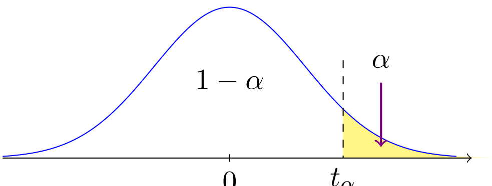
$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

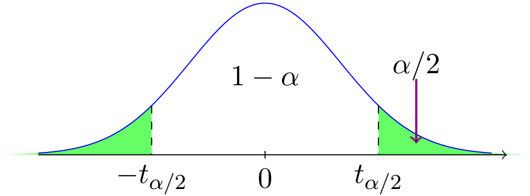
Biến ngẫu nhiên

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$$

có phân phối Student với bậc tự do $n_1 + n_2 - 2$.

Đối thuyết H_1	Bác bỏ H_0 nếu	
$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$t < -t_\alpha$	$P(T > t_\alpha) = \alpha$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	$t > t_\alpha$	$P(T > t_\alpha) = \alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$\|t\| > t_{\alpha/2}$	$P(T > t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$





Ví dụ 7.5 Một công ty thực hiện 2 phương pháp huấn luyện nhân viên mới và họ muốn xem phương pháp nào hiệu quả hơn. Người ta khảo sát 15 nhân viên mới được huấn luyện theo phương pháp A và 12 nhân viên mới được huấn luyện theo phương pháp B. Bảng điểm bài kiểm tra của các nhân viên được cho như sau

Phương pháp A					Phương pháp B			
56	50	52	44	52	59	54	55	65
47	47	53	45	48	52	57	64	53
42	51	42	43	44	53	56	53	57

Giả sử điểm bài kiểm tra có phân phối chuẩn và phương sai được xem là bằng nhau. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$, giám đốc muốn biết rằng liệu có sự khác biệt giữa điểm trung bình của hai phương pháp không?

Nhận xét: Phương sai của hai tổng thể là chưa biết nhưng bằng nhau.

Giải.

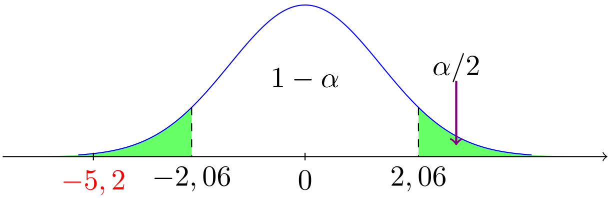
- Kiểm định: Giả thuyết $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ và Đối thuyết $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$.
- Phương pháp A: $\overline{x}_1 = 47,73; s_1^2 = 19,495$ và $n_1 = 15$
- Phương pháp B: $\overline{x}_2 = 56,5; s_2^2 = 18,273$ và $n_2 = 12$
- Do chưa biết σ_1, σ_2 và kích thước mẫu nhỏ nên ta dùng phân phối Student để kiểm định.
- Ta có

$$s_p^2 = \frac{(15-1)19,495 + (12-1)18,273}{15+12-2} = 18,957$$

và

$$t = \frac{47,73 - 56,5 - 0}{4,354\sqrt{1/15 + 1/12}} = -5,2$$

- Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ ta tính được $t_{\alpha/2} = 2,06$ (bậc tự do 25).



- Vì $|t| > t_{\alpha/2}$ nên bác bỏ H_0.
- Do đó có sự khác biệt giữa điểm trung bình của hai phương pháp huấn luyện.

Kích thước mẫu nhỏ và $\sigma_1 \neq \sigma_2$ chưa biết

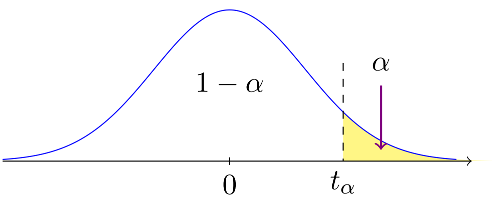
- Giả sử các tổng thể có phân phối chuẩn, chưa biết độ lệch chuẩn
- Giả sử $\sigma_1 \neq \sigma_2$
- Kích thước mẫu n_1, n_2 nhỏ
- Biến ngẫu nhiên

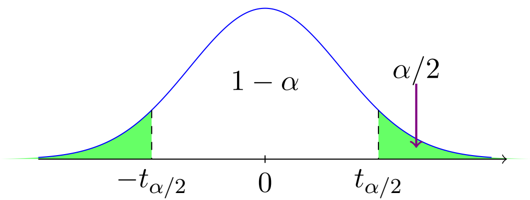
$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$$

có phân phối Student với bậc tự do là phần nguyên của số sau

$$\frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(s_1^2/n_1\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(s_2^2/n_2\right)^2}$$

Đối thuyết H_1	Bác bỏ H_0 nếu	
$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$t < -t_\alpha$	$P(T > t_\alpha) = \alpha$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	$t > t_\alpha$	$P(T > t_\alpha) = \alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$\|t\| > t_{\alpha/2}$	$P(T > t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$





Ví dụ 7.6 Tài khoản trên máy chủ A đắt hơn tài khoản trên máy chủ B. Tuy nhiên, máy chủ A nhanh hơn. Để xem việc sử dụng máy chủ nhanh hơn nhưng đắt hơn có phải là tối ưu hay không, người quản lý cần biết máy chủ đó nhanh hơn bao nhiêu. Một thuật toán máy tính nhất định được thực hiện 30 lần trên máy chủ A và 20 lần trên máy chủ B với kết quả như sau:

Máy chủ	Trung bình mẫu	Độ lệch chuẩn mẫu
A	$\overline{x} = 6,7$ phút	$s_1 = 0,6$ phút
B	$\overline{y} = 7,5$ phút	$s_2 = 1,2$ phút

Máy chủ A có nhanh hơn không? Xây dựng và kiểm định giả thuyết với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$. Giả sử thời gian thực hiện thuật toán có phân phối chuẩn.

Giải.

- Kiểm định: Giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ và Đối thuyết $H_1 : \mu_1 < \mu_2$.

Máy chủ	Trung bình mẫu	Độ lệch chuẩn mẫu	Kích thước mẫu
A	$\overline{x} = 6,7$ phút	$s_1 = 0,6$ phút	$n_1 = 30$
B	$\overline{y} = 7,5$ phút	$s_2 = 1,2$ phút	$n_2 = 20$

- Kiểm định: Giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ và Đối thuyết $H_1 : \mu_1 < \mu_2$.
- Do chưa biết σ_1, σ_2 và kích thước mẫu nhỏ nên ta dùng phân phối Student để kiểm định.
- Ta có

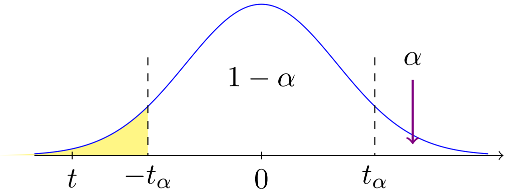
$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y} - \delta}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} = \frac{6,7 - 7,5 - 0}{\sqrt{0,6^2/30 + 1,2^2/20}} = -2,7603$$

với bậc tự do

$$\frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(s_1^2/n_1\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(s_2^2/n_2\right)^2} = \frac{\left(0,6^2/30 + 1,2^2/20\right)^2}{\frac{1}{30 - 1}\left(0,6^2/30\right)^2 + \frac{1}{20 - 1}\left(1,2^2/20\right)^2}$$

$$= 25,4$$

- Mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ và bậc tự do 25, ta có $t_\alpha = 1,708$.



- Vì $t < -t_\alpha$ nên ta bác bỏ H_0.
- Như vậy, ta có căn cứ để tin rằng máy chủ A nhanh hơn.

7.5 Kiểm định giả thuyết đối với hai tỉ lệ

7.5 Kiểm định giả thuyết đối với hai tỉ lệ

- Đặt p_1, p_2 lần lượt là tỉ lệ tổng thể 1 và tỉ lệ tổng thể 2.
- Chọn 2 mẫu độc lập có kích thước lần lượt là n_1, n_2
- $\hat{p}_1, \hat{p}_2$ lần lượt là tỉ lệ mẫu của mẫu ngẫu nhiên từ tổng thể 1 và tổng thể 2.
- Khi đó $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ có phân phối lấy mẫu với trung bình là $p_1 - p_2$ và độ lệch chuẩn của $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ là

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

- Nếu $n_1 p_1, n_1(1-p_1), n_2 p_2, n_2(1-p_2) \geq 5$ thì $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ xấp xỉ phân phối chuẩn.

Bài toán. Kiểm định với mức ý nghĩa α

- Giả thuyết $H_0 : p_1 - p_2 = \delta$
- Đối thuyết $H_1 : p_1 - p_2 \neq \delta$ (hoặc $p_1 - p_2 < \delta$, hoặc $p_1 - p_2 > \delta$) trong đó δ là một hằng số.

Định lý 7.7 Biến ngẫu nhiên

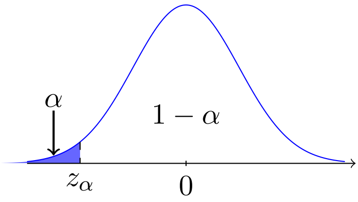
$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \text{ với } \overline{p} = \frac{\hat{p}_1 n_1 + \hat{p}_2 n_2}{n_1 + n_2}$$

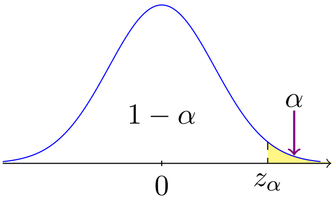
có phân phối chuẩn chuẩn tắc.

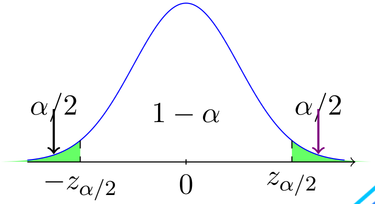
- Tính

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \text{ với } \overline{p} = \frac{\hat{p}_1 n_1 + \hat{p}_2 n_2}{n_1 + n_2}$$

Đối thuyết H_1	Bác bỏ H_0 nếu	
$p_1 - p_2 < \delta$	$z < z_\alpha$	$\Phi(z_\alpha) = \alpha$
$p_1 - p_2 > \delta$	$z > z_\alpha$	$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$
$p_1 - p_2 \neq \delta$	$\lvert z\rvert > z_{\alpha/2}$	$\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$







Ví dụ 7.8 Một kỹ sư thấy rằng trong một mẫu gồm 200 linh kiện có 120 linh kiện được sản xuất ở nước A. Người này kiểm tra một mẫu khác gồm 500 linh kiện thì thấy rằng có 240 linh kiện được sản xuất tại nước B. Một công ty sản xuất máy tính dùng các linh kiện đó để lắp ráp máy tính và nói rằng tỉ lệ linh kiện của nước A nhiều hơn nước B. Với mức ý nghĩa 5%, ta có đủ bằng chứng để bác bỏ tuyên bố của công ty không?

Giải.

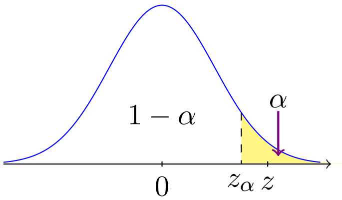
- Kiểm định: Giả thuyết $H_0 : p_1 = p_2$ và đối thuyết $H_1 : p_1 > p_2$.
- Ta có $\hat{p}_1 = \dfrac{120}{200} = 0,6; n_1 = 200$ và $\hat{p}_2 = \dfrac{240}{500} = 0,48; n_2 = 500$
- Tính

$$\overline{p} = \frac{\hat{p}_1 n_1 + \hat{p}_2 n_2}{n_1 + n_2} = \frac{120 + 240}{200 + 500} = 0,51.$$

và

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(0,6 - 0,48) - 0}{\sqrt{0,51(1-0,51)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{500}\right)}} = 2,9$$

- Mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ ta có $z_\alpha = 1,645$.



- Vì $z > z_\alpha$ nên ta bác bỏ H_0.
- Như vậy, ta có căn cứ để tin rằng tuyên bố của công ty là đúng.

Bài tập

Bài 7.1 Chỉ số IQ của 17 học sinh từ một khu vực của thành phố cho thấy trung bình mẫu là 106 với độ lệch chuẩn mẫu là 10, trong khi chỉ số IQ của 14 học sinh từ một khu vực khác được chọn độc lập cho thấy trung bình mẫu là 109 với độ lệch chuẩn mẫu là 7. Có phải có sự khác biệt đáng kể giữa chỉ số IQ của hai nhóm ở mức $\alpha = 0,01$ không? Giả sử rằng các phương sai tổng thể là bằng nhau.

Bài 7.2 Giả sử rằng hai tổng thể có phân phối chuẩn với phương sai chưa biết và không bằng nhau. Hai mẫu độc lập được rút ra từ các tổng thể này và dữ liệu thu được dẫn đến các số liệu thống kê cơ bản sau:

$$\begin{array}{lll} n_1 = 18 & \overline{x}_1 = 20,17 & s_1 = 4,3 \\ n_2 = 12 & \overline{x}_2 = 19,23 & s_2 = 3,8 \end{array}$$

Với mức ý nghĩa 5%, kiểm định sự khác biệt giữa trung bình của hai tổng thể.