



Chương 4: Vec tơ ngẫu nhiên

4.3 Kỳ vọng và hiệp phương sai

Nguyễn Văn Hời

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Bộ môn Toán - Lý



Ví dụ 1: Một chương trình bao gồm hai mô-đun. Đặt X là số lỗi trong mô-đun 1 và Y là số lỗi trong mô-đun 2:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	Tổng
$X=0$	0,2	0,2	0,05	0,05	0,5
$X=1$	0,2	0,1	0,1	0,1	0,5
Tổng	0,4	0,3	0,15	0,15	1

Đặt $Z = h(X, Y) = X + Y$ là số lỗi của chương trình, số lỗi trung bình:

$$\begin{aligned}
 E(Z) &= (0 + 0)p(0, 0) + (0 + 1)p(0, 1) + (0 + 2)p(0, 2) + (0 + 3)p(0, 3) \\
 &\quad + (1 + 0)p(1, 0) + (1 + 1)p(1, 1) + (1 + 2)p(1, 2) + (1 + 3)p(1, 3) \\
 &= \sum_i \sum_j (x_i + y_j)p(x_i, y_j).
 \end{aligned}$$



Ví dụ 2: Chiều dài Y (m) và rộng X (m) của một căn nhà phố là biến ngẫu nhiên rời rạc với:

	Y=5	Y=10	Y=50	Tổng
X=1	0,3	0,05	0	0,35
X=5	0,15	0,2	0,05	0,4
X=10	0,1	0,1	0,05	0,25
Tổng	0,55	0,35	0,1	1

Diện tích đất trung bình của một căn nhà phố:

$$E(XY) = (1 \cdot 5)p(1, 5) + \dots + (10 \cdot 50)p(10, 50) = \sum_i \sum_j (x_i y_j) p(x_i, y_j).$$



Ví dụ 3: Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời xác định như sau

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy, & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1 \\ 0, & \text{t/h khác} \end{cases}$$

và hàm $h(X, Y) = 0,75 + 0,75X + 1,5Y$. Tính $E(h(X, Y))$.

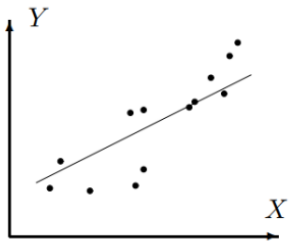
Giải:

$$\begin{aligned} E(h(X, Y)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (0,75 + 0,75x + 1,5y) 24xy dy dx = 1,65. \end{aligned}$$

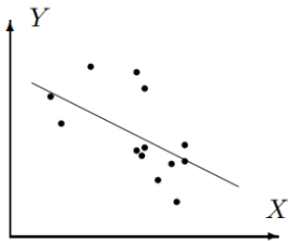
Hiệp phương sai

□ Hiệp phương sai của hai biến ngẫu nhiên X, Y , ký hiệu $Cov(X, Y)$, mô tả sự tương quan 2 biến ngẫu nhiên và được xác định bởi

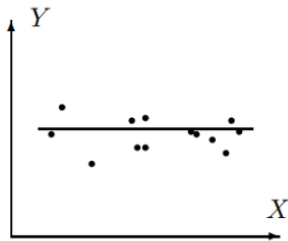
$$Cov(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y). \quad (3)$$



(a) $Cov(X, Y) > 0$



(b) $Cov(X, Y) < 0$



(c) $Cov(X, Y) = 0$

Ví dụ 4: Tính Cov trong ví dụ 2:

	Y=5	Y=10	Y=50	Tổng
X=1	0,3	0,05	0	0,35
X=5	0,15	0,2	0,05	0,4
X=10	0,1	0,1	0,05	0,25
Tổng	0,55	0,35	0,1	1

Bước 1: Tính

$$E(X) = \sum_i x_i p_X(x_i) = 4,85.$$

$$E(Y) = \sum_j y_j p_Y(y_j) = 11,25.$$

$$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j p(x_i, y_j) = 68,25.$$

Bước 2: Suy ra

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 13,6875.$$



Ví dụ 5: Tính $Cov(X, Y)$ biết hàm mật độ đồng thời xác định:

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy, & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1 \\ 0, & \text{t/h khác.} \end{cases}$$

Đầu tiên, ta tính

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{1-x} 24xy dy, & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{t/h khác} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 12x(1-x)^2, & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{t/h khác.} \end{cases} \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta tính

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 12x^2(1-x)^2 dx = 1.$$



Tương tự với Y

$$f_Y(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2, & \text{nếu } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{t/h khác.} \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 12y(1-y)^2 dy = 1.$$

Kế đến, ta xác định

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} 24x^2 y^2 dy dx = \frac{2}{15}.$$

Cuối cùng, ta được

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{2}{15} - 1 = -\frac{13}{15}.$$



Một số tính chất của hiệp phương sai

(1)

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$$

(2)

$$\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\text{Cov}(X, Y).$$

(3) Nếu X, Y độc lập thì

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$