Chương 4: Vec tơ ngẫu nhiên

4.2 Vec tơ ngẫu nhiên liên tục

Nguyễn Văn Hợi

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Bộ môn Toán - Lý

Nội dung

- Khái niệm.
- Hàm mật độ xác suất đồng thời (the joint probability density functions).
- Hàm mật độ xác suất thành phần (the marginal density functions).
- Hàm mật độ xác suất có điều kiện (the conditional density functions).

❒ X, Y: Biến ngẫu nhiên rời rạc, (X, Y): Vec tơ ngẫu nhiên rời rạc:

- ppxs đồng thời:

$$\sum_i \sum_j p_{XY}(x_i, y_j) = 1.$$

- ppxs thành phần theo X:

$$p_X(x_i) = \sum_j p_{XY}(x_i, y_j).$$

- ppxs có điều kiện:

$$p_{X|Y}(x_i|y_j) = \begin{cases} \dfrac{p_{XY}(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)}, & p_Y(y_j) \neq 0 \\ 0, & \text{t/h khác.} \end{cases}$$

- Độc lập: $p_{XY}(x_i, y_j) = p_X(x_i) p_Y(y_j)$.

❒ X, Y: Biến ngẫu nhiên liên tục, (X, Y): Vec tơ ngẫu nhiên liên tục:

- Hàm mật độ đồng thời:

$$f_{XY}(x, y) \geq 0; \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x, y) dA = 1.$$

- Hàm mật độ thành phần theo X :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy.$$

- Hàm mật độ có điều kiện:

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}, & f_Y(y) \neq 0 \\ 0, & \text{t/h khác.} \end{cases}$$

- Độc lập: $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$.

❐ Tính chất 1:

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D f_{XY}(x,y)dA.$$

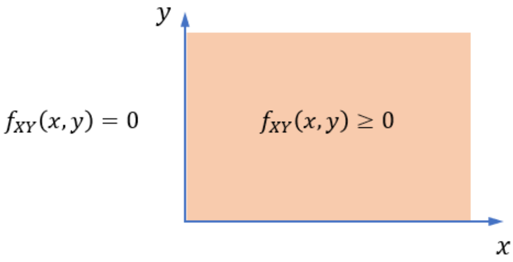
Ví dụ 1: Hàm mật độ xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên X và Y được cho như sau

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} Ce^{-x}e^{-2y}, & \text{nếu } x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{t/h khác.} \end{cases}$$

a. Tìm C.
Trước tiên, C phải thỏa điều kiện $f(x,y) \geq 0$ với mọi x, y. Nếu $x > 0, y > 0$ thì $f_{XY}(x,y) = Ce^{-x}e^{-2y}$. Vì $f_{XY}(x,y) \geq 0$ nên $C \geq 0$.
Ngoài ra,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x,y)dA = 1.$$

Biểu diễn miền xác định dương của f_{XY} $(f_{XY}(x,y) \geq 0)$.

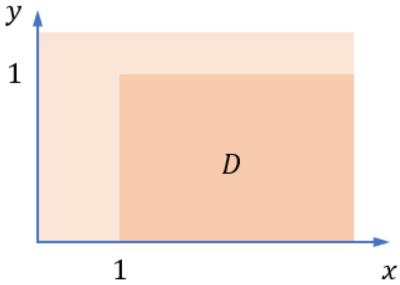


$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x,y)dA = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} Ce^{-x}e^{-2y}dxdy = \int_0^{\infty} Ce^{-2y}dy = -\frac{C}{2}e^{-2y}\Big|_0^{\infty} = \frac{C}{2}.$$

Từ đó suy ra $C = 2 > 0$ (thỏa).

b. Tính $P(X > 1, Y < 1)$.

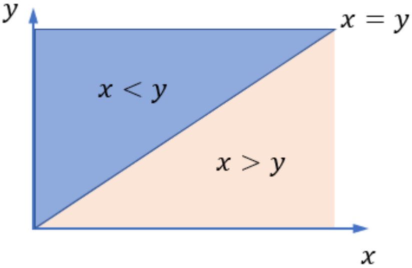
$$P(X > 1, Y < 1) = P\Big((X,Y) \in D = \{(x,y) : x > 1, y < 1\}\Big) = \iint_D f_{XY}(x,y)dA.$$



$$\iint_D f_{XY}(x,y)dA = \int_0^1 \int_1^\infty 2e^{-x}e^{-2y}dxdy = \int_0^1 2e^{-2y-1}dy = -e^{-2y-1}\,\Big|_0^1 = e^{-1} - e^{-3}.$$

c. Tính $P(X < Y)$.

$$P(X<Y) = P\Big((X,Y) \in D = \{(x,y) : x < y\}\Big) = \iint_D f_{XY}(x,y)dA = I.$$



$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{y} 2e^{-x}e^{-2y}dxdy = \int_0^{\infty} 2(e^{-2y} - e^{-3y})dy = (-e^{-2y} + \frac{2}{3}e^{-3y}) \mid_0^{\infty} = \frac{1}{3}.$$

d. Tính $f_X(x)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy.$$

Chia các trường hợp "CHỈ" ứng với x để tính.

- Với $x > 0$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{0}^{+\infty} 2e^{-x}e^{-2y}dy = e^{-x}.$$

  (Ở đây, ta tìm chặn trên nhỏ nhất và dưới lớn nhất cho y).

- Với $x \leq 0$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dy = 0.$$

Ví dụ 2: Hàm mật độ xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên X và Y được cho như sau

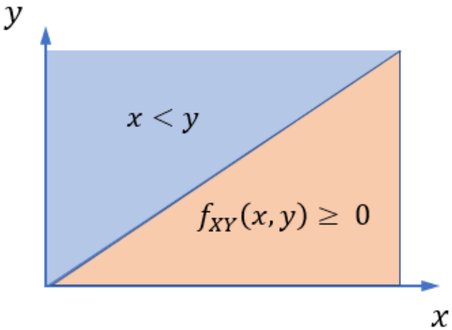
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} Cx^2y, & \text{nếu } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{t/h khác.} \end{cases}$$

a. Tìm C.

Trước tiên, C phải thỏa điều kiện $f_{XY}(x,y) \geq 0$ với mọi x, y. Nếu $x > 0, y > 0$ thì, $f_{XY}(x,y) = Cx^2y$. Vì $f_{XY}(x,y) \geq 0$ nên $C \geq 0$.

Ngoài ra,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x,y)dA = 1.$$

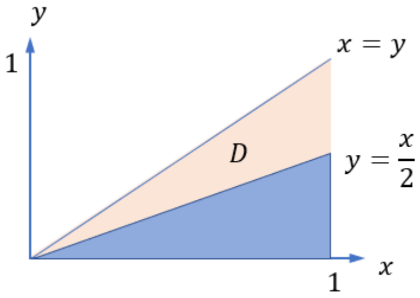


$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x,y)dA = \int_0^1 \int_0^x Cx^2 y dy dx = \int_0^1 \frac{C}{2} x^4 dx = \frac{C}{10}.$$

Suy ra $C = 10 > 0$ (thỏa).

b. Tính $P(Y \geq \frac{1}{2}X)$.

$$P(Y \geq \frac{1}{2}X) = P\Big((X,Y) \in D = \{(x,y) : y \geq \frac{1}{2}x\}\Big) = \iint_D f_{XY}(x,y)dA = I.$$



$$I = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{x} 10x^2 y dy dx = \int_0^1 5x^2(x^2 - \frac{x^2}{4})dx = \frac{3}{4}.$$

c. Tính $f_X(x), f_Y(y)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy.$$

Chia các trường hợp "CHỈ" ứng với x để tính.

- Với $0 \leq x \leq 1$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_0^x 10x^2 y dy = 5x^4.$$

  (Ở đây, ta tìm chặn trên nhỏ nhất và dưới lớn nhất cho y).

- Trường hợp khác,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dy = 0.$$

c. Tính $f_X(x), f_Y(y)$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx.$$

Chia các trường hợp "CHỈ" ứng với y để tính.

- Với $0 \leq y \leq 1$,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_y^1 10x^2y dx = \frac{10}{3}y(1-y^3).$$

  Ở đây, ta tìm chặn trên nhỏ nhất và dưới lớn nhất cho x.
- Trường hợp khác, ta được

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dx = 0.$$

d. Hai biến ngẫu nhiên X, Y có độc lập với nhau hay không?

$$f_{XY}(1,1) = 10 \neq f_X(1) f_Y(1) = 0.$$

Suy ra chúng không độc lập.

e. Tìm hàm mật độ có điều kiện $f_{X|Y}(x|y)$.

- Với $0 < y < 1$, ta được $f_Y(y) \neq 0$. Khi đó

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{10x^2 y}{(10/3)(y - y^4)} = \frac{3x^2}{1 - y^3}, \quad 0 < y \leq x \leq 1.$$

- Trường hợp khác, theo định nghĩa ta được

$$f_{X|Y}(x|y) = 0.$$

❒ Tính chất 2:

$$P(X \in A|Y \in B) = \int_A \int_B f_{X|Y}(x|y)dydx, \quad P(X \in A|Y = b) = \int_A f_{X|Y}(x|b)dx.$$

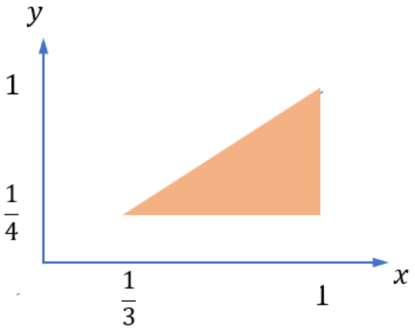
f. Tính

$$P(X > \frac{1}{3}|Y > \frac{1}{4}) = \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dydx$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{1} \int_{\frac{1}{4}}^{x} \frac{3x^2}{1-y^3}dydx$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{1} \int_{y}^{1} \frac{3x^2}{1-y^3}dxdy$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{1} 1dy = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$



g. Tính

$$P(X > \frac{1}{5}|Y = \frac{1}{4}).$$

Ta có

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{3x^2}{1 - y^3}, \quad 0 < y \leq x \leq 1.$$

Do đó khi $y = \frac{1}{4}$ cố định, ta có

$$f_{X|Y}(x|\frac{1}{4}) = \frac{3x^2}{1 - (1/4)^3}, \quad 1 \geq x \geq \frac{1}{4}.$$

Suy ra

$$P(X > \frac{1}{5}|Y = \frac{1}{4}) = \int_{\frac{1}{5}}^{\infty} f_{X|Y}(x|\frac{1}{4})dx = \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{3x^2}{1 - (1/4)^3}dx = \frac{1 - (1/4)^3}{1 - (1/4)^3} = 1.$$

Hàm phân phối xác suất đồng thời

❒ Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên khi đó hàm phân phối xác suất đồng thời (the joint probability distribution function) được định nghĩa bởi

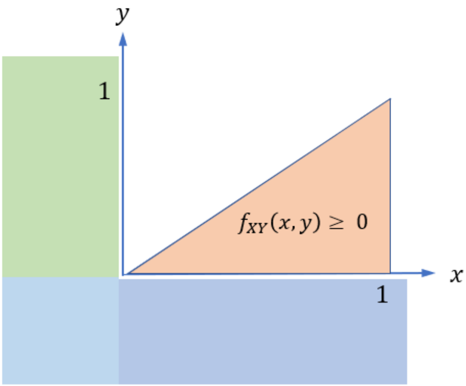
$$F(a,b) = P(X \le a, Y \le b) = \begin{cases} \sum_{x_i \le a} \sum_{y_j \le b} p_{XY}(x_i, y_j), & \text{nếu } X, Y \text{ rời rạc,} \\ \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx, & \text{nếu } X, Y \text{ liên tục.} \end{cases}$$

❒ Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục khi đó

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Ví dụ 3: Hàm mật độ xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên X và Y được cho như sau

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10x^2y, & \text{nếu } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{t/h khác.} \end{cases}$$



(1) Nếu $a \le 0$ thì $f_{XY}(x,y) = 0$ và do đó

$$F(a,b) = \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f_{XY}(x,y)dydx = 0.$$

(2) Nếu $b \le 0$ thì $f_{XY}(x,y) = 0$ và do đó

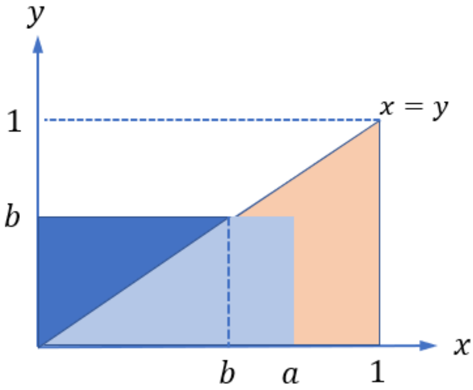
$$F(a,b) = \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f_{XY}(x,y)dydx = 0.$$

(3) Nếu $1 \geq a \geq b > 0$ thì $f_{XY}(x,y) = 10x^2y$ và do đó

$$F(a,b) = \int_0^b \int_y^a 10x^2y\,dx\,dy$$
$$= \frac{5}{3}a^3b^2 - \frac{2}{3}b^5.$$

(4) Nếu $a > 1 \geq b > 0$ thì

$$F(a,b) = \int_0^b \int_y^1 10x^2y\,dx\,dy$$
$$= \frac{5}{3}b^2 - \frac{2}{3}b^5.$$

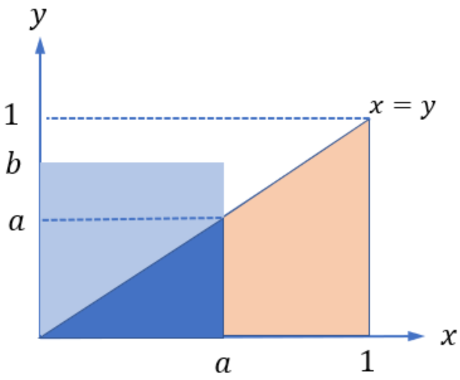


(5) Nếu $1 \geq b \geq a > 0$ thì

$$F(a,b) = \int_0^a \int_0^x 10x^2 y dy dx = a^5.$$

(6) Nếu $b > 1 \geq a > 0$ thì

$$F(a,b) = \int_0^a \int_0^x 10x^2 y dy dx = a^5.$$



(7) Nếu $a > 1$ và $b > 1$ thì

$$F(a,b) = \int_0^1 \int_0^x 10x^2 y dy dx = 1.$$

Bài tập

Hàm mật độ xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên X và Y được cho như sau

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} Cx^2y, & \text{nếu } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{t/h khác.} \end{cases}$$

a. Tính $f_{Y|X}(y|x)$.

b. Tính

$$P(Y < \frac{1}{8}|X = \frac{1}{4}).$$

c. Tính

$$P(Y > 1|X = \frac{1}{3}).$$