



Chương 7. Kiểm định giả thuyết thống kê

Nguyễn Văn Hời

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Bộ môn Toán - Lý





Nội dung

- Kiểm định là gì?
- Giả thuyết thông kê.
- Giả thuyết và đối thuyết.
- Kiểm định theo xác suất.
- Các phương pháp kiểm định.



Kiểm định là gì?

Kiểm định: Kiểm tra một phát biểu/khẳng định nào đó có giá trị hay không.

Ví dụ 1:

- Hầu hết mọi người tìm được công việc thông qua internet.

$$p > 0,5, \quad p: \text{Xác suất kiếm được việc thông qua internet}$$

- Điểm trung bình của bài thi Đánh giá năng lực (ĐGNL) của Đại học Quốc gia TP HCM năm 2022 là 646 điểm.

$$\mu = 646, \quad \mu : \text{Điểm trung bình của bài thi ĐGNL 2022.}$$

Giả thuyết thống kê (Statistical hypothesis): Là một dự đoán về một tham số của tổng thể (μ, σ, p, \dots) .



Giả thuyết và đôi thuyết

Giả thuyết (null hypothesis), H_0 : Nói rằng không có sự khác biệt giữa một tham số và một giá trị cụ thể hoặc không có sự khác biệt giữa hai tham số.

Đôi thuyết (Alternative hypothesis), H_1 : Tham số tổng thể có giá trị khác với H_0 .

Ví dụ 2:

$$H_0 : \mu = 646.$$

$$H_1 : \mu \neq 646 \quad \text{hoặc} \quad \mu > 646 \quad \text{hoặc} \quad \mu < 646.$$

Ví dụ 3:

$$H_0 : p = 0,5.$$

$$H_1 : p < 0,5, \quad \text{hoặc} \quad p > 0,5, \quad \text{hoặc} \quad p \neq 0,5.$$



Làm thế nào để kiểm định

- Bác bỏ H_0 : Ta có đủ bằng chứng để khẳng định giả thuyết H_0 là sai.
- Không bác bỏ H_0 : Ta không có đủ bằng chứng để bác bỏ H_0 .

Chú ý:

- Bác bỏ H_0 dẫn đến ta chấp nhận H_1 .
- Không bác bỏ H_0 không đủ bằng chứng để khẳng định H_1 đúng hay sai!

Ví dụ 4: Hầu hết mọi người có được công việc của họ thông qua internet.

- Giả thuyết thống kê/phát biểu (cần kiểm định)
 - ▶ Thuận (chiều của phát biểu):

$$p > 0,5.$$

- ▶ nghịch (ngược với phát biểu):

$$p \leq 0,5.$$

- Giả thuyết
 - ▶ Giả thuyết H_1 : $p > 0,5$.
 - ▶ Đối thuyết H_0 : $p = 0,5$.

Ví dụ 5: Điểm trung bình của bài thi ĐGNL 2022 là 646 điểm.

- Giả thuyết thống kê/phát biểu
 - ▶ Thuận (chiều của phát biểu):

$$\mu = 646.$$

- ▶ nghịch (ngược với phát biểu):

$$\mu \neq 646.$$

- Giả thuyết
 - ▶ Giả thuyết H_0 : $\mu = 646$.
 - ▶ Đối thuyết H_1 : $\mu \neq 646$.



Ví dụ 6: Trung bình của nước trong chai ít nhất là 250 *ml*.

Phát biểu

- Thuận: $\mu \geq 250$.
- Nghịch: $\mu < 250$.

Giả thuyết

- $H_0 : \mu = 250$.
- $H_1 : \mu < 250$.

Ví dụ 7: Tỷ lệ CEO nam lớn hơn 0,5.

Phát biểu

- Thuận: $p > 0,5$.
- Nghịch: $p \leq 0,5$.

Giả thuyết

- $H_1 : p > 0,5$.
- $H_0 : p = 0,5$.



Kiểm định theo xác suất

(1) Kiểm định tỉ lệ p (từ H_0): n đủ lớn và $np > 5, n(1 - p) > 5$,

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0, 1).$$

(2) Trung bình μ :

(2.1) σ cho trước; X có phân phối chuẩn hoặc $n \geq 30$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

(2.2) σ chưa biết; $n \geq 30$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

(2.3) σ chưa biết, $n < 30$ và X có phân phối chuẩn

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim St(n - 1).$$

Các phương pháp kiểm định

- Mức ý nghĩa (significance level)**

$$\alpha = P(\text{Bác bỏ } H_0 | H_0 \text{ đúng}).$$

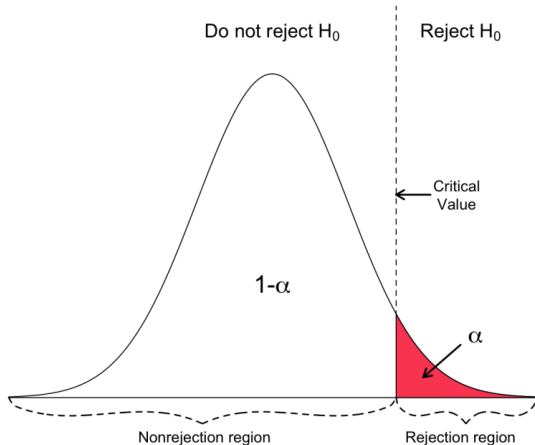
- Giá trị tới hạn (critical value):**

$$z_\alpha, z_{\alpha/2}, t_\alpha, \dots$$

chia \mathbb{R} thành: miền bác bỏ và miền không bác bỏ.

- Kiểm định bên phải:**

$$H_1 : \cdot > \cdot.$$



Các phương pháp kiểm định

- **Mức ý nghĩa (significance level)**
 $\alpha = P(\text{Bác bỏ } H_0 | H_0 \text{ đúng})$.

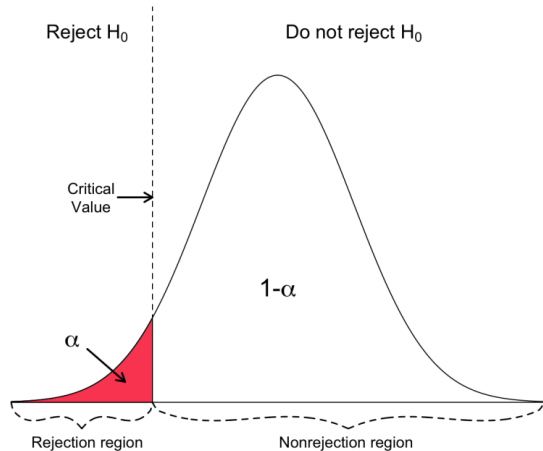
- **Giá trị tới hạn (critical value):**

$$z_\alpha, z_{\alpha/2}, t_\alpha \dots$$

chia \mathbb{R} thành: miền bác bỏ và miền không bác bỏ.

- **Kiểm định bên trái:**

$$H_1 : \cdot < \cdot$$



Các phương pháp kiểm định

- Mức ý nghĩa (significance level)**

$\alpha = P(\text{Bác bỏ } H_0 | H_0 \text{ đúng})$.

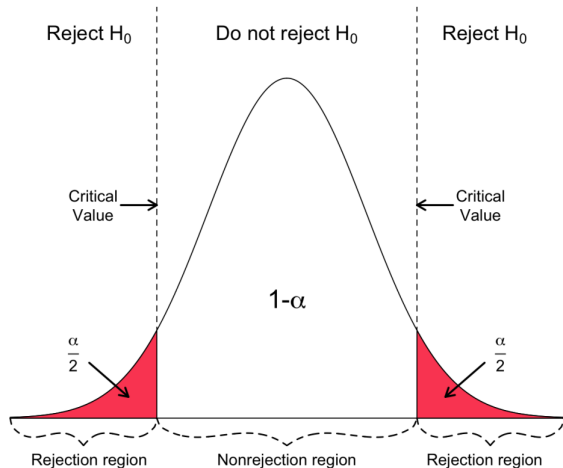
- Giá trị tới hạn (critical value):**

$$z_\alpha, z_{\alpha/2}, t_\alpha \dots$$

chia \mathbb{R} thành: miền bác bỏ và miền không bác bỏ.

- Kiểm định 2 bên:**

$$H_1 : \cdot \neq \cdot$$



Kiểm định tỉ lệ

- Cỡ mẫu $n \geq 30$
- $np \geq 5$ và $n(1 - p) \geq 5$.
- Tỉ lệ mẫu \hat{p} .
- Kiểm định $H_0 : p$.
- Kiểm định theo xác suất

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0, 1).$$

Ví dụ 8: Khảo sát 300 công ty thấy có 180 CEO là nam. Kiểm định khẳng định rằng hầu hết các CEO là nam giới với mức ý nghĩa 0,05.

(1) Phát biểu

- ▶ Thuận: $p > 0,5$.
- ▶ Nghịch: $p \leq 0,5$.

(2) Giả thuyết

- ▶ $H_1: p > 0,5$.
- ▶ $H_0: p = 0,5$.

(3) Kiểm định xác suất, với $n = 300$,

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = 3,464, \quad \hat{p} = \frac{180}{300}.$$

(4) Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,05$.

(5) Minh họa:

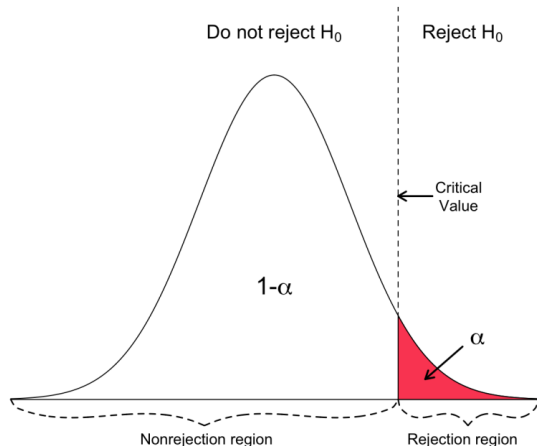
$$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha \rightarrow z_\alpha = 1,645.$$

(6) Kiểm định:

Vì $z > z_\alpha$, ta bác bỏ H_0 .

(7) Kết luận:

Ta có đủ bằng chứng để ủng hộ tuyên bố rằng hầu hết các CEO là nam giới.



Ví dụ 9: Trong 1 lô hàng lấy ngẫu nhiên 580 bóng có 428 bóng xanh, 152 vàng, sử dụng mức ý nghĩa 0,05 để kiểm tra khẳng định rằng tỷ lệ bóng vàng là 0,25.

(1) Phát biểu

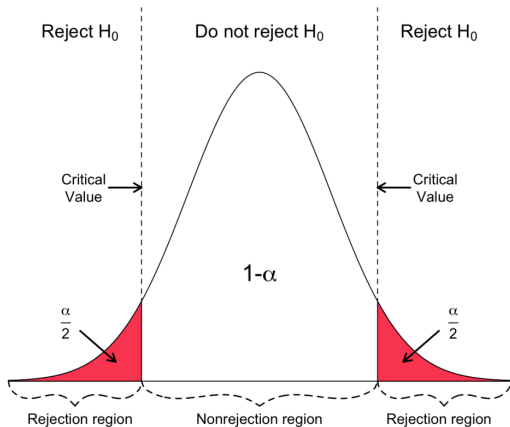
- ▶ Thuận: $p = 0,25$ (tỷ lệ bóng vàng).
- ▶ Nghịch: $p \neq 0,25$.

(2) Giả thuyết

- ▶ $H_0: p = 0,25$.
- ▶ $H_1: p \neq 0,25$.

(3) Kiểm định xác suất

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{(p(1-p)/n)}} = 0,671, \quad \hat{p} = \frac{152}{580}.$$



(4) Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,05$.

(5) Minh họa:

$$\Phi(-z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,81$$

(6) Kiểm định:

vì $z_{\alpha/2} > z > -z_{\alpha/2}$ suy ra không bác bỏ H_0 .

(7) Kết luận:

Ta không đủ dữ kiện bác bỏ khẳng định tỉ lệ bóng vàng là 0,25.

Kiểm định μ khi biết σ^2

- Cỡ mẫu $n \geq 30$ hoặc X có phân phối chuẩn.
- $X \sim N(\mu, \sigma)$ với σ cho trước.
- Kiểm định theo xác suất

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{(\sigma/\sqrt{n})} \sim N(0, 1).$$

Ví dụ 10: khảo sát 465 sản phẩm thấy khối lượng trung bình 0,8625 kg. Giả sử khối lượng có phân phối chuẩn với $\sigma = 0,0505$ kg. Kiểm tra phát biểu khối lượng trung bình lớn hơn 0,8535 với mức ý nghĩa $\alpha = 0,001$.

(1) Phát biểu

- Thuận: $\mu > 0,8535$.
- Nghịch: $\mu \leq 0,8535$.

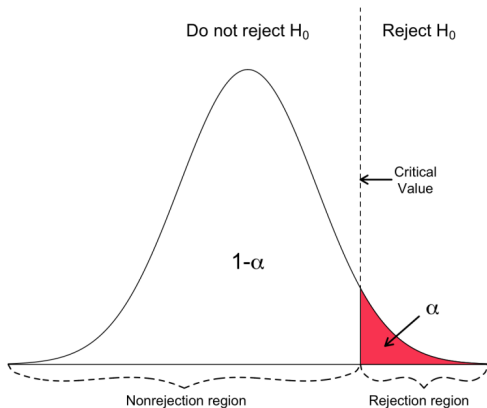
(2) Giả thuyết

- $H_1: \mu > 0,8535$.
- $H_0: \mu = 0,8535$.

(3) Kiểm định theo xác suất, $n = 465$ cỡ mẫu,

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{(\sigma/\sqrt{n})} = 3,835.$$

(4) Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,001$.



(5) Minh họa

$$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha \rightarrow z_\alpha = 3,09.$$

(6) Kiểm định:

Vì $z_\alpha < z$ suy ra bác bỏ H_0 .

(7) Kết luận:

Đủ chứng cứ để ủng hộ khẳng định khối lượng trung bình lớn hơn 0,8535 kg.

Kiểm định μ với σ chưa biết

- Cỡ mẫu $n < 30$.
- $X \sim N(\mu, \sigma)$ và σ chưa biết.
- Kiểm định theo xác suất

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{(S/\sqrt{n})} \sim St(n-1).$$

Ví dụ 11: Cho 29 lon soda có thể tích trung bình 12,11 ml với độ lệch chuẩn 0,27 ml. Giả sử thể tích có phân phối chuẩn, kiểm tra tuyên bố thể tích trung bình lớn hơn 12 ml với $\alpha = 0,001$.

(1) Phát biểu

- ▶ Thuận: $\mu > 12$.
- ▶ Nghịch: $\mu \leq 12$.

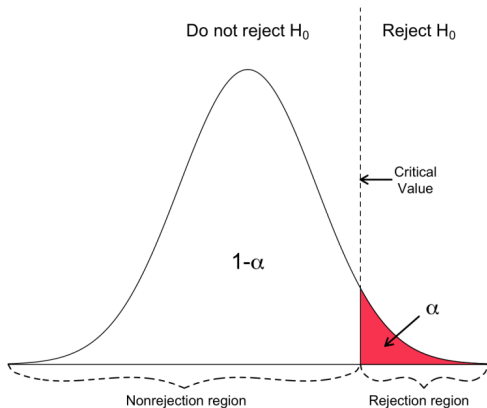
(2) Giả thuyết

- ▶ $H_1: \mu > 12$.
- ▶ $H_0: \mu = 12$.

(3) Kiểm định theo xác suất

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{(S/\sqrt{n})} = 2,192.$$

(4) Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,001$.



(5) Minh họa

$$P(t > t_{\alpha}) = \alpha \rightarrow t_{\alpha} = 3,408.$$

(6) Kiểm định: vì $t < t_{\alpha}$ suy ra không bác bỏ H_0 .

(7) Kết luận:
Ta không có đủ bằng chứng để bác
khẳng định thể tích lớn hơn 12 ml.

Ví dụ 12: Một giáo viên nói rằng lương trung bình của giáo viên tại TPHCM ít hơn 6 triệu đồng một tháng trong năm 2015. Chọn ngẫu nhiên 8 giáo viên thì thấy mức thu nhập trung bình hàng tháng (đơn vị là triệu đồng) của họ trong năm 2015 là

6; 5,6; 6; 5,5; 7; 5,5; 6; 5,5.

Với mức ý nghĩa 10%, tuyên bố của giáo viên đó có chấp nhận được không?

(1) Phát biểu

- ▶ Thuận: $\mu < 6$.
- ▶ Nghịch: $\mu \geq 6$.

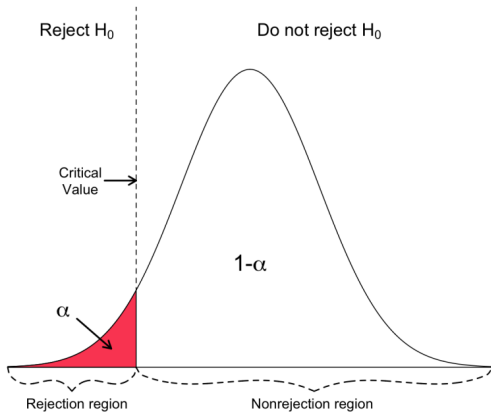
(2) Giả thuyết

- ▶ $H_1: \mu < 6$.
- ▶ $H_0: \mu = 6$.

(3) Kiểm định theo xác suất, với
 $\bar{X} = 5,8878, S = 0,508,$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{(S/\sqrt{n})} = -0,6247.$$

(4) Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,1$.



(5) Minh họa

$$P(T < t_\alpha) = \alpha \rightarrow t_\alpha = -1,415.$$

(6) Kiểm định:

Vì $t_\alpha < t$ suy ra không bác bỏ H_0 .

(7) Kết luận:

Ta không có đủ bằng chứng để bác bỏ khẳng định lương dưới 6 triệu.



Luyện tập chung

Ví dụ 13: Theo báo cáo "Thị trường IT Việt Nam - Developers Recruitment State 2021" do TopDev công bố cho biết, tính đến quý II/2021, kỹ sư trí tuệ nhân tạo (AI) và máy học (Machine Learning) là vị trí có mức lương trung bình hàng tháng cao nhất trong các kỹ sư IT, đạt 3054 USD (khoảng 70 triệu đồng). Một cuộc khảo sát 30 kỹ sư trí tuệ nhân tạo tốt nghiệp từ một trường đại học X cho thấy họ có mức lương trung bình là 3105 USD/tháng. Hãy kiểm tra kết luận nói rằng các kỹ sư trí tuệ nhân tạo của trường X có mức thu nhập trung bình lớn hơn 3054 USD/tháng với mức ý nghĩa 0,05. Giả sử thu nhập của các kỹ sư trí tuệ nhân tạo có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn tổng thể là 120 USD.

Đây là một dạng toán kiểm định giả thuyết về kỳ vọng khi biết độ lệch chuẩn tổng thể.



- Gọi μ thu nhập trung bình của các kỹ sư trí tuệ nhân tạo.

(1) Phát biểu

- ▶ Thuận: $\mu > 3054$.
- ▶ Nghịch: $\mu \leq 3054$.

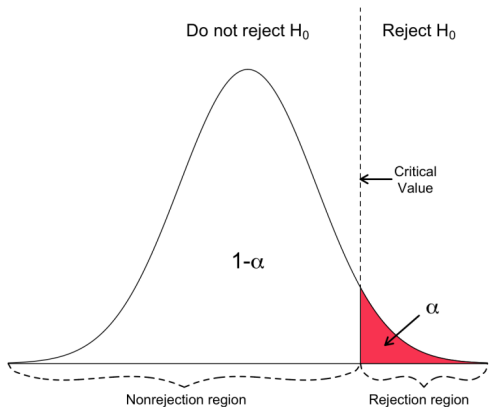
(2) Giả thuyết

- ▶ $H_1: \mu > 3054$.
- ▶ $H_0: \mu = 3054$.

(3) Kiểm định theo xác suất: $\bar{X} = 3105$, $n = 30$, và độ lệch chuẩn $\sigma = 120$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{(\sigma/\sqrt{n})} = \frac{3105 - 3054}{120/\sqrt{30}} = 2,34.$$

(4) Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,05$.



(5) Minh họa

$$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha \rightarrow z_\alpha = 1,65.$$

(6) Kiểm định:

Vì $z = 2,34 > 1,65 = z_\alpha$ suy ra bác bỏ H_0 .

(7) Kết luận:

Tuyên bố lương trung bình của các kỹ sư trí tuệ nhân tạo nhiều hơn 3054 USD/tháng là chấp nhận được.



Ví dụ 14: Một nhà nghiên cứu nói rằng trung bình giá tiền của một đôi giày thể thao nam là ít hơn 80 USD. Chọn ngẫu nhiên 36 đôi giày thể thao nam để khảo sát giá, ta được kết quả sau (USD/đôi)

60 70 75 55 80 55 50 40 80 70 50 95 120 90 75 85 80 60
110 65 80 85 85 45 75 60 90 90 60 95 110 85 45 90 70 70

Giả sử giá giày có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 19,2 USD. Tuyên bố của nhà nghiên cứu có chấp nhận được không với mức ý nghĩa 10%?



- Gọi μ giá trung bình của một đôi giày thể thao nam.

(1) Phát biểu

- ▶ Thuận: $\mu < 80$.
- ▶ Nghịch: $\mu \geq 80$.

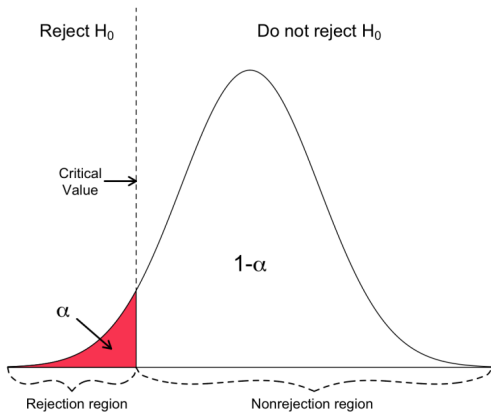
(2) Giả thuyết

- ▶ $H_1: \mu < 80$.
- ▶ $H_0: \mu = 80$.

(3) Kiểm định theo xác suất: $\bar{X} = 75$, $n = 36$, và độ lệch chuẩn $\sigma = 19,2$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{(\sigma/\sqrt{n})} = \frac{75 - 80}{19,2/36} = -1,56.$$

(4) Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,1$.



(5) Minh họa

$$\Phi(z_\alpha) = \alpha \rightarrow z_\alpha = -1,28.$$

(6) Kiểm định:

Vì $z < z_\alpha$ suy ra bác bỏ H_0 .

(7) Kết luận:

Ta có căn cứ để xác nhận giá tiền trung bình của một đôi giày thể thao nam ít hơn 80 USD là chấp nhận được.

Ví dụ 15: Một người ăn kiêng nói rằng có 60% số người tránh các thức ăn có chất béo. Một cuộc khảo sát 200 người, người ta thấy rằng có 128 người nói rằng họ đang tránh các thức ăn có chất béo trong các bữa ăn. Với mức ý nghĩa 5%, ta có thể bác bỏ tuyên bố của người ăn kiêng này không?

- Gọi p là tỉ lệ người tránh các thức ăn có chất béo.

(1) Phát biểu

- ▶ Thuận: $p = 0,6$.
- ▶ Nghịch: $p \neq 0,6$.

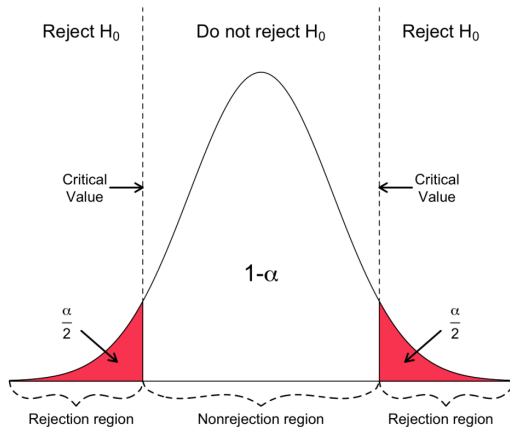
(2) Giả thuyết

- ▶ $H_0: p = 0,6$.
- ▶ $H_1: p \neq 0,6$.

(3) Kiểm định theo xác suất: $\hat{p} = \frac{128}{200} = 0,64$, $n = 200$

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} = \frac{0,64 - 0,6}{\sqrt{0,6(1-0,6)/200}} = 1,15.$$

(4) Mức ý nghĩa: $\alpha = 0,05$.

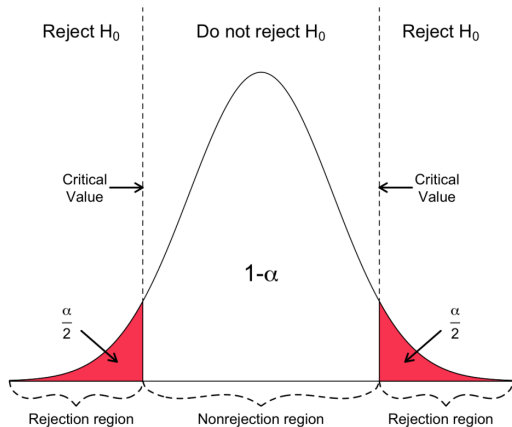


(5) Minh họa

$$\Phi(-z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$$

(6) Kiểm định:

Vì $-z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{\frac{\alpha}{2}}$ suy ra không bác bỏ H_0 .



(5) Minh họa

$$\Phi(-z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$$

(6) Kiểm định:

Vì $-z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{\frac{\alpha}{2}}$ suy ra không bác bỏ H_0 .

(7) Kết luận:

Ta không có căn cứ để bác khẳng định có 60% người tránh các thức ăn có chất béo.



Bài tập

Câu 1: Một nhân viên bán hàng tại một cửa hàng laptop nói rằng tuổi thọ trung bình của laptop hiệu Z là 30000 giờ. Một cuộc khảo sát 40 laptop hiệu Z cho thấy tuổi thọ trung bình của chúng là 30456 giờ. Biết rằng độ lệch chuẩn tổng thể là 1684 giờ. Với mức ý nghĩa 10% nhận được không?

Câu 2: Một công ty cung cấp dịch vụ internet nói rằng có 40% khách hàng của họ gặp sự cố về đường truyền trong một năm. Một nhóm gồm 100 khách hàng được chọn và người ta thấy rằng có 37 khách hàng gặp sự cố về đường truyền. Với mức ý nghĩa 1%, hãy kết luận về tuyên bố của công ty cung cấp dịch vụ internet.

Câu 3: Một báo cáo cho thấy rằng có ít hơn 78% sinh viên khi đọc các trang web bằng tiếng Anh. Chọn ngẫu nhiên 143 sinh viên tại một trường đại học và người ta thấy có 100 sinh viên sử dụng Google Translate khi đọc các trang web tiếng Anh. Với mức ý nghĩa 5% của báo cáo trên.



Câu 4: Một báo cáo cho biết rằng trung bình số lần mua hàng online của một phụ nữ trong một tháng là 5,8 lần. Một nhà nghiên cứu chọn ngẫu nhiên 20 phụ nữ và thu được bảng số liệu về số lần mua hàng online trong một tháng như sau

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 7 & 2 & 9 & 4 & 6 & 6 \\ 8 & 0 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Giả sử số lần mua hàng online của phụ nữ có phân phối chuẩn. Với mức ý nghĩa 5%, hãy kết luận về báo cáo trên.

Câu 5: Một nhà báo nói rằng học phí trung bình của 4 năm học đại học của một sinh viên hơn 11,4 triệu đồng. Cô ấy chọn ngẫu nhiên 36 ngành học 4 năm tại các trường đại học và nhận thấy mức học phí trung bình của 36 ngành này là 11,9 triệu đồng. Biết độ lệch chuẩn của tổng thể là 1,318 triệu đồng. Với mức ý nghĩa 5%, phát biểu của nhà báo đó có chấp nhận được không?