猫山王的专栏

记录工作的点点滴滴

目录视图 摘要视图 RSS 订阅

个人资料

猫山王

访问： 566261次

积分： 6515

等级： BLOG 6

排名： 第3482名

原创： 129篇 转载： 155篇

译文： 8篇 评论： 89条

文章搜索

张正友标定法【计算机视觉学习笔记--双目视觉几何框架系列】

2015-02-01 18:45 38215人阅读 评论(

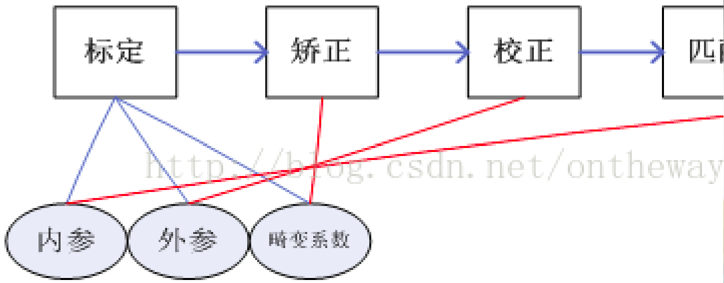
三、致敬“张正友标定”

此处“张正友标定”又称“张氏标定”，是指张正友教授于1998年提出的单平面棋盘格的摄像机标定方法。张氏标定法已经作

好的函数被广泛应用。张氏标定的原文为“A Flexible New Technique forCamera Calibration”。此文中所提到的方法，为相机标

利，并且具有很高的精度。从此标定可以不需要特殊的标定物，只需要一张打印出来的棋盘格。So great! 这样的方法让人肃然起敬。所以玉米的这篇博客的题目是：致敬“张氏标定”。

当然，此博的内容也是围绕着“张氏标定”进行的，在这里，玉米主要介绍一下，“张氏标定”的数学思路。因为标定在整个基于标定摄像机的三维重建的几何过程占有最重要最核心的地位。如下图：



从图中明显可以看出，标定得到的内参、外参和畸变系数，是双目视觉进行图片矫正，摄

目视觉系统就无法完成3D重建。

既然标定对双目视觉如此重要，我们有必要对数学的深层含义多加理解。以张氏标定为例

张教授的论文中对标定方法的讲述是循序渐进的，所以玉米在这里将按照张教授论文中的顺序

1、标定平面到图像平面的单应性

因为张氏标定是一种基于平面棋盘格的标定，所以想要搞懂张氏标定，首先应该从两个平面的单应性(homography)映射开始着手。

单应性(homography)：在**计算机视觉**中被定义为一个平面到另一个平面的投影映射。首先看一下，图像平面与标定物棋盘格平面的单应性。

由上两篇博文中讲到的摄像机模型，肯容易得到：

$$s\tilde{\mathrm{m}} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathrm{R} & \mathrm{t}\end{bmatrix}\tilde{\mathrm{M}}$$

其中m的齐次坐标表示图像平面的像素坐标(u,v,1)，M的齐次坐标表示世界坐标系的坐标点(X,Y,Z,1)。A[R t]即是上面一篇博客推出的P。R表示旋转矩阵、t表示平移矩阵、S表示尺度因子。A表示摄像机的内参数,具体表达式如下：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\alpha & \gamma & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

α=f/dx，β=f/dy,因为像素不是规规矩矩的正方形，γ代表像素点在x,y方向上尺度的偏差。

这里还有一个“梗儿”，就是S。它只是为了方便运算，对于齐次坐标，尺度因子不会改变坐标值的。

因为标定物是平面，所以我们可以把世界坐标系构造在Z=0的平面上。然后进行单应性计算。令Z=0可以将上式转换为如下形式

$$s\begin{bmatrix}u \\ v \\ 1\end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & \mathbf{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X \\ Y \\ 0 \\ 1\end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X \\ Y \\ 1\end{bmatrix}$$

既然，此变化属于单应性变化。那么我们可以给A[r1 r2 t]一个名字：单应性矩阵。并记H

那么现在就有：

$$s\begin{bmatrix}u \\ v \\ 1\end{bmatrix} = \mathrm{H}\begin{bmatrix}X \\ Y \\ 1\end{bmatrix}$$

大家可以分析一下，H是一个三3*3的矩阵，并且有一个元素是作为齐次坐标。因此，H有

(x,y)作为标定物的坐标，可以由设计者人为控制，是已知量。(u,v)是像素坐标，我们可以直接

们可以获得两组方程。

五、畸变矫正—让世界不 (9)
图像坐标：我想和世界坐 (5)
（七）立体标定与立体校 (3)
Val编程-套接字 (3)
双目匹配与视差计算 (3)
齐次坐标 (2)
ERROR: SampleCB() - t (2)
浅谈工业机器人的运动停 (2)

推荐文章

* CSDN日报20170706——《屌丝程序员的逆袭之旅》
* 探讨后端选型中不同语言及对应的Web框架
* 细说反射，Java 和 Android 开发者必须跨越的坎
* 深度学习 | 反向传播与它的直观理解
* ArcGIS 水文分析实战教程——雨量计算与流量统计
* 每周荐书：Android、Keras、ES6（评论送书）

最新评论

ABB RAPID SOCKET编程
evilsunnybom: 有没有具体的例子

齐次坐标
东大401张某人: 我可以转载你的文章吗？

五、畸变矫正—让世界不在扭曲
约翰一世: 博主好！本人写了一篇博文，引用了您的一些观点：http://blog.csdn.net/wdmzsl...

现在有8个未知量需要求解，所以我们至少需要八个方程。所以需要四个对应点。四点即可算出，图像平面到世界平面的单应性矩阵H。

这也是张氏标定采用四个角点的棋盘格作为标定物的一个原因。

在这里，我们可以将单应性矩阵写成三个列向量的形式，即：

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3]$$

2、利用约束条件求解内参矩阵A

从上面可知，应用4个点我们可以获得单应性矩阵H。但是，H是内参阵和外参阵的合体。我们想要最终分别获得内参和外参。所以需要想个办法，先把内参求出来。然后外参也就随之解出了。我们可以仔细的“观摩”一下下面的式子。

$$[\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3] = \lambda \mathbf{A} [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{t}]$$

从中可以得出下面两个约束条件，这两个约束条件都是围绕着旋转向量来的。

1、r1,r2正交 得：r1r2=0。这个很容易理解，因为r1,r2分别是绕x,y轴旋转的。应用高中立体几何中的两垂直平面上（两个于y-z和x-z平面）直线的垂直关系即可轻松推出。

2、旋转向量的模为1，即|r1|=|r2|=1。这个也很容易理解，因为旋转不改变尺度嘛。如果不信可以回到上一篇博客，找到个方向的旋转矩阵化行列式算一下。

通过上面的式子可以将r1,r2代换为h1,h2与A的组合进行表达。即 r1=h1A^{-1}，r2=h2A^{-1}.根据两约束条件，可以得到下面

$$\mathbf{h}_1^T \mathbf{A}^{-T} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{h}_2 = 0$$
$$\mathbf{h}_1^T \mathbf{A}^{-T} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{A}^{-T} \mathbf{A}$$

大家从上面两个式子是不是看出一点端倪了。式子中，h1,h2是通过单应性求解出来的那么含5个参数：α，β，u0，v0，γ。那么如果我们想完全解出这五个未知量，则需要3个单应性矩程。这样可以解出全部的五个内参了。大家想一下，我们怎样才能获得三个不同的单应性矩阵可以通过改变摄像机与标定板间的相对位置来获得三张不同的照片。（当然也可以用两张照片

到这里，大家应该就明白我们在张氏标定法时为什么要不断变换标定板的方位了吧。当然似然时讲到。

下面在对我们得到的方程做一些数学上的变化，这些变化都是简单的运算变化了，相信大家动动笔，一算就可以算出。这些变化都是为了运算方便的，所以也没什么物理意义。

首先令：

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\ T}\mathbf{A}^{\ 1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & -\frac{\gamma}{\alpha^2\beta} & \frac{v_0\gamma-u_0\beta}{\alpha^2\beta} \\ -\frac{\gamma}{\alpha^2\beta} & \frac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\beta^2} & -\frac{\gamma(v_0\gamma-u_0\beta)}{\alpha^2\beta^2}-\frac{v_0}{\beta^2} \\ \frac{v_0\gamma-u_0\beta}{\alpha^2\beta} & -\frac{\gamma(v_0\gamma-u_0\beta)}{\alpha^2\beta^2}-\frac{v_0}{\beta^2} & \frac{(v_0\gamma-u_0\beta)^2}{\alpha^2\beta^2}+\frac{v_0^2}{\beta^2}+1 \end{bmatrix}$$

很容易发现B是一个对称阵，所以B的有效元素只剩下六个（因为有三对对称的元素是相等的，所以只要解得下面的6个元素就可以得到完整的B了），让这六个元素构成向量b。

$$\mathrm{b} = [B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{13}, B_{23}, B_{33}]^T$$

接下来在做一步纯数学化简：

$$\mathbf{h}_i^T \mathbf{B} \mathbf{h}_j = \mathbf{v}_{ij}^T \mathbf{b}$$

可以计算得：

$$\mathbf{v}_{ij} = [h_{i1}h_{j1}, h_{i1}h_{j2} + h_{i2}h_{j1}, h_{i2}h_{j2}, \\ h_{i3}h_{j1} + h_{i1}h_{j3}, h_{i3}h_{j2} + h_{i2}h_{j3}, h_{i3}h_{j3}]^T$$

利用约束条件可以得到下面，方程组：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{12}^T \\ (\mathbf{v}_{11} - \mathbf{v}_{22})^T \end{bmatrix} \mathbf{b} = 0$$

这个方程组的本质和前面那两个用h和A组成的约束条件方程组是一样的。在此重复一遍
要3个单应性矩阵。3个单应性矩阵在2个约束下可以产生6个方程。这样可以解出全部的五个内
的单应性矩阵呢？答案就是，用三幅标定物平面的照片。我们可以通过改变摄像机与标定板间
以用两张照片，但这样的话就要舍弃掉一个内参了γ=0）

通过至少含一个棋盘格的三幅图像，应用上述公式我们就可以估算出B了。得到B后，我们
内参阵A。

3、基于内参阵估算外参阵

通过上面的运算，我们已经获得了摄像机的内参阵。那么对于外参阵，我们很容易通过下面的公式解得：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3\end{bmatrix} = \lambda \mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{t}\end{bmatrix}$$

对上面公式进行化简，可以得到：

$$\mathbf{r}_1 = \lambda \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_1$$
$$\mathbf{r}_2 = \lambda \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_2$$
$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$$
$$\mathbf{t} = \lambda \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_3$$

其中 $\lambda = 1/\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_1\| = 1/\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_2\|$

至此，玉米已经将张氏标定的主体数学框架已经讲完了。介于篇幅关系（怕太长大机会读的昏昏欲睡，哈哈）。但其实‍
导，仅仅是为后面的极大似然参数估计提供初值。但当然这个初值也是不可或缺的，因为没有这个初值，就无法估计出更为准
将张氏标定中用于提高标定精度的极大似然**算法**，放到下一篇博客中进行讲解。

还是老话：玉米才疏学浅，讲解之中难免有纰漏，请大家谅解，并指正。

上一篇 摄像机标定
下一篇 齐次坐标

相关文章推荐

- 张正友标定算法原理详解
- 张正友相机标定Opencv实现以及标定流程&&标定...
- [图像]摄像机标定(2) 张正友标定推导详解
- 张正友标定法翻译
- 张正友平面标定方法 超详细
- Opencv 张正友相机标定傻瓜教程
- 六、张正友标定法小结
- 三维重建学习之旅（三）相机标定之（2）张正友...
- （六）张正友标定法小结 【计算机视觉学习笔记--...
- （五） 畸变矫正—让世界不在扭曲 【计算机视觉...

猜你在找

- 机器学习之概率与统计推断
- 机器学习之凸优化
- 响应式布局全新探索
- 深度学习基础与TensorFlow实践
- 前端开发在线峰会
- 机器学习之数学基础
- 机器学习之矩阵
- 探究Linux的总线、设备、驱动模型
- 深度学习之神经网络原理与实战技巧
- TensorFlow实战进阶：手

查看评论

15楼 sushengcai 2017-03-24 16:09发表

你好！我是桂庆光电科技有限公司栗工，我们是专业生产各种标定板的。 关于自标定
1.自标定：
摄像机自标定是指不需要标定块，仅仅通过图象点之间的对应关系对摄像机进行标定的
为什么要进行自标定？
实际应用的需求，主要应用场所的转移
优缺点：
优点：仅需要建立图像之间的对应，灵活性强，潜在应用范围广。
缺点：非线性标定，精度不高，鲁棒性不足

2.标定板标定：

标定的作用其一就是为了求取畸变系数（因为经过镜头等成像后，或多或少都有畸变），其二是为了得到空间坐标系和图像坐标系的对应关系。在摄像机标定后就可以得到世界坐标系中目标物体米制单位的坐标，摄像机标定其实就是确定摄像机内参和外参的过程

优点：可以使用于任意的摄像机模型，标定精度高达0.001mm

不足：标定过程稍微复杂，需要高精度的已知结构信息。

有问题可以加我QQ1002861237

14楼 阿翔ax 2017-02-11 16:27发表

原文地址

http://blog.csdn.net/onthewaysuccess

13楼 zyjzyjjgjg2012 2016-12-30 11:53发表

最后利用约束条件得到的关于b的是一个齐次方程，只能求出它的基础解系，B11~B33这六个未知数要怎么确定，这

12楼 cstkings123 2016-12-20 18:52发表

楼主可以给我解答一下吗，为什么每次我在求解内参矩阵的时候都算出来B11是负数呢！

11楼 fanbeimezh99616 2016-11-28 10:12发表

H是一个三3*3的矩阵，并且有一个元素是作为齐次坐标。不太理解这一句话。一个元

10楼 fanbeimezh99616 2016-11-28 10:11发表

不太理解这一句“H是一个三3*3的矩阵，并且有一个元素是作为齐次坐标。”求解释。

9楼 weixin_36128227 2016-09-16 21:38发表

谢谢作者，一下豁然开朗

8楼 houchenqi2668 2016-05-26 00:40发表

应该是B=A^-T A^-1吧。差负号？

Re: 一棹烟波 2016-10-19 12:36发表

回复houchenqi2668：博主，你好啊，有一点儿不太明白，为啥t3=1。假定靶标图片在世界坐标系z=0的平面上，t3不是应该等于0吗

Re: weixin_36128227 2016-09-16 21:37发表

回复houchenqi2668：t3为1吧

7楼 houchenqi2668 2016-05-25 21:25发表

请问为啥H有8个未知量待解，t还等于（t1,t2,t3)吗，还是t3可以为0

6楼 wexplorer 2016-05-20 20:19发表

多谢啦！

5楼 cmajalis 2015-10-23 12:15发表

您好，请问转载的原文地址在哪里？

4楼 wangyubin112 2015-10-14 20:02发表

明白了

3楼 wangyubin112 2015-10-14 17:43发表

r3=r1*r2是怎么来的？

Re: nandiin 2016-01-20 10:27发表

回复wangyubin112：而且是刚体变换，排除反向的解，旋转矩阵的三个列应

Re: nandiin 2016-01-20 10:25发表

回复wangyubin112：r3 = r1 x r2，旋转矩阵是正交阵，列向量两两正交

2楼 u010796886 2015-04-18 00:38发表

您好，感谢您分享关于张氏标定的心得。关于这个算法我有一个没弄清楚的地方就是，标定时计算出的旋转矩阵，每一组都有不同的值，既然相机在拍摄过程中是保持不动的，那这应该是每张影像的旋转外参吧？那张氏标定能不能获得相机自己的外参呢？

1楼 u010796886 2015-04-18 00:36发表

您好，感谢您分享关于张氏标定的心得。关于这个算法我有一个没弄清楚的地方就是，标定时计算出的旋转矩阵，每一组都有不同的值，既然相机在拍摄过程中是保持不动的，那这应该是每张影像的旋转外参吧？那张氏标定能不能获得相机自己的外参呢？

发表评论

用 户 名： haijunz

评论内容：

提交

* 以上用户言论只代表其个人观点，不代表CSDN网站的观点或立场