ESTUDIS DE CAPACITAT
DE DIMENSIONS I RESISTÈNCIA A LA TRACCIÓ

SPC
STATISTIC PROCESS CONTROL

Autor: Roger Parramon

Revisió:

Data: 13 de juny de 2025

Data revisió:

Índex de continguts

Introducció 5
Necessitat d'un estudi de capacitat 5
Utilitat d'un estudi de capacitat 5
Què és un estudi de capacitat? 5
Procediment 7
Recollida i mesura de la mostra 7
Anàlisi de la mostra mesurada 7
Comprovació de la normalitat 8
Indicadors d'estabilitat 9
Extrapolació de resultats 10
p-valor 11
Generació de l'informe pel PPAP 12
Cotes geomètriques 13

Introducció

Els estudis de capacitat, són una eina fonamental per validar un procés productiu, determinant si és capaç de complir de manera consistent i estable amb les especificacions tècniques requerides per la norma o el client. A SOME, aquest estudi permet identificar si les operacions de fabricació per estampació són estables, repetibles i aptes per ser automatitzades o mantingudes en producció habitual, focalitzant aquest estudi en cotes seleccionades i identificades, com les cotes característiques[1].

Necessitat d'un estudi de capacitat

Realitzar un estudi de capacitat és necessari per:

- Verificar la capacitat real del procés abans de la seva aprovació definitiva.
- Justificar tècnicament que el procés compleix amb les toleràncies exigides.
- Detectar fonts de variabilitat que poden afectar la qualitat abans d'iniciar producció.

Utilitat d'un estudi de capacitat

- Aporta dades objectives per a la presa de decisions en ajustos, o validacions de processos.
- Permet establir si un procés pot funcionar dins dels límits especificats sense intervenció constant en l'utillatge i eines utilitzades.
- Serveix com a base per definir plans de control i intervals de mostreig adequats.

Què és un estudi de capacitat?

Un estudi de capacitat és, bàsicament, un anàlisi estadístic, que avalua la relació entre la variabilitat natural d'un procés i els límits de tolerància establerts. Els indicadors que s'utilitzen són:

- **CP** i **CPK**. Que fan referència a la capacitat a llarg termini, amb el procés sota control estadístic. (*p.ex.* l'estudi de capacitat de peces mesurades d'un de diverses produccions, amb cada paràmetre controlat).
- **PP** i **PPK.** Aquests termes, en canvi, fan referència a la capacitat a curt termini, considerant tota la variació observada en les mesures de la mostra presa.

En general s'espera tenir un **CPK** $\geq$ 1.33, però en cases especials, com són les cotes característiques, es considera que tenen una estabilitat de procés acceptable quan l'indicador **CPK** $\geq$ 1,67 per les característiques especials, o de **CPK** $\geq$ 2, per a les característiques crítiques.

Indicadors d'estabilitat del procés:

- **CP:** Índex de capacitat potencial.
- **CPK:** Índex de capacitat real.
- **PP:** Índex de rendiment potencial.
- **PPK:** Índex de rendiment real.

[1] Les cotes característiques són les dimensions fonamentals que defineixen la geometria essencial d'una peça o conjunt, identificades al plànol amb SC o bé CC.

Procediment

Recollida i mesura de la mostra

Primer cal obtenir una mostra de peces del procés productiu. Habitualment es mesuren 10 unitats, tot i que en alguns casos específics (*p.ex.* limitacions de temps, disponibilitat, etc.), se'n poden mesurar només 5, si el test és molt important en poden ser més de 10, el cas és que està limitat a un nombre mínim de dades, però no a la màxima. Es mesura:

- **Mitjançant escàner 3D**: les mesures es carreguen a la base de dades del departament de tècnica, on poden ser consultades per a l'anàlisi posterior, en tot cas sempre estaran desades al servidor general de l'empresa..
- **Mitjançant instruments manuals o CMM**: en cas de fer servir peu de rei, micròmetre o màquina de mesura per coordenades, les dades s'han d'introduir manualment al sistema o al full de càlcul preparat per a l'estudi.

Anàlisi de la mostra mesurada

Un cop obtingudes les dades de la mostra, es procedeix a fer l'anàlisi estadística bàsica:

- Càlcul de la mitjana, desviació estàndard, rang de les mesures.
- Verificació de dades dins de tolerància.
- Inspecció visual mitjançant gràfics (histogrames, gràfics de dispersió o de caixes, etc.) per detectar tendències, valors extrems o distribucions no normals.
- Anàlisi de normalitat de la mostra mesurada. *Shapiro-Wilk* i *Anderson-Darling*.

Suposant que tenim una mostra de mida n: $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Calcular la mitjana i la desviació estàndard de la mostra, amb els mínim, màxim i el recorregut.

$$x_{min} = \min\,(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \qquad x_{max} = \max\,(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$rang = x_{max} - x_{min}$$

Aquesta és la mostra significativa en la que basem l'estudi de capacitat. Per a quest motiu s'hi aplica un test de normalitat, entre els tests de Shapiro-Wilk i Anderson-Darling, fem servir l'Anderson, ja que els dos són molt efectius amb mostres petites, i aquest segon és més sensible a desviacions a les cues de la campana. Per l'experiència de SOME en els processos d'estampació sabem que els resultats de les mesures de les cotes i dels assajos de tracció tendeixen a seguir la distribució normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{2})^2}$$

Els índexs de rendiment del procés (PP i PPK) suposen que les dades segueixen una distribució normal, com que habitualment la mostra disponible és petita (5–10 unitats), no podem assumir la normalitat automàticament. És per això que cal verificar-la explícitament[2].

Anderson-Darling ens permet realitzar aquesta verificació amb una confiança del 5%, és a dir que segons el test la mostra és probable que segueixi una distribució normal en un 95% dels casos.

Comprovació de la normalitat

Test d'Anderson-Darling

Aquest test estadístic mesura com s'ajusten les dades a una distribució teòrica, la normal. Es basa en la distància entre la funció de distribució empírica (FEC) i la funció de distribució acumulada (CDF) teòrica de la distribució.

- Hipòtesis:
  - H_0: Les dades provenen d'una distribució normal.
  - H_1: Les dades no provenen d'una distribució normal.
- Criteri de decisió[3]:
  - Si el p-valor > 0.05 → no es rebutja H_0: les dades poden considerar-se normals.
  - Si el p-valor ≤ 0.05 → es rebutja H_0: les dades no són normals.

Aquest test, al ser més sensible als extrems que altres tests com el Shapiro-Wilk, i és especialment útil amb mostres petites.

Q-Q Plot (Quantile-Quantile Plot)

El Q-Q plot és una eina visual molt útil per validar la normalitat, que consisteix a comparar els quantils teòrics de la distribució normal $N(\mu, \sigma)$, amb els quantils reals de les dades mesurades.

- Si les dades segueixen una distribució normal, els punts s'alineen a la recta de $y = x$.
- Les desviacions sistemàtiques respecte la línia indiquen:
  - corbes cap avall o amunt: asimetria (*skew*)
  - punts als extrems separats de la línia: dades amb cua pesada (*kurtosi*)

Histograma amb KDE de la mostra

KDE (Kernel density estimate) és una tècnica per estimar la funció de densitat de probabilitat d'una variable contínua, a partir d'una mostra de valors.

Un histograma mostra la freqüència dels valors de la mostra agrupats en caixes. Però té alguns inconvenients, principalment, al dependre de l'amplada de les columnes, amb mostres petites, l'histograma pot ser enganyós o irregular.

El KDE ho resol generant una corba suau que aproxima la distribució real de les dades, sense dependre tant de les divisions arbitràries del gràfic.

[2] Si la mostra no és normal, els valors de PP i PPK poden donar una falsa impressió de capacitat o rendiment, especialment perquè la probabilitat de defectes fora de límits es calcula suposant una corba normal.

[3] El test *Anderson-Darling* no dóna un *p-valor*, però a traves d'expressions empíriques, es pot associar el valor de l'indicador del test A^2 amb un *p-valor* per confirmar l'hipòtesi nul·la.

Al final aquest mètode visual ens complementa l'informació del test *Anderson* i la visualització feta amb el gràfic de quantils, ja que no només és l'histograma de la mostra real, sinó que amb el KDE hi sumem una informació valuosa:

- El KDE es superposa sobre l'histograma per ajudar a visualitzar com seria la distribució real de la variable, en lloc de limitar-se als valors observats.
- Permet jutjar visualment si la mostra sembla seguir una distribució normal, especialment quan es compara amb la pdf teòrica normal.

Indicadors d'estabilitat

Un cop hem comprovat que les dades mesurades segueixen una distribució normal, ja podem calcular amb més certesa els índex de rendiment del procés. En cas contrari, s'hauria de prendre una altra mostra, o augmentar la mida de la mostra mesurada, fins comprovar la normalitat.

$$PP = \frac{USL - LSL}{6\,s}$$

$$PPK = \min\left(\frac{USL - \bar{x}}{3\,s}; \frac{\bar{x} - LSL}{3\,s}\right)$$

- USL és el límit superior de l'especificació, normalment la tolerància superior.
- LSL és el límit inferior de l'especificació, normalment la tolerància inferior.

PP, PPK, CP i CPK

L'índex de rendiment del procés intenta verificar si la mostra que s'ha observat del procés és capaç de complir amb els requisits del client. Es diferencia de la capacitat del procés (CP i CPK) en que el rendiment del procés només s'aplica a un lot específic de material.

Les mostres del lot poden necessitar ser bastant grans per ser representatives de la variació en el lot. El rendiment del procés només s'utilitza quan no es pot avaluar el control del procés.

El rendiment del procés generalment utilitza sigma de mostra en el seu càlcul; la capacitat dels processos utilitza el valor sigma de la població estudiada.

$$CP = \frac{USL - LSL}{6\,\sigma}$$

$$CPK = \min\left(\frac{USL - \mu}{3\,\sigma}; \frac{\mu - LSL}{3\,\sigma}\right)$$

- μ és la mitjana de la població estudiada.
- σ és la desviació estàndard de la població estudiada.

Per calcular els índexs de capacitat del procés s'ha de garantir que el procés està sota control estadístic, i tenir una estimació molt fidel de la σ i la μ. Per a aquest motiu als PPAP de nivell 3 s'informa dels índex de rendiment PPK i PP, i no és comú reportar índexs de capacitat CPK i CP.

Com s'interpreten els resultats?

- Si el procés està centrat, les dues fraccions seran semblants $\Rightarrow$ PPK $\approx$ PP
- Si el procés està descentrat, una de les dues fraccions serà més petita $\Rightarrow$ PPK $\leq$ PP
- Si $\bar{x}$ està descentrada o fora de tolerància, el valor del PPK pot arribar a ser negatiu o fins hi tot zero $\Rightarrow$ PPK ≤ 0.

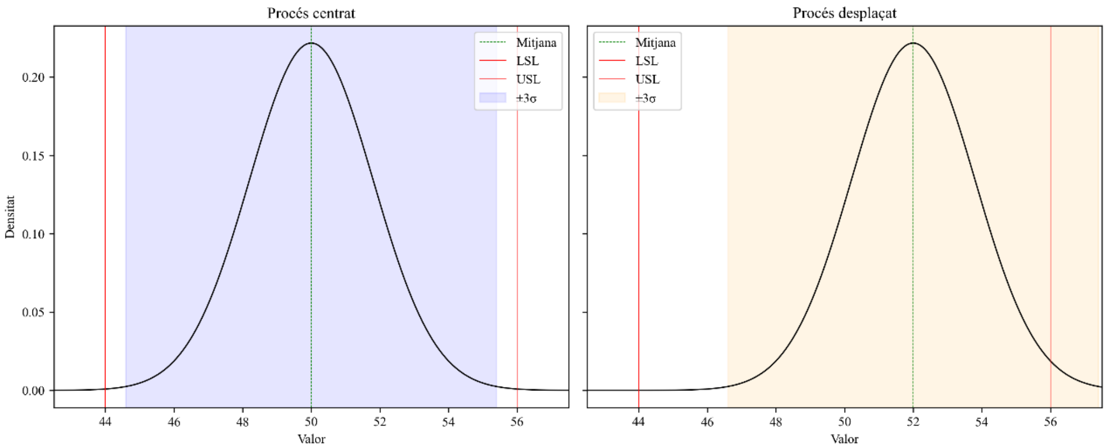

FIGURE 1 VISUALITZACIÓ DEL SIGNIFICAT DE PP I PPK

L'objectiu, per les cotes característiques especials és tenir un PPK ≥ 1.67, mentre que per les cotes crítiques es busca que PPK ≥ 2. Com més gran és el valor del PPK, més marge té el procés en respecte als límits de tolerància definits, i com més centrat està el procés, més semblants seran els valors de PP i PPK obtinguts.

Extrapolació de resultats

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

A partir de la nostra mostra, com que acostumem a tenir un nombre de mesures n massa petit, el que es fa és extrapolar les mesures d'acord amb el que seria una distribució normal, amb la mitjana i la desviació estàndard de la mostra.

$$X_{extrapolat} \sim N(\bar{x}, s)$$

Aquests valors no es fan servir per calcular estadístics, només per mostrar rang, forma i distribució dels resultats al client. El que s'ha d'acabar de demostrar al client és que aquesta mostra té sentit físic, i que segueix una distribució normal sense cap irregularitat.

En aquest cas s'aplica un test *Anderson-Darling* modificat:

$$A^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\cdot\left[\ln\big(F(X_i)\big) + ln\big(1 - F(X_{n+1-i})\big)\right]$$

- n: nombre de dades extrapolades (ordenades).
- $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ dades extrapolades, ordenades de menor a major.
- $F(X_i)$: Funció de distribució de probabilitat acumulada de la normal estàndard amb mitjana i desviació estàndard de la mostra real.

$$F(x_i) = \phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)$$

- ϕ : És la funció de distribució de probabilitat acumulada de la normal

L'extrapolació conserva els valors originals, generant-ne de nous fins a arribar a l'objectiu.

Tot i que la mostra extrapolada pot ser gran, els paràmetres (mitjana i desviació) venen d'una mostra petita real, ja que utilitzar els de l'extrapolació seria erroni al ser valors virtuals, s'utilitzen per a tot l'anàlisi per validar la normalitat assumida de l'extrapolació. S'aplica una correcció al estadístic.

$$A_D^* = A^2\left(1+\frac{0.75}{n}+\frac{2.25}{n^2}\right)$$

Com que els paràmetres de la distribució normal s'han estimat a partir d'una mostra real reduïda, s'aplica la versió ajustada de l'estadístic *Anderson-Darling* per evitar un biaix d'optimisme. Aquesta correcció compensa el fet que els valors de referència no són coneguts amb certesa, sinó subjectes a variabilitat. Així, es redueix el risc d'assumir una distribució normal incorrectament degut a una estimació massa favorable.

p-valor

L'estadístic Anderson-Darling ajustat A_D^2 es transforma en un valor p mitjançant una funció definida a trossos, basada en ajustos empírics. Aquest valor p permet interpretar fàcilment la validesa de l'hipòtesi de normalitat.

$$p(A_D^*) = \begin{cases} e^{\left(1.2937-5.709\,A_D^*+0.0186\,{A_D^*}^2\right)} & A_D^* \geq 0.6 \\ e^{\left(0.9177-4.279\,A_D^*+1.38\,{A_D^*}^2\right)} & 0.34 < A_D^* < 0.6 \\ 1-e^{\left(-8.318+42.396\,A_D^*-59.398\,{A_D^*}^2\right)} & 0.2 < A_D^* \leq 0.34 \\ 1-e^{\left(-13.463+101.14\,A_D^*-223.73\,{A_D^*}^2\right)} & A_D^* \leq 0.2 \end{cases}$$

Aquestes fórmules provenen de taules i ajustos empírics derivats de la documentació del test d'*Anderson-Darling*, eviten haver de mirar una taula o fer simulacions. Tot i ser aproximades, són prou precises per la majoria d'aplicacions industrials i estadístiques.

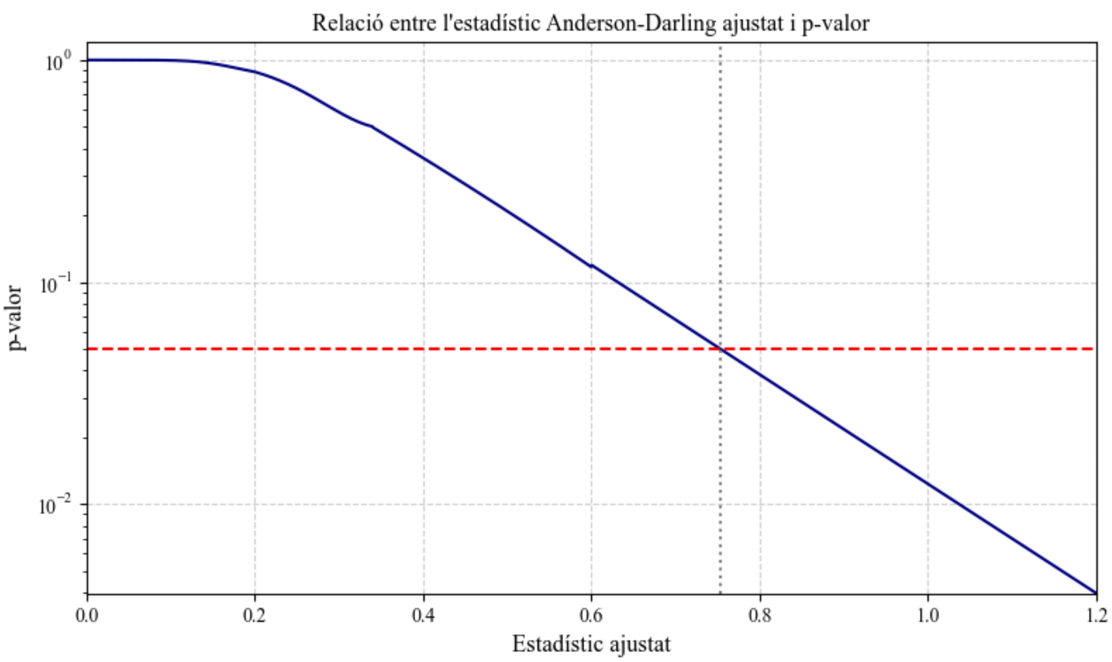

FIGURE 2 VISUALITZACIÓ DE LA RELACIÓ ENTRE A² I P-VALOR

Generació de l'informe pel PPAP[4]

Amb software com *Microsoft Excel*, o *Python*, fer aquestes extrapolacions, i càlculs de normalitat utilitzant la distribució normal, no és un problema, ja que aquests tenen les distribucions integrades al codi, i no és necessari calcular-ho manualment, o escrivint-ne les formules constantment.

[4] El PPAP és un conjunt de documents i mostres que demostren que el procés de fabricació d'un proveïdor pot produir peces que compleixen totes les especificacions tècniques i de qualitat requerides pel client, de manera repetible i sostinguda.

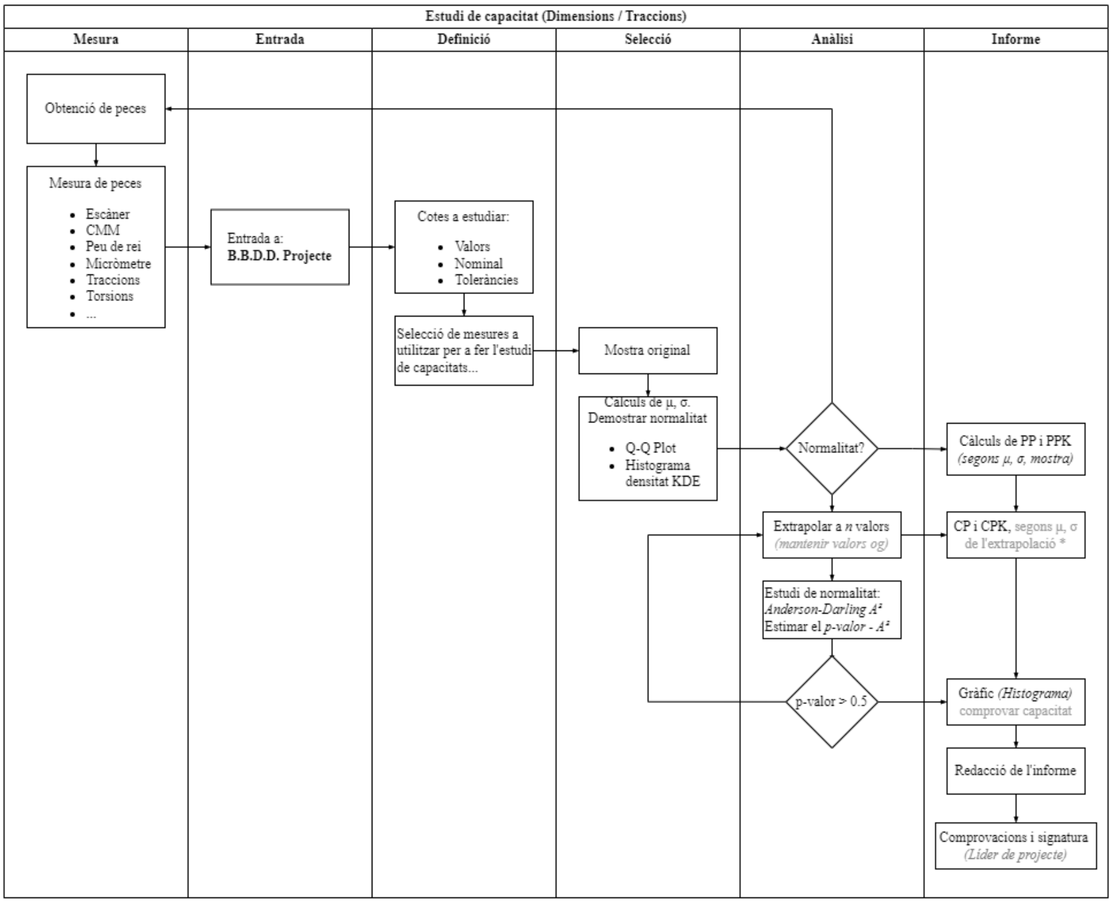

FIGURE 3 FLUX DE PROCÉS PER L'ESTUDI DE CAPACITAT.

Cotes geomètriques

"If data is not normal, capability indices must not be used without applying proper transformation or using alternative approaches." - (SPC Manual, AIAG)