

# Principi programskih jezikov

[Nadzorna plošča](#) / [Moji predmeti](#) / [ppj](#) / [Izpeljava tipov](#) / [Rešitve](#)

## Rešitve

Za vsakega od naslednjih izrazov izpeljite njegov *glavni* tip, ali ugotovite, da ga nima. Nato preverite odgovor še v SML.

## Naloga

Izpeljite glavni tip izraza

```
fn x => fn y => (x, y, y)
```

### Rešitev

Uvedemo nov parameter  $\alpha$  in zabeležimo  $x : \alpha$ . Funkcija ima tip  $\alpha \rightarrow \beta$ , kjer je  $\beta$  tip izraza  $fn\ y \Rightarrow (x, y, y)$ .

Tip izraza  $fn\ y \Rightarrow (x, y, y)$ : uvedemo nov parameter  $\delta$  in zabeležimo  $y : \delta$ . Tip izraza  $(x, y, y)$  je tako  $\alpha \times \delta \times \delta$ . Funkcija  $fn\ y \Rightarrow (x, y, y)$  ima torej tip  $\delta \rightarrow \alpha \times \delta \times \delta$ . Dobimo enačbo  $\beta = \delta \rightarrow \alpha \times \delta \times \delta$ .

V tipu  $\alpha \rightarrow \beta$  zamenjamo  $\beta \mapsto \delta \rightarrow \alpha \times \delta \times \delta$ , da dobimo glavni tip izraza:

```
 $\alpha \rightarrow \delta \rightarrow \alpha \times \delta \times \delta$ 
```

## Naloga

Izpeljite glavni tip izraza

```
fn f => fn g => f (g 42)
```

### Rešitev

Uvedemo nov parameter  $\alpha$  in zabeležimo  $f : \alpha$ . Funkcija ima tip  $\alpha \rightarrow \beta$ , kjer je  $\beta$  tip izraza  $fn\ g \Rightarrow f\ (g\ 42)$ .

Tip funkcije  $fn\ g \Rightarrow f\ (g\ 42)$ : uvedemo nov parameter  $\gamma$  in zabeležimo  $g : \gamma$ . Funkcija ima tip  $\gamma \rightarrow \delta$ , kjer je  $\delta$  tip izraza  $f\ (g\ 42)$ . Dobimo enačbo  $\beta = \gamma \rightarrow \delta$ .

Tip izraza  $f\ (g\ 42)$  je  $\delta$ , zato mora imeti funkcija  $f$  tip  $\epsilon \rightarrow \delta$ , kjer je  $\epsilon$  tip izraza  $g\ 42$ . Dobimo enačbo  $\alpha = \epsilon \rightarrow \delta$ .

Tip izraza  $g\ 42$  je  $\epsilon$ , zato mora imeti funkcija  $g$  tip  $int \rightarrow \epsilon$ . Dobimo enačbo  $\gamma = int \rightarrow \epsilon$ .

Imamo naslednje enačbe:

```
 $\alpha = \epsilon \rightarrow \delta$   
 $\beta = \gamma \rightarrow \delta$   
 $\gamma = int \rightarrow \epsilon$ 
```

Upoštevamo definicijo  $\gamma$ :

```
 $\alpha = \epsilon \rightarrow \delta$   
 $\beta = int \rightarrow \epsilon \rightarrow \delta$ 
```

In dobimo glavni tip celega izraza  $\alpha \rightarrow \beta = (\epsilon \rightarrow \delta) \rightarrow (int \rightarrow \epsilon) \rightarrow \delta$ .

## Naloga

Izpeljite glavni tip izraza

```
if 3 < 5 then (fn x => x) else (fn y => (y, y))
```

### Rešitev

Tip lahko izpeljemo po kosih: posebej obravnavamo pogoj  $3 < 5$ , kjer preverimo, da je tip `bool`, nato pa izpeljemo tipa obeh vej in ju izenačimo.

Izraz `3 < 5` res ima tip `bool`, ker `3` in `5` imata tip `int` in `<` res vrne `bool`.

Tip funkcije `fn x => x`: uvedemo nov parameter  $\alpha$  in zabeležimo  $x : \alpha$ . Nato izpeljemo tip izraza `x`, ki je seveda  $\alpha$ . Torej ima `fn x => x` tip  $\alpha \rightarrow \alpha$ .

Tip funkcije `fn y => (y, y)`: uvedemo nov parameter  $\beta$  in zabeležimo  $y : \beta$ . Nato izpeljemo tip izraza `(y, y)`. To je urejeni par, obe komponenti imata tip  $\beta$ , zato je tip urejenega para `(y, y)` enak  $\beta \times \beta$ . Torej ima `fn y => (y, y)` tip  $\beta \rightarrow \beta \times \beta$ .

Izenačimo tipa obeh vej:

$$(\alpha \rightarrow \alpha) = (\beta \rightarrow \beta \times \beta)$$

To je tudi edina enačba, ki jo moramo rešiti. Enačbo razbijemo na dve preprostejši enačbi:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \\ \alpha &= \beta \times \beta \end{aligned}$$

Prva enačba nam da rešitev  $\alpha \mapsto \beta$ , ki jo upoštevamo v drugi enačbi:

$$\beta = \beta \times \beta$$

Ta enačba nima rešitve, ker se  $\beta$  pojavi na desni strani. Končni odgovor: izraz nima tipa.

## Naloga

Izpeljite glavni tip rekurzivne funkcije

```
fun f x = (if x = 0 then 1 else x * f (x - 1))
```

### Rešitev

Uvedemo parameter  $\alpha$  in zabeležimo  $f : \alpha$ .

Izraz `fn x => if x = 0 then 1 else x * f (x - 1)` ima tip  $\beta \rightarrow \gamma$ , pri čemer zabeležimo  $x : \beta$  in enačbo  $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$ . Nato obravnavamo izraz `if x = 0 then 1 else x * f (x - 1)`.

Iz pogoja dobimo enačbo  $\beta = \text{int}$ .

Tip izraza `x * f (x - 1)`: izraz `x - 1` ima tip `int`, zato mora imeti `f` tip  $\text{int} \rightarrow \gamma$ . Dobimo enačbo  $\alpha = \text{int} \rightarrow \gamma$ . Po drugi strani mora zaradi množenja imeti izraz `f (x - 1)` tip `int`, torej dobimo  $\gamma = \text{int}$ . Preveriti moramo še, da imata obe veji pogojnega stavka isti tip in da ima pogoj `x = 0` res tip `bool`.

Glavni tip  $\alpha$  celega izraza je tako  $\text{int} \rightarrow \text{int}$ .

## Naloga

Izpeljite glavni tip funkcije `map`:

```
fun map f l =
  case l of
    [] => []
  | x :: xs => f x :: map f xs
```

Navodilo: uporabite pravilo za rekurzivne funkcije, ter pravila za sezname in `case`:

- prazen seznam `[]` ima tip  $\alpha \text{ list}$ , kjer je  $\alpha$  nov parameter
- sestavljen seznam  $e_1 :: e_2$ :
  - izpeljemo tip  $\tau_1$  izraza  $e_1$  in dobimo enačbe  $E_1$
  - izpeljemo tip  $\tau_2$  izraza  $e_2$  in dobimo enačbe  $E_2$
  - Tip  $e_1 :: e_2$  je  $\tau_1 \text{ list}$ , z enačbami  $E_1, E_2$  in  $\tau_2 = \tau_1 \text{ list}$ .
- izraz `case e1 of [] => e2 | x :: xs -> e3`:
  - izpeljemo tip  $\tau_1$  izraza  $e_1$  in dobimo enačbe  $E_1$
  - izpeljemo tip  $\tau_2$  izraza  $e_2$  in dobimo enačbe  $E_2$
  - uvedemo nov parameter  $\alpha$ , zabeležimo  $x : \alpha$  in  $xs : \alpha \text{ list}$ , izpeljemo tip  $\tau_2$  izraza  $e_2$  in dobimo enačbe  $E_3$
  - Tip `case e1 of [] => e2 | x :: xs => e3` je  $\tau_2$  z enačbami  $E_1, E_2, E_3, \tau_1 = \alpha \text{ list}$  in  $\tau_2 = \tau_3$ .

### Rešitev

Tip `map` označimo z  $\alpha$ , tip `f` z  $\beta$  in `l` z  $\gamma$ . Nato izračunamo tip izraza `case`.

Prvi primer ima tip  $\delta \text{ list}$ , pri čemer je  $\delta$  nov parameter.

Za drugi primer moramo izračunati tip izraza  $f\ x :: \text{map } f\ xs$ , pri čemer uvedemo nov parameter  $\epsilon$  in zabeležimo  $x : \epsilon$  in  $xs : \epsilon\ \text{list}$ . Tip izraza  $f\ x$  označimo s  $\phi_1$  in zapišemo enačbo  $\beta = \epsilon \rightarrow \phi_1$ . Tip izraza  $\text{map } f\ xs$  označimo s  $\phi_2$  in zapišemo enačbo  $\alpha = \beta \rightarrow \epsilon\ \text{list} \rightarrow \phi_2$ . Tip celotnega izraza je  $\phi_1\ \text{list}$ , pri čemer mora veljati še  $\phi_2 = \phi_1\ \text{list}$ .

Tip izraza `case` je torej  $\phi_2$ , pri čemer morata veljati še enačbi  $\gamma = \epsilon\ \text{list}$  in  $\delta\ \text{list} = \phi_1\ \text{list}$ .

```
 $\alpha = \beta \rightarrow \epsilon\ \text{list} \rightarrow \phi_2$   
 $\beta = \epsilon \rightarrow \phi_1$   
 $\delta\ \text{list} = \phi_1\ \text{list}$   
 $\phi_2 = \phi_1\ \text{list}$ 
```

Iz teh enačb dobimo tip funkcije `map`:  $\alpha = (\epsilon \rightarrow \phi_1) \rightarrow \epsilon\ \text{list} \rightarrow \phi_1\ \text{list}$ .

Zadnja sprememba: torek, 17. april 2018, 11:32

[◀ Vaje: izpeljava tipov](#)

Skok na...

[Vaje: programiranje s tokovi ▶](#)

Prijavljeni ste kot JAKOB MALEŽIČ (Odjavi)  
ppj