Estructuras Discretas
Tarea #2
“Demuestre que sabe demostrar”

Andrés Navarro
(201673001-k)

Pregunta 1

Demuestre por inducción sobre n que

$$\prod_{2\leq k\leq n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

- Para $n=2$:

  $$\prod_{2\leq k\leq n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\left(1-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{4-1}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)$$

  Dado que:

  $$\prod_{2\leq k\leq n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}=\frac{2+1}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}$$

  $\therefore$ Si se cumple el caso base.

- Suponemos que para $n=m$ esto es verdadero:

  $$\prod_{2\leq k\leq m}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{m+1}{2m}$$

- Entonces, para $n=m+1$:

  $$\begin{aligned}\prod_{2\leq k\leq m+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)&=\prod_{2\leq k\leq m}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(m+1)^2}\right)\\&=\frac{m+1}{2m}\cdot\left(1-\frac{1}{(m+1)^2}\right)\\&=\frac{\cancel{m+1}}{2m}\cdot\left(\frac{(m+1)^2-1}{(m+1)^{\cancel{2}}}\right)\\&=\frac{m^2+2m+\cancel{1}-\cancel{1}}{2m\cdot(m+1)}\\&=\frac{\cancel{m}\cdot(m+2)}{2\cancel{m}\cdot(m+1)}\\&=\frac{m+2}{2m+2}\end{aligned}$$

Esto es precisamente la proposición para n=m+1:

$$\prod_{2\leq k\leq m+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}=\frac{(m+1)+1}{2(m+1)}=\frac{m+2}{2m+2}$$

$\therefore$ Queda demostrado por inducción que:

$$\prod_{2\leq k\leq n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

Pregunta 2

Para vectores $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$ se define la norma Euclidiana y la norma Infinita de la siguiente forma:

$$||\vec{x}||_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+...+|x_n|^2}$$

$$||\vec{x}||_\infty=\max_{i=1}^{n}|x_i|=\max(|x_1|,|x_2|,...,|x_n|)$$

Considere $n=2$. Para cualquier vector $\vec{x}$, use **deducción** para mostrar que: $||\vec{x}||_2\leq\sqrt{n}\cdot||\vec{x}||_\infty$.

Pista: Puede serle útil usar la variable auxiliar $x_m=\max(|x_1|,|x_2|)$.

Para n=2 tenemos:

$$||\vec{x}||_2=\left(\sum_{i=1}^{2}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2}$$
$$||\vec{x}||_\infty=\max_{i=1}^{2}|x_i|=\max(|x_1|,|x_2|)=x_m$$

Luego:

$$\begin{aligned}||\vec{x}||_2\leq\sqrt{n}\cdot||\vec{x}||_\infty\Rightarrow\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2}&\leq\sqrt{2}\cdot x_m\\ \sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2}&\leq\sqrt{2}\cdot x_m \qquad /()^2\\ |x_1|^2+|x_2|^2&\leq 2\cdot(x_m)^2\end{aligned}$$

En el caso de que x_1 sea el máximo (x_m):

$$\begin{aligned}|x_1|^2+|x_2|^2&\leq 2\cdot|x_1|^2\\ |x_2|^2&\leq|x_1|^2 \qquad /()^{1/2}\\ |x_2|&\leq|x_1|\end{aligned}$$

Lo que es cierto ya que $|x_1|$ es el máximo entre $|x_1|$ y $|x_2|$

Análogamente, si x_2 es el máximo, llegamos a otra desigualdad que también es verdadera:

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 \leq 2 \cdot |x_2|^2$$
$$|x_1|^2 \leq |x_2|^2 \qquad /()^{1/2}$$
$$|x_1| \leq |x_2|$$

$\therefore$ Para n=2 queda demostrado por deducción que:

$$||\vec{x}||_2 \leq \sqrt{n} \cdot ||\vec{x}||_\infty$$

Pregunta 3

1. Demuestre por contradicción que si una función $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ estrictamente creciente entonces es inyectiva.

   Sea $x_1, x_2 \in Dom(f)$

   Se tiene que:

$$f\,es\ estrictamente\ creciente \Rightarrow f\,es\ inyectiva$$
$$\underbrace{(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))}_{p} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{x_1 \neq x_2}_{r} \Rightarrow \underbrace{f(x_1) \neq f(x_2)}_{s})}_{q}$$

$$p \Rightarrow q$$
$$\Downarrow \textit{negando la implicancia}$$
$$\neg(p \Rightarrow q)$$
$$p \wedge \neg q$$
$$p \wedge \neg(r \Rightarrow s)$$
$$p \wedge r \wedge \neg s$$
$$\Downarrow \textit{reemplazando las proposiciones}$$
$$(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)) \wedge x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

   Luego de obtener esto, se llega a un absurdo, dado que para dos números, x_1 y x_2, siendo x_1 menor (y obviamente distinto) que x_2, se debería cumplir que $f(x_1)$ sea igual a $f(x_2)$ y que simultáneamente $f(x_1)$ sea menor a $f(x_2)$, situación que no puede ocurrir.

   $\therefore$ Queda demostrado por contradicción que:

   $f\,es\ estrictamente\ creciente \Rightarrow f\,es\ inyectiva$

2. Elija otro método (que no sea contradicción) para demostrar lo anterior.

   Por deducción:

   Sea $x_1, x_2 \in Dom(f)$

   Suponemos que $x_1 < x_2$

   Entonces, se tiene que:

$$f\,es\ estrictamente\ creciente \Rightarrow f\,es\ inyectiva$$
$$\underbrace{(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))}_{p} \Rightarrow \underbrace{(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))}_{q}$$

   Dada la informacion de p(condiciones para que la función sea estrictamente creciente), podemos decir lo siguiente:

-Si $x_1 < x_2$, se tiene que $x_1 \neq x_2$.

-Si $f(x_1) < f(x_2)$, se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$

Con esto, se tiene que q es consecuencia lógica de p:

$\therefore$ Queda demostrado por deducción que:

$$f \, es \; estrictamente \; creciente \Rightarrow f \, es \; inyectiva$$