

Estructuras Discretas
Tarea #2
“Demuestre que sabe demostrar”

Andrés Navarro
(201673001-k)

Pregunta 1

Demuestre por inducción sobre n que

$$\prod_{2 \leq k \leq n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

- Para $n = 2$:

$$\prod_{2 \leq k \leq n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{4-1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)$$

Dado que:

$$\prod_{2 \leq k \leq n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n} = \frac{2+1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

\therefore Si se cumple el caso base.

- Suponemos que para $n = m$ esto es verdadero:

$$\prod_{2 \leq k \leq m} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{m+1}{2m}$$

- Entonces, para $n = m + 1$:

$$\begin{aligned} \prod_{2 \leq k \leq m+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{2 \leq k \leq m} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(m+1)^2}\right) \\ &= \frac{m+1}{2m} \cdot \left(1 - \frac{1}{(m+1)^2}\right) \\ &= \frac{m+1}{2m} \cdot \left(\frac{(m+1)^2 - 1}{(m+1)^2}\right) \\ &= \frac{m^2 + 2m + 1 - 1}{2m \cdot (m+1)} \\ &= \frac{m \cdot (m+2)}{2m \cdot (m+1)} \\ &= \frac{m+2}{2m+2} \end{aligned}$$

Esto es precisamente la proposición para $n=m+1$:

$$\prod_{2 \leq k \leq m+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n} = \frac{(m+1)+1}{2(m+1)} = \frac{m+2}{2m+2}$$

\therefore Queda demostrado por inducción que:

$$\prod_{2 \leq k \leq n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Pregunta 2

Para vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ se define la norma Euclidiana y la norma Infinita de la siguiente forma:

$$\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$$

Considere $n = 2$. Para cualquier vector \vec{x} , use **deducción** para mostrar que: $\|\vec{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|\vec{x}\|_\infty$.

Pista: Puede serle útil usar la variable auxiliar $x_m = \max(|x_1|, |x_2|)$.

Para $n=2$ tenemos:

$$\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^2 |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1}^2 |x_i| = \max(|x_1|, |x_2|) = x_m$$

Luego:

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|\vec{x}\|_\infty &\Rightarrow \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \leq \sqrt{2} \cdot x_m \\ \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} &\leq \sqrt{2} \cdot x_m & /()^2 \\ |x_1|^2 + |x_2|^2 &\leq 2 \cdot (x_m)^2 \end{aligned}$$

En el caso de que x_1 sea el máximo (x_m):

$$\begin{aligned} |x_1|^2 + |x_2|^2 &\leq 2 \cdot |x_1|^2 \\ |x_2|^2 &\leq |x_1|^2 & /()^{1/2} \\ |x_2| &\leq |x_1| \end{aligned}$$

Lo que es cierto ya que $|x_1|$ es el máximo entre $|x_1|$ y $|x_2|$

Análogamente, si x_2 es el máximo, llegamos a otra desigualdad que también es verdadera:

$$\begin{aligned} |x_1|^2 + |x_2|^2 &\leq 2 \cdot |x_2|^2 \\ |x_1|^2 &\leq |x_2|^2 \quad /()^{1/2} \\ |x_1| &\leq |x_2| \end{aligned}$$

∴ Para $n=2$ queda demostrado por deducción que:

$$\|\vec{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|\vec{x}\|_\infty$$

Pregunta 3

1. Demuestre por contradicción que si una función $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ estrictamente creciente entonces es inyectiva.

Sea $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} &f \text{ es estrictamente creciente} \Rightarrow f \text{ es inyectiva} \\ &\underbrace{(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))}_p \Rightarrow \underbrace{(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))}_q \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_r \quad \underbrace{\hspace{10em}}_s \\ &p \Rightarrow q \\ &\Downarrow \text{negando la implicancia} \\ &\neg(p \Rightarrow q) \\ &p \wedge \neg q \\ &p \wedge \neg(r \Rightarrow s) \\ &p \wedge r \wedge \neg s \\ &\Downarrow \text{reemplazando las proposiciones} \\ &(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)) \wedge x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2) \end{aligned}$$

Luego de obtener esto, se llega a un absurdo, dado que para dos números, x_1 y x_2 , siendo x_1 menor (y obviamente distinto) que x_2 , se debería cumplir que $f(x_1)$ sea igual a $f(x_2)$ y que simultáneamente $f(x_1)$ sea menor a $f(x_2)$, situación que no puede ocurrir.

∴ Queda demostrado por contradicción que:

$$f \text{ es estrictamente creciente} \Rightarrow f \text{ es inyectiva}$$

2. Elija otro método (que no sea contradicción) para demostrar lo anterior.

Por deducción:

Sea $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$.

Suponemos que $x_1 < x_2$.

Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} &f \text{ es estrictamente creciente} \Rightarrow f \text{ es inyectiva} \\ &\underbrace{(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))}_p \Rightarrow \underbrace{(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))}_q \end{aligned}$$

Dada la información de p (condiciones para que la función sea estrictamente creciente), podemos decir lo siguiente:

-Si $x_1 < x_2$, se tiene que $x_1 \neq x_2$.

-Si $f(x_1) < f(x_2)$, se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Con esto, se tiene que q es consecuencia lógica de p .

\therefore Queda demostrado por deducción que:

f es estrictamente creciente $\Rightarrow f$ es inyectiva