Estructuras Discretas
Tarea #3
"TLUITO GAIENL"

Andrés Navarro
(201673001-K)

Pregunta 1

Se tiene un pentágono regular y 3 colores diferentes para colorear su vértices. Calcule el número de maneras de colorear el péntagono, considerando que no es necesario usar todos los colores para cada coloreo y que se consideran equivalentes dos maneras de colorear si resultan iguales al rotar el pentágono.

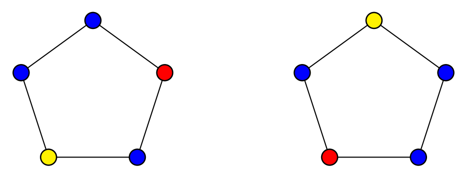

Figura 1: ejemplo de 2 maneras de colorear equivalentes

En un principio tenemos una secuencia con repeticiones, dado que cada vértice del pentágono puede tomar cualquiera de los 3 colores:

Casos posibles $= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

Ahora bien, según el enunciado, se deben tomar como equivalentes 2 casos que al rotarse de cierta manera sean el mismo, por lo que tenemos que cada caso debería tener 4 casos equivalentes (5 representan 1). Sin embargo, tenemos 3 casos únicos que no se presentan como 5 en el conteo de casos posibles anterior, que corresponden a los que en cada punto del pentágono se tiene el mismo color.

Por lo que tenemos los siguiente:

Casos posibles que se repiten 5 veces $= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 - 3 = 240$

Dividimos por 5 para eliminar las maneras de colorear equivalentes

Casos posibles $= 240/5 = 48$

Con esto obtenemos las maneras de colorear sin que estas se repitan 5 veces, pero a esto les debemos sumar los 3 casos en los que todos sus vértices tienen el mismo color.

Finalmente tenemos:

Maneras de colorear $= 48 + 3 = 51$

Pregunta 2

Considere la palabra `EFERVESCENTEMENTE`:

1. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de `EFERVESCENTE`?

Dado que la palabra es formada por 12 letras, y 5 de ellas son "E", tenemos:

$$\text{Maneras de ordenar} = \frac{12!}{5!} = 3991680$$

2. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de $\texttt{ME}_1\texttt{NTE}_2$?

   Dado que la palabra es formada por 5 letras, haciendo distinción en las 2 "E", tenemos:

   $$\text{Maneras de ordenar} = 5! = 120$$

3. Mapee los ordenamientos de $\texttt{ME}_1\texttt{NTE}_2$ a $\texttt{MENTE}$, ¿qué clase de mapa es este?

   $$\left.\begin{matrix}\texttt{ME}_1\texttt{NTE}_2\\ \texttt{ME}_2\texttt{NTE}_1\end{matrix}\right\rangle \to \texttt{MENTE}$$

   Corresponde a un mapa 2! a 1.

4. ¿Qué clase de mapa es el que lleva de $\texttt{E}_1\texttt{FE}_2\texttt{RVE}_3\texttt{SCE}_4\texttt{NTE}_5\texttt{ME}_6\texttt{NTE}_7$ a $\texttt{EFERVESCENTEMENTE}$?

   Es un mapa 7! a 1, ya que las todas las "E" con subíndice, que son 7, pasan a ser solo "E".

5. ¿Cuántos ordenamientos de $\texttt{E}_1\texttt{FE}_2\texttt{RVE}_3\texttt{SCE}_4\texttt{N}_1\texttt{T}_1\texttt{E}_5\texttt{ME}_6\texttt{N}_2\texttt{T}_2\texttt{E}_7$ hay?

   Dado que la palabra es formada por 17 letras haciendo distinción en todas las letras que se repiten, tenemos:

   $$\text{Maneras de ordenar} = 17! = 355687428096000$$

6. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar sus letras si se quiere que comience o termine con la letra T?

   Si dejamos una T fija al principio tenemos:

   $$\text{Con T fija al principio} = \frac{16!}{7! \cdot 2!}$$

   Si dejamos una T fija al final tenemos:

   $$\text{Con T fija al final} = \frac{16!}{7! \cdot 2!}$$

   Ahora debemos tomar en cuenta que debemos descontar los casos en que empiece y termine con T (intersección de casos anteriores):

   $$\text{Con T fija al principio y al final} = \frac{15!}{7! \cdot 2!}$$

   Finalmente nos queda que, las maneras totales estan dadas por:

   $$\begin{aligned}\text{Maneras totales} &= \frac{16!}{7! \cdot 2!} + \frac{16!}{7! \cdot 2!} - \frac{15!}{7! \cdot 2!}\\ &= 2 \cdot \frac{16!}{7! \cdot 2!} - \frac{15!}{7! \cdot 2!}\\ &= 4021617600\end{aligned}$$

Pregunta 3

Si un tipo de código de barra se compone de 2 letras (del alfabeto inglés de 26 letras), seguido de 3 números y finalmente 2 letras. ¿Cuántos código de barra se pueden crear si...

1. Las repeticiones están permitidas.

   $$\text{Códigos de barra posibles} = 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = 456976000$$

2. Las repeticiones no están permitidas.

$$\text{Códigos de barra posibles} = 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 19 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 23 = 258336000$$

3. El código de barras tiene al menos una letra repetida.

$$\begin{aligned}\text{Códigos de barra posibles} &= \text{Códigos de barra con repetición} - \text{Códigos de barra sin repetición de letras}\\ &= 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 - 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 23\\ &= 98176000\end{aligned}$$