6. Zasady zachowania energii, pędu i momentu pędu, praca.

Wybór i opracowanie zadań 6.1-6.29..Bogumiła Strzelecka**.**

6.1. Sanki zsuwają się ze szczytu toru o długości l pochylonego pod kątem α do poziomu, a następnie wjeżdżają na tor prosty. Wzdłuż całego toru działa na sanki siła tarcia. Współczynnik tarcia na torze pochyłym wynosi μ_1, zaś na torze prostym μ_2. Obliczyć jaką drogę s przebędą sanki po torze prostym.

6.2. Kulka o masie $m = 20\ g$ wyrzucona pionowo w górę z prędkością $v_o = 200\ m/s$, spadła na ziemię z prędkością $v = 50\ m/s$. Obliczyć pracę sił tarcia w powietrzu.

6.3. Do gałęzi drzewa przywiązana jest lina, po której wspina się człowiek o masie m. Jaką pracę wykona człowiek, jeżeli przebędzie on po tej linie odcinek o długości l. Przyspieszenie ziemskie wynosi g.

6.4. Kulka o masie M, znajdująca się na końcu mogącego się obracać cienkiego pręta o długości l (masę pręta pomijamy), została wychylona o 180^o ze swego najniższego położenia. Spadając kulka zderza się w najniższym położeniu z kulką plastelinową o masie m. Na jaką wysokość wzniosą się obie kulki po zderzeniu i zlepieniu się? W obliczeniach przyjąć, że l jest dużo większe niż rozmiary mas M i m.

6.5. Na szczycie gładkiej kuli o promieniu R położono monetę, której nadano prędkość początkową w kierunku poziomym o wartości v_q. W którym miejscu, licząc od wierzchołka kuli, moneta oderwie się od niej (moneta zsuwa się bez tarcia)? Przyspieszenie ziemskie jest równe g.

6.6. Dwie kule o masach m_1 i m_2, poruszające się z taką samą prędkością v zderzają się centralnie. Zderzenie jest doskonale sprężyste. Podać warunki, jakie muszą być spełnione, aby: a) pierwsza kula zatrzymała się; b) druga kula zatrzymała się; c) nastąpiła zmiana zwrotu prędkości każdej z kul.

6.7. Jaką pracę należy wykonać, aby słup telegraficzny o masie $M = 200\ kg$, do którego wierzchołka przymocowano poprzeczkę o masie $m = 30\ kg$, podnieść z położenia poziomego do pozycji pionowej, jeżeli długość słupa jest równa $l = 10m$? Przyspieszenie ziemskie przyjąć $g = 10\ m/s^2$.

6.8. Znaleźć noc wodospadu Niagara, jeżeli jego wysokość $h = 50m$, a średni przepływ wody $V = 5900\ m^3/s$. Gęstość wody $\rho = 1000\ kg/m^3$, a przyspieszenie ziemskie $g = 10\ m/s^2$.

6.9. Kulka o masie m uderza w wahadło fizyczne o masie M i pozostaje w nim. Jaka część energii kulki zamieni się na ciepło?

6.10. Ciało wyrzucono pionowo w górę z prędkością v_o. Znaleźć wysokość, na której energia kinetyczna ciała będzie równa jego energii potencjalnej? Przyspieszenie ziemskie wynosi g.

6.11. Kulka o masie m lecąca poziomo, uderza w powierzchnię klina o masie M leżącego na poziomej płaszczyźnie tak, że odskakuje pionowo w górę na wysokość h. Zakładając, że zderzenie jest doskonale sprężyste, znaleźć prędkość, jaką uzyskał klin tuż po zderzeniu. Przyspieszenie ziemskie jest równe g.

6.12. Piłeczkę pingpongową o promieniu $r = 15\ mm$ i masie $m = 5\ g$ zanurzono w wodzie na głębokości $h = 30\ cm$. kiedy puszczono tę piłeczkę, wyskoczyła ona z wody na wysokość $h_1 = 10\ cm$. Jaka ilość ciepła wydzieliła się w wyniku działania sił tarcia? Gęstość wody $\rho = 1000\ kg/m^3$. Przyjąć $g = 10\ m/s^2$.

6.13. Dwie kule o masach $m_1 = 0{,}2\ kg$ i $m_2 = 0{,}8\ kg$ zawieszone na dwóch równoległych niciach o długości $l = 2\ m$ każda, stykają się ze sobą. Mniejsza kula zostaje odchylona o kąt 90^o od początku położenia i puszczona. Znaleźć prędkość kul po zderzeniu zakładając, że zderzenie kul było: a) doskonale sprężyste, b) doskonale niesprężyste. Jaka część energii początkowej zamieni się na ciepło w przypadku zderzenia doskonale niesprężystego?

6.14. Ciało o masie m przymocowane do nici o długości l_o zatacza okrąg o promieniu równym długości nici z prędkością v_o. Jaką pracę należy wykonać ściągając ciało do środka okręgu, skracając nić o Δl.

6.15. Znaleźć hamujący moment siły, który może zatrzymać w ciągu czasu $t = 20\ s$ koło zamachowe o masie $m = 50\ kg$ i promieniu $R = 0{,}3\ m$ obracające się z częstotliwością $f = 30\ s^{-1}$. Założyć, że masa koła zamachowego rozmieszczona jest na jego obwodzie. Jaka praca będzie potrzebna do zatrzymania tego koła zamachowego?

6.16*. Jednorodna deska o masie m i długości l leży na granicy zetknięcia dwóch stołów, na stole pierwszym. Jaką minimalną pracę należy wykonać, aby przesunąć ją ze stołu pierwszego na drugi, jeżeli współczynniki tarcia pomiędzy deską a stołem wynoszą μ_1 i μ_2, odpowiednio dla pierwszego i drugiego stołu.

6.17*. Walec o wysokości h, promieniu podstawy R i gęstości ρ_1 pływa w naczyniu wypełnionym cieczą o gęstości $\rho_2 > \rho_1$. Oś walca jest prostopadła do podstawy naczynia. Obliczyć pracę, jaką należy wykonać aby walec zanurzyć całkowicie w cieczy?

6.18*. Na podłodze leży lina o masie m i długości l. Jeden z jej końców podnosimy do góry dopóki lina nie oderwie się od podłogi. Wyznaczyć minimalną wartość pracy jaką należy wykonać, aby podnieść linę z podłogi w polu grawitacyjnym Ziemi w przypadku, gdy:

a) lina jest jednorodna
b) lina jest niejednorodna i jej masa m zależy od odległości x od jednego z jej końców według wzoru $m(x) = m_0\left(\frac{x}{l}\right)^2$, gdzie x jest długością podnoszonej części sznura.

6.19. Człowiek stoi na nieruchomym wózku i rzuca do przodu kamień o masie m, nadając mu prędkość v. Wyznaczyć pracę, jaką musi wykonać przy tym człowiek, jeżeli Masa wózka wraz z nim wynosi M.

6.20. Człowiek o masie $m_1 = 60\ kg$, biegnący z prędkością $v_1 = 8\ km/h$, dogania wózek o masie $m_2 = 90\ kg$, który jedzie z prędkością $v_2 = 4\ km/h$ i wskakuje na ten wózek. Z jaką prędkością będzie poruszał się wózek z człowiekiem? Jaka będzie prędkość wózka z człowiekiem w przypadku, gdy człowiek będzie biegł naprzeciwko wózka?

6.21. Lecący poziomo granat z prędkością $v = 10\ m/s$ w pewnej chwili rozerwał się na dwa odłamki. Większy odłamek, którego masa stanowiła $n = 60\%$ masy całego granatu, kontynuował lot w pierwotnym kierunku, lecz ze zwiększoną prędkością $v_1 = 25\ m/s$. Znaleźć kierunek i wartość prędkości mniejszego odłamka.

6.22. Znaleźć wartość prędkości początkowej poruszającego się po lodzie krążka hokejowego, jeżeli przed zderzeniem z bandą przebył on drogę $s_1 = 5\ m$, a po zderzeniu, które można traktować jako doskonale sprężyste, przebył jeszcze drogę $s_2 = 2\ m$ do chwili zatrzymania się. Współczynnik tarcia krążka o lód jest równy $\mu = 0{,}1$.

6.23. Z rury o przekroju $s = 5\ cm^2$ wypływa w kierunku poziomym strumień wody z prędkością, której wartość wynosi $v = 10\ m/s$, uderzając pionowo w ścianę stojącej na szynach wózka, a następnie spływa w dół po tej ściance. Z jakim przyspieszeniem będzie poruszać się wózek? Jego masa $m = 200\ kg$, a kierunek strumienia wody jest równoległy do kierunku szyn. Przyjąć, iż hamująca ruch wózka siła oporu jest sto razy mniejsza od ciężaru tego pojazdu.

6.24. Dwie poziome tarcze wirują wokół pionowej osi przechodzącej przez ich środek. Momenty bezwładności tarcz wynoszą I_1 oraz I_2, a ich prędkości kątowe ω_1 i ω_2. Po upadku tarczy górnej na dolną obie tarcze (w wyniku działania sił tarcia) obracają się razem jak jedno ciało. Wyznaczyć:

a) prędkość kątową tarcz po złączeniu;
b) pracę wykonaną przez siły tarcia.

6.25. Na brzegu poziomo ustawionej tarczy o momencie bezwładności I (względem osi pionowej przechodzącej przez środek tarczy) i promieniu R znajduje się człowiek o masie m. Obliczyć prędkość kątową tarczy ω, gdy człowiek zacznie poruszać się wzdłuż jej brzegu z prędkością v względem niej.

6.26. Człowiek o masie m stoi na osi obrotowego stolika o promieniu R trzymając oburącz za oś, pionowo nad głową obracające wokół tej osi (pionowej) z prędkością kątową ω_o koło rowerowe o momencie bezwładności I_o. Wyznaczyć prędkość kątową ω_1 ruchu obrotowego stolika po:

a) obróceniu przez człowieka koła o kąt 180^o,
b) zahamowaniu koła przez człowieka.

Moment bezwładności stolika z człowiekiem wynosi I.

6.27. Listwa drewniana o długości l i masie m może się obracać dookoła osi prostopadłej do listwy, przechodzącej przez jej środek. W koniec listwy trafia pocisk o masie m_1, lecący z prędkością v_1 w kierunku prostopadłym do osi i do listwy. Znaleźć prędkość kątową, z jaka listwa zacznie się obracać, gdy utkwi w niej pocisk.

6.28. Na poziomym, doskonale gładkim stole leży pręt o długości l i masie m. W koniec pręta trafia pocisk o masie m_1, lecący z prędkością v_1 w kierunku prostopadłym do osi pręta. Znaleźć prędkość kątową, z jaką pręt zacznie się obracać, gdy utkwi w niej pocisk oraz wartość prędkości liniowej środka pręta.

Rozwiązania:

6.1.R.

Korzystając z zasady zachowania energii oraz pamiętając, że praca jest formą energii otrzymujemy:

(1) $mgh = \frac{mv^2}{2} + W_1$

(2) $\frac{mv^2}{2} = W_2$

oraz z definicji pracy

(3) $W_1 = T_1 \cdot l$

(4) $W_2 = T_2 \cdot x$

i siły tarcia

(5) $T_1 = \mu_1 mg\cos\alpha$

(6) $T_2 = \mu_2 mg$

podstawiamy wyrażenia określone równaniami (2), (3), (4), (5) i (6) do równania (1) trzymując:

(7) $mgh = \mu_2 mgx + \mu_1 mg\cos\alpha \cdot l$

Ponieważ

(8) $\frac{h}{l} = \sin\alpha$**,** stąd $h = l \cdot \sin\alpha$.

Podstawiając tożsamość (8) do równania (7) i przekształcając je otrzymujemy:

$$x = \frac{\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha}{\mu_2} \cdot l$$

6.2.O. W = 375 J

6.3.O. W = mgl

6.4.R.

Korzystając z zasady zachowania energii mechanicznej otrzymujemy równanie:

(1) $Mg2l = \frac{p^2}{2M}$**,** gdzie p oznacza wartość pędu masy M w najniższym położeniu.

Z zasady zachowania pędu:

(2) $p = p_u$

Wysokość, na którą wzniosą się obie masy po złączeniu, obliczamy korzystając ponownie z zasady zachowania energii:

(3) $\frac{p_u^2}{2(M+m)} = (M+m)gh$

Po przekształceniach

(4) $h = 2\frac{M^2}{(M+m)^2} \cdot l$

6.5.R.

Z zasady zachowania energii wynika:

(1) $\frac{mv_o^2}{2} + mgR = \frac{mv^2}{2} + mg(R-x)$

W punkcie, w którym oderwie się ciało:

(2) $\frac{mv^2}{R} = N$, gdzie N – wartość siły nacisku.

Z podobieństwa trójkątów:

(3) $\frac{N}{mg} = \frac{R-x}{R}$

Po rozwiązaniu układu powyższych równań otrzymujemy:

(4) $x = \frac{R}{3} - \frac{v_0^2}{3g}$

6.6.O. a) $m_1=3m_2$. b) $3m_1 = m_2$, c) $\frac{m_2}{3} \angle m_1 \angle 3m_2$

6.7.R. Praca jest równa zmianie energii potencjalnej słupa względem jego pierwotnego położenia:

(1) $W = \Delta E_p$

Słup traktujemy jako bryłę sztywną, natomiast poprzeczkę jako punkt materialny.

(2) $W = \left(Mg\frac{l}{2} + mgl\right) - 0 = 13kJ$

6.8.R.

(1) $P = \frac{W}{t}$

(2) $W = \Delta E = mgh$

(3) $P = \frac{mgh}{t}$

(4) $\frac{m}{t} = \rho \cdot V$

(5) $P = \rho \cdot Vgh = 2950 MW$

6.9.R.

(1) $x = \frac{Q}{E_o}$, gdzie Q – wydzielone ciepło, E_o – energia kinetyczna kulki;

(2) $Q = E_o - E$, E – energia kinetyczna układu kulka wahadło po zderzeniu;

(3) $E_o = \frac{p_o^2}{2m}$, $E = \frac{p^2}{2(M+m)}$, gdzie p_o – pęd kulki przed zderzeniem, p – pęd układu kulka wahadło po zderzeniu.
Zgodnie z zasadą zachowania pędu:

(4) $p_0 = p$
Podstawiając wzory (2), (3) i (4) do równania (1) otrzymujemy:

(5) $x = \frac{M}{M+m}$

6.10.O.
$h = \frac{v_o^2}{4g}$

6.11.R.
Korzystając z zasady zachowania pędu oraz zasady zachowania energii otrzymujemy układ trzech równań:

(1) $p_3^2 = p_2^2 + p_1^2$, p_1 – pęd kulki przed zderzeniem, p_2 – pęd kulki po zderzeniu, p_3 – pęd klina.

(2) $\frac{p_3^2}{2M} + \frac{p_2^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m}$

(3) $\frac{p_2^2}{2m} = mgh$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy wzór na wartość p_3:

(4) $p_3 = 2m\sqrt{\dfrac{ghM}{M-m}}$

Ponieważ $p_3 = M \cdot v_3$, stąd

(5) $v_3 = 2m\sqrt{\dfrac{gh}{M(M-m)}}$

6.12.R.

Praca siły wyporu F_w na drodze h zostaje wykorzystana na zmianę energii potencjalnej ciała ΔE względem położenia początkowego oraz na ciepło Q:

(1) $F_w h = Q + \Delta E$

(2) $F_w = \rho \cdot gV$ **;** $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3$

(3) $\Delta E = mg(h + h_1)$

Przekształcając powyższe równania otrzymujemy:

(4) $Q = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot gh - mg(h + h_1) = 2{,}2 \cdot 10^{-2}\ J$

6.13.R.

a) W zderzeniu doskonale sprężystym spełniona jest zasada zachowani pędu i energii mechanicznej

(1) $m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2$, gdzie v, v_1 – wartości prędkości ciała o masie m_1 przed i po zderzeniu, v_2 – wartość prędkości ciała m_2 po zderzeniu.

(2) $\dfrac{m_1 v^2}{2} = \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2}$

Rozwiązując powyższe równania otrzymujemy:

(3) $v_1 = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v$ oraz $v_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v$.

Energia potencjalna odchylonej kulki jest równa jej energii kinetycznej w momencie zderzenia z drugą kulką:

(4) $m_1 gl = \dfrac{m_1 v^2}{2}$ stąd $v = \sqrt{2gl}$

więc:

(5) $v_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gl} = 3{,}8 m/s$ i $v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gl} = 2{,}5 m/s$

b)
W zderzeniu doskonale nie sprężystym spełniona jest zasada zachowania pędu:

(1) $m_1 v = (m_1 + m_2) v_x$,

gdzie v wartość prędkości masy *m* przed zderzeniem, v_x wartość prędkości obu złączonych kulek po zderzeniu
stąd:

(2) $v_x = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v$

Ponieważ

(3) $m_1 gl = \frac{m_1 v^2}{2}$ stąd $v = \sqrt{2gl}$

otrzymujemy

(4) $v_x = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gl} = 1{,}3 m/s$

(5) $x = \frac{Q}{m_1 gl}$ **-** oznacza, jaka część energii zamieni się na ciepło

(6) $Q = m_1 gl - \frac{(m_1 + m_2)}{2} v_x^2$

Po podstawieniu za v_x otrzymujemy:

(7) $x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0{,}8$

6.14.R.
Wykonana praca jest równa zmianie energii kinetycznej:

(1) $W = \Delta E = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2}$ **.**

Prędkość v kulki po skróceniu nici znajdujemy z zasady zachowania pędu:
(2) $mv(l_0 - \Delta l) = mv_0 l_0$

Wówczas praca jest równa:

(3) $W = \frac{mv_0^2}{2}\left[\frac{l_0^2}{(l_0 - \Delta l)^2} - 1\right]$

6.15.R.

(1) $M = I \cdot \varepsilon$; gdzie M – wartość momentu siły, $I = mR^2$ – moment bezwładności tarczy, ε - wartość przyspieszenia kątowego.

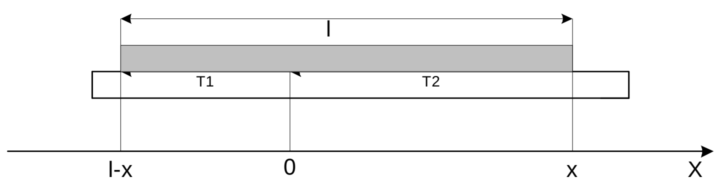
(2) $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{\omega - 0}{t} = \frac{2\pi f}{t}$

(3) $M = \frac{2\pi \cdot fmR^2}{t} = 42{,}39 N \cdot m$

Praca potrzebna do zatrzymania koła jest równa zmianie energii kinetycznej:

(4) $W = \Delta E = \frac{1}{2} I\omega^2 - 0 = \frac{1}{2} mR^2 \cdot (2\pi \cdot f)^2 = 2\pi^2 mR^2 f^2 = 79{,}9 kJ$

6.16.R.
Przesunięcie deski z jednego stołu na drugi wymaga wykonania pracy siłą co najmniej równą sile tarcia pomiędzy deską a płaszczyznami stołów. Siła tarcia w tym przypadku jest równa sumie sił tarcia pomiędzy deską i, odpowiednio, stołem pierwszym (T_1) i drugim (T_2).



(1) $W = \int_0^l (T_1 + T_2) dx$

Zgodnie z rysunkiem wartości sił T_1 i T_2 zależą od tego, jaka część deski znajduje się na stole pierwszym, a jaka na drugim. Ponieważ deska jest jednorodna wychodząc z założenia, że masa jest proporcjonalna do długości deski możemy znaleźć wartości sił nacisku na poszczególne stoły.

(2) $N_1 = \frac{l - x}{l} mg$, a więc $T_1 = \mu_1 \cdot \frac{l - x}{l} mg$

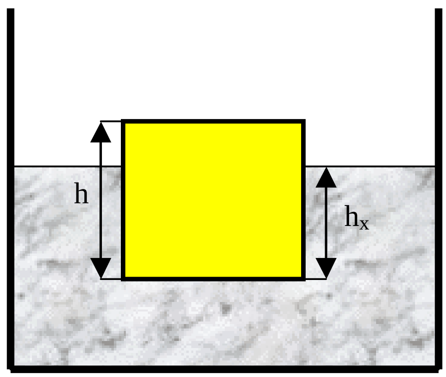
(3) $N_2 = \frac{x}{l} mg$, a więc $T_2 = \mu_2 \cdot \frac{x}{l} mg$

Podstawiając do wzoru (1) otrzymujemy po scałkowaniu:

(4) $W = \frac{mgl}{2}(\mu_1 + \mu_2)$

6.17.R.
Pracę obliczamy z wzoru

(1) $W = \int_{h_x}^{h} F_w dx$



ponieważ wartość siły wyporu $F_w = \rho_2 \cdot Vg = \rho_2 \cdot g \cdot \pi \cdot R^2 x$ zależy od głębokości zanurzenia walca.

Wielkość początkowego zanurzenia walca h_1 obliczamy z równowagi siły wyporu i siły ciężkości w chwili początkowej:

(2) $F_w = Q$, czyli $\rho_2 \cdot \pi \cdot R^2 h_x g = \rho_1 \cdot \pi \cdot R^2 hg$, stąd $h_x = \frac{\rho_1}{\rho_2} h$.

Po podstawieniu do równania jeden otrzymujemy wyrażenie na pracę:

(3) $W = \frac{\pi \cdot R^2 gh^2}{2} \cdot \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_2}$

6.18.R.

a) Na fragment liny o masie *dm*, znajdujący się w odległości *x* od jej końca, działa siła

(1) $dF = g \cdot dm$.

Podnosząc ten fragment na wysokość *x* należy działać na niego siłą równą co do wartości *dF* lecz przeciwnie skierowaną. Zostanie przy tym wykonana praca elementarna :

(2) $dW = x \cdot dF = xg \cdot dm$.

Ponieważ cała jednorodna lina o długości *l* ma masę *m*, z proporcji $\frac{dx}{l} = \frac{dm}{m}$ wynika, że rozpatrywany fragment ma masę

(3) $dm = \frac{m}{l} \cdot dx$.

Podstawiając wzór (3) do wzoru (2) i sumując prace elementarne *dW* otrzymujemy:

(4) $W = \frac{mg}{l} \int_0^l x \cdot dx = \frac{mgl}{2}$

b) Dla liny niejednorodnej mamy zależność masy od odległości x: $m(x) = m_0 \left(\frac{x}{l} \right)^2$.

Masę *dm* elementu liny o długości *dx* obliczamy różniczkując tę zależność:

(5) $dm = \frac{2m_0}{l^2} x \cdot dx$.

Siła *dF* ma teraz postać:

(6) $dF = g \cdot dm = \frac{2m_0 g}{l^2} x \cdot dx$,

zaś praca elementarna

(7) $dW = x \cdot dF = \frac{2m_0 g}{l^2} x^2 \cdot dx$.

Praca całkowita jest równa całce:

(8) $W = \frac{2m_0 g}{l^2} \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{2m_0 gl}{3}$

6.19.R.
Praca wykonana przez człowieka będzie równa przyrostowi energii kinetycznej układu:

(1) $W = \Delta E_k = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$,

gdzie prędkość v_1 jest prędkość wózka z człowiekiem po rzucie. Prędkość tę oblicza się z zasady zachowania pędu:

(2) $0 = M\vec{v}_1 + m\vec{v}$.

Po uwzględnieniu zwrotów wektorów :
(3) $0 = Mv_1 - mv$

otrzymujemy :

(4) $v_1 = \frac{m}{M} v$.

Uwzględniając zależność (4) otrzymujemy wzór na pracę:

(5) $W = \frac{M}{2}\left(\frac{m}{M} v\right)^2 + \frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$

6.20.O.

a) $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 5{,}6 \frac{km}{h}$

b) $v = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 0{,}8 \frac{km}{h}$

6.21.R.
Z zasady zachowania pędu wynika, że pęd granatu przed wybuchem musi być równy sumie pędów wszystkich odłamków granatu po wybuch:

(1) $m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$.

Przechodząc do równania skalarnego należy uwzględnić , że prędkości ułamków są skierowane przeciwnie:

(2) $mv = m_1 v_1 - m_2 v_2$

Przekształcając równanie (2) otrzymujemy:

(3) $v_2 = \frac{m_1 v_1 - mv}{m_2}$.

Z warunków zadania wynika:

$m_1 = nm$ oraz $m_2 = m - m_1 = (1 - n)m$.

Podstawiając powyższe zależności do równania (3) otrzymujemy:

(4) $v_2 = \frac{nv_1 - v}{1 - n} = 12{,}5 \frac{m}{s}$.

Mniejszy odłamek odleciał w kierunku przeciwnym do kierunku lotu odłamka większego.

6.22.R.
Energia kinetyczna początkowa krążka zostaje zużyta na pracę siły tarcia przed zderzeniem z bandą i po zderzeniu z bandą, ponieważ w wyniku zderzenia doskonale sprężystego zmienia się kierunek a nie wartość pędu.

(1) $\frac{mv_0^2}{2} = kmgs_1 + kmgs_2$

Po przekształceniu powyższego równania otrzymujemy:

(2) $v_o = \sqrt{2kg(s_1 + s_2)} = 3{,}7\frac{m}{s}$

6.23.R.
Siła wypadkowa działająca na wózek opisana jest równaniem:

(1) $F_w = ma = F - \frac{mg}{100}$

Siłę F, jaką woda popycha wózek, obliczamy z II zasady dynamiki Newtona:

(2) $F \cdot t = \Delta p$

Zmiana pędu w kierunku ruchu drezyny jest równa:

(3) $\Delta p = p - 0$.

Ponieważ $p = mv$, zaś $m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot x$ otrzymujemy podstawiając te zależności do równania (2):

(4) $F \cdot t = \rho \cdot S \cdot x \cdot v$.

Dzieląc powyższe równanie obustronnie przez t otrzymujemy:

(5) $F = \frac{x}{t} \cdot \rho \cdot S \cdot v = \rho \cdot S \cdot v^2$, ponieważ $v = \frac{x}{t}$.

Podstawiając do równania (1) otrzymujemy:

(6) $ma = \rho \cdot S \cdot v^2 - \frac{mg}{100}$.

Po przekształceniu otrzymujemy:

(7) $a = \frac{\rho \cdot S \cdot v^2}{m} - \frac{g}{100} = 0{,}15 \frac{m}{s^2}$.

6.24.R.
Na układ opisany w zadaniu nie działa żaden zewnętrzny moment sił. Moment pędu układu L_1 przed połączeniem tarcz wynosi:

(1) $L_1 = I_1\omega_1 + I_2\omega_2$,

natomiast po połączeniu momentu pędu L_2 wynosi:

(2) $L_2 = (I_1 + I_2) \cdot \omega$.

W powyższym wzorze ω jest prędkością kątową po połączeniu się tarcz. Z zasady zachowania momentu pędu L_1=L_2, toteż porównując oba powyższe wzory otrzymujemy wyrażenie na prędkość kątową ω w postaci:

(3) $\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$.

Pracę, która została wykonana przez siłę tarcia podczas wyrównywania się prędkości tarcz, obliczamy jako różnicę energii kinetycznych układu:
początkowej:

(4) $E_{k1} = \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2}$

i końcowej:

(5) $E_{k2} = \frac{(I_1 + I_2)\omega^2}{2}$

Wówczas :

(6) $W = E_{k1} - E_{k2} = \frac{I_1 I_2 (\omega_1 - \omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}$

6.25.R.
Stosując zasadę zachowania momentu pędu otrzymujemy:

(1) $0 = \vec{L}_c + \vec{L}_t$, gdzie L_c – moment pędu człowieka, L_t – moment pędu tarczy.

Zapisując powyższe równanie w postaci skalarnej otrzymujemy:

(2) $0 = L_c + L_t$.

Moment pędu tarczy wynosi:

(3) $L_t = I \cdot \omega_t$, gdzie ω_t – prędkością kątową tarczy.

Człowiek porusza się z prędkością kątową $\omega_c = \frac{v}{R}$ względem tarczy i jednocześnie jest unoszony przez tarczę z prędkością kątową ω_t w kierunku przeciwnym. Zatem jego całkowity moment pędu wynosi:

(4) $L_c = I_c \cdot \omega_t - I_c \cdot \omega_c$, gdzie $I_c = mR^2$ jest momentem bezwładności człowieka o masie *m* względem osi obrotu tarczy.

Podstawiając równania (3) i (4) do (2) otrzymujemy:

(5) $$\omega_t = \frac{mRv}{I + mR^2}$$

6.26.R.

a) Początkowy moment pędu układu wynosi:

(1) $L_0 = I_0 \cdot \omega_0$,

ponieważ tylko koło się obraca.

Po obróceniu koła o 180^o jego moment pędu zmieni się na przeciwny, wskutek czego człowiek ze stolikiem będzie się poruszał ruchem obrotowym. Wówczas całkowity moment pędu układu jest równy:

(2) $L_1 = I \cdot \omega_1 - I_0 \cdot \omega_0$

gdzie ω_1 – prędkość kątowa człowieka ze stolikiem.

Korzystając z zasady zachowania momentu pędu:

(3) $L_0 = L_1$

wyznaczamy prędkość kątową ω_1:

(4) $$\omega_1 = 2\frac{I_0 \cdot \omega_0}{I}$$

b) Po zahamowaniu koła rowerowego całkowity moment pędu układu będzie równy momentowi pędu stolika z człowiekiem:

(5) $L_2 = I \cdot \omega_2$

Stosując zasadę zachowania momentu pędu wyznaczamy ω_2:

(6) $\omega_2 = \frac{I_0 \cdot \omega_0}{I}$

6.27.R.
Z zasady zachowania momentu pędu wynika:

(1) $L_1 = L_2$,

gdzie:

(2) $L_1 = m_1 v_1 \frac{l}{2}$ jest momentem pędu układu listwa – pocisk przed zderzeniem,

zaś:

(3) $L_2 = I \cdot \omega$ jest momentem układu po zderzeniu.

Moment bezwładności układu I po zderzeniu opisany jest zależnością:

(4) $I = \frac{1}{12} m l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2$.

Przekształcając powyższe równania otrzymujemy:

(5) $\omega = \frac{2 m_1 v_1}{l\left(\frac{1}{3} m + m_1\right)}$

6.28.R.
Przy rozwiązaniu zadania korzystamy z zasady zachowania pędu i z zasady zachowania momentu pędu.
Przed zderzeniem pęd układu równy jest pędowi pocisku:

(1) $p_1 = m_1 v_1$.

Moment pędu układu względem dowolnie wybranego punktu jest równy momentowi pędu pocisku.

(2) $L_1 = m_1 v_1 \left(\frac{l}{2} - x\right)$, gdzie x jest odległością środka masy układu pocisk-pręt od środka pręta.

Położenie środka masy znajdujemy ze wzoru:

(3) $x = \frac{\frac{l}{2} \cdot m_1 + 0 \cdot m}{m_1 + m} = \frac{l}{2}\left(\frac{m_1}{m + m_1}\right)$.

Po zderzeniu pocisku z prętem pęd układu jest równy:

(4) $p_2 = (m + m_1)v_s$, gdzie v_s – prędkość środka masy układu.

Porównując wartości pędów przed (1) i po zderzeniu (4) obliczamy prędkość środka masy:

(5) $v_s = \dfrac{m_1}{m + m_1} v_1$.

Moment pędu układu pocisk-pręt po zderzeniu wyraża się wzorem:

(6) $L_2 = I \cdot \omega$,

gdzie ω - prędkość kątowa, zaś moment bezwładności I jest sumą momentu bezwładności pręta i momentu bezwładności pocisku:

(7) $I = I_{pr} + I_{poc}$.

Moment bezwładności pocisku liczymy jak moment bezwładności punktu materialnego:

(8) $I_{poc} = m_1 \left(\dfrac{l}{2} - x \right)^2$.

Moment bezwładności pręta względem środka masy układu obliczamy korzystając z prawa Steinera:

(9) $I_{pr} = I_0 + mx^2 = \dfrac{1}{12} ml^2 + mx^2$.

Korzystając z zasady zachowania momentu pędu [rów.(2) i (6)] oraz podstawiając wzory: (3), (7), (8) i (9) otrzymujemy wzór na prędkość kątową:

(10) $\omega = \dfrac{6m_1 (m + m_1) v_1}{l (m^2 + m \cdot m_1 + 4m_1^2)}$