UNIVERSIDADE DE AVEIRO
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA, TELECOMUNICAÇÕES E INFORMÁTICA

MPEI - Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática (2018/2019) **PL 03**

Palavras chave: Variáveis Aleatórias: distribuição de probabilidade, função massa de probabilidade, função de probabilidade, função distribuição acumulada, função densidade de probabilidade, e algumas distribuições (Binomial, Poisson, Uniforme, Normal).

Responda às seguintes questões:

1. Considere a variável aleatória X correspondente à face que fica visível no lançamento de 1 dado:

   (a) Efectue em Matlab/Octave um gráfico representativo da função de massa de probabilidade[1] de X. Não se esqueça de ter os valores adequados no eixo dos xx;

   (b) Num segundo gráfico, na mesma figura, desenhe o gráfico da função de distribuição acumulada.

2. Considere uma caixa contendo 90 notas de 5 Euros, 9 notas de 50 e 1 de 100:

   (a) Descreva o espaço de amostragem da experiência aleatória, retirar uma nota da caixa, e as probabilidades dos acontecimentos elementares.

   (b) Considere a variável aleatória X como sendo o valor de uma nota retirada à sorte da caixa acima descrita. Descreva o espaço de amostragem e a função de massa de probabilidade de X.

   (c) Determine a função massa de probabilidade de X e efectue a sua representação gráfica em Matlab/Octave.

3. Considere 4 lançamentos de uma moeda equilibrada. Seja X a variável aleatória representativa do número de coroas observados nos 4 lançamentos.

   (a) Estime, usando simulação com o Matlab/octave, a função de probabilidade $p_X(x)$ da variável aleatória X.

   (b) Estime o valor esperado, a variância e o desvio padrão de X com base em $p_X(x)$.

   (c) Identifique o tipo da distribuição da variável aleatória X e escreva a expressão teórica da respectiva função de probabilidade.

   (d) Substitua os valores admissíveis da v.a. X na função obtida acima e compare com os cálculos efectuados na alínea a) desta questão.

   (e) Com base na função de probabilidade desta distribuição, calcule:

      i. A probabilidade de obter pelo menos 2 coroas;

      ii. A probabilidade de obter até 1 coroa;

      iii. A probabilidade de obter entre 1 e 3 coroas.

4. Sabendo que um processo de fabrico produz 30% de peças defeituosas e considerando a variável aleatória, X, que representa o número de peças defeituosas numa amostra de 5 peças tomadas aleatoriamente, obenha (analiticamente e por simulação):

   (a) o histograma representativo da distribuição de probabilidades de X;

   (b) a probabilidade de, no máximo, 2 das peças de uma amostra serem defeituosas.

---

[1] A função massa de probabilidade pode ser designada alternativamente por função de probabilidade

5. Suponha que o(s) motor(es) de um avião pode(m) falhar com probabilidade p e que as falhas são independentes entre motores. Suponha ainda que o avião se despenha se mais de metade dos motores falharem. Utilize a distribuição que considerar mais adequada.

   a) Prefere voar num avião com 2 ou 4 motores?

   Sugestão: Tem pelo menos 2 alternativas: (1) obter expressões para a probabilidade de cada tipo de avião se despenhar em função de p e usar o quociente entre ambas para responder à questão, (2) efectuar os cálculos para um conjunto de valores concretos[2] de p (ex: `p= logspace(-3,log10(1/2),100))` e usar um gráfico mostrando simultaneamente as probabilidades de cada tipo de avião se despenhar.

6. A distribuição de Poisson é uma forma limite da distribuição binomial (quando $n \to \infty$, $p \to 0$ e np permanece constante) e portanto pode ser usada para aproximar e simplificar os cálculos envolvidos com a binomial numa situação dessas.

   Num processo industrial de fabrico de chips, alguns aparecem defeituosos tornando-os inapropriados para comercialização. É sabido que em média por cada mil chips há um defeituoso. Determine a probabilidade de numa amostra de 8000 aparecerem 7 defeituosos. Compare os resultados usando a distribuição correcta e a aproximação de Poisson.

   Lei de Poisson: $p_k = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$

7. É conhecido que o número de mensagens que chega a um computador por segundo se comporta de acordo com a lei de Poisson. Suponha que o número de mensagens que chega a um computador segue uma lei de Poisson com média 15 (por segundo). Calcule a probabilidade de:

   (a) o computador não receber nenhuma mensagem num segundo.
   (b) mais de 10 mensagens chegarem ao computador num período de um segundo.

8. Verifique se a função $f(x) = (x + 5)/30$ pode representar a função de probabilidade de uma variável aleatória que só possa tomar os valores 1, 2, 3 e 4.

9. Assumindo que o número de erros tipográficos numa página de um livro tem uma distribuição de Poisson com $\lambda = 1$, calcule a probabilidade de que exista pelo menos um erro numa determinada página.

10. Sendo a variável aleatória X contínua e uniformemente distribuída em $(0, 10)$, calcule as probabilidades de:

    (a) $X < 3$
    (b) $X > 7$
    (c) $1 < X < 6$

    Comprove os resultados através de simulação.

11. Considerando a variável aleatória X, representativa das classificações dos alunos de um determinado curso, contínua [3] e com distribuição normal (média 14 e desvio padrão 2), obtenha através de simulação uma estimativa para as probabilidades de:

    (a) um aluno do curso ter uma classificação entre 12 e 16;
    (b) os alunos terem classificações entre 10 e 18;
    (c) um aluno passar (ter classificação maior ou igual a 10).

    Sugestão: Utilize a função Matlab `randn()` para gerar números aleatórios com distribuição normal.

[2] Correr `help logspace` no Matlab/Octave para perceber os argumentos do `logspace` usados no exemplo.
[3] Equivale a considerar que as classificações são números reais.