Woche 1

1. Rechenoperationen

Stellen Sie in der Form a + ib dar:

$$\frac{1+i}{1-i}$$

$$\frac{1}{3i}\left(6-5i+\frac{1+5i}{1+i}\right)$$

$$(1-i)^{14}$$

a)

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)\,(1+i)}{(1-i)\,(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{1+2i-1}{1-(-1)}=\frac{2i}{2}=i$$

b)

$$\frac{1}{3i}\left(6-5i+\frac{1+5i}{1+i}\right)=\frac{1}{3i}\,(9-3i)=-1-3i$$

c)

$$(1-i)^{14}=(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2$$

$$=2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i=128i^7=128i^2\cdot i^2\cdot i^2\cdot i$$

$$-128\cdot i^2\cdot i^2\cdot i=128\cdot i^2\cdot i=-128i$$

2. Eulersche Formel

Stellen Sie in Polarkoordinaten $z=re^{i\varphi}$ dar: a) $1-i$

$$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2};\varphi=\arctan(\frac{1}{1})=45^\circ=\frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$$

b) $-\sqrt{3}+3i$

$$r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{12};\varphi=\arctan(-\frac{3}{\sqrt{3}})=-\frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt{12}e^{\frac{\pi i}{3}}$$

c) $\sqrt{2}i$

$$r=\sqrt{2};\varphi=90^\circ=\frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{2}}$$

3. Eulersche Formel

a) Welche Kurve in der komplexen Zahlenebene wird durch folgende Gleichung dargestellt?

$$|z + 1 - i| = 2$$

$$z = x + yi$$

$$|x + yi + 1 - i| = 2$$

$$|i(y - 1) + (x + 1)|$$

wobei $i(y - 1)$ den imaginären Teil dargestellt und $(x + 1)$ den reellen Teil
Es gilt:

$$|z_0| = |x_0 + y_0 i| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Somit:

$$\sqrt{(y-1)^2 + (x+1)^2} = 2$$

$$(y-1)^2 + (x+1)^2 = 4$$

dies ist die Kreisfunktion mit einem Radius von $r = 2$ und dem Mittelpunkt M(-1, 1).

b) Substituieren Sie z in der obigen Kurvengleichung durch die neue Variable

$$w = \frac{1}{z + i + 1}; z = \frac{1}{w} - i - 1$$

$$|\frac{1}{w} - 2i| = 2$$

$$|\frac{1 - 2i(x + yi)}{x + yi}| = 2$$

$$\sqrt{(1 + 2y)^2 + (-2x)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$1 + 4y + 4y^2 + 4x^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$1 + 4y = 0$$

$$y = -\frac{1}{4}$$

Woche 2

4. Nullstellen

Berechnen und zeichnen Sie:
a) $\sqrt{-i}$

$$z_0 = \sqrt{r} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}(\varphi + 2\pi \cdot 0)\right)}$$

$$z_1 = \sqrt{r} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}(\varphi + 2\pi \cdot 1)\right)}$$

$$z_0 = \sqrt{1} \cdot e^{\left(-\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 0\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{4} \cdot i}$$

$$z_1 = \sqrt{1} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)\right)} = e^{\frac{3\pi}{4} \cdot i}$$

b) $\sqrt{1+i}$

$$z = a + ib, r = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

$$z_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{8} + 0\pi} = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{8}}$$

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)} = \sqrt{2} e^{\frac{9i\pi}{8}}$$

c) $\sqrt[3]{i}$

$$r = \sqrt{1} = 1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{1} e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right)} = e^{\frac{i\pi}{6}}$$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right)} = e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

$$z_2 = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right)} = e^{\frac{3i\pi}{2}}$$

5. Reihen

$$Z = \sum_n e^{\frac{-E_n}{kT}}$$

Die Geometrische Summenformel besagt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

in dem Fall sind

$$n = \infty; q = e; k = \frac{-E_n}{kT}$$

Somit kann erhält man durch Einsetzen:

$$\sum_{n}^{\infty} e^{\frac{-E_n}{kT}}$$

Da $E_n = (\frac{1}{2} + n)h\nu$:

$$\sum_{n}^{\infty} e^{\frac{-(\frac{1}{2}+n)h\nu}{kT}}$$

Nun wird der Exponent $k = \frac{-(\frac{1}{2}+n)h\nu}{kT}$ wie folgt betrachtet: Es wird angenommen, dass $kT = \text{const.}$ und $h\nu = \text{const.}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-(\frac{1}{2}+\infty)h\nu}{kT} = \frac{-\infty}{kT} = -\infty$$

Somit kann in $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ das $n+1 = -\infty$ gesetzt werden, was zu folgender Betrachtung führt:

$$e^x = \lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} \to 0$$

Somit kann angenommen werden, dass $e^{-\infty} = 0$
Mit dieser Betrachtung kann nun alles eingesetzt werden

$$\sum_{n}^{\infty} e^{\frac{-E_n}{kT}} = \frac{1}{1-e} = (1-e)^{-1}$$

b) Es wird angenommen, dass das Ergebnis bei a) falsch ist, da $ln(\frac{1}{1-e})$ nicht existiert.
somit wird mit

$$z = \frac{e^{\frac{a}{2}}}{e^{a-1}}; a = \frac{h\nu}{kT}$$

weitergerechnet.

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T}\left(kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln(Z)\right)$$

$$\ln(Z) = \frac{a}{2} - a - 1 = -\frac{1}{2}a - 1 = -\frac{1}{2}\frac{h\nu}{kT} - 1$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{1}{2}\frac{h\nu}{kT} - 1\right) = \frac{1}{2}\frac{h\nu}{kT^2}$$

$$kT^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{h\nu}{kT^2} = \frac{h\nu}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{h\nu}{2} = 1$$

Ja ne Cheffe, ich habe keinen Plan was ich hier mache lmao

6. Reihen

Das Quotientenkriterium lautet:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Wobei von a der Summand der Reihe ist. k ist eine frei wählbare Variable nach die Reihe summiert wird.
a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{e^{(nx)^2}}$$

Die Variablen sind:

$$a = \frac{n^4}{e^{(nx)^2}}, k = n$$

Somit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^4}{e^{((n+1)x)^2}}}{\frac{n^4}{e^{(nx)^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)^4}{e^{((n+1)x)^2}} \cdot \frac{e^{(nx)^2}}{n^4}$$

Der limes wird erstmal weggelassen...

$$\frac{(n+1)^4}{n^4} \cdot \frac{e^{(nx)^2}}{e^{(xn+x)^2}} = \left(\frac{(n+1)}{n}\right)^4 \cdot \left(\frac{e^{(nx)}}{e^{(xn+x)}}\right)^2$$

Betrachtung des Termes mit e:

$$\frac{e^{(nx)}}{e^{(xn+x)}} = \frac{e^{nx}}{e^{nx} \cdot e^x} = \frac{e^{nx}}{e^{nx}} e^{-x} = 1e^{-x} = e^{-x}$$

somit:

$$\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^4 \cdot \left(e^{-x}\right)^2$$

Betrachtung des anderen Termes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{\infty+1}{\infty} = 1$$

Somit:

$$\left(e^{-x}\right)^2 = e^{-2x}; x \in \mathbb{R}$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-x)^n}{n^2+x}$ Die Variablen sind

$$k = n, a = \frac{(\sqrt{5}-x)^n}{n^2+x}$$

Somit:

$$\frac{(\sqrt{5}-x)^{n+1}}{(n+1)^2+x} \cdot \frac{n^2+x}{(\sqrt{5}-x)^n} = \frac{(\sqrt{5}-x)^{n+1}}{(\sqrt{5}-x)^n} \cdot \frac{n^2+x}{(n+1)^2+x}$$

$$(\sqrt{5}-x) \cdot \frac{n^2+x}{(n+1)^2+x}$$

Es wird der Term mit n betrachtet:

$$\lim_{n\to\infty} fracn^2+x(n+1)^2+x = \frac{\infty^2 x}{(\infty+1)^2 x} = \frac{\infty x}{\infty x} = 1$$

Somit:

$$(\sqrt{5}-x) \cdot 1 = \sqrt{5}-x; x \in \mathbb{R}$$