1 Woche 1

1.1 1. Rechenoperationen

Stellen Sie in der Form a + ib dar:

$$\frac{1+i}{1-i}$$

$$\frac{1}{3i}\left(6-5i+\frac{1+5i}{1+i}\right)$$

$$(1-i)^{14}$$

a)

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)\,(1+i)}{(1-i)\,(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{1+2i-1}{1-(-1)}=\frac{2i}{2}=i$$

b)

$$\frac{1}{3i}\left(6-5i+\frac{1+5i}{1+i}\right)=\frac{1}{3i}\,(9-3i)=-1-3i$$

c)

$$(1-i)^{14}=(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2$$

$$=2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i=128i^7=128i^2\cdot i^2\cdot i^2\cdot i$$

$$-128\cdot i^2\cdot i^2\cdot i=128\cdot i^2\cdot i=-128i$$

1.2 2. Eulersche Formel

Stellen Sie in Polarkoordinaten $z=re^{i\varphi}$ dar: a) $1-i$

$$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2};\varphi=\arctan(\frac{1}{1})=45°=\frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$$

b) $-\sqrt{3}+3i$

$$r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{12};\varphi=\arctan(-\frac{3}{\sqrt{3}})=-\frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt{12}e^{\frac{\pi i}{3}}$$

c) $\sqrt{2}i$

$$r=\sqrt{2};\varphi=90°=\frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{2}}$$

1.3 3. Eulersche Formel

a) Welche Kurve in der komplexen Zahlenebene wird durch folgende Gleichung dargestellt?

$$|z + 1 - i| = 2$$

$$z = x + yi$$

$$|x + yi + 1 - i| = 2$$

$$|i(y - 1) + (x + 1)|$$

wobei $i(y - 1)$ den imaginären Teil dargestellt und $(x + 1)$ den reellen Teil
Es gilt:

$$|z_0| = |x_0 + y_0 i| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Somit:

$$\sqrt{(y-1)^2 + (x+1)^2} = 2$$

$$(y-1)^2 + (x+1)^2 = 4$$

dies ist die Kreisfunktion mit einem Radius von $r = 2$ und dem Mittelpunkt M(-1, 1).

b) Substituieren Sie z in der obigen Kurvengleichung durch die neue Variable

$$w = \frac{1}{z + i + 1}; z = \frac{1}{w} - i - 1$$

$$|\frac{1}{w} - 2i| = 2$$

$$|\frac{1 - 2i(x + yi)}{x + yi}| = 2$$

$$\sqrt{(1 + 2y)^2 + (-2x)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$1 + 4y + 4y^2 + 4x^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$1 + 4y = 0$$

$$y = -\frac{1}{4}$$

2 Woche 2

2.1 4. Nullstellen

Berechnen und zeichnen Sie:
a) $\sqrt{-i}$

$$z_0 = \sqrt{r} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}(\varphi + 2\pi \cdot 0)\right)}$$
$$z_1 = \sqrt{r} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}(\varphi + 2\pi \cdot 1)\right)}$$
$$z_0 = \sqrt{1} \cdot e^{\left(-\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 0\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{4} \cdot i}$$
$$z_1 = \sqrt{1} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)\right)} = e^{\frac{3\pi}{4} \cdot i}$$