Woche 1

1. Rechenoperationen

Stellen Sie in der Form a + ib dar:

$$\frac{1+i}{1-i}$$

$$\frac{1}{3i}\left(6-5i+\frac{1+5i}{1+i}\right)$$

$$(1-i)^{14}$$

a)

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{1+2i-1}{1-(-1)}=\frac{2i}{2}=i$$

b)

$$\frac{1}{3i}\left(6-5i+\frac{1+5i}{1+i}\right)=\frac{1}{3i}(9-3i)=-1-3i$$

c)

$$(1-i)^{14}=(1-i)^2(1-i)^2(1-i)^2(1-i)^2(1-i)^2(1-i)^2(1-i)^2$$

$$=2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i=128i^7=128i^2\cdot i^2\cdot i^2\cdot i$$

$$-128\cdot i^2\cdot i^2\cdot i=128\cdot i^2\cdot i=-128i$$

2. Eulersche Formel

Stellen Sie in Polarkoordinaten $z=re^{i\varphi}$ dar: a) $1-i$

$$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2};\varphi=\arctan(\frac{1}{1})=45^\circ=\frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$$

b) $-\sqrt{3}+3i$

$$r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{12};\varphi=\arctan(-\frac{3}{\sqrt{3}})=-\frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt{12}e^{\frac{\pi i}{3}}$$

c) $\sqrt{2}i$

$$r=\sqrt{2};\varphi=90^\circ=\frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{2}}$$

3. Eulersche Formel

a) Welche Kurve in der komplexen Zahlenebene wird durch folgende Gleichung dargestellt?

$$|z + 1 - i| = 2$$

$$z = x + yi$$

$$|x + yi + 1 - i| = 2$$

$$|i(y - 1) + (x + 1)|$$

wobei $i(y - 1)$ den imaginären Teil dargestellt und $(x + 1)$ den reellen Teil
Es gilt:

$$|z_0| = |x_0 + y_0 i| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Somit:

$$\sqrt{(y-1)^2 + (x+1)^2} = 2$$

$$(y-1)^2 + (x+1)^2 = 4$$

dies ist die Kreisfunktion mit einem Radius von $r = 2$ und dem Mittelpunkt M(-1, 1).

b) Substituieren Sie z in der obigen Kurvengleichung durch die neue Variable

$$w = \frac{1}{z + i + 1}; z = \frac{1}{w} - i - 1$$

$$|\frac{1}{w} - 2i| = 2$$

$$|\frac{1 - 2i(x + yi)}{x + yi}| = 2$$

$$\sqrt{(1 + 2y)^2 + (-2x)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$1 + 4y + 4y^2 + 4x^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$1 + 4y = 0$$

$$y = -\frac{1}{4}$$

Woche 2

4. Wurzeln

Berechnen Sie folgende Wurzeln der komplexen Zahlen.
Benötigt werden hierfür:

$$z = a + ib, r = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

a) $\sqrt{-i}$

$$z_0 = \sqrt{r} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}(\varphi + 2\pi \cdot 0)\right)}$$

$$z_1 = \sqrt{r} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}(\varphi + 2\pi \cdot 1)\right)}$$

$$z_0 = \sqrt{1} \cdot e^{\left(-\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 0\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{4} \cdot i}$$

$$z_1 = \sqrt{1} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)\right)} = e^{\frac{3\pi}{4} \cdot i}$$

b) $\sqrt{1+i}$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$z_0 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8} + 0\pi} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{i\pi}{8}}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{9i\pi}{8}}$$

c) $\sqrt[3]{i}$

$$r = \sqrt{1} = 1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{1} e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right)} = e^{\frac{i\pi}{6}}$$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right)} = e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

$$z_2 = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right)} = e^{\frac{3i\pi}{2}}$$

5. Reihen

Geometrische Reihe:

$$z = \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

$$z = \sum_n^{\infty} e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})h\nu}{kT}}$$

$$z = \sum_n^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}} \cdot e^{-\frac{h\nu}{2kT}}$$

$$z = e^{-\frac{h\nu}{2kT}} \sum_n^{\infty} (e^{-\frac{h\nu}{kT}})^n$$

Da nun die Form der geometrischen Reihe vorliegt, wird diese angewandt:

$$z = e^{-\frac{h\nu}{kT}} \cdot \frac{1}{1 - e^{\frac{h\nu}{kT}}}$$

$$\frac{h\nu}{kT} = a$$

$$z = \frac{e^{-\frac{a}{2}}}{1 - e^{-a}}$$

Erweitern mit e^a

$$z = \frac{e^{\frac{a}{2}} \cdot e^a}{e^a - e^{-a} \cdot e^a}$$

$$z = \frac{e^{\frac{a}{2}}}{e^a - 1}$$

b)

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T}\left(kT^2 \frac{\partial}{\partial T}\ln(Z)\right)$$

$$\ln(Z) = \ln\left(\frac{e^{\frac{a}{2}}}{e^a - 1}\right) = \ln\left(e^{\frac{h\nu}{2kT}} - \ln\left(e^a - 1\right)\right) = \frac{a}{2} - \ln\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)$$

$$-\frac{\partial \ln(Z)}{\partial T} = \frac{h\nu}{2kT^2} - \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\left(-\frac{h\nu}{kT^2}\right) e^{\frac{h\nu}{kT}}$$

$$-\frac{h\nu}{2kT^2} + \frac{h\nu}{kT^2}\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(kT^2\left(-\frac{h\nu}{2kT^2} + \frac{h\nu}{kT^2}\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right)\right)$$

$$h\nu\frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right)$$

$$h\nu\frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\right)$$
$$h\nu\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\right)$$
$$h\nu\left(-\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)^2\left(-\frac{h\nu}{kT^2}\right)e^{\frac{h\nu}{kT}}\right)$$
$$\frac{h^2\nu^2}{kT^2}\frac{e^a}{(e^a-1)^2}$$
$$\frac{ka^2e^a}{(e^a-1)^2}$$

Da $3N$:

$$C_V = 3N\frac{ka^2e^a}{(e^a-1)^2}$$

c)

$$T\to 0 : C_V \to 0$$
$$T\to\infty : C_V \to 3Nk$$

6. Reihen

Das Quotientenkriterium lautet:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Wobei von a der Summand der Reihe ist. k ist eine frei wählbare Variable nach die Reihe summiert wird.
a)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{e^{(nx)^2}}$$

Die Variablen sind:

$$a=\frac{n^4}{e^{(nx)^2}}, k=n$$

Somit:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^4}{e^{((n+1)x)^2}}}{\frac{n^4}{e^{(nx)^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)^4}{e^{((n+1)x)^2}}\cdot\frac{e^{(nx)^2}}{n^4}$$

Der limes wird erstmal weggelassen...

$$\frac{(n+1)^4}{n^4}\cdot\frac{e^{(nx)^2}}{e^{(xn+x)^2}} = \left(\frac{(n+1)}{n}\right)^4\cdot\left(\frac{e^{(nx)}}{e^{(xn+x)}}\right)^2$$

Betrachtung des Termes mit e:

$$\frac{e^{(nx)}}{e^{(xn+x)}} = \frac{e^{nx}}{e^{nx}\cdot e^x} = \frac{e^{nx}}{e^{nx}}e^{-x} = 1e^{-x} = e^{-x}$$

somit:

$$\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^4 \cdot \left(e^{-x}\right)^2$$

Betrachtung des anderen Termes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{\infty+1}{\infty} = 1$$

Somit:

$$\left(e^{-x}\right)^2 = e^{-2x}; x \in \mathbb{R}$$

für alle $x > 0$, für $x = 0$ divergiert diese.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-x)^n}{n^2+x}$ Die Variablen sind

$$k = n, a = \frac{(\sqrt{5}-x)^n}{n^2+x}$$

Somit:

$$\frac{(\sqrt{5}-x)^{n+1}}{(n+1)^2+x} \cdot \frac{n^2+x}{(\sqrt{5}-x)^n} = \frac{(\sqrt{5}-x)^{n+1}}{(\sqrt{5}-x)^n} \cdot \frac{n^2+x}{(n+1)^2+x}$$

$$(\sqrt{5}-x) \cdot \frac{n^2+x}{(n+1)^2+x}$$

Es wird der Term mit n betrachtet:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+x}{(n+1)^2+x} = \frac{\infty^2 x}{(\infty+1)^2 x} = \frac{\infty x}{\infty x} = 1$$

Somit:

$$(\sqrt{5}-x) \cdot 1 = \sqrt{5}-x; x \in \mathbb{R}$$

Die Funktion konvergiert für Werte von $x \in (\sqrt{5}-1, \sqrt{5}+1)$
Für $x = \sqrt{5}$ konvergiert sie auch, da dann 0 bei herauskommt.

Woche 3

7. Reihen

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+2} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \right) dx$$

$$= x\left(\arctan(x) + c\right) = x \int \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k \, dx = x \int \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

8. Reihen

$$f(x) = x\pi$$

mit $[0;2\pi[$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

$$k \neq 0,\, c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 (x-\pi) e^{ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \left[(x-\pi) \frac{1}{ik} e^{ikx} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{ik} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \left(\frac{\pi}{-ik} - \frac{-\pi}{-ik} + \frac{1}{ik} \left(\frac{1}{-ik} - \frac{1}{-ik} \right) \right) = \frac{i\sqrt{2\pi}}{k}$$

$$\tilde{f} = \sum_{k=-\infty}^{\infty\,'} \frac{i}{k} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty\,'} \frac{i}{k} \left(\cos(kx) + i \sin(kx) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k} \sin(kx)$$

$$\frac{\pi}{2} = 2(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots)$$

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \to 1, 0, -1, 0, 1, \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{2k+1} \left((-1)^k \right)$$