

# Woche 1

## 1. Rechenoperationen

Stellen Sie in der Form  $a + ib$  dar:

$$\frac{1+i}{1-i}$$

$$\frac{1}{3i} \left( 6 - 5i + \frac{1+5i}{1+i} \right) (1-i)^{14}$$

a)

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{1-(-1)} = \frac{2i}{2} = i$$

b)

$$\frac{1}{3i} \left( 6 - 5i + \frac{1+5i}{1+i} \right) = \frac{1}{3i} (9 - 3i) = -1 - 3i$$

c)

$$\begin{aligned} (1-i)^{14} &= (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2 \\ &= 2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i = 128i^7 = 128i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i \\ &\quad -128 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i = 128 \cdot i^2 \cdot i = -128i \end{aligned}$$

## 2. Eulersche Formel

Stellen Sie in Polarkoordinaten  $z = re^{i\varphi}$  dar: a)  $1 - i$

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}; \varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$$

b)  $-\sqrt{3} + 3i$

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12}; \varphi = \arctan\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt{12}e^{\frac{\pi i}{3}}$$

c)  $\sqrt{2}i$

$$r = \sqrt{2}; \varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{2}}$$

### 3. Eulersche Formel

a) Welche Kurve in der komplexen Zahlenebene wird durch folgende Gleichung dargestellt?

$$|z + 1 - i| = 2$$

$$z = x + yi$$

$$|x + yi + 1 - i| = 2$$

$$|i(y - 1) + (x + 1)|$$

wobei  $i(y - 1)$  den imaginären Teil dargestellt und  $(x + 1)$  den reellen Teil  
Es gilt:

$$|z_0| = |x_0 + y_0 i| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Somit:

$$\sqrt{(y - 1)^2 + (x + 1)^2} = 2$$

$$(y - 1)^2 + (x + 1)^2 = 4$$

dies ist die Kreisfunktion mit einem Radius von  $r = 2$  und dem Mittelpunkt  $M(-1, 1)$ .

b) Substituieren Sie  $z$  in der obigen Kurvengleichung durch die neue Variable

$$w = \frac{1}{z + i + 1}; z = \frac{1}{w} - i - 1$$

$$\left| \frac{1}{w} - 2i \right| = 2$$

$$\left| \frac{1 - 2i(x + yi)}{x + yi} \right| = 2$$

$$\sqrt{(1 + 2y)^2 + (-2x)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$1 + 4y + 4y^2 + 4x^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$1 + 4y = 0$$

$$y = -\frac{1}{4}$$

## Woche 2

### 4. Nullstellen

Berechnen und zeichnen Sie:

a)  $\sqrt{-i}$

$$z_0 = \sqrt{r} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}(\varphi+2\pi \cdot 0)\right)}$$

$$z_1 = \sqrt{r} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}(\varphi+2\pi \cdot 1)\right)}$$

$$z_0 = \sqrt{1} \cdot e^{\left(-\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi \cdot 0\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{4} \cdot i}$$

$$z_1 = \sqrt{1} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)\right)} = e^{\frac{3\pi}{4} \cdot i}$$

b)  $\sqrt{1+i}$

$$z = a + ib, r = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

$$z_0 = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{8} + 0\pi} = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{8}}$$

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i \left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)} = \sqrt{2} e^{i \frac{9\pi}{8}}$$

c)  $\sqrt[3]{i}$

$$r = \sqrt{1} = 1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{1} e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right)} = e^{i \frac{\pi}{6}}$$

$$z_1 = e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right)} = e^{i \frac{5\pi}{6}}$$

$$z_2 = e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right)} = e^{i \frac{9\pi}{6}}$$

### 5. Reihen

$$Z = \sum_n e^{\frac{-E_n}{kT}}$$

Die Geometrische Summenformel besagt:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

in dem Fall sind

$$n = \infty; q = e; k = \frac{-E_n}{kT}$$

Somit kann erhält man durch Einsetzen:

$$\sum_n^{\infty} e^{\frac{-E_n}{kT}}$$

Da  $E_n = (\frac{1}{2} + n)h\nu$ :

$$\sum_n^{\infty} e^{\frac{-(\frac{1}{2}+n)h\nu}{kT}}$$

Nun wird der Exponent  $k = \frac{-(\frac{1}{2}+n)h\nu}{kT}$  wie folgt betrachtet: Es wird angenommen, dass  $kT = \text{const.}$  und  $h\nu = \text{const.}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(\frac{1}{2} + \infty)h\nu}{kT} = \frac{-\infty}{kT} = -\infty$$

Somit kann in  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  das  $n+1 = -\infty$  gesetzt werden, was zu folgender Betrachtung führt:

$$e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} \rightarrow 0$$

Somit kann angenommen werden, dass  $e^{-\infty} = 0$

Mit dieser Betrachtung kann nun alles eingesetzt werden

$$\sum_n^{\infty} e^{\frac{-E_n}{kT}} = \frac{1}{1-e} = (1-e)^{-1}$$

b) Es wird angenommen, dass das Ergebnis bei a) falsch ist, da  $\ln(\frac{1}{1-e})$  nicht existiert., somit ist auch Aufgabenteil c nicht zu bearbeiten.

## 6. Reihen

Das Quotientenkriterium lautet:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Wobei von  $a$  der Summand der Reihe ist.  $k$  ist eine frei wählbare Variable nach die Reihe summiert wird.

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{e^{(nx)^2}}$$

Die Variablen sind:

$$a = \frac{n^4}{e^{(nx)^2}}, k = n$$

Somit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^4}{e^{((n+1)x)^2}}}{\frac{n^4}{e^{(nx)^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{e^{((n+1)x)^2}} \cdot \frac{e^{(nx)^2}}{n^4}$$

Der limes wird erstmal weggelassen...

$$\frac{(n+1)^4}{n^4} \cdot \frac{e^{(nx)^2}}{e^{(xn+x)^2}} = \left(\frac{(n+1)}{n}\right)^4 \cdot \left(\frac{e^{(nx)}}{e^{(xn+x)}}\right)^2$$

Betrachtung des Termes mit  $e$ :

$$\frac{e^{(nx)}}{e^{(xn+x)}} = \frac{e^{nx}}{e^{nx} \cdot e^x} = \frac{e^{nx}}{e^{nx}} e^{-x} = 1e^{-x} = e^{-x}$$

somit:

$$\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^4 \cdot (e^{-x})^2$$

Betrachtung des anderen Termes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{\infty+1}{\infty} = 1$$

Somit:

$$(e^{-x})^2 = e^{-2x}; x \in \mathbb{R}$$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-x)^n}{n^2+x}$  Die Variablen sind

$$k = n, a = \frac{(\sqrt{5}-x)^n}{n^2+x}$$

Somit:

$$\frac{(\sqrt{5}-x)^{n+1}}{(n+1)^2+x} \cdot \frac{n^2+x}{(\sqrt{5}-x)^n} = \frac{(\sqrt{5}-x)^{n+1}}{(\sqrt{5}-x)^n} \cdot \frac{n^2+x}{(n+1)^2+x}$$

$$(\sqrt{5}-x) \cdot \frac{n^2+x}{(n+1)^2+x}$$

Es wird der Term mit  $n$  betrachtet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+x}{n^2+x(n+1)^2+x} = \frac{\infty^2 x}{(\infty+1)^2 x} = \frac{\infty x}{\infty x} = 1$$

Somit:

$$(\sqrt{5}-x) \cdot 1 = \sqrt{5}-x; x \in \mathbb{R}$$