

Woche 1

1. Rechenoperationen

Stellen Sie in der Form $a + ib$ dar:

$$\frac{1+i}{1-i}$$

$$\frac{1}{3i} \left(6 - 5i + \frac{1+5i}{1+i} \right) (1-i)^{14}$$

a)

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{1-(-1)} = \frac{2i}{2} = i$$

b)

$$\frac{1}{3i} \left(6 - 5i + \frac{1+5i}{1+i} \right) = \frac{1}{3i} (9 - 3i) = -1 - 3i$$

c)

$$\begin{aligned} (1-i)^{14} &= (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2 \\ &= 2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i = 128i^7 = 128i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i \\ &\quad -128 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i = 128 \cdot i^2 \cdot i = -128i \end{aligned}$$

2. Eulersche Formel

Stellen Sie in Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ dar: a) $1 - i$

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}; \varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$$

b) $-\sqrt{3} + 3i$

$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{12}; \varphi = \arctan\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt{12}e^{\frac{\pi i}{3}}$$

c) $\sqrt{2}i$

$$r = \sqrt{2}; \varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{2}}$$

3. Eulersche Formel

a) Welche Kurve in der komplexen Zahlenebene wird durch folgende Gleichung dargestellt?

$$|z + 1 - i| = 2$$

$$z = x + yi$$

$$|x + yi + 1 - i| = 2$$

$$|i(y - 1) + (x + 1)|$$

wobei $i(y - 1)$ den imaginären Teil dargestellt und $(x + 1)$ den reellen Teil
Es gilt:

$$|z_0| = |x_0 + y_0 i| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Somit:

$$\sqrt{(y - 1)^2 + (x + 1)^2} = 2$$

$$(y - 1)^2 + (x + 1)^2 = 4$$

dies ist die Kreisfunktion mit einem Radius von $r = 2$ und dem Mittelpunkt $M(-1, 1)$.

b) Substituieren Sie z in der obigen Kurvengleichung durch die neue Variable

$$w = \frac{1}{z + i + 1}; z = \frac{1}{w} - i - 1$$

$$\left| \frac{1}{w} - 2i \right| = 2$$

$$\left| \frac{1 - 2i(x + yi)}{x + yi} \right| = 2$$

$$\sqrt{(1 + 2y)^2 + (-2x)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$1 + 4y + 4y^2 + 4x^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$1 + 4y = 0$$

$$y = -\frac{1}{4}$$

Woche 2

4. Wurzeln

Berechnen Sie folgende Wurzeln der komplexen Zahlen.
Benötigt werden hierfür:

$$z = a + ib, r = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

a) $\sqrt{-i}$

$$z_0 = \sqrt{r} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}(\varphi + 2\pi \cdot 0)\right)}$$

$$z_1 = \sqrt{r} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}(\varphi + 2\pi \cdot 1)\right)}$$

$$z_0 = \sqrt{1} \cdot e^{\left(-\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 0\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{4} \cdot i}$$

$$z_1 = \sqrt{1} \cdot e^{\left(\frac{i}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)\right)} = e^{\frac{3\pi}{4} \cdot i}$$

b) $\sqrt{1+i}$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$z_0 = \sqrt[4]{2} e^{i \frac{\pi}{8} + 0\pi} = \sqrt[4]{2} e^{i \frac{\pi}{8}}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{9i\pi}{8}}$$

c) $\sqrt[3]{i}$

$$r = \sqrt{1} = 1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{1} e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right)} = e^{i \frac{\pi}{6}}$$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right)} = e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

$$z_2 = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right)} = e^{\frac{3i\pi}{2}}$$

5. Reihen

Geometrische Reihe:

$$z = \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

$$z = \sum_n e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})h\nu}{kT}}$$

$$z = \sum_n e^{-\frac{n h \nu}{kT}} \cdot e^{-\frac{h \nu}{2kT}}$$

$$z = e^{-\frac{h \nu}{2kT}} \sum_n (e^{-\frac{h \nu}{kT}})^n$$

Da nun die Form der geometrischen Reihe vorliegt, wird diese angewandt:

$$z = e^{-\frac{h \nu}{kT}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{h \nu}{kT}}}$$

$$\frac{h \nu}{kT} = a$$

$$z = \frac{e^{-\frac{a}{2}}}{1 - e^{-a}}$$

Erweitern mit e^a

$$z = \frac{e^{\frac{a}{2}} \cdot e^a}{e^a - e^{-a} \cdot e^a}$$

$$z = \frac{e^{\frac{a}{2}}}{e^a - 1}$$

b)

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T} \left(kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln(Z) \right)$$

$$\ln(Z) = \ln \left(\frac{e^{\frac{a}{2}}}{e^a - 1} \right) = \ln \left(e^{\frac{h \nu}{2kT}} - \ln(e^a - 1) \right) = \frac{a}{2} - \ln(e^{\frac{h \nu}{kT}} - 1)$$

$$-\frac{\partial \ln(Z)}{\partial T} = \frac{h \nu}{2kT^2} - \frac{1}{e^{\frac{h \nu}{kT}} - 1} \left(-\frac{h \nu}{kT^2} \right) e^{\frac{h \nu}{kT}}$$

$$-\frac{h \nu}{2kT^2} + \frac{h \nu}{kT^2} \frac{e^{\frac{h \nu}{kT}}}{e^{\frac{h \nu}{kT}} - 1}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(kT^2 \left(-\frac{h \nu}{2kT^2} + \frac{h \nu}{kT^2} \frac{e^{\frac{h \nu}{kT}}}{e^{\frac{h \nu}{kT}} - 1} \right) \right)$$

$$h \nu \frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{h \nu}{kT}}}{e^{\frac{h \nu}{kT}} - 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
& h\nu \frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right) \\
& h\nu \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right) \\
& h\nu \left(- \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2 \left(-\frac{h\nu}{kT^2} \right) e^{\frac{h\nu}{kT}} \right) \\
& \frac{h^2 \nu^2}{kT^2} \frac{e^a}{(e^a - 1)^2} \\
& \frac{ka^2 e^a}{(e^a - 1)^2}
\end{aligned}$$

Da $3N$:

$$C_V = 3N \frac{ka^2 e^a}{(e^a - 1)^2}$$

c)

$$T \rightarrow 0 : C_V \rightarrow 0$$

$$T \rightarrow \infty : C_V \rightarrow 3Nk$$

6. Reihen

Das Quotientenkriterium lautet:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Wobei von a der Summand der Reihe ist. k ist eine frei wählbare Variable nach der Reihe summiert wird.

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{e^{(nx)^2}}$$

Die Variablen sind:

$$a = \frac{n^4}{e^{(nx)^2}}, k = n$$

Somit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^4}{e^{((n+1)x)^2}}}{\frac{n^4}{e^{(nx)^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{e^{((n+1)x)^2}} \cdot \frac{e^{(nx)^2}}{n^4}$$

Der limes wird erstmal weggelassen...

$$\frac{(n+1)^4}{n^4} \cdot \frac{e^{(nx)^2}}{e^{(xn+x)^2}} = \left(\frac{(n+1)}{n} \right)^4 \cdot \left(\frac{e^{(nx)}}{e^{(xn+x)}} \right)^2$$

Betrachtung des Termes mit e :

$$\frac{e^{(nx)}}{e^{(xn+x)}} = \frac{e^{nx}}{e^{nx} \cdot e^x} = \frac{e^{nx}}{e^{nx}} e^{-x} = 1e^{-x} = e^{-x}$$

somit:

$$\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^4 \cdot (e^{-x})^2$$

Betrachtung des anderen Termes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{\infty+1}{\infty} = 1$$

Somit:

$$(e^{-x})^2 = e^{-2x}; x \in \mathbb{R}$$

für alle $x > 0$, für $x = 0$ divergiert diese.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-x)^n}{n^2+x}$ Die Variablen sind

$$k = n, a = \frac{(\sqrt{5}-x)^n}{n^2+x}$$

Somit:

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{5}-x)^{n+1}}{(n+1)^2+x} \cdot \frac{n^2+x}{(\sqrt{5}-x)^n} &= \frac{(\sqrt{5}-x)^{n+1}}{(\sqrt{5}-x)^n} \cdot \frac{n^2+x}{(n+1)^2+x} \\ &= (\sqrt{5}-x) \cdot \frac{n^2+x}{(n+1)^2+x} \end{aligned}$$

Es wird der Term mit n betrachtet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+x}{(n+1)^2+x} = \frac{\infty^2 x}{(\infty+1)^2 x} = \frac{\infty x}{\infty x} = 1$$

Somit:

$$(\sqrt{5}-x) \cdot 1 = \sqrt{5}-x; x \in \mathbb{R}$$

Die Funktion konvergiert für Werte von $x \in (\sqrt{5}-1, \sqrt{5}+1)$

Für $x = \sqrt{5}$ konvergiert sie auch, da dann 0 bei herauskommt.