

Woche 1

1. Rechenoperationen

Stellen Sie in der Form $a + ib$ dar:

$$\frac{1+i}{1-i}$$
$$\frac{1}{3i} \left(6 - 5i + \frac{1+5i}{1+i} \right)$$
$$(1-i)^{14}$$

a)

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{1-(-1)} = \frac{2i}{2} = i$$

b)

$$\frac{1}{3i} \left(6 - 5i + \frac{1+5i}{1+i} \right) = \frac{1}{3i} (9 - 3i) = -1 - 3i$$

c)

$$(1-i)^{14} = (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2 (1-i)^2$$
$$= 2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i = 128i^7 = 128i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i$$
$$= -128 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i = 128 \cdot i^2 \cdot i = -128i$$

2. Eulersche Formel

Stellen Sie in Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ dar: a) $1 - i$

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}; \varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$$

b) $-\sqrt{3} + 3i$

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12}; \varphi = \arctan\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt{12}e^{\frac{\pi i}{3}}$$

c) $\sqrt{2}i$

$$r = \sqrt{2}; \varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{2}}$$

3. Eulersche Formel

a) Welche Kurve in der komplexen Zahlenebene wird durch folgende Gleichung dargestellt?

$$|z + 1 - i| = 2$$

$$z = x + yi$$

$$|x + yi + 1 - i| = 2$$

$$|i(y-1) + (x+1)|$$

wobei $i(y-1)$ den imaginären Teil dargestellt und $(x+1)$ den reellen Teil

Es gilt:

$$|z_0| = |x_0 + y_0i| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Somit:

$$\sqrt{(y-1)^2 + (x+1)^2} = 2$$

$$(y-1)^2 + (x+1)^2 = 4$$

dies ist die Kreisfunktion mit einem Radius von $r = 2$ und dem Mittelpunkt $M(-1, 1)$.

b) Substituieren Sie z in der obigen Kurvengleichung durch die neue Variable

$$w = \frac{1}{z+i+1}; z = \frac{1}{w} - i - 1$$

$$\left| \frac{1}{w} - 2i \right| = 2$$

$$\left| \frac{1 - 2i(x + yi)}{x + yi} \right| = 2$$

$$\sqrt{(1+2y)^2 + (-2x)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$1 + 4y + 4y^2 + 4x^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$1 + 4y = 0$$

$$y = -\frac{1}{4}$$

Woche 2

4. Wurzeln

Berechnen Sie folgende Wurzeln der komplexen Zahlen.

Benötigt werden hierfür:

$$z = a + ib, r = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

a) $\sqrt{-i}$

$$z_0 = \sqrt{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + 2\pi \cdot 0\right)}$$

$$z_1 = \sqrt{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + 2\pi \cdot 1\right)}$$

$$z_0 = \sqrt{1} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 0\right)} = e^{-\frac{\pi}{4} \cdot i}$$

$$z_1 = \sqrt{1} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi\right)} = e^{\frac{3\pi}{4} \cdot i}$$

b) $\sqrt{1+i}$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$z_0 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8} + 0\pi} = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{9i\pi}{8}}$$

c) $\sqrt[3]{i}$

$$r = \sqrt{1} = 1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{1} e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right)} = e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

$$z_2 = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right)} = e^{\frac{3i\pi}{2}}$$

5. Reihen

Geometrische Reihe:

$$\begin{aligned}
 z &= \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}} \\
 z &= \sum_n e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})h\nu}{kT}} \\
 z &= \sum_n e^{-\frac{nh\nu}{kT}} \cdot e^{-\frac{h\nu}{2kT}} \\
 z &= e^{-\frac{h\nu}{2kT}} \sum_n (e^{-\frac{h\nu}{kT}})^n
 \end{aligned}$$

Da nun die Form der geometrischen Reihe vorliegt, wird diese angewandt:

$$z = e^{-\frac{h\nu}{kT}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}$$

$$\frac{h\nu}{kT} = a$$

$$z = \frac{e^{-\frac{a}{2}}}{1 - e^{-a}}$$

Erweitern mit e^a

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{e^{\frac{a}{2}} \cdot e^a}{e^a - e^{-a} \cdot e^a} \\
 z &= \frac{e^{\frac{a}{2}}}{e^a - 1}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 C_V &= \frac{\partial}{\partial T} \left(kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln(Z) \right) \\
 \ln(Z) &= \ln \left(\frac{e^{\frac{a}{2}}}{e^a - 1} \right) = \ln \left(e^{\frac{h\nu}{2kT}} - \ln(e^a - 1) \right) = \frac{a}{2} - \ln(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1) \\
 -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial T} &= \frac{h\nu}{2kT^2} - \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \left(-\frac{h\nu}{kT^2} \right) e^{\frac{h\nu}{kT}} \\
 &\quad - \frac{h\nu}{2kT^2} + \frac{h\nu}{kT^2} \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \\
 \frac{\partial}{\partial T} \left(kT^2 \left(-\frac{h\nu}{2kT^2} + \frac{h\nu}{kT^2} \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right) \right) \\
 &\quad h\nu \frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right) \\
 &\quad h\nu \frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right) \\
 &\quad h\nu \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right) \\
 &\quad h\nu \left(-\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2 \left(-\frac{h\nu}{kT^2} \right) e^{\frac{h\nu}{kT}} \right) \\
 &\quad \frac{h^2\nu^2}{kT^2} \frac{e^a}{(e^a - 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\frac{ka^2 e^a}{(e^a - 1)^2}$$

Da $3N$:

$$C_V = 3N \frac{ka^2 e^a}{(e^a - 1)^2}$$

c)

$$T \rightarrow 0 : C_V \rightarrow 0$$

$$T \rightarrow \infty : C_V \rightarrow 3Nk$$

6. Reihen

Das Quotientenkriterium lautet:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Wobei von a der Summand der Reihe ist. k ist eine frei wählbare Variable nach die Reihe summiert wird.

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{e^{(nx)^2}}$$

Die Variablen sind:

$$a = \frac{n^4}{e^{(nx)^2}}, k = n$$

Somit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^4}{e^{((n+1)x)^2}}}{\frac{n^4}{e^{(nx)^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{e^{((n+1)x)^2}} \cdot \frac{e^{(nx)^2}}{n^4}$$

Der limes wird erstmal weggelassen...

$$\frac{(n+1)^4}{n^4} \cdot \frac{e^{(nx)^2}}{e^{(xn+x)^2}} = \left(\frac{(n+1)}{n} \right)^4 \cdot \left(\frac{e^{(nx)}}{e^{(xn+x)}} \right)^2$$

Betrachtung des Termes mit e :

$$\frac{e^{(nx)}}{e^{(xn+x)}} = \frac{e^{nx}}{e^{nx} \cdot e^x} = \frac{e^{nx}}{e^{nx}} e^{-x} = 1e^{-x} = e^{-x}$$

somit:

$$\left(\frac{(n+1)}{n} \right)^4 \cdot (e^{-x})^2$$

Betrachtung des anderen Termes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{\infty+1}{\infty} = 1$$

Somit:

$$(e^{-x})^2 = e^{-2x}; x \in \mathbb{R}$$

für alle $x > 0$, für $x = 0$ divergiert diese.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-x)^n}{n^2+x}$ Die Variablen sind

$$k = n, a = \frac{(\sqrt{5}-x)^n}{n^2+x}$$

Somit:

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{5}-x)^{n+1}}{(n+1)^2+x} \cdot \frac{n^2+x}{(\sqrt{5}-x)^n} &= \frac{(\sqrt{5}-x)^{n+1}}{(\sqrt{5}-x)^n} \cdot \frac{n^2+x}{(n+1)^2+x} \\ &= (\sqrt{5}-x) \cdot \frac{n^2+x}{(n+1)^2+x} \end{aligned}$$

Es wird der Term mit n betrachtet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + x}{(n+1)^2 + x} = \frac{\infty^2 x}{(\infty+1)^2 x} = \frac{\infty x}{\infty x} = 1$$

Somit:

$$(\sqrt{5} - x) \cdot 1 = \sqrt{5} - x; x \in \mathbb{R}$$

Die Funktion konvergiert für Werte von $x \in (\sqrt{5} - 1, \sqrt{5} + 1)$

Für $x = \sqrt{5}$ konvergiert sie auch, da dann 0 bei herauskommt.

Woche 3

7. Reihen

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+2} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \right) dx \\ &= x (\arctan(x) + c) = x \int \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k dx = x \int \frac{1}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

8. Reihen

$$f(x) = x\pi$$

mit $[0; 2\pi[$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^0 dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{2} 4\pi^2 - 2\pi^2 \right] = 0$$

$$k \neq 0, c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 (x - \pi) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \left[(x - \pi) \frac{1}{ik} e^{ikx} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{ik} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \left(\frac{\pi}{-ik} - \frac{-\pi}{-ik} + \frac{1}{ik} \left(\frac{1}{-ik} - \frac{1}{-ik} \right) \right) = \frac{i\sqrt{2\pi}}{k}$$

$$\tilde{f} = \sum_{k=-\infty}^{\infty'} \frac{i}{k} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty'} \frac{i}{k} (\cos(kx) + i \sin(kx)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k} \sin(kx)$$

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow 1, 0, -1, 0, 1, \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{2k+1} ((-1)^k)$$

BEI FOLGENDEN AUFGABEN WAR ICH NICHT DA:

Woche 4

9.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\varphi)}{\sqrt{2\pi}k\varphi} e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi\varphi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\varphi)}{k} e^{ikx} + \varphi \\ &\lim_{\varphi} \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{k \cos(k\varphi)}{k} e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \end{aligned}$$

Woche 5

Aufgabe 11

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= \frac{1}{60} a_2 = \frac{2\sqrt{2} - 3}{2700} \end{aligned}$$

$$p(x) = -6.35 \cdot 10^5 x^2 + 1.86 \cdot 10^{-2} x$$

$$p(35) = 0.57$$

Absolut kein Sinn Diggi

Aufgabe 12

$$P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

i	1	2	3	4
x_i	2	0	-1	3
$\phi_1(x_i)$	1	1	1	1
$\phi_2(x_i)$	2	0	-1	3
$\phi_3(x_i)$	4	0	1	9
y_i	4	2	11	7

$$\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & b_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & b_3 \end{array}$$

$$A_{LK} = \sum_{i=1}^4 \phi_L(x_i) \phi_K(x_i)$$

$$A_{11} = \sum_{i=1}^4 \phi_1(x_i) \phi_1(x_i)$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^4 \phi_1(x_i) \phi_2(x_i) = A_2 1$$

$$A_{11} = 4 = A_{12} = A_{21}$$

$$A_{22} = 14$$

$$A_{23} = 34 = A_{32}$$

$$A_{33} = 98$$

$$\vec{b}_L = \sum_{i=1}^4 y_i \phi_L(x_i)$$

$$\vec{b}_1 = 4 + 2 + 11 + 7 = 24$$

$$\vec{b}_2 = 18$$

$$\vec{b}_3 = 90$$

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 14 & 24 \\ 4 & 14 & 34 & 18 \\ 14 & 34 & 98 & 90 \end{array}$$

$$c_1 = 3.6$$

$$c_2 = -4.6$$

$$c_3 = 2$$

$$P_2(x) = 2x^2 - 4.6x + 3.6$$

Aufgabe 13

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -8 & 0 \end{array} \right)$$

3 Vektoren in 2 Dimensionen haben unendlich viele Lösungen, deshalb: linear abhängig

b)

$$\left| \begin{array}{ccc} 3 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right| = 0$$

Linear abhängig

c)

$$\left| \begin{array}{cccc} 3 & 3 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -8 & -8 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right| = 3$$

Nicht linear Abhängig.

Aufgabe 16

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalisieren:

$$\hat{i} = \vec{i} - \frac{\vec{n}\vec{i}}{|\vec{n}|^2} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{-2}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$\hat{j} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$\hat{k} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{-2}{9} \end{pmatrix}$$

$$\vec{i} = \hat{i} + \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{i} - \hat{i} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \hat{j} + \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \vec{j} - \hat{j} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k} = \hat{k} + \vec{c} \Leftrightarrow \vec{c} = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Woche 7

Aufgabe 17

$$\det A \neq 0$$

$$AA^{-1} = E$$

Aufgabe 18

Laplace'scher Entwicklungssatz

Aufgabe 19

LGS Lösen

Aufgabe 20

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Eigenvektoren zu bestimmen:

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$
$$\begin{pmatrix} A_1 - \lambda & A_2 & A_3 \\ \vdots & A_2 - \lambda & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$