O14a - Optische Abbildung mit Linsen

Protokoll zum Versuch des Physikalischen Praktikums I von

Maxim Gilsendegen & David Flemming

Universität Stuttgart

Verfasser: Maxim Gilsendegen (Chemie),

3650577

David Flemming (Chemie),

3650295

Gruppennummer: C-004

Versuchsdatum: 05.04.2023

Betreuer: Nihat Oguz

Stuttgart, den 06.04.2023

Inhaltsverzeichnis

1	Vers	suchsziel	1
2 Messprinzip 2.1 Bestimmung der Brennweite über Autokollimation			
3	Forr	meln	2
4	Mes 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5	Bestimmung der Brennweite über Autokollimation	3 3 4 4 5
5	Aus 5.1	wertung Brennweiten Bestimmen 5.1.1 Autokollimation 5.1.2 Abbe-Verfahren 5.1.3 Bessel-Verfahren 5.1.4 Chromatische Aberration 5.1.5 Vergrößerung mit zwei Linsen	5 5 6 6 7
6	6.1 6.2 6.3	Brennweitenberechnung	8 8 8 8 9 9
7	Zus	ammenfassung	10
8	Lite	ratur	11
9	Anh	ang	12

1 Versuchsziel und Versuchsmethode

Zuerst soll die Brennweite der 100 mm Linse über die Autokollimation, des Abbeund des Besselverfahren bestimmmt. Anschließend wurden die unterschiedlichen Brecheigenschaften des Lichts anhand der Chromatischen Abberaation getestet. Zuletzt wurde die Vergrößerung eines Bildes an der Leinwand über 2 Linsen durchgeführt.

2 Messprinzip

2.1 Bestimmung der Brennweite über Autokollimation

Bei der Autokollimation wurde ein halbabgedecketes Dia verwendet welches das Bild vom Dia mittels eines Spiegels auf die abgedeckte Seite des Dias projiziert. Für diesen Prozess wurde eine 100 mm Linse verwendet. Dabei wurde das Dia sollange verschoben bis ein scharfes Bild auf der abgedeckten Seite des Dias entstand. Anschließend wurde die Linse um 180° Grad gedreht und der Versuch wiederhlt. Dieser Prozess wurde 5 mal durchgeführt.

2.2 Bestimmmung der Brennweite über das Abbeverfahren

Beim Abbeverfahren wurde die Brennweite über das verschieben von Dia und Bildschirm bei fester Linsenpostion ermittelt. Auch hierbei wurde eine $100\,\mathrm{mm}$ Linse verwendet. Durch die Verschiebungen wurden 2 Postionen festgestellt werden wo ein scharfes Bild auf dem Bildschirm entsteht. Dabei wurde die Gegenstandsweite g, die Bildweite b sowie die Bildgröße B festgehalten.

2.3 Bestimmung der Brennweite über das Besselverfahren

Hierbei wurde die Brennweite über das Verschieben der Linse bei fester Dia- und Bildschirmposition bestimmmt. Dabei wurde der Abstand zwischen Dia und Bildschirm auf über die vierfache Brennweite angelegt. Anschließend wurden 2 Linsenpostionen festgestellt, welche ein scharfes Bild auf die Leinwand generieren. Diese Postionen der Linsen wurden festgehalten und der Versuch wurde 5 mal wiederholt.

2.4 Chromatische Abberation

Der Ablauf glich dem des Besselverfahrens bloß das anstatt des normalen Lichts ein Blaulicht- und ein Rotlichtfilter verwendet wurden.

2.5 Zweistufige Vergrößerung eines Dias mit zwei Linsen

Bei diesem Versuch wurde eine Vergrößerung des Dias über 2 Linsen durchgeführt. Hierbei wurde eine 50 mm und ein 100 mm Linse verwendet. Dabei wurde die zweite Linse an der Brennweite der ersten Linse postioniert. Dabei wurden die Positionen aller Gegenstände festgehalten.

3 Formeln

Die Brennweite f wird bei der Autokollimation über die Gegenstandsweite g folgendermaßen berechnet:

$$f = \frac{g_1 + g_2}{2} \tag{3.1}$$

Die Bildvergrößerung β wird über den Qutienten der Bildweite b und der Gegenstandsweite berechnet:

$$\beta = \frac{b}{a} \tag{3.2}$$

Für die Bestimmung der Brennweite über die verschiedenen Bildvergrößerungen zu berechnen gilt folgende Formel:

$$f = a \cdot \frac{\beta_1 \cdot \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \tag{3.3}$$

wobei a die Differenz der Gegenstandsweiten darstellt.

Um die Brennweite über die Bildweite und Gegenstandsweite zu berechnen gilt folgende Formel

$$f = \frac{g_2 - g_1}{\frac{g_2}{b_2} - \frac{g_1}{b_1}} \tag{3.4}$$

Beim Besselverfahren wird die Brennweite über folgende Formel berechnet:

$$f = \frac{d^2 - e^2}{4 \cdot d} \tag{3.5}$$

wobei e die Differenz der Linsenabstände darstellt und d den Abstand zwischen Dia und Bildschirm darstellt.

Die Gesamtbildvergrößerung durch zwei Linsen ergibt sich über folgende Formel.

$$\beta_{G.Verg.} = \beta_1 \cdot \beta_2 \tag{3.6}$$

Um die Bildvergrößerung über die Bildgröße B und die Gegenstandsgröße G zu berechnen gilt folgende Formel.

$$\beta = \frac{B}{G} \tag{3.7}$$

4 Messwerte

4.1 Bestimmung der Brennweite über Autokollimation

Bei der folgenden Tabelle wurde die Postion der Dias in Abhänigkeit der Linsenstellung festgehalten.

Tab.1 Postion des Dias in Abhänigkeit der Linsenstellung

	Diaposition [cm]		
Messung	Linsenstellung bei 0°	Linsenstellung bei 180°	
1	6,4	6,1	
2	6,3	6,1	
3	6,4	6,2	
4	6,5	6,2	
5	6,5	6,1	

4.2 Bestimmung der Brennweite über das Abbe-Verfahren

In der nachfolgendenden Tabelle wurde die Position des Dias sowie die Postion des Schirms sowie die Bildgröße die auf den Schirm projiziert wird festgehalten.

Tab. 2 Bildgröße in Abhängigkeit von Dia und Schirmposition.

Messung	Position Dia [cm]	Bildschirmpostion [cm]	Bildgröße [cm]
1	14,7	36,3	6,45
2	36,3	27,2	4

4.3 Bestimmung der Brennweite über das Besselverfahren

In der nachfolgenden Tabelle wurden die varieerte Linsenpostion erfasst wofür scharfe Bilder auf der Leinwand projiziert wurden.

Tab. 3 Postion der Linsen beim Besselverfahren

Messung	Linsenpostion 1 [cm]	linsenpostion 2 [cm]	
1	18,8	42,4	
2	19,1	42,6	
3	19,0	42,6	
4	19,0	42,5	
5	19,1	42,4	

4.4 Chromatische Aberration

In der nachfolgenden Tabelle wurden die varieerte Linsenpostion erfasst wofür scharfe Bilder auf der Leinwand projiziert wurden, für den Blaulichtfilter festgehalten.

Tab. 4 Postion der Linsen bei benutzung des Blaulichtfilters

Messung	Linsenpostion 1 [cm]	Linsenpostion 2 [cm]	
1	18,1	55,1	
2	18,0	55,2	
3	17,9	55,4	
4	17,8	54,9	
5	17,6	55,0	

In der nachfolgenden Tabelle wurden die varieerte Linsenpostion erfasst wofür scharfe Bilder auf der Leinwand projiziert wurden, für den Rotlichtfilter festgehalten.

Tab. 5 Postion der Linsen bei Benutzung des Rotlichtfilters

Messung	Linsenpostion 1 [cm]	Linsenpostion 2 [cm]
1	18,1	54,2
2	18,0	54,3
3	18,1	54,3
4	18,0	54,2
5	18,0	54,3

4.5 Zweistufige Vergrößerung eines Dias mit zwei Linsen

In der folgenden Tabellen sind die Postionen beider Linsen, sowie die Postion des Schirms sowie des Dias bei einer einstufigen und zweistufigen Vergrößerung festgehalten.

Tab.6 Postionen der einzelnen Bauteile.

Postion	Gegenstand[cm]	Linse 1 50 mm [cm]	Linse 2 10 mm [cm]	Schirmabstand[cm]
1	$2,\!5$	8,9	42,6	72,4
2	2,5	8,8	-	29,3

Ein Milimeter wurde bei der zweistufigen Vergrößerung auf 76 mm vergrößert. Bei der einstufigen Vergrößerung wurde ein Militmeter auf 0,46 mm vergrößert.

5 Auswertung

5.1 Brennweiten Bestimmen

5.1.1 Autokollimation

Bei der Autokollimation wurden die Werte aus Tab.1 festgehalten, anhand von Formel 3.1 lässt sich somit die Brennweite berechnen, hierbei wird der Mittelwert der beiden Messreihen genommen.

$$f = \frac{10,28 \,\mathrm{cm} + 10,56 \,\mathrm{cm}}{2} = 10,42 \,\mathrm{cm} \tag{5.1}$$

Das Ergebnis zeigt, dass eine Linse mit einer Brennweite von 10,42 cm vorliegt.

5.1.2 Abbe-Verfahren

Beim Abbe-Verfahren sollte zunächst der Abbildungsmaßstab β berechnet werden, hierzu wird Formel 3.2 mit den Werten aus Tab.2 verwendet.

$$\beta = \frac{6.45 \,\mathrm{cm}}{2.5 \,\mathrm{cm}} = 2.58 \tag{5.2}$$

Somit kann ein Abbildungsmaßstab β von $\beta_1 = 2.58$ und $\beta_2 = 1.6$ berechnet werden. Durch das Einsetzen in Gleichung 3.3, kann die Brennweite berechnet werden, indem noch die Differenz der zwei Gegenstandsweiten g_1 und g_2 bestimmt wird.

$$a = 16.3 \,\mathrm{cm} - 14.7 \,\mathrm{cm} = 1.9 \,\mathrm{cm}$$
 (5.3)

$$f_1 = 1.9 \,\mathrm{cm} \cdot \frac{2.58 \cdot 1.6}{2.58 - 1.6} = 8,00 \,\mathrm{cm}$$
 (5.4)

Die Brennweite kann aber auch durch die Formel 3.4 berechnet werden

$$f_2 = \frac{16.3 \,\text{cm} - 14.7 \,\text{cm}}{\frac{16.3 \,\text{cm}}{27.2 \,\text{cm}} - \frac{14.7 \,\text{cm}}{36.3 \,\text{cm}}} = 8,23 \,\text{cm}$$
(5.5)

Die beiden Werte weichen um

$$f_d = f_2 - f_1 = 8,23 \,\mathrm{cm} - 8,00 \,\mathrm{cm} = 0,23 \,\mathrm{cm}$$
 (5.6)

voneinander ab, was in Prozent eine Abweichung um

$$D = \frac{f_d}{f_2} = 0.0279 = 2.79\% \tag{5.7}$$

von f_1 zu f_2 ergibt.

5.1.3 Bessel-Verfahren

Mit einem Abstand zwischen Bild und Gegenstand $d=50.3\,\mathrm{cm}$, für den gilt d>4f und einer Differenz zwischen den zwei Linsenpositionen von $e=23.5\,\mathrm{cm}$, kann durch das Einsetzen in Gleichung 3.5 die Brennweite berechnet werden.

$$f = \frac{(50.3 \,\mathrm{cm})^2 - (23.5 \,\mathrm{cm})^2}{4 \cdot 50.3 \,\mathrm{cm}} = 9.83 \,\mathrm{cm}$$
 (5.8)

Somit ergibt dies eine Brennweite f von 9,83 cm.

5.1.4 Chromatische Aberration

Da die chromatische Aberration durch das Bessel-Verfahren bestimmt werden soll, werden dieselben Methoden und Formeln verwendet. Somit kann die Brennweiten mit den Werten aus Tabelle 4 und 5 berechnet werden. Somit ergeben die Brennweiten $f_{blau}=9,58\,\mathrm{cm}$ und $f_{rot}=9,91\,\mathrm{cm}$

5.1.5 Vergrößerung mit zwei Linsen

Wie beim Abbe-Verfahren, kann der Abbildungsmaßstab beziehungsweise die Vergrößerung durch Gleichung 3.7 berechnet werden

$$\beta = \frac{0.7 \,\text{cm}}{0.1 \,\text{cm}} = 7 \tag{5.9}$$

Der Abbildungsmaßstab für die einzelnen Linsen kann mit der Bildweite b und Gegenstandsweite q berechnet werden.

$$\beta_1 = \frac{67.5 \,\mathrm{cm}}{6.4 \,\mathrm{cm}} = 10.55 \tag{5.10}$$

$$\beta_2 = \frac{33.8 \,\mathrm{cm}}{40.1 \,\mathrm{cm}} = 0.84 \tag{5.11}$$

Werden die Werte in die Gleichung 3.6 eingesetzt, kann die Gesamtvergrößerung berechnet werden.

$$\beta_{G.Verg.} = 10.55 \cdot 0.84 = 8.86 \tag{5.12}$$

Der Abbildungsmaßstab $\beta = 7$ und $\beta_{G.Verg.} = 8.86$, weichen um

$$\beta_d = \beta_{G,Verg} - \beta = 8.86 - 7 = 1.86 \tag{5.13}$$

voneinander ab, was eine prozentuale Abweichung von $\beta_{G.Verg.}$ zu β um

$$D = \frac{\beta_d}{\beta_{G,Verg}} = \frac{1.86}{8.86} = 0.2099 = 20.99\%$$
 (5.14)

ergibt.

6 Fehlerrechnung

6.1 Brennweitenberechnung

6.1.1 Autokollimation

Bei der Autokollimation ist anhand der Messwerte von einer Abweichung von

$$f_f = (|f_{VMittelwert} - f_{Vmax.Abweichung}|) + (|f_{RMittelwert} - f_{Rmax.Abweichung}|)$$
 (6.1)
$$f_f = (6.42 \text{ cm} - 6.3 \text{ cm}) + (6.14 \text{ cm} - 6.2 \text{ cm}) = 0.18 \text{ cm}$$

Wobei f_V und f_R die zwei Seiten der Linse darstellen. Anhand dieser Berechnung ist davon auszugehen, dass die Brennweite $f = 10,42 \,\mathrm{cm}$ um $\pm 0,18 \,\mathrm{cm}$ abweicht.

6.1.2 Abbe-Verfahren

Beim Abbe-Verfahren wurden zur Berechnung der Brennweite Gleichungen verwendet, deren verschiedenen Variablen alle einen Fehler aufweisen, dadurch kommt es zu einer Fehlerfortpflanzung, die nach Gleichung 3.3 wie folgt aussieht

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \cdot \Delta a + \left| \frac{\partial f}{\partial \beta_1} \right| \cdot \Delta \beta_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial \beta_2} \right| \cdot \Delta \beta_2$$

Nach dem Einsetzen der partiellen Ableitungen in die Gleichung resultiert diese in

$$\Delta f = \left| \frac{\beta_1 \cdot \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \right| \cdot \Delta a + \left| \frac{a \cdot \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} - \frac{a \cdot \beta_1 \cdot \beta_2}{\left(\beta_1 - \beta_2\right)^2} \right| \cdot \Delta \beta_1 + \left| \frac{a \cdot \beta_1}{\beta_1 - \beta_2} - \frac{a \cdot \beta_1 \cdot \beta_2}{\left(\beta_1 - \beta_2\right)^2} \right| \cdot \Delta \beta_2$$

Für Δa wird ein Fehler von ± 0.2 cm und für β_1 , so wie β_2 ein Fehler von ± 0.1 cm angenommen. Eingesetzt in die Gleichung ergibt dies

$$\Delta f = \left| \frac{2.58 \cdot 1.6}{2.58 - 1.6} \right| \cdot 0.2 \,\text{cm} + \left| \frac{1.9 \,\text{cm} \cdot 1.6}{2.58 - 1.6} - \frac{1.9 \,\text{cm} \cdot 2.58 \cdot 1.6}{(2.58 - 1.6)^2} \right| \cdot 0.1 \,\text{cm}$$
$$+ \left| \frac{1.9 \,\text{cm} \cdot 2.58}{2.58 - 1.6} - \frac{1.9 \,\text{cm} \cdot 2.58 \cdot 1.6}{(2.58 - 1.6)^2} \right| \cdot 0.1 \,\text{cm} \approx 1.67 \,\text{cm}$$

Somit ergibt die Brennweite nach dem Abbe-Verfahren $f = (8,00 \pm 1,67) \,\mathrm{cm}$.

Analog gilt für die Fehlerfortpflanzung nach Gleichung 3.4

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial g_1} \right| \cdot \Delta g_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial g_2} \right| \cdot \Delta g_2 + \left| \frac{\partial f}{\partial b_1} \right| \cdot \Delta b_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial b_2} \right| \cdot \Delta b_2$$

Nach dem Einsetzen der partiellen Ableitungen, ergibt diese Gleichung für die Fehler $\Delta g_1 = \Delta g_2 = \Delta b_1 = \Delta b_2 = 0.1$ cm

$$\Delta f = \left| \frac{g_2 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot (b_2 - b_1)}{(b_1 \cdot g_2 - b_2 \cdot g_1)^2} \right| \cdot \Delta g_1 + \left| \frac{g_1 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot (b_2 - b_1)}{(b_2 \cdot g_1 - b_1 \cdot g_2)^2} \right| \cdot \Delta g_2 + \left| \frac{g_1 \cdot b_2^2 \cdot (g_1 - g_2)}{(b_2 \cdot g_1 - b_1 \cdot g_2)^2} \right| \cdot \Delta b_1 + \left| \frac{g_2 \cdot b_1^2 \cdot (g_2 - g_1)}{(b_1 \cdot g_2 - b_2 \cdot g_1)^2} \right| \cdot \Delta b_2 \approx 4,04 \,\mathrm{cm}$$

Somit ist für die Brennweite nach dieser Formel $f = (8.23 \pm 4.04) \, \mathrm{cm}$

6.1.3 Bessel-Verfahren

Der Fehler beim Bessel-Verfahren ist wieder durch die Fehlerfortpflanzung, die durch die verwendete Gleichung 3.5 hervorgeht, zu berechnen.

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial d} \right| \cdot \Delta d + \left| \frac{\partial f}{\partial e} \right| \cdot \Delta e$$

Nach dem Einsetzen der Ableitungen geht daraus hervor

$$\Delta f = \left| \frac{d^2 + e^2}{4d^2} \right| \cdot \Delta d + \left| \frac{-e}{2d} \right| \cdot \Delta e$$

Für den Fehler von e, also Δe ist folgendes anzunehmen

$$L_f = (|L_{1Mittelwert} - L_{1max.Abweichung}|) + (|L_{2Mittelwert} - L_{2max.Abweichung}|)$$

 $L_f = (|19 \text{ cm} - 18.8 \text{ cm}|) + (|42.5 \text{ cm} - 42.6 \text{ cm}|) = 0.3 \text{ cm}$

und für Δd ist wieder ein Wert von $\Delta d=0.1\,\mathrm{cm}$ festzulegen. Somit ergibt die Gleichung

$$\Delta f = \left| \frac{(50.3 \,\text{cm})^2 + (23.5 \,\text{cm})^2}{4 (50.3 \,\text{cm})^2} \right| \cdot 0.1 \,\text{cm} + \left| \frac{-23.5 \,\text{cm}}{2 \cdot 50.3 \,\text{cm}} \right| \cdot 0.3 \,\text{cm} \approx 0.10 \,\text{cm}$$

Somit ist nach dem Bessel Verfahren von einer Brennweite $f = (9.83 \pm 0.10)$ cm

6.2 Chromatische Aberration

Da die chromatische Aberration nach dem Bessel-Verfahren bestimmt wurde, wird dieselbe Formel verwendet. Somit können die Brennweiten $f_{Blau} = (9,58 \pm 0,13)$ cm und $f_{Rot} = (9,91 \pm 0,13)$ cm

Da 9.58 + 0.13 = 9.71 und 9.91 - 0.13 = 9.78 sich nicht überschneiden, kann davon ausgegangen werden, dass die chromatische Aberration hiermit experimentell nachgewiesen wurde.

6.3 Vergrößerung mit zwei Linsen

Für die Messung des Vergrößerungsmaßstabes nach Gleichung 3.7 ist mit einem Fehler von $\Delta B = \Delta G = 0.1$ cm von folgendem Fehler auszugehen, es ist zu beachten, dass hierfür B = 7 cm und G = 1 cm gilt

$$\Delta \beta = \left| \frac{\partial \beta}{\partial B} \right| \cdot \Delta B + \left| \frac{\partial \beta}{\partial G} \right| \cdot \Delta G = \left| G^{-1} \right| \cdot \Delta B + \left| \frac{-B}{G^2} \right| \cdot \Delta G \approx 0.71$$

Somit ist $\beta = 7 \pm 0.71$.

Bei der Vergrößerung mit zwei Linsen lässt sich der Fehler anhand einer Fehlerfortpflanzung mit Gleichung 3.6 zu berechnen

$$\beta_{G.Verg.} = \beta_1 \cdot \beta_2 = \frac{b_1}{g_1} \cdot \frac{b_2}{g_2}$$

$$\Delta \beta_{G.Verg.} = \left| \frac{\partial \beta_{G.Verg.}}{\partial b_1} \right| \cdot \Delta b_1 + \left| \frac{\partial \beta_{G.Verg.}}{\partial b_2} \right| \cdot \Delta b_2 + \left| \frac{\partial \beta_{G.Verg.}}{\partial g_1} \right| \cdot \Delta g_1 + \left| \frac{\partial \beta_{G.Verg.}}{\partial b_2} \right| \cdot \Delta g_2$$

Für die Fehler wird angenommen $\Delta g_1 = \Delta g_2 = \Delta b_1 = \Delta b_2 = 0.1 \text{ cm}$

$$\Delta \beta_{G.Verg.} = \left| \frac{b_2}{g_1 \cdot g_2} \right| \cdot \Delta b_1 + \left| \frac{b_1}{g_1 \cdot g_2} \right| \cdot \Delta b_2 + \left| \frac{-b_1 \cdot b_2}{g_1^2 \cdot g_2} \right| \cdot \Delta g_1 + \left| \frac{-b_2 \cdot b_1}{g_1 \cdot g_2^2} \right| \cdot \Delta g_2 \approx 0.20$$

Somit wurde die Gesamtvergrößerung $\beta_{G.Verg.} = 8.86 \pm 0.20$ bestimmt.

7 Zusammenfassung

Zuerst wurde die Brennweite einer $100\,\mathrm{mm}$ Linse über die Autokollimation auf $(10,42\,\mathrm{cm}\pm0,18\,\mathrm{cm})$ genau bestimmt. Anschließend wurde die Brennweite derselben Linse über das Abbeverfahren auf $(8,00\pm1,67)\,\mathrm{cm}$ bzw auf $(8,23\pm4,04)\,\mathrm{cm}$ festgelegt. Zuletzt wurde die Brennweite der Linse dann über das Besselverfahren bestimmt wobei sich eine Brennweite von $(9,83\pm0,10)\,\mathrm{cm}$ ergab. Dabei fällt auf das, das Besselverfahren der Realität am nächsten kommt.

Bei der chromatischen Aberration wurde die Brennweite der einzelnen Lichtwellen exakt wie beim Besselverfahren bestimmt. Dabei ergab sich für das Rotlicht eine Brennweite von (9.91 ± 0.13) cm und für das Blaulicht eine Brennweite von (9.58 ± 0.13) cm. Im letzten Versuchsteil wurde ein Dia über zwei Linsen vergrößert wobei sich ein Vergrößerungsfaktor von 8.86 ± 0.20 ergab. Wurde die 100 mm Linse entfernt so schrumpfte der Vergrößerungsfaktor auf 7 ± 0.71 .

8 Literatur

[1] Versuchsanleitung zu O14 (Abgerufen am 09.04.2023)

9 Anhang



