Woche 1

1. Rechenoperationen

Stellen Sie in der Form a + ib dar:

$$\frac{1+i}{1-i}$$

$$\frac{1}{3i}\left(6-5i+\frac{1+5i}{1+i}\right)$$

$$(1-i)^{14}$$

a)

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)\,(1+i)}{(1-i)\,(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{1+2i-1}{1-(-1)}=\frac{2i}{2}=i$$

b)

$$\frac{1}{3i}\left(6-5i+\frac{1+5i}{1+i}\right)=\frac{1}{3i}\,(9-3i)=-1-3i$$

c)

$$(1-i)^{14}=(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2\,(1-i)^2$$

$$=2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i\cdot 2i=128i^7=128i^2\cdot i^2\cdot i^2\cdot i$$

$$-128\cdot i^2\cdot i^2\cdot i=128\cdot i^2\cdot i=-128i$$

2. Eulersche Formel

Stellen Sie in Polarkoordinaten $z=re^{i\varphi}$ dar: a) $1-i$

$$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2};\varphi=\arctan(\frac{1}{1})=45^\circ=\frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$$

b) $-\sqrt{3}+3i$

$$r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{12};\varphi=\arctan(-\frac{3}{\sqrt{3}})=-\frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt{12}e^{\frac{\pi i}{3}}$$

c) $\sqrt{2}i$

$$r=\sqrt{2};\varphi=90^\circ=\frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{2}}$$

3. Eulersche Formel

a) Welche Kurve in der komplexen Zahlenebene wird durch folgende Gleichung dargestellt?

$$|z+1-i|=2$$

$$z=x+yi$$

$$|x+yi+1-i|=2$$

$$|i(y-1)+(x+1)|$$

wobei $i(y-1)$ den imaginären Teil dargestellt und $(x+1)$ den reellen Teil
Es gilt:

$$|z_0|=|x_0+y_0i|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$$

Somit:

$$\sqrt{(y-1)^2+(x+1)^2}=2$$
$$(y-1)^2+(x+1)^2=4$$

dies ist die Kreisfunktion mit einem Radius von $r = 2$ und dem Mittelpunkt M(-1, 1).

b) Substituieren Sie z in der obigen Kurvengleichung durch die neue Variable

$$w=\frac{1}{z+i+1}; z=\frac{1}{w}-i-1$$
$$|\frac{1}{w}-2i|=2$$
$$|\frac{1-2i(x+yi)}{x+yi}|=2$$
$$\sqrt{(1+2y)^2+(-2x)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$$
$$1+4y+4y^2+4x^2=4x^2+4y^2$$
$$1+4y=0$$
$$y=-\frac{1}{4}$$

Woche 2

4. Wurzeln

Berechnen Sie folgende Wurzeln der komplexen Zahlen.
Benötigt werden hierfür:

$$z=a+ib, r=\sqrt{a^2+b^2}, \varphi=\arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$
$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

a) $\sqrt{-i}$

$$z_0=\sqrt{r}\cdot e^{\left(\frac{i}{2}(\varphi+2\pi\cdot 0)\right)}$$
$$z_1=\sqrt{r}\cdot e^{\left(\frac{i}{2}(\varphi+2\pi\cdot 1)\right)}$$
$$z_0=\sqrt{1}\cdot e^{\left(-\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 0\right)\right)}=e^{-\frac{\pi}{4}\cdot i}$$
$$z_1=\sqrt{1}\cdot e^{\left(\frac{i}{2}\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)\right)}=e^{\frac{3\pi}{4}\cdot i}$$

b) $\sqrt{1+i}$

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$
$$\varphi=\frac{\pi}{4}$$
$$z_0=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}+0\pi}=\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}$$
$$z_1=\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)}=\sqrt[4]{2}e^{\frac{9i\pi}{8}}$$

c) $\sqrt[3]{i}$

$$r=\sqrt{1}=1$$
$$\varphi=\frac{\pi}{2}$$
$$z_0=\sqrt[3]{1}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right)}=e^{\frac{i\pi}{6}}$$
$$z_1=e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)}=e^{\frac{5i\pi}{6}}$$
$$z_2=e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)}=e^{\frac{3i\pi}{2}}$$

5. Reihen

Geometrische Reihe:

$$z = \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

$$z = \sum_n^{\infty} e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})h\nu}{kT}}$$

$$z = \sum_n^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}} \cdot e^{-\frac{h\nu}{2kT}}$$

$$z = e^{-\frac{h\nu}{2kT}} \sum_n^{\infty} (e^{-\frac{h\nu}{kT}})^n$$

Da nun die Form der geometrischen Reihe vorliegt, wird diese angewandt:

$$z = e^{-\frac{h\nu}{kT}} \cdot \frac{1}{1 - e^{\frac{h\nu}{kT}}}$$

$$\frac{h\nu}{kT} = a$$

$$z = \frac{e^{-\frac{a}{2}}}{1 - e^{-a}}$$

Erweitern mit e^a

$$z = \frac{e^{\frac{a}{2}} \cdot e^a}{e^a - e^{-a} \cdot e^a}$$

$$z = \frac{e^{\frac{a}{2}}}{e^a - 1}$$

b)

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T}\left(kT^2 \frac{\partial}{\partial T}\ln(Z)\right)$$

$$\ln(Z) = \ln\left(\frac{e^{\frac{a}{2}}}{e^a - 1}\right) = \ln\left(e^{\frac{h\nu}{2kT}} - \ln\left(e^a - 1\right)\right) = \frac{a}{2} - \ln\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)$$

$$-\frac{\partial \ln(Z)}{\partial T} = \frac{h\nu}{2kT^2} - \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\left(-\frac{h\nu}{kT^2}\right) e^{\frac{h\nu}{kT}}$$

$$-\frac{h\nu}{2kT^2} + \frac{h\nu}{kT^2}\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(kT^2\left(-\frac{h\nu}{2kT^2} + \frac{h\nu}{kT^2}\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right)\right)$$

$$h\nu\frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right)$$

$$h\nu\frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right)$$

$$h\nu\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right)$$

$$h\nu\left(-\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2\left(-\frac{h\nu}{kT^2}\right) e^{\frac{h\nu}{kT}}\right)$$

$$\frac{h^2\nu^2}{kT^2}\frac{e^a}{(e^a - 1)^2}$$

$$\frac{ka^2e^a}{(e^a-1)^2}$$

Da $3N$:

$$C_V = 3N\frac{ka^2e^a}{(e^a-1)^2}$$

c)

$$T \to 0 : C_V \to 0$$

$$T \to \infty : C_V \to 3Nk$$

6. Reihen

Das Quotientenkriterium lautet:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Wobei von a der Summand der Reihe ist. k ist eine frei wählbare Variable nach die Reihe summiert wird.
a)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{e^{(nx)^2}}$$

Die Variablen sind:

$$a = \frac{n^4}{e^{(nx)^2}}, k = n$$

Somit:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^4}{e^{((n+1)x)^2}}}{\frac{n^4}{e^{(nx)^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)^4}{e^{((n+1)x)^2}}\cdot\frac{e^{(nx)^2}}{n^4}$$

Der limes wird erstmal weggelassen...

$$\frac{(n+1)^4}{n^4}\cdot\frac{e^{(nx)^2}}{e^{(xn+x)^2}} = \left(\frac{(n+1)}{n}\right)^4\cdot\left(\frac{e^{(nx)}}{e^{(xn+x)}}\right)^2$$

Betrachtung des Termes mit e:

$$\frac{e^{(nx)}}{e^{(xn+x)}} = \frac{e^{nx}}{e^{nx}\cdot e^x} = \frac{e^{nx}}{e^{nx}}e^{-x} = 1e^{-x} = e^{-x}$$

somit:

$$\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^4\cdot\left(e^{-x}\right)^2$$

Betrachtung des anderen Termes:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{\infty+1}{\infty} = 1$$

Somit:

$$\left(e^{-x}\right)^2 = e^{-2x}; x\in\mathbb{R}$$

für alle $x > 0$, für $x = 0$ divergiert diese.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}-x)^n}{n^2+x}$ Die Variablen sind

$$k = n, a = \frac{(\sqrt{5}-x)^n}{n^2+x}$$

Somit:

$$\frac{(\sqrt{5}-x)^{n+1}}{(n+1)^2+x}\cdot\frac{n^2+x}{(\sqrt{5}-x)^n} = \frac{(\sqrt{5}-x)^{n+1}}{(\sqrt{5}-x)^n}\cdot\frac{n^2+x}{(n+1)^2+x}$$

$$(\sqrt{5}-x)\cdot\frac{n^2+x}{(n+1)^2+x}$$

Es wird der Term mit n betrachtet:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+x}{(n+1)^2+x} = \frac{\infty^2 x}{(\infty+1)^2 x} = \frac{\infty x}{\infty x} = 1$$

Somit:

$$(\sqrt{5}-x)\cdot 1 = \sqrt{5}-x; x \in \mathbb{R}$$

Die Funktion konvergiert für Werte von $x \in (\sqrt{5}-1, \sqrt{5}+1)$
Für $x = \sqrt{5}$ konvergiert sie auch, da dann 0 bei herauskommt.

Woche 3

7. Reihen

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+2} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \right) dx$$
$$= x\left(\arctan(x)+c\right) = x \int \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k \, dx = x \int \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

8. Reihen

$$f(x) = x\pi$$

mit $[0; 2\pi[$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^0 \, dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{2} 4\pi^2 - 2\pi^2 \right] = 0$$

$$k \neq 0,\ c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 (x-\pi) e^{ikx} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \left[(x-\pi) \frac{1}{ik} e^{ikx} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{ik} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik} \, dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \left(\frac{\pi}{-ik} - \frac{-\pi}{-ik} + \frac{1}{ik} \left(\frac{1}{-ik} - \frac{1}{-ik} \right) \right) = \frac{i\sqrt{2\pi}}{k}$$

$$\tilde{f} = \sum_{k=-\infty}^{\infty'} \frac{i}{k} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty'} \frac{i}{k} \left(\cos(kx) + i \sin(kx) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k} \sin(kx)$$

$$\frac{\pi}{2} = 2(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots)$$

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k} \sin\left(\frac{3\pi}{2} \right) \to 1, 0, -1, 0, 1, \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{2k+1} \left((-1)^k \right)$$

BEI FOLGENDEN AUFGABEN WAR ICH NICHT DA:

Woche 4

9.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(k\varphi)}{\sqrt{2\pi}k\varphi}e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi\varphi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(k\varphi)}{k}e^{ikx}+\varphi \\ \lim_{\varphi}\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{k\cos(k\varphi)}{k}e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}e^{ikx} \end{aligned}$$

Woche 5

Aufgabe 11

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = \frac{1}{60}a_2 = \frac{2\sqrt{2}-3}{2700}$$
$$p(x) = -6.35\cdot 10^5x^2 + 1.86\cdot 10^{-2}x$$
$$p(35) = 0.57$$

Absolut kein Sinn Diggi

Aufgabe 12

$$P_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$$

i	1	2	3	4
x_i	2	0	-1	3
$\phi_1(x_i)$	1	1	1	1
$\phi_2(x_i)$	2	0	-1	3
$\phi_3(x_i)$	4	0	1	9
y_i	4	2	11	7

$$\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & b_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & b_3 \end{array}$$

$$A_{LK} = \sum_{i=1}^{4}\phi_L(x_i)\phi_K(x_i)$$
$$A_{11} = \sum_{i=1}^{4}\phi_1(x_i)\phi_1(x_i)$$
$$A_{12} = \sum_{i=1}^{4}\phi_1(x_i)\phi_2(x_i) = A_21$$

$$
\begin{aligned}
A_{11} = 4 = A_{12} = A_{21} \\
A_{22} = 14 \\
A_{23} = 34 = A_{32} \\
A_{33} = 98
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{b_L} = \sum_{i=1}^{4} y_i \phi_L(x_i) \\
\vec{b_1} = 4 + 2 + 11 + 7 = 24 \\
\vec{b_2} = 18 \\
\vec{b_3} = 90
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc|c}
4 & 4 & 14 & 24 \\
4 & 14 & 34 & 18 \\
14 & 34 & 98 & 90
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
c_1 = 3.6 \\
c_2 = -4.6 \\
c_3 = 2 \\
P_2(x) = 2x^2 - 4.6x + 3.6
\end{aligned}
$$

Aufgabe 13

a)

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
3 & 3 & -3 & 0 \\
2 & -1 & -8 & 0
\end{array}\right)
$$

3 Vektoren in 2 Dimensionen haben unendlich viele Lösungen, deshalb: linear abhängig

b)

$$
\begin{vmatrix}
3 & 3 & -3 \\
2 & -1 & -8 \\
1 & 2 & 1
\end{vmatrix} = 0
$$

Linear abhängig

c)

$$
\begin{vmatrix}
3 & 3 & -3 & -3 \\
2 & -1 & -8 & -8 \\
1 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
3 & 3 & -3 \\
2 & -1 & -8 \\
1 & 2 & 0
\end{vmatrix} = 3
$$

Nicht linear Abhängig.