

**Exercice 1****5pt**

Soit  $c$  un nombre complexe. On cherche à étudier les éventuelles racines carrées de  $c$ .

1. Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z^2 = c$ . On pose  $m = |z|$  et  $\theta = \arg(z)$ .
  - (a) Montrez que  $m^2 = |c|$  et  $2\theta \equiv \arg(c)$  modulo  $2\pi$ .
  - (b) En déduire que l'équation  $z^2 = c$  admet en général deux solutions complexes.
2. Calculez les nombres complexes dont le carré est égal à  $-1$ , à  $i$ , et à  $-2 + 2i\sqrt{3}$ . Donnez leur valeur en forme algébrique et en forme exponentielle.

**Exercice 2****7pt**

1. Justifiez que  $P(z) = z^5 - 1$  se factorise par  $(z - 1)$  et calculez cette factorisation.
2. On pose  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ . Justifiez que  $P(\omega) = 0$  et montrez que  $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ .
3. Montrez que  $\omega^3 = \bar{\omega}^2$  et que  $\omega^4 = \bar{\omega}$ .
4. Soient  $u = \omega + \bar{\omega}$  et  $v = \omega^2 + \bar{\omega}^2$ . Montrez que  $u + v = -1$  et  $uv = -1$ .
5. Montrez que  $u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  et  $v = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  et en déduire la valeur de  $\cos(\frac{2\pi}{5})$ .
6. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Exprimez  $\cos(2\theta)$  en fonction de  $\cos(\theta)$ .
7. En déduire la valeur de  $\cos(\frac{\pi}{5})$ .

**Exercice 3, extrait du sujet de bac 2015.****8pt**

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante d'inconnue  $z$  :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

2. On considère les nombres complexes  $a = 4 + 4i\sqrt{3}$ ,  $b = 4 - 4i\sqrt{3}$  et  $c = 8i$ .
  - (a) Calculer le module et un argument du nombre  $a$ .
  - (b) Donner la forme exponentielle des nombres  $a$  et  $b$ .
  - (c) Placer dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$ , puis montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont sur un même cercle de centre  $O$  dont on déterminera le rayon.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question précédente complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  d'affixes respectives  $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$ ,  $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$ .
  - (a) Montrer que  $b' = 8$ .
  - (b) Calculer le module et un argument du nombre  $a'$ .Pour la suite on admet que  $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$  et  $c' = -4\sqrt{3} + 4i$ .
4. Soient  $M$  et  $N$  deux points du plan d'affixes respectives  $m$  et  $n$ . Quelle est l'interprétation géométrique du nombre complexe  $\frac{m+n}{2}$  et de la quantité  $|m - n|$ ?
  - (a) On note  $r$ ,  $s$  et  $t$  les affixes des milieux respectifs  $R$ ,  $S$  et  $T$  des segments  $[A'B]$ ,  $[B'C]$  et  $[C'A]$ . Calculez  $r$ ,  $s$  et  $t$ .
  - (b) Quelle est la nature du triangle  $RST$ ?

**Exercice 4, bonus.****?pt**

Montrez que  $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.