Prof. F. Jahnke
B. Boissonneau

Universität Münster
Sommersemester 2019

Logik I
Übungsblatt 3

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei $\mathcal{L}$-Strukturen.

Ein $\mathcal{L}$-*Homomorphismus* h *von* $\mathcal{A}$ *nach* $\mathcal{B}$ ist eine Abbildung $h : A \to B$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes n-stellige Relationssymbol $R \in \mathcal{L}$, jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in \mathcal{L}$ und jedes Konstantensymbol $c \in \mathcal{L}$ gilt:

a) $(a_1, \cdots, a_n) \in R^{\mathcal{A}}$ impliziert dass $(h(a_1), \cdots, h(a_n)) \in R^{\mathcal{B}}$

b) $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \cdots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \cdots, h(a_n))$

c) $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$

Eine $\mathcal{L}$-Formel φ heißt *positiv existentiell* wenn man sie induktiv aus atomaren Formeln mittels $\wedge$, $\vee$ und dem Existenzquantor $\exists$ bilden kann.

Aufgabe 1. Sei h ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, sei φ eine positive existentielle $\mathcal{L}$-Formel und β eine beliebige A-Belegung.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} \vDash \varphi[\beta]$ impliziert dass $\mathcal{B} \vDash \varphi[h \circ \beta]$.

Eine $\mathcal{L}$-Formel heißt *atomar*, wenn sie die Form $t_1 \doteq t_2$ oder $Rt_1 \cdots t_n$ hat, für $\mathcal{L}$-Terme t_i und $R \in \mathcal{L}$ n-stelliges Relationsymbol. Zwei $\mathcal{L}$-Formeln φ und ψ heißen *logisch equivalent* (kurz $\varphi \sim \psi$), wenn $\varphi \leftrightarrow \psi$ allgemeingültig ist.

Aufgabe 2.

a) Zu jeder quantorenfreien $\mathcal{L}$-Formeln φ existiert eine logisch äquivalente Formel φ_{DNF} in *disjunktiver Normalform* (DNF), also

$$\varphi_{DNF} = (\varphi_{1,1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{1,n_1}) \vee \cdots \vee (\varphi_{l,1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{l,n_l})$$

und eine logisch äquivalente Formel φ_{KNF} in *konjunktiver Normalform* (KNF), also

$$\varphi_{KNF} = (\varphi_{1,1} \vee \cdots \vee \varphi_{1,n_1}) \wedge \cdots \wedge (\varphi_{l,1} \vee \cdots \vee \varphi_{l,n_l})$$

mit atomaren oder negiert atomaren $\varphi_{i,j}$.

b) Zu jeder $\mathcal{L}$-Formel φ existiert eine logische äquivalente Formel φ_{PNF} in *pränexer Normalform*; das heißt:

$$\varphi_{PNF} = Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \psi$$

wobei $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und ψ quantorenfrei (also ohne Einschränkung in DNF oder KNF) ist.

Üben Sie das Umformen in pränexe Normalform (mit quantorenfreiem Teil in DNF und KNF) anhand der Formel $\neg(\neg\forall x(Rx \vee \exists z\, fx \doteq z) \vee \forall x(Px \to Pz))$.

(Bitte wenden.)

Aufgabe 3. Beweisen Sie die Beweisbarkeit von den folgenden Formeln im Hilbertkalkül (ohne Benutzung des Gödelschen Vollständigkeitssatzes, mit Benutzung der abgleiteten Regeln):

a) $\exists v_0\, Rv_0v_1 \to \exists v_2\, Rv_2v_1$

b) $\exists v_0 \neg Rv_0 f v_0 \vee \exists v_1\, Rcv_1$

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <, f)$ mit einem einstelligem Funktionssymbol f. Angenommen, es gilt $f^{\mathcal{A}}(0) = 0$. Sei $\mathcal{R}^* = (R^*, 0, 1, +, -, \cdot, <, f)$ zu $\mathcal{R}$ elementar äquivalent und *nicht archimedisch*, das heißt, dass es in R^* Elemente gibt, die größer sind als jede natürliche Zahl[1]. Ein Element $x \in R^*$ heißt *infinitesimal*, falls $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ für alle positiven natürlichen Zahlen n gilt.

Zeigen Sie, dass $f^{\mathcal{R}}$ genau dann stetig bei $0^{\mathcal{R}}$ ist, wenn für alle infinitesimalen $x \in R^*$ auch $f^{\mathcal{R}^*}(x)$ infinitesimal ist.

[1] Die Existenz eines solchen $\mathcal{R}^*$ folgt aus dem Kompaktheitssatz.

Abgabe bis Donnerstag, den 25.04, 10:00 Uhr, in Briefkasten 177.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/bboisson/de/L1/