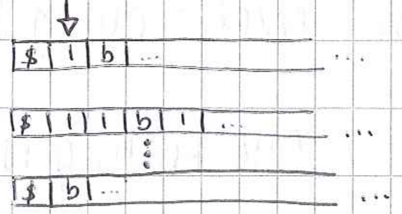
Erinnerung: TM $\mathcal{M}$ $S = \{\#, 1, b\}$

gegeben durch # Bänder $n = n(\mathcal{M})$

endl. Zustandsmenge Q mit $q_I, q_F \in Q$, $q_I \neq q_F$

Übergangsfkt $\delta: S^n \times Q \to S^n \times Q \times \{-1, 0, 1\}$



TM berechnet $f: \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, wenn

$n(\mathcal{M}) \geq m+1$

und bei Eingabe $\bar{x} \in \mathbb{N}^m$ (d.h. x_i auf dem iten Band) stoppt TM nach endl. Zeit (d.h. landet in Zustand q_F), Bandinhalt repräsentiert $(x_1, \dots, x_m, f(\bar{x}), 0, 0, \dots, 0)$

Kann angeben werden durch:

- Modulbeschreibung
- Übergangsfkt.
- Flussdiagramm.

Bsp: $(x, y) \mapsto x + y$ ist TM-berechenbar

Benutze TM $\mathcal{M}$ mit $n(\mathcal{M}) = 4$, Zustände $Q = \{q_I, q_1, q_2, q_3, q_F\}$

Programmcode (Modulbeschreibung):

- Beginne in Zustand q_I. Kopiere x (Bandinhalt von B_1 bis zum ersten b) auf B_3. Wenn fertig, wechsle in q_1.

- Wenn in Zustand q_1: Kopiere y (Bandinhalt bis zum ersten b) von B_2 auf B_4 (Hilfsband)
- wechsle in q_2, wenn fertig. ~~kopi~~
- Zustand q_2: Wenn B_4 nicht null repräsentiert, gehe zum letzten 1 auf B_4, ersetze durch b, wechsle in q_3.
  Wenn B_4 null repräsentiert (2te Eintrag ist b), wechsele in q_F.
- Zustand q_3: Füge ein 1 am Ende von Band B_3 hinzu (ersetze erstes b auf B_3 durch 1), wechsle in q_2.

Schon in diesem (sehr simplen!) Bsp ist das explizite Angeben einer Übergangsfkt. kaum praktikabel.

Def 3.2: (1.) Ein Band repräsentiert (zu einem gegebenen Zeitpunkt) eine natürliche Zahl m, wenn der Bandinhalt $(\$, \underbrace{1, \dots, 1}_{m\text{-mal}}, b, b, b, \dots)$ ist.

(2.) Eine partielle Funktion von $\mathbb{N}^p$ nach $\mathbb{N}$ ist ein Tupel (A, f), mit $A \subseteq \mathbb{N}^p$ und $f: A \to \mathbb{N}$. Schreibe $A = dom(f)$ und $\mathcal{F}_p^*$ für die Menge all dieser Paare.

(3.) Eine TM $\mathcal{M}$ berechnet $f \in \mathcal{F}_p^*$ wenn $n(\mathcal{M}) \geq p+1$ gilt und f.a. $\bar{m} \in \mathbb{N}^p$, gilt: Wenn $\mathcal{M}$ auf dem Input startet, bei dem die Bänder $B_1, \dots, B_p$ die Zahlen $m_1, \dots, m_p$ repräsentieren, und B_i für $i > p$ die Zahl 0 repräsentiert, dann

(i) falls $\bar{m} \in dom(f)$ stoppt $\mathcal{M}$ nach endl. Zeit und die Bänder von $\mathcal{M}$ repräsentieren $(m_1, \dots, m_p, f(\bar{m}), 0, \dots, 0)$ (in dieser Reihenfolge!)

(ii) falls $\bar{m} \notin dom(f)$, stoppt $\mathcal{M}$ nie (d.h. $\mathcal{M}$ wechselt nie in Zustand q_1).

(4.) Eine partielle Fkt f heißt Turing-berechenbar, wenn es eine TM $\mathcal{M}$ gibt, die f berechnet ($f \in \mathcal{F}_p^*$ für ein $p \in \mathbb{N}$)

Lemma 3.3: Die Funktionen $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x+1$, $C_0^0: \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$, $C_0^0 = 0$ und $P_i^n: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $(m_1, \dots, m_n) \mapsto m_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $1 \leq i \leq n$ sind TM-berechenbar.

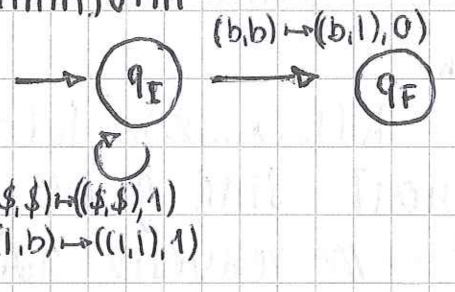
Bew: · c wird durch eine TM M mit einem Band berechnet, Zustandsmenge $Q = \{q_I, q_F\}$ und Übergangsfkt. $M(\$, q_I) = (\$, q_F, 0)$ ('relevante Teil')
(setze etwa fort durch $M(1, q_I) = (1, q_I, 0)$ und $M(b, q_I) = (b, q_I, 0)$)

· f wird durch TM M mit zwei Bändern berechnet, Zustandsmenge $Q = \{q_I, q_F\}$ und Übergangsfkt.
$M((\$,\$), q_I) = ((\$,\$), q_I, 1)$,
$M((1,b), q_I) = ((1,1), q_I, 1)$, $M((b,b), q_I) = ((b,1), q_F, 0)$

⌈ Alternativer Beweis (auch okay): Modulbeschreibung
- lese aktuelle Spalte. Falls oberer Eintrag \$, rücke Lesekopf nach rechts.
Falls oberer Eintrag 1, schreibe (1,1) und rücke Lesekopf nach rechts.
Falls oberer Eintrag b, schreibe (b,1) und wechsele in akz. Zustand.
⌊ ☒

(p_i^n: Übung!)

Diagrammform



Anmerkung: · Sowohl Modulbeschreibungen als auch (Fluss-) Diagramme können zur Beschreibung von TM benutzt werden!

· Es gibt noch viele weitere Möglichkeiten, TM zu definieren, bspw. 1-Band oder Band durch $\mathbb{Z}$ nummeriert. Alle berechnen die gleichen Fkt!
(siehe BT-Vorlesung)

• Unäre Kodierung von natürlichen Zahlen ist natürlich ausgesprochen ineffizient. Wir sind in dieser VL aber nicht an (Laufzeiten) interessiert!
Komplexität

1. Ziel: Mathematische Beschreibung der TM-berechenbaren Fkt.

Sei $\mathcal{F}_n = \{f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}\}$ und $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

Def 3.4. Eine Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ (für $n \geq 0$) heißt **primitiv rekursiv**, wenn sie sich aus den Grundfunktionen

(R0) $s(x) = x + 1$ Nachfolger

$P_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$ Projektion

$C_0^0 = 0$ Konst. 0-Fkt.

durch Anwenden der folgenden Regeln aufbauen lässt:

(R1) [Einsetzung] Sind $f_1, \dots, f_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ prim. rek., dann auch

$g = h(f_1, \dots, f_k)$

(also $g(x_1, \dots, x_n) = h(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n))$)

(R2) [Prim. Rekursion] Sind $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ rekursiv, dann auch

$f(x_1, \dots, x_n, y) : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ mit

$f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$

$f(x_1, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y))$

Bsp 3.5: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist $C_k^n(x_1, \dots, x_n) = k$ (konstante Fkt.) prim. rekursiv.

Bew: $C^0_{m+1} = S(C^0_m)$

$C^n_m = C^0_m$ (R1 mit ($k=0$)-vielen n-stell. Fkt.) ☒

Def 3.6: Eine Fkt $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ (für $n \geq 0$) heißt rekursiv, wenn sie sich aus den Grundfkt. (R0) durch Anwenden der Regeln (R1), (R2) und

(R3): [μ-Rekursion] $g: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ rekursiv mit $\forall x_1,\dots,x_n \exists y \; g(x_1,\dots,x_n,y) = 0$. Dann ist auch $f(x_1,\dots,x_n) = \mu y\,(g(x_1,\dots,x_n,y)=0)$ rekursiv, wobei $\mu y\, A(y)$ = "das kleinste y mit $A(y)$".

Bsp 3.7 (ohne Beweis): Ackermannfunktion.

Die Funktion $\xi: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, gegeben durch

- $\xi(0,x) := 2^x$
- $\xi(y,0) := 1$
- $\xi(y+1,x+1) := \xi(y, \xi(y+1,x))$

ist rekursiv aber nicht primitiv rekursiv.

Zeige nun: Alle rekursiven Funktionen sind TM-berechenbar.

Schon gezeigt: Die Grundfunktionen (R0) sind TM-berechenb.

Lemma 3.8: Die Menge der TM-berechenbaren Fkt. ist stabil unter Einsetzung (R1).

Bew: Seien $f_1,\dots,f_k: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ TM-berechenbar, $g = h(f_1,\dots,f_k)$, d.h. es ex. TM $\mathcal{M}_i$ für $1 \leq i \leq k$ mit $p_i \geq n+1$ vielen Bändern, und Zustandsmenge Q_i, die f_i berechnen, sowie TM $\mathcal{M}'$ mit $k' \geq k+1$ vielen Bändern und

Zustandsmenge Q', welche g berechnet.

Bew: Idee: Berechne nacheinander $f_1(x_1,..,x_n), .., f_k(x_1,..,x_n)$ und speichere Ergebnisse auf Hilfsbändern (unten). Berechne dann $h(f_1(x_1,..,x_n), .., f_k(x_1,..,x_n))$, schreibe Ergebnis in die $(n+1)$-te Zeile, lösche alle Einträge (außer dem ersten Eintrag \$) von den Hilfsbändern. ☑

Lemma 3.9: Die Menge der TM-berechenbaren Fkt. ist stabil unter prim. Rekursion (R2).

Lemma 3.10: Die Menge der TM-berechenbaren Fkt. ist stabil unter μ-Rekursion (R3).

Bewidee: Initiiere Zähler $z=0$ auf einem Hilfsband.

(*) Berechne $g(x_1,..,x_n,z)$ (auf Hilfsband)

(a) Falls $g(x_1,..,x_n,z)=0$, kopiere z auf Band $n+1$, lösche alle Einträge (außer dem ersten Eintrag \$) von den Hilfsbändern, wechsle in q_F.

(b) Falls $g(x_1,..,x_n,z)\neq 0$, ersetze z durch $z+1$ und wiederhole (*). ☑

Prop 3.11: Jede rekursive Fkt. ist TM-berechenbar.

Bew: 3.3 + 3.8 + 3.9 + 3.10. ☑

Andere Richtung: Etwas aufwändiger!

§3.2 primitiv rekursive Funktionen und Gödelisierung

Lemma 3.12: Die Funktionen $x+y$, $x\cdot y$, x^y, $x!$ und

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x-y & \text{wenn } y \leq x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind primitiv rekursiv.

Bew: · $x+y$ (per prim. Rekursion:)

$x+0 = x \qquad x+(y+1) = S(x+y)$

· $x \cdot y$:

$x \cdot 0 = 0 \qquad x\cdot(y+1) = xy + x$

$\rightarrow$ x^y, $x!$ analog

· $x \dot{-} y$

Definiere zunächst $y \dot{-} 1$

$0 \dot{-} 1 = 0 \qquad (y+1) \dot{-} 1 = y$

Setze nun $x \dot{-} 0 = 0$, $x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1$ ☒

Def: Eine Teilmenge (oder auch 'ein Prädikat') $A \subseteq \mathbb{N}^m$ heißt (primitiv) rekursiv, wenn die charakteristische Fkt.

$$\chi_A(x_1,..,x_m) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } (x_1,..,x_m) \notin A \\ 1 & \text{wenn } (x_1,..,x_m) \in A \end{cases}$$

(primitiv) rekursiv ist.

Lemma 3.13

(1.) Die Menge der prim. rek. Fkt. ist abg. unter dem Vertauschen von Variablen.

(d.h. $f: \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ p.r., $g: \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$g(x_1,..,x_m) = f(x_1,..,x_{i-1}, x_j, x_{i+1},..,x_{j-1}, x_i, x_{j+1},..,x_m)$ ist p.r.)

⌈Bew: $g(x_1,..,x_m)$ ist Verknüpfung von f und geeigneten Projektionen ⌋

(2.) Wenn $A \subseteq \mathbb{N}^n$ p.r. ist und $f_1,..,f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ p.r. sind, dann auch $Y := \{(x_1,..,x_k) \in \mathbb{N}^k : (f_1(\bar{x}),.., f_n(\bar{x})) \in A\}$

$\ulcorner$Bew: $\chi_Y = \chi_A(f_1,.., f_n)$ $\lrcorner$

(3.) Die Menge der p.r. TM von $\mathbb{N}^n$ enthält $\emptyset$ und $\mathbb{N}^n$ und ist abg. unter $\cap, \cup$ und Komplement.

$\ulcorner$Bew: $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$, $\chi_{A^c} = 1 \dot{-} \chi_A$ $\lrcorner$

(4.) Die Menge $\{(x,y) : x<y\} \subseteq \mathbb{N}^2$ ist p.r.

$\ulcorner$Bew: $\chi_{x<y} = \chi_{\mathbb{N}\setminus\{0\}}(y \dot{-} x)$ $\lrcorner$

(5.) [Definition per Fallunterscheidung]

Sei $\mathbb{N}^n = A_1 \cup ... \cup A_k$ eine Zerlegung von $\mathbb{N}^n$ in p.r. Mengen und $f_1,.., f_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ p.r. Dann ist auch $f(x_1,.., x_n) = f_i(x_1,.., x_n)$ falls $(x_1,.., x_n) \in A_i$ p.r.

$\ulcorner$Bew: $f = \chi_{A_1} f_1 + ... + \chi_{A_k} f_k$ $\lrcorner$

Insbesondere sind $(x_1,.., x_n) \mapsto \max_{1\le i\le n} x_i$ und

$(x_1,.., x_n) \mapsto \min_{1\le i\le n} x_i$ p.r. $\lrcorner$

$A_1 = \{(x_1,.., x_n) : x_1 \geq x_2 \wedge ... x_1 \geq x_n\}$

(6.) [Beschränkte Summen und Produkte]

Wenn $f: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ p.r. ist, dann auch

$$\sum_{t=0}^{y} f(x_1,.., x_n, t) \quad \text{und} \quad \prod_{t=0}^{y} f(x_1,.., x_n, t)$$

$\ulcorner$Bew: 3.12 & primitive Rekursion) $\lrcorner$

(7.) [Beschränkter μ-Operator]

Sei $X \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ prim. rek. Dann ist die Fkt $f: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$

$$f(x_1,.., x_n, z) = \begin{cases} 0 & \text{wenn es kein } t \le z \text{ gibt mit } (\bar{x}, t) \in X \\ t_0 & \text{wenn } t_0 \le z \text{ min. ist mit } (\bar{x}, t_0) \in X \end{cases}$$

auch p.r. Schreibe $f(\bar{x}, z) = (\mu t \le z \ (x_1,.., x_n, t) \in X)$

$\ulcorner$Bew: $f(\bar{x}, 0) = 0$

$$f(\bar{x}, z+1) = \begin{cases} f(\bar{x}, z) & \text{falls } \sum_{t=0}^{z} \chi_X(\bar{x}, t) \geq 1 \\ z+1 & \text{falls } \sum_{t=0}^{z} \chi_X(\bar{x}, t) = 0 \ \& \ (\bar{x}, z+1) \in X \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\leadsto f$ p.r. wegen (5.) $\lrcorner$