Prof. F. Jahnke
B. Boissonneau

Universität Münster
Sommersemester 2019

Logik I
Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass ZF beweist, dass das Auswahlaxiom und das Zorn'sche Lemma äquivalent sind.

Aufgabe 2. Beweisen Sie ohne Auswahlaxiom[1] den Satz von Cantor-Bernstein:
Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ Injektionen. Dann gibt es eine Bijektion $h : B \to A$.
Hinweis: Wir können annehmen, dass A eine Teilmenge von B und f die Inklusionsabbildung ist. Sei $C = \{g^n(x) \mid n \in \omega,\, x \in B \setminus A\}$. Setze $h(c) = g(c)$ für $c \in C$ und $h(y) = y$ für $y \in B \setminus C$.

[1] Insbesondere ohne Lemma 2.54, das (in der Definition der Mächtigkeit) das Auswahlaxiom verwendet.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Menge der reellen Zahlen und die Potenzmenge von ω gleichmächtig sind.

Aufgabe 4. Sei α eine Ordinalzahl. Zeigen Sie, dass es eine Kardinalzahl $\kappa \geqslant \alpha$ gibt, die ein $\aleph$-Fixpunkt ist: $\aleph_\kappa = \kappa$.
Hinweis: Betrachten Sie die Folge definiert mittels $\alpha_0 = \alpha$ und $\alpha_{n+1} = \aleph_{\alpha_n}$, und nehmen Sie $\kappa = \sup_{n\in\omega} \alpha_n$.

Abgabe bis Donnerstag, den 23.05, 10:00 Uhr, in Briefkasten 177.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/bboisson/de/L1/