sei $ft_1 \dots t_n = es_1 \dots s_k$
für Fkt.zeichen $e, f \in L$, $t_1, \dots, t_n$, $s_1, \dots, s_k$ L-Terme
$\Rightarrow f = e$, $n = k$
z.z.: $t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n$
Ang nicht, sei $t_1 = s_1, \dots, t_m = s_m$, $t_{m+1} \neq s_{m+1}$ $m < n$
$\Rightarrow t_{m+1}$ ist echtes Anfangsstück von s_{m+1} oder umgekehrt ↯ zu Lemma 1.2. ☒

L-Terme: (bestimmte) Zeichenreihen, nur Konstantensymbole und Fkt.symbole aus L und Variablen kommen vor

L-Formeln: (bestimmte) Zeichenreihen, die aus den Zeichen von L, den Klammern (und) als Hilfszeichen und den folgenden logischen Zeichen gebildet werden:
Variablen $v_0, v_1, v_2, \dots$
Gleichheitszeichen $\doteq$
Junktoren: $\neg$ (Negation) und $\wedge$ (Konjunktion)
Existenzquantor: $\exists$

Def: Die folgenden Ausdrücke sind L-Formeln:

Primformeln $\begin{cases} \text{F1: } t_1 \doteq t_2, & \text{wenn } t_1, t_2 \text{ L-Terme sind} \\ \text{F2: } Rt_1 \dots t_n & \text{-"- } t_1, \dots, t_n \text{ -"- und } R \in L \text{ n-stell.} \end{cases}$

Relationszeichen

F3: $\neg \varphi$ wenn φ eine L-Formel ist
F4: $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, wenn φ_1, φ_2 L-Fmln sind
F5: $\exists x \varphi$ wenn φ eine L-Fml ist und x eine Variable.
Jede L-Formel entsteht auf diese Weise.

Wir verwenden die folgenden Abkürzungen

$$(\psi_1 \vee \psi_2) = \neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$$
$$(\psi_1 \to \psi_2) = \neg(\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$$
$$(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2) = ((\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_2 \to \psi_1))$$
$$\forall x\, \psi = \neg\exists x\, \neg\psi$$
$$(\psi_0 \wedge \ldots \wedge \psi_n) = \underbrace{(\ldots(}_{n\text{-mal}}\psi_0 \wedge \psi_1) \wedge \ldots \wedge \psi_n)$$
$$(\psi_0 \vee \ldots \vee \psi_n) = \overbrace{(\ldots(}\psi_0 \vee \psi_1) \vee \ldots \vee \psi_n)$$
$$t_1 R t_2 = R t_1 t_2 = R(t_1, t_2)$$
$$\exists x_1 x_2\, \psi = \exists x_1 \exists x_2\, \psi.$$

Wir lassen (zur besseren Lesbarkeit) Klammern weg nach Bindungsstärke:

+ höchste Bindungsstärke

$\forall, \exists, \neg$

$\wedge$

$\vee$

$\to, \leftarrow$ niedrigste Bindungsstärke

−

Bsp: $\neg\phi \wedge \psi \to \chi$ steht für
$$((\neg\phi \wedge \psi) \to \chi) = \neg((\neg\phi \wedge \psi) \wedge \neg\chi)$$

Beispiele für L-Formeln: Körperaxiome in $L_{Ring} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$
verwende x, y, z statt v_0, v_1, v_2

ab. Grp. bzgl. + $\left\{\begin{array}{l} (1.)\ \forall x,y\ \ x+y \doteq y+x \\ (2.)\ \forall x\ \ x+\underline{0} \doteq x \\ (3.)\ \forall x\ \ x+(-x) \doteq \underline{0} \\ (4.)\ \forall x,y,z\ \ (x+y)+z \doteq x+(y+z) \end{array}\right.$

(5.) $\forall x,y\ \ x \cdot y \doteq y \cdot x$

(6.) $\forall x\ \ x \cdot \underline{1} \doteq x$

(7.) $\forall x,y,z\ \ (x \cdot y) \cdot z \doteq x \cdot (y \cdot z)$

(8.) $\forall x,y,z\ \ x \cdot (y+z) \doteq xy + xz$

(9.) $\forall x\ (\neg x \doteq 0 \to \exists y\ \ x \cdot y \doteq \underline{1})$

(10.) $\neg \underline{0} \doteq \underline{1}$.

Bem.: (1)-(8) Axiome für komm. Ring mit 1

Lemma 1.3 (Eindeutige Lesbarkeit von Formeln)
Jede L-Formel ϕ hat genau eine der folgenden Formen:

(1.) $\phi = t_1 \doteq t_2$ für L-Terme t_1, t_2

(2.) $\phi = Rt_1 \dots t_n$ für $R \in L$ n-stell. Rel.symbol, $t_1, \dots, t_n$ L-Terme

(3.) $\phi = \neg \psi$ für ψ L-Formel

(4.) $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ für ψ_1, ψ_2 L-Formeln

(5.) $\phi = \exists x \psi$ für ψ L-Formel, x Variable

In jedem der Fälle sind die L-Terme t_i, das Rel.zeichen R, die L-Fmln ψ, ψ_1, ψ_2 und die Variable x eind. bestimmt.

Bew: Das genau einer der Fälle auftritt, ist klar (betrachte erstes Zeichen!)

Ind. über $|\phi|$.

Eindeutigkeit der t_i, R, ψ, ψ_1, ψ_2, x:

(2.): wie in Lemma 1.2

(3.) & (5.) per Ind. Annahme

(1.) & (4.) Übung: keine L-Fml. ist echtes Anfangsstück einer anderen L-Formel. ☒

§1.2 Semantik

Was bedeutet es, wenn eine L-Formel φ in einer L-Struktur gilt?

⇝ definiere induktiv über den Aufbau von φ.

Achtung: ein L-Term hat erst dann einen Wert in einer L-Struktur $\mathfrak{A}$, wenn man die Variablen von t mit Elementen aus A belegt.

Def: Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Eine Belegung (der Variablen) ist eine Funktion $\beta : \{v_0, v_1, \dots\} \to A$, von der Menge der Variablen in die Grundmenge von $\mathfrak{A}$.

Bem: Overkill - eigentlich wollen wir nur Variablen belegen, die in der jeweiligen L-Fml / dem jeweiligen L-Term vorkommen...

Def.: Für L-Terme t, L-Struktur $\mathfrak{A}$ und Belegung β definieren wir $t^{\mathfrak{A}}[\beta]$ durch:

(1.) $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = \beta(v_i)$ falls $t = v_i$ Variable.

(2.) $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = c^{\mathfrak{A}}$ falls $t = c$ Konstante aus L

(3.) $f t_1 \dots t_n{}^{\mathfrak{A}}[\beta] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$.

falls $t = f t_1 \dots t_n$ für $f \in L$ n-stell. Fkt. symb., $t_1, \dots, t_n$ L-Terme.

$\rightsquigarrow$ Dies ist wohldefiniert wegen 1.1!

Bsp: Sei $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, \underline{0}^{\mathcal{Q}}, \underline{1}^{\mathcal{Q}}, +^{\mathcal{Q}}, -^{\mathcal{Q}}, \cdot^{\mathcal{Q}})$ der Körper der rationalen Zahlen als L_{Ring} - Struktur (d.h. übliche Interpret.)

$t = \cdot \, v_0 + v_1 v_2$ (besser lesbar: $v_0 \cdot (v_1 + v_2)$)

und $\beta(v_i) = i + 2$ für $i = 0, 1, \dots$

$\Rightarrow t^{\mathcal{Q}}[\beta] = 2 \cdot (3 + 4) = 14$.

Lemma 1.4: Wenn die Belegungen β und γ auf den Variablen übereinstimmen, die in t vorkommen, gilt $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$.

Bew: klar.

Schreibweise: Wenn wir einen L-Term t in der Form $t(x_1, .., x_n)$ schreiben, meinen wir:

(1.) die x_i sind paarweise verschiedene Variablen, die in t vorkommen. und

(2.) in t kommen nur Variablen aus $\{x_1, .., x_n\}$ vor.

$\leadsto$ Wenn nun $a_1, .., a_n$ Elemente einer L-Struktur $\mathfrak{A}$ sind, ist wegen 1.4 $t^{\mathfrak{A}}[a_1, .., a_n]$ durch $t^{\mathfrak{A}}[\beta]$ für eine (jede) Belegung β mit $\beta(x_i) = a_i$ wohldefiniert.

Def: Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Wir definieren für Belegungen β und L-Formeln ϕ die Relation

$$\mathfrak{A} \models \phi[\beta]$$

- ϕ trifft in $\mathfrak{A}$ auf β zu - durch Rekursion über den Aufbau von ϕ:

(1.) $\mathfrak{A} \models t_1 \doteq t_2 [\beta] \iff t_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$

(2.) $\mathfrak{A} \models R t_1 \dots t_n [\beta] \iff R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$
für $R \in L$ n-stell. Rel.symbol

(3.) $\mathfrak{A} \models \neg \psi [\beta] \iff \mathfrak{A} \not\models \psi [\beta]$

(4.) $\mathfrak{A} \models \psi_1 \wedge \psi_2 [\beta] \iff \mathfrak{A} \models \psi_1 [\beta]$ und $\mathfrak{A} \models \psi_2 [\beta]$

(5.) $\mathfrak{A} \models \exists x \psi [\beta] \iff$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi [\beta \frac{a}{x}]$

Dabei ist $\beta \frac{a}{x} (y) = \begin{cases} \beta(y) & \text{wenn } y \neq x \\ a & \text{wenn } y = x \end{cases}$

Bem: Unsere Abkürzungen haben die gewünschten Interpretationen, etwa:

$\mathfrak{A} \models (\psi_1 \to \psi_2) [\beta] \iff$ wenn $\mathfrak{A} \models \psi_1 [\beta]$, dann $\mathfrak{A} \models \psi_2 [\beta]$.

Bsp: $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, 0^{\mathbb{Q}}, 1^{\mathbb{Q}}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, -^{\mathbb{Q}})$ Kp. der rat. Zahlen.

$\phi = \exists x \; x \cdot x \doteq y$

β_1 Belegung. $\beta_1(y) = 9 \Rightarrow \mathbb{Q} \models \phi[\beta_1]$

β_2 Belegung. $\beta_2(y) = 2 \Rightarrow \mathbb{Q} \models \neg \phi[\beta_2]$.

Ob ϕ in $\mathfrak{A}$ auf β zutrifft, hängt nur von den freien Variablen von ϕ ab

Def: Die Variable x kommt frei in der L-Formel ϕ vor, wenn sie an einer Stelle vorkommt, die nicht im Wirkungsbereich eines Quantors $\exists x$ liegt. Präzise:

x kommt in ϕ frei vor, wenn:

(1.) x frei in $t_1 \doteq t_2 \Leftrightarrow x$ kommt in t_1 oder t_2 vor.

(2.) -"- $R t_1 \dots t_n \Leftrightarrow$ -"- einem der t_i vor.

(3.) x frei in $\neg \psi \Leftrightarrow x$ frei in ψ

(4.) x frei in $(\psi_1 \wedge \psi_2) \Leftrightarrow x$ frei in ψ_1 oder x frei in ψ_2

(5.) x frei in $\exists y \psi \Leftrightarrow x$ frei in ψ und $x \neq y$

Bsp: $\phi = \forall v_0 (\exists v_1 \; R(v_0, v_1) \wedge P(v_1))$

$L = \{R, P\}$, R 2-stell. Rel.zeichen, P 1-st. Rel.zeichen.

Hierbei: v_0 nicht frei v_1 kommt frei und gebunden vor.

Satz 1.5 (Koinzidenzsatz): L Sprache, ϕ L-Fml., $\mathfrak{A}$ L-Struktur, β, γ Belegungen.

Wenn β und γ auf allen Variablen, die frei in ϕ vorkommen, übereinstimmen, gilt

$$\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\gamma].$$