Prof. F. Jahnke
B. Boissonneau

Universität Münster
Sommersemester 2019

Logik I
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{A}$ ein Modell von ZFC. Ein Element a von A wird nichtstandard natürliche Zahl genannt, wenn $\mathcal{A} \vDash a \,\varepsilon\, \omega$ gilt, aber $\mathcal{A} \vDash \neg(a \doteq \underline{n})$ für alle $n = 0, 1, \cdots$ Zeigen Sie:

a) Wenn ZFC konsistent ist, gibt es ein Modell mit nichtstandard natürlichen Zahlen.

b) Es gibt in $\mathcal{A}$ keine kleinste nichtstandard natürliche Zahl.

Aufgabe 2. Für eine Menge A von Ordinalzahlen sei $\sup_{\alpha \in A}(\alpha)$, oder auch kurz $\sup(A)$, die kleinste obere Schranke von A in den Ordinalzahlen. Wir definieren Addition, durch folgende Rekursionsvorschrift:

- $\alpha + 0 := \alpha$
- $\alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1$
- $\alpha + \lambda := \sup_{\beta < \lambda}(\alpha + \beta)$

Multiplikation ist rekursiv so definiert:

- $\alpha \cdot 0 := 0$
- $\alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
- $\alpha \cdot \lambda := \sup_{\beta < \lambda}(\alpha \cdot \beta)$

Exponentiation hat die folgende Definition:

- $\alpha^0 := 1$
- $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$
- $\alpha^\lambda := \sup_{\beta < \lambda}(\alpha^\beta)$

Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln der Ordinalzahlarithmetik:

a) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

b) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$

c) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

d) $(\omega + 1) \cdot 2 \neq \omega \cdot 2 + 1 \cdot 2$

e) $(\omega \cdot 2)^2 \neq \omega^2 \cdot 2^2$

Aufgabe 3. Welche Körperaxiome[1] gelten in $(\omega, +, \cdot)$? Geben Sie für jedes Axiom einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

[1] Vergleiche §1.1

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass für jede Menge x ein α existiert, sodass $x \in V_\alpha$ ist.
Hinweis: wenn es ein x gäbe das in keinem V_α ist, dann gäbe es auch ein y das ebenfalls in keinem V_α wäre, mit der zusätzlichen Eigenschaft dass für jedes $z \in y$ eine Ordinalzahl α_z existiert mit $z \in V_{\alpha_z}$. Verwenden Sie nun Ersetzung um einen Widerspruch zu erhalten.
Das ermöglicht die folgende Definition: der Rang einer Menge x, kurz $\mathrm{rk}(x)$, ist die kleinste Ordinalzahl α so dass $x \in V_{\alpha+1}$ ist. Zeigen Sie:

a) falls $x \in y$ dann ist $\mathrm{rk}(x) < \mathrm{rk}(y)$.
b) $\mathrm{rk}(\alpha) = \alpha$, für jede Ordinalzahl α.

Abgabe bis Donnerstag, den 16.05, 10:00 Uhr, in Briefkasten 177.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/bboisson/de/L1/