Prof. F. Jahnke
B. Boissonneau

Universität Münster
Sommersemester 2019

Logik I
Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ring}}$.

a) Zeigen Sie, dass die Klasse aller endlichen Körper nicht axiomatisierbar ist; das heißt, es gibt keine $\mathcal{L}$-Theorie T sodass eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ genau dann ein endlicher Körper ist, wenn $\mathcal{A} \models T$.

b) Seien φ eine $\mathcal{L}$-Aussage und für jede Primzahl p ein Körper K_p mit $\operatorname{char}(K_p) = p$ und $K_p \models \varphi$. Zeigen Sie, dann es ein Körper K gibt, mit $\operatorname{char}(K) = 0$ und $K \models \varphi$.

Sei $\mathcal{L} = \{<\}$ für ein zweistelliges Relationssymbol $<$. Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A} = (A, <^{\mathcal{A}})$ heißt *lineare Ordnung* wenn $\mathcal{A} \models \forall x \forall y\, (x < y \lor x = y \lor y < x)$.

$\mathcal{A}$ heißt *Wohlordnung* wenn es für jede nichtleere Teilmenge X von A ein $a \in X$ gibt, so dass $a <^{\mathcal{A}} b$ für alle $b \in X \setminus \{a\}$ gilt.

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie, dass eine lineare Ordnung $\mathcal{A} = (A, <^{\mathcal{A}})$ genau dann eine Wohlordnung ist, wenn es keine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass $a_{i+1} <^{\mathcal{A}} a_i$ gilt für alle $i \in \mathbb{N}$.

b) Ist die Klasse aller Wohlordnungen axiomatisierbar?

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen. Dann ist $\mathcal{A}$ eine *elementare Substruktur* von $\mathcal{B}$, kurz $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$, wenn $\mathcal{A}$ eine Substruktur von $\mathcal{B}$ ist und für alle $\mathcal{L}$-Formeln φ und Belegungen $\beta \in A$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\beta]$.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{L}$ abzählbar. Zeigen Sie, dass jede unendliche $\mathcal{L}$-Struktur eine abzählbare elementare Substruktur hat.
Hinweis: Konstruieren Sie eine abzählbare Menge $B_0 \subseteq B$, die für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi(x, y)$ und jedes Tupel a aus B_0 ein b mit $\mathcal{B} \models \varphi(a, b)$ enthält, falls es ein solches b gibt.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, 0, <)$.

a) Zeigen Sie mit Kompaktheit, dass $\operatorname{Th}(\mathcal{R})$ ein Modell hat, das nicht archimedisch ist.

b)* Zeigen Sie, dass jede echte elementare Oberstruktur $\mathcal{R}^* \succ \mathcal{R}$ nicht archimedisch ist.

Abgabe bis Donnerstag, den 02.05, 10:00 Uhr, in Briefkasten 177.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/bboisson/de/L1/