Prof. F. Jahnke
B. Boissonneau

Universität Münster
Sommersemester 2019

Logik I
Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Eine auf einer Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ definierte Funktion wird *partiell rekursiv* genannt, wenn ihr Graph rekursiv aufzählbar ist.

a) Zeigen Sie, dass die partiell rekursiven Funktionen genau die berechenbaren partiellen Funktionen sind.

b) Wie muss man die Regeln (R0) bis (R3) modifizieren, sodass sich genau die partiell rekursiven Funktionen ergeben?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass man nicht entscheiden kann, ob eine vorgelegte Turingmaschine mit leerer Eingabe stoppt.
Hinweis: Sei A eine rekursiv aufzählbare, aber nicht rekursive Menge. Sei $\mathcal{M}$ eine Maschine, die die partielle Funktion $A \times \{0\}$ berechnet. Betrachten Sie für jedes n die Maschine $\mathcal{M}_n$, die bei leerer Eingabe so läuft wie $\mathcal{M}$ mit Eingabe n.

Eine Σ_1-*Formel* ist eine Formel, die aus Formeln der Form “$\underline{0} \doteq x$”, “$S(x) \doteq y$”, “$x + y \doteq z$”, “$x \cdot y \doteq z$”, “$x \doteq y$”, “$\neg x \doteq y$”, “$x < y$” und “$\neg x < y$” entsteht durch Anwenden von “$\wedge$”, “$\vee$”, “$\exists x$” und beschränkten Allquantoren “$\forall x < y$”. Dabei bedeutet “$\forall x < y\ \varphi$” gerade “$\forall x(x < y \to \varphi)$”.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jede rekursiv aufzählbare Menge durch eine Σ_1-Formel definierbar ist. Das heißt, dass es für jede rekursiv aufzählbare Menge A eine Σ_1-Formel $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ gibt, so dass für alle $(a_1, \cdots, a_n) \in A^n$ gilt:

$$\mathbb{N} \models \phi(a_1, \cdots, a_n) \Leftrightarrow (a_1, \cdots, a_n) \in A.$$

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(a, b) = \binom{a+b+1}{2} + a$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}^2$ und $\mathbb{N}$ definiert.

Hinweis: F bildet die Paare $(0, c), (1, c-1), \cdots, (c, 0)$ auf die Zahlen $\binom{c+1}{2}, \binom{c+1}{2} + 1, \cdots, \binom{c+1}{2} + c = \binom{c+2}{2} - 1$ ab.

b) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion $(f, g) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ $*$-rekursiv ist.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Funktion $F : (a, b) \to a + b$.

c) Folgern Sie aus a) und b), dass es eine zweistellige $*$-rekursive Funktion $\beta(a, i)$ gibt, für die, mutatis mutandis, Lemma 3.28 aus der Vorlesung gilt.

Abgabe bis Donnerstag, den 20.06, 10:00 Uhr, in Briefkasten 177.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/bboisson/de/L1/