Nun: Kodiere aussagenlog. Fml.

$\rightsquigarrow$ bestimmte Zeichenketten aus $p_0, p_1, \dots$ und $\neg, \wedge$

Erinnerung: Jede aussagenlog. Fml g hat genau eine der folgenden Formen:

(A1): $g = p_i$ für p_i aussagenlog. Variable

(A2): $g = \neg f$ für f aussagenlog. Fml.

(A3) $g = f_1 \wedge f_2$ für f_1, f_2 -"-

Erhalte Kodierung $g \mapsto \ulcorner g \urcorner$ mittels $p_i = \langle i+1, 1 \rangle$ und dann wie zuvor.

Lemma 3.35: Die Menge $TAUT_L$ der Kodierungen von Tautologien (in der Sprache L) ist rek. (sogar: prim rek).

Erinnerung: • g allg. gültig, wenn f.a. aussagenlog. Belegungen μ $\mu(g) = W$ gilt.

• eine Tautologie entsteht durch Ersetzen der Variablen einer allg. aussagenlog. Fml durch L-Fml.

Bew. skizze: Wir müssen zeigen, dass die folgenden Aussagen gelten:

• $FML_p = \{\ulcorner g \urcorner \in \mathbb{N} : g$ ist aussagenlog. Fml$\}$ ist rek.

• Die Fkt. (Wir identifizieren $W \leftrightarrow 1$, $F \leftrightarrow 0$)

$$AUSW.(\mu, \ulcorner g \urcorner) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } g \in FML_p,\ \text{nur } p_0, \dots, p_{n-1} \text{ kommen in } g \text{ vor, } \mu = \langle d_0, \dots, d_{n-1} \rangle \text{ mit } d_i \in \{0,1\} \text{ und } \mu(g) = 1 \\ 0 & \text{"} \qquad \mu(g) = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist rekursiv.

- Die Menge $ALLG_p = \{\ulcorner g \urcorner : g$ ist allg. aussagenlog. Fml.$\}$ ist rekursiv.
- Es gibt eine rek. Fkt. $EINS_L : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit
  $EINS_L(\langle \ulcorner \varphi_0 \urcorner, \dots, \ulcorner \varphi_{n-1} \urcorner \rangle, \ulcorner g \urcorner) = \ulcorner g^{\varphi_0/p_0 \dots \varphi_{n-1}/p_{n-1}} \urcorner$
  falls $g \in FML_p$, $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1} \in Fml_L$ und in g kommen nur die Variablen $p_0, \dots, p_{n-1}$ vor
  [und $EINS_L(\dots, \dots) = 0$ sonst]

$\Rightarrow TAUT_L = \{\ulcorner \varphi \urcorner : \ulcorner \varphi \urcorner \in FML_L \wedge \exists \ulcorner g \urcorner \in FML_p \; lg(\ulcorner g \urcorner) < lg(\ulcorner \varphi \urcorner)$
$\wedge \exists n \leq lg(\ulcorner g \urcorner), \exists \ulcorner \varphi_0 \urcorner, \dots, \ulcorner \varphi_{n-1} \urcorner \in FML_L \wedge$
$\bigwedge_{i=1}^{n-1} lg(\ulcorner \varphi_i \urcorner) < lg(\ulcorner \varphi \urcorner)$
$\wedge \ulcorner \varphi \urcorner = EINS_L(\langle \ulcorner \varphi_0 \urcorner, \dots, \ulcorner \varphi_{n-1} \urcorner \rangle, \ulcorner g \urcorner). \}$ ☒

Ähnlich: Die Mengen

$AxGleichheit = \{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi$ ist ein Axiom der Gleichheit$\}$ (vgl. 1.9)

und $\exists$-$QuantAx = \{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi$ ist ein $\exists$-Quantorenaxiom$\}$ (vgl. 1.10)

sind rekursiv (sogar: prim. rek.).

Zusammenfassend:

Satz 3.36.: Die Menge

$Log.Ax. = \{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi$ L-Fml., φ ist ein log. Axiom$\}$
(d.h. φ erfüllt (1.), (2.) oder (3.) aus der Def. vom Hilbertkalkül)

ist rek. (sogar p.r.)

Kodiere nun endl. Folgen von L-Fml. $(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1})$ durch
$\ulcorner(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1})\urcorner = \langle \ulcorner \varphi_0 \urcorner, \dots, \ulcorner \varphi_{n-1} \urcorner \rangle$

Lemma 3.37: Die Menge

$$BEW_L = \{ (\ulcorner \langle \ulcorner \varphi_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner \varphi_{n-1} \urcorner \rangle \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner) : \varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \text{ ist ein Beweis von } \varphi \text{ im Hilbertkalkül} \}$$

ist rekursiv (sogar p.r.)

Bew: Dekodiere $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi$. Teste, ob alle φ_i L-Fml sind (d.h. gegeben (x,y), teste ob $x = \langle \ulcorner \varphi_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner \varphi_{n-1} \urcorner \rangle$ für $\ulcorner \varphi_i \urcorner \in FML_L$), und für jedes $0 \leq i < n$, ob φ_i ein log. Axiom ist, ~~ob~~ oder ob sich φ_i mittels MP oder $\exists$-Einführung aus $\varphi_0, \ldots, \varphi_{i-1}$ ergibt. und ob $\varphi = \varphi_{n-1}$ gilt $\boxtimes$

Prop. 3.38 Die Menge $\mathcal{U} = \{ \ulcorner \varphi \urcorner : \vdash \varphi \}$ ist r.a.

Bew: Es gilt $n \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists x \, (x,n) \in BEW_L$. $\boxtimes$

~~[illegible]~~ (L weiter endl. Sprache)

Def 3.39: Für eine L-Theorie T setze

$$Thm(T) = \{ \varphi : \varphi \text{ L-Aussage mit } T \vdash \varphi \}.$$

(1.) T heißt rekursiv, falls $\{ \ulcorner \varphi \urcorner : \varphi \in T \}$ rekursiv ist.

(2.) T heißt effektiv axiomatisierbar, falls es T' (eine rekursive L-Theorie) gibt mit $Thm(T') = Thm(T)$

(3.) T heißt entscheidbar, falls $\{ \ulcorner \varphi \urcorner : \varphi \in Thm(T) \}$ rekursiv ist.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Lemma 3.40: Ist T eine rekursive L-Theorie, so ist die Menge

$$BEW_L(T) = \{(\ulcorner(\varphi_0, ..., \varphi_{n-1})\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner) : \varphi_0, ..., \varphi_{n-1} \text{ ist ein Beweis von } \varphi \text{ in } T\}$$

rekursiv

Bew: Wie 3.37. Dekodiere $\varphi_0, ..., \varphi_{n-1}, \varphi$. Teste, ob für $0 \leq i < n$ jedes φ_i log. Axiom oder Axiom von T ist, oder ob es mittels MP oder $\exists$-Einführung aus $\varphi_0, ..., \varphi_{i-1}$ folgt und ob $\varphi_{n-1} = \varphi$ gilt. ☑

Satz 3.41: Wenn T effektiv aufzählbar ist, ist $\{\ulcorner\varphi\urcorner : T \vdash \varphi\}$ rekursiv ~~axiomatisierbar~~ aufzählbar.

Bew: ÜA.

Bem: Umkehrung gilt auch

Def 3.42: Eine widerspruchsfreie L-Theorie heißt vollständig, wenn für jede L-Aussage φ gilt: $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$.

Korollar 3.43: Wenn T effektiv axiomatisierbar und vollständig ist, dann ist T entscheidbar.

Bew: Sei A die Menge aller Gödelnummern von L-Aussagen, $X = \{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi \in Thm(T)\}$.

Nach Annahme ist X rekursiv aufzählbar.

Sei $NEG: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv mit $NEG(\ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\neg\varphi\urcorner$.

Dann gilt

$$X^c = \mathbb{N} \setminus X = \underbrace{\{n : n \notin A\}}_{\text{rekursiv (3.13)}} \cup \underbrace{NEG^{-1}(X)}_{\text{r.a. (3.23 (5.))}}$$

$\Rightarrow X^c$ rek. aufzählbar (3.23)

$\overset{3.27}{\Rightarrow} X$ rekursiv ☑

§4 Arithmetik.

§4.1 Arithmetische Relationen

Def. 4.1 • Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ heißt arithmetisch, wenn sie in der Struktur $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \underbrace{0, S, +, \cdot, <}_{L_{\mathbb{N}}})$ definierbar ist, d.h. ex. eine $L_{\mathbb{N}}$-Fml $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ mit

$$(a_1, \dots, a_n) \in R \iff \mathfrak{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

• Eine Funktion $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ heißt arithmetisch, falls ihr Graph $\Gamma_f = \{(a_1, \dots, a_n, f(\bar{a})) : \bar{a} \in \mathbb{N}^n\} \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ arithmetisch ist.

Lemma 4.2: Alle rekursiv aufzählbaren Relationen sind arithmetisch.

Beweis: Verwende 3.29 (*-rekursive Fkt.), zeige zuerst: alle rekursiven Fkt. sind arithmetisch.

(i) Die Menge der arithmetischen Fkt. enthält die Grundfkt. $S(x), P_i^n, C_0^0, +, \cdot, \chi_<(x,y)$ (klar)

(ii) Die Menge der arithm. Fkt. ist unter (R1) abg.

(iii) Die Menge der arithm. Fkt. ist unter (R3) abg.

$\Rightarrow$ folgt aus ~~A~~ ÜB 10, Aufgabe 3!

Sei nun $R(x_1, \dots, x_n)$ ~~arithmetische Relation~~ r.a.

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ ex. $\tilde{R} \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ rekursiv mit

$$R(x_1, \dots, x_n) \iff \exists y\, \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, y).$$

d.h. die char Fkt $f = \chi_{\tilde{R}} : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ ist arithm.

Sei also $\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_n, y, z) \in \mathbb{N}^{n+2} : \chi_{\tilde{R}}(x_1, \dots, x_n, y) = z\}$ durch $\varphi(x_1, \dots, x_n, y, z)$ definiert. Dann wird R definiert durch $\exists y\, \varphi(x_1, \dots, x_n, y, S(0))$. ☑

Notation: Definiere für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv $L_{\mathbb{N}}$-Terme Δ_n via $\Delta_0 := \underline{0}$, $\Delta_{n+1} := S(\Delta_n)$

Korollar 4.3: Die Theorie der natürlichen Zahlen ist nicht entscheidbar.

Bew: Wäre $Th(\mathfrak{N})$ entscheidbar, dann wären alle arithmetischen Mengen $\{n \in \mathbb{N} : \mathfrak{N} \models \varphi[n]\}$ rekursiv, denn es gilt

$\mathfrak{N} \models \varphi[n]$ gdw. $\mathfrak{N} \models \varphi(\Delta_n)$ gdw. $\varphi(\Delta_n) \in Th(\mathfrak{N})$

und es ex. eine rek. Fkt. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \ulcorner \varphi(\Delta_n) \urcorner$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

Nach 3.26. ex. aber r.a. Teilmenge von $\mathbb{N}$, die nicht rek. ist. ↯ zu 4.2. ☒

Satz 4.4: $Th(\mathfrak{N})$ ist nicht arithmetisch.

(d.h. $\{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi$ $L_{\mathbb{N}}$-Aussage, $\mathfrak{N} \models \varphi\}$ nicht arithm.)

Bew: Wir benutzen das Argument aus 3.26.

Sei dazu $\mathcal{U}(e,n)$ die Relation, die genau dann gilt, wenn $e = \ulcorner \varphi \urcorner$ für eine $L_{\mathbb{N}}$-Fml $\varphi = \varphi(v_0)$ und $\varphi(\Delta_n) \in Th(\mathfrak{N})$.

Wir zeigen: $\mathcal{U}$ ist nicht arithmetisch.

(Menge = Teilmenge von $\mathbb{N}$.)

Dazu: jede arithmetische ~~Relation~~ Menge hat die Form $\{a : \mathcal{U}(e,a)\}$ für ein geeignetes $e \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\neg\mathcal{U}(x,x)$ ist nicht arithmetisch

⌜ Ang. $\neg\mathcal{U}(x,x) \Leftrightarrow \mathcal{U}(e_0,x)$

↯ für $x = e_0$ ⌟

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ ist nicht arithmetisch

Aber: $Th(\mathfrak{N})$ arithm. $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ arithm. (Verwende f aus dem Bew. von 4.3) ↯