Notation: Definiere für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv $L_{\mathbb{N}}$-Terme Δ_n via $\Delta_0 := \underline{0}$, $\Delta_{n+1} := S(\Delta_n)$

Korollar 4.3: Die Theorie der natürlichen Zahlen ist nicht entscheidbar.

Bew: Wäre $Th(\mathfrak{N})$ entscheidbar, dann wären alle arithmetischen Mengen $\{n \in \mathbb{N} : \mathfrak{N} \models \varphi[n]\}$ rekursiv, denn es gilt

$\mathfrak{N} \models \varphi[n]$ gdw. $\mathfrak{N} \models \varphi(\Delta_n)$ gdw. $\varphi(\Delta_n) \in Th(\mathfrak{N})$

und es ex. eine rek. Fkt. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$f(n) = \ulcorner \varphi(\Delta_n) \urcorner$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

Nach 3.26 ex. aber r.a. Teilmenge von $\mathbb{N}$, die nicht rek. ist. $\lightning$ zu 4.2. $\boxtimes$

Satz 4.4: $Th(\mathfrak{N})$ ist nicht arithmetisch.

(d.h. $\{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi$ $L_{\mathbb{N}}$-Aussage, $\mathfrak{N} \models \varphi\}$ nicht arithm.)

Bew: Wir benutzen das Argument aus 3.26.

Sei dazu $\mathcal{U}(e,n)$ die Relation, die genau dann gilt, wenn $e = \ulcorner \varphi \urcorner$ für eine $L_{\mathbb{N}}$-Fml $\varphi = \varphi(v_0)$ und $\varphi(\Delta_n) \in Th(\mathfrak{N})$.

Wir zeigen: $\mathcal{U}$ ist nicht arithmetisch.

(Menge = Teilmenge von $\mathbb{N}^1$.)

Dazu: jede arithmetische ~~Relation~~ Menge hat die Form $\{a : \mathcal{U}(e,a)\}$ für ein geeignetes $e \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \neg\mathcal{U}(x,x)$ ist nicht arithmetisch

$\ulcorner$ Ang. $\neg\mathcal{U}(x,x) \Leftrightarrow \mathcal{U}(e_0, x)$

$\lightning$ für $x = e_0$ $\lrcorner$

$\Rightarrow \mathcal{U}$ ist nicht arithmetisch

Aber: $Th(\mathfrak{N})$ arithm. $\Rightarrow \mathcal{U}$ arithm. (verwende f aus dem Bew. von 4.3) $\boxtimes$

Satz 4.5 (Erster Gödelscher Unvollst.satz):
Sei $T \subseteq Th(\mathcal{N})$ mit $\{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi \in T\}$ arithmetisch.
Dann ist T unvollständig.

Bew: Wenn T arithm. ist, dann auch $BEW_L(T)$ (wie ÜA 13.41)
Dann ist $\{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi \in Thm(T)\}$ auch arithm.
(Projektion von $BEW_L(T)$ auf 2te Koordinate),
d.h. $Thm(T) \neq Th(\mathcal{N})$ [nach 4.4]
Also ex. $L_{\mathbb{N}}$-Aussage φ mit $\varphi \in Th(\mathcal{N}) \setminus Thm(T)$,
insbes. $\varphi, \neg\varphi \notin Thm(T)$
$\Rightarrow$ T ist unvollständig. $\boxtimes$

§4.2 Das System Q

$L_{\mathbb{N}} = \{\underline{0}, S, +, \cdot, <\}$ $\quad \mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}}, S^{\mathbb{N}})$

Wir betrachten das folgende Axiomensystem Q:

Q1: $\forall x \quad x + \underline{0} = x$
Q2: $\forall x,y \quad x + S(y) = S(x+y)$ $\Big\}$ rek. Def. von $+$
Q3: $\forall x \quad x \cdot \underline{0} = \underline{0}$
Q4: $\forall x,y \quad x \cdot S(y) = x \cdot y + x$ $\Big\}$ rek. Def. von $\cdot$
Q5: $\forall x \quad \neg x < \underline{0}$
Q6: $\forall x,y \quad x < S(y) \leftrightarrow (x \doteq y \lor x < y)$ $\Big\}$ rek. Def. von $<$

Def 4.6: Sei φ eine $L_{\mathbb{N}}$-Aussage. Wir sagen φ ist wahr, wenn $\mathcal{N} \models \varphi$ gilt.

Beispiel: Q ist eine wahre $L_{\mathbb{N}}$-Theorie.

Bem 4.7: Q ist eine sehr schwache Theorie.
Etwa gilt $Q \nvdash \forall x \neg S(x) \doteq x$, da das folgende ein Modell von Q ist:
$M = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, alle Symbole mit der üblichen Interpretation auf $\mathbb{N}$, $n <^m \omega$ f.a. $n \in \mathbb{N}$,
$\omega +^m n = n +^m \omega = \omega$ f.a. $n \in \mathbb{N}$
$n \cdot^m \omega = \omega \cdot^m n = \omega$ f.a. $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
$0^m \cdot^m \omega = \omega \cdot^m 0^m = 0^m$
$S^m(\omega) = \omega$.

Erinnerung: Schreibe $\Delta_0 = \underline{0}$, $\Delta_{n+1} = S(\Delta_n)$

Lemma 4.8:
- (Q^*1): Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $Q \vdash \Delta_n + \Delta_m \doteq \Delta_{n+m}$
- (Q^*2): Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $Q \vdash \Delta_n \cdot \Delta_m \doteq \Delta_{nm}$
- (Q^*3): f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt $Q \vdash \forall x\ x < \Delta_n \leftrightarrow (x \doteq \Delta_0 \vee \ldots \vee x \doteq \Delta_{n-1})$

Bew: • Q^*1: Ind. über m. $m = 0$: $Q1$. $m \rightsquigarrow m+1$: $Q2$.
• Q^*2: Ind. über m, benutze $Q3$ & $Q4$.
• Q^*3: Ind. über n, $n = 0$: $Q5$. $n \rightsquigarrow n+1$: I.V. & $Q6$. ☒

Schreibe Q^* für die $L_{\mathbb{N}}$-Theorie, die aus den Axiomenschemata Q^*1, Q^*2 und Q^*3 besteht; wir fassen Q^* als Teiltheorie von Q auf.

Ziel: Zeige 1GUS für Q und Q^*.

Lemma 4.9: Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt:
(i) $a \neq b \Rightarrow Q^* \vdash \neg \Delta_a \doteq \Delta_b$

(ii) $a < b \Rightarrow Q^* \vdash \Delta_a < \Delta_b$

(iii) $a \nless b \Rightarrow Q^* \vdash \neg \Delta_a < \Delta_b$

Bew: (i) per Ind. über b. Sei $b = 0$, $a \neq b$.

$Q^*3 \Rightarrow Q^* \vdash \Delta_0 < \Delta_a \wedge \neg \Delta_a < \Delta_a$

$\Rightarrow Q^* \vdash \neg \Delta_0 \doteq \Delta_a$

$b \rightsquigarrow b+1$: OE $a \neq 0$, sei $a = a'+1$, $b = b'+1$.

Nach I.V. gilt $Q^* \vdash \neg \Delta_{a'} \doteq \Delta_{b'}$

$Q^*1 \Rightarrow Q^* \vdash \neg \Delta_a \doteq \Delta_b$.

(ii) & (iii) Sei $a < b$. $Q^*3 \Rightarrow Q^* \vdash \Delta_a < \Delta_b$

Sei $b \geq a$ $Q^*3 \Rightarrow Q^* \vdash \Delta_a < \Delta_b \leftrightarrow \bigvee_{k<b} \Delta_k \doteq \Delta_a$

Nach (i) gilt aber $Q^* \vdash \neg \Delta_k \doteq \Delta_a$ f.a. $k < b$

$\Rightarrow Q^* \vdash \neg \Delta_a < \Delta_b$. ☑

Lemma 4.10: Alle wahren q.f. $L_{\mathbb{N}}$-Aussagen folgen schon aus Q^*.

[Anschaulich: Terme ohne Var sind nur Produkte & Summen von Δ_n's!]

Bew: Wir zeigen zuerst: Für jeden Term t ohne Variablen gilt $Q^* \vdash t \doteq \Delta_{t^{\mathfrak{N}}}$

t ausgewertet in $\mathfrak{N}$

Bew der Beh: Ind. über den Aufbau von t.

$t = \underline{0}$: klar.

Ang. Beh. für s, t gezeigt. Wir zeigen

$Q^* \vdash S(t) \doteq \Delta_{S(t)^{\mathfrak{N}}}$, $Q^* \vdash t+s \doteq \Delta_{(t+s)^{\mathfrak{N}}}$, $Q^* \vdash t \cdot s \doteq \Delta_{(t \cdot s)^{\mathfrak{N}}}$.

- $Q^* \vdash S(t) \doteq S(\Delta_{t^{\mathfrak{N}}})$ nach I.V. und $S(\Delta_{t^{\mathfrak{N}}}) = \Delta_{t^{\mathfrak{N}}+1} = \Delta_{S(t)^{\mathfrak{N}}}$
- Wg. $Q^* \vdash \Delta_{(s+t)^{\mathfrak{N}}} \doteq \Delta_{s^{\mathfrak{N}} + t^{\mathfrak{N}}}$ und $Q^* \vdash \Delta_{t^{\mathfrak{N}}} + \Delta_{s^{\mathfrak{N}}} \doteq \Delta_{t^{\mathfrak{N}} + s^{\mathfrak{N}}}$ } nach Q^*1

  folgt $Q^* \vdash t+s \doteq \Delta_{(t+s)^{\mathfrak{N}}}$ nach I.V.
- Multiplikation ähnlich.

Nun zeige: Für jede q.f. $L_{\mathbb{N}}$-Aussage φ ohne $\wedge, \neg$ gilt $\mathfrak{N} \models \varphi \Rightarrow Q^* \vdash \varphi$ und $\mathfrak{N} \models \neg\varphi \Rightarrow Q^* \vdash \neg\varphi$

Bew der Beh: φ hat die Form $s < t$ oder $s \doteq t$.

$\varphi = (s < t) \Rightarrow (\mathfrak{N} \models \varphi \overset{4.6.(iii)}{\Longleftrightarrow} Q \vdash \varphi)$

$\mathfrak{N} \models \neg\varphi \overset{4.6.(iii)}{\Longleftrightarrow} Q \vdash \neg\varphi$

$\varphi = (s \doteq t)$ Beh. oben (für $\mathfrak{N} \models \varphi \Rightarrow Q \vdash \varphi$ und $\mathfrak{N} \models \neg\varphi \Rightarrow Q \vdash \neg\varphi$)

ψ q.f. $L_{\mathbb{N}}$-Aussage

I.A.: ψ ist Boolesche Komb. von φ wie oben

$\Rightarrow (\mathfrak{N} \models \psi \Rightarrow Q \vdash \psi)$ $\boxtimes$

Def 4.11: • Eine Σ_1-Fml entsteht aus q.f. $L_{\mathbb{N}}$-Fmln durch Anwenden von $\wedge, \vee, \exists x$ und beschränktem Allquantor $\forall x < t$. Hierbei ist t ein $L_{\mathbb{N}}$-Term und $\forall x < t\ \phi$ steht für $\forall x (x < t \rightarrow \phi)$.

• Eine Σ_1-Fml im engeren Sinne ist eine $L_{\mathbb{N}}$-Fml, die sich aus $\underline{0} \doteq x$, $S(x) \doteq y$, $x + y \doteq z$, $x \cdot y \doteq z$, $x \doteq y$, $\neg x \doteq y$, $x < y$, $\neg x < y$ durch Anwenden von $\wedge, \vee, \exists x, \forall x < y$ erlangen lässt.

Bem 4.12: Jede Σ_1-Fml ~~im engeren Sinne~~ ist zu einer Σ_1-Fml im engeren Sinne äquivalent.

Beweisidee: "Zerlege" Terme mithilfe von $\exists$-Quantoren. Etwa $S(x) + y \doteq S(z)$ ist äquivalent zu

$\exists x_1, z_1 (S(x) \doteq x_1 \wedge S(z) \doteq z_1 \wedge x_1 + y \doteq z_1)$

Satz 4.13: Alle wahren ~~q.f. Fml~~ Σ_1 Aussagen sind in Q^* beweisbar.

Bew: Zeige per Ind. über den Aufbau von ϕ:

F.a. Σ_1-Fml. $\phi(x_0,..,x_n)$ im engeren Sinne und alle $a_0,..,a_n \in \mathbb{N}$ gilt

$\mathfrak{N} \models \phi[a_0,..,a_n] \Rightarrow Q^* \vdash \phi(\Delta_{a_0},..,\Delta_{a_n})$

Für Primfml: Lemma 4.9.

$\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ oder $\phi = \neg \phi_1$: klar.

Sei $\phi = \exists x_n \psi(x_0,..,x_{n-1},x_n)$

$\mathfrak{N} \models \phi[a_0,..,a_{n-1}] \Rightarrow \mathfrak{N} \models \psi[a_0,..,a_n]$ für ein $a_n \in \mathbb{N}$

I.V. $\Rightarrow Q^* \vdash \psi(\Delta_{a_0},..,\Delta_{a_n})$

$\Rightarrow Q^* \vdash \exists x_n \psi(\Delta_{a_0},..,\Delta_{a_{n-1}},x_n)$

Sei $\phi = \forall x_{n+1} < x_n \psi(x_0,..,x_{n-1},x_{n+1})$. Dann gilt

$\mathfrak{N} \models \psi(a_0,..,a_{n-1},\tilde{a}_{n+1})$ f.a. $\tilde{a}_{n+1} < a_n$

$\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow} Q^* \vdash \psi(\Delta_{a_0},..,\Delta_{a_{n-1}},\Delta_{\tilde{a}_{n+1}})$ f.a. $\tilde{a}_{n+1} < a_n$

$Q^*3 \Rightarrow Q^* \vdash \forall x_{n+1} < x_n \; \phi(\Delta_{a_0},..,\Delta_{a_n})$. ☒

Lemma 4.14: Alle rek. Funktionen und alle rek. aufz. Relationen sind mit Σ_1-Fml. def.bar.

Bew: ÜA 3, Blatt 10. ☒

Korollar 4.15: Q ist unentscheidbar. Jede wahre Erw. von Q^* ist unentscheidbar.

Bew: Sei $R(x)$ r.a. und definiert durch die Σ_1-Fml ϕ.

Sei $T \supset Q^*$ wahre Erweiterung.

Dann gilt f.a. $a \in \mathbb{N}$:

$R(a) \Rightarrow \mathfrak{N} \models \phi[a] \Rightarrow Q^* \vdash \phi(\Delta_a) \Rightarrow T \vdash \phi(\Delta_a)$

$\neg R(a) \Rightarrow \mathfrak{N} \not\models \phi[a] \Rightarrow T \nvdash \phi(\Delta_a)$

Ang. T entscheidbar $\Rightarrow$ R rekursiv ↯ zu 3.26. ☒