dann auch $Y := \{(x_1,..,x_k) \in \mathbb{N}^k : (f_1(\bar{x}),.., f_n(\bar{x})) \in A\}$

⌜Bew: $\chi_Y = \chi_A(f_1,..,f_n)$ ⌟

(3.) Die Menge der p.r. TM von $\mathbb{N}^n$ enthält $\emptyset$ und $\mathbb{N}^n$ und ist abg. unter $\cap$, $\cup$ und Komplement.

⌜Bew: $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$, $\chi_{A^c} = 1 \dot{-} \chi_A$ ⌟

(4.) Die Menge $\{(x,y) : x<y\} \subseteq \mathbb{N}^2$ ist p.r.

⌜Bew: $\chi_{x<y} = \chi_{\mathbb{N}\setminus\{0\}}(y \dot{-} x)$ ⌟

(5.) [Definition per Fallunterscheidung]

Sei $\mathbb{N}^n = A_1 \cup ... \cup A_k$ eine Zerlegung von $\mathbb{N}^n$ in p.r. Mengen und $f_1,..,f_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ p.r. Dann ist auch $f(x_1,..,x_n) = f_i(x_1,..,x_n)$ falls $(x_1,..,x_n) \in A_i$ p.r.

⌜Bew: $f = \chi_{A_1} f_1 + ... + \chi_{A_k} f_k$ ⌟

$A_1 = \{(x_1,..,x_n) : x_1 \geq x_2 \wedge ... x_1 \geq x_n\}$

Insbesondere sind $(x_1,..,x_n) \mapsto \max_{1\leq i\leq n} x_i$ und

$(x_1,..,x_n) \mapsto \min_{1\leq i\leq n} x_i$ p.r. ⌟

(6.) [Beschränkte Summen und Produkte]

Wenn $f: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ p.r. ist, dann auch

$$\sum_{t=0}^{y} f(x_1,..,x_n,t) \quad \text{und} \quad \prod_{t=0}^{y} f(x_1,..,x_n,t)$$

⌜Bew: 3.12 & primitive Rekursion) ⌟

(7.) [Beschränkter μ-Operator]

Sei $X \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ prim. rek. Dann ist die Fkt $f: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$

$$f(x_1,..,x_n,z) = \begin{cases} 0 & \text{wenn es kein } t \leq z \text{ gibt mit } (\bar{x},t) \in X \\ t_0 & \text{wenn } t_0 \leq z \text{ min. ist mit } (\bar{x},t_0) \in X \end{cases}$$

auch p.r. Schreibe $f(\bar{x},z) = (\mu t \leq z \ (x_1,..,x_n,t) \in X)$

⌜Bew: $f(\bar{x},0) = 0$

$$f(\bar{x},z+1) = \begin{cases} f(\bar{x},z) & \text{falls } \sum_{t=0}^{z} \chi_X(\bar{x},t) \geq 1 \\ z+1 & \text{falls } \sum_{t=0}^{z} \chi_X(\bar{x},t) = 0 \ \& \ (\bar{x},z+1) \in X \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\leadsto f$ p.r. wegen (5.) ⌟

(8.) [Beschränkte Quantoren]

$X \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ p.r., dann auch

$X_\exists = \{(\bar{x}, z) \in \mathbb{N}^{n+1} : \exists t \leq z \ (\bar{x}, t) \in X\}$

$X_\forall = \{(\bar{x}, z) \in \mathbb{N}^{n+1} : \forall t \leq z \ (\bar{x}, t) \in X\}$.

⌜Bew: nach (3.) genügt z.z. $X_\exists$ p.r.

$$\chi_{X_\exists}(x, z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{t=0}^{z} \chi_X(x, t) \geq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
⌞

Beispiele 3.14.

(1.) $q : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $q(x, y) = \begin{cases} \lfloor x/y \rfloor & \text{falls } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist p.r.

⌜Bew: $q(x, y) = (\mu t \leq x \ (t+1) \cdot y > x)$ ⌟

(2.) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \mid y\}$ ist p.r.

⌜Bew: $x \mid y \Leftrightarrow \exists z \ z/x = y \Leftrightarrow x = q(x, y) \cdot y$ ⌟

(3.) Die Menge aller Primzahlen $\mathbb{P}$ ist p.r.

⌜Bew: $x \in \mathbb{P} \Leftrightarrow x \geq 2 \land \forall y \leq x \ (y \mid x \to (y \doteq 1 \lor y \doteq x))$

p.r. nach 3.3. ⌟

(4.) Sei $\mathbb{P} = \{p_0, p_1, \ldots\}$ mit $p_i < p_{i+1}$ und sei

$\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto p_{n+1}$.

Dann ist π p.r. (ÜA).

(5.) $\alpha_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\alpha_2(x, y) = \frac{1}{2}(x+y+1)(x+y) + x$

ist eine p.r. Bijektion.

Außerdem ex. p.r. $\beta_1^2, \beta_2^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$\alpha_2(\beta_1^2, \beta_2^2) = id_{\mathbb{N}}$

⌜Bew: Erster Teil klar. Es gilt $\alpha_2(x, y) \geq \min(x, y)$

Dann $\beta_1^2(x) = \mu z \leq x \ \exists t \leq x \ \alpha_2(z, t) = x$.

β_2^2 analog
⌞

$\leadsto$ erhalte induktiv für $n \geq 2$ p.r. Bij. $\alpha_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, deren Umkehrfkt. p.r. Komponenten $\beta_1^n, \ldots, \beta_n^n$ hat, nämlich

$$\alpha_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \alpha_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha_2(x_n, x_{n+1}))$$

Lemma 3.15 Sei $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{N}^n$ die Menge aller endl. Folgen von natürlicher Zahlen. Die Abb.

$$\langle . \rangle : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$$

$$\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle \mapsto p_0^{x_0} \cdot \ldots \cdot p_{n-2}^{x_{n-2}} \, p_{n-1}^{x_{n-1}+1} - 1$$

ist eine Bijektion. Es gilt:

(a) Die (zweistellige!) Komponentenfunktion $(x)_i : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$(\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle)_i = \begin{cases} x_i & i < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist p.r.

(b) Die Längenfunktion $lg(x)$, definiert durch

$$lg(\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle) = n \quad \text{ist p.r.}$$

(c) Für alle n ist $\langle . \rangle : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ p.r.

(d) Für alle x gilt $lg(x) \leq x$.

Wenn $x > 0$ ist, ist $(x)_i < x$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Wir nennen $\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle$ die Gödelnummer von $(x_0, \ldots, x_{n-1})$

Bew: Bijektive Abb: Eind. der Primzahlzerlegung.

(c) folgt aus Bsp. 3.14 & Lemma 3.13

(d) klar

(b) Es gilt

$$lg(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \mu y \; \forall z \leq x \, (y \leq z \to \pi(z) \nmid (x+1)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

p.r., da $lg(x)$ (und damit y) nach oben durch x beschränkt ist!

(a) Es gilt

$$(x)_i = \begin{cases} 0 & i \geq lg(x) \\ \mu y \leq x \; (\pi(i)^{y+1} \nmid (x+1)) & \text{falls } i+1 < lg(x) \\ \mu y \leq x \; (\pi(i)^{y+2} \nmid (x+1)) & \text{falls } i+1 = lg(x) \end{cases}$$

$\boxtimes$