- $t = f t_1 \ldots t_n$

$$(t \tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = f^{\mathfrak{A}}((t_1 \tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, (t_n \tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta])$$
$$\overset{\text{I.V.}}{=} f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta \tfrac{b}{x}], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta \tfrac{b}{x}])$$
$$= t^{\mathfrak{A}}[\beta \tfrac{b}{x}]$$

(2.) Vorbemerkung: Wenn x nicht frei in ϕ vorkommt, gilt:

$$\mathfrak{A} \models \phi \tfrac{s}{x}[\beta] \iff \mathfrak{A} \models \phi[\beta] \overset{1.5}{\iff} \mathfrak{A} \models \phi[\beta \tfrac{b}{x}]$$

Nun: Induktion über den Aufbau von ϕ.

(i) $\phi = t_1 \doteq t_2$

$$\mathfrak{A} \models \phi \tfrac{s}{x}[\beta] \overset{\text{Def}}{\iff} \mathfrak{A} \models t_1 \tfrac{s}{x} \doteq t_2 \tfrac{s}{x} [\beta]$$
$$\overset{\text{Def } \mathfrak{A} \models \phi[\beta]}{\iff} (t_1 \tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = (t_2 \tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta]$$
$$\overset{(1.)}{\iff} t_1^{\mathfrak{A}}[\beta \tfrac{b}{x}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\beta \tfrac{b}{x}]$$
$$\iff \mathfrak{A} \models \phi[\beta \tfrac{b}{x}]$$

(ii) Genau wie (i)

(iii) $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$

$$\mathfrak{A} \models \phi \tfrac{s}{x}[\beta] \iff \mathfrak{A} \models (\psi_1 \tfrac{s}{x} \wedge \psi_2 \tfrac{s}{x})[\beta]$$
$$\iff \mathfrak{A} \models \psi_1 \tfrac{s}{x}[\beta] \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi_2 \tfrac{s}{x}[\beta]$$

benutze hier: x frei für s in ψ_1 und ψ_2

$$\overset{\text{I.V.}}{\iff} \mathfrak{A} \models \psi_1[\beta \tfrac{b}{x}] \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi_2 [\beta \tfrac{b}{x}]$$
$$\iff \mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\beta \tfrac{b}{x}]$$

(iv) Wie (iii)

(v) $\phi = \exists y \psi$

Nach Vorbemerkung gilt OE $x \neq y$.

$$\mathfrak{A} \models \phi \tfrac{s}{x}[\beta] \iff \mathfrak{A} \models \exists y\, \psi \tfrac{s}{x}[\beta] \quad \text{wg. } x \neq y$$
$$\overset{\text{Def} \models}{\iff} \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \psi \tfrac{s}{x}[\beta \tfrac{a}{y}]$$
$$\overset{\text{I.V.}}{\iff} \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \psi[\beta \tfrac{a}{y} \tfrac{s^{\mathfrak{A}}[\beta \frac{a}{y}]}{x}]$$
$$\iff \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \psi[\beta \tfrac{a}{y} \tfrac{b}{x}]$$
$$\iff \mathfrak{A} \models \phi[\beta \tfrac{b}{x}] \qquad \boxtimes$$

Bem: x frei für s in ϕ
$\Rightarrow$ y kommt nicht in s vor
$\overset{1.4}{\Rightarrow} s^{\mathfrak{A}}[\beta \tfrac{a}{y}] = s^{\mathfrak{A}}[\beta]$

Bsp: $L_{Grp} = \{e, \circ, ^{-1}\}$

L_{Grp}-Fml $\phi(x) = \forall y\ y \circ y \doteq x$ $\quad$ L_{Grp}-Term $s = y$

$\mathfrak{A}$ L_{Grp}-Struktur, β Belegung

$\mathfrak{A} \models \phi\frac{s}{x}[\beta] \iff \mathfrak{A} \models \forall y\ y \circ y \doteq y$

"alle Elemente sind idempotent" $\quad$ etwa $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\mathfrak{A} \models \phi[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$ $\quad$ $s^{\mathfrak{A}}[\beta] = \beta(y)$

$\iff$ "alle Quadrate sind gleich $\beta(y)$"

etwa: $\mathfrak{A} \models \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\quad \mathfrak{A} \models \forall y\ y \circ y \doteq y$

β Belegung, $\beta(y) = 1$ $\quad \mathfrak{A} \not\models \forall y\ y \circ y \doteq 1$

$\Rightarrow$ d.h. "x frei für s in ϕ" ist notwendig.

§1.3 Allgemeingültige Formeln

Def: Eine L-Fml ϕ heißt allgemeingültig, wenn sie für alle Belegungen β in allen L-Strukturen gilt.

Schreibe dafür $\models \phi$

ϕ L-Aussage, dann ϕ allgemeingültig

$\iff \mathfrak{A} \models \phi$ f.a. L-Strukturen $\mathfrak{A}$.

Bem: $\phi(x_1, \dots, x_n)$ allg.gültig

$\iff$ f.a. $\mathfrak{A}$, $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \dots, a_n]$

$\iff$ f.a. $\mathfrak{A}$ gilt $\mathfrak{A} \models \forall x_1 \dots x_n\ \phi(x_1, \dots, x_n)$

$\iff \underbrace{\forall x_1 \dots x_n\ \phi(x_1, \dots, x_n)}_{\text{Aussage}}$ allgemeingültig

Bsp:
- $\exists x\ (R(x) \wedge S(x)) \to (\exists x\ R(x) \wedge \exists y\ S(y))$ $\quad$ allg.gültig
- $\exists x\ R(x, y) \to (\exists x\ R(x, y) \vee S(z))$

Lemma 1.7: Sei ϕ eine L-Struktur und K eine Sprache mit $K \supseteq L$. Dann ist ϕ als L-Fml allg. gültig gdw. ϕ als K-Fml allg. gültig ist.

Bew: Nach der Bemerkung gilt OE ϕ L-Aussage.

"$\Rightarrow$" Sei $\mathfrak{A} = (A, (z^{\mathfrak{A}})_{z \in K})$ eine K-Struktur, und sei $\mathfrak{A}\upharpoonright_L = (A, (z^{\mathfrak{A}})_{z \in L})$ die Einschränkung von $\mathfrak{A}$ auf L. (d.h. $\mathfrak{A}\upharpoonright_L$ L-Struktur)

Dann gilt $\mathfrak{A} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{A}\upharpoonright_L \models \phi$

D.h.: wenn ϕ in jeder L-Struktur gilt, gilt ϕ auch in jeder K-Struktur.

"$\Leftarrow$" Sei $\mathfrak{B} = (B, (z^{\mathfrak{B}})_{z \in L})$ eine L-Struktur. Expandiere $\mathfrak{B}$ zu einer K-Struktur $\mathfrak{A}$ mit Universum B (geht, da $B \neq \emptyset$).

Nun gilt wieder $\mathfrak{A}\upharpoonright_L = \mathfrak{B}$ und

$\mathfrak{A} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi$. ☑

Bem: ~~xxxxxx~~ Seien ϕ, ψ L-Fml. Betrachte die L-Fmln

$(\phi \vee \neg \phi)$ ("Tertium non datur") und

$(\phi \wedge (\phi \to \psi))$ ("Modus Ponens")

$\leadsto$ beide allgemeingültig: $\mathfrak{A}$ L-Struktur, β Belegung

$\mathfrak{A} \models (\phi \vee \neg \phi)[\beta]$ gdw. $\mathfrak{A} \models \phi[\beta]$ oder $\mathfrak{A} \not\models \phi[\beta]$

d.h. die Gültigkeit von $(\phi \vee \neg \phi)$ ist unabh. von der Gültigkeit von ϕ.

Solche Formeln heißen Tautologien.

$\leadsto$ brauchen Aussagenlogik für präzise Definition.

§ Aussagenlogik

Aussagenlogische Formeln sind Zeichenreihen, die aus den Junktoren $\neg, \wedge$, Hilfszeichen (,) und den aussagenlog. Variablen $p_0, p_1, \ldots$ aufgebaut sind.

Def.: ~~Die~~ Eine aussagenlog. Fml ist eine Zeichenreihe, die nach den folgenden Regeln gebildet wird:

(A1) Jede aussagenlog. Variable ist eine aussag. log. Fml

(A2) Wenn g eine aussagenlog. Fml ist, dann auch $\neg g$

(A3) Wenn g_1, g_2 aussag. log. Fmln sind, dann auch $(g_1 \wedge g_2)$

Def.: Eine aussagenlog. Belegung ist eine Abb.

$$\mu : \{p_0, p_1, p_2, \ldots\} \to \{W, F\}$$

wahr / falsch 'Wahrheitswerte'

Sei g aussagenlog. Fml, μ Belegung. Dann definiere rekursiv

$$\mu(g) = \begin{cases} \mu(p_i) & \text{falls } g = p_i \text{ für Aussagenvar. } p_i \\ \neg\mu(h) & \text{falls } g = \neg h \quad \text{mit } \neg : \{W,F\} \to \{W,F\},\ \neg W = F,\ \neg F = W \\ \mu(g_1) \wedge \mu(g_2) & \text{falls } g = g_1 \wedge g_2 \end{cases}$$

wobei $\wedge : \{W,F\}^2 \to \{W,F\}$ gegeben ist durch

$\wedge$	W	F
W	W	F
F	F	F

'Wahrheitstafel'

Bem: Wahrheitstafel ~~von~~ für $\neg$:

$\neg$	
W	F
F	W

Def.: Eine aussagenlog. Fml g heißt allg. gültig, wenn sie von allen aussagenlog. Belegungen μ den Wahrheitswert $\mu(g) = W$ bekommt.

Bsp: p, q aussagenlog. Variablen
$g = (p \vee \neg p)$ $\qquad$ $h = ((p \wedge (p \to q)) \to q)$
sind allg. gültig, $\quad g' = (p \vee q)$ nicht.

Bem: Verwende $\vee, \to, \leftrightarrow$ wie üblich als Abkürzungen.

Bsp: $\underbrace{\underbrace{(\underset{F}{p} \to \underset{W}{q})}_{W} \to \underbrace{(\underset{W}{q} \to \underset{F}{p})}_{F}}_{F}$ nicht allg. gültig

Wenn wir die Variablen p_i einer aussagenlog. Fml
$g(p_1, \dots, p_n)$ durch L-Fml. ϕ_i ersetzen, erhalten
wir L-Fml $g(\phi_1, \dots, \phi_n)$

Def: Eine Tautologie entsteht aus einer allg. gültigen aussagenlog. Fml. durch Ersetzen der Variablen durch L-Fmln.

Bsp: $\phi \vee \neg \phi$, $\quad ((\phi \wedge (\phi \to \psi)) \to \psi)$

Lemma 1.8: Tautologien sind allg. gültig.
Bew: Sei $g(p_1, \dots, p_n)$ aussagenlog. Fml, $\mathcal{A}$ L-Struktur, $\phi_1, \dots, \phi_n$ L-Fml., β Belegung.
Definiere aussagenlog. Belegung $\mu_\beta : \{p_1, p_2, \dots\} \to \{W, F\}$
mit $\mu(p_i) = \begin{cases} W & \mathcal{A} \models \phi_i[\beta] \\ F & \mathcal{A} \not\models \phi_i[\beta] \end{cases}$ für $1 \leq i \leq n$
Wir zeigen (per Ind. über den Aufbau von g)
$$\mathcal{A} \models g(\phi_1, \dots, \phi_n) \Leftrightarrow \mu_\beta(g) = W.$$

$$\text{Konstruktion}$$

- $g = p_i \qquad \mathcal{A} \models \phi_i[\beta] \overset{\mu_\beta}{\Longleftrightarrow} \mu_\beta(p_i) = W$
- $g = \neg h \qquad \mathcal{A} \models g(\phi_1, \dots, \phi_n)[\beta]$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg h(\phi_1, \dots, \phi_n)[\beta]$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models h(\phi_1, \dots, \phi_n)[\beta]$$
$$\overset{\text{I.V.}}{\Leftrightarrow} \mu_\beta(h) = F$$
$$\Leftrightarrow \mu_\beta(g) = W$$

- $g = g_1 \wedge g_2$ analog $\boxtimes$

Lemma 1.9 (Axiome der Gleichheit) Die folgenden L-Aussagen sind allgemeingültig:

(Reflexivität) $\forall x \; x \doteq x$

(Symmetrie) $\forall x, y \;\; x \doteq y \rightarrow y \doteq x$

(Transitivität) $\forall x, y, z \; ((x \doteq y \wedge y \doteq z) \rightarrow x \doteq z)$

(Kongruenz I) $\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n ((x_1 \doteq y_1 \wedge \dots \wedge x_n \doteq y_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \doteq f(y_1, \dots, y_n))$

für jedes $f \in L$ n-stell. ~~Relzeichen~~ Fkt zeichen

(Kongruenz II): $\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n ((x_1 \doteq y_1 \wedge \dots \wedge x_n \doteq y_n) \rightarrow (Rx_1 \dots x_n \leftrightarrow Ry_1 \dots y_n))$

(R $\in$ L n-stell Relzeichen)

Bew: klar.

Lemma 1.10 ($\exists$-Quantorenaxiome) Sei ϕ L-Fml, t L-Term, x frei für t in ϕ.

Dann ist $\phi \frac{t}{x} \rightarrow \exists x \phi$ allg. gültig.

Bew: Sei $\mathcal{A}$ L-Struktur, β Belegung.

$$\mathcal{A} \models \phi \frac{t}{x}[\beta] \overset{1.6}{\Rightarrow} \mathcal{A} \models \phi[\beta \frac{t^{\mathcal{A}}[\beta]}{x}]$$
$$\Rightarrow \mathcal{A} \models \exists x \, \phi[\beta]. \qquad \boxtimes$$

Bsp dafür, dass "x frei für t" notwendig ist auf Blatt 2.