§3.4. Rekursiv aufzählbare Mengen.

Erinnerung: $R \subseteq \mathbb{N}^n$ rekursiv $\Leftrightarrow$ $\chi_R : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekursiv

mit $\chi_R(x_1,..,x_n) = \begin{cases} 0 & (x_1,..,x_n) \notin R \\ 1 & (x_1,..,x_n) \in R \end{cases}$

Bem: $\{A \subseteq \mathbb{N}^n : A \text{ rekursiv}\}$ ist abzählbar, da $\{f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} : f \text{ rekursiv}\}$ abz. ist.

[Bew: $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekursiv $\overset{3.19}{\Rightarrow}$ ex. TM, die f berechnet.
\# TM abz., da wir TM eindeutig mittels natürlicher Zahlen kodiert haben (3.16) ⌋

Folgerung 3.20: "Die meisten" Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind nicht rekursiv.

Bew: $|2^\omega| > |\omega|$. ☒

Beispiel 3.21: Sei A die Menge mit $x \in A$ $\Leftrightarrow$: Riemannsche Vermutung gilt.
Dann ist A rekursiv.
(Wenn RV gilt, ist $A = \mathbb{N}$. Wenn RV nicht gilt, ist $A = \emptyset$. In beiden Fällen ist A rekursiv).

⇝ Wie finden wir nicht-rekursive TM von $\mathbb{N}$?

Def. 3.22. Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ heißt rekursiv aufzählbar (r.a.), wenn für eine rekursive Relation $\tilde{R} \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$ gilt:

$$R(x_0,..,x_n) \Leftrightarrow \exists y\, \tilde{R}(x_0,..,x_n,y)$$

[schreibe $R(x_0,..,x_n)$ für $(x_0,..,x_n) \in R$]

Bem: Jede rekursive Relation ist rek. aufz.

Lemma 3.23: Wenn $P, R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ r.a. sind, dann auch

(1.) $P \cup R$

(2.) $P \cap R$

(3.) $\exists z \; R(x_0, \dots, x_{n-1}, z)$

(4.) $T(x_0, \dots, x_n, w) \Leftrightarrow \forall z < w \quad R(x_0, \dots, x_n, z)$

(5.) für $f_0, \dots, f_n : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekursiv

$R(f_0(x_0, \dots, x_k), \dots, f_n(x_0, \dots, x_k))$

Bew: Seien $\tilde{P}, \tilde{R} \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$ rekursiv mit

$P(x_0, \dots, x_n) \Leftrightarrow \exists y \; \tilde{P}(x_0, \dots, x_n, y)$ und

$R(x_0, \dots, x_n) \Leftrightarrow \exists y \; \tilde{R}(x_0, \dots, x_n, y)$. Schreibe $\bar{x}$ für $(x_1, \dots, x_n)$.

(1.) $P(\bar{x}) \vee R(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists y \; (\tilde{P}(\bar{x}, y) \vee \tilde{R}(\bar{x}, y))$

(2.) $P(\bar{x}) \wedge R(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists y \; (\tilde{P}(\bar{x}, \beta_1^2(y)) \wedge \tilde{R}(\bar{x}, \beta_2^2(y)))$

[also $y = \alpha_2(y_1, y_2)$]

(3.) $\exists z \; R(\bar{x}, z) \Leftrightarrow \exists y \; \tilde{R}(x_0, \dots, x_{n-1}, \beta_1^2(y), \beta_2^2(y))$

(4.) $T(\bar{x}, w) \Leftrightarrow \exists s \; \forall z < w \; \tilde{R}(\bar{x}, (s)_z)$

z-te komp. fkt. aus Lemma 3.15

$s = \langle s_0, \dots, s_m \rangle \qquad (s)_z = \begin{cases} s_i & z \leq m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(5.) $R(f_0(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x})) \Leftrightarrow \exists y \; \tilde{R}(f_0(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x}), y)$ ☒

Lemma 3.24 Sei $R \subseteq \mathbb{N}$. Dann ist R r.a. gdw. $R = \emptyset$ oder es eine rek. Fkt. f gibt mit $f[\mathbb{N}] = R$.

Bew: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rek $\Rightarrow R = f[\mathbb{N}]$ r.a., da

$R(x) \Leftrightarrow \exists y \; f(y) = x$ gilt.

Sei umgekehrt R r.a., $\tilde{R}$ rek. mit

$R(x) \Leftrightarrow \exists y \; \tilde{R}(x, y)$ und $r \in R$.

Dann ist R das Bild von $f(x) = \begin{cases} \beta_1^2(x) & \text{wenn } \tilde{R}(\beta_1^2(x), \beta_2^2(x)) \text{ gilt} \\ r & \text{sonst.} \end{cases}$

Die leere Menge ist natürlich r.a.

☒

Satz 3.25: Es gibt eine universelle r.a. Relation $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{N}^2$, d.h. $\mathcal{U}$ ist r.a. und jede r.a. Menge $R \subseteq \mathbb{N}$ hat die Form $R(x) \iff \mathcal{U}(e,x)$ für ein geeignetes $e \in \mathbb{N}$.

__Bew:__ Sei $\tilde{R}(x,y)$ rekursiv und $\mathcal{M}$ eine TM, die versucht $\mu y\ \chi_R(x,y) = 0$ zu berechnen.

$\mathcal{M}$ stoppt genau dann bei Input x, wenn $\exists y\ \hat{R}(x,y)$ gilt.

Es gilt also $\exists y\ \tilde{R}(x,y) \iff \exists t\ (\ulcorner \mathcal{M} \urcorner, t, x) \in B^1$

Die rek. aufz. Relation

$$\mathcal{U}(x,e) \iff \exists t\ (\ulcorner \mathcal{M} \urcorner, t, x) \in B^1$$

ist also universell $\boxtimes$

Korollar 3.26: Es gibt eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, die nicht rekursiv aber r.a. ist.

__Bew:__ Zeige zunächst: $\neg \mathcal{U}(x,x)$ ist nicht r.a.

Ang. $\neg\mathcal{U}(x,x)$ r.a., d.h. es ex. $e \in \mathbb{N}$ mit

$\neg\mathcal{U}(x,x) \iff \mathcal{U}(x,e)$ $\quad ↯$ für $x = e$!

$\Rightarrow \mathcal{U}(x,x)$ ist nicht rekursiv (3.13), aber r.a. $\boxtimes$

Lemma 3.27: R rekursiv $\iff$ R und $\neg R$ r.a.

__Bew:__ "$\Rightarrow$" klar

"$\Leftarrow$" Sei $R(x) \iff \exists y\ \tilde{R}(x,y)$ und

$\neg R(x) \iff \exists y\ T(x,y)$

Dann gilt $f(x) = \mu y (\tilde{R}(x,y) \vee T(x,y))$ ist rek.

und ~~Reeig~~ $R(x) \iff \tilde{R}(x, f(x))$. $\boxtimes$

§3.5 Ein anderer Aufbau der rek. Funktionen
("Leben ohne primitive Rekursion")

Def. 3.28: ~~A~~ Eine Funktion $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ heißt $*$-rekursiv, wenn sie sich aus den Grundfkt. $S(x)$, I_i^n, C_0^0, $+$, $\cdot$, $\chi_<(x,y)$ durch Anwenden der Regeln R1 (Einsetzung) und R3 (μ-Rekursion) gewinnen lässt.

Satz 3.29: Eine Fkt. $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ist genau dann $*$-rekursiv, wenn sie rekursiv ist.

Lemma 3.30:
(1.) $x \dot{-} y$ ist $*$-rekursiv.
(2.) Die Klasse der $*$-rekursiven ~~Fkt.~~ Mengen ist abg. unter Booleschen Komb. $(\wedge, \vee, \neg)$ und unter beschränkter Quantifizierung (siehe 3.13 (8.))
(3.) $x = y$ ist $*$-rekursiv
(4.) $x \equiv y \pmod 2$ ist $*$-rekursiv
(5.) Die Klasse der $*$-rek. Fkt. ist abg. unter Def. durch Fallunterscheidung (siehe 3.13 (5.))

<u>Bew:</u>
(1.) $x \dot{-} y = \max(0, x-y) = \mu z\,(x < (y+z)+1)$
(2.) Abg. unter $\cap, \cup, \neg$ wie in 3.13 (3.)
Sei $P(x,y)$ $*$-rekursiv. Definiere
$$g(x,z) = \mu y\,(P(x,y) \vee y = z)$$
Dann ist $\exists y < z\; P(x,y) \Leftrightarrow g(x,z) < z$.
(3.) $x = y \Leftrightarrow (\neg x < y \wedge \neg y < x)$
(4.) $x \equiv y \pmod 2 \Leftrightarrow \exists w < (x+y+1)\,(x = y + w2 \vee y = x + w2)$
(5.) Wie im Beweis von 3.13 (5) $\boxtimes$