Def: Eine L-Theorie T ist eine Menge von L-Aussagen.
Eine L-Theorie heißt widerspruchsfrei oder konsistent, wenn es keine Aussagen $\phi_1, \ldots, \phi_n \in T$ gibt, die sich widersprechen, d.h. $\underbrace{\vdash_L \neg(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)}_{\phi_1, \ldots, \phi_n \text{ widersprechen sich}}$.

Bem:
- Ob sich $\phi_1, \ldots, \phi_n$ widersprechen, kommt nicht auf die Reihenfolge der ϕ_i an (verwende 1.14.(1)).
- ϕ ist nicht beweisbar $\Leftrightarrow$ $\{\neg\phi\}$ ist widerspruchsfrei

[Bew: $\underbrace{\vdash_L \phi}_{\phi \text{ beweisbar}} \Rightarrow \underbrace{\vdash_L \neg\neg\phi}_{\neg\phi \text{ widersprüchlich}}$, $\vdash_L \neg(\neg\phi \wedge \ldots \wedge \neg\phi) \Rightarrow \vdash_L \phi$]

Def: Sei T eine L-Theorie. Ein Modell von T ist eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \phi$ f.a. $\phi \in T$.

Satz 1.16: Eine L-Theorie T hat genau dann ein Modell, wenn sie widerspruchsfrei ist.

Folgerungen:
- T widerspruchsfreie L-Theorie, $K \supseteq L$ Spracherweitung, dann T widerspruchsfreie K-Theorie.
- Aus Satz 1.16 folgt Satz 1.13 (später).

Beweis von 1.16: Wenn eine Theorie ein Modell hat, ist sie widerspruchsfrei.
Sei also T eine widerspruchsfreie L-Theorie.
Wir konstruieren ein Modell von T. Zunächst:
Erweitere T zu einer Henkintheorie.

L Sprache, C Menge neuer Konstanten

Def.: · Eine $L \cup C$-Theorie T^+ heißt Henkintheorie mit Konstantenmenge C, wenn es zu jeder $L \cup C$-Fml $\phi(x)$ eine Konstante $c \in C$ gibt mit

$$(\exists x\, \phi(x) \to \phi(c)) \in T^+$$

· Eine K-Theorie T^* ist vollständig, wenn sie widerspruchsfrei ist und wenn

$$\phi \in T^* \quad \text{oder} \quad \neg\phi \in T^*$$

für jede K-Aussage ϕ gilt.

Beispiel: Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, sei C Menge neuer Konstanten mit $|C| = |A|$ und s.d.
~~[illegible]~~ $A = \{a_c : c \in C\}$ gilt (indiziere A mit den Elementen aus C)
Betrachte die $L \cup C$-Struktur $\mathfrak{A}^* = (\mathfrak{A}, a_c)_{c \in C}$.
Sei nun $T^* = \{\phi\ L \cup C\text{-Aussage} : \mathfrak{A}^* \models \phi\}$. ↑vollst. Diagramm von $\mathfrak{A}$'
Dann ist T^* eine vollständige Henkintheorie.

Schritt 1 (Beweis von 1.16): Zeige: T ist in einer widerspruchsfreien Henkintheorie T^* enthalten.

Bew von Schritt 1: Sei $\phi(x)$ eine L-Fml, c eine neue Konstante.

Beh: Dann ist $T \cup \{(\exists x\, \phi(x) \to \phi(c))\}$ widerspruchsfrei.

Bew der Beh: Sei ψ L-Aussage mit

$$\vdash_{L \cup \{c\}} \neg(\psi \wedge (\exists x\, \phi(x) \to \phi(c)))$$

Aussagenlogik ($(\neg(p \wedge (q_1 \to q_2)) \to (\neg q_1 \to \neg p)$ ist allg. gültig)

$$\Rightarrow \vdash_{L \cup \{c\}} \neg \exists x\, \phi(x) \to \neg\psi$$

und $\vdash_{L \cup \{c\}} \phi(c) \to \neg\psi$ Allg. gültig: $(\neg(p \wedge (q_1 \to q_2)) \to (q_2 \to \neg p))$

$$1.15 \Rightarrow \vdash_L \neg\exists x\, \phi(x) \to \neg\psi$$

$$\text{und } \underbrace{\vdash_L \phi(x) \to \neg\psi.}_{\exists\text{-Einführung}}$$

$$\Rightarrow \vdash_L \exists x\, \phi(x) \to \neg\psi$$

Betrachte $(\neg p_1 \to q)$

Aussagenlogik $\Rightarrow \vdash_L \neg\psi$ $\quad ((p_1 \to q) \wedge (\neg p_1 \to q) \to q)$

Insgesamt: Wenn T widerspruchsfrei ist, ex. keine $\psi_1, \dots, \psi_n \in T$ mit $\vdash_{L \cup \{c\}} \neg(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \wedge (\exists x \phi(x) \to \phi(c)))$

$\boxtimes$ Beh.

Induktiv folgt aus der Beh.:
Für jede L-Fml $\phi(x)$ können wir neue Konstante c_ϕ einführen, s.d.

$T_1 = T \cup \{\exists x \phi(x) \to \phi(c_\phi) : \phi(x)\ L\text{-Fml}\}$

widerspruchsfrei ist (als $L \cup C_1$-Theorie, mit $C_1 = \{c_\phi : \phi(x)\ L\text{-Fml}\}$).

Wiederhole nun für alle $L \cup C_1$-Fmln und erhalte $L \cup C_1 \cup C_2$-Theorie T_2.

Nun ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i =: T^+$ eine widerspruchsfreie Henkintheorie mit Konstantenmenge $C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ $\boxtimes$

Schritt 2 (im Beweis von 1.16) Zeige: Jede widerspruchsfreie K-Theorie T^+ lässt sich zu einer vollständigen K-Theorie T^* erweitern.

Bew von Schritt 2:

Sei ϕ eine K-Aussage. Ang. weder $T^+ \cup \{\phi\}$ noch $T^+ \cup \{\neg\phi\}$ sind widerspruchsfrei. Dann gibt es Aussagen $\psi_1, \dots, \psi_n$ und $\chi_1, \dots, \chi_m$ aus T^+, s.d. gilt:

$\vdash_K \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \to \phi$ und $\vdash_K \chi_1 \wedge \dots \wedge \chi_m \to \neg\phi$

Aussagenlogik $\Rightarrow \vdash_K \neg(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \wedge \chi_1 \wedge \dots \wedge \chi_m)$, d.h. T^+ ist nicht widerspruchsfrei ↯

Also: Für alle K-Aussagen ϕ ist $T^+ \cup \{\phi\}$ oder $T^+ \cup \{\neg\phi\}$ widerspruchsfrei.

Wenn K höchstens abzählbar ist, lässt sich T^*

leicht gewinnen: zähle die Menge aller K-Aussagen als $\phi_0, \phi_1, \ldots$ auf und nehme der Reihe nach jeweils ϕ_i oder $\neg\phi_i$ zur Theorie hinzu.

- Falls K überabz. ist:
  Verwende <u>Zorns Lemma</u> (wird aus ZFC folgen!)
  Sei $(A, <)$ eine partielle Ordnung, in der jede linear geordnete Teilmenge K eine obere Schranke s besitzt. Dann hat A ein maximales Element.
  Sei ~~[illegible]~~ $(T_i)_{i \in I}$ eine Kette von widerspruchsfreien K-Theorien, dann ist $\bigcup_{i \in I} T_i$ eine widerspruchsfreie K-Theorie.
  Zorn $\Rightarrow$ ex. maximale widerspruchsfreie K-Theorie T^* mit $T^* \supseteq T^+$
  T^* maximal widerspruchsfrei $\Rightarrow$ $(T^* \cup \{\phi\}$ kons. $\Leftrightarrow$ $\phi \in T^*)$
  also ist T^* vollständig. $\boxtimes$

Def: · Sei T eine L-Theorie. Schreibe $T \vdash_L \phi$, wenn es $\psi_1, \ldots, \psi_n \in T$ gibt mit $\vdash_L (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \phi$.
· T heißt deduktiv abgeschlossen, wenn f.a. L-Aussagen ϕ gilt $T \vdash_L \phi \Leftrightarrow \phi \in T$.

Bem: Jede vollst. Theorie ist deduktiv abgeschlossen.

Schritt 3 (im Beweis von 1.16): Jede vollständige Henkintheorie T^* hat ein Modell aus Konstanten, das heißt ein Modell $\mathfrak{A}^* = (A, a_c)_{c \in C}$ mit $A = \{a_c : c \in C\}$. $\mathfrak{A}^*$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.