Prof. F. Jahnke
B. Boissonneau

Universität Münster
Sommersemester 2019

Logik I
Übungsblatt 2

Wir sagen dass eine Menge von Junktoren ein *vollständiges Junktorensystem* ist wenn sich jede Funktion $F : [W, F]^n \to \{W, F\}$ durch eine aussagenlogische Formel $f(p_1, \cdots, p_n)$ darstellen lässt, also dass $F(\mu(p_1), \cdots, \mu(p_n)) = \mu(f)$ für alle Belegungen $\mu : \{p_1, \cdots, p_n\} \to \{W, F\}$.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass der Sheffer'sche Strich $(f|g) := \neg(f \wedge g)$ ein vollständiges Junktorensystem bildet.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, die ein 1-stellige Relationsymbol P, ein 2-stellige Relationsymbol R und ein 2-stellige Funktionsymbol f enthält.

Sind die folgenden $\mathcal{L}$-Formeln allgemeingültig? Sind sie Tautologien?

a) $(\forall x\, Rxy \to (\exists z\, Pz \to Px)) \leftrightarrow ((\forall x\, Rxy \wedge \exists z Pz) \to Px)$

b) $(\exists x \forall y\, Rxy \to \forall y \exists x\, Rxy)$

c) $(\forall z\, Rzfxz \to \exists x \forall z\, Rzx)$

Warum widerspricht das Ergebnis aus *c)* nicht dem $\exists$-Quantorenaxiom, das Sie in der Vorlesung kennengelernt haben?

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, dann sagt man, dass eine $\mathcal{L}$-Formel *quantorenfrei* ist wenn weder $\exists$ noch $\forall$ in ihr vorkommen.

Wir sagen, dass eine $\mathcal{L}$-Formel φ *universell* ist wenn sie von der Form $\forall v_0 \cdots \forall v_n \psi$ ist, wobei ψ eine quantorenfreie Formel ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine Substruktur.

Zeigen Sie, dass für jede B-Belegung β und jede universelle Formel φ gilt, dass wenn $\mathcal{A} \vDash \varphi[\beta]$ stimmt, auch $\mathcal{B} \vDash \varphi[\beta]$ gelten muss.

Es sei $M := \{p_0, p_1, \cdots\}$ eine Menge von Aussagenvariablen. Wir schreiben $\varphi(p_0, p_1, \cdots, p_n)$ für eine aussagenlogische Formel die nur $p_0, \cdots, p_n$ enthält.

Einen aussagenlogische Formel hat *konjunktive Normalform (KNF)*, wenn gilt:

$$\varphi = (\varphi_{0,0} \vee \cdots \vee \varphi_{0,k_0}) \wedge \cdots \wedge (\varphi_{l,0} \vee \cdots \vee \varphi_{l,k_l})$$

für $\varphi_{r,s} \in \{p_i, \neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Analog hat eine aussagenlogische Formel φ *disjunktive Normalform (DNF)*, wenn gilt

$$\varphi = (\varphi_{0,0} \wedge \cdots \wedge \varphi_{0,k_0}) \vee \cdots \vee (\varphi_{l,0} \wedge \cdots \wedge \varphi_{l,k_l})$$

für $\varphi_{r,s} \in \{p_i, \neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ sind *logisch äquivalent*, kurz $\varphi \sim \psi$, wenn sie unter gleichen Belegungen wahr werden.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Zu jeder aussagenlogischen Formel $\varphi(p_0, \cdots, p_n)$ existieren Formeln φ_{DNF} und φ_{KNF} in DNF bzw. KNF so dass gilt:

$$\varphi \sim \varphi_{DNF} \sim \varphi_{KNF}$$

Abgabe bis Donnerstag, den 18.04, 10:00 Uhr, in Briefkasten 177.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/bboisson/de/L1/