Lemma 3.31 (Gödels β-Funktion) Es gibt eine $*$-rekursive Fkt $\beta(a,b,i)$ mit folgender Eigenschaft: Für jede endl. Folge $c_0,\dots,c_{n-1}$ gibt es a und b s.d. $\beta(a,b,i) = c_i$ für $i=0,\dots,n-1$ gilt.

Bew: Betrachte die $*$-rekursive Fkt

$$\beta(a,b,i) = \mu z \quad z \equiv a \pmod{b(i+1)+1}$$

Seien $c_0,\dots,c_{n-1}$ gegeben. Wähle $b\in\mathbb{Z}$ mit $n! \mid b$ und $b > c_i$ f.a. $i=0,\dots,n-1$.

Beh: $b\cdot 1+1,\dots, b\cdot n+1$ sind paarweise teilerfremd.

Bew der Beh: Sei p prim mit $p \mid bi+1$ $\Rightarrow p \nmid b$. Ang. $p \mid (bj+1)$ für ein $j>i$. (mit $0< i,j \leq n$)

$\Rightarrow p \mid b(j-i) \Rightarrow p \mid (j-i)$ $\lightning$ zu $(j-i) \mid b$. $\boxtimes_{\text{Beh.}}$

Sei a eine gemeinsame Lsg. der Kongruenzen

$$a \equiv c_0 \pmod{b\cdot 1+1}$$
$$\vdots$$
$$a \equiv c_{n-1} \pmod{b\cdot n+1}$$

$\Rightarrow$ existiert nach dem chin. Restsatz.

Wg. $c_i < b(i+1)+1$ ist c_i die kleinste natürliche Zahl, die zu a kongruent modulo $b(i+1)+1$ ist. $\boxtimes$

Bew. von Satz 3.29.:

Klar: $*$-rekursive Fkt. sind rekursiv.

z.z.: $*$-rekursive Fkt. sind abg. unter prim. Rek. (R2), d.h. für g,h $*$-rek. und f gegeben durch

$$f(\bar{x},0) = g(\bar{x}), \qquad f(\bar{x},y+1) = h(\bar{x},y,f(\bar{x},y))$$

ist f auch $*$-rekursiv.

Wir betrachten die $*$-rek. Relation

$$R(x, y, a, b) \Leftrightarrow [\beta(a,b,0) = g(\bar{x}) \wedge \forall i<y \; \beta(a,b,i+1) = h(\bar{x}, i, \beta(a,b,i))]$$

Es gilt $\forall \bar{x}, y \; \exists a, b \; R(\bar{x}, y, a, b)$ nach 3.30

Also ist

$$s(\bar{x}, y) = \mu s \; \exists a, b \leq s \; R(\bar{x}, y, a, b)$$

$*$-rekursiv. Dann ist

$$f(\bar{x}, y) = \mu z \; \exists a, b \leq s(\bar{x}, y) \; (R(\bar{x}, y, a, b) \wedge z = \beta(a,b,y))$$

ebenfalls $*$-rekursiv. $\boxtimes$

§3.6 Gödelnummern von Formeln.

Sei $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ eine endl. Sprache.

Wir ordnen den Zeichen, die in L-Fml vorkommen, Gödelnummern zu (d.h. inj. Abb. Zeichen $\to \mathbb{N}$)

Ziel: φ L-Fml $\leadsto$ $\ulcorner \varphi \urcorner$ Gödelnummer

$\{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi$ L-Fml., $\vdash \varphi\}$ ist r.a.

Zuordnung:

$\ulcorner \doteq \urcorner = \langle 0,0 \rangle$ $\qquad$ $\ulcorner v_0 \urcorner = \langle 1,0 \rangle$

$\ulcorner \wedge \urcorner = \langle 0,1 \rangle$ $\qquad$ $\ulcorner v_1 \urcorner = \langle 2,0 \rangle$

$\ulcorner \neg \urcorner = \langle 0,2 \rangle$ $\qquad$ $\vdots$

$\ulcorner (\urcorner = \langle 0,3 \rangle$ $\qquad$ $\ulcorner v_i \urcorner = \langle i+1,0 \rangle$

$\ulcorner) \urcorner = \langle 0,4 \rangle$ $\qquad$ für $i \in \mathbb{N}$.

$\ulcorner \exists \urcorner = \langle 0,5 \rangle$

$\ulcorner \lambda_1 \urcorner = \langle 0,6 \rangle$

$\vdots$

$\ulcorner \lambda_n \urcorner = \langle 0,5+n \rangle$

Sei nun $\phi = \zeta_1 \dots \zeta_m$ eine Zeichenreihe aus den obigen Symbolen. Setze $\ulcorner \phi \urcorner = \langle \ulcorner \zeta_1 \urcorner, \dots, \ulcorner \zeta_m \urcorner \rangle$.

Lemma 3.32: Die folgenden Mengen sind rekursiv [sogar p.r., aber das benötigen wir nicht in dieser VL]

1. $TERM_L = \{\ulcorner t \urcorner : t$ L-Term$\}$
2. $FML_L = \{\ulcorner \phi \urcorner : \phi$ L-Fml$\}$.

Bew: Möglichkeit 1: Churchsche These

$\leadsto$ beide Mengen offensichtlich intuitiv berechenbar

Möglichkeit 2: Explizit, per prim. Rek.

Wir zeigen nur 1. explizit (2. ähnlich).

Erinnerung (1.1) Für L-Terme tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein:

(a) t ist eine Variable

(b) t ist eine Konstante

(c) $t = f t_1 \ldots t_n$ mit $f \in L$ n-stell. Fkt.zeichen und $t_1, \ldots, t_n$ L-Terme

Hierbei sind f und $t_1, \ldots, t_n$ eind. bestimmt.

Zum Beweis:

Wir zeigen per prim. Rek.: Die zweistellige Rel.

$$\tau(x,n) = \{(x,n) : x = \ulcorner t \urcorner \text{ L-Term}, \ lg(\ulcorner t \urcorner) \leq n\}$$

ist p.r.

Charakteristische Fkt. für $n=1$:

$KON_L = \{\ulcorner \lambda \urcorner : \lambda \in L \text{ Konst.symbol}\}$ ist p.r. da endl.

$VAR_L = \{x \in \mathbb{N} : \exists\, i < x : x = \langle i, 0 \rangle\}$ ist p.r.

⌜da $\langle .,. \rangle : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ p.r. und $(x)_1$ p.r. und $(x)_1 < x$ für $x \neq 0$ gilt⌝

$\Rightarrow$ $\tau(x,1) = KON_L \cup VAR_L$

Für $n \rightsquigarrow n+1$ per prim. Rek:

Betrachte für $m \in \mathbb{N}$ $FUN(x,m) = \{(\ulcorner f \urcorner, m) : f \in L \text{ m-stell. Fkt.symb.}\}$

$\Rightarrow$ p.r., da L endl.

Nun gilt

$$\chi_{\tau(x,n+1)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_{\tau(x,n)} = 1 \text{ oder } lg(x) = n+1 \\ & \text{und } \exists\, m \leq n,\ \exists\, 1 \leq i_1 < \ldots < i_m = n \text{ mit} \\ & \chi_{\tau(\langle x_1, \ldots, x_{i_1} \rangle, n)} = 1 \wedge \ldots \\ & \wedge\ \chi_{\tau(\langle x_{i_{m-1}+1}, \ldots, x_n \rangle, n)} = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also $x \in TERM_L \Leftrightarrow \exists\, m \leq lg(x) : x \in \tau(x,m)$ ☒

Lemma 3.33: Die folgenden Mengen sind rekursiv (sogar prim. rek.):

(1.) $\{(\ulcorner t \urcorner, n) : t$ ist L-Term, v_n kommt in t nicht vor$\}$

$\{(\ulcorner t \urcorner, n) : t$ ist L-Term, v_n kommt in t vor$\}$

(2.) $\{(\ulcorner \varphi \urcorner, n) : \varphi$ ist L-Fml, v_n kommt in φ vor$\}$

und genauso für: "v_n kommt in φ nicht vor"
"v_n kommt mind. 1x frei vor"
"kommt nicht frei vor"
"kommt mind. 1x gebunden vor"
"kommt nicht vor"

(3.) $\{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi$ ist L-Aussage$\}$.

Bew: Wahlweise Church'sche These oder per Hand.

zu (1.): zeige $Var_{\neq n} = \{(x,n) : x \in VAR_L \wedge x \neq \ulcorner v_n \urcorner\}$
$= \{(x,n) : \exists i < x \;\; x = \langle i, 0 \rangle \wedge x \neq \langle n, 0 \rangle\}$ ist p.r.

[...] ☑

Erinnerung: x Variable, s, t L-Terme, ϕ L-Fml.

$t \frac{s}{x}$ ⇝ ersetze alle Vorkommen von x durch s

$\phi \frac{s}{x}$ ⇝ ersetze alle freien Vorkommen von x durch s.

Lemma 3.34: Es gibt rek. (sogar prim. rek.) Fkt. $Subst_T$ und $Subst_F : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, s.d. f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Wenn t, s L-Terme, ϕ L-Fml., dann

$Subst_T(n, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner t \urcorner) = \ulcorner t \frac{s}{v_n} \urcorner$

$Subst_F(n, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner \phi \urcorner) = \ulcorner \phi \frac{s}{v_n} \urcorner$.

Bew: Church'sche These oder mühselig per Hand ☑