Bew (1.) zeige für $n, m \in \omega$ (per Ind. über n)

$n \sim m \Rightarrow n = m$.

$n = 0$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$: Ang. $f: n+1 \to m'$ Bijektion, etwa $m' = m+1$ (da $n+1 \neq \emptyset$ ist $m' \neq \emptyset$).

Falls $f(n) = m$, ist $f\restriction_n : n \to m$ Bijektion

$\overset{I.V.}{\Rightarrow} n = m \Rightarrow n+1 = m+1$.

Falls $f(x) = m$ für ein $x < n$, ist

$$g(z) = \begin{cases} f(n) & \text{für } z = x \\ f(z) & \text{sonst} \end{cases} \quad g: n \to m$$

Bijektion $\overset{I.V.}{\Rightarrow} n = m \Rightarrow n+1 = m+1$.

(2.) $n \preceq \omega$ f.a. $n \in \omega$

$\Rightarrow |n| \leq |\omega|$ f.a. $n \in \omega$

$n < n+1 = |n+1| \leq |\omega|$ f.a. $n \in \omega$

$\Rightarrow |\omega| = \omega$. ☒

Def. 2.57: (1.) a endl. $:\Leftrightarrow |a| < \omega$

(2.) a abzählbar $:\Leftrightarrow |a| = \omega$

manchmal auch "abzählbar unendlich"

P = Pot

Satz 2.58 (Cantor): Für jede Menge a gilt $|a| < |\mathrm{Pot}(a)|$.

Bew: Sei $f: a \to \mathrm{Pot}(a)$ Funktion.

Betrachte $b = \{x \in a : \neg x \in f(x)\}$.

Falls f surjektiv ist, ex. $y \in a$ mit $f(y) = b$.

Dann: $y \in b \Leftrightarrow y \notin f(y) = b$ ↯ ☒

Folgerung 2.59: Es gibt keine größte Kardinalzahl.

Def 2.60: Sei κ Kardinalzahl.

$\kappa^+ :=$ kleinste Kard.zahl, die echt größer als κ ist.

Bem: $2.58 \Rightarrow \kappa^+ \leq |\mathcal{P}(\kappa)|$

Kontinuumshypothese (Continuum hypothesis, kurz (CH))

$$\omega^+ = |\mathcal{P}(\omega)|$$

Konsistenz $\neg$CH / Konsistenz CH

Fakt (Cohen '63, Gödel '38): Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, kann CH weder bewiesen noch widerlegt werden (CH ist unabh. von ZFC).

Lemma 2.61: (1.) a, b disjunkt, endl. $\Rightarrow |a \cup b| = |a| + |b|$.

(2.) $m, n \in \omega \Rightarrow |m \times n| = m \cdot n$.

Bew: Leicht. Induktion.

Satz 2.62 (Hesseberg): Wenn a unendlich ist, gilt

$$|a \times a| = |a|.$$

Bew: Nur für a abz. (allgemein: Ind. über $|a|$).

OE $a = \omega$.

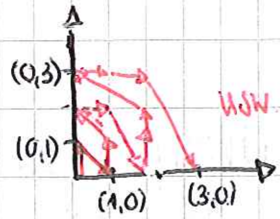
Betrachte lexikographische Ordnung auf $\omega \times \omega \times \omega$:

$$(l, m, n) <_{lex} (l', m', n') :\Leftrightarrow \begin{cases} l < l' \text{ oder} \\ l = l' \text{ und } m < m' \text{ oder} \\ l = l' \text{ und } m = m' \text{ und } n < n'. \end{cases}$$

Dies ist eine WO ($X \subseteq \omega \times \omega \times \omega$, ~~wähle~~ $X = \{(a, b, c) : \ldots\}$ wähle erst ersten Eintrag min in ω, dann ...)

Definiere WO auf $\omega \times \omega$ mittels

$$(m, n) < (m', n') :\Leftrightarrow (\max(m, n), m, n) <_{lex} (\max(m', n'), m', n')$$



Beh: Jedes $(m,n) \in \omega\times\omega$ hat nur endl. viele Vorgänger.

Bew: Alle Vorgänger von (m,n) sind in $\ell\times\ell$ enthalten, mit $\ell = \max(m,n)+1$

$\Rightarrow$ Ordnungstyp von $(\omega\times\omega, <) \leq \omega$

(falls $f: \omega\times\omega \to \beta$ ordnungstreu, $f(x) = \omega$

$\Rightarrow$ x hat unendl. viele Vorgänger)

$\Rightarrow |\omega\times\omega| = |\omega| = \omega.$ $\boxtimes$

Lemma 2.63: Sei X eine Menge von Kard.zahlen. Dann ist $\lambda = \sup_{\kappa\in X} \kappa := \bigcup_{\kappa\in X} \kappa$ auch eine Kard.zahl.

Bew: Zeige zuerst $\lambda \in On$.

λ transitiv, da λ Vereinigung transitiver Mengen

λ total geordnet, da $\lambda \subseteq On$ (siehe 2.38)

Sei nun $\beta < \lambda$. Dann ex. $\kappa \in X$ mit $\beta < \kappa$.

κ Kard.zahl $\Rightarrow \kappa = |\kappa| \leq |\lambda| \Rightarrow |\beta| < |\lambda|$

d.h. λ nicht gleichmächtig zu einem $\beta \in On$ mit $\beta < \lambda$, d also λ Kard.zahl $\boxtimes$

Def. 2.64: Die $\aleph$-Hierarchie ordnet jedem $\alpha \in On$ eine Kard.zahl wie folgt zu:

- $\aleph_0 = \omega$
- $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$
- $\aleph_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$ wenn α Limeszahl.

Prop. 2.65: Jede unendl. Kard.zahl ist von der Form $\aleph_\alpha$ für ein $\alpha \in On$.

Brauche dazu:

Lemma 2.66: Seien $\alpha, \beta \in On$, $f: \alpha \to \beta$ streng mon. wachsende Fkt. Dann gilt f.a. $\gamma \in \alpha$ $f(\gamma) \geq \gamma$.

Bew: Ang. $f(\gamma) < \gamma$. Sei $\gamma_0 \in \alpha$ min. mit dieser Eigenschaft.

f streng mon wachsend $\Rightarrow$ $f(f(\gamma_0)) < f(\gamma_0) < \gamma_0$.

$\lightning$ zur Minimalität von γ_0 $\boxtimes$

Beweis von 2.65:

Sei κ unendl. Kard.zahl. Dann ist $f: \kappa+1 \to \aleph_{\kappa+1}$, $\beta \mapsto \aleph_\beta$ streng monoton wachsend

$2.66 \Rightarrow \aleph_\kappa \geq \kappa \Rightarrow \aleph_{\kappa+1} > \kappa$.

Sei nun $\alpha \leq \kappa+1$ min. mit $\aleph_\alpha > \kappa$. κ unendl. $\Rightarrow \alpha > 0$

Falls $\alpha \in On$ Limeszahl $\overset{2.64}{\Rightarrow} \kappa \in \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$

$\Rightarrow \kappa \in \aleph_\beta$ für ein $\beta < \alpha$ $\lightning$ zur Min. von α.

D.h. $\alpha = \beta+1$ für ein $\beta \in On$, $\aleph_\beta \leq \kappa < \aleph_{\beta+1} = \aleph_\beta^+$

$\aleph_\beta^+$ ist der direkte Nachfolger von $\aleph_\beta$ (2.60)

$\Rightarrow \kappa = \aleph_\beta$. $\boxtimes$

(CH): $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

(GCH): f.a. $\kappa \geq \aleph_0$ gilt $2^\kappa = \kappa^+$

Es gilt $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$ (nicht so schwer).

§2.4 Metamathematik von ZFC - Skizze

in definitorischer Erweiterung von ZFC

Plan: Kodiere L_{Me}-Fml $\mathfrak{A}$ durch Konstante $\ulcorner\mathfrak{A}\urcorner$

$\rightsquigarrow$ erlaubt, über $Bew(\ulcorner\mathfrak{A}\urcorner)$ zu sprechen.

Packungsbeilage: Dieses Kapitel ist nicht in sich abgeschlossen. Das Beweisbarkeitsprädikat wird nur in §3 rigoros eingeführt. (für Peanoarithmetik)

Ziel: Gödelsche Unvollständigkeitssätze.

2GUS: Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, dann gilt

$$ZFC \nvdash \underbrace{CON_{ZFC}}_{\neg Bew(\ulcorner F \urcorner)}$$

1GUS: Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, dann ex. L_{Me}-Aussage R mit $ZFC \nvdash R$, $ZFC \nvdash \neg R$

(R unabh. von ZFC).

Also nun: Kodierung von Fmln.

1. Ordne jedem Zeichen einen Term zu.

$\ulcorner \dot{=} \urcorner = (\underline{0}, \underline{0})$	$\ulcorner v_0 \urcorner = (\underline{1}, \underline{0})$
$\ulcorner \wedge \urcorner = (\underline{0}, \underline{1})$	$\ulcorner v_1 \urcorner = (\underline{2}, \underline{0})$
$\ulcorner \neg \urcorner = (\underline{0}, \underline{2})$	$\ulcorner v_3 \urcorner = (\underline{3}, \underline{0})$
$\ulcorner (\urcorner = (\underline{0}, \underline{3})$	etc.
$\ulcorner) \urcorner = (\underline{0}, \underline{4})$	
$\ulcorner \exists \urcorner = (\underline{0}, \underline{5})$	
$\ulcorner \varepsilon \urcorner = (\underline{0}, \underline{6})$	

2. Für eine L_{Me}-Fml $\mathfrak{A} = \underbrace{\zeta_0 \zeta_1 \ldots \zeta_{n-1}}_{\text{Zeichen von } \mathfrak{A}}$ der Länge n setze

$$\ulcorner\mathfrak{A}\urcorner = \{(\underline{0}, \ulcorner\zeta_0\urcorner), (\underline{1}, \ulcorner\zeta_1\urcorner), \ldots, (\underline{n-1}, \ulcorner\zeta_{n-1}\urcorner)\}$$

Satz 2.67 (Fixpunktssatz) Für jede L_{Me}-Fml $\Sigma(x)$ in einer freien Variablen ex. L_{Me}-Aussage ϕ mit

$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow \underbrace{\Sigma(\ulcorner\phi\urcorner)}$$

Eigentlich: die L_{Me}-Fml. die zu $\Sigma(\ulcorner\phi\urcorner)$ äq. ist

Brauche:

Lemma 2.68: Es gibt eine in ZFC definierbare Fkt. sub mit

$$ZFC \vdash \ulcorner\psi(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner \doteq sub(\ulcorner\psi\urcorner, \ulcorner\phi\urcorner)$$

f.a. L_{Me}-Fml ϕ und $\psi(x)$.

Beweis: (nicht vollst.!) sub beschreibt einfach die Einsetzung in Fmln, etwa $\psi = s_0 \dots s_n \, x \, s_{n+2} \dots s_k$

$$\ulcorner\psi(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner = \ulcorner s_0 \dots s_n \ulcorner\phi\urcorner s_{n+2} \dots s_k \urcorner$$ ☑

Bew. von 2.67: Sei $\psi(v_0)$ die L_{Me}-Fml. die zu $\Sigma(sub(v_0, v_0))$ äquivalent ist. Dann gilt:

$$ZFC \vdash \psi(\ulcorner\psi\urcorner) \leftrightarrow \Sigma(sub(\ulcorner\psi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner)) \leftrightarrow \Sigma(\ulcorner\psi(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner)$$

Setze nun $\phi = \psi(\ulcorner\psi\urcorner)$. ☑

Korollar 2.69 (Tarski): Wenn ZFC kons. ist, dann ex. keine L_{Me}-Formel $W(x)$ ("Wahrheitsprädikat"), s.d. f.a. ~~[illegible]~~ L_{Me}-Aussagen ϕ gilt:

$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow W(\ulcorner\phi\urcorner).$$

Bew: Wähle in 2.67 ϕ mit $ZFC \vdash \phi \leftrightarrow \neg W(\ulcorner\phi\urcorner)$ ☑

$\leadsto$ "ϕ ist wahr" nicht in ZFC definierbar.

Anders: "ϕ ist beweisbar".