Sei $\mathcal{M} \models ZFC$, $\mathcal{M} = (M, \in)$
Grundidee zum Kodieren von $Bew(x)$:

L_{Me}-Fml: $Zeichen(x) = x \doteq (0,0) \vee \ldots \vee x \doteq (0,6) \vee \exists y \in \omega \; x \doteq (1,y)$
$Zeichen(\mathcal{M}) = \{(\underline{0},\underline{0}), \ldots, (\underline{0},\underline{6})\} \cup \{(\underline{1},y) : y \in \omega^{\mathcal{M}}\}$

natürliche Zahlen in $\mathcal{M}$, nicht notwendigerweise nur 0, 1, 2, ...

L_{Me}-Fml $Zeichenkette(x) =$ " x ist Funktion $f: n \to Zeichen$ für ein $n \in \omega$"

$\leadsto$ $Zeichenkette(\mathcal{M})$ kann auch (von außen betrachtet) unendl. lange Zeichenketten enthalten
(hängt von ω in $\mathcal{M}$ ab!)

L_{Me}-Fml $ZFC(x) =$ " x ist ein Axiom von ZFC"
$Bew(x) =$ " x ist eine in ZFC-beweisbare L_{Me}-~~Aussage~~ Formel"

⌈Anmerkung: Wir haben nicht gezeigt, dass $Bew(x)$ durch eine L_{Me}-Fml gegeben ist. Dies geht aber!⌋

$Bew(\mathcal{M}) = \{$Richtige Folgerungen$\} \cup \{$unendl. Folgerungen$\} \cup \{$Folgerungen mit unendl. langen Beweisen$\}$

$Bew(x)$ erfüllt die folgenden Loeb-Axiome:

L1: $ZFC \vdash \phi \Rightarrow ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$

L2: $ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner\phi \to \psi\urcorner) \to Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$

L3: $ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \to Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner)$

Warnungen: • Umkehrung von L1 gilt nicht!
• Schwer zu zeigen, dass L3 gilt
(zeigen wir für Arithmetik in § ~~4~~).

Folgerung 2.70 (aus L1 & L2):

(1.) $ZFC \vdash \phi \to \psi \;\Rightarrow\; ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \to Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$

(2.) $ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner) \leftrightarrow (Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner\psi\urcorner))$

Bew: (1.) Ang. $ZFC \vdash \phi \to \psi \overset{L1}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi \to \psi\urcorner)$

$\overset{L2}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \to Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$

(2.) Aus (1.) folgt

$ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner) \to Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$

und $ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner) \to Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$

Andererseits folgt aus (1.) auch

$ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \to Bew(\ulcorner\psi \to (\phi \wedge \psi)\urcorner)$

Wegen (L2) gilt

$ZFC \vdash Bew(\ulcorner\psi\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner\psi \to (\phi \wedge \psi)\urcorner) \to Bew(\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner)$

Zusammen folgt

$ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner\psi\urcorner) \to Bew(\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner)$. ☒

Sei F eine L_{Me}-Fml, deren Negation allg. ist, z.B.

$\exists x \neg x \doteq x$ oder $\neg \underline{0} \doteq \underline{0}$ oder $\neg x \doteq x$.

Setze $CON_{ZFC} = \neg Bew(\ulcorner F \urcorner)$

Satz 2.71 (2ter Gödelscher Unvollständigkeitssatz für ZFC)

Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, gilt $ZFC \nvdash CON_{ZFC}$.

Bem: Wenn CON_{ZFC} unbeweisbar ist, ist ZFC widerspruchsfrei (in einer inkonsistenten Theorie ist jede Aussage beweisbar), d.h. 2GUS sagt

$ZFC \vdash CON_{ZFC} \leftrightarrow \neg Bew(\ulcorner CON_{ZFC} \urcorner)$

Bew. von 2.71 (2GUS):

Sei ϕ L_{Me}-Fml mit

(*) $ZFC \vdash \phi \leftrightarrow \neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$ (ex. nach 2.67)

Beh: Es gilt $ZFC \vdash \phi \leftrightarrow CON_{ZFC}$

Bew der Beh: "$\rightarrow$" Es gilt $ZFC \vdash F \rightarrow \phi$

und $ZFC \vdash Bew(\ulcorner F\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$ (2.70 (1.))

Daher $ZFC \vdash \underbrace{\neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)}_{\leftrightarrow \phi \text{ nach } (*)} \rightarrow \underbrace{\neg Bew(\ulcorner F\urcorner)}_{CON_{ZFC}}$

also $ZFC \vdash \phi \rightarrow CON_{ZFC}$.

"$\leftarrow$" Nach (*) gilt $ZFC \vdash \phi \rightarrow \neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$

$\overset{2.70(1)}{\Rightarrow}$ $ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner\neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner)$

$L3 \Rightarrow$ $ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \rightarrow (Bew(\ulcorner\neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner))$

$2.70(2.) \Rightarrow$ $ZFC \vdash Bew(\ulcorner\neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner) \rightarrow \underbrace{Bew(\ulcorner\neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner)}_{Bew(\ulcorner F\urcorner)}$

Also $ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \rightarrow \neg CON_{ZFC}$ $\boxtimes_{Beh}$

Ang. $ZFC \vdash CON_{ZFC}$. Dann folgt (mit Beh.)

$ZFC \vdash \phi$

$L1 \Rightarrow ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$ $(*) \Rightarrow ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$

$\Rightarrow$ ZFC ist inkonsistent. $\boxtimes$

Def 2.72: T L-Theorie heißt vollständig, wenn gilt:

(1.) T ist konsistent und

(2.) $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$ f.a. L-Aussagen φ.

(Achtung: Definition leicht anders als im Beweis von 1.16!)

Satz 2.73 (Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz für ZFC)
Wenn ZFC konsistent ist, dann ist ZFC nicht vollständig, d.h. es ex. L_{ME}-Aussage R mit
$ZFC \nvdash R$, $ZFC \nvdash \neg R$.

Bem: • 1GUS & 2GUS gelten für jede entscheidbare Theorie, die Arithmetik beschreibt (siehe §4)
• Aber: Es gibt auch vollst. Theorien! Etwa
$\mathcal{M}$ L-Struktur, $T = Th(\mathcal{M}) = \{\varphi$ L-Aussage: $\mathcal{M} \models \varphi\}$
$\rightsquigarrow$ für $\mathcal{M}$ gilt der 1GUS nicht!

Bem: Warum folgt 2.73 nicht aus 2.71?
Weil es sein kann, dass ZFC konsistent ist und $ZFC \vdash \neg CON_{ZFC}$ gilt!
ÜA: $ZFC \nvdash \neg CON_{ZFC} \Rightarrow ZFC \nvdash Bew(\ulcorner ZFC \nvdash CON_{ZFC} \urcorner)$
d.h. $ZFC \vdash Bew(\ulcorner ZFC \nvdash CON_{ZFC} \urcorner) \Rightarrow ZFC \vdash \neg CON_{ZFC}$.

Bew. von 2.73:
Sei $\phi_0, \phi_1, \ldots$ eine Liste aller in ZFC beweisbaren Aussagen.
Beschreibe dies durch die L_{ME}-Fml. $Bew(x,y)$
"x ist die y-te beweisbare Aussage". Dann gilt:
$\phi = \phi_n \Rightarrow ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner, \underline{n})$
$\phi \neq \phi_n \Rightarrow ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner, \underline{n})$

Wir benutzen den Rosser-Trick: Sei ψ eine L_{ME}-Aussage.
$Bew^*(\ulcorner\psi\urcorner) = \exists y \in \omega\, (\underbrace{Bew(\ulcorner\psi\urcorner, y)}_{y \text{ ist beweisbar}} \wedge \underbrace{\forall x < y\ \neg Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, x)}_{\text{keine der Aussagen in der Liste vor } \psi \text{ ist } \neg\psi})$
$\rightsquigarrow$ ein Stück von CON_{ZFC}

<u>Beh</u>: Wenn ZFC kons. ist, gilt

$ZFC \vdash \psi \Rightarrow ZFC \vdash Bew^*(\ulcorner\psi\urcorner)$ (1.) UND

$ZFC \vdash \neg\psi \Rightarrow ZFC \vdash \neg Bew^*(\ulcorner\psi\urcorner)$ (2.)

(Wenn ZFC inkons. ist, gelten (1.) & (2.) auch).

<u>Bew</u> der Beh:

(1.) Ang. $ZFC \vdash \psi$. Dann gilt $\psi = \phi_n$ für ein $n \in \omega$,

d.h. es gilt $\neg\psi \neq \phi_0, \ldots, \neg\psi \neq \phi_{n-1}$ und

$ZFC \vdash Bew(\ulcorner\psi\urcorner, \underline{n})$. (* weil ZFC widerspruchsfrei nach Annahme)

$\Rightarrow ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, \underline{0}) \wedge \ldots \wedge \neg Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, \underline{n-1})$

und ~~dah.~~ $ZFC \vdash \forall x < \underline{n} \; (x \doteq 0 \vee \ldots \vee x \doteq n-1)$

$\Rightarrow ZFC \vdash Bew^*(\ulcorner\psi\urcorner)$

(2.) Ang. $ZFC \vdash \neg\psi$. Dann gilt $\neg\psi = \phi_n$ für ein n

und $\psi \neq \phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$ wie oben.

d.h. $ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner\psi\urcorner, \underline{m})$ f.a. ~~...~~ $m \leq n$

$\Rightarrow ZFC \vdash \forall y \in \omega \, (Bew(\ulcorner\psi\urcorner, y) \rightarrow \underline{n} < y)$

$\Rightarrow ZFC \vdash \neg Bew^*(\ulcorner\psi\urcorner)$

(Wenn ~~...~~ $ZFC \vdash Bew(\ulcorner\psi\urcorner, \underline{l})$ gilt, folgt

$l > n$, aber dann gilt

$ZFC \vdash \exists x < l \;\; Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, x))$ ☑ Beh.

Wähle nun mit Fixpunktsatz (2.67) R so, dass

$ZFC \vdash R \leftrightarrow \neg Bew^*(R)$ gilt (3.)

Dann folgt:

$ZFC \vdash R \overset{(1.)}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew^*(\ulcorner R\urcorner) \overset{(3.)}{\Rightarrow} ZFC \vdash \neg R$

$\overset{(2.)}{\Rightarrow} ZFC \vdash \neg Bew^*(\ulcorner R\urcorner) \overset{(3.)}{\Rightarrow} ZFC \vdash R.$

Also: $ZFC \vdash R \Leftrightarrow ZFC \vdash \neg R$,

d.h. ZFC konsistent $\Rightarrow$ R unabh. von ZFC.