Bem. 2.47: Wenn $\bigcup x$ eine Wohlordnung besitzt, existiert eine Auswahlfkt. auf x (ohne Annahme des Auswahlaxioms), nämlich $f(z) := \min(z)$.
Nun: Umkehrung gilt auch!

Satz 2.48 (Wohlordnungssatz; Zermelo) Jede Menge hat eine Wohlordnung (in ZFC!).

Bew: Sei A Menge und $* \notin A$. Wähle Auswahlfkt. $g: P(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$.
Definiere $F: On \to A \cup \{*\}$ mittels

$$F(\beta) = \begin{cases} g(A \setminus F[\beta]) & \text{wenn } A \not\subseteq F[\beta] \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie im Beweis von 2.44. ex. $\alpha \in On$ mit $f = F\restriction_\alpha : \alpha \to A$ Bijektion. Diese Abb. transportiert die WO von α nach A:
Setze $a_1 < a_2 \iff f^{-1}(a_1) < f^{-1}(a_2)$ ☑

(in ZFC)

Satz 2.49 (Zornsches Lemma) Sei $(A,<)$ eine partielle Ordnung, in der jede linear geordnete Teilmenge K eine obere Schranke besitzt (d.h. für jedes linear geordnete $K \subseteq A$ ex. $s \in A$ mit $k \leq s$ für alle $k \in K$). Dann besitzt A ein maximales Element m (d.h. $m \in A$ und für alle $a \in A$ gilt $\neg\, a > m$)

Bew: Sei $G: V \to V$ Funktional mit

$$G(x) = \begin{cases} \text{(eine) echte obere Schranke von } x & \text{falls } x \subseteq A \text{ und } x \text{ eine echte obere Schranke hat} \\ * & \text{sonst} \end{cases}$$

für ein $* \notin A$.

Warum existiert G?

Betrachte $B = \{\{x\} \times S_x : x \subseteq A,\ S_x \subseteq A \cup \{*\},$ (d.h. $y \in S_x \Rightarrow y \notin x$)

S_x ist die Menge aller echten oberen Schranken von x (falls eine e.o.S. existiert) und $\{*\} = S_x$ sonst $\}$

Nun erhalte $g: B \to V$ Auswahlfkt. mit dem Auswahlaxiom.

$g: \{x\} \times S_x \longmapsto (x, s_x)$ mit s_x e.o.S. von x falls x eine e.o.S. in A hat.

Setze nun $G(x) = \begin{cases} g[B](x) & \text{falls } x \subseteq A \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$

Definiere $F: On \to V$ Funktional mit $F(\alpha) = G(F[\alpha])$ (existiert nach Rek.satz).

Ang. $* \notin Im(F) \Rightarrow F: On \to A$ ordnungstreu (siehe Beweis 2.48 Wohlordnungssatz)

$\lightning$ sonst On Menge!

Sei α minimal mit $F(\alpha) = *$.

$K = F[\alpha]$ ist linear geordnete TM von A.

K hat keine echte obere Schranke (sonst $\lightning$ zu $F(\alpha) = *$)

$\Rightarrow$ K hat obere Schranke m mit $m \in K$.

m ist maximales Element von A:

Ang. nicht, dann ex. $a \in A$ mit $a > m$

$\Rightarrow a > k$ f.a. $k \in K$.

$\Rightarrow$ K hat echte obere Schranke $\lightning$. ☒

Bem. 2.50: In ZF sind äquivalent:

(1.) Wohlordnungssatz

(2.) Auswahlaxiom

(3.) Zornsches Lemma

(1.) ⇔ (2.): 2.47 & 2.48

(2.) ⇔ (3.): 2.49

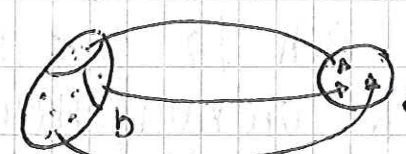
(3.) ⇔ (1.): Übung!

Jetzt: Mächtigkeit von Mengen.

Def. 2.51: • Mengen a, b heißen gleichmächtig, schreibe $a \sim b$, wenn es eine Bijektion zwischen a und b gibt.
• Wir schreiben $a \precsim b$ (a ist höchstens so mächtig wie b), wenn es eine Injektion von a nach b gibt.

Bem 2.52: $a \precsim b$, $a \neq \emptyset$ $\Leftrightarrow$ ex. Surjektion $f : b \twoheadrightarrow a$.
Bew: "$\Rightarrow$" Sei $g: a \to b$ Injektion, $* \in a \neq \emptyset$.
$\Rightarrow$ setze $f : b \to a$, $f(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & x \in \operatorname{Im}(g) \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$

"$\Leftarrow$" Sei $f: b \twoheadrightarrow a$ Surjektion



Für alle $x \in a$ wähle (mit (AUSWAHL)) $y \in b$ mit $f(y) = x$
$\rightsquigarrow$ erhalte Bijektion zwischen a und $c \subseteq b$. ☒

Wohlordnungssatz $\Rightarrow$ jede Menge ist gleichmächtig zu einer Ordinalzahl.
Aber: nicht eindeutig! $\omega \sim \omega + 1$.

Def 2.53: Die Mächtigkeit $|a|$ einer Menge a ist die kleinste Ordinalzahl α mit $a \sim \alpha$, d.h.
$|a| = \min \{\beta \in On : \beta \sim a\}$.

Lemma 2.54: (1.) $a \sim b$ $\Leftrightarrow$ $|a| = |b|$.
(2.) $a \precsim b$ $\Leftrightarrow$ $|a| \leq |b|$.

Bew: (1.) $\sim$ ist Äquivalenzrelation.

(2.) "$\Leftarrow$" sei $|a| \leq |b|$

$$\overset{\alpha}{\parallel} \qquad \overset{\parallel}{\beta} \Rightarrow \alpha \leq \beta$$

$$\Rightarrow \alpha \subseteq \beta \Rightarrow a \precsim b.$$

"$\Rightarrow$" braucht den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz: Sei $\alpha \in On$, $S \subseteq \alpha$. Betrachte $(S, <_\alpha)$, d.h. S mit der von α induzierten Wohlord. Dann ist der Ordnungstyp von $(S, <_\alpha)$ (d.h. die Ord.zahl β mit $\beta \cong (S, <_\alpha)$) nicht größer als α.

Bew (per Ind. über β)

Zeige: $\alpha, \beta \in On$, $f: \beta \to \alpha$ ordnungstreu

$\Rightarrow \beta \leq \alpha$.

I.A.: $\beta = \emptyset$ klar.

Sei also Beh. f.a. $\beta' < \beta$ bewiesen, $f: \beta \to \alpha$ ordnungstreu.

$$\Rightarrow f\restriction_{\beta'}: \beta' \to \underbrace{f\restriction_{\beta'}[\beta']}_{\subseteq f(\beta')} \quad \text{ordnungstreu}$$

I.V. $\Rightarrow \beta' \leq f(\beta') \in \alpha$

$\Rightarrow \beta' < \alpha$ f.a. $\beta' < \beta$ $\Rightarrow \beta \leq \alpha$. $\boxtimes$ Hilfssatz

Nun $a \precsim b \Rightarrow a \precsim |b| \Rightarrow |a| \leq |b|$. $\boxtimes$

Def. 2.55: $\alpha \in On$ heißt Kardinalzahl, wenn $\alpha = |\alpha|$ gilt.

Bem: Die Mächtigkeit einer Menge ist immer eine Kardinalzahl.

Lemma 2.56: (1.) Natürliche Zahlen sind Kard.zahlen

(2.) ω ist eine Kardinalzahl.

Bew (1.) Zeige für $n, m \in \omega$ (per Ind. über n)

$n \sim m \Rightarrow n = m$.

$n = 0$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$: Ang. $f: n+1 \to m'$ Bijektion,

etwa $m' = m+1$ (da $n+1 \neq \emptyset$ ist $m' \neq \emptyset$).

Falls $f(n) = m$, ist $f\restriction_n : n \to m$ Bijektion

$\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow} n = m \Rightarrow n+1 = m+1$.

Falls $f(x) = m$ für ein $x < n$, ist

$$g(z) = \begin{cases} f(n) & \text{für } z = x \\ f(z) & \text{sonst} \end{cases} \quad g: n \to m$$

Bijektion $\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow} n = m \Rightarrow n+1 = m+1$.

(2.) $n \lesssim \omega$ f.a. $n \in \omega$

$\Rightarrow |n| \leq |\omega|$ f.a. $n \in \omega$

$n < n+1 = |n+1| \leq |\omega|$ f.a. $n \in \omega$

$\Rightarrow |\omega| = \omega$. ☒

Def. 2.57: (1.) a endl. $\Leftrightarrow |a| < \omega$

(2.) a abzählbar $\Leftrightarrow |a| = \omega$

manchmal auch "abzählbar unendlich"

$\mathcal{P}$ = Pot

Satz 2.58 (Cantor): Für jede Menge a gilt $|a| < |\mathrm{Pot}(a)|$.

Bew: Sei $f: a \to \mathrm{Pot}(a)$ Funktion.

Betrachte $b = \{x \in a : \neg x \in f(x)\}$.

Falls f surjektiv ist, ex. $y \in a$ mit $f(y) = b$.

Dann: $y \in b \Leftrightarrow y \notin f(y) = b$ ↯ ☒

Folgerung 2.59: Es gibt keine größte Kardinalzahl.