§4.3 Peanoarithmetik.

4.22 Def: Die Axiome der Peanoarithmetik P bestehen aus den Axiomen von Q, sowie dem Induktionsschema:

$$\forall x_1,\dots,x_n \left[\phi(\bar{x},\underline{0}) \wedge \forall y \left(\phi(\bar{x},y) \to \phi(\bar{x},S(y))\right) \to \forall y\, \phi(\bar{x},y) \right]$$

Bem: $\mathcal{M}$ ist ein Modell von P

$\mathcal{M} \models Q$ ist Modell von P, wenn jede durch eine Fml. def-bare Menge, die $\underline{0}$ enthält und unter S abg. ist, schon ganz M enthält

Lemma 4.23: Die folgenden Aussagen folgen aus P:

(1) S ist injektiv. Jedes Element außer $\underline{0}$ hat einen Vorgänger.

(2.) $<$ ist eine lin. Ordnung, $\underline{0}$ ist das kleinste Element. $S(x)$ ist der unmittelbare Nachfolger von x.

(3.) $+,\cdot$ definieren einen kommutativen Halbring mit Nullelement $\underline{0}$ und Einselement Δ_1.

(4.) $+,\cdot$ sind monoton. Es gilt:

$P \vdash x \leq y \leftrightarrow \exists z\; x+z \doteq y$

Bew: Siehe Ziegler oder als ÜA.

$\leadsto$ Elementare ZT lässt sich in P betreiben (★)

Bem: Nach 4.15 ist P unentscheidbar

$\leadsto$ genug zu tun in elem. Zahlentheorie!

Lemma 4.2.4 (verallgemeinerte Induktion): Für jede L_{IN}-Fml $\phi(x_1,..,x_n,y)$ gilt

$$P \vdash \forall x_1,..,x_n [\forall y (\forall z < y\, \phi(\bar{x},z) \to \phi(\bar{x},y)) \to \forall y\, \phi(\bar{x},y)]$$

[Intuitiv: jede nicht-leere def.bare TM eines Modells von P hat ein kleinstes Element.]

Bew: Sei $\mathfrak{M} \models P$, $a_1,..,a_n \in M$ fest gewählt mit
$\mathfrak{M} \models \forall y (\forall z < y\, \phi(\bar{a},z) \to \phi(\bar{a},y))$
Sei $A \subseteq M$, $A = \{b \in M \mid \forall z < b\, \phi(\bar{a},z)\}$
$\Rightarrow$ $\underline{0} \in A$, falls $b \in A$ folgt $\mathfrak{M} \models \phi[\bar{a},b]$
und damit $S(b) \in A$. $\Rightarrow A = M$. ☑

Wir führen neue Fkt.symbole für Σ_1-Fml ein, die in P Funktionen definieren:
Sei $\phi(v_1,..,v_n,v_0)$ eine Σ_1-Fml, die in P eine Fkt. definiert, d.h. $P \vdash \forall v_1,..,v_n \exists! v_0\, \phi(v_1,..,v_n,v_0)$
Füge für jedes solche ϕ ein neues Fkt.zeichen F_ϕ zu L_{IN} hinzu, und sei L_{IN}^* die resultierende Erweiterung von L_{IN}, sowie

$$P^* = P \cup \{\forall v_1,..,v_n\, \phi(v_1,..,v_n, F_\phi(v_1,..,v_n)) : \phi \text{ wie oben}\}$$

die entsprechende definitorische Erw. von P (siehe 2.16)
Wir nennen F_ϕ eine Σ_1^P-Funktion.

Bem: Nach 2.16 ist jede L_{IN}^*-Fml in P^* zu einer L_{IN}-Fml äquivalent, es gilt also das Ind.schema in P^* für L_{IN}^*-Formeln. Jede Σ_1-Fml aus L_{IN}^* wird hierbei in eine Σ_1-Fml aus L_{IN} übersetzt (vgl. Bew. 2.16)

$\Rightarrow P^{**} = P^*$.

jedes F_ϕ definiert eine Fkt. $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, diese wird in P^* durch $v_0 = F_\phi(v_1, .., v_n)$ repräsentiert und in P durch ϕ.

Satz 4.25: jede prim. rek. Fkt. ist durch eine Σ_1^P-Fkt. def-bar. (also $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ p.r. $\Rightarrow f = F_\phi^{\mathbb{N}}$ für ϕ geeignet)

Lemma 4.26:
(i) Die Gödelsche β-Fkt ist durch eine Σ_1^P-Funktion definierbar (diese bezeichnen wir auch mit β)
(ii) Für diese Funktion gilt:

$$P^* \vdash \underbrace{\forall x, y, v, z\ \exists x', y'\ (\forall w < v\ \beta(x, y, w) \doteq \beta(x', y', w) \wedge z \doteq \beta(x', y', v))}_{\psi}$$

Erinnerung: $\beta(a, b, i)$ ist eine rek. Fkt, s.d. gilt: f.a. endl. Folgen $c_0, .., c_{n-1}$ ex. a, b mit $\beta(a, b, i) = c_i$ für $i = 0, ..., n-1$.

Bew. von 4.26.
(i) Nach dem Beweis von 3.31 wird $\beta(a, b, i)$ von der Σ_1-Fml
$\phi(v_1, v_2, v_3, v_0) = (v_0 < v_2(v_3+1)+1 \wedge \exists y\ v_1 \doteq v_0 + y(v_2(v_3+1)+1))$
definiert.
(ii) Es gilt $\mathfrak{N} \models \psi$ (setze $c_0 = \beta(a, b, 0), ..., c_{v-1} = \beta(a, b, v-1)$, $c_v = c$ $\leadsto$ erhalte a', b')
Nach (*) lässt sie sich also in P^* beweisen. ☑

Beweis von 4.25:

Grundfunktionen und (R1) wie im Beweis von 4.2.

z.z.: Σ_1^P-Fkt. sind abg. unter (R2), d.h.: seien g, h definiert durch Σ_1^P-Fkt. G, H, f gegeben durch

$f(\bar{x}, 0) = g(\bar{x})$, $f(\bar{x}, y+1) = h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y))$

z.z.: f ist Σ_1^P-Funktion.

Zeige zuerst: Γ_f wird durch eine Σ_1-Fml ϕ definiert.

Betrachte dazu $\phi(\bar{x}, y, z) = \exists a, b\, \psi(\bar{x}, y, z, a, b)$

mit $\psi(\bar{x}, y, z, a, b) = (\beta(a, b, 0) \doteq G(\bar{x})$

$\wedge \forall u < y\ \beta(a, b, u+1) \doteq H(\bar{x}, u, \beta(a, b, u))$

definiert $\wedge\ z \doteq \beta(a, b, y))$

Bem: ϕ ~~ist~~ eine Σ_1^P-Funktion

Bew: Wir führen (in P^*) eine Induktion über y

- Sei $y = 0$. Nach 4.26 ex. a, b mit $\beta(a, b, 0) = G(\bar{x})$

Also $P^* \vdash \forall \bar{x}, z\ \ \phi(\bar{x}, \underline{0}, z) \to G(\bar{x}) \doteq z$.

Da G Σ_1^P-Fkt ist, folgt $P^* \vdash \exists! z\ \phi(\bar{x}, \underline{0}, z)$.

- $y \rightsquigarrow y+1$

Zeige zuerst $P^* \vdash \forall \bar{x}, y\, \exists z\ \ \phi(\bar{x}, y+1, z)$

Wähle nach I.V. $\tilde{z}$ mit $\phi(\bar{x}, y+1, \tilde{z})$ und

$\tilde{a}, \tilde{b}$ mit $\psi(\bar{x}, y, \tilde{z}, \tilde{a}, \tilde{b})$

4.26 $\Rightarrow$ ex. a, b mit $\forall u < y+1\ \beta(\tilde{a}, \tilde{b}, u) = \beta(a, b, u)$

und $\beta(a, b, y+1) = H(\bar{x}, y, \tilde{z}) \doteq z$.

Dann gilt $\psi(\bar{x}, y+1, z, a, b)$ und daher

$\phi(\bar{x}, y+1, z)$

Sei nun z' mit $\phi(\bar{x}, y+1, z')$. [z.z.: $z = z'$.]

Dann ex. a, b mit $\psi(\bar{x}, y+1, z', a, b)$. Sei $u = \beta(a, b, y)$

Wg. $\psi(\bar{x}, y, u, a, b)$ folgt $u = \tilde{z}$ nach I.V.

Nun folgt $z' = H(\bar{x}, y, u) = H(\bar{x}, y, \tilde{z}) = z$

~~nach~~ da H Σ_1^P-Funktion ☑

Def. / Bem. 4.27: Wir betrachten die folgende Variante der Gödelschen β-Fkt:

$$\beta'(a,i) = \beta(\beta_1^2(a), \beta_2^2(a), i)$$

Dann gilt: $\beta' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist Σ_1^P-Fkt. und

$$P^* \vdash \forall x,v,z\ \exists x' (\forall w< v\ \beta'(x,w) = \beta'(x',w) \land z = \beta'(x',v)).$$

Bew: wie 4.26. ☒

§4.4. Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Def 4.28: Sei $\phi(\bar{x})$ L-Fml., T L-Theorie. Wir sagen, dass $\phi(\bar{x})$ logisch aus T folgt, wenn $\forall \bar{x}\, \phi(\bar{x})$ in allen Modellen von T gilt (also $T \models \forall \bar{x}\, \phi(\bar{x})$).

Lemma 4.29 (Deduktionslemma): Sei T eine L-Theorie. Eine L-Fml $\phi(\bar{x})$ folgt genau dann logisch aus T, wenn $\phi(\bar{x})$ im Hilbertkalkül aus den Axiomen von T herleitbar ist.

Bew: "$\Rightarrow$" Ang. $\phi(\bar{x})$ folgt logisch aus T.

Vollst.keitssatz $\overset{(1.13)}{\Rightarrow}$ $T \vdash \forall \bar{x}\, \phi(\bar{x})$, d.h. es ex. Axiome $\psi_1, \dots, \psi_n \in T$ mit $\vdash \psi_1 \land \dots \land \psi_n \to \forall \bar{x}\, \phi(\bar{x})$.

$\overset{1.14(2)}{\Rightarrow}$ $\vdash \forall \bar{x}\, \phi(\bar{x}) \to \phi(\bar{x})$

$\overset{1.14(1)}{\Rightarrow}$ $\vdash \psi_1 \land \dots \land \psi_n \to \phi(\bar{x})$

"$\Leftarrow$" Per Ind. über die Länge der Herleitung von $\phi(\bar{x})$.

ϕ logisches Axiom oder $\phi \in T$: klar.

MP & $\exists$-Einführung führen Fml., die logisch aus T folgen, wieder in solche über. ☒

Nun: Definiere Beweisbarkeitsprädikat.

Beschreibe zunächst die ~~p~~ rek Relationen

$AUS = \{ \ulcorner \varphi \urcorner : \varphi \ L_{\mathbb{N}}\text{-Aussage} \}$

$AX_P = \{ \ulcorner \varphi \urcorner : \varphi \ L_{\mathbb{N}}\text{-Aussage}, \ \varphi$ ist logisches Axiom oder Axiom von $P \}$

$REG = \{ (\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \chi \urcorner) : \varphi, \psi, \chi \ L_{\mathbb{N}}\text{-Fml}, \ \varphi$ folgt aus ψ und χ mittels einer Regel des Hilbertkalküls $\}$

durch Σ_1-Fml.

Betrachte nun die Σ_1-Fml.

$B'(s,n) = \forall i < n \ (AX_P(\beta'(s,i)) \vee \exists j,k < i \ REG(\beta'(s,i), \beta'(s,j), \beta'(s,k))$

Dann definiert $B'(s,n)$ in $\underline{\mathfrak{N}}$ die Menge der Paare (s,n), s.d. für φ $L_{\mathbb{N}}$-Fml mit $\ulcorner \varphi \urcorner = s$ $\beta'(s,0), \dots, \beta'(s,n-1)$ eine Herleitung von φ aus den Axiomen von P im Hilbertkalkül kodiert.

Definiere (vorläufig!)

$Bew'(f) = AUS(f) \wedge \exists n, s \ (\beta'(n,s) = f \wedge B'(s, n+1))$

4.29 $\Rightarrow$ In $\underline{\mathfrak{N}}$ definiert dies die Menge der Gödelnummern der in P beweisbaren Aussagen.

Wir wollen das auch für $\mathfrak{M} \models P$ beliebig, d.h. wir wollen, dass Bew die Loebaxiome erfüllt.

Trick: Erweitere P um alle wahren Σ_1-Aussagen (jede davon ist nach 4.13 schon in P beweisbar, d.h. nix neues beweisbar)