Prof. F. Jahnke
B. Boissonneau

Universität Münster
Sommersemester 2019

Logik I
Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L}$ die Sprache $\{c\}$, wobei c ein Konstantensymbol sein soll, weiter sei $\mathcal{L}^{<} = \mathcal{L} \cup \{<\}$, $\mathcal{L}^{+} = \mathcal{L} \cup \{+\}$ und $\mathcal{L}^{<,+} = \mathcal{L} \cup \{<, +\}$ für ein zweistelliges Relationssymbol $<$ und ein zweistelliges Funktionssymbol $+$. Wir betrachten Strukturen $\mathfrak{Z}_n$, deren Grundmenge die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind und die c durch die ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ interpretieren. Eine Struktur $\mathfrak{Z}_n$ kann zu einer $\mathcal{L}^{<,+}$-Struktur $\mathfrak{Z}_n^{<,+}$ erweitert werden indem $+$ bzw. $<$ mit den üblichen Interpretationen belegt werden. Die Strukturen $\mathfrak{Z}_n^{<}$ und $\mathfrak{Z}_n^{+}$ sind entsprechend zu verstehen. Zeigen Sie:

a) $\mathfrak{Z}_n \cong \mathfrak{Z}_m$ für jedes $n, m \in \mathbb{Z}$.
b) Für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ existiert genau ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{Z}_n^{<}$ und $\mathfrak{Z}_m^{<}$.
c) $\mathfrak{Z}_n^{<,+} \cong \mathfrak{Z}_m^{<,+} \Leftrightarrow n = m$.
d) Wann gilt $\mathfrak{Z}_n^{+} \cong \mathfrak{Z}_m^{+}$?

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei $\mathcal{L}$-Strukturen. Wir sagen, dass $\mathcal{B}$ eine Substruktur (auch Unterstruktur) von $\mathcal{A}$ ist (kurz $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$) wenn das Folgende gilt:

a) $B \subseteq A$.
b) Für jede Konstante $c \in \mathcal{L}$ sei $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.
c) Für jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in \mathcal{L}$ gelte $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \upharpoonright B^n$ und B ist unter $f^{\mathcal{B}}$ abgeschlossen.
d) Für jedes m-stellige Relationssymbol $R \in \mathcal{L}$ soll gelten, dass $R^{\mathcal{A}} \cap B^m = R^{\mathcal{B}}$.

Zeigen Sie, dass der Durchschnitt einer Familie von Unterstrukturen von $\mathcal{A}$ entweder leer, oder selbst wieder eine Unterstruktur von $\mathcal{A}$ ist. Folgern Sie, dass zu jeder nicht leere Menge $S \subseteq \mathcal{A}$ eine kleinste Unterstruktur von $\mathcal{A}$ existiert die S enthält, die sogenannte von S erzeugte Unterstruktur.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache. Zeigen Sie, dass ein echtes Anfangsstück einer $\mathcal{L}$-Formel keine $\mathcal{L}$-Formel is.

Aufgabe 4. Beweisen oder widerlegen Sie: Für jede Sprache $\mathcal{L}$, jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$, jede $\mathcal{A}$-Belegung β und jedes Paar von $\mathcal{L}$-Formeln φ, ψ gilt: Wenn die Variable x nicht frei in ψ vorkommt, folgt

$$\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\beta] \Rightarrow \mathcal{A} \models (\exists x\, \varphi \rightarrow \psi)[\beta].$$

Hinweis: Gilt $\mathcal{A} \models \varphi[\beta]$ genau dann wenn $\mathcal{A} \models \exists x\, \varphi[\beta]$?

Abgabe bis Donnerstag, den 11.04, 10:00 Uhr
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/bboisson/de/L1/