Logik 1 - Sommersemester 2019

Organisatorisches: VL Mo, Do 8:25-10:00h

Di, 8-10? 14-16? 16-18?

Ausweichtermin Mi, 12:15 - 14:00h (Raum?)

Tutorale: Mi, 12-14 und 14-16h, Beginn 10.3.

Tutor: Jan Kruschewski Übungszettel: Ausgabe: Montag

Abgabe: Donnerstag 10 Tage später

Literatur:

M. Ziegler: Mathematische Logik (Vorlesungsskript)

-"- : Mathematische Logik (Birkhäuser, auch WWU-intern als pdf verfügbar)

Ebbinghaus-Flum-Thomas: Einführung in die math. Logik

Prestel: Einführung in die math. Logik und Modelltheorie

§0 Einführung: Mathematische Logik - Fundament für die Mathematik.

Grundlagenkrise der Mathematik (circa 1900-1930)

Beginn: 1903 Veröffentlichung der Russelschen Antinomie (Russel und Zermelo)

Betrachte 'die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten'

$R = \{x : x \notin x\}$

~~Frag~~ Frage: Gilt $R \in R$?

Ang. $R \in R \overset{\text{Def. von } R}{\Rightarrow} R \notin R$ ↯ $\Rightarrow$ R kann nicht existieren

Ang. $R \notin R \overset{\text{Def. von } R}{\Rightarrow} R \in R$ ↯

d.h. Naive Mengenlehre ist inkonsistent, R ist keine Menge.

Hilberts Programm (~1920): Wunschliste an ein Fundament

(1.) Finde formale Sprache, mithilfe der man die Mathematik beschreiben kann
 ⇝ Logik 1ter Stufe, Mengenlehre (ZFC)

(2.) Finde ein vollständiges System allgemeingültiger logischer Schlüsse
 ⇝ Hilbertkalkül, Gödels Vollständigkeitssatz

(3.) Finde ein vollständiges (effektives) Axiomensystem, aus dem man 'alle' Mathematik ableiten kann
 ⇝ existiert nicht! Gödels erster Unvollst. satz.
 (Falls ZFC konsistent, existieren Aussagen, die ZFC weder beweisen noch widerlegen kann. Gilt für jedes Axiomensystem, was 'Arithmetik' beschreibt)

(4.) Zeige, dass das in (1)-(3) gefundene 'formale System' widerspruchsfrei ist.
 ⇝ kann man nicht mit Mitteln des Systems zeigen! Gödels zweiter Unvollst. satz.

Logik 1: (1.) - (4.) + etwas axiomatische Mengenlehre

Logik 2: Modelltheorie
 Für manche Teilbereiche der Mathematik ex. Axiomensysteme wie in (3.)
 z.B. Algebra der komplexen Zahlen
 Algebra der reellen Zahlen
 ⇝ erhalte neuen Zugang zu mathematischen Objekten!

Logik 3: Mengenlehre
 Untersuche ZFC und seine Modelle, Erweiterungen
 ⇝ Jagd nach Unabhängigkeiten und Widersprüchen!

§1 Logik erster Stufe (Prädikatenlogik erster Stufe)

§1.1 Strukturen und Formeln

Ziel: Formale Sprache (zunächst rein syntaktisch - Zeichen und Zeichenreihen)

Zunächst: Menge = Menge im naiven Sinn

Intuition: Eine Struktur ist eine nicht-leere Menge mit ausgezeichneten Elementen, Operationen und Relationen

Beispiele:
- Ein Ring $(R, \underbrace{0, 1}_{\text{Elemente}}, \underbrace{+, -, \cdot}_{\text{Operationen}})$
- Gruppe $(G, e, \circ, ^{-1})$
- Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, \overset{\text{Relation}}{<})$
- Die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot, <)$

  S Nachfolgerfkt $x \mapsto x+1$

Hier: Relationen zweistellig, Operationen ein- oder zweistellig.

Im Allgemeinen: Beliebige Stelligkeit erlaubt.

Bem: Nicht alle Gegenstände der Mathematik sind Strukturen. (Bsp: die Klasse aller Gruppen)
Oft gibt es mehrere Möglichkeiten, ein math. Objekt als eine Struktur aufzufassen.

Def: Eine Sprache ist eine Menge von Konstantenzeichen, Funktionszeichen und Relationszeichen. Funktionszeichen und Relationszeichen haben eine (positive) Stelligkeit.

Sprechweise: Auch Konstanten statt Konstantenzeichen, Prädikat statt Relationszeichen

Beispiele von Sprachen

- $L_\emptyset = \emptyset$ — leere Sprache
- $L_{Ring} = \{\underline{0}, \underline{1}, +, -, \cdot\}$ — Ringsprache
- $L_{Grp} = \{\underline{e}, \circ, ^{-1}\}$ — Gruppensprache
- $L_{Ord} = \{<\}$ — Ordnungssprache
- $L_{AKp} = L_{ring} \cup L_{Ord}$ — Sprache der ang. Körper
- $L_{\mathbb{N}} = \{\underline{0}, S, +, \cdot, <\}$ — Sprache der nat. Zahlen
- $L_{Me} = \{\in\}$ — Sprache der Mengenlehre

Hierbei Konstanten: $\underline{0}, \underline{1}, \underline{e}$
einst. Fkt.zeichen: $-, ^{-1}, S$
zweist. -"- : $+, \circ, \cdot$
Relationszeichen: $<, \in$ (beide zweist.)

Def: Sei L eine Sprache. Eine L-Struktur ist ein Paar

$$\mathfrak{A} = (A, (z^{\mathfrak{A}})_{z \in L})$$

wobei

A eine nicht-leere Menge ist (die Grundmenge von $\mathfrak{A}$)
$z^{\mathfrak{A}} \in A$, wenn $z \in L$ Konstante
$z^{\mathfrak{A}}: A^n \to A$, wenn $z \in L$ n-stell. Fkt.symbol ist
$z^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$, wenn z ein n-stell. Fkt.symbol ist.

Also: $z^{\mathfrak{A}}$ ist die Interpretation der Zeichen von L in $\mathfrak{A}$.

Bsp: $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, \underline{0}^{\mathbb{Q}}, \underline{1}^{\mathbb{Q}}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, -^{\mathbb{Q}})$ ist L_{ring}-Struktur.
(mit üblichen Interpretationen).

ABER: Nicht jede L_{ring}-Struktur ist ein Ring!

$W = (\mathbb{N}, \underline{0}^W, \underline{1}^W, +^W, \cdot^W, -^W)$ mit

$-^W: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x$ ist L_{ring}-Struktur.

Def: Zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen isomorph, schreibe $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn es einen L-Isomorphismus $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gibt, d.h. eine Bijektion $F: A \to B$, die mit den Interpretationen der Zeichen aus L kommutiert:

(1.) $F(z^{\mathfrak{A}}) = z^{\mathfrak{B}}$ falls $z \in L$ Konstante

(2.) $F(z^{\mathfrak{A}}(a_1, .., a_n)) = z^{\mathfrak{B}}(F(a_1), .., F(a_n))$ falls $z \in L$ n-stell. Fkt.symbol und $a_1, .., a_n \in A$

(3.) $z^{\mathfrak{A}}(a_1, .., a_n) \Leftrightarrow z^{\mathfrak{B}}(F(a_1), .., F(a_n))$ falls $z \in L$ n-stell. Rel.symbol und $a_1, .., a_n \in A$.

Bemerkung: Isomorph zu sein ist eine Äq.relation ($\to$ Übung!)

Sei L eine Sprache, $v_0, v_1, \dots$ eine Folge von Variablen.

Def: Ein L-Term ist eine Zeichenfolge, die nach den folgenden Regeln gebildet wird:

T1: Jede Variable ist ein L-Term

T2: Jede Konstante aus L ist ein L-Term

T3: Wenn f ein n-stelliges Fkt.symbol aus L ist und $t_1, .., t_n$ L-Terme, dann ist auch $f t_1 ... t_n$ ein L-Term.

Rel.symbole kommen nicht vor!

Schreibweise: · Manchmal schreiben wir $f(t_1, .., t_n)$ statt $f t_1 ... t_n$

· Wenn f zweistellig ist, auch $t_1 f t_2$
(etwa: $(v_0 + v_1) \cdot (v_2 + v_3)$ statt $\cdot + v_0 v_1 + v_2 v_3$

· Wenn f einstellig ist, auch $t_1 f$ statt $f t_1$
(etwa $(v_0 \circ v_1)^{-1}$ statt ${}^{-1} \circ v_0 v_1$)

Lemma 1.1 (Eindeutige Lesbarkeit von Termen)

Jeder L-Term t hat genau eine der folgenden Formen:

(1.) t ist eine Variable

(2.) t ist eine Konstante

(3.) ~~xxxx~~ t hat die Form $ft_1 \dots t_n$, wobei f ein n-stelliges Fktsymbol ist und $t_1, \dots, t_n$ Terme sind.

Im Fall (3.) sind f und $t_1, \dots, t_n$ eindeutig bestimmt.

$\rightsquigarrow$ Klammern sind nicht nötig!

Brauche dazu:

Lemma 1.2. Ein echtes Anfangsstück eines L-Terms ist kein L-Term

Bew: Seien s, t L-Terme, s Anfangsstück von t.

Wir zeigen $s = t$ per Induktion über $|t|$.

I.A.: $|t| = 1 \Rightarrow |s| = 1 \Rightarrow s = t$.

I.S.: t hat die Form $ft_1 \dots t_n$

Dann gilt $s = f s_1 \dots s_n$

Z: $s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n$

Ang. nicht, sei etwa $s_1 = t_1, \dots, s_k = t_k$ und $s_{k+1} \neq t_{k+1}$ für ein $k<n$.

$\Rightarrow s_{k+1}$ ist Anfangsstück von t_{k+1} oder umgekehrt.

↯ zur I.V., da $|s_{k+1}|, |t_{k+1}| < |t|$. ☒

Bew. von 1.1: Nach Definition trifft genau einer der Fälle ein.