Lemma 1.11 (Modus Ponens): Wenn ϕ und $(\phi \to \psi)$ allg. gültig sind, dann auch ψ.

Bew: Klar.

Lemma 1.12 ($\exists$-Einführung) Wenn x nicht frei in ψ vorkommt und $\phi \to \psi$ allg. gültig ist, dann ist auch $\exists x\, \phi \to \psi$ allg. gültig.

Bew: Sei $\mathfrak{A} \models \exists x\, \phi[\beta]$, dann ex. $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \phi[\beta\frac{a}{x}]$ ist $\phi \to \psi$ allg. gültig, dann folgt $\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$

Nach 1.5 folgt $\mathfrak{A} \models \psi[\beta]$, da x nicht frei in ψ. ☑

§1.4 Der Gödelsche Vollständigkeitssatz

Def (Hilbertkalkül): Sei L eine Sprache. Eine L-Fml ist beweisbar, wenn sie

(1.) eine Tautologie ist oder

(2.) ein Gleichheitsaxiom ist oder

(3.) ein $\exists$-Quantorenaxiom ist oder

(4.) sich mit Hilfe des Modus Ponens aus zwei beweisbaren L-Fml ergibt oder

(5.) wenn sie sich mittels der Regel $\exists$-Einführung aus einer beweisbaren L-Fml ergibt.

Schreibe $\vdash_L \phi$, wenn ϕ beweisbar ist.

Erstes großes Ziel:

Satz 1.13: Eine L-Fml ist genau dann allgemeingültig, wenn sie beweisbar ist.

$$\models \phi \iff \vdash_L \phi$$

Insbes: $\vdash_L$ ist unabh. von der Sprache L, schreibe später $\vdash$.
(1.7)

Beweis: "$\Leftarrow$" Wenn $\vdash_L \phi$ gilt, ist ϕ nach 1.8 - 1.12 allgemeingültig

"$\Rightarrow$" braucht mehr Zutaten!

Lemma 1.14

1. (Aussagenlogik) Wenn $\phi_1, \ldots, \phi_n$ beweisbar sind und $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \to \psi$ eine Tautologie ist, ist auch ψ beweisbar.

2. Wenn x frei für t in ϕ, gilt
$\vdash \forall x \phi \to \phi\frac{t}{x}$ ($\forall$-Quantorenaxiom)

3. ($\forall$-Einführung) Wenn x nicht frei in ϕ ist, folgt aus $\vdash_L \phi \to \psi$ auch $\vdash_L \phi \to \forall x \psi$
Insbesondere folgt aus $\vdash_L \psi$ auch $\vdash_L \forall x \psi$

Bsp.: Die (allgemeingültige) Aussage $\exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y)$ ist beweisbar:

(i) $\vdash_L \forall y R(x,y) \to R(x,y)$ $\forall$-Quantorenaxiom (y frei für y in $R(x,y)$)

(ii) $\vdash_L R(x,y) \to \exists x R(x,y)$ $\exists$-Quantorenaxiom (x frei für x in $R(x,y)$)

(iii) $\vdash_L \forall y R(x,y) \to \exists x R(x,y)$ Aussagenlogik
[mit Tautologie: $((p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3)$]

(iv) $\vdash_L \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y)$ $\forall$-Einführung (y nicht frei in $\forall y R(x,y)$)

(v) $\vdash_L \exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y)$ $\exists$-Einführung (x nicht frei in $\forall y \exists x R(x,y)$)

Beweis von 1.14:

1.) $((\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \to \psi) \to (\phi_1 \to (\phi_2 \to (\ldots (\phi_n \to \psi) \ldots)))$ ist eine Tautologie

[$((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q)$ wahr $\Leftrightarrow$ $\mu(p_i) = F$ für ein i oder $\mu(p_i) = W$ für alle i und $\mu(q) = W$

sei i min. mit $\mu(p_i) = F$
dann ist $\mu(p_i \to (p_{i+1} \to \ldots (p_n \to q)) \ldots) = W$
und auch $\mu(p_1 \to (\ldots (p_n \to q) \ldots))$

$\Downarrow$

$\mu(p_1 \to (p_2 \to (\ldots (p_n \to q))) = W$]

$\vdash_L ((\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \to \psi)$ (Tautologie)

Modus Ponens $\Rightarrow$ $\vdash_L (\phi_1 \to (\phi_2 \to \ldots (\phi_n \to \psi) \ldots))$

$\vdash_L \phi_i \quad (1 \leq i \leq n)$

Wende Modus Ponens n-mal an $\Rightarrow \vdash_L \psi$.

(2.) Sei x frei für t in ϕ.

$\exists$-Quantorenaxiom $\Rightarrow \vdash_L \neg\phi\frac{t}{x} \to \exists x \neg\phi$.

$\vdash_L (\neg\phi\frac{t}{x} \to \exists x \neg\phi) \to (\neg\exists x \neg\phi \to \phi\frac{t}{x})$ (Tautologie)

[Betrachte die aussagenlog. Fml $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$]

Modus Ponens $\vdash_L \underbrace{\neg\exists x \neg\phi}_{\forall x \phi} \to \phi\frac{t}{x}$

(3.) Sei x nicht frei in ϕ und $\vdash_L \phi \to \psi$

Tautologie & MP (wie oben) $\Rightarrow \vdash_L \neg\psi \to \neg\phi$

$\exists$-Einführung $\Rightarrow \vdash_L \exists x \neg\psi \to \neg\phi$

wie oben $\Rightarrow \vdash_L \phi \to \underbrace{\neg\exists x \neg\psi}_{\forall x \psi}$

Für "insbesondere"

Ang $\vdash_L \psi$. Sei ϕ Tautologie, die x nicht frei enthält (etwa $\phi = \forall x\, x \doteq x$)

Aussagenlogik $\Rightarrow \vdash_L \phi \to \psi$.

($\vdash_L \phi$, $\vdash_L \psi$ und $\phi \wedge \psi \to (\phi \to \psi)$ ist Tautologie)

$\forall$-Einführung (gerade gezeigt) $\Rightarrow \vdash_L \phi \to \forall x \psi$

Modus Ponens $\Rightarrow \vdash_L \forall x \psi$. $\boxtimes$

Lemma 1.15. Sei $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ L-Fml, C eine Menge neuer Konstanten (d.h. $c \notin L$ f.a. $c \in C$) und $c_1, \ldots, c_n$ eine Folge paarweise verschiedener Elemente von C. Dann gilt:

$$\vdash_{L \cup C} \phi(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow \vdash_L \phi(x_1, \ldots, x_n)$$

⇒ Können uns im Beweis von 1.13 auf L-Aussagen beschränken!

Def: Sei L eine Sprache und ϕ eine L-Fml. Ein L-Beweis von ϕ ist eine endliche Folge $\phi_1, \ldots, \phi_\ell$ von L-Fml, s.d. jedes ϕ_i für $1 \leq i \leq \ell$ entweder ein Axiom aus dem Hilbertkalkül ist oder sich mit einer der Regeln (MP & $\exists$-Einf.) aus $\phi_1, \ldots, \phi_{i-1}$ ergibt.

Bew von 1.15:

"⇒" Sei $\phi_1, \ldots, \phi_\ell$ ein $L \cup C$-Beweis von $\phi(c_1, \ldots, c_n)$, d.h. jedes ϕ_i ist $L \cup C$-Fml, $\phi_\ell = \phi(c_1, \ldots, c_n)$

OE ~~vorkommen~~ sind die einzigen Konstanten aus C, die in $\phi_1, \ldots, \phi_\ell$ vorkommen, aus $\{c_1, \ldots, c_n\}$

(sonst fasse $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ als $\phi(x_1, \ldots, x_{n+m})$ auf

– mehr freie Variablen, gleiche Zeichenreihe)

Seien $y_1, \ldots, y_n$ Variablen, die in $\phi_1, \ldots, \phi_\ell$ nicht vorkommen

⇒ ersetze c_i durch y_i in $\phi_1, \ldots, \phi_\ell$

⇒ erhalte L-Beweis von $\phi(y_1, \ldots, y_n)$

$\forall$-Einführung (n-mal) $\vdash \forall y_1, \ldots, y_n \, \phi(y_1, \ldots, y_n)$

$\forall$-Quantorenaxiom (y_i frei für x_i)

⇒ $\vdash_L \forall y_1, \ldots, y_n \, \phi(y_1, \ldots, y_n) \rightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n)$

Modus Ponens ⇒ $\vdash_L \phi(x_1, \ldots, x_n)$

"⇐" Ang $\vdash_L \phi(x_1, \ldots, x_n)$

$\forall$-Einführung ⇒ $\vdash_L \forall x_1, \ldots, x_n \, \phi(x_1, \ldots, x_n)$

$\forall$-Quantorenaxiom (x_i frei für c_i in $\phi(x_1, \ldots, x_n)$)

⇒ $\vdash_{L \cup C} \phi(c_1, \ldots, c_n)$ ☒