(1.) $<$ heißt partielle Ordnung, wenn

(O1) $<$ irreflexiv ist $(ZFC \vdash \forall x \in a \; \neg x < x)$ und

(O2) $<$ transitiv ist $(ZFC \vdash \forall x, y, z \in a \; (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z))$

(2.) Eine partielle Ordnung $<$ auf a heißt linear, falls $ZFC \vdash \forall x, y \in a \; x < y \vee x = y \vee y < x$.

Def 2.25: Eine Menge x heißt transitiv, wenn ihre Elemente auch Teilmengen sind, d.h.

$$z \in y \in x \rightarrow z \in x.$$

Bem 2.26: x ist transitiv gdw. $\bigcup x \subseteq x$.

Bsp. 2.27: $x = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{4}, 5, 6\}$ nicht transitiv

$\in \underline{3} \notin x$.

Def. 2.28: x heißt natürliche Zahl, wenn

(1.) x transitiv ist und

(2.) $\in$ eine lineare Ordnung auf x definiert und

(3.) jede nicht-leere Teilmenge von x bzgl. dieser Ordnung ein kleinstes und ein größtes Element hat

folgt aus dem Fundierungsaxiom
(Def. funktioniert auch für $ZFC \setminus \{\text{Fundierung}\}$)

Ziel: $\omega = \{x : x \text{ ist natürliche Zahl}\}$ ist eine Menge

Lemma 2.29: In ZFC gilt:

(1.) Die Elemente einer natürlichen Zahl sind natürliche Zahlen.

(2.) $\underline{0}$ ist eine natürliche Zahl. Wenn x eine natürliche Zahl ist, dann auch $S(x)$.

(3.) Jede natürliche Zahl außer $\emptyset$ hat die Form $S(x)$ für eine natürliche Zahl x.

Bew: (1.) Sei x natürliche Zahl, $y \in x$.

x transitiv $\Rightarrow y \subseteq x$.

$\overset{x \text{ durch } \in \text{ lin. geordnet}}{\Rightarrow}$ y durch $\in$ linear geordnet.

Def 2.28(3.) $\Rightarrow$ jedes $z \subseteq y$, $z \neq \emptyset$ hat Min & Max

Bleibt z.z.: y transitiv.

Sei $u \in z \in y \overset{x \text{ transitiv}}{\Rightarrow} z \in x \overset{x \text{ transitiv}}{\Rightarrow} u \in x$.

$\in$ linear auf x $\Rightarrow u \in y$.

(2.) Einfach. Etwa: Ang. x transitiv.

Sei $y \in S(x) = x \cup \{x\}$

Falls $y = x$ gilt $x \in S(x)$

Falls $y \neq x$ gilt $y \in x \overset{x \text{ trans.}}{\Rightarrow} y \subseteq x \Rightarrow y \subseteq x \cup \{x\}$.

Andere ähnlich.

(3.) Sei $y \neq \emptyset$ natürliche Zahl, und sei $x \in y$ das maximale Element.

Dann gilt $y = \{z : z \in y\} = \{z \in y : z \leq x\}$

$= \underbrace{\{z \in y : z < x\}}_{\substack{\supseteq x, \text{ da } y \text{ transitiv} \\ \subseteq x, \text{ da } z < x \text{ gdw. } z \in x}} \cup \{x\}$

$= x \cup \{x\}$. ☒

Lemma 2.30 $\omega = \{x : x \text{ ist natürliche Zahl}\}$ ist eine Menge.

Bew: Das Unendlichkeitsaxiom liefert Menge x_0 mit:

$\underline{0} \in x_0$ und $\forall y (y \in x_0 \rightarrow S(y) \in x_0)$.

Betrachte $\omega' = \omega \cap X$. (Menge nach (AUS))

Beh: $\omega' = \omega$.

Bew: Ang. ex. $x \in \omega \setminus \omega'$. Sei y das $\in$-kleinste Element von $s(x)$ mit $y \notin \omega'$.

(Warum ex. ~~so~~ ein Element y von $s(x)$ mit $y \notin \omega'$? Es gilt $x \in s(x)$, $x \notin \omega'$!)

Dann $z \in y \overset{s(x)\text{ nat.}}{\underset{\text{Zahl}}{\Rightarrow}} z \in s(x) \overset{y\text{ min.}}{\underset{\text{gewählt}}{\Rightarrow}} z \in \omega'$.

Wegen $\underline{0} \in \omega'$ folgt $y \neq \emptyset$, also $y = s(u)$ für ein $u \in y$.

ω' abg. unter $s \Rightarrow y = s(u) \in \omega'$ ↯ ☒

Folgerung 2.31 (INDUKTION) Sei $A \subseteq \omega$ mit $\underline{0} \in A$ und ZFC $\vdash \forall z\, (z \in A \rightarrow s(z) \in A)$. Dann gilt $A = \omega$.

Bew: Wdh. den Bew. der Beh. in 2.30 mit $\omega' = A$ ☒

Schreibweise: Schreibe ab jetzt $<$ für die $\in$-Relation zwischen natürlichen Zahlen.

Lemma 2.32:

(1.) $<$ ist eine lineare Ordnung auf ω. Jede nicht-leere TM von ω hat ein kleinstes Element (d.h. '$<$' ist Wohlordnung auf ω).

(2.) Für alle $n \in \omega$ ist $s(n)$ der unmittelbare Nachfolger.

(3.) Alle $n > \underline{0}$ haben einen unmittelbaren Vorgänger.

Bew: (2.): Sei $n < m \leq s(n) \Rightarrow n \in m$, $n \subseteq m$

$\Rightarrow s(n) \subseteq m$.

(1.) $<$ ist transitiv, da jedes $x \in \omega$ ~~der~~ transitiv ist.

Zeige: je zwei natürliche Zahlen sind vergleichbar per Induktion (2.31).

Z: Alle $m \in \omega$ sind vergleichbar mit n.

$n = \underline{0}$: Wenn $m = \underline{0}$, dann gilt ~~...~~ $m = n$.
Sonst hat m ein kleinstes Element x.
m transitiv $\Rightarrow x = \underline{0}$. Also $n < m$.

$n = s(k)$ [I.V.: k ist mit allen natürlichen Zahlen vergleichbar]

Zwei Fälle:
Falls $m \leq k$ folgt $m < n = s(k)$.
Falls $k < m$
Dann entweder k größtes Element von m, d.h. $m = s(k) \Rightarrow m = n$.
oder $s(k) \in m \Rightarrow n < m$.

(3.) Vorgänger von n ist das größte Element m von n. ☑

Satz 2.33 (Rekursionssatz): Gegeben Fkt. $g: A \to B$ und $h: A \times \omega \times B \to B$. Dann ex. ein eind. bestimmtes $f: A \times \omega \to B$ mit $f(a, \underline{0}) = g(a)$ und $f(a, s(n)) = h(a, n, f(a,n))$ f.a. $a \in A$ und $n \in \omega$.

Bew: Halte $a \in A$ fest.
Zeige per Induktion über m: f.a. $m \in \omega$ ex. genau ein $f': s(m) \to B$ mit $\phi(a, m, f')$, wobei
$\phi(a, m, f') = (f'(\underline{0}) = g(a) \wedge \forall n < m \; f'(s(n)) = h(a, n, f'(n)))$
[Bew: klar]

Definiere nun $f = \{(a, m, b) \in (A \times \omega \times B) :$
$\exists f' \ \phi(a, m, f') \wedge f'(m) = b\}$
mit Ersetzungsaxiom. $\boxtimes$

Def 2.34 Addition $+ : \omega \times \omega \to \omega$ und Multiplikation $\cdot : \omega \times \omega \to \omega$ werden durch die folgenden Rekursionsgleichungen definiert:

$$a + \underline{0} = a \qquad a + s(n) = s(a + n)$$
$$a \cdot \underline{0} = \underline{0} \qquad a \cdot s(n) = (a \cdot n) + a$$

Übungsaufgabe: (ZFC) $(\omega, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Halbring mit 1, d.h. Körperaxiome 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 gelten (10 gilt auch).

§ 2.3 Ordinalzahlen und Kardinalzahlen (Cantors Mengenlehre)

2.35 Def: Eine Ordinalzahl ist eine transitive Menge, die durch $\in$ linear geordnet wird.

Bsp: Jede natürliche Zahl; ω, $s(\omega) = \omega \cup \{\omega\}$.

Schreibe On für die Klasse der Ordinalzahlen.

Def 2.36: Eine Klasse A ist ein System von Mengen $\{x : \phi(x, \bar{a})\}$, die eine L_{ME}-Fml $\phi(x, \bar{a})$ mit fest gewählten Parametern $\bar{a} = a_1, \ldots, a_n$ erfüllen ($a_1, \ldots, a_n$ sind Mengen).

Bsp: $V = \{x : x \text{ Menge}\}$ Klasse aller Mengen

Bem 2.37: A Klasse, x Menge $\overset{\text{Aussonderung}}{\Rightarrow}$ $A \cap x$ Menge.