Axiom (Ersetzung): Für jede L_{Me}-Fml $\phi(u,z,\bar{w})$

$\forall y,\bar{w}\,(\forall u\, \exists! z\, \phi(u,z,\bar{w}) \to \exists x\, \forall z\,(z \in x \leftrightarrow \exists u\,(u \in y \wedge \phi(u,z,\bar{w}))))$

$\bar{w}$ = Tupel von Variablen

$\exists! x\, \phi(x)$ ist Abkürzung für $\exists x\,(\phi(x) \wedge \forall y\, \phi(y) \to x \doteq y)$

Bem 2.10: Die Voraussetzung $\forall u\, \exists! z\, \phi(u,z,\bar{w})$ bedeutet, dass die Klasse $F = \{(u,z) : \phi(u,z,\bar{w})\}$ ein Funktional $F: V \to V$ definiert. Das Ersetzungsaxiom fordert nun, dass für jede Menge y das Bild $F[y]$ wieder eine Menge ist.

Beispiele 2.11 (Anwendung Ersetzungsaxiom)

(i) Zeige Existenz von $a \times b$ ohne Potenzmengenaxiom

Sei x fest gewählt. Dann gilt

$ZFC \vdash \forall u\, \exists! z \quad z \doteq (x,u)$

$\Rightarrow$ falls b Menge ist auch $\{(x,u) : u \in b\} = \{x\} \times b$ eine Menge.

Nochmal Ersetzungsaxiom ($ZFC \vdash \forall x\, \exists! z \quad z = \{(x,u) : u \in b\}$)

$\Rightarrow c = \{\{x\} \times b : x \in a\}$ ist eine Menge.

Nun gilt $a \times b = \bigcup c = \bigcup\{\{(x,y) : y \in b\} : x \in a\}$

$= \{(x,y) : x \in a \wedge y \in b\}$.

(ii) Sei R Relation, dann ist auch $R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$ eine Menge.

Def. 2.12: Eine Funktion $f: a \to b$ heißt

- surjektiv, wenn $\mathrm{Im}(f) = b$ — Eigenschaft des Paares f, b.
- injektiv, wenn f^{-1} eine Fkt. ist
- bijektiv, wenn f injektiv & surjektiv ist.

Exkurs - Definitorische Erweiterungen

Motivation: Mittels der Axiome lassen sich neue Konstanten/Funktionen/Relationen definieren (etwa R^{-1} für eine Relation R)

$\leadsto$ können wir diese 'formal' zur Sprache hinzufügen?

Beispiel 2.13: $x \subseteq y$ war definiert als $\forall z (z \in x \to z \in y)$

(1. Auffassung) "$\subseteq$" ist eine Abkürzung.

(2. Auffassung) $L_{Me\subseteq} := L_{Me} \cup \{\subseteq\}$.

$ZFC' = ZFC \cup \{\forall x, y\, (x \subseteq y \leftrightarrow \forall z (z \in x \to z \in y))\}$

Dann gilt:

(i) Jede L_{Me}-Aussage, die in ZFC' beweisbar ist, ist auch in ZFC beweisbar, d.h. ZFC' ist eine konservative Erweiterung von ZFC

Bew: Jedes Modell von ZFC lässt sich eind. zu einem Modell von ZFC' expandieren $\leadsto$ fertig mit 1.19. ☑

(ii) Jede $L_{Me\subseteq}$-Formel ist in ZFC' zu einer L_{Me}-Formel äquivalent:

Bew: Ersetze in $\phi'(x_1, \ldots, x_n)$ jedes Vorkommen von "$\subseteq$" durch seine Definition (eventuell muss man dabei die gebundene Variable z umbenennen, etwa $z \subseteq x \leadsto \forall z'\, z' \in z \to z' \in x$.) ☑

Folgerung: In ZFC' gelten die Axiome und Axiomenschemata auch, wenn man das neue Zeichen "$\subseteq$" zulässt.

Weiteres Beispiel 2.14: $y = P(x)$

Hier ist die zweite Auffassung nötig:

$$ZFC \vdash \forall x \exists y \underbrace{\forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)}_{\phi(x,y)}$$

Informell: ZFC beweist "$\phi(x,y)$ ist ein Funktional" (rechtseindeutige Klasse von Paaren).

$L_{MeP} := L_{Me} \cup \{P\}$

$ZFC' = ZFC \cup \{\forall x \; \phi(x, P(x))\}$

Bem 2.15: Sei T L-Theorie, $\phi(x_1,..,x_n)$ L-Fml. Wenn wir für ϕ ein neues (n-stelliges) Relationszeichen R_ϕ einführen, erweitern wir L zu $L' = L \cup \{R_\phi\}$ und T zu $T' = T \cup \{\forall x_1,..,x_n (R_\phi(x_1,..,x_n) \leftrightarrow \phi(x_1,..,x_n))\}$. Dann ist T' eine konservative Erweiterung von T und jede L'-Fml ist T'-beweisbar äquivalent zu einer L-Fml.

Bew: Genau wie 2.13. ☑

Satz 2.16: Sei T L-Theorie, $\phi(x_0,..,x_n)$ L-Fml mit $T \vdash \forall x_1,..,x_n \exists! x_0 \; \phi(x_0,..,x_n)$ "ϕ ist beweisbar funktional". Sei f_ϕ ein neues n-stelliges Fkt.symbol und $L' = L \cup \{f_\phi\}$. Dann ist die L'-Theorie

$$T' = T \cup \{\forall x_1,..,x_n \; \phi(f(x_1,..,x_n), x_1,..,x_n)\}$$

eine konservative Erweiterung von T. Darüber hinaus ex. für jede L'-Fml ψ' eine L-Fml ψ mit $T' \vdash \psi' \leftrightarrow \psi$

Def 2.17: Erweiterungen wie in 2.15 & 2.16 heißen definitorisch.

Bew von 2.16:

Konservativ: Sei $\mathfrak{A} \models T$. Dann lässt sich $\mathfrak{A}$ eindeutig zu einem Modell von T' fortsetzen.

(Interpretiere f_ϕ als die Fkt., s.d.

$f_\phi(a_1, \dots, a_n) = a_0$ für das eind. $a_0 \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \phi(a_0, \dots, a_n)$). $\leadsto$ fertig mit 1.19.

Jede L'-Formel ist mod. T' zu einer L-Fml äquivalent:

Sei ψ' L'-Fml. Konstruiere ψ rekursiv über den Aufbau von ψ':

$\psi' = t_1 \doteq t_2$ für L'-Terme t_1, t_2

Ang. f kommt in t_1 vor, schreibe $t_1 = s_0(f(s_1, \dots, s_n))$ für L'-Terme $s_0, s_1, \dots, s_n$.

Setze dann $\psi_1 = \exists x_0 (\phi(x_0, s_1, \dots, s_n) \wedge s_0(x_0))$

$\leadsto$ in ψ_1 kommt f 1x weniger oft vor!

induktiv: Erhalte ψ, s.d. f nicht vorkommt.

$\psi' = R t_1 \dots t_n$: Analog

Alle anderen Schritte: nichts zu tun. $\boxtimes$

Bem 2.17 Falls $n = 0$ in Satz 2.16 führen wir so eine neue Konstante ein (macht auch Sinn!)

Bsp: $P(x)$, $\bigcup x$, $x \cup y$, $\{x_1, \dots, x_n\}$, $\emptyset$ (definiert durch $\varphi(x_0) = \forall z \neg z \in z$)

Korollar 2.18: Aussonderungs- und Ersetzungsaxiom bleiben gültig, wenn ϕ derart neu eingeführte Relationszeichen, Fkt.zeichen und Konstanten enthält.

Nun: zurück zu den Axiomen!
Es fehlen noch: Fundierung, Unendlichkeit, Auswahl.

Intuition (keine formale Definition!) Eine Menge x heißt fundiert, wenn jede bei x anfangende $\in$-Kette $x \ni y_0 \ni y_1 \ni \ldots$ nach endlich vielen Schritten abbricht.

Axiom (Fundierung) $\forall x \, (\neg x \doteq \emptyset \to \exists z \in x \;\; z \cap x \doteq \emptyset)$

Informell: x nicht fundiert $\Rightarrow$ jedes Element $z \in x$ hat Element $y \in z$ mit $y \in x$
mit dem Auswahlaxiom $\rightsquigarrow$ erhalte unendl. $\in$-Kette.

Folgerung 2.19 (ZFC) Eine Menge kann sich nicht selbst als Element enthalten.
$\rightsquigarrow$ weiterer Beweis für V keine Menge.

Rechtfertigungen fürs Fundierungsaxiom:
(1.) "Unheimliche Mengen" $x = \{x\}$ ausgeschlossen.
(2.) $(M, E) \models ZFC \setminus \{\text{Fundierung}\}$
$N = \{m \in M : (M, E) \models \text{'}m \text{ ist fundiert'}\}$
$\Rightarrow (N, E \restriction_{N^2}) \models ZFC$
"fundierte Mengen sind eh da"
(3.) $(M, E) \models ZFC \setminus \{\text{Fundierung}\}$. Dann
$(M, E) \models$ 'für jedes x ex. fundiertes m und Bijektion $f: x \to m$'
Also: Brauche nur fundierte Mengen, um Mathematik zu betreiben.

Axiom (Unendlichkeit): $\exists x\,(\underbrace{\emptyset \in x} \wedge \forall z \in x \;\; z \cup \{z\} \in x)$
$\exists x_0\,(\forall y\,(\neg y \in x_0) \wedge x_0 \in x)$

Axiom (Auswahl): $\forall x\,(\neg \emptyset \in x \to \exists f: x \to V \;\; \forall z \in x \;\; f(z) \in z)$

§2.2 Die natürlichen Zahlen.

Def 2.20: Für $n \in \mathbb{N}$ definiere rekursiv $\underline{n} = \{\underline{0}, \underline{1}, \dots, \underline{n-1}\}$

d.h. $\underline{0} = \{\} = \emptyset$

$\underline{1} = \{\emptyset\}$

$\underline{2} = \{\underline{0}, \underline{1}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\underline{3} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Bem: Dies ist eine Möglichkeit die nat. Zahlen als Mengen zu kodieren!

Definition 2.21: $S(x) := x \cup \{x\}$ (Nachfolger)

Nun gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $ZFC \vdash S(\underline{n}) = \underline{n+1}$

Jeder natürlichen Zahl ist eine Menge zugeordnet.

Wir wollen: $\{\underline{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Menge.

Idee: $\omega = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots\}$

Lemma 2.22: Falls $m < n$ gilt $ZFC \vdash \neg \underline{m} = \underline{n}$.

Beweis: Metamathematische Induktion.

Folgerung 2.23: Für alle n, m gilt:

$m < n \Rightarrow ZFC \vdash \underline{m} \in \underline{n}$

$m \geq n \Rightarrow ZFC \vdash \neg \underline{m} \in \underline{n}$.

Def 2.24 Sei $<$ eine Relation auf einer Menge a, d.h. eine Teilmenge von $a \times a$.