Prof. F. Jahnke
B. Boissonneau

Universität Münster
Sommersemester 2019

Logik I
Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass wenn $\neg\,\mathrm{CON}_{\mathrm{ZFC}}$ nicht in ZFC beweisbar ist, diese Unbeweisbarkeit nicht in ZFC beweisbar ist.
Hinweis: Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz gilt für jede Erweiterung von ZFC durch endlich viele Axiome, so auch für $\mathrm{ZFC}^+ := \mathrm{ZFC} \cup \{\mathrm{CON}_{\mathrm{ZFC}}\}$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie in ZFC:

a) Die Aussage $\neg\,\mathrm{CON}_{\mathrm{ZFC}}$ ist zu ihrer eigenen Widerlegbarkeit äquivalent.
b) Bis auf beweisbare Äquivalenz ist $\neg\,\mathrm{CON}_{\mathrm{ZFC}}$ die einzige Aussage mit dieser Eigenschaft.

Hinweis: Beweis des zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes.

Aufgabe 3. Zeigen Sie in ZFC, dass wenn $\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$, so $\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
Hinweis: Benutzen Sie den zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz für die Theorie $\mathrm{ZFC} \cup \{\neg\varphi\}$.

Aufgabe 4.

a) Sei $P_i^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ die i-te Projektionsfunktion, genauer sei $P_i^n(x_1, \cdots, x_n) := x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Zeigen Sie, dass P_i^n Turing-berechenbar ist.
b) Seien g, h n bzw. $n+2$-stellige, Turing-berechenbare Funktionen, dann zeigen Sie, dass die durch primitive Rekursion definierte Funktion f,

$$f(x_1, \cdots, x_n, 0) := g(x_1, \cdots, x_n)$$

und

$$f(x_1, \cdots, x_n, y+1) := h(x_1, \cdots, x_n, y, f(x_1, \cdots, x_n, y))$$

ebenfalls Turing-berechenbar ist.

Abgabe bis Donnerstag, den 30.05, 10:00 Uhr, in Briefkasten 177.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/bboisson/de/L1/