Prof. F. Jahnke
B. Boissonneau

Universität Münster
Sommersemester 2019

Logik I
Übungsblatt 5

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{L}$-Struktur. Für jedes $a \in A$ sei injektiv eine neue Konstante $c_a \notin \mathcal{L}$ gewählt. Dann bezeichnet $\mathcal{A}_A$ die $\mathcal{L}(A) = (\mathcal{L} \cup \{c_a \mid a \in A\})$-Struktur mit Universum A die jedes Symbol aus $\mathcal{L}$ so wie $\mathcal{A}$ interpretiert und jede neue Konstante c_a durch a. Die Menge $\{\varphi \mid \mathcal{A}_A \vDash \varphi\}$ der $\mathcal{L}(A)$-Aussagen, die in $\mathcal{A}_A$ gelten, heißt elementares Diagramm von $\mathcal{A}$.

Aufgabe 1. Sei T eine beliebige $\mathcal{L}$-Theorie und $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) Es gibt einen $\mathcal{L}$ Struktur $\mathcal{B}$, so dass $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \vDash T$.
b) Die Vereinigung von T und dem elementaren Diagramm von $\mathcal{A}$ ist konsistent.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass das Paarmengenaxiom aus dem Ersetzungsaxiom, Potenzmengenaxiom und der Existenz der leeren Menge folgt.

Aufgabe 3. Sei $P_{<\omega}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $\beta : \mathbb{N} \to P_{<\omega}(\mathbb{N})$ eine Bijektion. Wir machen $\mathbb{N}$ zu einer $\{\varepsilon\}$-Struktur $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\beta$ durch $i \; \varepsilon^{\mathcal{N}} j \Leftrightarrow i \in \beta(j)$.

a) Welche Axiome von ZFC (ohne Fundierung) gelten in $\mathcal{N}_\beta$?
b) Finden Sie jeweils eine Bijektion β, so dass das Fundierungaxiom in $\mathcal{N}_\beta$ gilt.

   Hinweis: Um eine fundierte Struktur zu erhalten, betrachte man die Bijektion β mit $\beta^{-1}(\{n_1, \cdots, n_k\}) = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$.
c) Geben Sie ein β an, für das $\mathcal{N}_\beta$ nicht das Fundierungsaxiom erfüllt.
d) Geben Sie ein β an, für das $\mathcal{N}_\beta$ das Fundierungsaxiom erfüllt, aber trotzdem *nicht fundiert* ist; d.h. es enthält eine unendliche absteigende ε-Kette.

   Hinweis: Ersetzen Sie $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z}$ und finden Sie eine geeignete Bijektion $\beta : \mathbb{Z} \to P_{<\omega}(\mathbb{Z})$, so dass für $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt: $m \in \beta(n) \Rightarrow m < n$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass wenn ZFC konsistent ist, ZFC auch ein Modell besitzt das nicht fundiert ist (obwohl es ja das Fundierungsaxiom erfüllt!). Warum ist das kein Widerspruch?
Hinweis: Kompaktheit.

Abgabe bis Donnerstag, den 09.05, 10:00 Uhr, in Briefkasten 177.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/bboisson/de/L1/