Bew: Per Induktion über den Aufbau von ϕ

(1.) $\phi = t_1 \doteq t_2$

$\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$
$\overset{1.4}{\Leftrightarrow} t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma] = t_2^{\mathfrak{A}}[\gamma]$
$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\gamma]$

(2.) $\phi = Rt_1 \ldots t_n$ analog.

(3.) $\phi = \neg \psi$

$\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\beta] \overset{\text{I.V.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \not\models \psi[\gamma]$
$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\gamma]$.

(4.) $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$

Analog zu (3.)

(5.) $\phi = \exists y \psi$

$\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow$ ex. $a \in A$ $\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{y}]$

[x frei in $\psi \Rightarrow x = y$ oder x frei in ϕ
(abgesehen von x hat ψ die gleichen freien Variablen wie x)]

$\overset{\text{I.V.}}{\Leftrightarrow}$ ex. $a \in A$ $\mathfrak{A} \models \psi[\gamma\frac{a}{y}]$
$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\gamma]$. $\square$

Schreibweise: Wenn wir eine L-Fml in der Form $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ schreiben, meinen wir

(1.) die x_i sind paarweise verschiedene Variablen, die in ϕ vorkommen.

(2.) In ϕ kommen nur Variablen aus $\{x_1, \ldots, x_n\}$ frei vor.

Für eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ ist dann nach 1.5 $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$ wohldefiniert, durch $\mathfrak{A} \models \phi[\beta]$ mit $\beta(x_i) = a_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Bem: Auf diese Weise definiert $\phi(x_1,..,x_n)$ eine n-stell. Relation
$$\phi(A) = \{(a_1,..,a_n) \in A^n : \mathfrak{A} \models \phi[a_1,..,a_n]\}$$
Bsp: $\phi = \exists y \; y \cdot y = x$ $\qquad \phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$
$\qquad \phi(\mathbb{Q}) \subsetneq \mathbb{Q}_{\geq 0}$

$\psi = x \doteq y \qquad \psi(A) = A^2$

Def: Eine L-Fml ohne freie Variable heißt L-Aussage. Schreibe für eine L-Aussage ϕ und eine L-Struktur $\mathfrak{A}$
$\mathfrak{A} \models \phi$, wenn $\mathfrak{A} \models \phi[\beta]$ für eine (äq.: alle) Belegung(en) β gilt.

Sprechweisen: · ϕ gilt in $\mathfrak{A}$, ϕ ist wahr in $\mathfrak{A}$
· $\mathfrak{A}$ glaubt / erfüllt ϕ, $\mathfrak{A}$ ist Modell von ϕ.

Bsp: Körperaxiome sind L_{Ring}-Aussagen
Eine ~~VH~~ L_{Ring}-Struktur K ist genau dann ein Körper, wenn in K die Körperaxiome gelten.

Def: Zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ heißen elementar äquivalent, wenn f.a. L-Aussagen ϕ gilt:
$$\mathfrak{A} \models \phi \iff \mathfrak{B} \models \phi.$$
Schreibe dann $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Übung: (i) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$
(ii) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ endlich, L endlich
$\Rightarrow \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Bsp: $\tilde{\mathbb{Q}} = (\mathbb{Q}^{alg}, \underline{0}^{\tilde{\mathbb{Q}}}, \underline{1}^{\tilde{\mathbb{Q}}}, \cdot^{\tilde{\mathbb{Q}}}, +^{\tilde{\mathbb{Q}}}, -^{\tilde{\mathbb{Q}}}) \equiv \mathfrak{C} = (\mathbb{C}, \underline{0}^{\mathfrak{C}}, \underline{1}^{\mathfrak{C}}, +^{\mathfrak{C}}, \cdot^{\mathfrak{C}}, -^{\mathfrak{C}})$
mit den üblichen Interpretationen.

Nun: Für das Hilbertkalkül müssen wir L-Terme in L-Formeln einsetzen können (Variable durch L-Term ersetzen). Dazu benötigen wir das folgende (sehr technische!) Konzept:

Sei x Variable, s ein L-Term, ϕ L-Fml.

$t\frac{s}{x}$ entsteht durch Ersetzen aller Vorkommen von x durch s.

$\phi\frac{s}{x}$ -"- -"- freien -"-

Def (rekursiv) Für x Variable, s L-Term, ϕ L-Fml definiere $\phi\frac{s}{x}$ durch

(1.) $t_1 \doteq t_2 \frac{s}{x} = t_1\frac{s}{x} \doteq t_2\frac{s}{x}$

(2.) $Rt_1 \dots t_n \frac{s}{x} = R\, t_1\frac{s}{x} \dots t_n\frac{s}{x}$

(3.) $(\neg \psi)\frac{s}{x} = \neg(\psi\frac{s}{x})$

(4.) $(\psi_1 \wedge \psi_2)\frac{s}{x} = \psi_1\frac{s}{x} \wedge \psi_2\frac{s}{x}$

(5.) $(\exists y\, \psi)\frac{s}{x} = \begin{cases} \exists y\, (\psi\frac{s}{x}) & \text{wenn } x \neq y \\ \exists y\, \psi & \text{wenn } x = y \end{cases}$

Bsp:
- $\tilde{f}(x, y)\frac{g(y)}{x} = \tilde{f}(g(y), y)$
- $(\exists y\, R(y, f(\underline{x})) \wedge \exists x\, S(\underline{x}))\frac{g(y)}{x} = (\exists y\, R(y, f(g(y))) \wedge \exists x\, S(x))$

  frei ... nicht frei
- $\exists x\, S(x)\frac{g(y)}{x} \neq \exists y\, S(g(y))$

  $\not=$

  $\exists x\, S(g(y))$

hier: $\tilde{f}$ zweistell. Fkt zeichen
R zweistell. Rel. zeichen
f, g, S 1-stell. Fkt zeichen

Intuition: x heißt frei für s in ϕ, wenn kein freies Vorkommen von x in ϕ im Wirkungsbereich eines Quantors liegt, der eine Variable aus x bindet.

Bsp: • $\phi = \exists y\ R(y, f(x))$ $\quad s_1 = g(y)$, $s_2 = g(z)$
$\leadsto$ ϕ nicht frei für s_1, ϕ frei für s_2

• $\psi = \forall y\,(0 < x)$ "x ist größer als Null"
$s = y$ $\quad \psi\frac{s}{x} = \forall y\,(0 < y)$
"alle Elemente sind größer als Null"

Lemma 1.6 (Substitutionslemma): $\mathfrak{A}$ L-Struktur, t L-Term, ϕ L-Fml, β Belegung.

(1.) $(t\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$

(2.) Wenn x frei für s in ϕ ist, dann gilt:
$\mathfrak{A} \models \phi\frac{s}{x}[\beta] \iff \mathfrak{A} \models \phi[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$

Def: x ist frei für s in ϕ, wenn x nicht frei in ϕ ist oder wenn x frei in ϕ ist und einer der folgenden Fälle zutrifft:

(1.) $\phi = t_1 \doteq t_2$
(2.) $\phi = Rt_1 \ldots t_n$
(3.) $\phi = \neg\psi$ und x ist frei für s in ψ
(4.) $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ und x ist frei für s in ψ_1 und ψ_2
(5.) $\phi = \exists y\,\psi$ und x ist frei für s in ψ und y kommt in s nicht vor.

Bew von 1.6:

(1.) Induktion über den Aufbau von t:

• $t = x \Rightarrow (t\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = s^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$

setze $b = s^{\mathfrak{A}}[\beta]$

• $t = y$, $y \neq x$ $\quad (t\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = \beta(y) = t^{\mathfrak{A}}[\beta\frac{b}{x}]$

• $t = c$ $\quad (t\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = c^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}[\beta\frac{b}{x}]$

· $t = f t_1 \dots t_n$

$$\begin{aligned}(t\tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] &= f^{\mathfrak{A}}\big((t_1\tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, (t_n\tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta]\big) \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} f^{\mathfrak{A}}\big(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta\tfrac{b}{x}], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta\tfrac{b}{x}]\big) \\ &= t^{\mathfrak{A}}[\beta\tfrac{b}{x}]\end{aligned}$$

(2.) Vorbemerkung: Wenn x nicht frei in ϕ vorkommt, gilt:

$$\mathfrak{A} \models \phi\tfrac{s}{x}[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\beta] \overset{1.5}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \models \phi[\beta\tfrac{b}{x}]$$

Nun: Induktion über den Aufbau von ϕ

(i) $\phi = t_1 \doteq t_2$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \phi\tfrac{s}{x}[\beta] &\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \models t_1\tfrac{s}{x} \doteq t_2\tfrac{s}{x}[\beta] \\ &\overset{\text{Def } \mathfrak{A}\models\phi[\beta]}{\Leftrightarrow} (t_1\tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = (t_2\tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] \\ &\overset{(1.)}{\Leftrightarrow} t_1^{\mathfrak{A}}[\beta\tfrac{b}{x}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\beta\tfrac{b}{x}] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\beta\tfrac{b}{x}]\end{aligned}$$

(ii) Genau wie (i)

(iii) $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \phi\tfrac{s}{x}[\beta] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\psi_1\tfrac{s}{x} \wedge \psi_2\tfrac{s}{x})[\beta] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi_1\tfrac{s}{x}[\beta] \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi_2\tfrac{s}{x}[\beta] \\ &\overset{\text{I.V.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \models \psi_1[\beta\tfrac{b}{x}] \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi_2[\beta\tfrac{b}{x}] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\beta\tfrac{b}{x}]\end{aligned}$$

benutze hier: x frei für s in ψ_1 und ψ_2

(iv) Wie (iii)

(v) $\phi = \exists y\, \psi$

Nach Vorbemerkung gilt OE $x \neq y$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \phi\tfrac{s}{x}[\beta] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y\, \psi\tfrac{s}{x}[\beta] \quad \text{wg. } x \neq y \\ &\overset{\text{Def} \models}{\Leftrightarrow} \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \psi\tfrac{s}{x}[\beta\tfrac{a}{y}] \\ &\overset{\text{I.V.}}{\Leftrightarrow} \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \psi[\beta\tfrac{a}{y}\tfrac{s^{\mathfrak{A}}[\beta\frac{a}{y}]}{x}] \\ &\Leftrightarrow \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \psi[\beta\tfrac{a}{y}\tfrac{b}{x}] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\beta\tfrac{b}{x}] \qquad \square\end{aligned}$$

Bem: x frei für s in ϕ
$\Rightarrow$ y kommt nicht in s vor
$\overset{1.4}{\Rightarrow} s^{\mathfrak{A}}[\beta\tfrac{a}{y}] = s^{\mathfrak{A}}[\beta]$