Rückblick §1: Logik 1ter Stufe

Syntax	Semantik
Sprache L	L-Struktur $\mathfrak{A}$
Variablen	Belegungen
L-Term t	$t^{\mathfrak{A}}[\beta]$ (dies ist ein Elem. von A!)
L-Formel ϕ	$\mathfrak{A} \models \phi[\beta]$
freie Variable	Koinzidenzsatz
beweisbar (im Hilbertkalkül) $\vdash_L \phi$	allgemeingültige Formeln $\models \phi$ $\mapsto$ Spezialfall: Tautologien
L-Theorien	Modelle

Gödelscher Vollständigkeitssatz:

$$\vdash_L \phi \iff \models \phi$$

Bew. Vollst. satz:

Zeige (1.16): Eine L-Theorie T hat genau dann ein Modell, wenn sie widerspruchsfrei ist.

Beweisschritte zu 1.16: ("$\Leftarrow$")

Schritt 1: Erweitere T zu widerspruchsfreier Henkintheorie

Schritt 2: Jede widerspruchsfreie Theorie lässt sich zu einer vollst. Theorie erweitern.

Schritt 3: Jede vollst. Henkintheorie hat ein Modell aus Konstanten.

Wie folgt nun der Vollst. satz?

(1.19): $\underbrace{T \vdash \phi}_{\text{ex. } \psi_1, \dots, \psi_n \in T \text{ s.d. } \vdash_L (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \to \phi)} \iff \underbrace{T \models \phi}_{\phi \text{ gilt in allen Modellen von } T.}$

Bew (1.19): $T \nvdash \phi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\phi\}$ ist widerspruchsfrei

$\overset{1.16}{\Leftrightarrow} T \cup \{\neg\phi\}$ hat Modell

$\Leftrightarrow T \nvDash \phi$. ☒

Weitere Konsequenzen aus 1.16: 'Ersten beiden Hauptsätze der Modelltheorie'

Kompaktheitssatz (1.17): Eine Theorie T hat genau dann ein Modell, wenn jede endl. Teiltheorie ein Modell hat.

Löwenheim-Skolem (1.18): L höchstens abzählbar, T L-Theorie, dann ex. $\mathfrak{M} \models T$, $\mathfrak{M}$ höchstens abzählbar.
(Was ist für überabz. L? Etwa $L = \{c_i : i \in \mathbb{R}\}$ konstanten
$T = \{\neg c_i \doteq c_j : i,j \in \mathbb{R}, i \neq j\}$
$\Rightarrow$ T hat Modell (reelle Zahlen, $c_i^{\mathbb{R}} = i$),
aber kein abzählbares Modell.)

§2 Mengenlehre

Sprache der Mengenlehre $L_{Me} = \{\varepsilon\}$

Lese "$x \varepsilon y$" als "x ist Element von y"

Axiome der naiven Mengenlehre

Axiom (Extensionalität): $\forall x, y\, (\forall z\, (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \doteq y)$

"Mengen werden durch ihre Elemente eind. bestimmt"

Axiomenschema (volle Komprehension): Für jede L_{Me}-Fml $\phi(x, y_1, ..., y_n)$ ein Axiom $\forall y_1, ..., y_n\, \exists x\, \forall z\, (z \varepsilon x \leftrightarrow \phi(z, y_1, ..., y_n))$

"Jede definierbare Klasse von Mengen ist eine Menge"

Satz 2.1 (Russel): Die Axiome der naiven Mengenlehre sind inkonsistent. (nicht widerspruchsfrei)

Bew: Betrachte das Axiom $\exists x\, \forall z\, (z \varepsilon x \leftrightarrow \neg z \varepsilon z)$

(Komprehension angewandt auf $\phi(z) = \neg z \varepsilon z$.)

Sei nun x die durch das Axiom gegebene Menge,

d.h. $x = \{z : \neg z \varepsilon z\}$

Dann gilt (Einsetzen ~~von~~ von x für z)

$$NM \vdash \underbrace{\exists x\, (x \varepsilon x \leftrightarrow \neg x \varepsilon x)}_{\text{hat kein Modell}}$$

$\boxtimes$

⇝ brauchen 'neue' Axiome! Wir benutzen ZFC (Zermelo, Fränkel, Choice)

Liste der Axiome von ZFC

- Extensionalität
- Aussonderung
- Paarmenge
- Vereinigung
- Potenzmenge
- Ersetzung

} Spezialfälle von volle Komprehension

- Fundierung — informell: Keine Menge kann sich selbst als Elem. enthalten
- Unendlichkeit — informell: Es gibt eine unendl. Menge
- Auswahl — informell: Sei E def-bare Äq.relation. Dann ist auch $\{[z]_E : z \varepsilon x\}$ eine Menge.

§2.1 Die Axiome von ZFC

Axiom (Extensionalität): $\forall x,y\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x \doteq y)$

Schreibe $x \subseteq y$ (lese: x ist Teilmenge von y) als Abkürzung für $\forall z\,(z \in x \rightarrow z \in y)$.

Dann ist Extensionalität gleichbedeutend mit

$$\forall x,y\,(x \subseteq y \wedge y \subseteq x \rightarrow x \doteq y)$$

Axiom (Aussonderung) Für jede L_{Me}-Fml $\phi(z, y_1, \dots, y_n)$

$$\forall y_0, \dots, y_n\, \exists x\, \forall z\,(z \in x \leftrightarrow (z \in y_0 \wedge \phi(z, y_1, \dots, y_n)))$$

Mittels Aussonderungsaxiom sind für Mengen x, y auch

$x \cap y = \{z \in x : z \in y\}$ und

$x \setminus y = \{z \in x : \neg z \in y\}$ Mengen.

Falls es eine Menge x gibt, ist auch

$\emptyset = \{z \in x : \neg z \doteq z\}$ eine Menge.

Bemerkung 2.2: Die Russelsche Antinomie ist nun in ZFC beweisbar: $ZFC \vdash \neg \exists x\, \forall z\; z \in x$

(die Klasse V aller Mengen ist keine Menge).

Bew: Ang. V Menge. Dann gilt nach Aussonderung

$\{z : \neg z \in z\} = \{z \in V : \neg z \in z\}$ ist eine Menge $\Rightarrow$ ZFC hat kein Modell.

Also (falls ZFC kons.) gilt $ZFC \vdash \neg \exists x\, \forall z\; z \in x$.

Falls ZFC inkons. ist, gilt $ZFC \vdash \phi$ f.a. L_{Me}-Aussagen ϕ. $\boxtimes$

Axiom (Paarmenge): $\forall y_1, y_2\, \exists x\, \forall z\,(z \in x \leftrightarrow (z \doteq y_1 \vee z \doteq y_2))$

d.h. Paarmengenaxiom sagt: y_1, y_2 Mengen $\Rightarrow \{y_1, y_2\}$ Menge.

Def 2.3: Seien x, y Mengen. Das geordnete Paar von x und y ist die Menge $(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\}$
(x,y) heißt das Kuratowski-Paar.

Lemma 2.4. $ZFC \vdash \forall x, y, x', y' \, ((x,y) \doteq (x',y') \rightarrow x \doteq x' \wedge y \doteq y')$

Axiom (Vereinigung) $\forall y \exists x \forall z \, (z \in x \leftrightarrow \exists w \, (z \in w \wedge w \in y))$

Bem. 2.5: Das Vereinigungsaxiom fordert die Existenz von
$\bigcup y = \{z : \exists w (z \in w \wedge w \in y)\}$, d.h. für
$y = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}\}$ gilt $\bigcup y = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
Aus dem Paarmengenax. & dem Vereinigungsax. folgt für Mengen x, y auch die Existenz von
$x \cup y = \bigcup \{x, y\}$!
Wir führen (rekursiv) die Notation
$\{y_1, \dots, y_{n+1}\} = \{y_1, \dots, y_n\} \cup \{y_{n+1}\}$ ein.

Axiom (Potenzmenge): $\forall y \exists x \forall z \, (z \in x \leftrightarrow z \subseteq y)$.
$\rightsquigarrow$ fordert die Existenz von $\mathcal{P}(y) = \{z : z \subseteq y\}$.

Lemma 2.6 (In ZFC): Seien a, b Mengen. Dann ist auch $a \times b = \{(x,y) : x \in a \wedge y \in b\}$ eine Menge.

Bew: Sei $x \in a, y \in b \Rightarrow \{x\}, \{x,y\} \in \mathcal{P}(a \cup b)$
$\Rightarrow \{\{x\}, \{x,y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$
$\Rightarrow a \times b = \{(x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)) : x \in a \wedge y \in b\}$
ist Menge nach Aussonderung & Potenzmenge $\square$

Wir definieren nun Tripel
$$(x,y,z) = ((x,y),z) \text{ und } a\times b\times c = \{(x,y,z) : x\in a \wedge y\in b \wedge z\in c\}$$
entsprechend Viertupel usw...

Def 2.7: Eine Relation ist eine Menge von Paaren.
Der Definitionsbereich einer Relation R ist
$$\mathrm{dom}(R) = \{x : \exists y\ (x,y)\in R\},$$
der Bildbereich
$$\mathrm{Im}(R) = \{y : \exists x\ (x,y)\in R\}$$

Bem 2.8: Definitions- und Bildbereich sind Mengen, weil sie aus $\bigcup\bigcup R$ ausgesondert werden können:
$$\{\{x\},\{x,y\}\}\in R \Rightarrow \{x,y\}\in \bigcup R \Rightarrow x,y\in\bigcup\bigcup R.$$

Def. 2.9. Eine Funktion f ist eine rechtseindeutige Relation
$$\forall x,y_1,y_2\ ((x,y_1)\in f \wedge (x,y_2)\in f \rightarrow y_1 = y_2)$$
(Informell bedeutet dies, dass wir eine Funktion mit ihrem Graphen identifizieren)

Schreibweisen: $f(x) = y$ für $(x,y)\in f$.
(falls $x\notin \mathrm{dom} f$, setze $f(x) = \emptyset$)
$f: a\rightarrow b$ bedeutet $\mathrm{dom} f = a$ und $\mathrm{Im}(f)\subseteq b$.
Schreibe $f: a\rightarrow V$, wenn wir b nicht näher spezifizieren wollen.
$f\restriction c = f\cap(c\times b)$ ist die Einschränkung von f auf eine Menge c.
$f[c] = \{f(x) : x\in c\}$ ist der Bildbereich von $f\restriction c$.

Axiom (Ersetzung): Für jede L_{Me}-Fml $\phi(u, z, \bar{w})$

$\forall y, \bar{w} \, (\forall u \, \exists! z \, \phi(u, z, \bar{w}) \to \exists x \, \forall z \, (z \in x \leftrightarrow \exists u \, (u \in y \wedge \phi(u, z, \bar{w}))))$

$\ulcorner$ $\bar{w}$ = Tupel von Variablen

$\llcorner$ $\exists! x \, \phi(x)$ ist Abkürzung für $\exists x (\phi(x) \wedge \forall y \, \phi(y) \to x \doteq y)$

Bem 2.10: Die Voraussetzung $\forall u \, \exists! z \, \phi(u, z, \bar{w})$ bedeutet, dass die Klasse $F = \{(u, z) : \phi(u, z, \bar{w})\}$ ein Funktional $F: V \to V$ definiert. Das Ersetzungsaxiom fordert nun, dass für jede Menge y das Bild $F[y]$ wieder eine Menge ist.

Beispiele 2.11 (Anwendung Ersetzungsaxiom)

(i) Zeige Existenz von $a \times b$ ohne Potenzmengenaxiom

Sei x fest gewählt. Dann gilt

$ZFC \vdash \forall u \, \exists! z \quad z \doteq (x, u)$

$\Rightarrow$ falls b Menge ist auch $\{(x, u) : u \in b\} = \{x\} \times b$ eine Menge.

Nochmal Ersetzungsaxiom $(ZFC \vdash \forall x \, \exists! z \;\; z = \{(x, u) : u \in b\}$

$\Rightarrow c = \{\{x\} \times b : x \in a\}$ ist eine Menge.

Nun gilt $a \times b = \bigcup c = \bigcup\{\{(x, y) : y \in b\} : x \in a\}$

$= \{(x, y) : x \in a \wedge y \in b\}$.

(ii) Sei R Relation, dann ist auch $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$ eine Menge.

Def. 2.12: Eine Funktion $f: a \to b$ heißt

- surjektiv, wenn $Im(f) = b$ — Eigenschaft des Paares f, b.
- injektiv, wenn f^{-1} eine Fkt. ist
- bijektiv, wenn f injektiv & surjektiv ist.