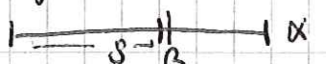
Lemma 2.38: (1.) On wird durch $\in$ linear geordnet und ist transitiv.

(2.) Jede nicht-leere ~~Teilmenge~~ Teilklasse von On hat ein kleinstes Element (d.h. ist wohlgeordnet)

(3.) Jede Ordinalzahl ist die Menge ihrer Vorgänger, d.h. $\alpha = \{\beta \in On : \beta < \alpha\}$

(4.) On ist keine Menge.

Bew: Vorüberlegung: Sei $\alpha \in On$, S ein echtes Anfangsstück von α (d.h. $S \subsetneq \alpha$, $y \in S$, $x < y \Rightarrow x \in S$)



Sei $\beta = \min(\alpha \setminus S) \in \alpha$. (Fundierung!)

Wegen $\beta > s$ f.a. $s \in S$ folgt $S \subseteq \beta$.

Es gilt sogar $S = \beta$: Sei $x \in \beta \setminus S$

α transitiv $\Rightarrow x \in \alpha$, $x < \beta$ ↯ zur Wahl von β.

Nun zum Beweis:

(1.) Seien α_1, α_2 Ord.zahlen. z.z.: α_1, α_2 vergleichbar.

$S = \alpha_1 \cap \alpha_2$ ist Anfangsstück von α_1 und α_2

⌈Sei $y \in \alpha_1 \cap \alpha_2$, $x < y \overset{\text{Def} <}{\Rightarrow} x \in y \overset{\alpha_1, \alpha_2 \text{ trans.}}{\Rightarrow} x \in \alpha_1, x \in \alpha_2$⌉

Falls $S = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1$ ist Anfangsstück von α_2

$\Rightarrow \alpha_1 \leq \alpha_2$.

Falls $S = \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 \leq \alpha_1$ (analog)

Falls $S \neq \alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow S = \beta \in \alpha_1, \alpha_2$ nach Vorüberlegung

$\Rightarrow \beta \in \alpha_1 \cap \alpha_2 \Rightarrow \beta \in S$ ↯

⌈transitiv: wird gleich gezeigt⌉

(3.) Sei $\alpha \in On$, $x \in \alpha$ z.z.: $x \in On$

Zeige x transitiv: Sei $y \in z \in x \overset{\alpha \text{ trans.}}{\Rightarrow} y, z \in \alpha$

$\in$-Ordnung ~~linear~~ transitiv auf $\alpha \Rightarrow y \in x$

Zeige $(x, \in)$ Wohlordnung: folgt sofort, da $x \subseteq \alpha$ und $(\alpha, \in)$ Wohlordnung.

Es folgt: $\alpha = \{x : x < \alpha\} = \{x \in On : x < \alpha\}$, ~~und~~ insbes. ist On transitiv.

(4.) On ist keine Menge, da sonst $On \in On$ gilt.

(2.) Sei $\Sigma \subseteq On$, $\alpha \in \Sigma$. Sei $A = \{\beta \in \Sigma : \beta \leq \alpha\}$
Σ ← Teilklasse; $A \subseteq S(\alpha)$

$S(\alpha)$ wohlgeordnet $\Rightarrow$ A hat kleinstes Element. ☑

Bem 2.39: Aus Lemma 2.38 folgt, dass wir per Induktion über On Beweise führen können:
Sei $U \subseteq On$ Teilklasse s.d. f.a. $\alpha \in On$ gilt:

$$\alpha \subseteq U \rightarrow \alpha \in U.$$

Dann gilt $U = On$:
Ang. $U \neq On$, sei $\beta \in On \setminus U$ minimal (ex. nach 2.38(2.)). Dann gilt $\beta = \{\gamma \in On : \gamma < \beta\} \subseteq U$
$\Rightarrow \beta \in U$ ↯.

Beobachtung 2.40: Es gibt drei Sorten von Ordinalzahlen:

- $\alpha = \underline{0}$ also $\alpha = \emptyset$
- $\alpha = S(\beta) = \beta + 1$: 'Nachfolgerzahl', d.h. α hat ein größtes Element.
- $\alpha \neq \underline{0}$ keine Nachfolgerzahl
  $\leadsto$ 'Limeszahl'

Bsp: ω ist eine Limeszahl.

Def 2.41: Ein Funktional $F: A \to V$ ist eine funktionale Klasse von Paaren $A \times V$, d.h. es gilt

$$\forall x \in A \; \exists! \, y \; (x,y) \in F.$$

Erinnerung (Ersetzungsaxiom):
a Menge, $F: V \to V$ Funktional; dann $F[a]$ Menge.

Satz 2.42 (Rekursionssatz): Zu jedem Funktional $G: V \to V$ existiert ein Funktional $F: On \to V$ s.d. f.a. $\alpha \in On$ gilt:
$$F(\alpha) = G(F\restriction_\alpha) \qquad (*)$$
Bew: Per Induktion über $\beta \in On$.
Zeige zunächst: f.a. $\beta \in On$ gibt es genau eine Fkt $f: \beta \to V$, s.d. $(*)$ f.a. $\alpha \in \beta$ gilt.

- Eindeutigkeit: Sei $f': \beta \to V$ eine weitere Fkt, dann ex. minimales $\alpha \in \beta$ mit $f(\alpha) \neq f'(\alpha)$. Mit $f\restriction_\alpha = f'\restriction_\alpha$ folgt aber aus $(*)$ $f(\alpha) = f'(\alpha)$.
- Existenz (induktiv): Ang. die Beh. ist für alle $\beta' < \beta$ bereits gezeigt.
  Betrachte drei Fälle:
  1. $\beta = \underline{0}$ $\rightsquigarrow$ setze $f = \emptyset$.
  2. $\beta = \beta' + 1$ $\rightsquigarrow$ sei $f': \beta' \to V$ die Fkt, die $(*)$ erfüllt (ex. nach I.V.)
     Setze $f = f' \cup \{(\beta', G(f'))\}$.
  3. β Limeszahl $\rightsquigarrow$ Nach Ersetzungsaxiom ist $X = \{f': \beta' \to V : \beta' < \beta, f \text{ erfüllt } (*)\}$ eine Menge (zu jedem $\beta' < \beta$ ex. genau ein f')
     Nun ist $\bigcup X =: f$ die gewünschte Fkt.

$F = \bigcup_{\beta \in On} \{f : f: \beta \to V, \ f \text{ erfüllt } (*)\}$. $\square$

Bsp. 2.43: Wir definieren für jedes $\alpha \in On$ eine Menge V_α mittels

$$V_0 = \emptyset$$
$$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$$
$$V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \qquad \lambda \text{ Limeszahl.}$$

Die V_α's heißen die von-Neumann-Hierarchie (ÜA: $V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$)

$V_1 = \{\emptyset\}$, $V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $V_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ etc.

Erinnerung: Wohlordnung = linear geordnete Menge, jede nicht-leere TM hat ein kleinstes Element.
Jede Ordinalzahl ist durch $\in$ wohlgeordnet.
Nun: Umkehrung!

Lemma 2.44: Jede Wohlordnung ist zu genau einer Ordinalzahl isomorph (d.h. On = {WO-Typen})

Bew: Sei $(W, <)$ Wohlordnung, sei $*$ Menge mit $* \notin W$ (etwa $* = \{W\}$).
Wir suchen Ord.zahl α und Bij. $f: \alpha \to W$ mit
$$x < y \iff f(x) < f(y). \quad \text{(ordnungstreu)}$$
Definiere $F: On \to W \cup \{*\}$ mittels

$$F(\alpha) = G(F\restriction_\alpha) = \begin{cases} \min(W \setminus F[\alpha]) & \text{falls } W \not\subseteq F[\alpha] \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beh 1: Sei $S \subseteq On$ Anfangsstück mit $F(\alpha) \neq *$ f.a. $\alpha \in S$. Dann ist $F\restriction_S$ ordnungstreu.

Bew: Seien $\beta_1, \beta_2 \in S$

falls $\beta_1 \leq \beta_2 \Rightarrow F(\beta_1) \leq F(\beta_2)$
falls $\beta_2 \leq \beta_1 \Rightarrow F(\beta_2) \leq F(\beta_1)$
falls $\beta_1 \neq \beta_2$, etwa $\beta_1 < \beta_2$
$\Rightarrow F(\beta_1) \in F[\beta_2]$, aber $F(\beta_1) \notin F[\beta_1]$
$\Rightarrow F[\beta_1] \neq F[\beta_2] \Rightarrow F(\beta_1) \neq F(\beta_2)$ ☒ Beh 1

Beh 2: $* \in F[On]$.
Sonst: $F: On \to W$ ordnungstreu ($\Rightarrow$ injektiv!)
(ERS) $\Rightarrow$ On ist Menge ↯. ☒ Beh 2

Sei $\alpha \in On$ minimal mit $F(\alpha) = *$.
Dann gilt (nach Beh 1) $F\restriction\alpha =: f: \alpha \to W$ ist ordnungserhaltende Fkt. (insbes. injektiv) (ordnungstreue)
f ist surjektiv, da $F(\alpha) = * \Rightarrow W \subset F[\alpha]$, d.h. $f: \alpha \to W$ ist ordnungstreue Bijektion.
α ist eindeutig bestimmt: Sei $f': \alpha' \to W$ zweite ordnungstreue Bijektion.
Dann erfüllt $F' = f' \cup \{(\beta, *) : \beta \geq \alpha'\}$ ebenfalls die Rekursionsgleichung
Rek.satz $\Rightarrow \alpha = \alpha'$ und $F = F'$. ☒

Bem. 2.45: Der Beweis zeigt sogar, dass nicht nur α, sondern auch $f: \alpha \xrightarrow{\sim} W$ eind. bestimmt ist.

Def 2.46: Sei X eine Menge. Eine Funktion $f: X \to V$ mit $f(z) \in z$ f.a. $z \in X$ heißt Auswahlfunktion.

Erinnerung (Auswahlaxiom): Jede Menge nicht-leerer Mengen hat eine Auswahlfunktion.

Bem. 2.47: Wenn $\bigcup x$ eine Wohlordnung besitzt, existiert eine Auswahlfkt. auf x (ohne Annahme des Auswahlaxioms), nämlich $f(z) := \min(z)$.
Nun: Umkehrung gilt auch!

Satz 2.48: (Wohlordnungssatz; Zermelo) Jede Menge hat eine Wohlordnung (in ZFC!).
Bew: Sei A Menge und $* \notin A$. Wähle Auswahlfkt. $g: \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$.
Definiere $F: On \to A \cup \{*\}$ mittels

$$F(\beta) = \begin{cases} g(A \setminus F[\beta]) & \text{wenn } A \not\subset F[\beta] \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie im Beweis von 2.44. ex. $\alpha \in On$ mit $f = F\restriction_\alpha : \alpha \to A$ Bijektion. Diese Abb. transportiert die WO von α nach A:
Setze $a_1 < a_2 \Leftrightarrow f^{-1}(a_1) < f^{-1}(a_2)$ ☑

(in ZFC)

Satz 2.49 (Zornsches Lemma) Sei $(A, <)$ eine partielle Ordnung, in der jede linear geordnete Teilmenge K eine obere Schranke besitzt (d.h. für jedes linear geordnete $K \subseteq A$ ex. $s \in K$ mit $k \leq s$ für alle $k \in K$). Dann besitzt A ein maximales Element m (d.h. $m \in A$ und für alle $a \in A$ gilt $a \leq m$).
Bew: Sei $G: V \to V$ Funktional mit

$$G(x) = \begin{cases} \text{(eine) echte obere Schranke von } x & \text{falls } x \subseteq A \text{ und } x \text{ eine echte obere Schranke hat} \\ * & \text{sonst} \end{cases}$$

für ein $* \notin A$.

Warum existiert G?

Betrachte $B = \{\{x\} \times S_x : x \subseteq A,\ S_x \subseteq A \cup \{*\},$
S_x ist die Menge aller echten oberen Schranken von x (falls eine e.o.S. existiert) und $\{*\} = S_x$ sonst $\}$

Nun erhalte $g: B \to V$ Auswahlfkt. mit dem Auswahlaxiom.

$g: \{x\} \times S_x \mapsto (x, s_x)$ mit s_x e.o.S. von x falls x eine e.o.S. in A hat.

Setze nun $G(x) = \begin{cases} g[B](x) & \text{falls } x \subseteq A \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$

Definiere $F: On \to V$ funktional mit $F(\alpha) = G(F[\alpha])$ (existiert nach Rek.satz).

Ang. $* \notin Im(F) \Rightarrow F: On \to A$ ordnungstreu (siehe Beweis 2.48 Wohlordnungssatz)

↯ sonst On Menge!

Sei α minimal mit $F(\alpha) = *$.

$K = F[\alpha]$ ist linear geordnete TM von A.

K hat keine echte obere Schranke (sonst ↯ zu $F(\alpha) = *$)

$\Rightarrow K$ hat obere Schranke m mit $m \in K$.

m ist maximales Element von A:

Ang. nicht, dann ex. $a \in A$ mit $a > m$

$\Rightarrow a > k$ f.a. $k \in K$.

$\Rightarrow K$ hat echte obere Schranke ↯. ☒

Bem. 2.50: In ZF sind äquivalent:

(1.) Wohlordnungssatz $\Leftrightarrow$ 2.47 & 2.48
(2.) Auswahlaxiom $\Leftrightarrow$ 2.49 $\qquad \Leftrightarrow$ Übung!
(3.) Zornsches Lemma