Nun: Definiere Beweisbarkeitsprädikat.
Beschreibe zunächst die ~~p~~ rek Relationen

$AUS = \{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi\ L_{\mathbb{N}}\text{-Aussage}\}$

$AX_P = \{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi\ L_{\mathbb{N}}\text{-Aussage},\ \varphi$ ist logisches Axiom oder Axiom von $P\}$

$REG = \{(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner, \ulcorner\chi\urcorner) : \varphi, \psi, \chi\ L_{\mathbb{N}}\text{-Fml},\ \varphi$ folgt aus ψ und χ mittels einer Regel des Hilbertkalküls$\}$

durch Σ_1-Fml.

Betrachte nun die Σ_1-Fml

$B'(s,n) = \forall i<n\ (AX_P(\beta'(s,i)) \vee \exists j,k<i\ REG(\beta'(s,i), \beta'(s,j), \beta'(s,k))$

Dann definiert $B'(s,n)$ in $\mathcal{N}$ die Menge der Paare (s,n), s.d. für $\varphi\ L_{\mathbb{N}}$-Fml mit $\ulcorner\varphi\urcorner = s$ $\beta'(s,0), \ldots, \beta'(s,n-1)$ eine Herleitung von φ aus den Axiomen von P im Hilbertkalkül kodiert.

Definiere (vorläufig!)

$Bew'(f) = AUS(f) \wedge \exists n,s\ (\beta'(n,s) = f \wedge B'(s,n+1))$

4.29 $\Rightarrow$ In $\mathcal{N}$ definiert dies die Menge der Gödelnummern der in P beweisbaren Aussagen.
Wir wollen das auch für $\mathcal{M} \models P$ beliebig, d.h. wir wollen, dass Bew die Loebaxiome erfüllt. !

Trick: Erweitere P um alle wahren Σ_1-Aussagen (jede davon ist nach 4.13 schon in P beweisbar, d.h. nix neues beweisbar)

Satz 4.30: Es gibt eine Σ_1-Fml $W_{\Sigma_1}(x)$, s.d. f.a. Σ_1-Aussagen ϕ gilt:

$$P \vdash \phi \leftrightarrow W_{\Sigma_1}(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$$

[Bew: später]

Bemerkung: • Für L_N-Aussagen ist Wahrheit nicht def.bar (4.21, analog zu 2.69)

• Die Menge der Gödelnummern von Σ_1-Aussagen ist rek., daher gilt OE

$$P \vdash \neg W_{\Sigma_1}(\Delta_n)$$

wenn n nicht die Gödelnummer einer Σ_1-Aussage ist.

Wir definieren nun:

$$B(s,n) = \forall i<n\ (W_{\Sigma_1}(\beta'(s,i)) \vee Ax_P(\beta'(s,i)) \vee \exists j,k<i\ \ REG(\beta'(s,i), \beta'(s,j), \beta'(s,k)))$$

und

$$Bew(f) = Aus(f) \wedge \exists n,s\ (\beta'(s,n) = f \wedge B(s, n+1))$$

Schreibe auch $\Box\phi$ für ~~Bew(x)~~ $Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$

In $\mathcal{N}$: Bew definiert die Menge der Gödelnummern der in P beweisbaren Aussagen.

Lemma 4.31: Bew(x) erfüllt die Loebaxiome

L1: $P \vdash \phi \Rightarrow P \vdash \Box\phi$

L2: $P \vdash \Box\phi \wedge \Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \Box\psi$

L3: $P \vdash \Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$

<u>Bew</u>: L1: $P \vdash \phi \Rightarrow \mathfrak{N} \models Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$

$Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$ ist Σ_1-Fml. $\overset{4.13}{\Rightarrow}$ $P \vdash Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$

L2: Seien ϕ, ψ L_N-Aussagen.

Dann gilt: $P \vdash REG(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner}, \Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}, \Delta_{\ulcorner\phi \to \psi\urcorner})$

und $P \vdash AUS(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner})$

Wir argumentieren in P.

Ang., es gilt $Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$ und $Bew(\Delta_{\ulcorner\phi \to \psi\urcorner})$.

Dann ex. s, m und t, n mit $\beta'(s,m) = \Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}$,

$\beta'(t,n) = \Delta_{\ulcorner\phi \to \psi\urcorner}$ und $B(s, m+1)$, $B(t, n+1)$

Wähle (mit 4.27) u, s.d. für $i \le m+n+2$ gilt:

$$\beta'(u,i) = \begin{cases} \beta'(s,i) & i \le m \\ \beta'(t, i-m-1) & m < i \le m+n+1 \\ \Delta_{\ulcorner\psi\urcorner} & i = m+n+2 \end{cases}$$

Dann gilt $B(u, m+n+3)$, also $Bew(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner})$

L3: Sei ψ Σ_1-Aussage.

Beh: $P \vdash \psi \to Bew(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner})$

<u>Bew</u> der Beh: $AUS(t)$ Σ_1-Fml. $\overset{4.13}{\Rightarrow}$ $P \vdash AUS(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner})$

Argumentiere nun in P.

Aus ψ folgt $W_{\Sigma_1}(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner})$ nach 4.30

Wähle s mit $\beta'(s,0) = \ulcorner\psi\urcorner$.

Dann gilt $B(s,1)$.

~~XXXX~~ Mit ~~AUS(t)~~ $AUS(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner})$ folgt $Bew(\Delta$

Aus der Beh. folgt L3, da $Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$ eine

Σ_1-Aussage ist ! ☒

Sei nun F eine L_N-Formel, deren Negation allgemeingültig ist. Setze $CON_P = \neg Bew(\Delta_{\ulcorner F\urcorner})$

(2GUS für P)

Satz 4.32: CON_P ist wahr, aber in P unbeweisbar.

Lemma 4.33: (1.) $P \vdash \phi \to \psi \Rightarrow P \vdash Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}) \to Bew(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner})$

(2.) $P \vdash Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner}) \leftrightarrow Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}) \wedge Bew(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner})$.

Bew: Analog zu 2.70, ersetze ZFC durch P. ☒

Bew von 4.32:

Sei ϕ $L_{\mathbb{N}}$-Fml mit $P \vdash \phi \leftrightarrow \neg Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$ (*)

[existiert nach 4.21]

Beh: Es gilt $P \vdash \phi \leftrightarrow CON_P$.

Bew der Beh: $P \vdash F \to \phi$.

4.33 (1.) $\Rightarrow P \vdash Bew(\Delta_{\ulcorner F\urcorner}) \to Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$

also (nach (*)) $P \vdash \phi \to \underbrace{\neg Bew(\Delta_{\ulcorner F\urcorner})}_{CON_P}$

Andererseits: $P \vdash \phi \to \neg Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$

4.33 (1) $\Rightarrow P \vdash Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}) \to Bew(\Delta_{\ulcorner\neg Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})\urcorner})$

[also $P \vdash \Box\varphi \to \Box(\neg\Box\phi)$]

L3 $\Rightarrow P \vdash Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}) \to \underbrace{Bew(\Delta_{\ulcorner Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})\urcorner})}_{Bew(\Delta_{\ulcorner\chi\urcorner})}$

d.h. $P \vdash Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}) \to (Bew(\Delta_{\ulcorner\chi\urcorner}) \wedge Bew(\Delta_{\ulcorner\neg\chi\urcorner})$

4.33. (2) $P \vdash Bew(\Delta_{\ulcorner\chi\urcorner}) \wedge Bew(\Delta_{\ulcorner\neg\chi\urcorner}) \to Bew(\Delta_{\ulcorner F\urcorner})$

Also $P \vdash CON_P \to \neg Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$

d.h. (nach (*)) $P \vdash CON_P \to \phi$. ☒Beh.

Ang. $P \vdash CON_P$. Dann folgt $P \vdash \phi$

$\left.\begin{array}{l} L1 \Rightarrow P \vdash Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}) \\ (*) \Rightarrow P \vdash \neg Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}) \end{array}\right\} \Rightarrow$ P inkonsistent

↯, da $\mathfrak{N} \models P$.

☒

Anschauung: Wann trifft ϕ auf ein Tupel s zu?

Nachtrag: Beweisskizze zu Satz 4.30:

Es genügt, den Satz für Σ_1-Fml im engeren Sinne zu beweisen (4.12)

Ab jetzt: Alle Σ_1-Fml im sind Σ_1-Fml im engeren Sinne

Wir zeigen: Es ex. Σ_1-Fml. $W_{\Sigma_1}(x)$, s.d. f.a. Σ_1-Fml ϕ im engeren Sinne $P \vdash \phi \leftrightarrow W_{\Sigma_1}(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$ gilt.

Ein Zeuge für eine Σ_1-Fml ϕ sei eine endl. Folge $\phi_1, \dots, \phi_n$ von Σ_1-Fml mit $\phi_n = \phi$ und eine endl. Folge $s^1, \dots, s^n$ von nat. Zahlen $s^m = (s_0^m, \dots, s_{\alpha(m)-1}^m)$ so, dass gilt:

(i) Alle freien Variablen von ϕ_m sind in $\{v_0, \dots, v_{\alpha(m)-1}\}$ enthalten

(ii) Wenn ϕ_m die Fml $0 \doteq v_i$ ist, dann ist $s_i^m = 0$

(iii) Wenn ϕ_m —"— $S(v_i) \doteq v_j$ ist, dann ist $s_i^m + 1 = s_j^m$

(iv) —"— $v_i + v_j \doteq v_k$ ist, —"— $s_i^m + s_j^m = s_k^m$

(v) —"— $v_i \cdot v_j \doteq v_k$ —"— $s_i^m \cdot s_j^m = s_k^m$

(vi) —"— $v_i \doteq v_j$ —"— $s_i^m = s_j^m$

(vii) —"— $\neg v_i \doteq v_j$ —"— $s_i^m \neq s_j^m$

(viii) —"— $v_i < v_j$ —"— $s_i^m < s_j^m$

(ix) —"— $\neg v_i < v_j$ —"— $s_i^m \not< s_j^m$

(x) Wenn ϕ_m die Formel $\psi_1 \wedge \psi_2$ ist, dann ex. $m_1, m_2 < m$ mit $\psi_1 = \phi_{m_1}$, $\psi_2 = \phi_{m_2}$ und $s^{m_1} = s^{m_2} = s^m$

(xi) Wenn ϕ_m die Formel $\psi_1 \vee \psi_2$ ist, dann ex. $m_1 < m$ mit ~~ϕ_m~~ $\psi_1 = \phi_{m_1}$ und $s^m = s^{m_1}$ oder $m_2 < m$ mit $\psi_2 = \phi_{m_2}$ und $s^m = s^{m_2}$

(xii) Wenn ϕ_m die Fml $\exists v_i\, \mathfrak{A}$ ist, dann ex. $m_1 < m$ mit $\mathfrak{A} = \phi_{m_1}$ und $s_k^{m_1} = s_k^m$ f.a. $k < \min(\alpha(m), \alpha(m_1))$, $k \neq i$

(xiii) Wenn ϕ_m die Fml $(\forall v_i < v_j)\mathfrak{A}$ ist, dann gilt: f.a. $a < s_j^m$ ~~ex.~~ $m_a < m$ mit $\phi_{m_a} = \mathfrak{A}$, $s_i^{m_a} = a$ und $s_k^{m_a} = s_k^m$ f.a. $k < \min(\alpha(m), \alpha(m_a))$ und $k \neq i$.

Dieser Begriff eines Zeugens ergibt in jedem Modell M von P Sinn und es gilt:

$M \models$ "ϕ hat einen Zeugen" $\Leftrightarrow$ $M \models \phi$.

Wir zeigen dies per Induktion über $\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}$ in M

(d.h.: brauchen $M \models P$; $M \models Q$ genügt nicht)

Man kann (i) - (xiii) Gödelkodieren, s.d. die Existenz eines Zeugens für ϕ in M durch eine Σ_1-Fml in der Gödelnummer $\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}$ von ϕ ausgedrückt wird, d.h. es gibt eine Σ_1-Fml $W_{\Sigma_1}(x)$, s.d. f.a. $M \models P$ und $\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}$ den Code einer Σ_1-Fml (auch von 'nicht-standard' Σ_1-Fml) gilt: $M \models W_{\Sigma_1}(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}) \Leftrightarrow M \models$ "ϕ hat einen Zeugen".

Man konstruiert $W_{\Sigma_1}(x)$ durch Σ_1-Bedingungen, die (i) - (xiii) entsprechen (klar, (i) - (xiii) sind Σ_1-ausdrückbar)

Die Äquivalenz zwischen $M \models W_{\Sigma_1}(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$ und $M \models$ "ϕ hat einen Zeugen" zeigt man wiederrum per Induktion über $\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}$ im Modell M. $\boxtimes$

Überblick §4 Arithmetik $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}}, S^{\mathbb{N}})$

Def: $R \subseteq \mathbb{N}^n$ arithmetisch, wenn sie in $\mathfrak{N}$ durch eine $L_{\mathbb{N}}$-Fml def-bar ist.

Rek. aufzählbar $\Rightarrow$ arithmetisch

$\Downarrow$

Th($\mathfrak{N}$) ist nicht entscheidbar, sogar nicht arithmetisch (d.h. $\{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi\ L_{\mathbb{N}}\text{-Aussage}, \mathfrak{N} \models \varphi\}$ ist nicht arithmetisch)

d.h. $T \subseteq Th(\mathfrak{N})$ mit $\{\ulcorner\varphi\urcorner \ \varphi \in T\}$ arithm. ist unvollst. (4.5, 1GUS)

Frage 1: Welche Axiome sind nötig für 1GUS?

Definiere Q, Q^* Axiomensysteme mit $\mathfrak{N} \models Q$, $\mathfrak{N} \models Q^*$

4.13: Alle wahren Σ_1-Aussagen sind in Q^* beweisbar (d.h. $\varphi \in Th(\mathfrak{N})$, φ Σ_1-Aussage $\Rightarrow Q^* \vdash \varphi$)

$\Downarrow$

Q ist unentscheidbar, $Q^* \subseteq T \subseteq Th(\mathfrak{N})$ dann ist T unentscheidbar

$\Downarrow$

Church Prädikatenkalkül ist unentscheidbar

Fixpunktsatz: zu jeder $L_{\mathbb{N}}$-Fml $\psi(v_0)$ ex. $L_{\mathbb{N}}$-Aussage ϕ:

$$Q^* \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\Delta\ulcorner\phi\urcorner).$$

$\Downarrow$

Jede kons. Erweiterung von Q^* ist unentscheidbar.

Frage 2: Was ist mit 2GUS?

Def: Peanoarithmetik (Q + Induktion)

Σ_1^P - Funktion (durch Fml definiert + beweisbar funktional)

$B(s,n)$ = "s kodiert einen Beweis der Länge n"

$= \forall i<n \; (W_{\Sigma_1}(\beta'(s,i)) \lor AX_P(\beta'(s,i))$
$\lor \exists j,k<i \; REG(\beta'(s,i), \beta'(s,j), \beta'(s,k))$

Wahrheit, def'bar für Σ_1-Fml nach 4.30

$Bew(f)$ = " f ist Aussage & beweisbar"

$= AUS(f) \land \exists n,s \; (\beta'(s,n) = f \land B(s,n+1))$

Nun: In $\mathfrak{N}$ wird durch $Bew(x)$ die Menge der Gödelnummern der in P beweisbaren Aussagen kodiert.

Und: Bew erfüllt die Loebaxiome.

$\Rightarrow$ CON_P ist wahr, aber in P unbeweisbar (2GUS).