leicht gewinnen: zähle die Menge aller K-Aussagen als $\phi_0, \phi_1, \ldots$ auf und nehme der Reihe nach jeweils ϕ_i oder $\neg\phi_i$ zur Theorie hinzu.

- Falls K überabz. ist:

  Verwende <u>Zorns Lemma</u> (wird aus ZFC folgen!)

  Sei $(A, <)$ eine partielle Ordnung, in der jede linear geordnete Teilmenge K eine obere Schranke s besitzt. Dann hat A ein maximales Element.

  Sei ~~[illegible]~~ $(T_i)_{i \in I}$ eine Kette von widerspruchsfreien K-Theorien, dann ist $\bigcup_{i \in I} T_i$ eine widerspruchsfreie K-Theorie

  Zorn $\Rightarrow$ ex. maximale widerspruchsfreie K-Theorie T^* mit $T^* \supseteq T^+$

  T^* maximal widerspruchsfrei $\Rightarrow$ ($T^* \cup \{\phi\}$ kons. $\Leftrightarrow$ $\phi \in T^*$)

  also ist T^* vollständig. $\boxtimes$

Def. · Sei T eine L-Theorie. Schreibe $T \vdash_L \phi$, wenn es $\psi_1, \ldots, \psi_n \in T$ gibt mit $\vdash_L (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \rightarrow \phi$.

· T heißt deduktiv abgeschlossen, wenn f.a. L-Aussagen ϕ gilt $T \vdash_L \phi \Leftrightarrow \phi \in T$.

Bem: Jede vollst. Theorie ist deduktiv abgeschlossen.

Schritt 3 (im Beweis von 1.16): Jede vollständige Henkintheorie T^* hat ein Modell aus Konstanten, das heißt ein Modell $\mathfrak{A}^* = (A, a_c)_{c \in C}$ mit $A = \{a_c : c \in C\}$. $\mathfrak{A}^*$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Bew. der Eindeutigkeit: Sei $\mathfrak{B}^* = (\mathfrak{B}, b_c)_{c\in C}$ ein zweites Modell aus Konstanten.

T^* vollst. $\Rightarrow$ $T^* = \{\phi$ LUC-Aussage : $\mathfrak{A}^* \models \phi\}$

Es gilt also f.a. LUC-Aussagen ϕ:

$$\mathfrak{A}^* \models \phi \Leftrightarrow \phi \in T^* \Leftrightarrow \mathfrak{B}^* \models \phi.$$

Daher folgt

$$a_c = a_d \Leftrightarrow \mathfrak{A}^* \models c \doteq d \Leftrightarrow \mathfrak{B}^* \models c \doteq d \Leftrightarrow b_c = b_d$$

und $f: A \to B$, $f(a_c) = b_c$ ist eine Bijektion, die (nach Konstruktion) die Interpretation aller Konstanten aus C respektiert.

f respektiert Relationszeichen: Sei $R \in L$ n-stell. Re[lations]sy[mbol]

$$R^{\mathfrak{A}^*}(a_{c_1},\dots,a_{c_n}) \Leftrightarrow \mathfrak{A}^* \models R(c_1,\dots,c_n)$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{B}^* \models R(c_1,\dots,c_n)$$
$$\Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}^*}(b_{c_1},\dots,b_{c_n})$$

f respektiert Funktionen: Sei $f \in L$ n-stell. Fkt.symb[ol]

$$f^{\mathfrak{A}^*}(a_{c_1},\dots,a_{c_n}) = a_{c_0} \Leftrightarrow f^{\mathfrak{B}^*}(b_{c_1},\dots,b_{c_n}) = b_{c_0}$$

Konstantensymbole analog. $\boxtimes_{\text{Ein}}$

Bew. der Existenz:

Um $\mathfrak{A}^*$ zu konstruieren, brauchen wir Elemente $(a_c)_{c\in C}$ s.d. $a_c = a_d \Leftrightarrow c \doteq d \in T^*$ gilt.

Das ist möglich gdw

$$c \sim d \Leftrightarrow c \doteq d \in T^* \text{ eine Äq.rel. ist}$$

Wähle dann für a_c die Äq.klasse von c.

Sei $c \in C$. Dann $\vdash_{LUC} c \doteq c$ (1.Gleichheitsaxiom & $\forall$-Quantorenaxi[om])

T^* ded. abg. $\Rightarrow$ $c \doteq c \in T^*$, d.h. $\sim$ reflexiv.

Seien $c, d, e \in C$ $\vdash_{LUC} (c \doteq d \wedge d \doteq e \to c \doteq e)$ Gleichheitsaxiom & $\forall$-Quantorena[xiom]

$\Rightarrow (c \doteq d \wedge d \doteq e \to c \doteq e) \in T^*$, ~~[illegible]~~

Wenn $c \doteq d \in T^*$ und $d \doteq e \in T^* \overset{T^* \text{ ded. abg.}}{\Rightarrow} c \doteq e \in T^*$.
Symmetrie analog. (2tes Gleichheitsaxiom)

Setze nun $A = \{a_c : c \in C\}$.
Suche nun für $R \in L$ n-stell. Rel.symbol eine Relation $R^{\mathfrak{A}}$ auf A, s.d.
(*) $R^{\mathfrak{A}}(a_{c_1}, \dots, a_{c_n}) \Leftrightarrow R(c_1, \dots, c_n) \in T^*$ gilt.
Dies ist wohldefiniert:
Sei $a_{c_1} = a_{d_1}, \dots, a_{c_n} = a_{d_n}$ und gelte $R(c_1, \dots, c_n) \in T^*$
Gleichheitsaxiom (Kongruenz II)
$\Rightarrow T^* \vdash_{L \cup C} R(c_1, \dots, c_n) \to R(d_1, \dots, d_n)$
T^* ded. abg. $\Rightarrow R(d_1, \dots, d_n) \in T^*$.
d.h. Setze $R^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R(c_1, \dots, c_n) \in T^*$ gilt.
Sei $f \in L$ n-stelliges Fkt.symbol oder Konstantensymbol (fasse Konstantensymb. als 0-stell. Fkt. auf)
Suche Operation $f^{\mathfrak{A}}$ auf A mit
(**) $f^{\mathfrak{A}}(a_{c_1}, \dots, a_{c_n}) = a_{c_0} \Leftrightarrow f(c_1, \dots, c_n) \doteq c_0 \in T^*$
Zeige zunächst: f.a. $c_1, \dots, c_n \in C$ ex. so ein c_0
$\vdash_{L \cup C} f(c_1, \dots, c_n) \doteq f(c_1, \dots, c_n)$
$\exists$-Quantorenaxiom $\overset{t_i = c_i}{\Rightarrow} \vdash_{L \cup C} \exists x\, f(c_1, \dots, c_n) \doteq x$
T^* Henkintheorie $\Rightarrow (\exists x\, f(c_1, \dots, c_n) \doteq x \to f(c_1, \dots, c_n) \doteq c_0) \in T^*$ für ein $c_0 \in C$
T^* ded. ~~ag~~ abg. $\Rightarrow f(c_1, \dots, c_n) \doteq c_0 \in T^*$ für ein $c_0 \in C$.
Zeige nun: linke Seite von (**) ist wohldefiniert.
Dazu: Ang. $c_1 \doteq d_1, \dots, c_n \doteq d_n \in T^*$, $f(d_1, \dots, d_n) \doteq d_0 \in T^*$
$\Rightarrow d_0 \doteq c_0 \in T^*$ (Gleichheitsaxiome & T^* ded abg.!)

Zeige nun: Für jede $L \cup C$-Aussage ϕ gilt
$\mathfrak{A}^* \models \phi \Leftrightarrow \phi \in T^*$.

Zeige zuerst: Terme ohne Variablen werden in $\mathfrak{A}^*$ so ausgerechnet, wie T^* es vorgibt, d.h.

(***) $t^{\mathfrak{A}^*} = a_c \Leftrightarrow t \doteq c \in T^*$

Bew per Ind. über den Ausbau von t.

$t \doteq c$ für $c \in C$ Konstante: klar.

Sei $t = f t_1 \dots t_n$, $t_i^{\mathfrak{A}^*} = a_{c_i}$, dann gilt nach I.V.

$t_i \doteq c_i \in T^*$

Gleichheitsaxiome $\Rightarrow$ $t \doteq c \in T^* \Leftrightarrow f c_1 \dots c_n \doteq c \in T^*$

Andererseits: $t^{\mathfrak{A}^*} = a_c \Leftrightarrow f^{\mathfrak{A}^*}(a_{c_1} \dots a_{c_n}) = a_c$

$\overset{\text{Def. von } f^{\mathfrak{A}^*}}{\Leftrightarrow} f c_1 \dots c_n \doteq c \in T^*$.

Nun (Ind. über den Ausbau von ϕ):

$\mathfrak{A}^* \models \phi \Leftrightarrow \phi \in T^*$ f.a. LuC-Aussagen ϕ

1. Fall: $\phi = t_1 \doteq t_2$

Sei $t_i^{\mathfrak{A}^*} = a_{c_i}$. Nach (***) folgt $t_i \doteq c_i \in T^*$ $(i = 1,2)$

und damit $\mathfrak{A}^* \models \phi \Leftrightarrow a_{c_1} = a_{c_2} \Leftrightarrow c_1 \doteq c_2 \in T^* \Leftrightarrow t_1 \doteq t_2 \in T^*$

2. Fall: $\phi = R t_1 \dots t_n$

Sei $t_i^{\mathfrak{A}^*} = a_{c_i}$, wieder $t_i \doteq c_i \in T^*$ für $1 \le i \le n$ und

$\mathfrak{A}^* \models \phi \overset{\text{Def } R^{\mathfrak{A}^*}}{\Leftrightarrow} R c_1 \dots c_n \in T^* \Leftrightarrow \phi \in T^*$.

3. Fall: $\phi = \neg \psi$

T^* vollst., d.h.

$\mathfrak{A}^* \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{A}^* \not\models \neg\psi \Leftrightarrow \psi \notin T^* \overset{\text{vollst.}}{\Leftrightarrow} \phi \in T^*$.

4. Fall: $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$

$\mathfrak{A}^* \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{A}^* \models \psi_1$ und $\mathfrak{A}^* \models \psi_2$

$\overset{\text{I.V.}}{\Leftrightarrow} \psi_1 \in T^*$ und $\psi_2 \in T^*$

$\overset{T^* \text{ ded abg}}{\Leftrightarrow} \phi \in T^*$

5. Fall: $\phi = \exists x \psi$

Vorbem: $\psi(c) \in T^* \overset{T^* \text{ ded abg.}}{\Rightarrow} \exists x \psi \in T^*$

$\exists x \psi \in T^*$, $(\exists x \psi \to \psi(c)) \in T^* \overset{\text{ded}}{\underset{\text{abg.}}{\Rightarrow}} \psi(c) \in T^*$.

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^* \models \phi &\Leftrightarrow \mathfrak{A}^* \models \psi[a_c] \quad \text{für ein } c \in C \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A}^* \models \psi(c) \quad \text{für ein } c \in C \\ &\Leftrightarrow \psi(c) \in T^* \quad \text{-- " --} \\ &\Leftrightarrow \phi \in T^*. \end{aligned}$$

$\boxtimes$ 1.16

Korollar 1.17 (Kompaktheitssatz): Eine Theorie hat genau dann ein Modell, wenn jede endl. Teilmenge ein Modell hat.

Bew: "$\Rightarrow$" klar.

"$\Leftarrow$" ~~Sei~~ Ang. T hat kein Modell

$\overset{1.16}{\Rightarrow}$ ex. $\phi_1, \dots, \phi_n \in T$ mit $\vdash_L \neg(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n)$

$\Rightarrow$ $T_0 = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ ist widersprüchlich

$\overset{1.16}{\Rightarrow}$ T_0 hat kein Modell. $\boxtimes$

Korollar 1.18 (Löwenheim-Skolem) Sei L eine höchstens abz. Sprache, T L-Theorie. Dann ex. $\mathfrak{M} \models T$, $\mathfrak{M}$ höchstens abzählbar.

Bew: Im Bew. von 1.16 wurde L durch Konstantenmenge C erweitert: zu jeder L-Fml wurde eine neue Konstante eingeführt, dieser Prozess wurde abz. oft wiederholt.

Insbes.: L höchstens abz. $\Rightarrow$ Menge der L-Fml höchstens abz. $\Rightarrow$ C höchstens abz.

Das Modell aus Konstanten, was im Beweis von 1.16 konstruiert wurde, hat aber höchstens so viele Elemente wie C. $\boxtimes$

Beispiel (Anwendung Kompaktheitssatz)
Sei L Sprache. Dann ex. keine L-Theorie T, s.d. die Modelle von T genau die endl. L-Strukturen sind $(n \in \mathbb{N})$

Bew: Vorüberlegung: Für jedes $n \geq 1$ gibt es L-Strukturen mit n-vielen Elementen. (klar)
Sei T L-Theorie, ang. $\mathfrak{A} \models T$ gilt f.a. endl. L-Str. $\mathfrak{A}$.
Wir zeigen: T hat unendl. Modell.
Betrachte für $n \geq 1$ die L-Aussage

$$\phi_n = \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \neg x_i \doteq x_j$$

Dann hat f.a. $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ $T \cup \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ ein Modell (nämlich jede L-Struktur mit mind. $(n+1)$-vielen Elementen)
Kompaktheitssatz $\Rightarrow$ $T \cup \{\phi_n : n \geq 1\}$ hat Modell $\mathfrak{B}$
$\Rightarrow$ $\mathfrak{B}$ ist unendliches Modell von T. ☒

Nun: Wie folgt 1.13 (Vollständigkeitssatz) aus 1.16?
Def: Sei T eine L-Theorie und ϕ eine L-Aussage.
(1.) ϕ ist in T beweisbar, schreibe
$T \vdash \phi$,
wenn es Axiome $\psi_1, \dots, \psi_n \in T$ gibt, s.d.
$(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \to \phi)$ beweisbar ist.
(2.) ϕ folgt logisch aus T, schreibe
$T \models \phi$,
wenn ϕ in allen Modellen von T gilt.

Korollar 1.19 $T \vdash \phi \Leftrightarrow T \vDash \phi$.

Insbes. (für $T = \emptyset$) gilt der Gödelsche Vollst.satz.

Bew: $T \nvdash \phi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\phi\}$ ist widerspruchsfrei

$\overset{1.16}{\Leftrightarrow} T \cup \{\neg\phi\}$ hat ein Modell

$\Leftrightarrow T \nvDash \phi$. ☑