Überblick §3: Rekursionstheorie

Definitionen: Turingmaschine
$f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ Turing-berechenbar
primitiv rekursive Funktionen / Mengen
rekursive Funktionen / Mengen

Abschlusseigenschaften:
prim. rek. Mengen abg. unter $\cap, \cup$, Komplement, beschränkte Quantoren
rek. Mengen genauso

Wichtiges Resultat
(3.11 & 3.19): Eine Fkt $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ist genau dann rekursiv, wenn sie Turing-berechenbar ist.

Benutze dabei $\langle \dots \rangle : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ Bijektion (Einschränkung auf $\mathbb{N}^m$ f.a. $m \geq 0$ p.r.)
$\alpha_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ p.r. Bijektionen,
Umkehrfkt. $\beta_1^n, \dots, \beta_n^n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ p.r. Bijektionen
d.h. $\alpha_n(\beta_1^n(x), \dots, \beta_n^n(x)) = x$.

Church-Turing These:
Jede intuitiv berechenbare Fkt. ist rekursiv.

Def: $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ rek. aufz.
:$\Leftrightarrow$ ex. $\tilde{R} \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$ rek. mit $(x_0, \dots, x_n) \in R \Leftrightarrow \exists y\ (x_0, \dots, x_n, y) \in \tilde{R}$

Abschlusseigenschaften: R.a. Relationen sind abg. unter $\cap, \cup$ aber nicht unter Komplement.

Bem: • Ex. r.a. TM von $\mathbb{N}$, die nicht rek. ist (3.26)
• R rek. $\Leftrightarrow$ R r.a. und $\neg R$ r.a. (3.27)

Gödelnummern von Formeln:
L endl. Sprache, $\varphi$ L-Fml. $\rightsquigarrow$ $\ulcorner\varphi\urcorner$ Gödelnummer
d.h. inj. Abb. {endl. Zeichenreihen} $\to \mathbb{N}$

Dann gilt:
$BEW_L = \{(\langle\ulcorner\varphi_0\urcorner, \dots, \ulcorner\varphi_{n-1}\urcorner\rangle, \ulcorner\varphi\urcorner) : \varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi$ sind L-Fmln und $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ ist ein Beweis von $\varphi$ im Hilbertkalkül$\}$
ist rekursiv (3.37)
$\rightsquigarrow$ $\{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi$ L-Fml, $\vdash \varphi\}$ ist r.a.

Nun: Betrachte T L-Theorie
T rekursiv (d.h. $\{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi \in T\}$ rekursiv)
$\Rightarrow$ $BEW_L(T)$ rekursiv
T effektiv axiomatisierbar
(d.h. ex. rek. L-Theorie T' mit $\{\varphi : T \vdash \varphi\} = \{\varphi : T' \vdash \varphi\}$)
$\Rightarrow$ $\{\ulcorner\varphi\urcorner : T \vdash \varphi\}$ rekursiv.
T effektiv axiomatisierbar & vollst.
$\Rightarrow$ T entscheidbar (d.h. $\{\ulcorner\varphi\urcorner : T \vdash \varphi\}$ rek.)

Nun zeige: Für jede q.f. $L_{\mathbb{N}}$-Aussage $\varphi$ ohne $\wedge, \neg$ gilt $\mathfrak{N} \models \varphi \Rightarrow Q^* \vdash \varphi$ und $\mathfrak{N} \models \neg\varphi \Rightarrow Q^* \vdash \neg\varphi$

Bew der Beh: $\varphi$ hat die Form $s < t$ oder $s \doteq t$.

$$\varphi = (s<t) \Rightarrow \left( \mathfrak{N} \models \varphi \overset{4.6.(iii)}{\Leftrightarrow} Q \vdash \varphi \right)$$

$$\mathfrak{N} \models \neg\varphi \overset{4.6.(iii)}{\Leftrightarrow} Q \vdash \neg\varphi$$

$\varphi = (s \doteq t)$ : Beh. oben (für $\mathfrak{N} \models \varphi \Rightarrow Q \vdash \varphi$ und $\mathfrak{N} \models \neg\varphi \Rightarrow Q \vdash \neg\varphi$)

$\psi$ q.f. $L_{\mathbb{N}}$-Aussage

I.A.: $\psi$ ist Boolesche komb. von $\varphi$ wie oben

$\Rightarrow (\mathfrak{N} \models \psi \Rightarrow Q \vdash \psi)$ ☑

Def 4.11: • Eine $\Sigma_1$-Fml entsteht aus q.f. $L_{\mathbb{N}}$-Fmln durch Anwenden von $\wedge, \vee, \exists x$ und beschränktem Allquantor $\forall x < t$. Hierbei ist $t$ ein $L_{\mathbb{N}}$-Term und $\forall x<t\ \phi$ steht für $\forall x\,(x<t \rightarrow \phi)$.

• Eine $\Sigma_1$-Fml im engeren Sinne ist eine $L_{\mathbb{N}}$-Fml, die sich aus $\underline{0} \doteq x$, $S(x) \doteq y$, $x+y \doteq z$, $x \cdot y \doteq z$, $x \doteq y$, $\neg x \doteq y$, $x<y$, $\neg x<y$ durch Anwenden von $\wedge, \vee, \exists x, \forall x<y$ erlangen lässt.

Bem 4.12: Jede $\Sigma_1$-Fml ~~im engeren Sinne~~ ist zu eine $\Sigma_1$-Fml im engeren Sinne äquivalent.

Bew.idee: "zerlege" Terme mithilfe von $\exists$-Quantoren. Etwa $S(x)+y \doteq S(z)$ ist äquivalent zu

$$\exists x_1, z_1\, (S(x) = x_1 \wedge S(z) = z_1 \wedge x_1 + y \doteq z_1)$$

Satz 4.13: Alle wahren $\Sigma_1$ Aussagen sind in $Q^*$ beweisbar.

Bew: Zeige per Ind. über den Aufbau von $\phi$:

f.a. $\Sigma_1$-Fml. $\phi(x_0,..,x_n)$ im engeren Sinne und alle $a_0,..,a_n \in \mathbb{N}$ gilt

$\mathfrak{N} \models \phi[a_0,..,a_n] \Rightarrow Q^* \vdash \phi(\Delta_{a_0},..,\Delta_{a_n})$

Für Primfml: Lemma 4.9.

$\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ oder $\phi = \neg\phi_1$: klar.

Sei $\phi = \exists x_n \psi(x_0,..,x_{n-1},x_n)$

$\mathfrak{N} \models \phi[a_0,..,a_{n-1}] \Rightarrow \mathfrak{N} \models \psi[a_0,..,a_n]$ für ein $a_n \in \mathbb{N}$

$\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow} Q^* \vdash \psi(\Delta_{a_0},..,\Delta_{a_n})$

$\Rightarrow Q^* \vdash \exists x_n \psi(\Delta_{a_0},..,\Delta_{a_{n-1}},x_n)$

Sei $\phi = \forall x_{n+1} < \cancel{\ } x_n \psi(x_0,..,x_{n-1},x_{n+1})$. Dann gilt

$\mathfrak{N} \models \psi(a_0,..,a_{n-1},\tilde{a}_{n+1})$ f.a. $\tilde{a}_{n+1} < a_n$

$\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow} Q^* \vdash \psi(\Delta_{a_0},..,\Delta_{a_{n-1}},\Delta_{\tilde{a}_{n+1}})$ f.a. $\tilde{a}_{n+1} < a_n$

$Q^*3 \Rightarrow Q^* \vdash \forall x_{n+1} < x_n \ \phi(\Delta_{a_0},..,\Delta_{a_n})$. ☑

Lemma 4.14: Alle rek. Funktionen und alle rek. aufz. Relationen sind mit $\Sigma_1$-Fml. def.bar.

Bew: ÜA 3, Blatt 10. & wie Bew. von 4.2. ☑

Korollar 4.15: Q ist unentscheidbar. Jede wahre Erw. von $Q^*$ ist unentscheidbar.

Bew: Sei $R(x)$ r.a. und definiert durch die $\Sigma_1$-Fml $\phi$.

Sei $T \supset Q^*$ wahre Erweiterung.

Dann gilt f.a. $a \in \mathbb{N}$:

$R(a) \Rightarrow \mathfrak{N} \models \phi[a] \Rightarrow Q^* \vdash \phi(\Delta_a) \Rightarrow T \vdash \phi(\Delta_a)$

$\neg R(a) \Rightarrow \mathfrak{N} \not\models \phi[a] \Rightarrow T \nvdash \phi(\Delta_a)$

Ang. T entscheidbar $\Rightarrow$ R rekursiv ↯ zu 3.26. ☑

Satz 4.16 (Church) Der Prädikatenkalkül ist unentscheidbar:
Es gibt eine endl. Sprache $L$, für die
$$\{\ulcorner\phi\urcorner : \phi \text{ allg. gültige } L\text{-Fml}\}$$
nicht rekursiv ist.

Bew: $Q$ unentscheidbar & endl. axiomatisiert $\overset{\text{ÜA Blatt 11}}{\Rightarrow}$ die leere $L_{\mathbb{N}}$-Theorie ist unentsch.
d.h. kann $L = L_{\mathbb{N}}$ wählen. ☒

Def 4.17: Sei $T$ $L_{\mathbb{N}}$-Theorie und $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ Funktion.
Die $L_{\mathbb{N}}$-Fml. $\phi(x_1, ..., x_n, x_0)$ repräsentiert $f$ in $T$, wenn f.a. $a_0 = f(a_1, ..., a_n)$ gilt:
$$T \vdash \forall x\,(x \doteq \Delta_{a_0} \leftrightarrow \phi(\Delta_{a_1}, ..., \Delta_{a_n}, x))$$

Bem. 4.18: Sei $T$ wahre $L_{\mathbb{N}}$-Theorie, $\phi(x_1, ..., x_n, x_0)$ repräsentiere $f$. Dann wird $\Gamma_f$ durch $\phi$ definiert, d.h. $f$ ist arithmetisch.
Umgekehrt. wenn $\phi$ eine $\Sigma_1$-Fml ist und $T$ wahre $\Sigma_1$-Aussagen beweist, dann repräsentiert $\phi$ die Fkt. $f$ gdw. $f$ durch $\phi$ definiert wird und f.a. $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$T \vdash \forall x_0, x_0' \,(\phi(\Delta_{a_1}, ..., \Delta_{a_n}, x_0) \wedge \phi(\Delta_{a_1}, ..., \Delta_{a_n}, x_0') \to x_0 \doteq x_0')$$

[ $T$ wahr & effektiv axiomatisierbar, $f$ in $T$ durch $\phi$ repräsentiert $\Rightarrow$ $f$ rekursiv
(denn $a_0 = f(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow T \vdash \phi(\Delta_{a_1}, ..., \Delta_{a_n}, \Delta_{a_0})$ ist dann r.a.) ]

Lemma 4.19: Jede rek. Fkt. lässt sich in $Q^*$ durch eine $\Sigma_1$-Fml repräsentieren.

Bew: Wie 4.2 bzw. 4.14, außer für (R3)

Sei $g: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $f(\bar{x}) = (\mu y\ g(\bar{x}, y) = 0)$

Sei $g(\bar{x}, y) = z$ in $Q^*$ repr. durch $\phi(\bar{x}, y, z)$

Dann wird $f$ definiert durch

$$\psi(\bar{x}, z) = \alpha(\bar{x}, z) \wedge \beta(\bar{x}, z) \wedge \gamma(z) \quad \text{mit}$$

$$\alpha(\bar{x}, z) = \phi(\bar{x}, z, \underline{0}) \qquad \text{"}g(\bar{x}, z) = 0\text{"}$$

$$\beta(\bar{x}, z) = \forall u < z\ \exists y\ (\neg \underline{0} \doteq y \wedge \phi(\bar{x}, z, y)) \qquad \text{"}\forall u < z\ g(\bar{x}, z) \neq 0\text{"}$$

$$\gamma(z) = (\underline{0} \leq z \wedge \forall u < z\ S(u) \leq z) \qquad \text{"}z \text{ und Nachfolger vertragen sich"}$$

(schreibe $s \leq t$ für $s \doteq t \vee s < t$)

Nun gilt: $\alpha(\bar{x}, z) \wedge \beta(\bar{x}, z)$ ist $\Sigma_1$-Fml, die $f$ definiert,

$\gamma(z)$ trifft in $\mathfrak{N}$ auf jedes Element zu

$\Rightarrow$ $f$ wird durch $\psi(\bar{x}, z)$ definiert.

Sei $\bar{a} \in \mathbb{N}^n$, $b = f(\bar{a})$.

z.z.: $Q^* \vdash \forall z\ (\psi(\Delta_{\bar{a}}, z) \to z \doteq \Delta_b)$

Es gilt: $Q^* \vdash \forall u\ (\exists y\ (\neg 0 \doteq y \wedge \phi(\Delta_{\bar{a}}, u, y)) \leftrightarrow \neg \phi(\Delta_{\bar{a}}, u, \underline{0}))$ wg. $\phi$ repräsentiert $g$.

Wir argumentieren in $Q^*$:

Ang. $\psi(\Delta_{\bar{a}}, z)$ gilt. Dann folgt ~~$\psi$~~ $\gamma(z)$.

Per Induktion erhalte $0 < z, \dots, b < z$ oder es gilt $z \doteq \Delta_n$ für ein $n \in \{0, \dots, b\}$

Falls $z > b$ $\Rightarrow$ $\alpha(\bar{a}, b)$ und $\beta(\bar{a}, z)$ widersprechen sich.

Falls $z \in \{0, \dots, b-1\}$ folgt $z < b$ & $\alpha(\bar{a}, z)$ widerspricht $\beta(\bar{a}, b)$.

$\Rightarrow z = b$ ☒

Korollar 4.20: Jede rekursive Relation wird in $Q^*$ von einer $\Sigma_1$-Fml $\phi$ repräsentiert, d.h.

$$(a_1, \dots, a_n) \in R \Rightarrow Q^* \vdash \phi(\Delta_{a_1}, \dots, \Delta_{a_n})$$

$$(a_1, \dots, a_n) \notin R \Rightarrow Q^* \vdash \neg\phi(\Delta_{a_1}, \dots, \Delta_{a_n})$$

Bew: Sei $\chi_R$ repräsentiert durch $\rho$. Setze
$$\phi(x_1,..,x_n) = \rho(x_1,..,x_n, S(\underline{0})).$$ ☑

Satz 4.21 (Fixpunktsatz): Zu jeder $L_{\mathbb{N}}$-Fml. $\psi(v_0)$ gibt es eine $L_{\mathbb{N}}$-Aussage $\phi$ mit
$$Q^* \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}).$$
Wenn $\psi(v_0)$ eine $\Sigma_1$-Fml ist, kann auch $\phi$ als $\Sigma_1$-Fml gewählt werden.

Bew: 3.34 $\Rightarrow$ $Subst_F(n, \ulcorner s\urcorner, \ulcorner\phi\urcorner) = \ulcorner\phi\frac{s}{v_n}\urcorner$ ist rek.
Sei $Subst_F(0, \ulcorner s\urcorner, \ulcorner\phi\urcorner)$ in $Q^*$ repr. durch die $\Sigma_1$-Fml $\vartheta$.
Dann gilt f.a. $\tilde{\phi}(v_0)$ und $m \in \mathbb{N}$:
$$Q^* \vdash \forall x\,(x \doteq \Delta_{\ulcorner\tilde{\phi}(\Delta_m)\urcorner} \leftrightarrow \vartheta(\Delta_m, \Delta_{\ulcorner\tilde{\phi}(v_0)\urcorner}, x))$$
Setze
$$\rho(v_0) = \exists x_0\,(\psi(x_0) \wedge \vartheta(v_0, v_0, x_0))$$
Dann gilt f.a. $\tilde{\phi}(v_0)$ (setze $m = \ulcorner\tilde{\phi}(v_0)\urcorner$)
$$Q^* \vdash \rho(\Delta_{\ulcorner\tilde{\phi}(v_0)\urcorner}) \leftrightarrow \psi(\Delta_{\ulcorner\tilde{\phi}(\Delta_{\ulcorner\tilde{\phi}(v_0)\urcorner})\urcorner})$$
Setze nun $\tilde{\phi} = \rho$ ein
$$Q^* \vdash \rho(\Delta_{\ulcorner\rho(v_0)\urcorner}) \leftrightarrow \psi(\Delta_{\ulcorner\rho(\Delta_{\ulcorner\rho(v_0)\urcorner})\urcorner})$$
Wähle nun $\phi = \rho(\Delta_{\ulcorner\rho(v_0)\urcorner})$. ☑

Korollar (ohne Beweis): Jede kons. Erweiterung von $Q^*$ ist unentscheidbar. Insbesondere ist jede mit $Q$ konsistente $L_{\mathbb{N}}$-Theorie unentscheidbar. (ÜA, oder siehe Ziegler).