§ 3.3 Kodierung von Turingmaschinen

Identifiziere $S = \{b, \$, 1\}$ mit $\{0,1,2\}$ via

$0 \leftrightarrow b, \quad 1 \leftrightarrow \$, \quad 2 \leftrightarrow 1.$

Wir kodieren eine Folge $(s_i)_{i\leq n}$ [oder allgemeiner eine Folge $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $s_i = 0$ für fast alle i] durch

$$\ulcorner((s_i))\urcorner = \sum_{i\geq 0} s_i 3^i \in \mathbb{N}.$$

Sei $\mathcal{M}$ TM. $\mathcal{M}$ wird gegeben durch

- $n = n(\mathcal{M}) \geq 1$ # Bänder
- endl. Zustandsmenge Q, OE $Q = \{0,..,m\}$ mit $q_I = 0$ und $q_F = 1$ (d.h. $|Q| = m+1$)
- Übergangsfkt. $M: S^n \times Q \to S^n \times Q \times \{-1,0,1\}$

  Zum Kodieren: Sei $\rho = ((s_1,..,s_n), q) \in S^n \times Q$

  und $M(\rho) = ((t_1,..,t_n), q', \varepsilon)$

  setze $r_1(\rho) = \alpha_2(\ulcorner(s_1,..,s_n)\urcorner, q)$ und

  $r_2(\rho) = \alpha_3(\ulcorner(t_1,..,t_n)\urcorner, q', \varepsilon+1)$ und

  schließlich $\ulcorner M\urcorner = \prod_{\rho\in S^n\times Q} \pi(r_1(\rho))^{r_2(\rho)}$.

Zum Dekodieren von $\ulcorner M\urcorner$ benutze $\delta: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$\delta(i,x) = \mu z \leq x \ (\pi(i)^{z+1} \nmid x)$$

Dann gilt $\delta(\alpha_2(\ulcorner(s_1,..,s_n)\urcorner, q), \ulcorner M\urcorner) = \alpha_3(\ulcorner(\bar{t})\urcorner, q', \varepsilon+1)$

Definiere nun $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner := \alpha_3(n, m, \ulcorner M\urcorner)$.

Lemma 3.16: Für jedes $p \geq 0$ ist

$$I_p := \{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner : \mathcal{M} \text{ ist TM mit mind. } (p+1)\text{-vielen Bändern}\}$$

prim. rek.

Bew: ÜA.

Unter einer Konfiguration $C = C(t)$ von $\mathcal{M}$ (zu einem

Zeitpunkt t) verstehen wir eine Folge $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$, s.d. s_{nv+w} das Zeichen ist, was im $(v+1)$ten Kästchen auf Band B_{w+1} steht.

(Wir nehmen weiterhin an, dass es nur eine endl. Anzahl von nicht-blank Zeichen auf den Bändern gibt und dass $\$$ zu Beginn jeden Bandes – und nur dort! – steht.)

Wir kodieren C durch $\Gamma(C) = \Gamma((s_i))$

Zum Dekodieren benutze

$\eta(\Gamma(C), u, v, n)$ = "Symbol, was im $u$ten Kästchen auf Band v steht"

$$= r(q(\Gamma(C), 3^{n(u \dot{-} 1)+(v \dot{-} 1)}), 3)$$

hierbei steht $q(x,y)$ für Division mit Rest von x durch y (<u>Bem</u>: $q(\sum_{i\geq 0} s_i 3^i, 3^j) = \sum_{i\geq j} s_i 3^{i-j}$)

und $r(x,y)$ für den Rest bei Division mit Rest von x durch y (<u>Bem</u>: $r(\sum_{i\geq 0} s_i 3^i, 3) = s_0$)

Wenn $\sigma = (s_1, \dots, s_n)$ die Zeichen sind, die in Spalte u stehen, dann ist

$$\Gamma(\sigma) = \varepsilon(\Gamma(C), u, n)$$

mit $\varepsilon(x, y, z) = r(q(x, 3^{z(y \dot{-} 1)}), 3^z)$ (wie oben).

Die Situation von $\mathcal{M}$ zum Zeitpunkt t ist gegeben durch $\mathrm{Sit}(t) = (q, k, C(t))$,

wobei q = Zustand zum Zeitpunkt t

k = Kopfposition

$C(t)$ = Konfiguration zum Zeitpunkt t.

Wir kodieren die Situation durch
$\ulcorner(Sit(t)) = \alpha_3(q, k, \ulcorner(C(t)))$.

Lemma 3.17. Sei $p \geq 0$. Es gibt eine p.r. Funktion
$g^p: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, s.d. gilt:
- $g^p(i,x) = 0$ falls $i \notin I_p$
- falls $i = \ulcorner M \urcorner$ und x der Code der Situation von M zum Zeitpunkt t ist, dann ist $g^p(i,x)$ der Code der Situation von M zum Zeitpunkt $t+1$.

Bew: I_p p.r. nach 3.16 $\rightsquigarrow$ Fallunterscheidung möglich nach 3.13.
Ang. $i = \ulcorner M \urcorner \in I_p$. Dann gilt:
- der aktuelle Zustand von M ist $\beta_1^3(x) = q$.
- die aktuelle Kopfposition ist $\beta_2^3(x) = k$
- der Code der aktuellen Konf. $C(t)$ ist
$\beta_3^3(x) = \ulcorner(C(t))$
- die # Bänder von M ist $\beta_1^3(i) = n$
- # Zustände von M ist $\beta_2^3(i) + 1 = m+1$
- der Code der Übergangsfkt. ist $\beta_3^3(i) = \ulcorner M \urcorner$
- Code der Zeichen in der Spalte, auf die der Kopf gerade zeigt, ist
$\varepsilon(\ulcorner(C(t)), k, n) = \varepsilon(\beta_3^3(x), \beta_2^3(x), \beta_1^3(i))$
$=: c$.

Wenn x nicht der Code einer Situation ist, setze $g^p(i,x) = 0$.
"Wie erkenne ich das? Das gilt, falls
$q = \beta_1^3(x) > m$ oder $\beta_2^3(x) = k = 0$ oder

$\beta_3^3(x)$ nicht der Code einer Konf. mit \$ am Beginn der Bänder und nur dort
(können wir mittels ε und η auf p.r. Art überprüfen)

Wenn x der Code einer Situation ist, sei
$\delta := \delta(\alpha_2(c, q), \ulcorner M \urcorner)$
Nach Wahl von $\delta(x,y)$ gilt
$$\delta(\alpha_2(\Gamma(\vec{s}_1,..,s_n), q), \ulcorner M \urcorner) = \alpha_3 \underbrace{(\Gamma(t_1,..,t_n), q', \varepsilon+1)}_{\text{Kodierung des Bilds der Übergangsfkt.}})$$

Dann ist $c' = \beta_1^3(\delta)$ der Code des neuen Spalteninhalts (nachdem M eine Operation ausgeführt hat)
Setze $g^p(i,x) = \alpha_3(q', k', \Gamma(c'))$
mit $\Gamma(c') = (\Gamma(c) + 3^{n(k \dot- 1)} c') \dot- (3^{n(k \dot- 1)} c)$ neuer Bandinhalt
$q' = \beta_2^3(\delta)$ neuer Zustand
$k' = (\beta_2^3(x) + \beta_3^3(\delta)) \dot- 1$ neue Kopfposition ☒

Wir definieren nun eine Fkt. $ST^p : \mathbb{N}^{p+2} \to \mathbb{N}$ (ST für "step") wie folgt:
- $ST^p(i, t, \bar{x}) = 0$ falls $i \notin I_p$
- sonst ist $ST^p(i, t, \bar{x})$ der Code $\Gamma(Sit(t))$ wie folgt:
  Sei M TM mit $\ulcorner M \urcorner = i$, die zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Bandinhalt [$B_1,..,B_p$ repräsentieren $x_1,..,x_p$, alle weiteren Bänder repräsentieren 0] begonnen hat zu arbeiten.
  $Sit(t)$ ist Situation von M zum Zeitpunkt t.

Satz 3.18: Die Funktion ST^p ist p.r. für alle $p \geq 0$.

Bew: Zeige zuerst: $ST^p(i, 0, \bar{x})$ ist p.r.

Klar: Muss nur aus $\bar{x}$ auf p.r. Art $C(0)$ bestimmen, dies ist einfach, da man ~~dass~~ nur arithmetische Operationen braucht.

Nun gilt $ST^p(i, t+1, \bar{x}) = g^p(i, ST^p(i, t, \bar{x}))$, also ist ST^p p.r. nach 3.17 & Regel (R2) $\boxtimes$

Eine Ausgabekonfiguration für den Input $\bar{x} = (x_1, \dots, x_p)$ ist eine Konf. bei der $B_1, \dots, B_p$ die Zahlen $x_1, \dots, x_p$ repräsentieren. B_{p+1} repräsentiert eine natürliche Zahl und alle ~~a~~ weiteren Bänder repräsentieren 0.

Für $p \geq 0$, definiere $E^p \subseteq \mathbb{N}^{p+2}$ wie folgt:

$(i, c, \bar{x}) \in E^p \Leftrightarrow i \in I_p$ und c ist der Code für eine Ausgabekonf. für Input $\bar{x}$.

ÜA: E^p ist p.r.

Wir definieren nun

$B^p := \{(i, t, x) \in \mathbb{N}^{p+2} : \beta_1^3(ST^p(i, t, \bar{x})) = 1$ und $(i, \beta_3^3(ST^p(i, t, \bar{x})), \bar{x}) \in E^p\}$

(zum Zeitpkt t ist Maschine $\mathcal{M}$ mit $\ulcorner \mathcal{M} \urcorner = i$ im akz. Zustand und die Konf. von $\mathcal{M}$ zu diesem Zeitpkt. ist eine Ausgabekonf. für $\bar{x}$) und

$C^p := \{(i, y, t, \bar{x}) \in \mathbb{N}^{p+3} : (i, t, \bar{x}) \in B^p$ und y ist repräsentiert auf Band $B_{p+1}\}$

$\Rightarrow B^p$ und C^p sind p.r.

Sei nun $f \in \mathcal{F}_p$ Turing-berechenbar. Sei M TM, die f berechnet, sei $i = \ulcorner M \urcorner$. Definiere

$$T_M(\bar{x}) := \mu t \, ((i, t, \bar{x}) \in B^p)$$

"Time"

und erhalte

$$f(\bar{x}) = (\mu y \leq T_M(\bar{x})) : ((i, y, T_M(\bar{x}), \bar{x}) \in C^p)$$

dies heißt die Kleene'sche Normalform von f.

Es folgt:

Satz 3.19: Jede Turing-berechenbare Fkt. ist rekursiv.

Bem: Unsere Methoden um zu zeigen, dass TM-berechenbare Fkt. rekursiv sind, haben nichts spezifisches über TM benutzt. Dies untermalt die

Church-Turing-These / Churchsche These:
Jede intuitiv berechenbare Fkt. ist rekursiv.