Prof. F. Jahnke
B. Boissonneau

Universität Münster
Sommersemester 2019

Logik I
Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion, die n auf die $(n+1)$-te Primzahl abbildet.

a) Geben Sie eine Turingmaschine an, die f berechnet.
b) Zeigen Sie, dass f primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 2. Die Ackermannfunktion $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist definiert durch $A(x,0) = 2 + x$, $A(0,1) = 0$, $A(0,y) = 1$ für $y > 1$ und $A(x+1,y+1) = A(A(x,y+1),y)$.

a) Bestimmen Sie die Funktionen $A_n(x) := A(x,n)$ für $n = 0,1,2,3$.
b) Zeigen Sie, dass jedes A_n primitiv rekursiv ist. Begründen Sie, warum A in einem intuitiven Sinn berechenbar ist.
c) Für jede primitiv rekursiv Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gibt es ein n mit $f(x_1,\cdots,x_k) \leqslant A(\max(x_1,\cdots,x_n),n)$ für alle $(x_1,\cdots,x_n) \neq (0,\cdots,0)$.
d) Die Ackermannfunktion ist nicht primitiv rekursiv.

Aufgabe 3. Zeigen Sie für jedes $p \geqslant 0$, dass die Menge

$$I_p = \{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \mid \mathcal{M} \text{ ist eine Turingmachine mit } p+1 \text{ Bändern oder mehr}\}$$

primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 4.* Zeigen Sie, dass die Ackermannfunktion rekursiv ist.

Abgabe bis Donnerstag, den 06.06, 10:00 Uhr, in Briefkasten 177.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/bboisson/de/L1/