

1 Vektorji in matrike

1.1 Vektor je *urejena n-terica števil*, ki jo običajno zapišemo kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1.2 Produkt *vektorja* \vec{x} s skalarjem α je vektor

$$\alpha \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

1.3 Vsota *vektorjev* \vec{x} in \vec{y} je vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

1.4 Nicelni vektor $\vec{0}$ je tisti vektor, za katerega je $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ za vsak vektor \vec{a} . Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju \vec{a} pripada nasprotni vektor $-\vec{a}$, tako da je $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Razlika vektorjev \vec{a} in \vec{b} je vsota $\vec{a} + (-\vec{b})$ in jo navadno zapišemo kot $\vec{a} - \vec{b}$.

Lastnosti vektorske vsote

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutativnost)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (asociativnost)
- $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$ (distributivnost)

1.5 Linearna kombinacija vektorjev \vec{x} in \vec{y} je vsota

$$a\vec{x} + b\vec{y}$$

1.6 Skalarni produkt vektorjev

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ je stevilo}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

alternativno:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \phi$$

Lastnosti skalarnega produkta

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$ (aditivnost)
- $\vec{x} \cdot (a\vec{y}) = a(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (a\vec{x}) \cdot \vec{y}$ (homogenost)
- $\forall \vec{x} \text{ velja } \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

1.7 Dolžina vektorja \vec{x} je

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

1.8 Enotski vektor je vektor z dolžino 1.

1.9 Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|,$$

enakost velja, v primeru, da sta vektorja vzporedna.

1.10 Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

1.11 Vektorja \vec{x} in \vec{y} sta ortogonalna (pravokotna) natakno takrat, kadar je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

1.12 Če je ϕ kot med vektorjema \vec{x} in \vec{y} , potem je

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \cos \phi$$

1.13 Vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

Lastnosti vektorskega produkta

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (aditivnost)
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ (!komutativnost)
- $(a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$ (homogenost)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ je \perp na vektorja \vec{a} in \vec{b}
- $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \phi$
- Dolžina vektorskega produkta je ploščina paralelograma, katerega vektorja oklepata

1.14 Mesani produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ vektorjev \vec{a}, \vec{b} in \vec{c} v R^3 je skalarni produkt vektorjev $\vec{a} \times \vec{b}$ in \vec{c} :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Lastnosti mesanega produkta

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- $(x\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (homogenost)
- $(\vec{a}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$
- Absolutna vrednost mesanega produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enaka prostornini paralepipeda

Razdalje

Razdalja od točke P do ravnine, v kateri leži točka A :

$$\cos \phi = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_A)}{\|\vec{n}\| \|\vec{r}_P - \vec{r}_A\|} \text{ oz. } d = \frac{\|\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|} (\vec{r}_P - \vec{r}_A) \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$$

Razdalja od točke P do premice, katere gre skozi točko A :

$$d = \frac{\|\vec{e} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_A)\|}{\|\vec{e}\|}$$

Projekcije vektorjev

Naj bo $proj_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{x}$ projekcija vektorja \vec{b} na vektor \vec{a} . Izračunamo jo po sledeci formuli:

$$proj_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$$

1.15 Matrika dimenzije $m \times n$ je tabela $m \times n$ števil, urejenih v m vrstic in n stolpcev:

$$A^{m \times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

1.16 Matrika, katere elementi so enaki nič povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonarna matrika. Za diagonarno matriko je $a_{ij} = 0$, kadarkoli velja $i \neq j$

1.17 Matrika $A^{n \times n}$ je spodnjetrokotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i < j$$

1.18 Matrika $A^{n \times n}$ je zgornjetrokotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i > j$$

1.19 Matrika je trikotna, če je zgornjetrokotna ali spodnjetrokotna.

1.20 Dve matriki A in B sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

$$A^{m \times n} = B^{p \times q} \implies m = p \text{ in } n = q, \\ a_{ij} = b_{ij} \text{ za vsak } i = 1, \dots, m \text{ in } j = 1, \dots, n$$

1.21 Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnožimo s skalarjem

$$aA^{m \times n} = \begin{bmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} & \dots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{m1} & ax_{m2} & ax_{m3} & \dots & ax_{mn} \end{bmatrix}$$

1.22 Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da seštejemo istolezne elemente obeh matrik:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Osnovne matricne operacije

- $A + B = B + A$ (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativnost)

- $a(A+B) = aA + aB$ (množenje s skalarjem)

- $A + (-A) = 0$

- $x(yA) = (xy)A$ in $1 \cdot A = A$

1.23 Transponirana matrika k matriki A reda $m \times n$ je matrika reda $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{m1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Lastnosti transponiranja matrik

- $(A+B)^T = A^T + B^T$

- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

- $(xA)^T = xA^T$

- $(A^T)^T = A$

1.24 Produkt matrike A in vektorja \vec{x} je linearna kombinacija stolpcev matrike A, uteži linearne kombinacije so komponente vektorja \vec{x} :

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

1.25 Produkt vrstice \vec{x} z matriko A je linearna kombinacija vrstic matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice \vec{y} :

$$\vec{y} \cdot A = [y_1, y_2, y_3] \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

1.26 Produkt matrik A in B je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike A s stolpci matrike B:

$$AB = A[b_1, b_2, \dots, b_n] = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n]$$

1.27 Element c_{ij} v i -ti vrstici in j -tem stolpcu produkta $C = AB$ je skalarni produkt i -te vrstice A in j -tega stolpca matrike B

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

1.28 Produkt matrik A in B je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike A z matriko B:

$$[i - \text{ta vrstica } A] B = [i - \text{ta vrstica } AB]$$

Lastnosti matricnega produkta

- $AB \neq BA$ (!komutativnost)

- $(xA)B = x(AB) = A(xB)$ (homogenost)

- $C(A+B) = CA + CB$ (distributivnost)

- $A(BC) = (AB)C$ (asociativnost)

- $(AB)^T = B^T A^T$

V splošnem; komutativnost matricnega množenja velja samo, ko sta matriki diagonalizabilni.

1.29 Vrstice matrike A z n stolpci naj bodo a^1, \dots, a^n , stolpci matrike B z n vrsticami pa b_1, \dots, b_n . Potem je

$$AB = a^1 b_1 + \dots + a^n b_n$$

1.30 Če delitev na bloke v matriki A ustreza delitvi v matriki B, potem lahko matriki pomnožimo bločno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

1.31 Kvadratna matrika I_k reda $k \times k$, ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko A reda $m \times n$ velja $AI_n = A$ in $I_m A = A$. Matrika I_k se imenuje enotska ali identična matrika.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

2 Sistemi linearnih enačb

2.1 Kvadratna matrika A je obrnljiva, če obstaja taka matrika A^{-1} , da je

$$AA^{-1} = I \text{ in } A^{-1}A = I$$

Matrika A^{-1} (če obstaja) se imenuje matriki A inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna. Matrika **NI** obrnljiva, kadar je $\text{rang}(A) < n$!

2.2 Kvadratna matrika reda n je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo n pivotov.

2.3 Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

2.4 Inverzna matrika inverzne matrike A^{-1} je matrika A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2.5 Če je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ edino rešitev $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

2.6 Če obstaja neničen rešitev \vec{x} enačbe $A\vec{x} = \vec{0}$, matrika A ni obrnljiva (je singularna).

2.7 Če sta matriki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt $A \cdot B$ in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Pozor! Pravilo

$$(AB)^p = A^p B^p$$

velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej $AB = BA$.

2.8 Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2.9 Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi a_{ii} je diagonalna matrika, ki ima na diagonalni elemente a_{ii}^{-1}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

2.10 Za izračun inverza matrike A, uporabimo gaussovo eliminacijo nad matriko $[A|I]$

$$[A|I] = [I|A^{-1}]$$

2.11 Matrika A je simetrična $\Leftrightarrow A^T = A$. Za elemente a_{ij} simetrične matrike velja $a_{ij} = a_{ji}$. Za simetrično matriko vedno velja, da je kvadratna $A \in R^{n \times n}$.

2.12 Če je matrika A simetrična in obrnljiva, je tudi A^{-1} simetrična.

2.13 Če je R poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta $R^T R$ in RR^T simetrični matriki.

3 Vektorski prostori

3.1 Realni vektorski prostor V je množica "vektorjev" skupaj z pravili za

- seštevanje vektorjev,

- množenje vektorja z realnim številom (skalarjem)

Če sta \vec{x} in \vec{y} poljubna vektorja v V, morajo biti v V tudi

- vsota $\vec{x} + \vec{y}$ in

- produkti $\alpha \vec{x}$ za vse $\alpha \in R$

V vektorskem prostoru V morajo biti tudi VSE linearne kombinacije $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}$

Pravila za operacije v vektorskih prostorih

Operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoščati naslednjim pravilom:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativnost)

- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (asociativnost)

- obstaja en sam neničen vektor $\vec{0}$, da velja $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

- za vsak \vec{x} obstaja natanko en $-\vec{x}$, da je $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

- $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$

- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ (distributivnost)

- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

<div data-bbox="48 14 527 140" data-label="Text"> <p>3.2 Podmnozica U vektorskega prostora V je <i>vektorski podprostor</i>, ce je za vsak par vektorjev \vec{x} in \vec{y} iz U in vsako realno stevilo α tudi</p> </div> <div data-bbox="48 163 222 256" data-label="List-Group"> <ul style="list-style-type: none"> • $\vec{x} + \vec{y} \in U$ in • $\alpha \vec{x} \in U$. </div> <div data-bbox="48 279 527 375" data-label="Text"> <p>3.3 Mnozica vektorjev U je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz U tudi v U.</p> </div> <div data-bbox="48 378 506 409" data-label="Section-Header"> <p>Lastnosti vektorskih podprostorov</p> </div> <div data-bbox="48 432 527 588" data-label="List-Group"> <ul style="list-style-type: none"> • Vsak vektorski podprostor nujno vsebuje nicelni vektor $\vec{0}$ • Presek dveh podprostorov vektorskega podprostora je tudi podprostor </div> <div data-bbox="48 611 527 1022" data-label="Text"> <p>3.4 Stolpnicni prostor $C(A)$ matrike $A \in R^{m \times n}$ je tisti podprostor vektorskega prostora R^m, ki vsebuje natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike A. Izracunamo ga tako, da matriko A transponiramo in izvedemo operacijo gaussove eliminacije nad A^T. Vrstice katere ostanejo po gaussivi eliminaciji so linearno neodvisni vektorji, kateri tvorijo stopnicni prostor matrike A, $C(A)$. <i>neformalno: linearna ogrinjaca stolpcev matrike (npr. ce imas 5 stolpcev pa lahko 2 zapises kot linearno kombinacijo ostalih 3 bo imel column space 3 elemente)</i></p> </div> <div data-bbox="48 1024 527 1092" data-label="Text"> <p>3.5 Sistem linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je resljiv natanko tedaj, ko je vektor $\vec{b} \in C(A)$</p> </div> <div data-bbox="48 1094 527 1188" data-label="Text"> <p>3.6 Naj bo matrika $A \in R^{m \times n}$. Mnozica resitev homogenega sistema linearnih enacb je podprostor v vektorskem prostoru R^n.</p> </div> <div data-bbox="48 1190 527 1411" data-label="Text"> <p>3.7 Mnozica vseh resitev sistema linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ se imenuje nicelni prostor matirke A. Oznacujemo ga z $N(A)$. <i>neformalno: mnozica vektorjev, ki se z neko matriko zmnozijo v nicelni vektor. Matriko A samo eliminiras po gaussu in nato dobljene resitve enacis z 0.</i></p> </div> <div data-bbox="48 1413 527 1505" data-label="Text"> <p>3.8 Ce je matrika A kvadratna in obrnljiva, potem $N(A)$ vsebuje samo vektor $\vec{0}$</p> </div> <div data-bbox="48 1507 527 1602" data-label="Text"> <p>3.9 Matrika ima <i>stopnicasto</i> obliko, kadar se vsaka od njenih vrstic zacne z vsaj eno niclo vec kot prejsnja vrstica.</p> </div> <div data-bbox="48 1604 527 1732" data-label="Text"> <p>3.10 Prvi element, razlicen od nic v vsaki vrstici, je <i>pivot</i>. Stevilo pivotov v matriki se imenuje rang matrike. Rang matrike A zapisemo kot $rang(A)$.</p> </div> <div data-bbox="48 1734 527 1795" data-label="Text"> <p>3.11 Rang matrike ni vecji od stevila vrstic in ni vecji od stevila stolpcev matrike.</p> </div> <div data-bbox="48 1797 105 1829" data-label="Section-Header"> <p>3.12</p> </div> <div data-bbox="48 1852 482 1919" data-label="Text"> <p><i>Stevilo prostih neznank matrike = st. stolpcev - rang matrike</i></p> </div> <div data-bbox="48 1942 105 1974" data-label="Section-Header"> <p>3.13</p> </div> <div data-bbox="48 1997 527 2091" data-label="Text"> <p>1. Visoka in ozka matrika ($m > n$) ima poln stolpnicni rang, kadar je $rang(A) = n$</p> </div>	<div data-bbox="581 14 1063 109" data-label="Text"> <p>2. Nizka in siroka matrika ($m < n$) ima poln vrsticni rang, kadar je $rang(A) = m$</p> </div> <div data-bbox="581 132 1063 197" data-label="Text"> <p>3. Kvadratna matrika ($n = m$) ima poln rang, kadar je $rang(A) = m = n$</p> </div> <div data-bbox="548 216 1063 279" data-label="Text"> <p>3.14 Za vsako matriko A s polnim stolpicnim rangom $r = n \leq m$, velja:</p> </div> <div data-bbox="581 298 1063 701" data-label="List-Group"> <ol style="list-style-type: none"> 1. Vsi stolpci A so pivotni stolpci 2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ nima prostih neznank, zato tudi nima posebnih resitev 3. Nicelni prostor $N(A)$ vsebuje le nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$ 4. Kadar ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ resitev(kar ni vedno res!), je resitev ena sama 5. Reducirana vrsticna oblika matrike (A) se da zapisati kot </div> <div data-bbox="587 722 1019 791" data-label="Equation-Block"> $R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times n \text{ enotska matrika} \\ m - n \text{ vrstic samih nicel} \end{bmatrix}$ </div> <div data-bbox="548 812 1063 877" data-label="Text"> <p>3.15 Za vsako matriko A s polnim vrsticnim rangom $r = m \leq n$ velja:</p> </div> <div data-bbox="581 896 1063 1306" data-label="List-Group"> <ol style="list-style-type: none"> 1. Vse vrstice so pivotne, ni prostih vrstic in U (stopnicasta oblika) in R(reducirana stopnicasta oblika) nimata nicelnih vrstic 2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je resljiv za vsak vektor \vec{b} 3. Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ ima $n - r = n - m$ prostih neznank, zato tudi prav toliko posebnih resitev 4. Stolpnicni prostor $C(A)$ je ves prostor R^m </div> <div data-bbox="548 1327 1063 1392" data-label="Text"> <p>3.16 Za vsako kvadratno matriko A polnega ranga ($rang(A) = m = n$) velja:</p> </div> <div data-bbox="581 1411 1063 1782" data-label="List-Group"> <ol style="list-style-type: none"> 1. Reducirana vrsticna oblika matrike A je enotska matrika 2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ ima natančno eno resitev za vsak vektor desnih strani \vec{b} 3. Matrika A je obrnljiva 4. Nicelni prostor matrike A je samo nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$ 5. Stolpnicni prostor matrike A je cel prostor $C(A) = R^m$ </div> <div data-bbox="548 1801 1063 1864" data-label="Text"> <p>3.17 Vektorji $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ so linearno neodvisni, ce je</p> </div> <div data-bbox="677 1883 933 1917" data-label="Equation-Block"> $0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n$ </div> <div data-bbox="548 1936 1063 2030" data-label="Text"> <p>edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka vektorju $\vec{0}$. Vektorji $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ so linearno odvisni, <i>ce niso linearno neodvisni.</i></p> </div> <div data-bbox="548 2032 1063 2095" data-label="Text"> <p>3.18 Ce so vektorji <i>odvisni</i>, lahko vsaj enega izrazimo z ostalimi.</p> </div>	<div data-bbox="1091 14 1612 77" data-label="Text"> <p>3.19 Ce je med vektorji $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ tudi nicelni vektor, so vektorji <i>linearno odvisni</i>.</p> </div> <div data-bbox="1091 86 1612 149" data-label="Text"> <p>3.20 Vsaka mnozica n vektorjev iz R^n je odvisna, kadar je $n > m$.</p> </div> <div data-bbox="1091 157 1612 252" data-label="Text"> <p>3.21 Stolpci matrike A so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima homogena enacba $A\vec{x} = \vec{0}$ edino resitev $\vec{x} = \vec{0}$.</p> </div> <div data-bbox="1091 260 1612 388" data-label="Text"> <p>3.22 Kadar je $rang(A) = n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisni. Kadar je pa $rang(A) < n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisni.</p> </div> <div data-bbox="1091 396 1612 525" data-label="Text"> <p>3.23 Kadar je $rang(A) = m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisne. Kadar je pa $rang(A) < m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisne.</p> </div> <div data-bbox="1091 531 1612 625" data-label="Text"> <p>3.24 Vrsticni prostor matrike A je podprostor v R^n, ki ga razpenjajo vrstice matrike A.</p> </div> <div data-bbox="1091 634 1612 699" data-label="Text"> <p>3.25 Vrsticni prostor matrike A je $C(A^T)$, stolpnicni prostor matrike A^T.</p> </div> <div data-bbox="1091 707 1612 772" data-label="Text"> <p>3.26 <i>Baza vektorskega prostora</i> je mnozica vektorjev, ki</p> </div> <div data-bbox="1123 816 1437 938" data-label="List-Group"> <ol style="list-style-type: none"> 1. je linearno neodvisna in 2. napenja cel prostor. </div> <div data-bbox="1091 982 1612 1077" data-label="Text"> <p>3.27 Vsak vektor iz vektorskega prostora lahko na en sam nacin izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.</p> </div> <div data-bbox="1091 1085 1612 1182" data-label="Text"> <p>3.28 Vektorji $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ so baza prostora R^n natanko tedaj, kadar je matrika, sestavljena iz stolpcev $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, obrnljiva.</p> </div> <div data-bbox="1091 1188 1612 1253" data-label="Text"> <p>3.29 Prostor R^n ima za $n > 0$ neskončno mnogo razlicnih baz.</p> </div> <div data-bbox="1091 1260 1612 1421" data-label="Text"> <p>3.30 Ce sta mnozici vekotrjev $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ in $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ obe bazi istega vektorskega prostora, potem je $m = n \implies$ vse baze istega vektorskega prostora imajo isto stevilo vektorjev.</p> </div> <div data-bbox="1091 1430 1612 1493" data-label="Text"> <p>3.31 <i>Dimenzija</i> vektroskega prostora je stevilo baznih vektorjev.</p> </div> <div data-bbox="1091 1501 1612 1596" data-label="Text"> <p>3.32 Dimenziji stolpicnega prostora $C(A)$ in vrsticnega prostora $C(A^T)$ sta enaki rangi matrike A</p> </div> <div data-bbox="1123 1646 1576 1686" data-label="Equation-Block"> $\dim(C(A)) = \dim(C(A^T)) = rang(A).$ </div> <div data-bbox="1091 1728 1612 1824" data-label="Text"> <p>3.33 Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ matrike A z n stolpci in ranga r je enaka $\dim(N(A)) = n - r$.</p> </div> <div data-bbox="1091 1831 1612 1992" data-label="Text"> <p>3.34 Stolpnicni prostor $C(A)$ in vrsticni prostor $C(A^T)$ imata oba dimenzijo r. Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ je $n - r$, Dimenzija levega nicelnega prostora $N(A^T)$ pa je $m - r$.</p> </div> <div data-bbox="1091 1999 1612 2095" data-label="Text"> <p>3.35 Vsako matriko ranga 1 lahko zapisemo kot produkt(stolpcnega) vektorja z vrsticnim vektorjem $A = \vec{u}\vec{v}^T$.</p> </div>
--	---	--

4 Linearne preslikave

4.1 Preslikava $A : U \rightarrow V$ je linearna, ce velja

- aditivnost: $A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2$ za vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$,
- homogenost: $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$ za vse $\alpha \in R$ in $\vec{u} \in U$.

Oziroma v enem koraku:

$$A(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = \alpha A(\vec{u}_1) + \beta A(\vec{u}_2).$$

Pozor! Preslikava ni linearna, ce $A(\vec{0}) \neq \vec{0}$.

4.2 Preslikava $A : U \rightarrow V$ je linearna natanko tedaj, ko velja

$$A(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1 A\vec{u}_1 + \alpha_2 A\vec{u}_2$$

za vse $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ in vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$.

4.3 Ce je A linearna preslikava, je $A\vec{0} = \vec{0}$.

4.4 Naj bo $A : U \rightarrow V$ linearna preslikava in $\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i$ linearna kombinacija vektorjev. Potem je $A(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{u}_i$.

4.5 Naj bo $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ baza za vektorski prostor U . Potem je linearna preslikava $A : U \rightarrow V$ natanko dolocena, ce poznamo slike baznih vektorjev.

4.6 Naj bo $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ baza za U in $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$. Potem obstaja natanko ena linearna preslikava $A : U \rightarrow V$, za katero je $A\vec{u}_i = \vec{v}_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$.

4.7 Naj bo $A : U \rightarrow V$ linearna preslikava. Potem množico

$$\ker A = \{\vec{u} \in U; A\vec{u} = \vec{0}\}$$

imenujemo *jedro* linearne preslikave. Ker je $A\vec{0} = \vec{0}$, je $\vec{0} \in \ker A$ za vse A . Zato je jedro vedno neprazna množica. Ce je matrika $A\phi$ **enotska** preslikava za ϕ , potem velja

$$\ker \phi = N(A).$$

4.8 Jedro linearne preslikave $A : U \rightarrow V$ je vektorski podprostor v U .

4.9 Množico

$$\text{im } A = \{\vec{v} \in V; \text{obstaja tak } \vec{u} \in U, \text{ da je } \vec{v} = A\vec{u}\}$$

imenujemo *slika* linearne preslikave $A : U \rightarrow V$. Ce je matrika $A\phi$ **enotska** preslikava za ϕ , potem velja

$$\text{im } \phi = C(A).$$

4.10 Ce je $A : U \rightarrow V$ linearna preslikava, potem je njena slika $\text{im } A$ vektorski podprostor v V .

4.11 Ce je $A : U \rightarrow V$ linearna preslikava, in je rang matrike te preslikave v standardni bazi poln, potem lahko sklepamo, da ima ta preslikava **trivialno jedro**.

5 Ortogonalnost

5.1 Podprostora U in V vektorskega prostora sta med seboj ortogonalna, ce je vsak vektor $\vec{u} \in U$ ortogonalen na vsak vektor $\vec{v} \in V$.

5.2 Za vsako matriko $A \in R^{m \times n}$ velja:

- Nicelni prostor $N(A)$ in vrsticni prostor $C(A^T)$ sta ortogonalna podprostora R^n
- Levi nicelni prostor $N(A^T)$ in stolpicni prostor $C(A)$ sta ortogonalna podprostora prostora R^m .

5.3 Ortogonalni komplement V^\perp podprostora V vsebuje VSE vektorje, ki so ortogonalni na V .

5.4 Naj bo A matrika dimenzije $m \times n$.

- Nicelni prostor $N(A)$ je ortogonalni komplement vrsticnega prostora $C(A^T)$ v prostoru R^n

- Levi nicelni prostor $N(A^T)$ je ortogonalni komplement stolpicnega prostora $C(A)$ v prostoru R^m .

krajse:

$$N(A) = C(A^T)^\perp \\ N(A^T) = C(A)^\perp$$

tukaj lahko vedno pomnožimo s komplementom, da dobimo npr.

$$N(A)^\perp = C(A^T)$$

dodatek:

$$\dim N(A) = \text{st.stolpcev} - \text{rang}(A) \\ \dim N(A^T) = \text{st.vrstic} - \text{rang}(A) \\ \dim C(A) = \dim C(A^T) = \text{rang}(A)$$

5.5 Za vsak vektor \vec{y} v stolpicnem prostoru $C(A)$ obstaja v vrsticnem prostoru $C(A^T)$ en sam vektor \vec{x} , da je $A\vec{x} = \vec{y}$.

5.6 Ce so stolpci matrike A linearno neodvisni, je matrika $A^T A$ obrnljiva.

5.7 Matrika P je projekcijska, kadar

- je simetricna: $P^T = P$ in

- velja $P^2 = P$.

5.8 Ce je P projekcijska matrika, ki projicira na podprostor U , potem je $I - P$ projekcijska matrika, ki projicira na U^\perp , ortogonalni komplement podprostora U .

5.9 Vektorji $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$ so ortonormirani kadar so ortogonalni in imajo vsi dolžino 1, torej

$$\vec{q}_i^T \vec{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{ko je } i \neq j \text{ pravokotni vektorji} \\ 1 & \text{ko je } i = j \text{ enotski vektorji} \end{cases}$$

za matriko $Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n]$ velja $Q^T Q = I$.

5.10 Vektorji $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$ naj bodo ortonormirani v prostoru R^m . Potem za matriko

$$Q = [\vec{q}_1 \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n]$$

velja, da je $Q^T Q = I_n$ enotska matrika reda n .

5.11 Matrika Q je ortogonalna, kadar je

- kvadratna in
- ima ortonormirane stolpce.

5.12 Ce je Q ortogonalna matirka, potem je obrnljiva in

$$Q^{-1} = Q^T \\ \dim U^\perp = n - \dim U \\ (U^\perp)^\perp = U$$

5.13 Množenje z ortogonalno matriko ohranja dolžino vektorjev in kote med njimi. Ce je Q ortogonalna matrika, potem je

$$\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in} \\ (Q\vec{x})^T Q\vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in } \vec{y}$$

5.14 Ce sta Q_1 in Q_2 ortogonalni matriki, je tudi produkt $Q = Q_1 Q_2$ ortogonalna matrika.

5.15 Gram-Schmidtova ortogonalizacija. Za vhod uporabimo Linearno ogrinjaco linearno neodvisnih vektorjev. Po gram-schmidtovi ortogonalizaciji pa dobimo paroma ortogonalne vektorje. Postopek:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 \\ \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{\vec{u}_1} \vec{v}_2 \\ \vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \text{proj}_{\vec{u}_1} \vec{v}_3 - \text{proj}_{\vec{u}_2} \vec{v}_3 \\ \vdots$$

Po tem postopku dobimo paroma ortogonalne vektorje po Gram-Schmidtovi ortogonalizaciji.

5.16 QR Razcep: Iz linearno neodvisnih vektorjev a_1, \dots, a_n z *Gram-Schmidtovo* ortogonalizacijo dobimo ortonormirane vektorje q_1, \dots, q_n . Matriki A in Q s temi stolpci zadoscajo enacbi $A = QR$, kjer je R zgornjetrikotna matrika.

- Najprej z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo poiscemo linearno neodvisne vektorje matrike A

- Vektorje normiramo in jih zapisemo v matriko Q .

- Matriko R dobimo tako, da matriko Q^T pomnožimo z matriko A

$$R = Q^T A$$

Tako smo prisli do vseh elementov v QR razcepu matrike A .

Sedaj ko imamo izracunane vse elemente lahko zapisemo se projekcijsko matriko. To je matrika pravokotne projekcije na $C(Q) = C(A)$. Njen izracun je preprost:

$$QQ^T = \text{pravokotna projekcija na } C(Q) = C(A)$$

Sedaj lahko to projekcijsko matriko pomnožimo z desne s poljubnim vektorjem in ugotovimo kam se preslika v prostoru $C(A)$. V nasprotnem primeru, če bi pa zeleli imeti projekcijsko matriko, s katero bi radi videli kam se vektor preslika v prostoru $N(A^T)$, bi pa od identične matrike odsteli projekcijsko matriko za $C(Q)$.

$$I - QQ^T = \textit{pravokotna projekcija na } C(A)^\perp = N(A^T)$$

5.17 Vektorski prostor ι je množica vseh neskončnih zaporedij \vec{u} s končno dolžino

$$||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}_1^2 + \vec{u}_2^2 + \dots < \infty$$

5.18 Predoloceni sistemi

$$A^T A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T \vec{f}$$

Kjer je A matrika sistemov linearnih enačb in \vec{f} vektor pričakovanih resitev po gaussovi eliminaciji zgornje enačbe, dobimo spremenljivke, ki predstavljajo najboljso aproksimacijo vseh kombinacij rezultatov in vhodnih spremenljivk.

6 Determinante

6.1 Determinanta enotske matirke je $det(I) = 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \textit{ in } \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

6.2 Determinanta spremeni predznak, če med seboj zamenjamo dve vrstici.

6.3 Determinanta je linearna funkcija vsake vrstice posebej. To pomeni, da se

- determinanta pomnoži s faktorjem t, če eno vrstico determinante(vsak element v tej vrstici) pomnožimo s faktorjem t.

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- determinanta je vsota dveh determinant, ki se razlikujeta le v eni vrstici, če je v prvotni determinanti ta vrstica vsota obeh vrstic, ostale vrstice pa so enake v vseh treh determinantah.

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

Pozor! Kadar množimo matriko A s skalarjem t, se vsak element matrike pomnoži s skalarjem. Ko računamo determinanto produkta matirke s skalarjem tA, skalar t postavimo iz vsake vrstice posebej, zato je $det(tA) = t^n det(A)$, kjer je n število vrstic (ali stolpcev) determinante.

6.4 Matrika, ki ima dve enaki vrstici, ima determinanto enako 0.

6.5 Če v matriki od poljubne vrstice odstejemo mnogokratnik neke druge vrstice, se njena determinanta ne spremeni.

6.6 Naj bo A poljubna kvadratna matirka $n \times n$ in U njena vrstično-stopnicasta oblika, ki jo dobimo z *Gaussovo eliminacijo*. Potem je

$$det(A) = \pm det(U).$$

6.7 Determinanta, ki ima vrstico samih nicel, je enaka 0.

6.8 Determinanta trikotne matrike A je produkt diagonalnih elementov:

$$det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

6.9 Determinanta singularne matrike je enaka 0, determinanta obrnljive matrike je različna od 0.

6.10 Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu determinant obeh matrik:

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

6.11 Determinanta inverzne matrike je enaka

$$det(A^{-1}) = 1/det(A)$$

in determinanta potence A^n matrike A je

$$det(A^n) = (det(A))^n$$

ter determinanta transponirane matrike je enaka determinanti originalne matrike, saj ko naredimo razvoj po vrsticah, pridemo do enakih elementov po diagonalni.

$$det(A) = det(A^T).$$

6.12 Transponirana matrika A^T ima isto determinanto kot A.

6.13 Recap dovoljenih operacij nad determinanto

- Ce zamenjamo dve vrstici, se **spremeneni** predznak determinante
- Vrednost determinante se ne spremeni, če neki vrstici pristejemo poljuben večkratnik katerekoli druge vrstice.
- Ce vse elemente neke vrstice pomnožimo z istim številom α , se vrednost determinante pomnoži z α .

6.14 Vsaka lastnost, ki velja za vrstice determinante, velja tudi za njene **stolpce**. Med drugim:

- Determinanta spremeni predznak, če med seboj zamenjamo dva stolpca
- Determinanta je enaka 0, če sta dva stolpca enaka
- Determinanta je enaka 0, če so v vsaj enem stolpcu same nicle.

6.15 (kofaktorska formula) Če je A kvadratna matrika reda n, njeno determinanto lahko izračunamo z razvojem po $i - ti$ vrstici

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

Kofaktorje C_{ij} izračunamo kot $C_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$, kjer je D_{ij} determinanta, ki jo dobimo, če v A izbrisemo i-to vrstico in j-ti stolpec.

6.16 Inverzna matrika A^{-1} matrike A je transponirana matrika kofaktorjev, deljena z determinanto |A|:

$$A^{-1} = \frac{C^T}{det(A)},$$

kjer je C matrika kofaktorjev matrike A.

6.17 Ploščina paralelograma, določenega z vektorjema \vec{a} in $\vec{b} \in R^2$ je enaka $det([\vec{a}\vec{b}])$, to je absolutni vrednosti determinante s stolpcema \vec{a} in \vec{b} .

6.18 Mesani produkt vektorjev \vec{a} in \vec{b} in \vec{c} je enak determinanti matrike, ki ima te tri vektorje kot stolpce.

6.19 Naj bo A matrika $R^{n \times n}$

$$A \textit{ je obrnljiva } \iff detA \neq 0$$

$$A^{-1} \textit{ ne obstaja } \iff detA = 0$$

7 L. vrednosti in vektorji

7.1 Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$, za katerega je $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ lastni vektor. Število λ je lastna vrednost. **Pozor!** Nicelni vektor $\vec{0}$ ne more biti lastni vektor. Lahko pa je lastna vrednost enaka 0.

7.2 Če ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor \vec{x} , potem ima matrika A^2 lastno vrednost λ^2 in isti lastni vektor \vec{x} .

7.3 Če ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor \vec{x} , potem ima matrika A^k lastno vrednost λ^k in isti lastni vektor \vec{x} .

7.4 Če ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor \vec{x} , potem ima inverzna matrika lastno vrednost $1/\lambda$ in isti lastni vektor \vec{x} .

7.5 Sled kvadratne matrike A reda n je vsota njenih diagonalnih elementov.

$$sled(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + \dots + a_{nn}.$$

7.6 Sled matrike je enaka vsoti vseh lastnih vrednosti, steti h z njihovo večkratnostjo. Če so $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike reda n, potem je sled enaka *vsoti*

$$sled(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \dots + \lambda_n,$$

determinanta matrike pa *produktu* lastnih vrednosti

$$det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

7.7 Če ima matrika A lastno vrednost λ , ki ji pripada lastni vektor \vec{x} , potem ima matrika $A + cI$ lastno vrednost $\lambda + c$ z istim lastnim vektorjem \vec{x} (velja samo z enotskimi matrikami I).

7.8 Lastne vrednosti trikotne matrike so enake diagonalnim elementom.

7.9 Denimo, da ima matrika $A \in R^{n \times n}$ n linearno neodvisnih lastnih vektorjev $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Če jih zložimo kot stolpce v matriko S

$$S = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n],$$

potem je $T =: S^{-1}AS$ diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ na diagonalni

$$S^{-1}AS = T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Pozor! Lastni vektorji v matriki S morajo biti v istem vrstnem redu kot lastne vrednosti v matriki T .

7.10 Če je $A = STS^{-1}$, potem je $A^k = ST^kS^{-1}$ za vsak $k \in \mathbb{N}$.

7.12 Vse lastne vrednosti realne simetrične matrike so realne.

7.13 Lastni vektorji realne simetrične matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.

7.14 Schurov izrek Za vsako kvadratno matriko reda n , ki ima le realne lastne vrednosti, obstaja taka ortogonalna matrika Q , da je

$$Q^T A Q = T$$

zgornjetrikotna matrika, ki ima lastne vrednosti (lahko so kompleksne) matrike A na diagonalni.

7.15 Spektralni izrek Vsako simetrično matriko A lahko razcepimo v produkt $A = QTQ^T$, kjer je Q ortogonalna matrika lastnih vektorjev, T pa diagonalna z lastnimi vrednostmi matrike A na diagonalni.

7.16 Vsako realno simetrično matriko lahko zapisemo kot linearno kombinacijo matrik ranga 1

$$A = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^T + \lambda_2 \vec{q}_2 \vec{q}_2^T + \dots + \lambda_n \vec{q}_n \vec{q}_n^T,$$

kjer so \vec{q}_i stolpci matrike Q (torej lastni vektorji matrike A).

7.17 Za simetrično neregularno matriko A je število pozitivnih pivotov enako številu pozitivnih lastnih vrednosti.

7.18 Kvadratna matrika je pozitivno definirana, kadar so vse njene lastne vrednosti pozitivne.

7.19 Kvadratna matrika reda 2 je pozitivno definirana natanko tedaj, kadar sta pozitivni sled in determinanta matrike.

7.20 Simetrična matrika A reda n je pozitivno definirana natanko tedaj, ko je za vsak vektor $\vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0$$

7.21 Če sta matriki A in B pozitivno definitni, je pozitivno definitna tudi njuna vsota $A + B$.

7.22 Matrika A je pozitivno definitna, kadar so vse njene vodilne glavne poddeterminante pozitivne.

7.23 Če so stolpci matrike R linearno neodvisni, je matrika $A = R^T R$ pozitivno definitna.

7.24 Za vsako simetrično pozitivno definitno matriko A obstaja zgornjetrikotna matrika R , da je $A = R^T R$.

7.25 Simetrična matrika reda n , ki ima eno od spodnjih lastnosti, ima tudi ostale stiri:

1. Vseh n pivotov je pozitivnih;
2. Vseh n vodilnih glavnih determinant je pozitivnih;
3. Vseh n lastnih vrednosti je pozitivnih;
4. Za vsak $\vec{x} \neq \vec{0}$ je $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$;
5. $A = R^T R$ za neko matriko R z linearno neodvisnimi stolpci.

7.26 Vsako realno $m \times n$ matriko A lahko zapisemo kot produkt $A = UEV^T$, kjer je matrika U ortogonalna $m \times m$, E diagonalna $m \times n$ in V ortogonalna $n \times n$.

7.27 Če je matrika A simetrična in so vsejeni elementi realni, potem je njen rang enak številu nenicelnih lastnih vrednosti matrike A .

$$\text{rang}(A) = \text{število } \lambda A$$

7.28 Diagonalizacija oz. podobnost matrik. Matriki A in B sta *podobni*, če imata obe iste lastne vrednosti. Diagonalno matriko sestavimo tako, da v njeno diagonalo vpišemo lastne vrednosti. Matriko P pa sestavimo iz njenih lastnih vektorjev; po stolpcih.

$$A = PDP^{-1} \text{ oz. } D = P^{-1}AP$$

7.29 Spektralni razcep Naj bodo vektorji $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$ ONB iz l. vektorjev matrike A za l. vrednost $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, potem lahko matriko A zapisemo kot:

$$A = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^T + \dots + \lambda_n \vec{q}_n \vec{q}_n^T$$

7.30 Nekaj lastnosti simetričnih matrik

- Vse lastne vrednosti simetrične matrike so realne. Lastni vektorji realne simetrične matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.
- Vsako realno simetrično matriko A lahko zapisemo kot $A = QDQ^T$, kjer je Q ortogonalna matrika lastnih vektorjev, D pa diagonalna matrika, ki ima na diagonalni pripadajoče lastne vrednosti matrike A .