

1 Vektorji in matrike

1.1 Vektor je *urejena n-terica števil*, ki jo običajno zapisemo kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1.2 Produkt *vektorja* \vec{x} s skalarjem α je vektor

$$\alpha \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

1.3 Vsota *vektorjev* \vec{x} in \vec{y} je vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

1.4 Nicelni vektor $\vec{0}$ je tisti vektor, za katerega je $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ za vsak vektor \vec{a} . Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju \vec{a} priprada nasprotni vektor $-\vec{a}$, tako da je $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ Razlika vektorjev \vec{a} in \vec{b} je vsota $\vec{a} + (-\vec{b})$ in jo navadno zapisemo kot $\vec{a} - \vec{b}$.

Lastnosti vektorske vsote

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutativnost)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (asociativnost)
- $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$ (distributivnost)

1.5 Linearna kombinacija vektorjev \vec{x} in \vec{y} je vsota

$$a\vec{x} + b\vec{y}$$

1.6 Skalarni produkt vektorjev

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ je stevilo}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

Lastnosti skalarnega produkta

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$ (aditivnost)
- $\vec{x} \cdot (a\vec{y}) = a(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (a\vec{x}) \cdot \vec{y}$ (homogenost)
- $\forall \vec{x}$ velja $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

1.7 Dolžina vektorja \vec{x} je

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

1.8 Enotski vektor je vektor z dolžino 1.
1.9 Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$||\vec{u} \cdot \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||.$$

1.10 Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

1.11 Vektorja \vec{x} in \vec{y} sta ortogonalna (ali pravokotna) natakno takrat, kadar je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

1.12 Če je ϕ kot med vektorjema \vec{x} in \vec{y} , potem je

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| ||\vec{y}||} = \cos \phi$$

1.13 Vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

Lastnosti vektorskega produkta

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (aditivnost)
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ (!komutativnost)
- $(a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$ (homogenost)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ je \perp na vektorja \vec{a} in \vec{b}
- $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \sin \phi$
- Dolžina vektorskega produkta je ploscina paralelograma, katerega vektorja oklepata

1.14 Mesani produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ vektorjev \vec{a}, \vec{b} in \vec{c} v R^3 je skalarni produkt vektorjev $\vec{a} \times \vec{b}$ in \vec{c} :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Lastnosti mesanega produkta

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- $(x\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (homogenost)
- $(\vec{a}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$
- Absolutna vrednost mesanega produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enaka prostornini paralepipeda

Razdalje

Razdalja od tocke P do ravnine, v kateri leži točka A :

$$\cos \phi = \frac{\vec{n} \cdot (r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}})}{||\vec{n}|| ||r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}}||} \text{ oz. } d = \left| \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} \cdot (r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}}) \right|$$

Razdalja od tocke P do premice, katera gre skozi točko A :

$$d = \frac{||\vec{e} \times (r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}})||}{||\vec{e}||}$$

1.15 Matrika dimenzije $m \times n$ je tabela $m \times n$ števil, urejenih v m vrstic in n stolpcev:

$$A^{m \times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

1.16 Matrika, katere elementi so enaki nič povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonalna matrika. Za diagonalno matriko je $a_{ij} = 0$, kadarkoli velja $i \neq j$

1.17 Matrika $A^{n \times n}$ je spodnjetrokotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i < j$$

1.18 Matrika $A^{n \times n}$ je zgornjetrikotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i > j$$

1.19 Matrika je trikotna, ce je zgornjetrikotna ali spodnjetrokotna.

1.20 Dve matriki A in B sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

$$A^{m \times n} = B^{p \times q} \implies m = p \text{ in } n = q, a_{ij} = b_{ij} \text{ za vsak } i = 1, \dots, m \text{ in } j = 1, \dots, n$$

1.21 Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnožimo s skalarjem

$$aA^{m \times n} = \begin{bmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} & \dots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{m1} & ax_{m2} & ax_{m3} & \dots & ax_{mn} \end{bmatrix}$$

1.22 Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da seštejemo istolezne elemente obeh matrik:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Osnovne matricne operacije

- $A + B = B + A$ (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativnost)
- $a(A+B) = aA + aB$ (množenje s skalarjem)
- $A + (-A) = 0$
- $x(yA) = (xy)A$ in $1 \cdot A = A$

1.23 Transponirana matrika k matriki A reda $m \times n$ je matrika reda $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Lastnosti transponiranja matrik

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(xA)^T = xA^T$
- $(A^T)^T = A$

1.24 Produkt matrike A in vektorja \vec{x} je linearna kombinacija stolpcev matrike A, uteži linearne kombinacije so komponente vektorja \vec{x} :

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

1.25 Produkt vrstice \vec{x} z matriko A je linearna kombinacija vrstic matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice \vec{y} :

$$\vec{y} \cdot A = [y_1, y_2, y_3] \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

1.26 Produkt matrik A in B je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike A s stolpci matrike B:

$$AB = A \begin{bmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \end{bmatrix}$$

1.27 Element c_{ij} v i -ti vrstici in j -tem stolpcu produkta $C = AB$ je skalarni produkt i -te vrstice A in j -tega stolpca matrike B

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

1.28 Produkt matrik A in B je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike A z matriko B:

$$[i - \text{ta vrstica } A] B = [i - \text{ta vrstica } AB]$$

Lastnosti matricnega produkta

- $AB \neq BA$ (!komutativnost)
- $(xA)B = x(AB) = A(xB)$ (homogenost)
- $C(A+B) = CA+CB$ (distributivnost)
- $A(BC) = (AB)C$ (asociativnost)
- $(AB)^T = B^T A^T$

1.29 Vrstice matrike A z n stolpci naj bodo a^1, \dots, a^n , stolpci matrike B z n vrsticami pa a_1, \dots, b_n . Potem je

$$AB = a^1 b_1 + \dots + a^n b_n$$

1.30 Če delitev na bloke v matriki A ustreza delitvi v matriki B, potem lahko matriki pomnožimo blocno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

1.31 Kvadratna matrika I_k reda $k \times k$, ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko A reda $m \times n$ velja $AI_n = A$ in $I_m A = A$. Matrika I_k se imenuje enotska ali identična matirka.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

2 Sistemi linearnih enacb

2.1 Kvadratna matrika A je obrnljiva, če obstaja taka matrika A^{-1} , da je

$$AA^{-1} = I \text{ in } A^{-1}A = I$$

Matrika A^{-1} (če obstaja) se imenuje matriki A inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna.

2.2 Kvadratna matirka reda n je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo n pivotov.

2.3 Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

2.4 Inverzna matrika inverzne matrike A^{-1} je matrika A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2.5 Če je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ edino resitev $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

2.6 Če obstaja nenicelna resitev \vec{x} enacbe $A\vec{x} = \vec{0}$, matrika A ni obrnljiva (je singularna).

2.7 Če sta matirki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt $A \cdot B$ in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Pozor! Pravilo

$$(AB)^p = A^p B^p$$

velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej $AB = BA$.

2.8 Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2.9 Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi a_{ii} je diagonalna matrika, ki ima na diagonalni elemente a_{ii}^{-1}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$