

Ponovitev analize

Odvodi

1. $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$
2. $x^n = nx^{n-1}$
3. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
5. $\sin(ax) = a \cos ax$
6. $\cos(ax) = -a \sin(ax)$
7. $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $e^a x = ae^{ax}$
9. $a^x = a^x \ln a$
10. $x^x = x^x(1 + \ln x)$
11. $\ln x = \frac{1}{x}$
12. $\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
13. $\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
16. $\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$

Integrali

1. $\int x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & a \neq -1 \\ \ln|x| + C & a = -1 \end{cases}$
2. $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$
7. $\int \sin(ax) dx = \frac{-\cos(ax)}{a} + C$
8. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
12. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$
13. $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$
14. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
15. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

Integriranje absolutnih vrednosti (primer): Imamo funkcijo $f(x) = |x|$, ki je zvezna na intervalu $[-1, 1]$. Če hocemo to funkcijo integrirati in zelimo izračunati njeno porazdelitveno funkcijo integrirati ločimo 2 primera:

1. $-1 \leq x < 0$

$$F(x) = \int_{-1}^x |t| dt = \int_{-1}^x -t dt = -\frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^x = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$$
2. $0 \leq x < 1$

$$F(x) = \int_{-1}^x |t| dt = \int_{-1}^0 -t dt + \int_0^x t dt = -\frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{1}{2}(1 + x^2)$$

$$\sqrt{x}^m = (x)^{\frac{m}{2}}, x^2 + y^2 \leq 1 \sim \text{krog s ploscino } \pi$$

1 Kombinatorika

1.1 Permutacije

1. brez ponavljanja: $P_n = n!$
2. s ponavljanjem: $P_n^{k_1, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! \dots k_n!}$

1.2 Variacije

1. brez ponavljanja: $V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
2. s ponavljanjem: $V_n^r = n^r$

1.3 Kombinacije

1. brez ponavljanja: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
2. s ponavljanjem: $\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$

Lastnosti binomskega simbola:

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Binomski izrek:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Za kombinacije velja, da vrstni red **ni** pomemben. Medtem pa ko v splošnem za variacije in permutacije velja, da vrstni red **je** pomemben.

2 Verjetnost

2.1 Elementarna verjetnost

Izid iz dane množice izidov je izbran na slepo, ce so vsi izidi iz te množice enako verjetni. Takrat se dogodek A zgodi z verjetnostjo:

$$P(A) = \frac{\text{st. izidov, ki so v } A}{\text{st. vseh izidov}}$$

Nasprotni dogodek pa z verjetnostjo:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Nacelo vključitev in izključitev dogodkov:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= P(A_1) + \dots + P(A_n) \\ &- P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - \dots - P(A_{n-1} A_n) \\ &+ P(A_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_4) + \dots + \\ &P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n) \end{aligned}$$

Dogodki A_1, A_2, \dots, A_k in B so **neodvisni**, ce velja

$$P(A_1 \dots A_k) = P(A_1) \dots P(A_k)$$

ali z drugimi besedami... Verjetnost produkta paroma neodvisnih dogodkov je enaka produktu verjetnosti teh dogodkov.

2.2 Pogojna verjetnost Verjetnost da se zgodi dogodek A , ce vemo, da se zgodi dogodek B , je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Dogodka A in B sta **neodvisna**, ce velja $P(A|B) = P(A)$ ali $P(AB) = P(A)P(B)$. Pazi! Za par **nezdružljivih** dogodkov A in B pa velja $P(AB) = 0$, $P(A+B) = P(A) + P(B)$, $P(A|B) = 0$ in $P(B|A) = 0$.

2.3 Popolna verjetnost

Dogodki H_1, H_2, \dots, H_n tvorijo **popoln sistem dogodkov**, ce se nobena dva dogodka ne moreta zgoditi hkrati in se vedno zgodi vsaj en od njih. Ce dogodki izpolnjujejo ta pogoj, potem po nacelu vključitev/izključitev velja:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$$

Za **popolni sistem dogodkov** velja unija hipotez:

$$\frac{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}{P(H_1) + \dots + P(H_{n-1}) + P(H_n)}$$

Zanje velja tudi **Bayesova formula**:

$$\begin{aligned} P(H_i|A) &= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)} \end{aligned}$$

2.4 Geometrijska verjetnost

Točka je izbrana *na slepo* iz intervala, lika, telesa.. ce za vsak dogodek A velja:

$$P(A) = \frac{\text{mera izidov, ki so v } A}{\text{mera vseh izidov}}$$

Pri tem je mera lahko dolžina, ploscina, volumen,.. Basically upas da narises graf pravilno.

Splošno za vse nastete verjetnosti velja:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ in} \\ P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \end{aligned}$$

3 Diskretne s.s.

3.1 Diskretna slučajna spremenljivka Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka $\Rightarrow X$ je funkcija s končno ali stevno zalogo vrednosti a_1, a_2, \dots . Verjetnost, da X vzame vrednost $a_i \in R$, označimo z $P(X = a_i) = p_i$. Porazdelitev X lahko podamo na dva enakovredna načina, in sicer s:

1. s **porazdelitveno shemo**

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{velja } 0 \leq p_i \leq 1 \text{ in } p_1 + p_2 + \dots = 1$$

2. s **porazdelitveno funkcijo**

$$F_x(x) := P(X \leq x)$$

3.2 Bernoullijeva slučajna spremenljivka

$$X \sim B(p)$$

- V vsakem poskusu ima dogodek A verjetnost p , X pa ima vrednost 1, ce se je zgodil dogodek A , in 0 sicer.

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

3.3 Binomska slučajna spremenljivka

$$X \sim B(n, p)$$

- X je število pojavitev izida A v n ponovitvah poskusa
- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ za $k = 0, 1, \dots, n$.

Izvajamo n neodvisnih slučajnih poskusov. V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek A s konstantno verjetnostjo p , $p = P(A)$. X nam pove kolikokrat se je zgodil dogodek A v n poskusih. npr. kovanec vrzemo 10x, kolikšne so vrjetnosti, da pade cifra 0x, 2x, vsaj 3x,... ali 5x vrzemo posteno kocko, izračunaj število šestic, ki pade $\Rightarrow B(5, \frac{1}{6})$

3.4 Geometrijska slučajna spremenljivka

$$X \sim G(p)$$

- X je število ponovitev poskusa do (vključno) prve ponovitve izida A .
- $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$ za $k = 1, 2, \dots$
- $P(X \leq k) = 1 - (1 - p)^k$ za $k = 1, 2, \dots$

Izvajamo neodvisne slučajne poskuse, dokler se ne zgodi dogodek A . V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek A s **konstantno** verjetnostjo p , $p = P(A)$. npr. koliko metov kocke je potrebnih, do prve šestice $\Rightarrow G(1/6)$.

3.5 Pascalova oz. negativna binomska slučajna spremenljivka

$$X \sim P(n, p)$$

- X je število ponovitev poskusa do (vključno) n -te ponovitve izida A .
- $P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} (1 - p)^{k-n} p^n$ za $k = n, n + 1, n + 2, \dots$

npr. koliko metov kocke je potrebnih, dokler šestica ne pade 5x $\Rightarrow P(5, \frac{1}{6})$. Število metov kovanja, dokler grb ne pade 2x $\Rightarrow P(2, \frac{1}{2})$.

3.6 Hipergeometrijska slučajna spremenljivka

$$X \sim H(K, N - K, n)$$

- X je število elementov z določeno lastnostjo med izbranimi.
- $P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ za $k = 0, 1, 2, \dots, \min\{n, K\}$

V populaciji N imamo K elementov z določeno lastnostjo. Izbiramo brez vračanja n elementov. npr. koliko pikov med 7 kartami, ki smo jih na slepo izbrali izmed 16 kart, kjer so bli stirje piki. imamo 400 ljudi, 100 brezposlenih, naključno jih izberemo 10. Zanima nas kaksna verjetnost je da sta 2 izmed teh brezposelna $\Rightarrow P(x = 2) = H(100, 400 - 100, 10)$. **Pozor!** Na kolokviju/izpitu moras nujno zapisati tudi mozne vrednosti k-ja.

3.7 Poissonova slučajna spremenljivka

$$X \sim P(\lambda)$$

- X je število ponovitev dogodka A na danem intervalu, pri cemer:
 - se dogodki pojavljajo neodvisno
 - povprečno število dogodkov λ , ki se pojavijo na določenem intervalu, je konstantno.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ za } k = 0, 1, 2, \dots$$

npr. ce se dogodek pojavi v povprecju 3x na minuto, lahko uporabimo poissa za izracun kolikokrat se bo dogodek zgodil v 1/4h $\Rightarrow P(45)$. St avtomobilov, ki prečkajo cesto v 1min.

4 Zvezne s.s.

4.1 Zvezna slučajna spremenljivka Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka $\Rightarrow X$ je realna funkcija, za katero obstaja integrabilna funkcija $p_X : R \rightarrow [0, \infty)$, tako da za vsak $x \in R$ velja:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt$$

Funkciji p_X pravimo **gostota verjetnosti**, funkciji F_X pa **porazdelitvena** funkcija. Mnozici vrednosti, ki jih zavzame spremenljivka X , pravimo **zaloga vrednosti** in jo označimo z Z_X . Lastnosti:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1$
- $P(a < X < b) = \int_a^b p_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$, $a, b \in R$, $a < b$
- $P(X = a) = 0$, $a \in R$
- $P(|X| < 1) = P(-1 < X < 1)$

ce je funkcija zvezna v x , potem za njo velja tudi $F'(x) = p(x)$. Za zvezno slučajno spremenljivko X je *funkcija preživetja* $S(x) = P(X > x)$ vedno zvezna, nenarascujoča in zavzema vrednosti na intervalu $[0, 1]$.

4.2 Enakomerna zvezna slučajna spremenljivka

$$X \sim U[a, b]$$

- $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Vsi izidi na intervalu $[a, b]$ so enako verjetni.

4.3 Eksponentna slučajna spremenljivka

$$X \sim \epsilon(\lambda)$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$

Slučajna spremenljivka X - čas med zaporednima dogodkoma, pri cemer so dogodki neodvisni in se pojavijo s konstantno stopnjo λ . λ predstavlja povprečno število dogodkov na izbrano časovno enoto.

4.4 Normalna slučajna spremenljivka

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ za } x \in R$$

- Za $F_X(x)$ ne obstaja eksplicitna formula. Vrednost preberemo iz porazdelitvenih tabel.

Po centralnem limitnem izreku sta vsota in povprečje veliko neodvisnih, enako porazdeljenih spremenljivk, *normalno porazdeljeni*. Porazdelitev $N(0, 1)$ je standardna normalna porazdelitev \Rightarrow potem za vsak x velja $P(X < x) = 1 - P(X > x)$.

4.5 Gamma slučajna spremenljivka

$$X \sim \Gamma(n, \lambda)$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} & x > 0 \end{cases}$$

V povprecju imamo na casovno enoto λ ponovitev dogodka A , X pa je cas med prvo in $(n + 1)$ ponovitvijo dogodka A .

4.6 Hi kvadrat slučajna spremenljivka

$$X \sim \chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} & x > 0 \end{cases}$$

Je vsota kvadratov n neodvisnih standardnih normalnih slučajnih spremenljivk.

5 Matematično upanje

5.1 Matematično upanje diskretne slučajne spremenljivke

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

oz. zvezne slučajne spremenljivke z gostoto p_X je

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k^n p_k \quad \text{oz.} \\ E(X^n) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx. \end{aligned}$$

Za vsaki slučajni spremenljivki X in Y (lahko sta odvisni, lahko je ena zvezna in druga diskretna) ter $a, b, n \in R$ velja

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

in

$$nE(X^a Y^b) = nE(X^a)E(Y^b)$$

in

$$E((X + Y)^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) \text{ itn...}$$

Matematično upanje nam pove pričakovano vrednost, kolikokrat oz. kdaj (odvisno od porazdelitve) se bo določen dogodek zgodil. Po definiciji disperzije velja tudi:

$$E(X^2) = D(X) + E(X)^2$$

5.2 Matematično upanje funkcije

$f: R \rightarrow R$ slučajne spremenljivke X je

$$\begin{aligned} E(f(X)) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k) p_k \quad \text{oz.} \\ E(f(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_X(x) dx. \end{aligned}$$

5.3 Matematična upanja dss in zss

$$\bullet X \sim \text{Bernoulli}(p) \implies E(X) = p$$

$$\bullet X \sim \text{Binom}(n, p) \implies E(X) = np$$

$$\bullet X \sim G(p) \implies E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\bullet X \sim \text{Pascal}(n, p) \implies E(X) = \frac{n}{p}$$

$$\bullet X \sim H(R, B, n) \implies E(X) = \frac{nR}{R+B}$$

$$\bullet X \sim \text{Pois}(\lambda) \implies E(X) = \lambda$$

$$\bullet X \sim U[a, b] \implies E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\bullet X \sim \epsilon(\lambda) \implies E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\bullet X \sim N(\mu, \sigma) \implies E(X) = \mu$$

$$\bullet X \sim \chi^2(n) \implies E(X) = n$$

6 Disperzija in std. odklon

6.1 Disperzija ali *varianca* slučajne spremenljivke X je definirana kot

$$D(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

Za $a, b \in R$ velja

$$D(aX + b) = a^2 D(X).$$

Ce sta X in Y neodvisni je

$$\begin{aligned} D(aX + bY) &= a^2 D(X) + b^2 D(Y) \text{ in} \\ D(XY) &= E(X^2 Y^2) - E(XY)^2 = \\ &= E(X^2)E(Y^2) - E(X)^2 E(Y)^2 \end{aligned}$$

6.2 Standardni odklon slučajne spremenljivke X je enak

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

6.3 Disperzije dss in zss

$$\bullet X \sim B(p) \implies D(X) = p(1-p)$$

$$\bullet X \sim B(n, p) \implies D(X) = np(1-p)$$

$$\bullet X \sim G(p) \implies D(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\bullet X \sim P(n, p) \implies D(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

$$\bullet X \sim H(R, B, n) \implies$$

$$\frac{nRB(R+B-n)}{(R+B)^2(R+B-1)}$$

$$\bullet X \sim P(\lambda) \implies D(x) = \lambda$$

$$\bullet X \sim U[a, b] \implies D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\bullet X \sim \epsilon(\lambda) \implies D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\bullet X \sim N(\mu, \sigma) \implies D(X) = \sigma^2$$

$$\bullet X \sim \chi^2(n) \implies D(X) = 2n$$

7 Slučajni vektorji

7.1 Diskretni slučajni spremenljivki X in Y lahko določata (dvorazsesni) **diskretni slučajni vektor** (X, Y) . Verjetnost, da (X, Y) zavzame vrednost $(x_i, y_j) \in R$,

$$\text{oznacimo s } P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}.$$

Porazdelitev (X, Y) lahko podamo na dva enakovredna načina, in sicer:

1. s porazdelitveno tabelo

$X \backslash Y$	(X, Y)					
	y_1	y_2	\dots	y_m	\dots	X
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1m}	\dots	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2m}	\dots	p_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n	p_{n1}	p_{n2}	\dots	p_{nm}	\dots	p_n
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Y	q_1	q_2	\dots	q_m	\dots	1

pri čemer je $0 \leq p_{ij} \leq 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = p_i$ za vsak $i \in N$ in $\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = q_j$ za vsak $j \in N$.

2. s porazdelitveno funkcijo

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Velja $F_{X,Y}(x, y) =$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} I_{[x_i, \infty)}(x) I_{[y_j, \infty)}(y) \quad , \quad \text{kjer je}$$

$$I_{[x_i, \infty)}(x) = \begin{cases} 1 & x_i \leq x \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$I_{[y_j, \infty)}(y) = \begin{cases} 1 & y_j \leq y \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Podan imamo vektor $(X \in [0, a], Y \in [0, b])$. Potem velja slednje:

$$\bullet P(X < 1) = P(X \leq 1, Y \leq b)$$

$$\bullet P(X < 1, Y > \frac{1}{2}) = P(X \leq 1, Y \leq 1) - P(X \leq 1, Y \leq \frac{1}{2})$$

$$\bullet P(X > 1, Y > \frac{1}{2}) =$$

$$P(X \leq a, \frac{1}{2} \leq Y \leq b) - P(X \leq 1, \frac{1}{2} \leq Y \leq b) =$$

$$(P(X \leq a, Y \leq b) - P(X \leq a, Y \leq \frac{1}{2})) - (P(X \leq 1, Y \leq b) - P(X \leq 1, Y \leq \frac{1}{2}))$$

Robne porazdelitve so porazdelitve komponent

$$\begin{aligned} p_i &= P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \\ q_j &= P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \end{aligned}$$

Slučajni spremenljivki X in Y sta **neodvisni**, ce za poljubni stevili $x, y \in R$ velja

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \text{ in}$$

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

7.2 dvorazsezna gostota verjetnosti

Naj bosta X, Y z.s.s. Par (X, Y) je *zvezni slučajni vektor*, ce obstaja integrabilna funkcija $p_{X,Y}: R^2 \rightarrow R$ (gostota verjetnosti), tako da za vsak par $(x, y) \in R^2$ velja

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Funkciji $F_{X,Y}$ pravimo *porazdelitvena funkcija*. Velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$$

Robni gostoti sta

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) dy \text{ in}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) dx$$

Zvezni slučajni spremenljivki X in Y sta **neodvisni**, ce za vsaki realni stevili $x, y \in R$ velja

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

7.3 Matematično upanje funkcije

$f: R^2 \rightarrow R$ dvorazseznega slučajnega vektorja (X, Y) je za diskretni slučajni vektor definirano s predpisom

$$\begin{aligned} E(f(X, Y)) &= \\ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j) \end{aligned}$$

za zvezni slučajni vektor pa s predpisom

$$\begin{aligned} E(f(X, Y)) &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) p_{X,Y}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Ce sta X in Y **neodvisni** velja

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

7.4 Kovarianca slučajnih spremenljivk X in Y je definirana kot

$$Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(\underline{XY}) - E(X)E(Y).$$

XY mores posebi zracunat porazdelitev(ampak pazi, ni nujno da sta neodvisni, zato, ce imas tabelo, poberi vrednosti za npr. $P(XY = 1)$ iz tabele)!
Za disperzijo velja

$$\begin{aligned} D(X) &= Cov(X, X) \text{ in} \\ D(aX + bY) &= \\ a^2D(X) + b^2D(Y) + 2abCov(X, Y) \end{aligned}$$

Za slucajne spremenljivke X, Y, Z ter $a, b \in R$ velja:

- $Cov(X + a, Y + b) = Cov(X, Y)$,
- $Cov(aX + bY, Z) = aCov(X, Z) + bCov(Y, Z)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$,
- $|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{D(X)D(Y)}$,
- $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$
- $Cov(a, X) = 0$ (*neodvisni*)

Ce sta s.s X in Y *neodvisni* je njuna kovarianca enaka **0**, $Cov(X, Y) = 0$.

7.5 Korelacijski koeficient izracunamo po formuli

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Korelacijski koeficient zavzema vrednosti na intervalu [-1, 1]. Ce velja $\rho(X, Y) = 0$, lahko sklepamo da sta spremenljivki X in Y **neko-relirani**. Za $a, b, c, d \in R$ ter $a, c > 0$ velja:

$$\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$$

Ce je $|Cov(X, Y)| = \sqrt{D(X)D(Y)}$, tj. $\rho(X, Y) = \pm 1$, potem sta X in Y v **linearni zvezi**

$$Y = \pm \frac{D(Y)}{D(X)}(X - E(X)) + E(Y).$$

Ker iz neodvisnosti sledi $E(XY) = E(X)E(Y)$, sta neodvisni slucajni spremenljivki tudi nekorrelirani. Obratno pa ne velja!

8 Normalna porazdelitev

8.1 Normalna porazdelitev je odvisna od dveh parametrov: $\mu = E(X)$ in $\sigma = \sigma(X)$. Gostota njene porazdelitve je:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Standardizacija:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(\mu = 0, \sigma = 1)$$

Vrednost $F(X) = P(X \leq x)$ dobimo tako da integriramo funkcijo gostote na intervalu $[-\infty, x]$:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Velja : $P(a \leq Z \leq b) = F(b) - F(a)$ in $x \geq 4 \Rightarrow F(x) \approx 1$ (*std. napaka*).

Ce je spremenljivka $X \sim N(0, 1)$ normalno porazdeljena, velja tudi da so lihi momenti normalne porazdelitve enaki 0 ($E(X^3) = E(X^5) = 0$).

8.2 σ pravila

- $1\sigma \Rightarrow P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.683$
- $2\sigma \Rightarrow P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.954$
- $3\sigma \Rightarrow P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997$

8.3 q_x pravila

- $P(X \leq q_1) = 0.25$
- $P(X \leq q_2(m)) = 0.5$
- $P(X \leq q_3) = 0.75$

8.4 Standardizacija binomske porazdelitve

$$X_B \sim B(n, p)$$

kjer velja $\mu = np$ in $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. velja:

$$P(a \leq X_B \leq b) \approx P(a - \frac{1}{2} \leq X_N \leq b + \frac{1}{2}) = F(\frac{b+\frac{1}{2}-\mu}{\sigma}) - F(\frac{a-\frac{1}{2}-\mu}{\sigma})$$

in

$$P(X_B \leq b) \approx P(X_N \leq b + \frac{1}{2}) = F(\frac{b+\frac{1}{2}-\mu}{\sigma})$$

. **Pazi** za normalizirane *diskretne* porazdelitve velja:

- $P(X_B < k) = P(X_B \leq k - 1)$
- $P(X_B > k) = P(X_B \geq k + 1) = 1 - P(X_B \leq k)$

8.5 Aproximacija binomske porazdelitve

8.5.1 Poissonov Priblizek

Naj bo

$$X_B \sim B(n, p) \text{ in } X_P \sim P(np)$$

Ce je

- $n \geq 20$ in $p \in (0, 0.05)$ ali pa
- $n \geq 100$ in $np \in (0, 10]$,

ponavadi velja:

$$P(X_B = k) \approx P(X_P = k) = \frac{(np)^k}{k!}e^{-np}.$$

8.5.2 Laplaceov Priblizek

Naj bo

$$X_B \sim B(n, p) \text{ in } X_N \sim N(np, \sqrt{np(1-p)}).$$

Ce je $np \geq 10$ in $n(1-p) \geq 10$, potem za k dovolj blizu np velja:

$$P(X = k) \approx P(X_N = k) = \frac{e^{-(k-np)^2/(2np(1-p))}}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}$$

9 CLI

9.1 Normalne spremenljivke: Naj bosta $X \sim N(\mu_1, \sigma_1), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ neodvisni. Potem je

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

Posledica: Naj bodo

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1), \dots, X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$$

neodvisne, normalno porazdeljene s.s. Potem velja:

$$X_1 + \dots + X_n \sim N(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}).$$

9.2 CLI za vsoto sl. spremenljivk Naj bodo $X_1, + \dots +, X_n$ neodvisne in enako porazdeljene slucajne spremenljivke, kjer velja $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Potem za dovolj velik n (dobra aproksimacija : $n \geq 30$) velja, da je porazdelitev vsote $S = X_1, + \dots +, X_n$ priblizno normalna.

$$S \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

Pri aproksimaciji **diskretne** porazdelitvene vsote z normalno porazdelitvijo, uporabljamo popravek za zveznost.

$$P(a \leq S \leq b) \approx P(a - \frac{1}{2} \leq Y \leq b + \frac{1}{2}) = F(\frac{b+\frac{1}{2}-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}) - F(\frac{b-\frac{1}{2}-n\mu}{\sigma\sqrt{n}})$$

9.3 Enostavni slucajni vzorec Naj bo X s.s. Enostavni slucajni vzorec je slucajni vektor $(X_1, + \dots +, X_n)$, za katerega velja:

- vsi cleni vektorja X_i imajo isto porazdelitev kot spremenljivka X in
- cleni X_i so med seboj neodvisni

9.4 Vzorcno povprecje normalno porazdeljenega **vzorca** Naj bo $(X_1, + \dots +, X_n)$ enostavni slucajni vzorec, $X_i \sim N(\mu, \sigma)$. Potem je porazdelitev vzorcnega povprecja $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ tudi normalna:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Pozor! Pri racunanju disperzije ne pozabi kvadrirati $\frac{1}{n}$.

9.5 CLI za vzorcno povprecje Naj bo $(X_1, + \dots +, X_n)$ enostavni slucajni vzorec in

$$\begin{aligned} E(X_i) &= \mu, D(X_i) = \sigma^2 \\ (\mu \text{ in } \sigma^2 \text{ morata biti koncni}) \end{aligned}$$

Za dovolj veliki vzorec ($n \geq 30$) je porazdelitev vzorcnega povprecja $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ priblizno normalna

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

9.6 Racunanje razpona Naj bo s.s. X normalno porazdeljena $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$\begin{aligned} P(E(X) - a \leq X \leq E(X) + a) &= p \\ I &= [E(X) - a, E(X) + a] \end{aligned}$$