

Vektorji in matrike

1.1 Vektor je *urejena n-terica števil*, ki jo običajno zapisemo kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1.2 Produkt *vektorja* \vec{x} s skalarjem α je vektor

$$\alpha \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

1.3 Vsota *vektorjev* \vec{x} in \vec{y} je vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

1.4 Nicelni vektor $\vec{0}$ je tisti vektor, za katerega je $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ za vsak vektor \vec{a} . Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju \vec{a} priprada nasprotni vektor $-\vec{a}$, tako da je $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ Razlika vektorjev \vec{a} in \vec{b} je vsota $\vec{a} + (-\vec{b})$ in jo navadno zapisemo kot $\vec{a} - \vec{b}$.

Lastnosti vektorske vsote

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutativnost)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (asociativnost)
- $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$ (distributivnost)

1.5 Linearna kombinacija vektorjev \vec{x} in \vec{y} je vsota

$$a\vec{x} + b\vec{y}$$

1.6 Skalarni produkt vektorjev

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ je stevilo}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

Lastnosti skalarnega produkta

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$ (aditivnost)
- $\vec{x} \cdot (a\vec{y}) = a(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (a\vec{x}) \cdot \vec{y}$ (homogenost)
- $\forall \vec{x}$ velja $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

1.7 Dolžina vektorja \vec{x} je

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

1.8 Enotski vektor je vektor z dolžino 1.
1.9 Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$||\vec{u} \cdot \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||.$$

1.10 Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

1.11 Vektorja \vec{x} in \vec{y} sta ortogonalna (ali pravokotna) natakno takrat, kadar je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

1.12 Če je ϕ kot med vektorjema \vec{x} in \vec{y} , potem je

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| ||\vec{y}||} = \cos \phi$$

1.13 Vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

Lastnosti vektorskega produkta

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (aditivnost)
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ (!komutativnost)
- $(a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$ (homogenost)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ je \perp na vektorja \vec{a} in \vec{b}
- $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \sin \phi$
- Dolžina vektorskega produkta je ploscina paralelograma, katerega vektorja oklepata

1.14 Mesani produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ vektorjev \vec{a}, \vec{b} in \vec{c} v R^3 je skalarni produkt vektorjev $\vec{a} \times \vec{b}$ in \vec{c} :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Lastnosti mesanega produkta

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- $(x\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (homogenost)
- $(\vec{a}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$
- Absolutna vrednost mesanega produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enaka prostornini paralepipeda

Razdalje

Razdalja od točke P do ravnine, v kateri leži točka A :

$$\cos \phi = \frac{\vec{n} \cdot (r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}})}{||\vec{n}|| ||r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}}||} \text{ oz. } d = \left| \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} \cdot (r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}}) \right|$$

Razdalja od točke P do premice, katera gre skozi točko A :

$$d = \frac{||\vec{e} \times (r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}})||}{||\vec{e}||}$$

1.15 Matrika dimenzije $m \times n$ je tabela $m \times n$ števil, urejenih v m vrstic in n stolpcev:

$$A^{m \times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

1.16 Matrika, katere elementi so enaki nič povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonalna matrika. Za diagonalno matriko je $a_{ij} = 0$, kadarkoli velja $i \neq j$

1.17 Matrika $A^{n \times n}$ je spodnjetrokotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i < j$$

1.18 Matrika $A^{n \times n}$ je zgornjetrikotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i > j$$

1.19 Matrika je trikotna, ce je zgornjetrikotna ali spodnjetrokotna.

1.20 Dve matriki A in B sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

$$A^{m \times n} = B^{p \times q} \implies m = p \text{ in } n = q, a_{ij} = b_{ij} \text{ za vsak } i = 1, \dots, m \text{ in } j = 1, \dots, n$$

1.21 Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnožimo s skalarjem

$$aA^{m \times n} = \begin{bmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} & \dots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{m1} & ax_{m2} & ax_{m3} & \dots & ax_{mn} \end{bmatrix}$$

1.22 Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da seštejemo istolezne elemente obeh matrik:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Osnovne matricne operacije

- $A + B = B + A$ (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativnost)
- $a(A+B) = aA + aB$ (množenje s skalarjem)
- $A + (-A) = 0$
- $x(yA) = (xy)A$ in $1 \cdot A = A$

1.23 Transponirana matrika k matriki A reda $m \times n$ je matrika reda $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{m1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Lastnosti transponiranja matrik

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(xA)^T = xA^T$
- $(A^T)^T = A$

1.24 Produkt matrike A in vektorja \vec{x} je linearna kombinacija stolpcev matrike A, utezi linearne kombinacije so komponente vektorja \vec{x} :

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

1.25 Produkt vrstice \vec{x} z matriko A je linearna kombinacija vrstic matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice \vec{y} :

$$\vec{y} \cdot A = [y_1, y_2, y_3] \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

1.26 Produkt matrik A in B je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike A s stolpci matrike B:

$$AB = A \begin{bmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \end{bmatrix}$$

1.27 Element c_{ij} v i -ti vrstici in j -tem stolpcu produkta $C = AB$ je skalarni produkt i -te vrstice A in j -tega stolpca matrike B

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

1.28 Produkt matrik A in B je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike A z matriko B:

$$[i - \text{ta vrstica } A] B = [i - \text{ta vrstica } AB]$$

Lastnosti matricnega produkta

- $AB \neq BA$ (!komutativnost)
- $(xA)B = x(AB) = A(xB)$ (homogenost)
- $C(A+B) = CA + CB$ (distributivnost)
- $A(BC) = (AB)C$ (asociativnost)
- $(AB)^T = B^T A^T$

1.29 Vrstice matrike A z n stolpci naj bodo a^1, \dots, a^n , stolpci matrike B z n vrsticami pa a_1, \dots, a_n . Potem je

$$AB = a^1 b_1 + \dots + a^n b_n$$

1.30 Če delitev na bloke v matriki A ustreza delitvi v matriki B, potem lahko matriki pomnožimo bločno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

1.31 Kvadratna matrika I_k reda $k \times k$, ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko A reda $m \times n$ velja $AI_n = A$ in $I_m A = A$. Matrika I_k se imenuje enotska ali identična matrika.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

2 Sistemi linearnih enačb

2.1 Kvadratna matrika A je obrnljiva, če obstaja taka matrika A^{-1} , da je

$$AA^{-1} = I \text{ in } A^{-1}A = I$$

Matrika A^{-1} (če obstaja) se imenuje matriki A inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna.

2.2 Kvadratna matrika reda n je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo n pivotov.

2.3 Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

2.4 Inverzna matrika inverzne matrike A^{-1} je matrika A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2.5 Če je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ edino resitev $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

2.6 Če obstaja neničen resitev \vec{x} enačbe $A\vec{x} = \vec{0}$, matrika A ni obrnljiva (je singularna).

2.7 Če sta matriki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt $A \cdot B$ in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Pozor! Pravilo

$$(AB)^p = A^p B^p$$

velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej $AB = BA$.

2.8 Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2.9 Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi a_{ii} je diagonalna matrika, ki ima na diagonali elemente a_{ii}^{-1}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

2.10 Za izračun inverza matrike A, uporabimo gaussovo eliminacijo nad matriko $[A|I]$

$$[A|I] = [I|A^{-1}]$$

2.11 Matrika A je simetrična $\Leftrightarrow A^T = A$. Za elemente a_{ij} simetrične matrike velja $a_{ij} = a_{ji}$.

2.12 Če je matrika A simetrična in obrnljiva, je tudi A^{-1} simetrična.

2.13 Če je R poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta $R^T R$ in $R R^T$ simetrični matriki.

3 Vektorski prostori

3.1 Realni vektorski prostor V je množica "vektorjev" skupaj z pravili za

- seštevanje vektorjev,
- množenje vektorja z realnim številom (skalarjem)

Če sta \vec{x} in \vec{y} poljubna vektorja v V, morajo biti v V tudi

- vsota $\vec{x} + \vec{y}$ in
- produkti $\alpha\vec{x}$ za vse $\alpha \in R$

V vektorskem prostoru V morajo biti tudi vse linearne kombinacije $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

Pravila za operacije v vektorskih prostorih

Operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoščati naslednjim pravilom:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (asociativnost)
- obstaja en sam neničen vektor $\vec{0}$, da velja $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- za vsak \vec{x} obstaja natanko en $-\vec{x}$, da je $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
- $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ (distributivnost)
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

3.2 Podmnožica U vektorskega prostora V je *vektorski podprostor*, če je za vsak par vektorjev \vec{x} in \vec{y} iz U in vsako realno število α tudi

- $\vec{x} + \vec{y} \in U$ in
- $\alpha\vec{x} \in U$.

3.3 Množica vektorjev U je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz U tudi v U.

Lastnosti vektorskih podprostorov

- Vsak vektorski podprostor nujno vsebuje ničelni vektor $\vec{0}$

- Presek dveh podprostorov vektorskega podprostora je tudi podprostor

3.4 Stolpčni prostor $C(A)$ matrike $A \in R^{m \times n}$ je tisti podprostor vektorskega prostora R^m , ki vsebuje natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike A .

neformalno: linearna ogrinjaca stolpcev matrike (npr. ce imas 5 stolpcev pa lahko 2 zapises kot linearno kombinacijo ostalih 3 bo imel column space 3 elemente)

3.5 Sistem linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je resljiv natanko tedaj, ko je vektor $\vec{b} \in C(A)$

3.6 Naj bo matrika $A \in R^{m \times n}$. Mnozica resitev homogenega sistema linearnih enacb je podprostor v vektorskem prostoru R^n .

3.7 Mnozica vseh resitev sistema linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ se imenuje nicelni prostor matrike A . Oznacujemo ga z $N(A)$.

neformalno: mnozica vektorjev, ki se z neko matriko zmnozijo v nicelni vektor

3.8 Ce je matrika A kvadratna in ni obrnljiva, potem $N(A)$ vsebuje samo vektor $\vec{0}$

3.9 Matrika ima *stopnicasto* obliko, kadar se vsaka od njenih vrstic zacne z vsaj eno niclo vec kot prejsnja vrstica.

3.10 Prvi element, razlicen od nic v vsaki vrstici, je *pivot*. Stevilo pivotov v matriki se imenuje rang matrike. Rang matrike A zapisemo kot $\text{rang}(A)$.

3.11 Rang matrike ni vecji od stevila vrstic in ni vecji od stevila stolpcev matrike.

3.12

Stevilo prostih neznank matrike = st. stolpcev - rang matrike

3.13

1. Visoka in ozka matrika ($m > n$) ima poln stolpčni rang, kadar je $\text{rang}(A) = n$
2. Nizka in široka matrika ($m < n$) ima poln vrstični rang, kadar je $\text{rang}(A) = m$
3. Kvadratna matrika ($n = m$) ima poln rang, kadar je $\text{rang}(A) = m = n$

3.14 Za vsako matriko A s polnim stolpčnim rangom $r = n \leq m$, velja:

1. Vsi stolpci A so pivotni stolpci
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ nima prostih neznank, zato tudi nima posebnih resitev
3. Nicelni prostor $N(A)$ vsebuje le nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$
4. Kadar ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ resitev (kar ni vedno res!), je resitev ena sama
5. Reducirana vrstična oblika matrike (A) se da zapisati kot

$$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times n \text{ enotska matrika} \\ m - n \text{ vrstic samih nicel} \end{bmatrix}$$

3.15 Za vsako matriko A s polnim vrstičnim rangom $r = m \leq n$ velja:

1. Vse vrstice so pivotne, ni prostih vrstic in U (stopnicasta oblika) in R (reducirana stopnicasta oblika) nimata nicelnih vrstic
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je resljiv za vsak vektor \vec{b}
3. Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ ima $n - r = n - m$ prostih neznank, zato tudi prav toliko posebnih resitev
4. Stolpčni prostor $C(A)$ je ves prostor R^m

3.16 Za vsako kvadratno matriko A polnega ranga ($\text{rang}(A) = m = n$) velja:

1. Reducirana vrstična oblika matrike A je enotska matrika
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ ima natančno eno resitev za vsak vektor desnih strani \vec{b}
3. Matrika A je obrnljiva
4. Nicelni prostor matrike A je samo nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$
5. Stolpčni prostor matrike A je cel prostor $C(A) = R^m$

3.17 Vektorji $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ so linearno neodvisni, ce je

$$0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n$$

edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka vektorju $\vec{0}$. Vektorji $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ so linearno odvisni, ce niso linearno neodvisni.

3.18 Ce so vektorji *odvisni*, lahko vsaj enega izrazimo z ostalimi.

3.19 Ce je med vektorji $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ tudi nicelni vektor, so vektorji *linearno odvisni*.

3.20 Vsaka mnozica n vektorjev iz R^n je odvisna, kadar je $n > m$.

3.21 Stolpci matrike A so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima homogena enacha $A\vec{x} = \vec{0}$ edino resitev $\vec{x} = \vec{0}$.

3.22 Kadar je $\text{rang}(A) = n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisni. Kadar je pa $\text{rang}(A) < n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisni.

3.23 Kadar je $\text{rang}(A) = m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisne. Kadar je pa $\text{rang}(A) < m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisne.

3.24 Vrstični prostor matrike A je podprostor v R^n , ki ga razpenjajo vrstice matrike A .

3.25 Vrstični prostor matrike A je $C(A^T)$, stolpčni prostor matrike A^T .

3.26 Baza vektorskega prostora je mnozica vektorjev, ki

1. je linearno neodvisna in
2. napenja cel prostor.

3.27 Vsak vektor iz vektorskega prostora lahko na en sam nacin izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

3.28 Vektorji $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ so baza prostora R^n natanko tedaj, kadar je matrika, sestavljena iz stolpcev $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, obrnljiva.

3.29 Prostor R^n ima za $n > 0$ neskončno mnogo razlicnih baz.

3.30 Ce sta mnozici vektorjev $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ in $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ obe bazi istega vektorskega prostora, potem je $m = n \implies$ vse baze istega vektorskega prostora imajo isto stevilo vektorjev.

3.31 Dimenzija vektorskega prostora je stevilo baznih vektorjev.

3.32 Dimenziji stolpčnega prostora $C(A)$ in vrstičnega prostora $C(A^T)$ sta enaki rang matrike A

$$\dim(C(A)) = \dim(C(A^T)) = \text{rang}(A).$$

3.33 Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ matrike A z n stolpci in ranga r je enaka $\dim(N(A)) = n - r$.

3.34 Stolpčni prostor $C(A)$ in vrstični prostor $C(A^T)$ imata oba dimenzijo r . Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ je $n - r$, Dimenzija levega nicelnega prostora $N(A^T)$ pa je $m - r$.

3.35 Vsako matriko ranga 1 lahko zapisemo kot produkt (stolpčnega) vektorja z vrstičnim vektorjem $A = \vec{u}\vec{v}^T$.

4 Linearne preslikave

4.1 Preslikava $A : U \rightarrow V$ je linearna, ce velja

1. aditivnost: $A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2$ za vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$,
2. homogenost: $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$ za vse $\alpha \in R$ in $\vec{u} \in U$.

4.2 Preslikava $A : U \rightarrow V$ je linearna natanko tedaj, ko velja

$$A(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1 A\vec{u}_1 + \alpha_2 A\vec{u}_2$$

za vse $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ in vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$.

4.3 Ce je A linearna preslikava, je $A\vec{0} = \vec{0}$.

4.4 Naj bo $A : U \rightarrow V$ linearna preslikava in $\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i$ linearna kombinacija vektorjev. Potem je $A(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{u}_i$.

4.5 Naj bo $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ baza za vektorski prostor U . Potem je linearna preslikava $A : U \rightarrow V$ natanko dolocena, ce poznamo slike baznih vektorjev.

4.6 Naj bo $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ baza za U in $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$. Potem obstaja natanko ena linearna preslikava $A : U \rightarrow V$, za katero je $A\vec{u}_i = \vec{v}_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$.

4.7 Naj bo $A : U \rightarrow V$ linearna preslikava. Potem mnozico

$$\ker A = \{\vec{u} \in U; A\vec{u} = \vec{0}\}$$

imenujemo *jedro* linearne preslikave. Ker je $A\vec{0} = \vec{0}$, je $\vec{0} \in \ker A$ za vse A . Zato je jedro vedno neprazna množica.

4.8 Jedro linearne preslikave $A : U \rightarrow V$ je vektorski podprostor v U .

4.9 Mnozico

$$\operatorname{im} A = \{\vec{v} \in V; \text{ obstaja tak } \vec{u} \in U, \text{ da je } \vec{v} = A\vec{u}\}$$

imenujemo *slika* linearne preslikave $A : U \rightarrow$

V .

4.10 Če je $A : U \rightarrow V$ linearna preslikava, potem je njena slika *im* A vektorski podprostor v V .