

## Ponovitev analize

## Odvodi

- $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$
- $x^n = nx^{n-1}$
- $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $\sin(ax) = a \cos ax$
- $\cos(ax) = -a \sin(ax)$
- $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $e^a x = ae^{ax}$
- $a^x = a^x \ln a$
- $x^x = x^x(1 + \ln x)$
- $\ln x = \frac{1}{x}$
- $\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- $\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$

## Integrali

- $\int x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & a \neq -1 \\ \ln|x| + C & a = -1 \end{cases}$
- $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$
- $\int \sin(ax) dx = \frac{-\cos(ax)}{a} + C$
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

**Integriranje absolutnih vrednosti** (primer): Imamo funkcijo  $f(x) = |x|$ , ki je zvezna na intervalu  $[-1, 1]$ . Če hocemo to funkcijo integrirati in zelimo izračunati njeno porazdelitveno funkcijo integrirati locimo 2 primera:

- $-1 \leq x < 0$   

$$F(x) = \int_{-1}^x |t| dt = \int_{-1}^x -t dt = -\frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^x = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$$
- $0 \leq x < 1$   

$$F(x) = \int_{-1}^x |t| dt = \int_{-1}^0 -t dt + \int_0^x t dt = -\frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{1}{2}(1 + x^2)$$

$$\sqrt[n]{x} = (x)^{\frac{1}{n}}$$

# Kombinatorika

## 1.1 Permutacije

- brez ponavljanja:  $P_n = n!$
- s ponavljanjem:  $P_n^{k_1, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! \dots k_n!}$

## 1.2 Variacije

- brez ponavljanja:  $V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
- s ponavljanjem:  $V_n^r = n^r$

## 1.3 Kombinacije

- brez ponavljanja:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- s ponavljanjem:  $\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$

Lastnosti binomskega simbola:

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Binomski izrek:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Za kombinacije velja, da vrstni red **ni** pomemben. Medtem pa ko v splošnem za variacije in permutacije velja, da vrstni red **je** pomemben.

# Verjetnost

## 2.1 Elementarna verjetnost

Izid iz dane množice izidov je izbran na slepo, ce so vsi izidi iz te množice enako verjetni. Takrat se dogodek  $A$  zgodi z verjetnostjo:

$$P(A) = \frac{\text{st. izidov, ki so v } A}{\text{st. vseh izidov}}$$

Nasprotni dogodek pa z verjetnostjo:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Nacelo vključitev in izključitev dogodkov:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= P(A_1) + \dots + P(A_n) \\ &- P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - \dots - P(A_{n-1} A_n) \\ &+ P(A_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_4) + \dots + \\ &P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n) \end{aligned}$$

Dogodki  $A_1, A_2, \dots, A_k$  in  $B$  so **neodvisni**, ce velja

$$P(A_1 \dots A_k) = P(A_1) \dots P(A_k)$$

ali z drugimi besedami... Verjetnost produkta paroma neodvisnih dogodkov je enaka produktu vrjetnosti teh dogodkov.

**2.2 Pogojna verjetnost** Verjetnost da se zgodi dogodek  $A$ , ce vemo, da se zgodi dogodek  $B$ , je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Dogodka  $A$  in  $B$  sta **neodvisna**, ce velja  $P(A|B) = P(A)$  ali  $P(AB) = P(A)P(B)$ . Pazi! Za par **nezdružljivih** dogodkov  $A$  in  $B$  pa velja  $P(AB) = 0$ ,  $P(A+B) = P(A) + P(B)$ ,  $P(A|B) = 0$  in  $P(B|A) = 0$ .

## 2.3 Popolna verjetnost

Dogodki  $H_1, H_2, \dots, H_n$  tvorijo **popoln sistem dogodkov**, ce se nobena dva dogodka ne moreta zgoditi hkrati in se vedno zgodi vsaj en od njih. Ce dogodki izpolnjujejo ta pogoj, potem po naceru vključitev/izključitev velja:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$$

Za **popolni sistem dogodkov** velja unija hipotez:

$$\frac{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}{P(H_1) + \dots + P(H_{n-1}) + P(H_n)}$$

Zanje velja tudi **Bayesova formula**:

$$\begin{aligned} P(H_i|A) &= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)} \end{aligned}$$

## 2.4 Geometrijska verjetnost

Točka je izbrana *na slepo* iz intervala, lika, telesa.. ce za vsak dogodek  $A$  velja:

$$P(A) = \frac{\text{mera izidov, ki so v } A}{\text{mera vseh izidov}}$$

Pri tem je mera lahko dolžina, ploscina, volumen,.. Basically upas da narises graf pravilno.

Splosno za vse nastete verjetnosti velja:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ in} \\ P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \end{aligned}$$

# Diskretne s.s.

**3.1 Diskretna slučajna spremenljivka** Naj bo  $X$  diskretna slučajna spremenljivka  $\Rightarrow X$  je funkcija s končno ali stevno zalogo vrednosti  $a_1, a_2, \dots$ . Verjetnost, da  $X$  vzame vrednost  $a_i \in R$ , označimo z  $P(X = a_i) = p_i$ . Porazdelitev  $X$  lahko podamo na dva enakovredna načina, in sicer s:

- s **porazdelitveno shemo**

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

velja  $0 \leq p_i \leq 1$  in  $p_1 + p_2 + \dots = 1$

- s **porazdelitveno funkcijo**

$$F_x(x) := P(X \leq x)$$

**3.2 Bernoullijeva** slučajna spremenljivka

$$X \sim B(p)$$

- V vsakem poskusu ima dogodek  $A$  verjetnost  $p$ ,  $X$  pa ima vrednost 1, če se je zgodil dogodek  $A$ , in 0 sicer.

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

### 3.3 Binomska slučajna spremenljivka

$$X \sim B(n, p)$$

- $X$  je število pojavitev izida  $A$  v  $n$  ponovitvah poskusa
- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{(n-k)}$  za  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Izvajamo  $n$  neodvisnih slučajnih poskusov. V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek  $A$  s konstantno verjetnostjo  $p$ ,  $p = P(A)$ .  $X$  nam pove kolikokrat se je zgodil dogodek  $A$  v  $n$  poskusih. npr. kovanec vrzemo 10x, kolikšne so vrjetnosti, da pade cifra 0x, 2x, vsaj 3x,.. ali 5x vrzemo posteno kocko, izračunaj število sestic, ki pade  $\Rightarrow B(5, \frac{1}{6})$

### 3.4 Geometrijska slučajna spremenljivka

$$X \sim G(p)$$

- $X$  je število ponovitev poskusa do (vključno) prve ponovitve izida  $A$ .
- $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$  za  $k = 1, 2, \dots$
- $P(X \leq k) = 1 - (1 - p)^k$  za  $k = 1, 2, \dots$

Izvajamo neodvisne slučajne poskuse, dokler se ne zgodi dogodek  $A$ . V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek  $A$  s **konstantno** verjetnostjo  $p$ ,  $p = P(A)$ . npr. koliko metov kocke je potrebnih, do prve sestice  $\Rightarrow G(1/6)$ .

### 3.5 Pascalova oz. negativna binomska slučajna spremenljivka

$$X \sim P(n, p)$$

- $X$  je število ponovitev poskusa do (vključno)  $n$ -te ponovitve izida  $A$ .
- $P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} (1 - p)^{k-n} p^n$  za  $k = n, n + 1, n + 2, \dots$

npr. koliko metov kocke je potrebnih, dokler sestica ne pade 5x  $\Rightarrow P(5, \frac{1}{6})$ . Število metov kovanja, dokler grb ne pade 2x  $\Rightarrow P(2, \frac{1}{2})$ .

### 3.6 Hipergeometrijska slučajna spremenljivka

$$X \sim H(K, N - K, n)$$

- $X$  je število elementov z določeno lastnostjo med izbranimi.
- $P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$  za  $k = 0, 1, 2, \dots, \min\{n, K\}$

V populaciji  $N$  imamo  $K$  elementov z določeno lastnostjo. Izbiramo brez vračanja  $n$  elementov. npr. koliko pikov med 7 kartami, ki smo jih na slepo izbrali izmed 16 kart, kjer so bli stirje piki. imamo 400 ljudi, 100 brezposlenih, naključno jih izberemo 10. Zanima nas kaksna verjetnost je da sta 2 izmed teh brezposelna  $\Rightarrow P(x = 2) = H(100, 400 - 100, 10)$ .

### 3.7 Poissonova slučajna spremenljivka

$$X \sim P(\lambda)$$

- $X$  je število ponovitev dogodka  $A$  na danem intervalu, pri cemer:
  - se dogodki pojavljajo neodvisno
  - povprečno število dogodkov  $\lambda$ , ki se pojavijo na določenem intervalu, je konstantno.
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$  za  $k = 0, 1, 2, \dots$

npr. če se dogodek pojavi v povprečju 3x na minuto, lahko uporabimo poissa za izračun kolikokrat se bo dogodek zgodil v 1/4h  $\Rightarrow P(45)$ . St avtomobilov, ki prečkajo cesto v 1min.

## 4 Zvezne s.s.

**4.1 Zvezna slučajna spremenljivka** Naj bo  $X$  zvezna slučajna spremenljivka  $\Rightarrow X$  je realna funkcija, za katero obstaja integrabilna funkcija  $p_X : R \rightarrow [0, \infty)$ , tako da za vsak  $x \in R$  velja:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt$$

Funkciji  $p_X$  pravimo **gostota verjetnosti**, funkciji  $F_X$  pa **porazdelitvena** funkcija. Mnogi vrednosti, ki jih zavzame spremenljivka  $X$ , pravimo **zaloga vrednosti** in jo označimo z  $Z_X$ . Lastnosti:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1$
- $P(a < X < b) = \int_a^b p_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$ ,  $a, b \in R$ ,  $a < b$
- $P(X = a) = 0$ ,  $a \in R$  nqot

če je funkcija zvezna v  $x$ , potem za njo velja tudi  $F'(x) = p(x)$ . Za zvezno slučajno spremenljivko  $X$  je **funkcija preživetja**  $S(x) = P(X > x)$  vedno zvezna, nenarascujoča in zavzema vrednosti na intervalu  $[0, 1]$ .

### 4.2 Enakomerna zvezna slučajna spremenljivka

$$X \sim U[a, b]$$

- $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$

Vsi izidi na intervalu  $[a, b]$  so enako verjetni.

### 4.3 Eksponentna slučajna spremenljivka

$$X \sim \epsilon(\lambda)$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$

Slučajna spremenljivka  $X$  - čas med zaporednima dogodkoma, pri cemer so dogodki neodvisni in se pojavijo s konstantno stopnjo  $\lambda$ .  $\lambda$  predstavlja povprečno število dogodkov na izbrano časovno enoto.

### 4.4 Normalna slučajna spremenljivka

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

- $p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  za  $x \in R$
- Za  $F_X(x)$  ne obstaja eksplicitna formula. Vrednost preberemo iz porazdelitvenih tabel.

Po centralnem limitnem izreku sta vsota in povprečje veliko neodvisnih, enako porazdeljenih spremenljivk, *normalno porazdeljeni*. Porazdelitev  $N(0, 1)$  je standardna normalna porazdelitev  $\Rightarrow$  potem za vsak  $x$  velja  $P(X < x) = 1 - P(X > x)$ .

### 4.5 Gamma slučajna spremenljivka

$$X \sim \Gamma(n, \lambda)$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} & x > 0 \end{cases}$

V povprečju imamo na časovno enoto  $\lambda$  ponovitev dogodka  $A$ ,  $X$  pa je čas med prvo in  $(n + 1)$  ponovitvijo dogodka  $A$ .

### 4.6 Hi kvadrat slučajna spremenljivka

$$X \sim \chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} & x > 0 \end{cases}$

Je vsota kvadratov  $n$  neodvisnih standardnih normalnih slučajnih spremenljivk.

5 Matematicno upanje

5.1 **Matematicno upanje** diskretne slučajne spremenljivke

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

oz. zvezne slučajne spremenljivke z gostoto  $p_X$  je

$$E(X^n) = \sum_{k=0}^\infty x_k^n p_k \text{ oz. } E(X^n) = \int_{-\infty}^\infty x^n p_X(x) dx.$$

Za vsaki slučajni spremenljivki  $X$  in  $Y$  (lahko sta odvisni, lahko je ena zvezna in druga diskretna) ter  $a, b \in R$  velja

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

in

$$E(X^a Y^b) = E(X^a) E(Y^b)$$

5.2 **Matematicno upanje funkcije**  
 $f : R \rightarrow R$  slučajne spremenljivke  $X$  je

$$E(f(X)) = \sum_{k=0}^\infty f(x_k) p_k \text{ oz. } E(f(X)) = \int_{-\infty}^\infty f(x) p_X(x) dx.$$

5.3 **Matematicna upanja** dss in zss

- $X \sim Bernoulli(p) \implies E(X) = p$
- $X \sim Binom(n, p) \implies E(X) = np$
- $X \sim G(p) \implies E(X) = \frac{1}{p}$
- $X \sim Pascal(n, p) \implies E(X) = \frac{n}{p}$
- $X \sim H(K, N - K, n) \implies E(X) = \frac{nR}{R+B}$
- $X \sim Pois(\lambda) \implies E(x) = \lambda$
- $X \sim U[a, b] \implies E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $X \sim \epsilon(\lambda) \implies E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $X \sim N(\mu, \sigma) \implies E(X) = \mu$
- $X \sim \chi^2(n) \implies E(X) = n$

6 Disperzija in std. odklon

6.1 **Disperzija** ali *varianca* slučajne spremenljivke  $X$  je definirana kot

$$D(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

Za  $a, b \in R$  velja

$$D(aX + b) = a^2 D(X).$$

Ce sta  $X$  in  $Y$  neodvisni je

$$E(XY) = E(X)E(Y) \text{ in } D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

6.2 **Standardni odklon** slučajne spremenljivke  $X$  je enak

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

6.3 **Disperzije** dss in zss

- $X \sim B(p) \implies D(X) = p(1 - p)$
- $X \sim B(n, p) \implies D(X) = np(1 - p)$
- $X \sim G(p) \implies D(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- $X \sim P(n, p) \implies D(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}$
- $X \sim H(R, B, n) \implies \frac{nRB(R+B-n)}{(R+B)^2(R+B-1)}$
- $X \sim P(\lambda) \implies D(x) = \lambda$
- $X \sim U[a, b] \implies D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $X \sim \epsilon(\lambda) \implies D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $X \sim N(\mu, \sigma) \implies D(X) = \sigma^2$
- $X \sim \chi^2(n) \implies D(X) = 2n$

7 Slučajni vektorji

7.1 Diskretni slučajni spremenljivki  $X$  in  $Y$  lahko določata (dvorazsesni) **diskretni slučajni vektor**  $(X, Y)$ . Verjetnost, da  $(X, Y)$  zavzame vrednost  $(x_i, y_i) \in R$ ,

oznacimo s  $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ .

Porazdelitev  $(X, Y)$  lahko podamo na dva enakovredna načina, in sicer:

1. s **porazdelitveno tabelo**

(X, Y)						
$X \backslash Y$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_m$	$\dots$	$X$
$x_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\dots$	$p_{1m}$	$\dots$	$p_1$
$x_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{2m}$	$\dots$	$p_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_n$	$p_{n1}$	$p_{n2}$	$\dots$	$p_{nm}$	$\dots$	$p_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y$	$q_1$	$q_2$	$\dots$	$q_m$	$\dots$	1

pri čemer je  $0 \leq p_{ij} \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty p_{ij} = 1$ ,  $\sum_{i=1}^\infty p_{ij} = p_i$  za vsak  $i \in N$  in  $\sum_{i=1}^\infty p_{ij} = q_j$  za vsak  $j \in N$ .

2. s **porazdelitveno funkcijo**

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Velja  $F_{X,Y}(x, y) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty p_{ij} I_{[x_i, \infty)}(x) I_{[y_j, \infty)}(y)$ , kjer je

$$I_{[x_i, \infty)}(x) = \begin{cases} 1 & x_i \leq x \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$
$$I_{[y_j, \infty)}(y) = \begin{cases} 1 & y_j \leq y \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

**Robne porazdelitve** so porazdelitve komponent

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^\infty p_{ij}$$
$$q_j = P(Y = y) = \sum_{j=1}^\infty p_{ij}$$

Slučajni spremenljivki  $X$  in  $Y$  sta **neodvisni**, ce za poljubni stevili  $x, y \in R$  velja

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

7.2 **dvorazsezna gostota verjetnosti**  
Naj bosta  $X, Y$  z.s.s. Par  $(X, Y)$  je *zvezni slučajni vektor*, ce obstaja integrabilna funkcija  $p_{X,Y} : R^2 \rightarrow R$  (gostota verjetnosti), tako da za vsak par  $(x, y) \in R^2$  velja

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Funkciji  $F_{X,Y}$  pravimo *porazdelitvena funkcija*. Velja

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty p_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$$

**Robni gostoti** sta

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^\infty p_{X,Y}(x, y) dy \text{ in } p_Y(y) = \int_{-\infty}^\infty p_{X,Y}(x, y) dx$$

Zvezni slučajni spremenljivki  $X$  in  $Y$  sta **neodvisni**, ce za vsaki realni stevili  $x, y \in R$  velja

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

7.3 **Matematicno upanje funkcije**  
 $f : R^2 \rightarrow R$  dvorazseznega slučajnega vektorja  $(X, Y)$  je za diskretni slučajni vektor definirano s predpisom

$$E(f(X, Y)) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty f(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

za zvezni slučajni vektor pa s predpisom

$$E(f(X, Y)) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) P_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Ce sta  $X$  in  $Y$  **neodvisni** velja

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

7.4 **Kovarianca** slučajnih spremenljivk  $X$  in  $Y$  je definirana kot

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Za disperzijo velja

$$D(X) = Cov(X, X).$$

Za slučajne spremenljivke  $X, Y, Z$  ter  $a, b \in R$  velja:

- $Cov(X + a, Y + b) = Cov(X, Y)$ ,
- $Cov(aX + bY, Z) = aCov(X, Z) + bCov(Y, Z)$ ,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$ ,
- $|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{D(X)D(Y)}.$

7.5 **Korelacijski koeficient** izračunamo po formuli

$$r(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$