

# Vektorji in matrike

**1.1** Vektor je *urejena n-terica števil*, ki jo običajno zapisemo kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

**1.2** Produkt *vektorja*  $\vec{x}$  s skalarjem  $\alpha$  je vektor

$$\alpha \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

**1.3** Vsota *vektorjev*  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  je vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

**1.4** Nicelni vektor  $\vec{0}$  je tisti vektor, za katerega je  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  za vsak vektor  $\vec{a}$ . Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju  $\vec{a}$  priprada nasprotni vektor  $-\vec{a}$ , tako da je  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$  Razlika vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  je vsota  $\vec{a} + (-\vec{b})$  in jo navadno zapisemo kot  $\vec{a} - \vec{b}$ .

**Lastnosti vektorske vsote**

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (komutativnost)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  (asociativnost)
- $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$  (distributivnost)

**1.5** Linearna kombinacija vektorjev  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  je vsota

$$a\vec{x} + b\vec{y}$$

**1.6** Skalarni produkt vektorjev

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ je stevilo}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

**Lastnosti skalarnega produkta**

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$  (komutativnost)
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$  (aditivnost)
- $\vec{x} \cdot (a\vec{y}) = a(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (a\vec{x}) \cdot \vec{y}$  (homogenost)
- $\forall \vec{x}$  velja  $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

**1.7** Dolžina vektorja  $\vec{x}$  je

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

**1.8** Enotski vektor je vektor z dolžino 1.  
**1.9** Za poljubna vektorja  $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$  velja:

$$||\vec{u} \cdot \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||.$$

**1.10** Za poljubna vektorja  $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$  velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

**1.11** Vektorja  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  sta ortogonalna (ali pravokotna) natakno takrat, kadar je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

**1.12** Če je  $\phi$  kot med vektorjema  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$ , potem je

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| ||\vec{y}||} = \cos \phi$$

**1.13** Vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

**Lastnosti vektorskega produkta**

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$  (aditivnost)
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$  (!komutativnost)
- $(a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$  (homogenost)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b}$  je  $\perp$  na vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$
- $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \sin \phi$
- Dolžina vektorskega produkta je ploscina paralelograma, katerega vektorja oklepata

**1.14** Mesani produkt  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  vektorjev  $\vec{a}, \vec{b}$  in  $\vec{c}$  v  $R^3$  je skalarni produkt vektorjev  $\vec{a} \times \vec{b}$  in  $\vec{c}$ :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

**Lastnosti mesanega produkta**

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- $(x\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  (homogenost)
- $(\vec{a}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$
- Absolutna vrednost mesanega produkta  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  je enaka prostornini paralepipeda

**Razdalje**

Razdalja od točke  $P$  do ravnine, v kateri leži točka  $A$  :

$$\cos \phi = \frac{\vec{n} \cdot (r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}})}{||\vec{n}|| ||r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}}||} \text{ oz. } d = \left| \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} \cdot (r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}}) \right|$$

Razdalja od točke  $P$  do premice, katera gre skozi točko  $A$ :

$$d = \frac{||\vec{e} \times (r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}})||}{||\vec{e}||}$$

**1.15** Matrika dimenzije  $m \times n$  je tabela  $m \times n$  števil, urejenih v  $m$  vrstic in  $n$  stolpcev:

$$A^{m \times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

**1.16** Matrika, katere elementi so enaki nič povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonalna matrika. Za diagonalno matriko je  $a_{ij} = 0$ , kadarkoli velja  $i \neq j$

**1.17** Matrika  $A^{n \times n}$  je spodnjetrokotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i < j$$

**1.18** Matrika  $A^{n \times n}$  je zgornjetrikotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i > j$$

**1.19** Matrika je trikotna, ce je zgornjetrikotna ali spodnjetrokotna.

**1.20** Dve matriki  $A$  in  $B$  sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

$$A^{m \times n} = B^{p \times q} \implies m = p \text{ in } n = q, a_{ij} = b_{ij} \text{ za vsak } i = 1, \dots, m \text{ in } j = 1, \dots, n$$

**1.21** Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnožimo s skalarjem

$$aA^{m \times n} = \begin{bmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} & \dots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{m1} & ax_{m2} & ax_{m3} & \dots & ax_{mn} \end{bmatrix}$$

**1.22** Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da seštejemo istolezne elemente obeh matrik:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

**Osnovne matricne operacije**

- $A + B = B + A$  (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$  (asociativnost)
- $a(A+B) = aA + aB$  (množenje s skalarjem)
- $A + (-A) = 0$
- $x(yA) = (xy)A$  in  $1 \cdot A = A$

**1.23** Transponirana matrika k matriki  $A$  reda  $m \times n$  je matrika reda  $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{m1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

### Lastnosti transponiranja matrik

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(xA)^T = xA^T$
- $(A^T)^T = A$

**1.24** Produkt matrike A in vektorja  $\vec{x}$  je linearna kombinacija stolpcev matrike A, utezi linearne kombinacije so komponente vektorja  $\vec{x}$ :

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

**1.25** Produkt vrstice  $\vec{x}$  z matriko A je linearna kombinacija vrstic matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice  $\vec{y}$ :

$$\vec{y} \cdot A = [y_1, y_2, y_3] \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

**1.26** Produkt matrik A in B je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike A s stolpci matrike B:

$$AB = A [b_1, b_2, \dots, b_n] = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n]$$

**1.27** Element  $c_{ij}$  v  $i$ -ti vrstici in  $j$ -tem stolpcu produkta  $C = AB$  je skalarni produkt  $i$ -te vrstice A in  $j$ -tega stolpca matrike B

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

**1.28** Produkt matrik A in B je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike A z matriko B:

$$[i\text{-ta vrstica } A] B = [i\text{-ta vrstica } AB]$$

### Lastnosti matricnega produkta

- $AB \neq BA$  (!komutativnost)
- $(xA)B = x(AB) = A(xB)$  (homogenost)
- $C(A+B) = CA + CB$  (distributivnost)
- $A(BC) = (AB)C$  (asociativnost)
- $(AB)^T = B^T A^T$

**1.29** Vrstice matrike A z  $n$  stolpci naj bodo  $a^1, \dots, a^n$ , stolpci matrike B z  $n$  vrsticami pa  $a_1, \dots, a_n$ . Potem je

$$AB = a^1 b_1 + \dots + a^n b_n$$

**1.30** Če delitev na bloke v matriki A ustreza delitvi v matriki B, potem lahko matriki pomnožimo bločno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

**1.31** Kvadratna matrika  $I_k$  reda  $k \times k$ , ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko A reda  $m \times n$  velja  $AI_n = A$  in  $I_m A = A$ . Matrika  $I_k$  se imenuje enotska ali identična matrika.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

## 2 Sistemi linearnih enačb

**2.1** Kvadratna matrika A je obrnljiva, če obstaja taka matrika  $A^{-1}$ , da je

$$AA^{-1} = I \text{ in } A^{-1}A = I$$

Matrika  $A^{-1}$  (če obstaja) se imenuje matriki A inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna.

**2.2** Kvadratna matrika reda  $n$  je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo  $n$  pivotov.

**2.3** Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

**2.4** Inverzna matrika inverzne matrike  $A^{-1}$  je matrika A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

**2.5** Če je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enačb  $A\vec{x} = \vec{b}$  edino resitev  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

**2.6** Če obstaja nenična resitev  $\vec{x}$  enačbe  $A\vec{x} = \vec{0}$ , matrika A ni obrnljiva (je singularna).

**2.7** Če sta matriki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt  $A \cdot B$  in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

**Pozor!** Pravilo

$$(AB)^p = A^p B^p$$

velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej  $AB = BA$ .

**2.8** Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

**2.9** Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi  $a_{ii}$  je diagonalna matrika, ki ima na diagonalni elemente  $a_{ii}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

**2.10** Za izračun inverza matrike A, uporabimo gaussovo eliminacijo nad matriko  $[A|I]$

$$[A|I] = [I|A^{-1}]$$

**2.11** Matrika A je simetrična  $\Leftrightarrow A^T = A$ . Za elemente  $a_{ij}$  simetrične matrike velja  $a_{ij} = a_{ji}$ .

**2.12** Če je matrika A simetrična in obrnljiva, je tudi  $A^{-1}$  simetrična.

**2.13** Če je R poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta  $R^T R$  in  $R R^T$  simetrični matriki.

## 3 Vektorski prostori

**3.1** Realni vektorski prostor V je množica "vektorjev" skupaj z pravili za

- seštevanje vektorjev,
- množenje vektorja z realnim številom (skalarjem)

Če sta  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  poljubna vektorja v V, morajo biti v V tudi

- vsota  $\vec{x} + \vec{y}$  in
- produkti  $\alpha\vec{x}$  za vse  $\alpha \in R$

V vektorskem prostoru V morajo biti tudi vse linearne kombinacije  $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

**Pravila za operacije v vektorskih prostorih**

Operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoščati naslednjim pravilom:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$  (komutativnost)
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$  (asociativnost)
- obstaja en sam neničen vektor  $\vec{0}$ , da velja  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- za vsak  $\vec{x}$  obstaja natanko en  $-\vec{x}$ , da je  $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
- $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$  (distributivnost)
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

**3.2** Podmnožica U vektorskega prostora V je *vektorski podprostor*, če je za vsak par vektorjev  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  iz U in vsako realno število  $\alpha$  tudi

- $\vec{x} + \vec{y} \in U$  in
- $\alpha\vec{x} \in U$ .

**3.3** Množica vektorjev U je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz U tudi v U.

**Lastnosti vektorskih podprostorov**

- Vsak vektorski podprostor nujno vsebuje ničelni vektor  $\vec{0}$

- Presek dveh podprostorov vektorskega podprostora je tudi podprostor

**3.4** Stolpčni prostor  $C(A)$  matrike  $A \in R^{m \times n}$  je tisti podprostor vektorskega prostora  $R^m$ , ki vsebuje natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike  $A$ .

*neformalno: linearna ogrinjaca stolpcev matrike (npr. ce imas 5 stolpcev pa lahko 2 zapises kot linearno kombinacijo ostalih 3 bo imel column space 3 elemente)*

**3.5** Sistem linearnih enacb  $A\vec{x} = \vec{b}$  je resljiv natanko tedaj, ko je vektor  $\vec{b} \in C(A)$

**3.6** Naj bo matrika  $A \in R^{m \times n}$ . Mnozica resitev homogenega sistema linearnih enacb je podprostor v vektorskem prostoru  $R^n$ .

**3.7** Mnozica vseh resitev sistema linearnih enacb  $A\vec{x} = \vec{0}$  se imenuje nicelni prostor matrike  $A$ . Oznacujemo ga z  $N(A)$ .

*neformalno: mnozica vektorjev, ki se z neko matriko zmnozijo v nicelni vektor*

**3.8** Ce je matrika  $A$  kvadratna in ni obrnljiva, potem  $N(A)$  vsebuje samo vektor  $\vec{0}$

**3.9** Matrika ima *stopnicasto* obliko, kadar se vsaka od njenih vrstic zacne z vsaj eno niclo vec kot prejsnja vrstica.

**3.10** Prvi element, razlicen od nic v vsaki vrstici, je *pivot*. Stevilo pivotov v matriki se imenuje rang matrike. Rang matrike  $A$  zapisemo kot  $\text{rang}(A)$ .

**3.11** Rang matrike ni vecji od stevila vrstic in ni vecji od stevila stolpcev matrike.

### 3.12

*Stevilo prostih neznank matrike = st. stolpcev - rang matrike*

### 3.13

1. Visoka in ozka matrika ( $m > n$ ) ima poln stolpčni rang, kadar je  $\text{rang}(A) = n$
2. Nizka in široka matrika ( $m < n$ ) ima poln vrstični rang, kadar je  $\text{rang}(A) = m$
3. Kvadratna matrika ( $n = m$ ) ima poln rang, kadar je  $\text{rang}(A) = m = n$

**3.14** Za vsako matriko  $A$  s polnim stolpčnim rangom  $r = n \leq m$ , velja:

1. Vsi stolpci  $A$  so pivotni stolpci
2. Sistem enacb  $A\vec{x} = \vec{0}$  nima prostih neznank, zato tudi nima posebnih resitev
3. Nicelni prostor  $N(A)$  vsebuje le nicelni vektor  $N(A) = \{\vec{0}\}$
4. Kadar ima sistem enacb  $A\vec{x} = \vec{b}$  resitev (kar ni vedno res!), je resitev ena sama
5. Reducirana vrstična oblika matrike ( $A$ ) se da zapisati kot

$$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times n \text{ enotska matrika} \\ m - n \text{ vrstic samih nicel} \end{bmatrix}$$

**3.15** Za vsako matriko  $A$  s polnim vrstičnim rangom  $r = m \leq n$  velja:

1. Vse vrstice so pivotne, ni prostih vrstic in  $U$  (stopnicasta oblika) in  $R$  (reducirana stopnicasta oblika) nimata nicelnih vrstic
2. Sistem enacb  $A\vec{x} = \vec{b}$  je resljiv za vsak vektor  $\vec{b}$
3. Sistem  $A\vec{x} = \vec{b}$  ima  $n - r = n - m$  prostih neznank, zato tudi prav toliko posebnih resitev
4. Stolpčni prostor  $C(A)$  je ves prostor  $R^m$

**3.16** Za vsako kvadratno matriko  $A$  polnega ranga ( $\text{rang}(A) = m = n$ ) velja:

1. Reducirana vrstična oblika matrike  $A$  je enotska matrika
2. Sistem enacb  $A\vec{x} = \vec{b}$  ima natančno eno resitev za vsak vektor desnih strani  $\vec{b}$
3. Matrika  $A$  je obrnljiva
4. Nicelni prostor matrike  $A$  je samo nicelni vektor  $N(A) = \{\vec{0}\}$
5. Stolpčni prostor matrike  $A$  je cel prostor  $C(A) = R^m$

**3.17** Vektorji  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  so linearno neodvisni, ce je

$$0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n$$

edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka vektorju  $\vec{0}$ . Vektorji  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  so linearno odvisni, ce niso linearno neodvisni.

**3.18** Ce so vektorji *odvisni*, lahko vsaj enega izrazimo z ostalimi.

**3.19** Ce je med vektorji  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  tudi nicelni vektor, so vektorji *linearno odvisni*.

**3.20** Vsaka mnozica  $n$  vektorjev iz  $R^n$  je odvisna, kadar je  $n > m$ .

**3.21** Stolpci matrike  $A$  so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima homogena enacha  $A\vec{x} = \vec{0}$  edino resitev  $\vec{x} = \vec{0}$ .

**3.22** Kadar je  $\text{rang}(A) = n$ , so stolpci matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno neodvisni. Kadar je pa  $\text{rang}(A) < n$ , so stolpci matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno odvisni.

**3.23** Kadar je  $\text{rang}(A) = m$ , so vrstice matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno neodvisne. Kadar je pa  $\text{rang}(A) < m$ , so vrstice matrike  $A \in R^{m \times n}$  linearno odvisne.

**3.24** Vrstični prostor matrike  $A$  je podprostor v  $R^n$ , ki ga razpenjajo vrstice matrike  $A$ .

**3.25** Vrstični prostor matrike  $A$  je  $C(A^T)$ , stolpčni prostor matrike  $A^T$ .

**3.26** Baza vektorskega prostora je mnozica vektorjev, ki

1. je linearno neodvisna in
2. napenja cel prostor.

**3.27** Vsak vektor iz vektorskega prostora lahko na en sam nacin izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

**3.28** Vektorji  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  so baza prostora  $R^n$  natanko tedaj, kadar je matrika, sestavljena iz stolpcev  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ , obrnljiva.

**3.29** Prostor  $R^n$  ima za  $n > 0$  neskončno mnogo razlicnih baz.

**3.30** Ce sta mnozici vektorjev  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  in  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  obe bazi istega vektorskega prostora, potem je  $m = n \implies$  vse baze istega vektorskega prostora imajo isto stevilo vektorjev.

**3.31** Dimenzija vektorskega prostora je stevilo baznih vektorjev.

**3.32** Dimenziji stolpčnega prostora  $C(A)$  in vrstičnega prostora  $C(A^T)$  sta enaki rang matrike  $A$

$$\dim(C(A)) = \dim(C(A^T)) = \text{rang}(A).$$

**3.33** Dimenzija nicelnega prostora  $N(A)$  matrike  $A$  z  $n$  stolpci in ranga  $r$  je enaka  $\dim(N(A)) = n - r$ .

**3.34** Stolpčni prostor  $C(A)$  in vrstični prostor  $C(A^T)$  imata oba dimenzijo  $r$ . Dimenzija nicelnega prostora  $N(A)$  je  $n - r$ , Dimenzija levega nicelnega prostora  $N(A^T)$  pa je  $m - r$ .

**3.35** Vsako matriko ranga 1 lahko zapisemo kot produkt (stolpčnega) vektorja z vrstičnim vektorjem  $A = \vec{u}\vec{v}^T$ .

## 4 Linearne preslikave

**4.1** Preslikava  $A : U \rightarrow V$  je linearna, ce velja

1. aditivnost:  $A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2$  za vse  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ ,
2. homogenost:  $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$  za vse  $\alpha \in R$  in  $\vec{u} \in U$ .

**4.2** Preslikava  $A : U \rightarrow V$  je linearna natanko tedaj, ko velja

$$A(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1 A\vec{u}_1 + \alpha_2 A\vec{u}_2$$

za vse  $\alpha_1, \alpha_2 \in R$  in vse  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ .

**4.3** Ce je  $A$  linearna preslikava, je  $A\vec{0} = \vec{0}$ .

**4.4** Naj bo  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava in  $\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i$  linearna kombinacija vektorjev. Potem je  $A(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{u}_i$ .

**4.5** Naj bo  $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  baza za vektorski prostor  $U$ . Potem je linearna preslikava  $A : U \rightarrow V$  natanko dolocena, ce poznamo slike baznih vektorjev.

**4.6** Naj bo  $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  baza za  $U$  in  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ . Potem obstaja natanko ena linearna preslikava  $A : U \rightarrow V$ , za katero je  $A\vec{u}_i = \vec{v}_i$  za  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**4.7** Naj bo  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava. Potem mnozico

$$\ker A = \{\vec{u} \in U; A\vec{u} = \vec{0}\}$$

imenujemo *jedro* linearne preslikave. Ker je  $A\vec{0} = \vec{0}$ , je  $\vec{0} \in \ker A$  za vse  $A$ . Zato je jedro vedno neprazna množica.

**4.8** Jedro linearne preslikave  $A : U \rightarrow V$  je vektorski podprostor v  $U$ .

**4.9** Mnozico

$$im\ A = \{\vec{v} \in V; \text{ obstaja tak } \vec{u} \in U, \text{ da je } \vec{v} = A\vec{u}\}$$

imenujemo *slika* linearne preslikave  $A : U \rightarrow V$ .

**4.10** Če je  $A : U \rightarrow V$  linearna preslikava, potem je njena slika *im*  $A$  vektorski podprostor v  $V$ .

## 5 Ortogonalnost

**5.1** Podprostora  $U$  in  $V$  vektorskega prostora sta med seboj ortogonalna, če je vsak vektor  $\vec{u} \in U$  ortogonalen na vsak vektor  $\vec{v} \in V$ .

**5.2** Za vsako matriko  $A \in R^{m \times n}$  velja:

- Nicelni prostor  $N(A)$  in vrsticni prostor  $C(A^T)$  sta ortogonalna podprostora  $R^n$
- Levi nicelni prostor  $N(A^T)$  in stolpicni prostor  $C(A)$  sta ortogonalna podprostora prostora  $R^m$ .

**5.3** Ortogonalni komplement  $V^\perp$  podprostora  $V$  vsebuje VSE vektorje, ki so ortogonalni na  $V$ .

**5.4** Naj bo  $A$  matrika dimenzije  $m \times n$ .

- Nicelni prostor  $N(A)$  je ortogonalni komplement vrsticnega prostora  $C(A^T)$  v prostoru  $R^n$
- Levi nicelni prostor  $N(A^T)$  je ortogonalni komplement stolpicnega prostora  $C(A)$  v prostoru  $R^m$ .

**5.5** Za vsak vektor  $4\vec{y}$  v stolpicnem prostoru  $C(A)$  obstaja v vrsticnem prostoru  $C(A^T)$  en sam vektor  $\vec{x}$ , da je  $A\vec{x} = \vec{y}$ .

**5.6** Če so stolpci matrike  $A$  linearno neodvisni, je matrika  $A^T A$  obrnljiva.

**5.7** Matrika  $P$  je projekcijska, kadar

- je simetrična:  $P^T = P$  in
- velja  $P^2 = P$ .

**5.8** Če je  $P$  projekcijska matrika, ki projecira na podprostor  $U$ , potem je  $I - P$  projekcijska matrika, ki projecira na  $U^\perp$ , ortogonalni komplement podprostora  $U$ .

**5.9** Vektorji  $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$  so ortonormirani kadar so ortogonalni in imanjo vsi dolžino 1, torej

$$\vec{q}_i^T \vec{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{ko je } i \neq j \text{ pravokotni vektorji} \\ 1 & \text{ko je } i = j \text{ enotski vektorji} \end{cases}$$

za matriko  $Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n]$  velja  $Q^T Q = I$ .

**5.10** Vektorji  $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$  naj bodo ortonormirani v prostoru  $R^m$ . Potem za matriko

$$Q = [\vec{q}_1 \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n]$$

velja, da je  $Q^T Q = I_n$  enotska matrika reda  $n$ .

**5.11** Matrika  $Q$  je ortogonalna, kadar je

- kvadratna in
- ima ortonormirane stolpce.

**5.12** Če je  $Q$  ortogonalna matirka, potem je obrnljiva in  $Q^{-1} = Q^T$ .

**5.13** Množenje z ortogonalno matriko ohranja dolžino vektorjev in kote med njimi. Če je  $Q$  ortogonalna matrika, potem je

$$\begin{aligned} \|Q\vec{x}\| &= \|\vec{x}\| \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in} \\ (Q\vec{x})^T Q\vec{y} &= \vec{x}^T \vec{y} \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in } \vec{y} \end{aligned}$$

**5.14** Če sta  $Q_1$  in  $Q_2$  ortogonalni matriki, je tudi produkt  $Q = Q_1 Q_2$  ortogonalna matrika.

**5.15** Iz linearno neodvisnih vektorjev  $a_1, \dots, a_n$  z *Gram-Schmidtovo* ortogonalizacijo dobimo ortonormirane vektorje  $q_1, \dots, q_n$ . Matriki  $A$  in  $Q$  s temi stolpci zadoscajo enacbi  $A = QR$ , kjer je  $R$  zgornjetrikotna matrika.

**5.16** Vektorski prostor  $\iota$  je množica vseh neskončnih zaporedij  $\vec{u}$  s končno dolžino

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + \dots < \infty$$

**5.17** Polinomi  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x), \dots$  sestavljajo zaporedje ortogonalnih polinomov, kadar

- $p_i(x)$  je polinom stopnje  $i$
- $(p_i(x), p_j(x)) = 0$ , kadarkoli je  $i \neq j$ .

## 6 Determinante

**6.1** Determinanta enotske matirke je  $det(I) = 1$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ in } \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

**6.2** Determinanta spremeni predznak, če med seboj zamenjamo dve vrstici.

**6.3** Determinanta je linearna funkcija vsake vrstice posebej. To pomeni, da se

- determinanta pomnoži s faktorjem  $t$ , če eno vrstico determinante(vsak element v tej vrstici) pomnožimo s faktorjem  $t$ .

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- determinanta je vsota dveh determinant, ki se razlikujeta le v eni vrstici, ce je v provitni determinanti ta vrstica vsota obeh vrstic, ostale vrstice pa so enake v vseh treh determinantah.

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

**Pozor!** Kadar mnozimo matriko  $A$  s skalarjem  $t$ , se vsak element matrike pomnozi s skalarjem. Ko racunamo determinanto produkta matirke s skalarjem  $tA$ , skalar  $t$  izpostavimo iz vsake vrstice posebej, zato je  $det(tA) = t^n det(A)$ , kjer je  $n$  stevilo vrstic (ali stolpcev) determinante.

**6.4** Matrika, ki ima dve enaki vrstici, ima determinanto enako 0.

**6.5** Če v matriki od poljubne vrstice odstejemo mnogokratnik neke druge vrstice, se njena determinanta ne spremeni.

**6.6** Naj bo  $A$  poljubna kvadratna matirka  $n \times n$  in  $U$  njena vrsticno-stopnicasta oblika, ki jo dobimo z *Gaussovo eliminacijo*. Potem je

$$det(A) = \pm det(U).$$

**6.7** Determinanta, ki ima vrstico samih nicel, je enaka 0.

**6.8** Determinanta trikotne matrike  $A$  je produkt diagonalnih elementov:

$$det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

**6.9** Determinanta singularne matrike je enaka 0, determinanta obrnljive matrike je razlicna od 0.

**6.10** Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu determinant obeh matrik:

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

**6.11** Determinanta inverzne matrike je enaka

$$det(A^{-1}) = 1/det(A)$$

in determinanta potence  $A^n$  matrike  $A$  je

$$det(A^n) = (det(A))^n.$$

**6.12** Transponirana matrika  $A^T$  ima isto determinanto kot  $A$ .

**6.13** Vsaka lastnost, ki velja za vrstice determinante, velja tudi za njene stolpce. Med drugim:

- Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dva stolpca
- Determinanta je enaka 0, ce sta dva stolpca enaka
- Determinanta je enaka 0, ce so v vsaj enem stolpcu same nicle.

**6.14 (kofaktorska formula)** Če je  $A$  kvadratna matrika reda  $n$ , njeno determinanto lahko izracunamo z razvojem po  $i - ti$  vrstici

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

Kofaktorje  $C_{ij}$  izracunamo kot  $C_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$ , kjer je  $D_{ij}$  determinanta, ki jo dobimo, ce v  $A$  izbrisemo  $i$ -to vrstico in  $j$ -ti stolpec.

**6.15** Inverzna matrika  $A^{-1}$  matrike  $A$  je transponirana matrika kofaktorjev, deljena z determinanto  $|A|$ :

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)},$$

kjer je C matrika kofaktorjev matrike A.

**6.16** Ploscina paralelograma, dolocenega z vektorjema  $\vec{a}$  in  $\vec{b} \in R^2$  je enaka  $\det([\vec{a}\vec{b}])$ ,

to je absolutni vrednosti determinante s stolpcema  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .

**6.17** Mesani produkt vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  in  $\vec{c}$  je enak determinanti matrike, ki ima te tri

vektorje kot stolpce.

## 7 L. vrednosti in vektorji