

## Ponovitev analize

## Odvodi

- $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$
- $x^n = nx^{n-1}$
- $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $\sin(ax) = a \cos ax$
- $\cos(ax) = -a \sin(ax)$
- $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $e^a x = ae^{ax}$
- $a^x = a^x \ln a$
- $x^x = x^x(1 + \ln x)$
- $\ln x = \frac{1}{x}$
- $\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- $\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$

## Integrali

- $\int x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & a \neq -1 \\ \ln|x| + C & a = -1 \end{cases}$
- $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$
- $\int \sin(ax) dx = \frac{-\cos(ax)}{a} + C$
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
- $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$
- $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$
- $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

**Integriranje absolutnih vrednosti** (primer): Imamo funkcijo  $f(x) = |x|$ , ki je zvezna na intervalu  $[-1, 1]$ . Če hocemo to funkcijo integrirati in zelimo izračunati njeno porazdelitveno funkcijo integrirati ločimo 2 primera:

- $-1 \leq x < 0$   

$$F(x) = \int_{-1}^x |t| dt = \int_{-1}^x -t dt = -\frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^x = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$$
- $0 \leq x < 1$   

$$F(x) = \int_{-1}^x |t| dt = \int_{-1}^0 -t dt + \int_0^x t dt = -\frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{1}{2}(1 + x^2)$$

$$\sqrt{x^m} = (x)^{\frac{m}{2}}, x^2 + y^2 \leq 1 \sim \text{krog s ploscino } \pi$$

# Kombinatorika

## 1.1 Permutacije

- brez ponavljanja:  $P_n = n!$
- s ponavljanjem:  $P_n^{k_1, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! \dots k_n!}$

## 1.2 Variacije

- brez ponavljanja:  $V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
- s ponavljanjem:  $V_n^r = n^r$

## 1.3 Kombinacije

- brez ponavljanja:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- s ponavljanjem:  $((\binom{n}{k})) = \binom{n+k-1}{k}$

Lastnosti binomskega simbola:

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Binomski izrek:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Za kombinacije velja, da vrstni red **ni** pomemben. Medtem pa ko v splošnem za variacije in permutacije velja, da vrstni red **je** pomemben.

# Verjetnost

## 2.1 Elementarna verjetnost

Izid iz dane množice izidov je izbran na slepo, ce so vsi izidi iz te množice enako verjetni. Takrat se dogodek  $A$  zgodi z verjetnostjo:

$$P(A) = \frac{\text{st. izidov, ki so v } A}{\text{st. vseh izidov}}$$

Nasprotni dogodek pa z verjetnostjo:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Nacelo vključitev in izključitev dogodkov:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= P(A_1) + \dots + P(A_n) \\ &- P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - \dots - P(A_{n-1} A_n) \\ &+ P(A_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_4) + \dots + \\ &P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n) \end{aligned}$$

Dogodki  $A_1, A_2, \dots, A_k$  in  $B$  so **neodvisni**, ce velja

$$P(A_1 \dots A_k) = P(A_1) \dots P(A_k)$$

ali z drugimi besedami... Verjetnost produkta paroma neodvisnih dogodkov je enaka produktu verjetnosti teh dogodkov.

**2.2 Pogojna verjetnost** Verjetnost da se zgodi dogodek  $A$ , ce vemo, da se zgodi dogodek  $B$ , je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Dogodka  $A$  in  $B$  sta **neodvisna**, ce velja  $P(A|B) = P(A)$  ali  $P(AB) = P(A)P(B)$ . Pazi! Za par **nezdružljivih** dogodkov  $A$  in  $B$  pa velja  $P(AB) = 0$ ,  $P(A+B) = P(A) + P(B)$ ,  $P(A|B) = 0$  in  $P(B|A) = 0$ .

## 2.3 Popolna verjetnost

Dogodki  $H_1, H_2, \dots, H_n$  tvorijo **popoln sistem dogodkov**, ce se nobena dva dogodka ne moreta zgoditi hkrati in se vedno zgodi vsaj en od njih. Ce dogodki izpolnjujejo ta pogoj, potem po nacelu vključitev/izključitev velja:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$$

Za **popolni sistem dogodkov** velja unija hipotez:

$$\frac{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}{P(H_1) + \dots + P(H_{n-1}) + P(H_n)}$$

Zanje velja tudi **Bayesova formula**:

$$\begin{aligned} P(H_i|A) &= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)} \end{aligned}$$

## 2.4 Geometrijska verjetnost

Tocka je izbrana *na slepo* iz intervala, lika, telesa.. ce za vsak dogodek  $A$  velja:

$$P(A) = \frac{\text{mera izidov, ki so v } A}{\text{mera vseh izidov}}$$

Pri tem je mera lahko dolžina, ploscina, volumen,.. Basically upas da narises graf pravilno.

Splošno za vse nastete verjetnosti velja:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ in} \\ P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \end{aligned}$$

# Diskretne s.s.

**3.1 Diskretna slučajna spremenljivka** Naj bo  $X$  diskretna slučajna spremenljivka  $\Rightarrow X$  je funkcija s končno ali stevno zalogo vrednosti  $a_1, a_2, \dots$ . Verjetnost, da  $X$  vzame vrednost  $a_i \in R$ , označimo z  $P(X = a_i) = p_i$ . Porazdelitev  $X$  lahko podamo na dva enakovredna načina, in sicer s:

- s **porazdelitveno shemo**

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{velja } 0 \leq p_i \leq 1 \text{ in } p_1 + p_2 + \dots = 1$$

- s **porazdelitveno funkcijo**

$$F_x(x) := P(X \leq x)$$

**3.2 Bernoullijeva** slučajna spremenljivka

$$X \sim B(p)$$

- V vsakem poskusu ima dogodek  $A$  verjetnost  $p$ ,  $X$  pa ima vrednost 1, ce se je zgodil dogodek  $A$ , in 0 sicer.

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

### 3.3 Binomska slučajna spremenljivka

$$X \sim B(n, p)$$

- $X$  je število pojavitev izida  $A$  v  $n$  ponovitvah poskusa
- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$  za  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Izvajamo  $n$  neodvisnih slučajnih poskusov. V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek  $A$  s konstantno verjetnostjo  $p$ ,  $p = P(A)$ .  $X$  nam pove kolikokrat se je zgodil dogodek  $A$  v  $n$  poskusih. npr. kovanec vrzemo 10x, kolikšne so vrjetnosti, da pade cifra 0x, 2x, vsaj 3x,... ali 5x vrzemo posteno kocko, izračunaj število šestic, ki pade  $\Rightarrow B(5, \frac{1}{6})$

### 3.4 Geometrijska slučajna spremenljivka

$$X \sim G(p)$$

- $X$  je število ponovitev poskusa do (vključno) prve ponovitve izida  $A$ .
- $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$  za  $k = 1, 2, \dots$
- $P(X \leq k) = 1 - (1 - p)^k$  za  $k = 1, 2, \dots$

Izvajamo neodvisne slučajne poskuse, dokler se ne zgodi dogodek  $A$ . V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek  $A$  s **konstantno** verjetnostjo  $p$ ,  $p = P(A)$ . npr. koliko metov kocke je potrebnih, do prve šestice  $\Rightarrow G(1/6)$ .

### 3.5 Pascalova oz. negativna binomska slučajna spremenljivka

$$X \sim P(n, p)$$

- $X$  je število ponovitev poskusa do (vključno)  $n$ -te ponovitve izida  $A$ .
- $P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} (1 - p)^{k-n} p^n$  za  $k = n, n + 1, n + 2, \dots$

npr. koliko metov kocke je potrebnih, dokler šestica ne pade 5x  $\Rightarrow P(5, \frac{1}{6})$ . Število metov kovanja, dokler grb ne pade 2x  $\Rightarrow P(2, \frac{1}{2})$ .

### 3.6 Hipergeometrijska slučajna spremenljivka

$$X \sim H(K, N - K, n)$$

- $X$  je število elementov z določeno lastnostjo med izbranimi.
- $P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$  za  $k = 0, 1, 2, \dots, \min\{n, K\}$

V populaciji  $N$  imamo  $K$  elementov z določeno lastnostjo. Izbiramo brez vračanja  $n$  elementov. npr. koliko pikov med 7 kartami, ki smo jih na slepo izbrali izmed 16 kart, kjer so bli stirje piki. imamo 400 ljudi, 100 brezposlenih, naključno jih izberemo 10. Zanima nas kaksna verjetnost je da sta 2 izmed teh brezposelna  $\Rightarrow P(x = 2) = H(100, 400 - 100, 10)$ . **Pozor!** Na kolokviju/izpitu moras nujno zapisati tudi možne vrednosti  $k$ -ja.

### 3.7 Poissonova slučajna spremenljivka

$$X \sim P(\lambda)$$

- $X$  je število ponovitev dogodka  $A$  na danem intervalu, pri cemer:
  - se dogodki pojavljajo neodvisno
  - povprečno število dogodkov  $\lambda$ , ki se pojavijo na določenem intervalu, je konstantno.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ za } k = 0, 1, 2, \dots$$

npr. ce se dogodek pojavi v povprečju 3x na minuto, lahko uporabimo poissa za izračun kolikokrat se bo dogodek zgodil v 1/4h  $\Rightarrow P(45)$ . St avtomobilov, ki prečkajo cesto v 1min.

## 4 Zvezne s.s.

**4.1 Zvezna slučajna spremenljivka** Naj bo  $X$  zvezna slučajna spremenljivka  $\Rightarrow X$  je realna funkcija, za katero obstaja integrabilna funkcija  $p_X : R \rightarrow [0, \infty)$ , tako da za vsak  $x \in R$  velja:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt$$

Funkciji  $p_X$  pravimo **gostota verjetnosti**, funkciji  $F_X$  pa **porazdelitvena** funkcija. Mnozici vrednosti, ki jih zavzame spremenljivka  $X$ , pravimo **založna vrednosti** in jo označimo z  $Z_X$ . Lastnosti:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1$
- $P(a < X < b) = \int_a^b p_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$ ,  $a, b \in R$ ,  $a < b$
- $P(X = a) = 0$ ,  $a \in R$
- $P(|X| < 1) = P(-1 < X < 1)$

ce je funkcija zvezna v  $x$ , potem za njo velja tudi  $F'(x) = p(x)$ . Za zvezno slučajno spremenljivko  $X$  je *funkcija preživetja*  $S(x) = P(X > x)$  vedno zvezna, nenarascujoča in zavzema vrednosti na intervalu  $[0, 1]$ .

### 4.2 Enakomerna zvezna slučajna spremenljivka

$$X \sim U[a, b]$$

- $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Vsi izidi na intervalu  $[a, b]$  so enako verjetni.

### 4.3 Eksponentna slučajna spremenljivka

$$X \sim \epsilon(\lambda)$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$

Slučajna spremenljivka  $X$  - čas med zaporednima dogodkoma, pri cemer so dogodki neodvisni in se pojavijo s konstantno stopnjo  $\lambda$ .  $\lambda$  predstavlja povprečno število dogodkov na izbrano časovno enoto.

### 4.4 Normalna slučajna spremenljivka

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ za } x \in R$$

- Za  $F_X(x)$  ne obstaja eksplicitna formula. Vrednost preberemo iz porazdelitvenih tabel.

Po centralnem limitnem izreku sta vsota in povprečje veliko neodvisnih, enako porazdeljenih spremenljivk, *normalno porazdeljeni*. Porazdelitev  $N(0, 1)$  je standardna normalna porazdelitev  $\Rightarrow$  potem za vsak  $x$  velja  $P(X < x) = 1 - P(X > x)$ .

### 4.5 Gamma slučajna spremenljivka

$$X \sim \Gamma(n, \lambda)$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} & x > 0 \end{cases}$$

V povprečju imamo na časovno enoto  $\lambda$  ponovitev dogodka  $A$ ,  $X$  pa je čas med prvo in  $(n + 1)$  ponovitvijo dogodka  $A$ .

### 4.6 Hi kvadrat slučajna spremenljivka

$$X \sim \chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} & x > 0 \end{cases}$$

Je vsota kvadratov  $n$  neodvisnih standardnih normalnih slučajnih spremenljivk.

5 Matematično upanje

5.1 Matematično upanje diskretne slučajne spremenljivke

X ~ (a1 a2 a3 ... / p1 p2 p3 ...)

oz. zvezne slučajne spremenljivke z gostoto pX je

E(X^n) = sum\_{k=0}^inf x\_k^n p\_k oz.
E(X^n) = integral\_{-inf}^inf x^n p\_X(x) dx.

Za vsaki slučajni spremenljivki X in Y (lahko sta odvisni, lahko je ena zvezna in druga diskretna) ter a, b, n in R velja

E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)

in

nE(X^a Y^b) = nE(X^a)E(Y^b)

in

E((X + Y)^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) itn...

Matematično upanje nam pove pričakovano vrednost, kolikokrat oz. kdaj (odvisno od porazdelitve) se bo določen dogodek zgodil. Po definiciji disperzije velja tudi:

E(X^2) = D(X) + E(X)^2

5.2 Matematično upanje funkcije
f : R -> R slučajne spremenljivke X je

E(f(X)) = sum\_{k=0}^inf f(x\_k) p\_k oz.
E(f(X)) = integral\_{-inf}^inf f(x) p\_X(x) dx.

5.3 Matematična upanja dss in zss

- X ~ Bernoulli(p) => E(X) = p
- X ~ Binom(n, p) => E(X) = np
- X ~ G(p) => E(X) = 1/p
- X ~ Pascal(n, p) => E(X) = n/p
- X ~ H(R, B, n) => E(X) = nR/(R+B)
- X ~ Pois(lambda) => E(X) = lambda
- X ~ U[a, b] => E(X) = (a+b)/2
- X ~ epsilon(lambda) => E(X) = 1/lambda
- X ~ N(mu, sigma) => E(X) = mu
- X ~ chi^2(n) => E(X) = n

6 Disperzija in std. odklon

6.1 Disperzija ali varianca slučajne spremenljivke X je definirana kot

D(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2

Za a, b in R velja

D(aX + b) = a^2 D(X).

Ce sta X in Y neodvisni je

D(aX + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y).

6.2 Standardni odklon slučajne spremenljivke X je enak

sigma(X) = sqrt(D(X)).

6.3 Disperzije dss in zss

- X ~ B(p) => D(X) = p(1 - p)
- X ~ B(n, p) => D(X) = np(1 - p)
- X ~ G(p) => D(X) = 1/p^2
- X ~ P(n, p) => D(X) = n(1-p)/p^2
- X ~ H(R, B, n) =>

nRB(R+B-n) / ((R+B)^2(R+B-1))

- X ~ P(lambda) => D(x) = lambda
- X ~ U[a, b] => D(X) = (b-a)^2/12
- X ~ epsilon(lambda) => D(X) = 1/lambda^2
- X ~ N(mu, sigma) => D(X) = sigma^2
- X ~ chi^2(n) => D(X) = 2n

7 Slučajni vektorji

7.1 Diskretni slučajni spremenljivki X in Y lahko določata (dvorazsesni) diskretni slučajni vektor (X, Y). Verjetnost, da (X, Y) zavzame vrednost (xi, yi) in R,

oznacimo s P(X = xi, Y = yi) = pij.

Porazdelitev (X, Y) lahko podamo na dva enakovredna nacina, in sicer:

1. s porazdelitveno tabelo

Table with 7 columns: X\Y, y1, y2, ..., ym, ..., X and rows x1, x2, ..., xn, Y. Contains joint probabilities pij.

pri cemer je 0 <= pij <= 1,
sum\_{i=1}^inf sum\_{j=1}^inf pij = 1, sum\_{i=1}^inf pij = pi za
vsak i in N in sum\_{i=1}^inf pij = qj za vsak
j in N.

2. s porazdelitveno funkcijo

F\_{X,Y}(x, y) = P(X <= x, Y <= y).

Velja F\_{X,Y}(x, y) =
sum\_{i=1}^inf sum\_{j=1}^inf pij I\_{[xi, inf)}(x) I\_{[yj, inf)}(y)
,
kjer je

I\_{[xi, inf)}(x) = { 1 if xi <= x, 0 sicer
I\_{[yj, inf)}(y) = { 1 if yj <= y, 0 sicer

Podan imamo vektor (X in [0, a], Y in [0, b]).
Potem velja slednje:

- P(X < 1) = P(X <= 1, Y <= b)
- P(X < 1, Y > 1/2) = P(X <= 1, Y <= 1) - P(X <= 1, Y <= 1/2)
- P(X > 1, Y > 1/2) =

P(X <= a, 1/2 <= Y <= b) - P(X <= 1, 1/2 <= Y <= b) =
(P(X <= a, Y <= b) - P(X <= a, Y <= 1/2)) - (P(X <= 1, Y <= b) - P(X <= 1, Y <= 1/2))

Robne porazdelitve so porazdelitve komponent

pi = P(X = xi) = sum\_{i=1}^inf pij
qj = P(Y = yi) = sum\_{j=1}^inf pij

Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni, ce za poljubni stevili x, y in R velja

P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) in

P(X = x | Y = y) = P(X=x, Y=y) / P(Y=y)

7.2 dvorazsezna gostota verjetnosti
Naj bosta X, Y z.s.s. Par (X, Y) je zvezni slučajni vektor, ce obstaja integrabilna funkcija p\_{X,Y} : R^2 -> R (gostota verjetnosti), tako da za vsak par (x, y) in R^2 velja

F\_{X,Y}(x, y) = P(X <= x, Y <= y) =
integral\_{-inf}^x integral\_{-inf}^y p\_{X,Y}(x, y) dx dy.

Funkciji F\_{X,Y} pravimo porazdelitvena funkcija. Velja

integral\_{-inf}^inf integral\_{-inf}^inf p\_{X,Y}(x, y) dx dy = 1

Robni gostoti sta

p\_X(x) = integral\_{-inf}^inf p\_{X,Y}(x, y) dy in
p\_Y(y) = integral\_{-inf}^inf p\_{X,Y}(x, y) dx

Zvezni slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni, ce za vsaki realni stevili x, y in R velja

p\_{X,Y}(x, y) = p\_X(x)p\_Y(y).

7.3 Matematično upanje funkcije
f : R^2 -> R dvorazseznega slučajnega vektorja (X, Y) je za diskretni slučajni vektor definirano s predpisom

E(f(X, Y)) =
sum\_{i=1}^inf sum\_{j=1}^inf f(xi, yi) P(X = xi, Y = yi)

za zvezni slučajni vektor pa s predpisom

E(f(X, Y)) =
integral\_{-inf}^inf integral\_{-inf}^inf f(x, y) P\_{X,Y}(x, y) dx dy.

Ce sta X in Y neodvisni velja

E(XY) = E(X)E(Y).

7.4 Kovarianca slučajnih spremenljivk X in Y je definirana kot

Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) =
E(XY) - E(X)E(Y).

**XY** mores posebi zracunat porazdelitev(ampak pazi, ni nujno da sta neodvisni, zato, ce imas tabelo, poberi vrednosti za npr.  $P(XY = 1)$  iz tabele)!  
Za disperzijo velja

$$D(X) = Cov(X, X) \text{ in } \\ D(aX + bY) = \\ a^2D(X) + b^2D(Y) + 2abCov(X, Y)$$

Za slucajne spremenljivke  $X, Y, Z$  ter  $a, b \in R$  velja:

- $Cov(X + a, Y + b) = Cov(X, Y),$
- $Cov(aX + bY, Z) = aCov(X, Z) + bCov(Y, Z),$
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X),$
- $|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{D(X)D(Y)},$
- $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$
- $Cov(a, X) = 0$  (neodvisni)

Ce sta s.s  $X$  in  $Y$  neodvisni je njuna kovarianca enaka **0**,  $Cov(X, Y) = 0$ .

**7.5 Korelacijski koeficient** izracunamo po formuli

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Korelacijski koeficient zavzema vrednosti na intervalu [-1, 1]. Ce velja  $\rho(X, Y) = 0$ , lahko sklepamo da sta spremenljivki  $X$  in  $Y$  **nekorrelirani**. Za  $a, b, c, d \in R$  ter  $a, c > 0$  velja:

$$\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$$

Ce je  $|Cov(X, Y)| = \sqrt{D(X)D(Y)}$ , tj.  $\rho(X, Y) = \pm 1$ , potem sta  $X$  in  $Y$  v **linearni zvezi**

$$Y = \pm \frac{D(Y)}{D(X)}(X - E(X)) + E(Y).$$

Ker iz neodvisnosti sledi  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , sta neodvisni slucajni spremenljivki tudi nekorrelirani. Obratno pa ne velja!

## 8 Normalna porazdelitev

**8.1** Normalna porazdelitev je odvisna od dveh parametrov:  $\mu = E(X)$  in  $\sigma = \sigma(X)$ . Gostota njene porazdelitve je:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Standardizacija:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(\mu = 0, \sigma = 1)$$

Vrednost  $F(X) = P(X \leq x)$  dobimo tako da integriramo funkcijo gostote na intervalu  $[-\infty, x]$ :

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Velja :  $P(a \leq Z \leq b) = F(b) - F(a)$  in  $x \geq 4 \Rightarrow F(x) \approx 1$ (std. napaka).

Ce je spremenljivka  $X \sim N(0, 1)$  normalno porazdeljena, velja tudi da so lihi momenti normalne porazdelitve enaki 0 ( $E(X^3) = E(X^5) = 0$ ).

**8.2**  $\sigma$  pravila

- $1\sigma \Rightarrow P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.683$
- $2\sigma \Rightarrow P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.954$
- $3\sigma \Rightarrow P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997$

**8.3**  $q_x$  pravila

- $P(X \leq q_1) = 0.25$
- $P(X \leq q_2(m)) = 0.5$
- $P(X \leq q_3) = 0.75$

**8.4 Standardizacija binomske** porazdelitve

$$X_B \sim B(n, p)$$

kjer velja  $\mu = np$  in  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ . velja:  
 $P(a \leq X_B \leq b) \approx P(a - \frac{1}{2} \leq X_N \leq b + \frac{1}{2}) = F(\frac{b+\frac{1}{2}-\mu}{\sigma}) - F(\frac{a-\frac{1}{2}-\mu}{\sigma})$

in

$$P(X_B \leq b) \approx P(X_N \leq b + \frac{1}{2}) = F(\frac{b+\frac{1}{2}-\mu}{\sigma})$$

. **Pazi** za normalizirane *diskretne* porazdelitve velja:

- $P(X_B < k) = P(X_B \leq k - 1)$
- $P(X_B > k) = P(X_B \geq k + 1) = 1 - P(X_B \leq k)$

**8.5 Aproximacija binomske** porazdelitve

**8.5.1 Poissonov Priblizek**

Naj bo

$$X_B \sim B(n, p) \text{ in } X_P \sim P(np)$$

Ce je

- $n \geq 20$  in  $p \in (0, 0.05)$  ali pa
- $n \geq 100$  in  $np \in (0, 10]$ ,

ponavadi velja:

$$P(X_B = k) \approx P(X_P = k) = \frac{(np)^k}{k!}e^{-np}.$$

**8.5.2 Laplaceov Priblizek**

Naj bo

$$X_B \sim B(n, p) \text{ in } X_N \sim N(np, \sqrt{np(1-p)}).$$

Ce je  $np \geq 10$  in  $n(1-p) \geq 10$ , potem za  $k$  dovolj blizu  $np$  velja:

$$P(X = k) \approx P(X_N = k) = \frac{e^{-(k-np)^2/(2np(1-p))}}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}$$

## 9 CLI

**9.1 Normalne spremenljivke:** Naj bosta  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$  neodvisni. Potem je

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

Posledica: Naj bodo

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1), \dots, X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$$

neodvisne, normalno porazdeljene s.s. Potem velja:

$$X_1 + \dots + X_n \sim N(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}).$$

**9.2 CLI za vsoto sl. spremenljivk** Naj bodo  $X_1, \dots, X_n$  neodvisne in enako porazdeljene slucajne spremenljivke, kjer velja  $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 < \infty$ . Potem za dovolj velik  $n$  (dobra aproksimacija :  $n \geq 30$ ) velja, da je porazdelitev vsote  $S = X_1 + \dots + X_n$  priblizno normalna.

$$S \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

Pri aproksimaciji **diskretne** porazdelitvene vsote z normalno porazdelitvijo, uporabljamo popravek za zveznost.

$$P(a \leq S \leq b) \approx P(a - \frac{1}{2} \leq Y \leq b + \frac{1}{2}) = F(\frac{b+\frac{1}{2}-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}) - F(\frac{a-\frac{1}{2}-n\mu}{\sigma\sqrt{n}})$$

**9.3 Enostavni slucajni vzorec** Naj bo  $X$  s.s. Enostavni slucajni vzorec je slucajni vektor  $(X_1, \dots, X_n)$ , za katerega velja:

- vsi cleni vektorja  $X_i$  imajo isto porazdelitev kot spremenljivka  $X$  in
- cleni  $X_i$  so med seboj neodvisni

**9.4 Vzorcno povprecje** normalno porazdeljenega **vzorca** Naj bo  $(X_1, \dots, X_n)$  enostavni slucajni vzorec,  $X_i \sim N(\mu, \sigma)$ . Potem je porazdelitev vzorcnega povprecja  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  tudi normalna:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Pozor! Pri racunanju disperzije ne pozabi kvadrirati  $\frac{1}{n}$ .

**9.5 CLI za vzorcno povprecje** Naj bo  $(X_1, \dots, X_n)$  enostavni slucajni vzorec in

$$E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 \\ (\mu \text{ in } \sigma^2 \text{ morata biti koncni})$$

Za dovolj veliki vzorec ( $n \geq 30$ ) je porazdelitev vzorcnega povprecja  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  priblizno normalna

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

**9.6 Racunanje razpona** Naj bo s.s.  $X$  normalno porazdeljena  $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$P(E(X) - a \leq X \leq E(X) + a) = p \\ I = [E(X) - a, E(X) + a]$$