

# Kombinatorika

## 1.1 Permutacije

1. brez ponavljanja:  $P_n = n!$
2. s ponavljanjem:  $P_n^{k_1, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! \dots k_n!}$

## 1.2 Variacije

1. brez ponavljanja:  $V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
2. s ponavljanjem:  $V_n^r = n^r$

## 1.3 Kombinacije

1. brez ponavljanja:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
2. s ponavljanjem:  $\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$

Lastnosti binomskega simbola:

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Binomski izrek:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Za kombinacije velja, da vrstni red ni pomemben. Medtem pa ko v splošnem za variacije in permutacije velja, da vrstni red je pomemben.

# 2 Verjetnost

## 2.1 Elementarna verjetnost

Izid iz dane množice izidov je izbran na slepo, če so vsi izidi iz te množice enako verjetni. Takrat se dogodek  $A$  zgodi z verjetnostjo:

$$P(A) = \frac{\text{st. izidov, ki so v } A}{\text{st. vseh izidov}}$$

Nasprotni dogodek pa z verjetnostjo:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Nacelo vključitev in izključitev dogodkov:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= P(A_1) + \dots + P(A_n) \\ &- P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - \dots - P(A_{n-1} A_n) \\ &+ P(A_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_4) + \dots + \\ &P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n) \end{aligned}$$

Dogodki  $A_1, A_2, \dots, A_k$  in  $B$  so **neodvisni**, če velja

$$P(A_1 \dots A_k) = P(A_1) \dots P(A_k)$$

ali z drugimi besedami... Verjetnost produkta paroma neodvisnih dogodkov je enaka produktu verjetnosti teh dogodkov.

**2.2 Pogojna verjetnost** Verjetnost da se zgodi dogodek  $A$ , če vemo, da se zgodi dogodek  $B$ , je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Dogodka  $A$  in  $B$  sta **neodvisna**, če velja  $P(A|B) = P(A)$  ali  $P(AB) = P(A)P(B)$ . Pazi! Za par **nezdružljivih** dogodkov  $A$  in  $B$  pa velja  $P(AB) = 0$ ,  $P(A+B) = P(A) + P(B)$ ,  $P(A|B) = 0$  in  $P(B|A) = 0$ .

## 2.3 Popolna verjetnost

Dogodki  $H_1, H_2, \dots, H_n$  tvorijo **popoln sistem dogodkov**, če se nobena dva dogodka ne moreta zgoditi hkrati in se vedno zgodi vsaj en od njih. Če dogodki izpolnjujejo ta pogoj, potem po nacelu vključitev/izključitev velja:

$$\begin{aligned} P(A) &= \\ \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap H_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i) \end{aligned}$$

Za **popolni sistem dogodkov** velja unija hipotez:

$$\begin{aligned} P(A|H_1 \cup \dots \cup H_n) &= \\ \frac{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}{P(H_1) + \dots + P(H_{n-1}) + P(H_n)} \end{aligned}$$

Zanje velja tudi **Bayesova formula**:

$$\begin{aligned} P(H_i|A) &= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)} \end{aligned}$$

## 2.4 Geometrijska verjetnost

Tocka je izbrana *na slepo* iz intervala, lika, telesa... če za vsak dogodek  $A$  velja:

$$P(A) = \frac{\text{mera izidov, ki so v } A}{\text{mera vseh izidov}}$$

Pri tem je mera lahko dolžina, ploščina, volumen... Basically upas da narises graf pravilno.

Splošno za vse nastete verjetnosti velja:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ in} \\ P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \end{aligned}$$

# 3 Dss in porazdelitve

## 3.1 Diskretna slučajna spremenljivka

Naj bo  $X$  diskretna slučajna spremenljivka  $\Rightarrow X$  je funkcija s končno ali stevno zalogo vrednosti  $a_1, a_2, \dots$ . Verjetnost, da  $X$  vzame vrednost  $a_i \in R$ , označimo z  $P(X = a_i) = p_i$ . Porazdelitev  $X$  lahko podamo na dva enakovredna načina, in sicer s:

1. s **porazdelitveno shemo**

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

velja  $0 \leq p_i \leq 1$  in  $p_1 + p_2 + \dots = 1$

2. s **porazdelitveno funkcijo**

$$F_x(x) := P(X \leq x)$$

**3.2 Bernoullijeva** slučajna spremenljivka

$$X \sim B(p)$$

- V vsakem poskusu ima dogodek  $A$  verjetnost  $p$ ,  $X$  pa ima vrednost 1, če se je zgodil dogodek  $A$ , in 0 sicer.

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

## 3.3 Binomska slučajna spremenljivka

$$X \sim B(n, p)$$

- $X$  je število pojavitev izida  $A$  v  $n$  ponovitvah poskusa
- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}$  za  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Izvajamo  $n$  neodvisnih slučajnih poskusov. V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek  $A$  s konstantno verjetnostjo  $p$ ,  $p = P(A)$ .  $X$  nam pove kolikokrat se je zgodil dogodek  $A$  v  $n$  poskusih. npr. kovanec vrzemo 10x, kolikšne so verjetnosti, da pade cifra 0x, 2x, vsaj 3x,... ali 5x vrzemo posteno kocko, izračunaj število šestic, ki pade  $\Rightarrow B(5, \frac{1}{6})$

**3.4 Geometrijska** slučajna spremenljivka

$$X \sim G(p)$$

- $X$  je število ponovitev poskusa do (vključno) prve ponovitve izida  $A$ .
- $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$  za  $k = 1, 2, \dots$
- $P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$  za  $k = 1, 2, \dots$

Izvajamo neodvisne slučajne poskuse, dokler se ne zgodi dogodek  $A$ . V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek  $A$  s **konstantno** verjetnostjo  $p$ ,  $p = P(A)$ . npr. koliko metov kocke je potrebnih, do prve šestice  $\Rightarrow G(1/6)$ .

**3.5 Pascalova oz. negativna binomska** slučajna spremenljivka

$$X \sim P(n, p)$$

- $X$  je število ponovitev poskusa do (vključno)  $n$ -te ponovitve izida  $A$ .
- $P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} (1-p)^{k-n} p^n$  za  $k = n, n+1, n+2, \dots$

npr. koliko metov kocke je potrebnih, dokler šestica ne pade 5x  $\Rightarrow P(5, \frac{1}{6})$ . Število metov kovanca, dokler grb ne pade 2x  $\Rightarrow P(2, \frac{1}{2})$ .

**3.6 Hipergeometrijska** slučajna spremenljivka

$$X \sim H(K, N-K, n)$$

- $X$  je število elementov z določeno lastnostjo med izbranimi.

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ za } k = 0, 1, 2, \dots, \min\{n, R\}$$

V populaciji  $N$  imamo  $K$  elementov z določeno lastnostjo. Izbiramo brez vračanja  $n$  elementov. npr. koliko pikov med 7 kartami, ki smo jih na slepo izbrali izmed 16 kart, kjer so bli stirje piki. imamo 400 ljudi, 100 brezposlenih, naključno jih izberemo 10. Zanima nas kaksna verjetnost je da sta 2 izmed teh brezposelna  $\implies P(x = 2) = H(100, 400 - 100, 10)$ .

### 3.7 Poissonova slučajna spremenljivka

$$X \sim P(\lambda)$$

- $X$  je število ponovitev dogodka A na danem intervalu, pri cemer:

- se dogodki pojavljajo neodvisno
- povprečno število dogodgov  $\lambda$ , ki se pojavijo na določenem intervalu, je konstantno.

- $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$  za  $k = 0, 1, 2, \dots$

npr. ce se dogodek pojavi v povprečju 3x na minuto, lahko uporabimo poissa za izračun kolikokrat se bo dogodek zgodil v 1/4h  $\implies P(45)$ . St avtomobilov, ki prečkajo cesto v 1min.

## 4 Zss in porazdelitve

**3.1 Zvezna slučajna spremenljivka** Naj bo  $X$  zvezna slučajna spremenljivka  $\implies X$  je realna funkcija, za katero obstaja integrabilna funkcija  $p_X : R \rightarrow [0, \infty)$ , tako da za vsak  $x \in R$  velja:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt$$

Funkciji  $p_X$  pravimo **gostota verjetnosti**, funkciji  $F_X$  pa **porazdelitvena** funkcija. Mnozici vrednosti, ki jih zavzame spremenljivka  $X$ , pravimo **zaloga vrednosti** in jo označimo z  $Z_X$ . Lastnosti:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1$
- $P(a < X < b) = \int_a^b p_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$ ,  $a, b \in R$ ,  $a < b$
- $P(X = a) = 0$ ,  $a \in R$  nqot

ce je funkcija zvezna v  $x$ , potem za njo velja tudi  $F'(x) = p(x)$ .

**3.2 Enakomerna zvezna** slučajna spremenljivka

$$X \sim U[a, b]$$

- $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & sicer \end{cases}$

- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$

Vsi izidi na intervalu  $[a, b]$  so enako verjetni.

**3.3 Eksponentna** slučajna spremenljivka

$$X \sim \epsilon(\lambda)$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$

- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$

Slučajna spremenljivka  $X$  - cas med zaporednima dogodkoma, pri cemer so dogodki neodvisni in se pojavijo s konstantno stopnjo  $\lambda$ .  $\lambda$  predstavlja povprečno število dogodkov na izbrano časovno enoto.

**3.4 Normalna** slučajna spremenljivka

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

- $p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  za  $x \in R$
- Za  $F_X(x)$  ne obstaja eksplicitna formula. Vrednost preberemo iz porazdelitvenih tabel.

Po centralnem limitnem izreku sta vsota in povprečje veliko neodvisnih, enako porazdeljenih spremenljivk, *normalno porazdeljeni*. Porazdelitev  $N(0, 1)$  je standardna normalna porazdelitev  $\implies$  potem za vsak  $x$  velja  $P(X < x) = 1 - P(X > x)$ .

**3.5 Gamma** slučajna spremenljivka

$$X \sim \Gamma(n, \lambda)$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} & x > 0 \end{cases}$

V povprečju imamo na časovno enoto  $\lambda$  ponovitev dogodka  $A$ ,  $X$  pa je cas med prvo in  $(n + 1)$  ponovitvijo dogodka  $A$ .

**3.5 Hi kvadrat** slučajna spremenljivka

$$X \sim \chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} & x > 0 \end{cases}$

Je vsota kvadratov  $n$  neodvisnih standardnih normalnih slučajnih spremenljivk.

*Ponovitev analize*

**appx. Odvodi**

- $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$
- $x^n = nx^{n-1}$
- $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $\sin(ax) = a \cos ax$
- $\cos(ax) = -a \sin(ax)$
- $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $e^a x = ae^{ax}$
- $a^x = a^x \ln a$
- $x^x = x^x(1 + \ln x)$
- $\ln x = \frac{1}{x}$
- $\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- $\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$

**appx. Integrali**

- $\int x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & a \neq -1 \\ \ln|x| + C & a = -1 \end{cases}$
- $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C$
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

**Integrating absolute values:** First, determine where the quantity inside the absolute value bars is negative and where it is positive. When we've determined that point all we need to do is break up the integral so that in each range of limits the quantity inside the absolute value bars is always positive or always negative. Once this is done we can drop the absolute value bars (adding negative signs when the quantity is negative) and then we can do the integral as we've always done.