

1 Osnove

1.1 Ponovitev logaritmov

- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
- $x = b^y \implies \log_b x = y$
- $\log_2 x = \log x$
- $0 \log 0 = 0$

1.2 Entropija

je povprečje vseh lastnih informacij:

$$H(X) = \sum_{i=1}^n p_i I_i = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

Lastnosti: je zvezna, simetrična funkcija (vrstni red p_i ni pomemben, sestevanje je komutativno). Je vedno večja od 0 ($p_i \geq 0 \rightarrow -p_i \log p_i \geq 0 \rightarrow H(X) \geq 0$) in navzgor omejena z $\log n$.

Ce sta dogodka **neodvisna** velja aditivnost: $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$.

Vec zaporednih dogodkov neodvisnega vira: $X^l = X \times \dots \times X \rightarrow H(X^l) = lH(X)$.

2 Kodi

2.1 Uvod

Kod sestavljajo *kodne zamenjave*, ki so sestavljene iz znakov **kodne abecede**. Stevilo znakov v kodni abecedi označujemo z r .

Ce so $\{p_1, \dots, p_n\}$ verjetnosti znakov $\{s_1, \dots, s_n\}$ osnovnega sporočila in $\{l_1, \dots, l_n\}$ dolzine prejetih kodnih zmanjav, je povprečna dolžina kodne zamenjave

$$L = \sum_{i=1}^n p_i l_i$$

2.2 Tipi kodov

- **optimalen** - ce ima najmanjšo možno dolžino kodnih zamenjav
- **idealen** - ce je povprečna dolžina kodnih zamenjav enaka entropiji
- **enakomeren** - ce je dolžina vseh kodnih zamenjav enaka
- **enoznacen** - ce lahko poljuben niz znakov dekodiramo na en sam način
- **trenuten** - ce lahko osnovni znak dekodiramo takoj, ko sprejmemo celotno kodno zamenjavo

2.3 Kraftova neenakost

Za dolzine kodnih zamenjav $\{l_1, \dots, l_n\}$ in r znaki kodne abecede obstaja trenutni kod, iff

$$\sum_{i=1}^n r^{-l_i} \leq 1$$

2.4 Povp. dolžina, učinkovitost

Najkrajše kodne zamenjave imamo, ce velja:

$$H_r(X) = L \rightarrow l_i = \lceil -\log_r p_i \rceil$$

Učinkovitost koda:

$$\eta = \frac{H(X)}{L \log_r}, \eta \in [0, 1]$$

Kod je **gospodaren**, ce je L znotraj:

$$H_r(X) \leq L < H_r(X) + 1$$

kjer je $H_r(X)$:

$$H_r(X) = - \sum_{i=1}^n \frac{\log p_i}{\log_r} = \frac{H(X)}{\log_r}$$

2.5 Shannonov prvi teorem

Za nize neodvisnih znakov dozline n obstajajo kodi, za katere velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n} = H(X)$$

pri cemer je $H(X)$ entropija vira X .

Postopek kodiranja po Shannonu:

1. znake razvrstimo po padajocih verjetnostih
2. določimo stevilo znakov v vsaki kodni zamenjavi (l_k)
3. za vse simbole izračunamo kumulativne verjetnosti ($P_k = \sum_{i=1}^{k-1} p_i$)
4. P_k pretvorimo v bazo r . Kodno zamenjavo predstavlja prvih l_k znakov necellega dela stevila

2.6 Fanojev kod

Postopek kodiranja:

1. znake razvrstimo po padajocih verjetnostih
2. znake razdelimo v r cim bolj enako verjetnih skupin
3. Vsaki skupini priredimo enega od r znakov kodne abecede
4. Deljenje ponovimo na vsaki od skupin. Postopek ponavljamo, dokler je mogoče

2.7 Huffmanov kod

Huffmanov postopek kodiranja poteka od spodaj navzgor (Pri Fanoju je ravno obratno). Pri huffmanovem kodu imamo dve fazi:

1. Združevanje
 - (a) Posici r najmanj verjetnih znakov in jih združi v sestavljeni znak, katerega verjetnost je vsota verjetnosti vseh znakov

- (b) Preostale znake skupaj z novo sestavljenim znakom spet razvrsti
- (c) Postopek ponavlja dokler ne ostane samo r znakov

2. Razdruževanje

- (a) Vsakemu od preostalih znakov priredi po en znak kodirne abecede
- (b) Vsak sestavljeni znak razstavi in mu priredi po en znak kodirne abecede
- (c) Ko zmanjka sestavljenih znakov, je postopek zaključen

Pred kodiranjem, je vedno pametno preveriti, ce imamo zadostno stevilo znakov. Veljati mora:

$$n = r + k(r - 1), k \geq 0$$

Ce imamo premalo znakov, jih po potrebi dodamo s verjetnostjo $p = 0$.

Huffmanov kod lahko razsirimo tako, da vec osnovnih znakov združujemo v sestavljene znake \rightarrow bolj učinkoviti kodi. Vendar naltimo na nevarnost kombinacijske eksplozije.

2.8 Aritmetični kod

Je **hiter** in **blizu optimalnemu** kodu, ter manj učinkovit kot Huffmanov, vendar se izogne kombinacijski eksploziji. Vsak niz je predstavljen kot realno stevilo $0 \leq R < 1$, kar nam pove, da daljši kot bo niz, bolj natančno mora biti podano naravno stevilo R .

Postopek kodiranja (znakov ni potrebno razvrstiti):

1. Zacetemo z intervalom $[0, 1)$
2. Izbrani interval razdelimo na n podintervalov, ki se ne prekrivajo. Sirine podintervalov ustrezajo verjetnostim znakov. Vsak podinterval predstavlja en znak
3. Izberemo podinterval, ki ustreza iskanemu znaku
4. Ce niz se ni koncan, izbrani podinterval ponovno razdelimo (bne 2.tocka)
5. Niz lahko predstavimo s poljubnim realnim stevilom v zadnjem podintervalu

Ko dobimo realni interval, ga samo se pretvorimo v binarnega s pomocjo klasicnega pretvarjanja iz dec v bin stevilski sistem.

2.9 Kod Lempel-Ziv (LZ77)

Stiskanje temelji na osnovi slovarja, tako, da ne potrebujemo racunati verjetnosti za posamezne znake. **Kodirnik** med branjem niza gradi slovar, in **dekodirnik** med branjem kodnih zaamenjav rekonstruira slovar in znake. **Kodiranje:** uporablja drseca okna, znaki se premikajo iz desne na levo. Referenca je podana kot trojcek:

- odmik - razdalja do zacetka enakega podniza v medpomnilniku
- dolzina enakega podniza
- naslednji znak

npr. (0, 0, A) - ni ujemanja, (4, 3, B) - 4 znake nazaj se ponovi 3 znakovni podniz, ki se nato zakljuci s B. **dekodiranje:** sledimo kodnim zamenjavam

2.10 Deflate

Gre za predelan LZ77. Uporablja pare (odmik, dolzina). Ce ujemanja v kodni tabeli ni, zapise kar znak. Uporablja dve kodni tabeli:

- tabela za znake in dolzine - 285 simbolov (0-255 za osnovne znake, 256 konec bloka, 257-285 kodira dolzine) Kodne zamenjave brez dodatnih bitov, se zakodira s Huffmanom.
- tabela odmikov

Niz znakov se razdeli na bloke(64k) vsak blok se kodira na enega od treh nacinov:

- brez stiskanja osnovni znaki se prepisejo
- stiskanje s staticnim Huffmanom (verjetnosti podane vnaprej), Huffmanovo drevo ni zakodirano v bloku
- stiskanje s Huffmanom izracunamo verjetnosti za vsak blok

Glava posameznega bloka: 1bit - zadnji/ni zadnji blok + 2bita tip stiskanja + pri (3) se Huffmanovo drevo Ker Huffmanovo drevo ni enolicno, uvedemo kanonicni Huffmanov kod. Postopek:

- znake razvrstimo najprej po dolzinah kodnih zamenjav in nato po abecedi

- prvi simbol ima same nicle

- vsakemu naslednjemu znaku dodelimo naslednjo binarno kodo (prejsnji + 1)
- ce je kodna zamenjava daljsa od bina-rne kode stevila, na koncu pripnemo niclo
- ponavljaj (3) do konca

Na taksen nacin dosežemo, da je potrebno kodirati samo dolzine kodnih zamenjav.

2.11 Kod Lempel-Ziv (LZW)

Osnovni slovar je podan in ga sporti dopon-jujemo. Alogritem za **kodiranje:**

```
N = ""
ponavljaj:
  preberi naslednji znak z
  ce je [N,z] v slovarju:
    N = [N, z]
  drugace:
    izpisi indeks k niza N
    dodaj [N, z] v slovar
    N = z
  izpisi indeks k niza N
```

Algoritem za **dekodiranje:**

```
preberi indeks k
poisci niz N, ki ustreza indeksu k
izpisi N
L = N
ponavljaj:
  preberi indeks k
  ce je k v slovarju:
    poisci niz N
  drugace:
    N = [L, L(1)]
  izpisi N
  v slovar dodaj [L, N(1)]
  L = N
```

LZW doseze optimalno stiskanje, približa se entropiji.

2.12 Verizno kodiranje ali RLE (run lenght encoding)

Namesto originalnih podatkov, sharnjujemo dolzino verige (fffeef → 3f2e1f). Problemu, ko se podatki ne ponavljajo, se izognemo tako, da izvedemo kombinacijo direktnega kodi-ranja in kodiranja RLE.

2.13 Stiskanje z izgubami

S taksnim nacinom stiskanja lahko dosežemo veliko boljša kompresijska razmerja, vendar izgubimo podatke. Zato ga uporabljamo samo s formati, kjer se ne ukvarjamo z integriteto podatkov(MP3, MPEG, JPEG, ...). Postopki kodiranje znanih formatov:

• JPEG

- priprava slike → ker je svetlost bolj pomembna, je barvna resolucija obicajno zmanjsana ($YC_R C_B$)
- aproksimacija vsake od treh kom-ponent s 2D DCT
- kvantizacija → podatki ki bolj izstopajo so shranjeni manj natancno kot tisti ki so staticni
- kodiranje blokov s pomocjo en-tropije
- RLE cik-cak po sliki
- RLE kodiramo z Huffmanom ali Aritmenticnim kodom

• MP3

- Modified DCT
- odstranitev za cloveka neslisnih frekvenc
- stereo, ce sta si L in R pretvorimo v mono
- Huffman na koncu

• MPEG

- uvodno kodiranje → celotna slika JPEG
- nato pa kodiramo samo spre-membe, ki so se zgodile v sliki JPEG s pomocjo vektorja pre-mika. V primeru, da je prevec raz-lik, se ponovno kodira JPEG slika.

2.14 Kompresijsko razmerje

Izracunamo ga po formuli → stisnjeni binarni zapis C(M) / binarni zapis dokumenta (M):

$$R = C(M)/M$$

3 Kanali