

1 Vektorji in matrike

1.1 Vektor je *urejena n-terica števil*, ki jo običajno zapisemo kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1.2 Produkt *vektorja* \vec{x} s skalarjem α je vektor

$$\alpha \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

1.3 Vsota *vektorjev* \vec{x} in \vec{y} je vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

1.4 Nicelni vektor $\vec{0}$ je tisti vektor, za katerega je $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ za vsak vektor \vec{a} . Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju \vec{a} priprada nasprotni vektor $-\vec{a}$, tako da je $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Razlika vektorjev \vec{a} in \vec{b} je vsota $\vec{a} + (-\vec{b})$ in jo navadno zapisemo kot $\vec{a} - \vec{b}$.

Lastnosti vektorske vsote

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutativnost)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (asociativnost)
- $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$ (distributivnost)

1.5 Linearna kombinacija vektorjev \vec{x} in \vec{y} je vsota

$$a\vec{x} + b\vec{y}$$

1.6 Skalarni produkt vektorjev

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ je stevilo}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

alternativno:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = ||\vec{x}|| ||\vec{y}|| \cos \phi$$

Lastnosti skalarnega produkta

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$ (aditivnost)
- $\vec{x} \cdot (a\vec{y}) = a(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (a\vec{x}) \cdot \vec{y}$ (homogenost)
- $\forall \vec{x} \text{ velja } \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

1.7 Dolžina vektorja \vec{x} je

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

1.8 Enotski vektor je vektor z dolžino 1.

1.9 Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||.$$

1.10 Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

1.11 Vektorja \vec{x} in \vec{y} sta ortogonalna (ali pravokotna) natakno takrat, kadar je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

1.12 Če je ϕ kot med vektorjema \vec{x} in \vec{y} , potem je

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| ||\vec{y}||} = \cos \phi$$

1.13 Vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

Lastnosti vektorskega produkta

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (aditivnost)
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ (!komutativnost)
- $(a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$ (homogenost)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ je \perp na vektorja \vec{a} in \vec{b}
- $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \sin \phi$
- Dolžina vektorskega produkta je ploscina paralelograma, katerega vektorja oklepata

1.14 Mesani produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ vektorjev \vec{a}, \vec{b} in \vec{c} v R^3 je skalarni produkt vektorjev $\vec{a} \times \vec{b}$ in \vec{c} :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Lastnosti mesanega produkta

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- $(x\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (homogenost)
- $(\vec{a}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$
- Absolutna vrednost mesanega produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enaka prostornini paralepipeda

Razdalje

Razdalja od točke P do ravnine, v kateri leži točka A :

$$\cos \phi = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_A)}{||\vec{n}|| ||\vec{r}_P - \vec{r}_A||} \text{ oz. } d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_A)|}{||\vec{n}||}$$

Razdalja od točke P do premice, katere gre skozi točko A :

$$d = \frac{||\vec{e} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_A)||}{||\vec{e}||}$$

Projekcije vektorjev

Naj bo $proj_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{x}$ projekcija vektorja \vec{b} na vektor \vec{a} . Izračunamo jo po sledeci formuli:

$$proj_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$$

1.15 Matrika dimenzije $m \times n$ je tabela $m \times n$ števil, urejenih v m vrstic in n stolpcev:

$$A^{m \times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

1.16 Matrika, katere elementi so enaki nič povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonalna matrika. Za diagonalno matriko je $a_{ij} = 0$, kadarkoli velja $i \neq j$

1.17 Matrika $A^{n \times n}$ je spodnjetrokotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i < j$$

1.18 Matrika $A^{n \times n}$ je zgornjetrikotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i > j$$

1.19 Matrika je trikotna, ce je zgornjetrikotna ali spodnjetrokotna.

1.20 Dve matriki A in B sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

$$A^{m \times n} = B^{p \times q} \implies m = p \text{ in } n = q, \\ a_{ij} = b_{ij} \text{ za vsak } i = 1, \dots, m \text{ in } j = 1, \dots, n$$

1.21 Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnožimo s skalarjem

$$aA^{m \times n} = \begin{bmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} & \dots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{m1} & ax_{m2} & ax_{m3} & \dots & ax_{mn} \end{bmatrix}$$

1.22 Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da seštejemo istolezne elemente obeh matrik:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Osnovne matricne operacije

- $A + B = B + A$ (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativnost)

- $a(A+B) = aA + aB$ (množenje s skalar-jem)

- $A + (-A) = 0$

- $x(yA) = (xy)A$ in $1 \cdot A = A$

1.23 Transponirana matrika k matriki A reda $m \times n$ je matrika reda $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{m1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Lastnosti transponiranja matrik

- $(A+B)^T = A^T + B^T$

- $(xA)^T = xA^T$

- $(A^T)^T = A$

1.24 Produkt matrike A in vektorja \vec{x} je linearna kombinacija stolpcev matrike A, uteži linearne kombinacije so komponente vektorja \vec{x} :

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

1.25 Produkt vrstice \vec{x} z matriko A je linearna kombinacija vrstic matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice \vec{y} :

$$\vec{y} \cdot A = [y_1, y_2, y_3] \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

1.26 Produkt matrik A in B je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike A s stolpci matrike B:

$$AB = A[b_1, b_2, \dots, b_n] = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n]$$

1.27 Element c_{ij} v i -ti vrstici in j -tem stolpcu produkta $C = AB$ je skalarni produkt i -te vrstice A in j -tega stolpca matrike B

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

1.28 Produkt matrik A in B je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike A z matriko B:

$$[i - \text{ta vrstica } A] B = [i - \text{ta vrstica } AB]$$

Lastnosti matricnega produkta

- $AB \neq BA$ (!komutativnost)

- $(xA)B = x(AB) = A(xB)$ (homogenost)

- $C(A+B) = CA + CB$ (distributivnost)

- $A(BC) = (AB)C$ (asociativnost)

- $(AB)^T = B^T A^T$

1.29 Vrstice matrike A z n stolpci naj bodo a^1, \dots, a^n , stolpci matrike B z n vrsticami pa b_1, \dots, b_n . Potem je

$$AB = a^1 b_1 + \dots + a^n b_n$$

1.30 Če delitev na bloke v matriki A ustreza delitvi v matriki B, potem lahko matriki pomnožimo blocno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

1.31 Kvadratna matrika I_k reda $k \times k$, ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko A reda $m \times n$ velja $AI_n = A$ in $I_m A = A$. Matrika I_k se imenuje enotska ali identična matrika.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

2 Sistemi linearnih enačb

2.1 Kvadratna matrika A je obrnljiva, če obstaja taka matrika A^{-1} , da je

$$AA^{-1} = I \text{ in } A^{-1}A = I$$

Matrika A^{-1} (če obstaja) se imenuje matriki A inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna. Matrika **NI** obrnljiva, kadar je $\text{rang}(A) < n$!

2.2 Kvadratna matrika reda n je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo n pivotov.

2.3 Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

2.4 Inverzna matrika inverzne matrike A^{-1} je matrika A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2.5 Če je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ edino rešitev $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

2.6 Če obstaja nenicelna rešitev \vec{x} enačbe $A\vec{x} = \vec{0}$, matrika A ni obrnljiva (je singularna).

2.7 Če sta matriki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt $A \cdot B$ in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Pozor! Pravilo

$$(AB)^p = A^p B^p$$

velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej $AB = BA$.

2.8 Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2.9 Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi a_{ii} je diagonalna matrika, ki ima na diagonalni elemente a_{ii}^{-1}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

2.10 Za izračun inverza matrike A, uporabimo gaussovo eliminacijo nad matriko $[A|I]$

$$[A|I] = [I|A^{-1}]$$

2.11 Matrika A je simetrična $\Leftrightarrow A^T = A$. Za elemente a_{ij} simetrične matrike velja $a_{ij} = a_{ji}$.

2.12 Če je matrika A simetrična in obrnljiva, je tudi A^{-1} simetrična.

2.13 Če je R poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta $R^T R$ in RR^T simetrični matriki.

3 Vektorski prostori

3.1 Realni vektorski prostor V je množica "vektorjev" skupaj z pravili za

- seštevanje vektorjev,

- množenje vektorja z realnim številom (skalarjem)

Če sta \vec{x} in \vec{y} poljubna vektorja v V, morajo biti v V tudi

- vsota $\vec{x} + \vec{y}$ in

- produkti $\alpha\vec{x}$ za vse $\alpha \in R$

V vektorskem prostoru V morajo biti tudi VSE linearne kombinacije $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

Pravila za operacije v vektorskih prostorih

Operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoščati naslednjim pravilom:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativnost)

- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (asociativnost)

- obstaja en sam nenicelni vektor $\vec{0}$, da velja $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

- za vsak \vec{x} obstaja natanko en $-\vec{x}$, da je $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

- $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$

- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ (distributivnost)

- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

3.2 Podmnožica U vektorskega prostora V je *vektorski podprostor*, če je za vsak par vektorjev \vec{x} in \vec{y} iz U in vsako realno število α tudi

- $\vec{x} + \vec{y} \in U$ in

- $\alpha\vec{x} \in U$.

3.3 Mnozica vektorjev U je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz U tudi v U .

Lastnosti vektorskih podprostorov

- Vsak vektorski podprostor nujno vsebuje ničelni vektor $\vec{0}$
- Presek dveh podprostorov vektorskega podprostora je tudi podprostor

3.4 Stolpčni prostor $C(A)$ matrike $A \in R^{m \times n}$ je tisti podprostor vektorskega prostora R^m , ki vsebuje natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike A .

Izračunamo ga tako, da matriko A transponiramo in izvedemo operacijo gaussove eliminacije nad A^T . Vrstice katere ostanejo po gaussovi eliminaciji so linearno neodvisni vektorji, kateri tvorijo stolpčni prostor matrike A , $C(A)$. *neformalno: linearna ogrinjaca stolpcev matrike (npr. ce imas 5 stolpcev pa lahko 2 zapises kot linearno kombinacijo ostalih 3 bo imel column space 3 elemente)*

3.5 Sistem linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je resljiv natanko tedaj, ko je vektor $\vec{b} \in C(A)$

3.6 Naj bo matrika $A \in R^{m \times n}$. Mnozica resitev homogenega sistema linearnih enacb je podprostor v vektorskem prostoru R^n .

3.7 Mnozica vseh resitev sistema linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ se imenuje ničelni prostor matrike A . Oznacujemo ga z $N(A)$.

neformalno: mnozica vektorjev, ki se z neko matriko zmnozijo v ničelni vektor. Matriko A samo eliminiras po gausso in nato dobljene resitve enacis z 0.

3.8 Ce je matrika A kvadratna in obrnljiva, potem $N(A)$ vsebuje samo vektor $\vec{0}$

3.9 Matrika ima *stopnicasto* obliko, kadar se vsaka od njenih vrstic zacne z vsaj eno niclo vec kot prejsnja vrstica.

3.10 Prvi element, razlicen od nic v vsaki vrstici, je *pivot*. Stevilo pivotov v matriki se imenuje rang matrike. Rang matrike A zapisemo kot $\text{rang}(A)$.

3.11 Rang matrike ni vecji od stevila vrstic in ni vecji od stevila stolpcev matrike.

3.12

Stevilo prostih neznank matrike = st. stolpcev - rang matrike

3.13

1. Visoka in ozka matrika ($m > n$) ima poln stolpčni rang, kadar je $\text{rang}(A) = n$
2. Nizka in široka matrika ($m < n$) ima poln vrsticni rang, kadar je $\text{rang}(A) = m$
3. Kvadratna matrika ($n = m$) ima poln rang, kadar je $\text{rang}(A) = m = n$

3.14 Za vsako matriko A s polnim stolpčnim rangom $r = n \leq m$, velja:

1. Vsi stolpci A so pivotni stolpci

2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ nima prostih neznank, zato tudi nima posebnih resitev

3. Ničelni prostor $N(A)$ vsebuje le ničelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$

4. Kadar ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ rešitev (kar ni vedno res!), je rešitev ena sama

5. Reducirana vrsticna oblika matrike (A) se da zapisati kot

$$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times n \text{ enotska matrika} \\ m - n \text{ vrstic samih nicel} \end{bmatrix}$$

3.15 Za vsako matriko A s polnim vrsticnim rangom $r = m \leq n$ velja:

1. Vse vrstice so pivotne, ni prostih vrstic in U (stopnicasta oblika) in R (reducirana stopnicasta oblika) nimata ničelnih vrstic

2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je resljiv za vsak vektor \vec{b}

3. Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ ima $n - r = n - m$ prostih neznank, zato tudi prav toliko posebnih resitev

4. Stolpčni prostor $C(A)$ je ves prostor R^m

3.16 Za vsako kvadratno matriko A polnega ranga ($\text{rang}(A) = m = n$) velja:

1. Reducirana vrsticna oblika matrike A je enotska matrika

2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ ima natančno eno rešitev za vsak vektor desnih strani \vec{b}

3. Matrika A je obrnljiva

4. Ničelni prostor matrike A je samo ničelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$

5. Stolpčni prostor matrike A je cel prostor $C(A) = R^m$

3.17 Vektorji $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ so linearno neodvisni, ce je

$$0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n$$

edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka vektorju $\vec{0}$. Vektorji $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ so linearno odvisni, ce niso linearno neodvisni.

3.18 Ce so vektorji *odvisni*, lahko vsaj enega izrazimo z ostalimi.

3.19 Ce je med vektorji $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ tudi ničelni vektor, so vektorji *linearno odvisni*.

3.20 Vsaka mnozica n vektorjev iz R^n je odvisna, kadar je $n > m$.

3.21 Stolpci matrike A so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima homogeno enacba $A\vec{x} = \vec{0}$ edino rešitev $\vec{x} = \vec{0}$.

3.22 Kadar je $\text{rang}(A) = n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisni.

Kadar je pa $\text{rang}(A) < n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisni.

3.23 Kadar je $\text{rang}(A) = m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisne. Kadar je pa $\text{rang}(A) < m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisne.

3.24 Vrsticni prostor matrike A je podprostor v R^n , ki ga razpenjajo vrstice matrike A .

3.25 Vrsticni prostor matrike A je $C(A^T)$, stolpčni prostor matrike A^T .

3.26 Baza vektorskega prostora je mnozica vektorjev, ki

1. je linearno neodvisna in
2. napenja cel prostor.

3.27 Vsak vektor iz vektorskega prostora lahko na en sam nacin izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

3.28 Vektorji $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ so baza prostora R^n natanko tedaj, kadar je matrika, sestavljena iz stolpcev $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, obrnljiva.

3.29 Prostor R^n ima za $n > 0$ neskončno mnogo razlicnih baz.

3.30 Ce sta mnozici vektorjev $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ in $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ obe bazi istega vektorskega prostora, potem je $m = n \implies$ vse baze istega vektorskega prostora imajo isto stevilo vektorjev.

3.31 Dimenzija vektorskega prostora je stevilo baznih vektorjev.

3.32 Dimenziji stolpčnega prostora $C(A)$ in vrsticnega prostora $C(A^T)$ sta enaki rang matrike A

$$\dim(C(A)) = \dim(C(A^T)) = \text{rang}(A).$$

3.33 Dimenzija ničelnega prostora $N(A)$ matrike A z n stolpci in ranga r je enaka $\dim(N(A)) = n - r$.

3.34 Stolpčni prostor $C(A)$ in vrsticni prostor $C(A^T)$ imata oba dimenzijo r . Dimenzija ničelnega prostora $N(A)$ je $n - r$, Dimenzija levega ničelnega prostora $N(A^T)$ pa je $m - r$.

3.35 Vsako matriko ranga 1 lahko zapisemo kot produkt (stolpčnega) vektorja z vrsticnim vektorjem $A = \vec{u}\vec{v}^T$.

4 Linearne preslikave

4.1 Preslikava $A : U \rightarrow V$ je linearna, ce velja

1. aditivnost: $A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2$ za vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$,
2. homogenost: $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$ za vse $\alpha \in R$ in $\vec{u} \in U$.

Pozor! Preslikava ni linearna, ce $A(\vec{0}) \neq \vec{0}$.

4.2 Preslikava $A : U \rightarrow V$ je linearna natanko tedaj, ko velja

$$A(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1 A\vec{u}_1 + \alpha_2 A\vec{u}_2$$

za vse $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ in vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$.

4.3 Če je A linearna preslikava, je $A\vec{0} = \vec{0}$.

4.4 Naj bo $A : U \rightarrow V$ linearna preslikava in $\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i$ linearna kombinacija vektorjev. Potem je $A(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{u}_i$.

4.5 Naj bo $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ baza za vektorski prostor U . Potem je linearna preslikava $A : U \rightarrow V$ natanko določena, če poznamo slike baznih vektorjev.

4.6 Naj bo $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ baza za U in $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$. Potem obstaja natanko ena linearna preslikava $A : U \rightarrow V$, za katero je $A\vec{u}_i = \vec{v}_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$.

4.7 Naj bo $A : U \rightarrow V$ linearna preslikava. Potem množico

$$\ker A = \{\vec{u} \in U; A\vec{u} = \vec{0}\}$$

imenujemo *jedro* linearne preslikave. Ker je $A\vec{0} = \vec{0}$, je $\vec{0} \in \ker A$ za vse A . Zato je jedro vedno neprazna množica. Če je matrika $A\phi$ **enotska** preslikava za ϕ , potem velja

$$\ker \phi = N(A).$$

4.8 Jedro linearne preslikave $A : U \rightarrow V$ je vektorski podprostor v U .

4.9 Množico

$$\operatorname{im} A = \{\vec{v} \in V; \text{obstaja tak } \vec{u} \in U, \text{ da je } \vec{v} = A\vec{u}\}$$

imenujemo *slika* linearne preslikave $A : U \rightarrow V$. Če je matrika $A\phi$ **enotska** preslikava za ϕ , potem velja

$$\operatorname{im} \phi = C(A).$$

4.10 Če je $A : U \rightarrow V$ linearna preslikava, potem je njena slika $\operatorname{im} A$ vektorski podprostor v V .

4.11 Če je $A : U \rightarrow V$ linearna preslikava, in je rang matrike te preslikave v standardni bazi poln, potem lahko sklepamo, da ima ta preslikava **trivialno jedro**.

5 Ortogonalnost

5.1 Podprostora U in V vektorskega prostora sta med seboj ortogonalna, če je vsak vektor $\vec{u} \in U$ ortogonalen na vsak vektor $\vec{v} \in V$.

5.2 Za vsako matriko $A \in R^{m \times n}$ velja:

- Nicelni prostor $N(A)$ in vrsticni prostor $C(A^T)$ sta ortogonalna podprostora R^n
- Levi nicelni prostor $N(A^T)$ in stolpčni prostor $C(A)$ sta ortogonalna podprostora prostora R^m .

5.3 Ortogonalni komplement V^\perp podprostora V vsebuje VSE vektorje, ki so ortogonalni na V .

5.4 Naj bo A matrika dimenzije $m \times n$.

- Nicelni prostor $N(A)$ je ortogonalni komplement vrsticnega prostora $C(A^T)$ v prostoru R^n

- Levi nicelni prostor $N(A^T)$ je ortogonalni komplement stolpčnega prostora $C(A)$ v prostoru R^m .

krajse:

$$\begin{aligned} N(A) &= C(A^T)^\perp \\ N(A^T) &= C(A)^\perp \end{aligned}$$

5.5 Za vsak vektor \vec{y} v stolpčnem prostoru $C(A)$ obstaja v vrsticnem prostoru $C(A^T)$ en sam vektor \vec{x} , da je $A\vec{x} = \vec{y}$.

5.6 Če so stolpci matrike A linearno neodvisni, je matrika $A^T A$ obrnljiva.

5.7 Matrika P je projekcijska, kadar

- je simetrična: $P^T = P$ in
- velja $P^2 = P$.

5.8 Če je P projekcijska matrika, ki projicira na podprostor U , potem je $I - P$ projekcijska matrika, ki projicira na U^\perp , ortogonalni komplement podprostora U .

5.9 Vektorji $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$ so ortonormirani kadar so ortogonalni in imajo vsi dolžino 1, torej

$$\vec{q}_i^T \vec{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{ko je } i \neq j \text{ pravokotni vektorji} \\ 1 & \text{ko je } i = j \text{ enotski vektorji} \end{cases}$$

za matriko $Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n]$ velja $Q^T Q = I$.

5.10 Vektorji $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$ naj bodo ortonormirani v prostoru R^m . Potem za matriko

$$Q = [\vec{q}_1 \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n]$$

velja, da je $Q^T Q = I_n$ enotska matrika reda n .

5.11 Matrika Q je ortogonalna, kadar je

- kvadratna in
- ima ortonormirane stolpce.

5.12 Če je Q ortogonalna matrika, potem je obrnljiva in $Q^{-1} = Q^T$.

5.13 Množenje z ortogonalno matriko ohranja dolžino vektorjev in kote med njimi. Če je Q ortogonalna matrika, potem je

$$\begin{aligned} \|Q\vec{x}\| &= \|\vec{x}\| \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in} \\ (Q\vec{x})^T Q\vec{y} &= \vec{x}^T \vec{y} \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in } \vec{y} \end{aligned}$$

5.14 Če sta Q_1 in Q_2 ortogonalni matriki, je tudi produkt $Q = Q_1 Q_2$ ortogonalna matrika.

5.15 Gram-Schmidtova ortogonalizacija. Za vhod uporabimo Linearno ogrinjaco linearno neodvisnih vektorjev. Po gram-schmidtovi ortogonalizaciji pa dobimo paroma ortogonalne vektorje. Postopek:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{v}_1 \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \operatorname{proj}_{\vec{u}_1} \vec{v}_2 \\ \vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \operatorname{proj}_{\vec{u}_1} \vec{v}_3 - \operatorname{proj}_{\vec{u}_2} \vec{v}_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Po tem postopku dobimo paroma ortogonalne vektorje po Gram-Schmidtovi ortogonalizaciji.

5.16 Iz linearno neodvisnih vektorjev a_1, \dots, a_n z *Gram-Schmidtovo* ortogonalizacijo dobimo ortonormirane vektorje q_1, \dots, q_n . Matriki A in Q s temi stolpci zadoscajo enačbi $A = QR$, kjer je R zgornjetrikotna matrika.

- Najprej z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo poiscemo linearno neodvisne vektorje matrike A

- Vektorje normiramo in jih zapisemo v matriko Q .

- Matriko R dobimo tako, da matriko $Q^T A$ pomnožimo z matriko A

$$R = Q^T A$$

Tako smo prisli do vseh elementov v QR razcepu matrike A .

Sedaj ko imamo izracunane vse elemente lahko zapisemo se projekcijsko matriko. To je matrika pravokotne projekcije na $C(Q) = C(A)$. Njen izracun je preprost:

$$QQ^T = \text{pravokotna projekcija na } C(Q) = C(A)$$

Sedaj lahko to projekcijsko matriko pomnožimo z desne s poljubnim vektorjem in ugotovimo kam se preslika v prostoru $C(A)$. V nasprotnem primeru, če bi pa zeleli imeti projekcijsko matriko, s katero bi radi videli kam se vektor preslika v prostoru $N(A^T)$, bi pa od identicne matrike odsteli projekcijsko matriko za $C(Q)$.

$$I - QQ^T = \text{pravokotna projekcija na } C(A)^\perp = N(A^T)$$

5.17 Vektorski prostor ι je množica vseh neskončnih zaporedij \vec{u} s končno dolžino

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + \dots < \infty$$

5.18 Predoloceni sistemi

$$A^T A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T \vec{f}$$

Kjer je A matrika sistemov linearnih enačb in \vec{f} vektor pričakovanih resitev po gaussovi eliminaciji zgornje enačbe, dobimo spremenljivke, ki predstavljajo najboljše aproksimacijo vseh kombinacij rezultatov in vhodnih spremenljivk.

6 Determinante

6.1 Determinanta enotske matirke je $\det(I) = 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ in } \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

6.2 Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dve vrstici.

6.3 Determinanta je linearna funkcija vsake vrstice posebej. To pomeni, da se

- determinanta pomnozi s faktorjem t , ce eno vrstico determinante (vsak element v tej vrstici) pomnozimo s faktorjem t .

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- determinanta je vsota dveh determinant, ki se razlikujeta le v eni vrstici, ce je v prvotni determinanti ta vrstica vsota obeh vrstic, ostale vrstice pa so enake v vseh treh determinantah.

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

Pozor! Kadar mnozimo matriko A s skalarjem t , se vsak element matrike pomnozi s skalarjem. Ko racunamo determinanto produkta matirke s skalarjem tA , skalar t postavimo iz vsake vrstice posebej, zato je $\det(tA) = t^n \det(A)$, kjer je n stevilo vrstic (ali stolpcev) determinante.

6.4 Matrika, ki ima dve enaki vrstici, ima determinanto enako 0.

6.5 Ce v matriki od poljubne vrstice odstejemo mnogokratnik neke druge vrstice, se njena determinanta ne spremeni.

6.6 Naj bo A poljubna kvadratna matirka $n \times n$ in U njena vrsticno-stopnicasta oblika, ki jo dobimo z *Gaussovo eliminacijo*. Potem je

$$\det(A) = \pm \det(U).$$

6.7 Determinanta, ki ima vrstico samih nicel, je enaka 0.

6.8 Determinanta trikotne matrike A je produkt diagonalnih elementov:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

6.9 Determinanta singularne matrike je enaka 0, determinanta obrnljive matrike je razlicna od 0.

6.10 Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu determinant obeh matrik:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

6.11 Determinanta inverzne matrike je enaka

$$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$$

in determinanta potence A^n matrike A je

$$\det(A^n) = (\det(A))^n.$$

6.12 Transponirana matrika A^T ima isto determinanto kot A .

6.13 Recap dovoljenih operacij nad determinanto

- Ce zamenjamo dve vrstici, se **spremen**i predznak determinante
- Vrednost determinante se ne spremeni, ce neki vrstici pristevamo poljuben veckratnik katerekoli druge vrstice.
- Ce vse elemente neke vrstice pomnozimo z istim stevilom α , se vrednost determinante pomnozi z α .

6.14 Vsaka lastnost, ki velja za vrstice determinante, velja tudi za njene **stolpce**. Med drugim:

- Determinanta spremeni predznak, ce med seboj zamenjamo dva stolpca
- Determinanta je enaka 0, ce sta dva stolpca enaka
- Determinanta je enaka 0, ce so v vsaj enem stolpcu same nicle.

6.15 (kofaktorska formula) Ce je A kvadratna matrika reda n , njeno determinanto lahko izracunamo z razvojem po $i - ti$ vrstici

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

Kofaktorje C_{ij} izracunamo kot $C_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$, kjer je D_{ij} determinanta, ki jo dobimo, ce v A izbrisemo i -to vrstico in j -ti stolpec.

6.16 Inverzna matrika A^{-1} matrike A je transponirana matrika kofaktorjev, deljena z determinanto $|A|$:

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)},$$

kjer je C matrika kofaktorjev matrike A .

6.17 Ploscina paralelograma, dolocenega z vektorjema \vec{a} in $\vec{b} \in R^2$ je enaka $\det([\vec{a}\vec{b}])$, to je absolutni vrednosti determinante s stolpcema \vec{a} in \vec{b} .

6.18 Mesani produkt vektorjev \vec{a} in \vec{b} in \vec{c} je enak determinanti matrike, ki ima te tri vektorje kot stolpce.

6.19 Naj bo A matrika $R^{n \times n}$

$$A \text{ je obrnljiva} \iff \det A \neq 0$$

$$A^{-1} \text{ ne obstaja} \iff \det A = 0$$

7 L. vrednosti in vektorji

7.1 Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$, za katerega je $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ lastni vektor. Stevilo λ je lastna vrednost. **Pozor!** Nicelni vektor $\vec{0}$ ne more biti lastni vektor. Lahko pa je lastna vrednost enaka 0.

7.2 Ce ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor \vec{x} , potem ima matrika A^2 lastno vrednost λ^2 in isti lastni vektor \vec{x} .

7.3 Ce ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor \vec{x} , potem ima matrika A^k lastno vrednost λ^k in isti lastni vektor \vec{x} .

7.4 Ce ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor \vec{x} , potem ima inverzna matrika lastno vrednost $1/\lambda$ in isti lastni vektor \vec{x} .

7.5 Sled kvadratne matrike A reda n je vsota njenih diagonalnih elementov.

$$\text{sled}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + \dots + a_{nn}.$$

7.6 Sled matrike je enaka vsoti vseh lastnih vrednosti, steti z njihovo veckratnostjo. Ce so $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike reda n , potem je sled enaka *vsoti*

$$\text{sled}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \dots + \lambda_n,$$

determinanta matrike pa *produktu* lastnih vrednosti

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

7.7 Ce ima matrika A lastno vrednost λ , ki ji pripada lastni vektor \vec{x} , potem ima matrika $A + cI$ lastno vrednost $\lambda + c$ z istim lastnim vektorjem \vec{x} (velja samo z enotskimi matrikami I).

7.8 Lastne vrednosti trikotne matrike so enake diagonalnim elementom.

7.9 Denimo, da ima matrika $A \in R^{n \times n}$ n linearno neodvisnih lastnih vektorjev $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Ce jih zlozimo kot stolpce v matriko S

$$S = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n],$$

potem je $T =: S^{-1}AS$ diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ na diagonalni

$$S^{-1}AS = T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Pozor! Lastni vektorji v matriki S morajo biti v istem vrstnem redu kot lastne vrednosti v matriki T .

7.10 Ce je $A = STS^{-1}$, potem je $A^k = ST^kS^{-1}$ za vsak $k \in N$.

7.12 Vse lastne vrednosti realne simetricne matrike so realne.

7.13 Lastni vektorji realne simetricne matrike, ki pripadajo razlicnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.

7.14 Schurov izrek Za vsako kvadratno matriko reda n , ki ima le realne lastne vrednosti, obstaja taka ortogonalna matrika Q , da je

$$Q^T A Q = T$$

zgornjetrikotna matrika, ki ima lastne vrednosti (lahko so kompleksne) matrike A na diagonalni.

7.15 Spektralni izrek Vsako simetrično matriko A lahko razcepimo v produkt $A = QTQ^T$, kjer je Q ortogonalna matrika lastnih vektorjev, T pa diagonalna z lastnimi vrednostmi matrike A na diagonalni.

7.16 Vsako realno simetrično matriko lahko zapisemo kot linearno kombinacijo matrik ranga 1

$$A = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^T + \lambda_2 \vec{q}_2 \vec{q}_2^T + \cdots + \lambda_n \vec{q}_n \vec{q}_n^T,$$

kjer so \vec{q}_i stolpci matrike Q (torej lastni vektorji matrike A).

7.17 Za simetrično nesingularno matriko A je število pozitivnih pivotov enako številu pozitivnih lastnih vrednosti.

7.18 Kvadratna matrika je pozitivno definirana, kadar so vse njene lastne vrednosti pozitivne.

7.19 Kvadratna matrika reda 2 je pozitivno definirana natanko tedaj, kadar sta pozitivni sled in determinanta matrike.

7.20 Simetrična matrika A reda n je pozitivno definirana natanko tedaj, ko je za vsak vektor $\vec{x} \neq \vec{0} \in R^n$

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0$$

7.21 Če sta matriki A in B pozitivno definitni, je pozitivno definitna tudi njuna vsota $A + B$.

7.22 Matrika A je pozitivno definitna, kadar so vse njene vodilne glavne poddeterminante pozitivne.

7.23 Če so stolpci matrike R linearno neodvisni, je matrika $A = R^T R$ pozitivno definitna.

7.24 Za vsako simetrično pozitivno definitno matriko A obstaja zgornjetrikotna matrika R, da je $A = R^T R$.

7.25 Simetrična matrka reda n , ki ima eno od spodnjih lastnosti, ima tudi ostale stiri:

- Vseh n pivotov je pozitivnih;
- Vseh n vodilnih glavnih determinant je pozitivnih;
- Vseh n lastnih vrednosti je pozitivnih;
- Za vsak $\vec{x} \neq \vec{0}$ je $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$;
- $A = R^T R$ za neko matriko R z linearno neodvisnimi stolpci.

7.26 Vsako realno $m \times n$ matriko A lahko zapisemo kot produkt $A = UEV^T$, kjer je matrika U ortogonalna $m \times m$, E diagonalna $m \times n$ in V ortogonalna $n \times n$.

7.27 Če je matrika A simetrična in so vsej njeni elementi realni, potem je njen rang enak številu nenicelnih lastnih vrednosti matrike A.

$$rang(A) = \text{število } \lambda A$$

7.28 Diagonalizacija oz podobnost matrik. Matriki A in B sta *podobni*, ce imata obe iste lastne vrednosti. Diagonalno matriko sestavimo tako, da v njeno diagonalo vpišemo lastne vrednosti. Matriko P pa sestavimo iz njenih lastnih vektorjev; po stolpcih.

$$A = PDP^{-1} \text{ oz. } D = P^{-1}AP$$

7.29 Spektralni razcep Naj bodo vektorji $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$ ONB iz l. vektorjev matrike A za l. vrednost $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, potem lahko matriko A zapisemo kot:

$$A = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^T + \cdots + \lambda_n \vec{q}_n \vec{q}_n^T$$