

# Kombinatorika

## 1.1 Permutacije

1. brez ponavljanja:  $P_n = n!$
2. s ponavljanjem:  $P_n^{k_1, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! \dots k_n!}$

## 1.2 Variacije

1. brez ponavljanja:  $V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
2. s ponavljanjem:  $V_n^r = n^r$

## 1.3 Kombinacije

1. brez ponavljanja:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
2. s ponavljanjem:  $\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$

Lastnosti binomskega simbola:

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Binomski izrek:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Za kombinacije velja, da vrstni red **ni** pomemben. Medtem pa ko v splošnem za variacije in permutacije velja, da vrstni red **je** pomemben.

# 2 Verjetnost

## 2.1 Elementarna verjetnost

Izid iz dane množice izidov je izbran na slepo, ce so vsi izidi iz te množice enako verjetni. Takrat se dogodek  $A$  zgodi z verjetnostjo:

$$P(A) = \frac{\text{st. izidov, ki so v } A}{\text{st. vseh izidov}}$$

Nasprotni dogodek pa z verjetnostjo:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Nacelo vključitev in izključitev dogodkov:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= P(A_1) + \dots + P(A_n) \\ &- P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - \dots - P(A_{n-1} A_n) \\ &+ P(A_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_4) + \dots + \\ &P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) - \dots \\ &+ (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n) \end{aligned}$$

Dogodki  $A_1, A_2, \dots, A_k$  in  $B$  so **neodvisni**, ce velja

$$P(A_1 \dots A_k) = P(A_1) \dots P(A_k)$$

*ali z drugimi besedami...* Verjetnost produkta paroma neodvisnih dogodkov je enaka produktu vrjetnosti teh dogodkov.

**2.2 Pogojna verjetnost** Verjetnost da se zgodi dogodek  $A$ , ce vemo, da se zgodi dogodek  $B$ , je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Dogodka  $A$  in  $B$  sta **neodvisna**, ce velja  $P(A|B) = P(A)$  ali  $P(AB) = P(A)P(B)$ . Pazi! Za par **nezdružljivih** dogodkov  $A$  in  $B$  pa velja  $P(AB) = 0$ ,  $P(A+B) = P(A) + P(B)$ ,  $P(A|B) = 0$  in  $P(B|A) = 0$ .

## 2.3 Popolna verjetnost

Dogodki  $H_1, H_2, \dots, H_n$  tvorijo **popoln sistem dogodkov**, ce se nobena dva dogodka ne moreta zgoditi hkrati in se vedno zgodi vsaj en od njih. Ce dogodki izpolnjujejo ta pogoj, potem po nacelu vključitev/izključitev velja:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$$

Zanje velja tudi **Bayesova formula**:

$$\begin{aligned} P(H_i|A) &= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)} \end{aligned}$$

## 2.4 Geometrijska verjetnost

Tocka je izbrana *na slepo* iz intervala, lika, telesa.. ce za vsak dogodek  $A$  velja:

$$P(A) = \frac{\text{mera izidov, ki so v } A}{\text{mera vseh izidov}}$$

Pri tem je mera lahko dolžina, ploscina, volumen,.. Basically upas da narises graf pravilno.

Splosno za vse nastete verjetnosti velja:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ in} \\ P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \end{aligned}$$

# 3 Dss in porazdelitve

## 3.1 Diskretna slučajna spremenljivka

Naj bo  $X$  diskretna slučajna spremenljivka  $\Rightarrow X$  je funkcija s končno ali stevno zalogo vrednosti  $a_1, a_2, \dots$ . Verjetnost, da  $X$  zavzame vrednost  $a_i \in R$ , označimo z  $P(X = a_i) = p_i$ . Porazdelitev  $X$  lahko podamo na dva enakovredna načina, in sicer s:

1. s **porazdelitveno shemo**

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

velja  $0 \leq p_i \leq 1$  in  $p_1 + p_2 + \dots = 1$

2. s **porazdelitveno funkcijo**

$$F_x(x) := P(X \leq x)$$

**3.2 Bernoullijeva** slučajna spremenljivka

$$X \sim B(p)$$

- V vsakem poskusu ima dogodek  $A$  verjetnost  $p$ ,  $X$  pa ima vrednost 1, ce se je zgodil dogodek  $A$ , in 0 sicer.

- $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$

## 3.3 Binomska slučajna spremenljivka

$$X \sim B(n, p)$$

- $X$  je stevilo pojavitev izida  $A$  v  $n$  ponovitvah poskusa
- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}$  za  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Izvajamo  $n$  neodvisnih slučajnih poskusov. V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek  $A$  s konstantno verjetnostjo  $p$ ,  $p = P(A)$ .  $X$  nam pove kolikokrat se je zgodil dogodek  $A$  v  $n$  poskusih. npr. kovanec vrzemo 10x, kolikšne so vrjetnosti, da pade cifra 0x, 2x, vsaj 3x,.. ali 5x vrzemo posteno kocko, izračunaj stevilo sestice, ki pade  $\Rightarrow B(5, \frac{1}{6})$

## 3.4 Geometrijska slučajna spremenljivka

$$X \sim G(p)$$

- $X$  je stevilo ponovitev poskusa do (vključno) prve ponovitve izida  $A$ .
- $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$  za  $k = 1, 2, \dots$
- $P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$  za  $k = 1, 2, \dots$

Izvajamo neodvisne slučajne poskuse, dokler se ne zgodi dogodek  $A$ . V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek  $A$  s **konstantno** verjetnostjo  $p$ ,  $p = P(A)$ . npr. koliko metov kocke je potrebnih, do prve sestice  $\Rightarrow G(1/6)$ .

## 3.5 Pascalova oz. negativna binomska slučajna spremenljivka

$$X \sim P(n, p)$$

- $X$  je stevilo ponovitev poskusa do (vključno)  $n$ -te ponovitve izida  $A$ .
- $P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} (1-p)^{k-n} p^n$  za  $k = n, n+1, n+2, \dots$

npr. koliko metov kocke je potrebnih, dokler sestica ne pade 5x  $\Rightarrow P(5, \frac{1}{6})$ . Stevilo metov kovanja, dokler grb ne pade 2x  $\Rightarrow P(2, \frac{1}{2})$ .

## 3.6 Hipergeometrijska slučajna spremenljivka

$$X \sim H(K, N-K, n)$$

- $X$  je stevilo elementov z določeno lastnostjo med izbranimi.

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ za } k = 0, 1, 2, \dots, \min\{n, R\}$$

V populaciji  $N$  imamo  $K$  elementov z določeno lastnostjo. Izbiramo brez vračanja  $n$  elementov. npr. koliko pikov med 7 kartami, ki smo jih na slepo izbrali izmed 16 kart, kjer so bli stirje piki. imamo 400 ljudi, 100 brezposlenih, naključno jih izberemo 10. Zanima nas kaksna verjetnost je da sta 2 izmed teh brezposelna  $\implies P(x = 2) = H(100, 400 - 100, 10)$ .

### 3.7 Poissonova slučajna spremenljivka

$$X \sim P(\lambda)$$

- $X$  je število ponovitev dogodka  $A$  na danem intervalu, pri čemer:
  - se dogodki pojavljajo neodvisno
  - povprečno število dogodkov  $\lambda$ , ki se pojavijo na določenem intervalu, je konstantno.
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$  za  $k = 0, 1, 2, \dots$

npr. če se dogodek pojavi v povprečju 3x na minuto, lahko uporabimo poissa za izračun kolikokrat se bo dogodek zgodil v 1/4h  $\implies P(45)$ . St avtomobilov, ki prečkajo cesto v 1min.

## 4 Zss in porazdelitve

**3.1 Zvezna slučajna spremenljivka** Naj bo  $X$  zvezna slučajna spremenljivka  $\implies X$  je realna funkcija, za katero obstaja integrabilna funkcija  $p_X : R \rightarrow [0, \infty)$ , tako da za vsak  $x \in R$  velja:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt$$

Funkciji  $p_X$  pravimo **gostota verjetnosti**, funkciji  $F_X$  pa **porazdelitvena** funkcija. Mnozici vrednosti, ki jih zavzame spremenljivka  $X$ , pravimo **zaloga vrednosti** in jo označimo z  $Z_X$ . Lastnosti:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1$
- $P(a < X < b) = \int_a^b p_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a), a, b \in R, a < b$
- $P(X = a) = 0, a \in R$  nqot

**ce** je funkcija zvezna v  $x$ , potem za njo velja tudi  $F'(x) = p(x)$ .

**3.2 Enakomerna zvezna** slučajna spremenljivka

$$X \sim U[a, b]$$

- $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \textit{sicer} \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$

Vsi izidi na intervalu  $[a, b]$  so enako verjetni.

**3.3 Eksponentna** slučajna spremenljivka

$$X \sim \epsilon(\lambda)$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$

Slučajna spremenljivka  $X$  - čas med zaporednima dogodkoma, pri čemer so dogodki neodvisni in se pojavijo s konstantno stopnjo  $\lambda$ .  $\lambda$  predstavlja povprečno število dogodkov na izbrano časovno enoto.

**3.4 Normalna** slučajna spremenljivka

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

- $p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  za  $x \in R$
- Za  $F_X(x)$  ne obstaja eksplicitna formula. Vrednost preberemo iz porazdelitvenih tabel.

Po centralnem limitnem izreku sta vsota in povprečje veliko neodvisnih, enako porazdeljenih spremenljivk, *normalno porazdeljeni*. Porazdelitev  $N(0, 1)$  je standardna normalna porazdelitev  $\implies$  potem za vsak  $x$  velja  $P(X < x) = 1 - P(X > x)$ .

**3.5 Gamma** slučajna spremenljivka

$$X \sim \Gamma(n, \lambda)$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} & x > 0 \end{cases}$

V povprečju imamo na časovno enoto  $\lambda$  ponovitev dogodka  $A$ ,  $X$  pa je čas med prvo in  $(n + 1)$  ponovitvijo dogodka  $A$ .

**3.5 Hi kvadrat** slučajna spremenljivka

$$X \sim \chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{n^{-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} & x > 0 \end{cases}$

Je vsota kvadratov  $n$  neodvisnih standardnih normalnih slučajnih spremenljivk.

### appx. Odvodi

- $\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$
- $x^n \rightarrow nx^{n-1}$
- $\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\sqrt[n]{x} \rightarrow \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $\sin(ax) \rightarrow a \cos ax$
- $\cos(ax) \rightarrow -a \sin(ax)$
- $\tan x \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$
- $e^ax \rightarrow ae^{ax}$
- $a^x \rightarrow a^x \ln a$
- $x^x \rightarrow x^x(1 + \ln x)$
- $\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$
- $\log_ax \rightarrow \frac{1}{x \ln a}$
- $\arcsin x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arccos x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctan x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$
- $\operatorname{arccot} x \rightarrow -\frac{1}{1+x^2}$