

# Vektorji in matrike

**1.1** Vektor je *urejena n-terica števil*, ki jo običajno zapisemo kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

**1.2** Produkt *vektorja*  $\vec{x}$  s skalarjem  $\alpha$  je vektor

$$\alpha \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

**1.3** Vsota *vektorjev*  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  je vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

**1.4** Nicelni vektor  $\vec{0}$  je tisti vektor, za katerega je  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  za vsak vektor  $\vec{a}$ . Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju  $\vec{a}$  priprada nasprotni vektor  $-\vec{a}$ , tako da je  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$  Razlika vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  je vsota  $\vec{a} + (-\vec{b})$  in jo navadno zapisemo kot  $\vec{a} - \vec{b}$ .

**Lastnosti vektorske vsote**

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (komutativnost)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  (asociativnost)
- $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$  (distributivnost)

**1.5** Linearna kombinacija vektorjev  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  je vsota

$$a\vec{x} + b\vec{y}$$

**1.6** Skalarni produkt vektorjev

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ je stevilo}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

**Lastnosti skalarnega produkta**

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$  (komutativnost)
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$  (aditivnost)
- $\vec{x} \cdot (a\vec{y}) = a(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (a\vec{x}) \cdot \vec{y}$  (homogenost)
- $\forall \vec{x}$  velja  $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

**1.7** Dolžina vektorja  $\vec{x}$  je

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

**1.8** Enotski vektor je vektor z dolžino 1.  
**1.9** Za poljubna vektorja  $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$  velja:

$$||\vec{u} \cdot \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||.$$

**1.10** Za poljubna vektorja  $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$  velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

**1.11** Vektorja  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  sta ortogonalna (ali pravokotna) natakno takrat, kadar je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

**1.12** Če je  $\phi$  kot med vektorjema  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$ , potem je

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| ||\vec{y}||} = \cos \phi$$

**1.13** Vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

**Lastnosti vektorskega produkta**

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$  (aditivnost)
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$  (!komutativnost)
- $(a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$  (homogenost)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b}$  je  $\perp$  na vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$
- $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \sin \phi$
- Dolžina vektorskega produkta je ploscina paralelograma, katerega vektorja oklepata

**1.14** Mesani produkt  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  vektorjev  $\vec{a}, \vec{b}$  in  $\vec{c}$  v  $R^3$  je skalarni produkt vektorjev  $\vec{a} \times \vec{b}$  in  $\vec{c}$ :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

**Lastnosti mesanega produkta**

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- $(x\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  (homogenost)
- $(\vec{a}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$
- Absolutna vrednost mesanega produkta  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  je enaka prostornini paralepipeda

**Razdalje**

Razdalja od točke  $P$  do ravnine, v kateri leži točka  $A$  :

$$\cos \phi = \frac{\vec{n} \cdot (r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}})}{||\vec{n}|| ||r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}}||} \text{ oz. } d = \left| \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} \cdot (r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}}) \right|$$

Razdalja od točke  $P$  do premice, katera gre skozi točko  $A$ :

$$d = \frac{||\vec{e} \times (r_{\vec{P}} - r_{\vec{A}})||}{||\vec{e}||}$$

**1.15** Matrika dimenzije  $m \times n$  je tabela  $m \times n$  števil, urejenih v  $m$  vrstic in  $n$  stolpcev:

$$A^{m \times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

**1.16** Matrika, katere elementi so enaki nič povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonalna matrika. Za diagonalno matriko je  $a_{ij} = 0$ , kadarkoli velja  $i \neq j$

**1.17** Matrika  $A^{n \times n}$  je spodnjetrokotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i < j$$

**1.18** Matrika  $A^{n \times n}$  je zgornjetrikotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ kadar je } i > j$$

**1.19** Matrika je trikotna, ce je zgornjetrikotna ali spodnjetrokotna.

**1.20** Dve matriki  $A$  in  $B$  sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

$$A^{m \times n} = B^{p \times q} \implies m = p \text{ in } n = q, a_{ij} = b_{ij} \text{ za vsak } i = 1, \dots, m \text{ in } j = 1, \dots, n$$

**1.21** Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnožimo s skalarjem

$$aA^{m \times n} = \begin{bmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} & \dots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} & \dots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{m1} & ax_{m2} & ax_{m3} & \dots & ax_{mn} \end{bmatrix}$$

**1.22** Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da seštejemo istolezne elemente obeh matrik:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

**Osnovne matricne operacije**

- $A + B = B + A$  (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$  (asociativnost)
- $a(A+B) = aA + aB$  (množenje s skalarjem)
- $A + (-A) = 0$
- $x(yA) = (xy)A$  in  $1 \cdot A = A$

**1.23** Transponirana matrika k matriki  $A$  reda  $m \times n$  je matrika reda  $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{m1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

### Lastnosti transponiranja matrik

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(xA)^T = xA^T$
- $(A^T)^T = A$

**1.24** Produkt matrike A in vektorja  $\vec{x}$  je linearna kombinacija stolpcev matrike A, utezi linearne kombinacije so komponente vektorja  $\vec{x}$ :

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

**1.25** Produkt vrstice  $\vec{x}$  z matriko A je linearna kombinacija vrstic matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice  $\vec{y}$ :

$$\vec{y} \cdot A = [y_1, y_2, y_3] \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

**1.26** Produkt matrik A in B je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike A s stolpci matrike B:

$$AB = A [b_1, b_2, \dots, b_n] = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n]$$

**1.27** Element  $c_{ij}$  v  $i$ -ti vrstici in  $j$ -tem stolpcu produkta  $C = AB$  je skalarni produkt  $i$ -te vrstice A in  $j$ -tega stolpca matrike B

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

**1.28** Produkt matrik A in B je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike A z matriko B:

$$[i - \text{ta vrstica } A] B = [i - \text{ta vrstica } AB]$$

### Lastnosti matricnega produkta

- $AB \neq BA$  (!komutativnost)
- $(xA)B = x(AB) = A(xB)$  (homogenost)
- $C(A+B) = CA + CB$  (distributivnost)
- $A(BC) = (AB)C$  (asociativnost)
- $(AB)^T = B^T A^T$

**1.29** Vrstice matrike A z  $n$  stolpci naj bodo  $a^1, \dots, a^n$ , stolpci matrike B z  $n$  vrsticami pa  $a_1, \dots, a_n$ . Potem je

$$AB = a^1b_1 + \dots + a^nb_n$$

**1.30** Če delitev na bloke v matriki A ustreza delitvi v matriki B, potem lahko matriki pomnožimo bločno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

**1.31** Kvadratna matrika  $I_k$  reda  $k \times k$ , ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko A reda  $m \times n$  velja  $AI_n = A$  in  $I_mA = A$ . Matrika  $I_k$  se imenuje enotska ali identična matrika.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

## 2 Sistemi linearnih enačb

**2.1** Kvadratna matrika A je obrnljiva, če obstaja taka matrika  $A^{-1}$ , da je

$$AA^{-1} = I \text{ in } A^{-1}A = I$$

Matrika  $A^{-1}$  (če obstaja) se imenuje matriki A inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna.

**2.2** Kvadratna matrika reda  $n$  je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo  $n$  pivotov.

**2.3** Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

**2.4** Inverzna matrika inverzne matrike  $A^{-1}$  je matrika A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

**2.5** Če je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enačb  $A\vec{x} = \vec{b}$  edino resitev  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

**2.6** Če obstaja nenicelna resitev  $\vec{x}$  enačbe  $A\vec{x} = \vec{0}$ , matrika A ni obrnljiva (je singularna).

**2.7** Če sta matriki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt  $A \cdot B$  in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

**Pozor!** Pravilo

$$(AB)^p = A^p B^p$$

velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej  $AB = BA$ .

**2.8** Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

**2.9** Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi  $a_{ii}$  je diagonalna matrika, ki ima na diagonalni elemente  $a_{ii}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

**2.10** Za izračun inverza matrike A, uporabimo gaussovo eliminacijo nad matriko  $[A|I]$

$$[A|I] = [I|A^{-1}]$$

**2.11** Matrika A je simetrična  $\Leftrightarrow A^T = A$ . Za elemente  $a_{ij}$  simetrične matrike velja  $a_{ij} = a_{ji}$ .

**2.12** Če je matrika A simetrična in obrnljiva, je tudi  $A^{-1}$  simetrična.

**2.13** Če je R poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta  $R^T R$  in  $R R^T$  simetrični matriki.

## 3 Vektorski prostori

**3.1** Realni vektorski prostor V je množica "vektorjev" skupaj z pravili za

- seštevanje vektorjev,
- množenje vektorja z realnim številom (skalarjem)

Če sta  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  poljubna vektorja v V, morajo biti v V tudi

- vsota  $\vec{x} + \vec{y}$  in
- produkti  $\alpha\vec{x}$  za vse  $\alpha \in R$

V vektorskem prostoru V morajo biti tudi VSE linearne kombinacije  $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

**Pravila za operacije v vektorskih prostorih**

Operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoščati naslednjim pravilom:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$  (komutativnost)
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$  (asociativnost)
- obstaja en sam nenicelni vektor  $\vec{0}$ , da velja  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- za vsak  $\vec{x}$  obstaja natanko en  $-\vec{x}$ , da je  $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
- $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$  (distributivnost)
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

**3.2** Podmnožica U vektorskega prostora V je *vektorski podprostor*, če je za vsak par vektorjev  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  iz U in vsako realno število  $\alpha$  tudi

- $\vec{x} + \vec{y} \in U$  in
- $\alpha\vec{x} \in U$ .

**3.3** Množica vektorjev U je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz U tudi v U.