1 Vektorji in matrike

1.1 Vektor je *urejena n-terica stevil*, ki jo obicajno zapisemo kot stolpec

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1.2 Produkt *vektorja* $\vec{x}$ s skalarjem α je vektor

$$\alpha\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

1.3 Vsota *vektorjev* $\vec{x}$ in $\vec{y}$ je vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

1.4 Nicelni vektor $\vec{0}$ je tisti vektor, za katerega je $\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$ za vsak vektor $\vec{a}$. Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju $\vec{a}$ pripada nasprotni vektor -$\vec{a}$, tako da je $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ Razlika vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vsota $\vec{a}+(-\vec{b})$ in jo navadno zapisemo kot $\vec{a} - \vec{b}$.

Lastnosti vektorske vsote

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutativnost)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (asociativnost)
- $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$ (distributivnost)

1.5 Linearna kombinacija vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{y}$ je vsota

$$a\vec{x} + b\vec{y}$$

1.6 Skalarni produkt vektorjev

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ je stevilo}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Lastnosti skalarnega produkta

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$ (aditivnost)
- $\vec{x} \cdot (a\vec{y}) = a(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (a\vec{x}) \cdot \vec{y}$ (homogenost)
- $\forall \vec{x}$ *velja* $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

1.7 Dolzina vektorja $\vec{x}$ je

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

1.8 Enotski vektor je vektor z dolzino 1.

1.9 Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||.$$

1.10 Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ velja:

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

1.11 Vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ sta ortogonalna (ali pravokotna) natakno takrat, kadar je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

1.12 Ce je ϕ kot med vektorjema $\vec{x}$ in $\vec{y}$, potem je

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| ||\vec{y}||} = \cos\phi$$

1.13 Vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

Lastnosti vektorskega produkta

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (aditivnost)
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ (!komutativnost)
- $(a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$ (homogenost)
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ *je* $\perp$ *na vektorja* $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$
- $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \sin\phi$
- Dolzina vektorskega produkta je ploscina paralelograma, katerega vektorja oklepata

1.14 Mesani produkt$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ v R^3 je skalarni produkt vektorjev $\vec{a} \times \vec{b}$ in $\vec{c}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Lastnosti mesanega produkta

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- $(x\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (homogenost)
- $(\vec{a}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$
- Absolutna vrednost mesanega produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enaka prostornini paralepipeda

Razdalje

Razdalja od tocke P do ravnine, v kateri lezi tocka A :

$$\cos\phi = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r_P} - \vec{r_A})}{||\vec{n}|| ||\vec{r_P} - \vec{r_A}||} \text{ oz.}$$

$$d = |\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}(\vec{r_P} - \vec{r_A})|$$

Razdalja od tocke P do premice, katera gre skozi tocko A:

$$d = \frac{||\vec{e} \times (\vec{r_P} - \vec{r_A})||}{||\vec{e}||}$$

1.15 Matrika dimenzije $m \times n$ je tabela $m \times n$ stevil, urejenih v m vrstic in n stolpcev:

$$A^{m \times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \ldots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

1.16 Matrika, katere elementi so enaki nic povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonalna matrika. Za diagonalno matriko je $a_{ij} = 0$, kadarkoli velja $i \neq j$

1.17 Matrika $A^{n \times n}$ je spodnjetrikotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ } kadar\ je\ i < j$$

1.18 Matrika $A^{n \times n}$ je zgornjetrikotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

$$a_{ij} = 0 \text{ } kadar\ je\ i > j$$

1.19 Matrika je trikotna, ce je zgornjetrikotna ali spodnjetrikotna.

1.20 Dve matriki A in B sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

$$A^{m \times n} = B^{p \times q} \implies m = p \text{ in } n = q,$$
$$a_{ij} = b_{ij} \text{ } za\ vsak\ i = 1, ..., m \text{ in } j = 1, ..., n$$

1.21 Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnozimo s *skalarjem*

$$aA^{m \times n} = \begin{bmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} & \ldots & ax_{1n} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} & \ldots & ax_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax_{m1} & ax_{m2} & ax_{m3} & \ldots & ax_{mn} \end{bmatrix}$$

1.22 Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da sestejemo istolezne elemente obeh matrik:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & ax_{12} + b_{12} & \ldots & ax_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & ax_{22} + b_{22} & \ldots & ax_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & ax_{m2} + b_{m3} & \ldots & ax_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Osnovne matricne operacije

- $A + B = B + A$ (komutativnost)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativnost)
- $a(A+B) = aA+aB$ (mnozenje s skalarjem)
- $A + (-A) = 0$
- $x(yA) = (xy)A$ *in* $1 \cdot A = A$

1.23 Transponirana matrika k matriki A reda $m \times n$ je matrika reda $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Lastnosti transponiranja matrik

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(xA)^T = xA^T$
- $(A^T)^T = A$

1.24 Produkt matrike A in vektorja $\vec{x}$ je linearna kombinacija stolpcev matrike A, utezi linearne kombinacije so komponente vektorja $\vec{x}$:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

1.25 Produkt vrstice $\vec{x}$ z matriko A je linearna kombinacija vrstic matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice $\vec{y}$:

$$\vec{y} \cdot A = \begin{bmatrix} y_1, y_2, y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

1.26 Produkt matrik A in B je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike A s stolpci matrike B:

$$AB = A\begin{bmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \end{bmatrix}$$

1.27 Element c_{ij} v $i-ti$ vrstici in $j-tem$ stolpcu produkta C = AB je skalarni produkt $i-te$ vrstice A in $j-tega$ stolpca matrike B

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

1.28 Produkt matrik A in B je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike A z matriko B:

$$\begin{bmatrix} i - ta\ vrstica\ A \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} i - ta\ vrstica\ AB \end{bmatrix}$$

Lastnosti matricnega produkta

- $AB \neq BA$ (!komutativnost)
- $(xA)B = x(AB) = A(xB)$ (homogenost)
- $C(A+B) = CA+CB$ (distributivnost)
- $A(BC) = (AB)C$ (asociativnost)
- $(AB)^T = B^T A^T$

1.29 Vrstice matrike A z n stolpci naj bodo $a^1, \dots, a^n$, stolpci matrike B z n vrsticami pa $a_1, \dots, b_n$. Potem je

$$AB = a^1 b_1 + \dots + a^n b_n$$

1.30 Ce delitev na bloke v matriki A ustreza delitvi v matirki B, potem lahko matriki pomnozimo blocno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

1.31 Kvadratna matrika I_k reda $k \times k$, ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko A reda $m \times n$ velja $AI_n = A$ in $I_m A = A$. Matrika I_k se imenuje enotska ali identicna matirka.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

2 Sistemi linearnih enacb

2.1 Kvadratna matrika A je obrnljiva, ce obstaja taka matrika A^{-1}, da je

$$AA^{-1} = I\ in\ A^{-1}A = I$$

Matrika A^{-1} (ce obstaja) se imenuje matriki A inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna.

2.2 Kvadratna matirka reda n je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo n pivotov.

2.3 Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

2.4 Inverzna matrika inverzne matrike A^{-1} je matrika A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2.5 Ce je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ edino resitev $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

2.6 Ce obstaja nenicelna resitev $\vec{x}$ enacbe $A\vec{x} = \vec{0}$, matrika A ni obrnljiva(je singularna).

2.7 Ce sta matirki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt $A \cdot B$ in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Pozor! Pravilo

$$(AB)^p = A^p B^p$$

velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej $AB = BA$.

2.8 Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2.9 Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi a_{ii} je diagonalna matrika, ki ima na diagonali elemente a_{ii}^{-1}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

2.10 Za izracun inverza matrike A, uporabimo gausovo eliminacijo nad matriko $\begin{bmatrix} A | I \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A | I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I | A^{-1} \end{bmatrix}$$

2.11 Matrika A je simetricna $\Leftrightarrow A^T = A$. Za elemente a_{ij} simetricne matirke velja $a_{ij} = a_{ji}$.

2.12 Ce je matrika A simetricna in obrnljiva, je tudi A^{-1} simetricna.

2.13 Ce je R poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta $R^T R$ in RR^T simetricni matriki.

3 Vektorski prostori

3.1 Realni vektorski prostor V je mnozica "vektorjev" skupaj z pravili za

- sestevanje vektorjev,
- mnozenje vektorja z realnim stevilom (skalarjem)

Ce sta $\vec{x}$ in $\vec{y}$ poljubna vektorja v V, morajo biti v V tudi

- vsota $\vec{x} + \vec{y}$ in
- produkti $\alpha\vec{x}$ za vse $\alpha \in R$

V vektorskem prostoru V morajo biti tudi VSE linearne kombinacije $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

Pravila za operacije v vektorskih prostorih

Operaciji sestevanja vektorjev in mnozenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoscati naslednjim pravilom:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (asociativnost)
- obstaja en sam nenicelni vektor $\vec{0}$, da velja $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- za vsak $\vec{x}$ obstaja natanko en $-\vec{x}$, da je $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
- $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ (distributivnost)
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

3.2 Podmnozica U vektorskega prostora V je *vektorski podprostor*, ce je za vsak par vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{y}$ iz U in vsako realno stevilo α tudi

- $\vec{x} + \vec{y} \in U$ in
- $\alpha\vec{x} \in U$.

3.3 Mnozica vektorjev U je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz U tudi v U.

Lastnosti vektorskih podprostorov

- Vsak vektorski podprostor nujno vsebuje nicelni vektor $\vec{0}$

- Presek dveh podprostorov vektorskega podprostora je tudi podprostor

3.4 Stolpicni prostor C(A) matrike $A \in R^{m \times n}$ je tisti podprostor vektorskega prostora R^m, ki vsebuje natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike A.
neformalno: linearna ogrinjaca stolpcev matrike (npr. ce imas 5 stolpcev pa lahko 2 zapises kot linearno kombinacijo ostalih 3 bo imel column space 3 elemente)

3.5 Sistem linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je reslijv natanko tedaj, ko je vektor $\vec{b} \in C(A)$

3.6 Naj bo matrika $A \in R^{m \times n}$. Mnozica resitev homogenega sistema linearnih enacb je podprostor v vektorskem prostoru R^n.

3.7 Mnozica vseh resitev sistema linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ se imenuje nicelni prostor matirke A. Oznacujemo ga z N(A).
neformalno: mnozica vektorjev, ki se z neko matriko zmnozijo v nicelni vektor

3.8 Ce je matrika A kvadratna in ni obrnljiva, potem N(A) vsebuje samo vektor $\vec{0}$

3.9 Matrika ima *stopnicasto* obliko, kadar se vsaka od njenih vrstic zacne z vsaj eno niclo vec kot prejsnja vrstica.

3.10 Prvi element, razlicen od nic v vsaki vrstici, je *pivot*. Stevilo pivotov v matriki se imenuje rang matrike. Rang matrike A zapisemo kot $rang(A)$.

3.11 Rang matrike ni vecji od stevila vrstic in ni vecji od stevila stolpcev matrike.

3.12

Stevilo prostih neznank matrike = st. stolpcev - rang matrike

3.13

1. Visoka in ozka matrika $(m > n)$ ima poln stolpicni rang, kadar je $rang(A) = n$
2. Nizka in siroka matrika $(m < n)$ ima poln vrsticni rang, kadar je $rang(A) = m$
3. Kvadratna matrika $(n = m)$ ima poln rang, kadar je $rang(A) = m = n$

3.14 Za vsako matriko A s polnim stolpicnim rangom $r = n \leq m$, velja:

1. Vsi stolpci A so pivotni stolpci
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ nima prostih neznank, zato tudi nima posebnih resitev
3. Nicelni prostor $N(A)$ vsebuje le nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$
4. Kadar ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ resitev(kar ni vedno res!), je resitev ena sama
5. Reducirana vrsticna oblika matrike (A) se da zapisati kot

$$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times n \; enotska \; matrika \\ m - n \; vrstic \; samih \; nicel \end{bmatrix}$$

3.15 Za vsako matriko A s polnim vrsticnim rangom $r = m \leq n$ velja:

1. Vse vrstice so pivotne, ni prostih vrstic in U (stopnicasta oblika) in R(reducirana stopnicasta oblika) nimata nicelnih vrstic
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je resljiv za vsak vektor $\vec{b}$
3. Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ ima $n - r = n - m$ prostih neznank, zato tudi prav toliko posebnih resitev
4. Stolpicni prostor $C(A)$ je ves prostor R^m

3.16 Za vsako kvadratno matriko A polnega ranga (rang(A) = m = n) velja:

1. Reducirana vrsticna oblika matrike A je enotska matrika
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ ima natancno eno resitev za vsak vektor desnih strani $\vec{b}$
3. Matrika A je obrnljiva
4. Nicelni prostor matrike A je samo nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$
5. Stolpicni prostor matrike A je cel prostor $C(A) = R^m$

3.17 Vektorji $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ so linearno neodvisni, ce je

$$0\vec{x_1} + 0\vec{x_2} + \cdots + 0\vec{x_n}$$

edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka vektorju $\vec{0}$. Vektorji $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ so linearno odvisni, *ce niso linearno neodvisni.*

3.18 Ce so vektorji *odvisni*, lahko vsaj enega izrazimo z ostalimi.

3.19 Ce je med vektorji $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ tudi nicelni vektor, so vektorji *linearno odvisni.*

3.20 Vsaka mnozica n vektorjev iz R^n je odvisna, kadar je $n > m$.

3.21 Stolpci matrike A so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima homogena enacba $A\vec{x} = \vec{0}$ edino resitev $\vec{x} = \vec{0}$.

3.22 Kadar je $rang(A) = n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisni. Kadar je pa $rang(A) < n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisni.

3.23 Kadar je $rang(A) = m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisne. Kadar je pa $rang(A) < m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisne.

3.24 Vrsticni prostor matrike A je podprostor v R^n, ki ga razpenjajo vrstice matrike A.

3.25 Vrsticni prostor matrike A je $C(A^T)$, stolpicni prostor matrike A^T.

3.26 *Baza vektorskega prostora* je mnozica vektorjev, ki

1. je linearno neodvisna in
2. napenja cel prostor.

3.27 Vsak vektor iz vektorskega prostora lahko na en sam nacin izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

3.28 Vektorji $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ so baza prostora R^n natanko tedaj, kadar je matrika, sestavljena iz stolpcev $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$, obrnljiva.

3.29 Prostor R^n ima za $n > 0$ neskoncno mnogo razlicnih baz.

3.30 Ce sta mnozici vekotrjev $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m}$ in $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ obe bazi istega vektorskega prostora, potem je $m = n \implies$ vse baze istega vektorskega prostora imajo isto stevilo vektorjev.

3.31 *Dimenzija* vektroskega prostora je stevilo baznih vektorjev.

3.32 Dimenziji stolpicnega prostora $C(A)$ in vrsticnega prostora $C(A^T)$ sta enaki rangu matrike A

$$dim(C(A)) = dim(C(A^T)) = rang(A).$$

3.33 Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ matrike A z n stolpci in ranga r je enaka $dim(N(A)) = n - r$.

3.34 Stolpicni prostor $C(A)$ in vrsticni prostor $C(A^T)$ imata oba dimenzijo r. Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ je $n - r$, Dimenzija levega nicelnega prostora $N(A^T)$ pa je $m - r$.

3.35 Vsako matriko ranga 1 lahko zapisemo kot produkt(stolpcnega) vektorja z vrsticnim vektorjem $A = \vec{u}\vec{v}^T$.