

# 1 Osnove

## 1.1 Ponovitev logaritmov

- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
- $x = b^y \implies \log_b x = y$
- $\log_2 x = \log x$
- $0 \log 0 = 0$

## 1.2 Entropija

je povprečje vseh lastnih informacij:

$$H(X) = \sum_{i=1}^n p_i I_i = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

Lastnosti: je zvezna, simetrična funkcija (vrstni red  $p_i$  ni pomemben, sestevanje je komutativno). Je vedno večja od 0 ( $p_i \geq 0 \rightarrow -p_i \log p_i \geq 0 \rightarrow H(X) \geq 0$ ) in navzgor omejena z  $\log n$ .

Ce sta dogodka **neodvisna** velja aditivnost:  $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$ .

Vec zaporednih dogodkov neodvisnega vira:  $X^l = X \times \dots \times X \rightarrow H(X^l) = lH(X)$ .

# 2 Kodi

## 2.1 Uvod

**Kod** sestavljajo *kodne zamenjave*, ki so sestavljene iz znakov **kodne abecede**. Stevilo znakov v kodni abecedi označujemo z  $r$ .

Ce so  $\{p_1, \dots, p_n\}$  verjetnosti znakov  $\{s_1, \dots, s_n\}$  osnovnega sporočila in  $\{l_1, \dots, l_n\}$  dolzine prejetih kodnih zmanjav, je povprečna dolžina kodne zamenjave

$$L = \sum_{i=1}^n p_i l_i$$

## 2.2 Tipi kodov

- **optimalen** - ce ima najmanjšo možno dolžino kodnih zamenjav
- **idealen** - ce je povprečna dolžina kodnih zamenjav enaka entropiji
- **enakomeren** - ce je dolžina vseh kodnih zamenjav enaka
- **enoznacen** - ce lahko poljuben niz znakov dekodiramo na en sam način
- **trenuten** - ce lahko osnovni znak dekodiramo takoj, ko sprejmemo celotno kodno zamenjavo

## 2.3 Kraftova neenakost

Za dolzine kodnih zamenjav  $\{l_1, \dots, l_n\}$  in  $r$  znaki kodne abecede obstaja trenuten kod, iff

$$\sum_{i=1}^n r^{-l_i} \leq 1$$

## 2.4 Povp. dolžina, učinkovitost

Najkrajše kodne zamenjave imamo, ce velja:

$$H_r(X) = L \rightarrow l_i = \lceil -\log_r p_i \rceil$$

Učinkovitost koda:

$$\eta = \frac{H(X)}{L \log_r}, \eta \in [0, 1]$$

Kod je **gospodaren**, ce je  $L$  znotraj:

$$H_r(X) \leq L < H_r(X) + 1$$

kjer je  $H_r(X)$ :

$$H_r(X) = - \sum_{i=1}^n \frac{\log p_i}{\log_r} = \frac{H(X)}{\log_r}$$

## 2.5 Shannonov prvi teorem

Za nize neodvisnih znakov dooline  $n$  obstajajo kodi, za katere velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n} = H(X)$$

pri cemer je  $H(X)$  entropija vira  $X$ .

Postopek kodiranja po Shannonu:

1. znake razvrstimo po padajocih verjetnostih
2. določimo stevilo znakov v vsaki kodni zamenjavi ( $l_k$ )
3. za vse simbole izračunamo kumulativne verjetnosti ( $P_k = \sum_{i=1}^{k-1} p_i$ )
4.  $P_k$  pretvorimo v bazo  $r$ . Kodno zamenjavo predstavlja prvih  $l_k$  znakov necellega dela stevila

## 2.6 Fanojev kod

Postopek kodiranja:

1. znake razvrstimo po padajocih verjetnostih
2. znake razdelimo v  $r$  cim bolj enako verjetnih skupin
3. Vsaki skupini priredimo enega od  $r$  znakov kodne abecede
4. Deljenje ponovimo na vsaki od skupin. Postopek ponavljamo, dokler je mogoče

## 2.7 Huffmanov kod

Huffmanov postopek kodiranja poteka od spodaj navzgor (Pri Fanoju je ravno obratno). Pri huffmanovem kodu imamo dve fazi:

1. Združevanje
  - (a) Posici  $r$  najmanj verjetnih znakov in jih združi v sestavljeni znak, katerega verjetnost je vsota verjetnosti vseh znakov

- (b) Preostale znake skupaj z novo sestavljenim znakom spet razvrsti
- (c) Postopek ponavlja dokler ne ostane samo  $r$  znakov

## 2. Razdruževanje

- (a) Vsakemu od preostalih znakov priredi po en znak kodirne abecede
- (b) Vsak sestavljeni znak razstavi in mu priredi po en znak kodirne abecede
- (c) Ko zmanjka sestavljenih znakov, je postopek zaključen

Pred kodiranjem, je vedno pametno preveriti, ce imamo zadostno stevilo znakov. Veljati mora:

$$n = r + k(r - 1), k \geq 0$$

Ce imamo premalo znakov, jih po potrebi dodamo s verjetnostjo  $p = 0$ .

Huffmanov kod lahko razsirimo tako, da vec osnovnih znakov združujemo v sestavljene znake  $\rightarrow$  bolj učinkoviti kodi. Vendar naltimo na nevarnost kombinacijske eksplozije.

## 2.8 Aritmetični kod

Je **hiter** in **blizu optimalnemu** kodu, ter manj učinkovit kot Huffmanov, vendar se izogne kombinacijski eksploziji. Vsak niz je predstavljen kot realno stevilo  $0 \leq R < 1$ , kar nam pove, da daljši kot bo niz, bolj natančno mora biti podano naravno stevilo  $R$ .

Postopek kodiranja (znakov ni potrebno razvrstiti):

1. Zacetemo z intervalom  $[0, 1)$
2. Izbrani interval razdelimo na  $n$  podintervalov, ki se ne prekrivajo. Sirine podintervalov ustrezajo verjetnostim znakov. Vsak podinterval predstavlja en znak
3. Izberemo podinterval, ki ustreza iskanemu znaku
4. Ce niz se ni koncan, izbrani podinterval ponovno razdelimo (bne 2.tocka)
5. Niz lahko predstavimo s poljubnim realnim stevilom v zadnjem podintervalu

Ko dobimo realni interval, ga samo se pretvorimo v binarnega s pomocjo klasicnega pretvarjanja iz dec v bin stevilski sistem.

2.9 Kod Lempel-Ziv (LZ77)

Stiskanje temelji na osnovi slovarja, tako, da ne potrebujemo racunati verjetnosti za posamezne znake. **Kodirnik** med branjem niza gradi slovar, in **dekodirnik** med branjem kodnih zaamenjav rekonstruira slovar in znake.

**Kodiranje:** uporablja drseca okna, znaki se premikajo iz desne na levo. Referenca je podana kot trojcek:

- odmik - razdalja do zacetka enakega podniza v medpomnilniku
- dolzina enakega podniza
- naslednji znak

npr. (0, 0, A) - ni ujemanja, (4, 3, B) - 4 znake nazaj se ponovi 3 znakovni podniz, ki se nato zakljuci s B.

**dekodiranje:** sledimo kodnim zamenjavam

2.10 Deflate

Gre za predelan LZ77. Uporablja pare (odmik, dolzina). Ce ujemanja v kodni tabeli ni, zapise kar znak. Uporablja dve kodni tabeli:

- **tabela za znake in dolzine** - 285 simbolov (0-255 za osnovne znake, 256 konec bloka, 257-285 kodira dolzine) Kodne zamenjave brez dodatnih bitov, se zakodira s Huffmanom.

- **tabela odmikov**

Niz znakov se razdeli na bloke(64k) vsak blok se kodira na enega od treh nacinov:

1. **brez stiskanja** osnovni znaki se prepisejo
2. **stiskanje s staticnim Huffmanom** (verjetnosti podane vnaprej), Huffmanovo drevo ni zakodirano v bloku
3. **stiskanje s Huffmanom** izracunamo verjetnosti za vsak blok

Glava posameznega bloka: 1bit - zadnji/ni zadnji blok + 2bita tip stiskanja + pri (3) se Huffmanovo drevo Ker Huffmanovo drevo ni enolicno, uvedemo kanonicni Huffmanov kod. Postopek:

1. znake razvrstimo najprej po dolzinah kodnih zamenjav in nato po abecedi
2. prvi simbol ima same nicle
3. vsakemu naslednjemu znaku dodelimo naslednjo binarno kodo (prejsnji + 1)
4. ce je kodna zamenjava daljsa od bina-rne kode stevila, na koncu pripnemo nico
5. ponavljaj (3) do konca

Na taksen nacin dosežemo, da je potrebno kodirati samo dolzine kodnih zamenjav.

2.11 Kod Lempel-Ziv (LZW)

Osnovni slovar je podan in ga sporti dopon-jujemo. Alogritem za **kodiranje**:

```
N = ""
ponavljaj:
  preberi naslednji znak z
  ce je [N,z] v slovarju:
    N = [N, z]
  drugace:
    izpisi indeks k niza N
    dodaj [N, z] v slovar
    N = z
  izpisi indeks k niza N
```

Algoritem za **dekodiranje**:

```
preberi indeks k
poisci niz N, ki ustreza indeksu k
izpisi N
L = N
ponavljaj:
  preberi indeks k
  ce je k v slovarju:
    poisci niz N
  drugace:
    N = [L, L(1)]
  izpisi N
  v slovar dodaj [L, N(1)]
  L = N
```

LZW doseze optimalno stiskanje, približa se entropiji.

2.12 Verizno kodiranje ali RLE (run lenght encoding)

Namesto originalnih podatkov, sharnjujemo dolzino verige (fffeef → 3f2e1f). Problemu, ko se podatki ne ponavljajo, se izognemo tako, da izvedemo kombinacijo direktnega kodi-ranja in kodiranja RLE.

2.13 Stiskanje z izgubami

S taksnim nacinom stiskanja lahko dosežemo veliko boljša kompresijska razmerja, vendar izgubimo podatke. Zato ga uporabljamo samo s formati, kjer se ne ukvarjamo z integriteto podatkov(MP3, MPEG, JPEG, ...). Postopki kodiranj znanih formatov:

- **JPEG**
  1. priprava slike → ker je svetlost bol pomembna, je barvna resolucija obicajno zmanjsana ( $YC_R C_B$ )
  2. aproksimacija vsake od treh kom-ponent s 2D DCT
  3. kvantizacija → podatki ki bolj izstopajo so shranjeni manj natančno kot tisti ki so staticni
  4. kodiranje blokov s pomocjo en-tropije
  5. RLE cik-cak po sliki

6. RLE kodiramo z Huffmanom ali Aritmenticnim kodom

- **MP3**

1. Modified DCT
2. odstranitev za cloveka neslisnih frekvenc
3. stereo, ce sta si L in R pretvorimo v mono
4. Huffman na koncu

- **MPEG**

1. uvodno kodiranje → celotna slika JPEG
2. nato pa kodiramo samo spre-membe, ki so se zgodile v sliki JPEG s pomocjo vektorja pre-mika. V primeru, da je prevec raz-lik, se ponovno kodira JPEG slika.

2.14 Kompresijsko razmerje

Izracunamo ga po formuli → stisnjeni binarni zapis C(M) / binarni zapis dokumenta (M):

$$R = C(M)/M$$

3 Kanali

3.1 Uvod

Kanali so strukture, ki opisujejo medsebojno povezanost. Kanal prenasaa informacijo o spe-menljivki X do spremenljivke Y. Matemat-icno ga opisemo s **pogojnimi verjetnostmi**, ki povezujejo izhodne verjetnosti z vhodom.

3.2 Diskretni kanal brez spom-ina

Povezuje diskretni nakljuicni spremenljivki, s koncno mnozico stanj  $X = \{x_1, \dots, x_r\}$  in  $Y = \{y_1, \dots, y_s\}$ . Obema nakljicnima spre-menljivkama pripadajo tudi posamezne ver-jetnosti  $P_X = \{p(x_1), \dots, p(x_r)\}$  in  $P_Y = \{p(y_1), \dots, p(y_s)\}$ . Kjer velja, da je vsota posamezne mnozice verjetnosti enaka 1. Kanal je definiran kot mnozica **pogojnih verjetnosti**

$$p(y_j|x_i).$$

Pogojna verjetnost nam pove verjetnost za dogodek  $y_j$  na izhodu iz kanala, ce je na vhodu v kanal dogodek  $x_i$ . Brez spomina je zato, ker so pogojne vrjetnosti konstantne in torej neodvisne od prehodnih simbolov, velja

$$\sum_j p(y_j|x_i) = 1.$$

Kanal popolnoma podamo z  $r \times s$  pogojnimi verjetnostmi.

3.2.1 Binarni simetrični kanal (BSK)

Gre za poseben primer diskretnega kanala brez spomina. Napaka kanala je  $p$ , saj se z verjetnostjo  $p$  znak prenese v napacnega.

P\_k = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}

3.3 Pogojna entropija

Pogojna entropija spremenljivke  $Y$  pri znanem  $X$  se zapiše kot  $H(Y|X)$ . Vzemimo, da se je zgodil dogodek  $x_i \in X$ . Entropija dogodka  $Y$  je potem

H(Y|x\_i) = - \sum\_{j=1}^s p(y\_j|x\_i) \log(p(y\_j|x\_i)).

Velja:  $0 \leq H(Y|x_i)$ .  
Ce pa o dogodku  $X$  vemo le da se je zgodil, se lahko spomnemo na vis in uporabimo **vezano verjetnost** dogodkov  $X$  in  $Y$ , ki pravi:

p(x\_i, y\_i) = p(x\_j|x\_i)p(x\_i)

Za entropijo:

H(Y|X) = \sum\_i p(x\_i)H(Y|x\_i) = - \sum\_{i=1}^r \sum\_{j=1}^s p(x\_i, y\_i) \log p(y\_i|x\_i)

Splosno velja:  $0 \leq H(Y|X) \leq H(Y)$ , ce poznamo spremenljivko  $X$ , se nedolocenost  $Y$  ne more povecati (lahko se pomanjsa).

3.4 Vezana entropija spremeljivk

Vezana entropija nakljucnih spremenljivk  $X$  in  $Y$  je entropija para  $(X, Y)$ . Pomembne zveze:

- $p(x_i, y_j) = p(y_j|x_i)p(x_i)$ ,
- $\sum_j p(x_i, y_j) = p(x_i)$ ,
- $\sum_i p(x_i, y_j) = p(y_j)$ ,
- $\sum_{i,j} p(x_i, y_j) = 1$

Velja:  $H(X, Y) = H(Y|X) + H(X)$ , kar nam pove, da ce najprej izvemo, kaj se je zgodilo v dogodku  $X$  in potem dobimo se dodatne informacije od dogodku  $Y$ , vemo vse.

3.4.1 Obrat kanala

Ker velja tudi  $H(X, Y) = H(X|Y) + H(Y)$ , kanal lahko **obrnemo** (sepravi vhod  $Y$  in izhod  $X$ ). Pri tem ne obracamo fizicnega procesa, ampak samo verjetnostno strukturo, ki definira kanal. **Pogoj:** poznati moramo vhodne verjetnosti. Iz njih lahko dolocimo izhodne verjetnosti, ki jih lahko uporabimo kot vhodne verjetnosti v obrnjeni kanal. Lastnosti:

- izracun izhodnih verjetnosti  $p(y_j) = \sum_i p(y_j, x_i)p(x_i)$
- obratne pogojne vrjetnosti  $p(x_i, y_j) = p(y_j|x_i)p(x_i) = p(x_i|y_j)p(y_j)$

Za sprejemnika sporočila so obratne pogojne verjetnosti zelo pomembne, saj z njimi lahko iz prejetih znakov doloci verjetnost za vhodne znake.

3.5 Medesebojna informacija

Pove nam, koliko o eni spremenljivki izvemo iz druge spremenljivke, definicija:

I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)

Lastnosti:

- $I(X; Y) = H(X, Y) - H(X|Y) - H(Y|X)$
- $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$
- $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$
- $I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$
- $I(X; Y)$  je simetricna glede na  $X$  in  $Y$
- $I(X; Y) = - \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i)p(y_j)}{p(x_i, y_j)}$
- $I(X; Y) \geq 0$
- $I(X; X) = H(X)$

3.6 Kapaciteta kanala

Kapaciteta kanala je največja možna medsebojna informacija, ki jo lahko prenesemo od vhoda na izhod.

C = \max\_{P(X)} I(X; Y)

3.6.1 Kapaciteta kanala BSK

Lastnosti:

- $C = \max_{P(X)} (H(Y) - H(Y|X))$
- $p(x_0) = \alpha, p(x_1) = 1 - \alpha$
- $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) = \dots = H(Y) - H(p, 1 - p)$
- $\frac{dI(X; Y)}{d\alpha} = 0$
- $H(Y) = 1 \Rightarrow C$  je max
- $C = I(X; Y)|_{\alpha=1/2} = 1 - H(p, 1 - p)$

3.6.2 Kapaciteta kanala BSK z brisanjem

Definicija:

P\_k = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{pmatrix}

Lastnosti:

- $C = 1 - p$
- $p(x_0) = \alpha, p(x_1) = 1 - \alpha$
- $p(y_0) = (1 - p)\alpha, p(y_1) = p, p(y_2) = (1 - p)(1 - \alpha)$
- $I(X; Y) = (1 - p)H(\alpha, 1 - \alpha)$
- $\frac{dI(X; Y)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = 1/2$

3.7 Shannonov drugi teorem

Shannon je ugotovil, da nam združevanje znakov v nize daje več možnosti za doseganje zanesljivega prenosa. Naj bo  $M$  število različnih kodnih zamenjav, ki jih lahko oblikujemo z nizi dolžine  $n$ . Potem je **hitrost koda** (prenosa) definirana kot:

R = \frac{max H(X^n)}{n} = \frac{log M}{n}

Hitrost je največja takrat, ko so dovoljene kodne zamenjave na vhodu enako verjetne. Shannonov teorem pravi, da je možna skoraj popolna komunikacija s hitrostjo, enako kapaciteti kanala. **Teorem:**

Za  $R \leq C$  obstaja kod, ki zagotavlja tako preverjanje informacije, da je verjetnost napake pri dekodiran poljubno majhna. Za  $R > C$  kod, ki bi omogočal preverjanje informacije s poljubno majhno verjetnostjo napake, **ne** obstaja.

Ce so znaki neodvisni, velja:

log(H(X^n)) = n log H(X) \Rightarrow R = H

Za  $R \leq \frac{log 2^{nC}}{n} = C$  je možno najti kodne zamenjave, ki omogočajo zanesljivo komunikacijo.

4 Varno kodiranje

4.1 Uvod

Omejili se bomo na enostavne linearne bločne kode za BSK. Dolžina bloka je  $k$  znakov, abeceda je enaka abecedi kanala, torej imamo  $M = 2^k$  blokov  $x_1, \dots, x_k, x_i \in \{0, 1\}$ . Za potrebe varovanja dodamo se nekaj varnostnih znakov, celotna dolžina vsake od  $M$  kodnih zamenjav je potem  $n$ . Namesto enega posljemo  $n$  enakih znakov. Boljši pristop pa je, da naredimo kode, kjer se povečujeta  $n$  in  $k$  hitreje od razilke  $n - k$ .

4.2 Kontrolne vsote

Varnost komunikacije povečamo tako, da dodamo nekaj bitov za preverjanje parnosti (paritetni biti). Nastavljeni so tako, da je vsota bitov v aritmetiki po modulu 2 fiksna vrednost (0 ali 1).  
*Spomnimo se arsa*

+/-/XOR	0	1
0	0	1
1	1	0

 AND ~ x.

npr. 00|0, 01|1, 10|1, 11|1 (detektiramo samo eno napako).

4.2.1 Pravokotni kodi

Zapišemo ga v obliki pravokotnika, gledamo sodost po vrsticah in po stolpcih.

1	0	1
0	1	1
0	1	0

4.2.2 Trikotni kodi

Vsota elementov v stolpcu in vrstici s paritetnim bitom vred mora biti soda. (ravno tako vsota paritetnih bitov)

1	0	1
0	0	
1		

4.3 Hammingova razdalja

Hammingova razdalja med kodnima zamenjava nam pove stevilo znakov, na katerih se razlikujeta. Kodni zamenjavi sta enaki, ce je razdalja 0, razdalja med različnimi kodi mora biti vsaj 1, drugace je kod **singularen**. Razdalja je podana kot **minimalna** Hammingova razdalja med dvema kodnima zamenjavama. Stevilo napak, ki jih kod zazna:

d ≥ e + 1 → e\_max = d - 1

d ≥ 2f + 1 → f\_max = ⌊(d-1)/2⌋

4.3.1 Hammingov pogoj

Za bloke dolzine n lahko zgradimo 2^n različnih kodnih zamenjav. Ce zelimo zagotoviti odpornost na napake, mora biti razdalja d > 1. Uporabni kodi imajo st. kodnih zamenjav M = 2^k < 2^n. Hammingov pogoj:

da bi lahko dekodirali vse kodne zamenjave, pri katerih je prislo do e ali manj napak mora veljati:

M ≤ 2^n / Σ\_{i=0}^e (n choose i)

4.4 Linearni blocni kodi

Kode oznacimo kot dvojcek (n, k). n predstavlja stevilo varnostnih bitov, k pa podatkovnih. O linearnih blocnih kodih govorimo, kadar:

- je vsota vsakega para kodnih zamenjav spet kodna zamenjava.
- da produkt kodne zamenjave z 1 in 0 spet kodno zamenjavo.
- vedno obstaja kodna zamenjava s samimi niclami

Oznacimo jih z L(n, k). **Hammingova razdalja** linearnega koda je enaka stevilu enic v kodni zamenjavi z najmanj enicami. Naj bodo podatkovni biti oznaceni kot z1, z2 in z3, varnostni pa kot s1, s2 in s3:

z1	z2	s3
z3	s2	
s1		

Potem vrednosti zlozimo v vektor, in opravimo kodno zamenjavo.

x̃ = (x1, x2, x3, x4, x5, x6) = (z1, z2, z3, s1, s2, s3)

Velja:

z1 + z2 + s1 = 0 = x1 + x2 + x4  
z3 + s2 + z2 = 0 = x2 + x3 + x5  
s3 + s3 + z1 = 0 = x1 + x3 + x6

4.4.1 Generatorska matrika

Generiranje kodne zamenjave lahko opisemo z generatorsko matriko.

x̃ = z̃G = [1 0 0 1 0 1; 0 1 0 1 1 0; 0 0 1 0 1 1]

V splošnem podatkovni vektor 1 × k mnozimo z generatorsko matriko k × n, da dobimo kodno zamenjavo 1 × n. Matrika mora imeti linearno neodvisne vrstice. Kod, cigar generatorska matrika ima to obliko, je sistematicni kod - prvih k znakov koda je enakih sporočili (podatkovnim bitom), ostalih n - k znakov pa so paritetni biti.

Za diskretne kanale brez spomina jo vedno lahko zapišemo v obliki G = (Ik|A).

4.4.2 Matrika za preverjanje sodosti

Linearne enacbe lahko zapišemo z matriko za preverjanje sodosti:

H = [1 1 0 1 0 0; 0 1 1 0 1 0; 1 0 1 0 0 1]

Lastnosti:

- x̃H^T = 0
- GH^T = 0
- G = (Ik|A) ⇒ H = (A^T|In-k)
- vsota dveh kodnih zamenjav je nova kodna zamenjava.