Ponovitev osnov

1 Kombinatorika

1.1 Permutacije

1. brez ponavljanja: $P_n = n!$
2. s ponavljanjem: $P_n^{k_1,..,k_n} = \dfrac{n!}{k_1!,..,k_n!}$

1.2 Variacije

1. brez ponavljanja: $V_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
2. s ponavljanjem: $V_n^r = n^r$

1.3 Kombinacije

1. brez ponavljanja: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$
2. s ponavljanjem: $(\binom{n}{k}) = \binom{n+k-1}{k}$

Lastnosti binomskega simbola:
$\binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
Binomski izrek:
$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n$

Za kombinacije velja, da vrstni red **ni** pomemben.

2 Verjetnost

2.1 Elementarna verjetnost

Izid iz dane mnozice izidov je izbran na slepo, ce so vsi izidi iz te mnozice enako verjetni. Takrat se dogodek A zgodi z verjetnostjo:

$$P(A) = \frac{st.\ izidov,\ ki\ so\ v\ A}{st.\ vseh\ izidov}$$

Nasprotni dogodek pa z verjetnostjo:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Nacelo vkljucitev in izkljucitev dogodkov:

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)) \\ -P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \cdots - P(A_{n-1}A_n) \\ +P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4) + \cdots + \\ P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \ldots \\ +(-1)^{n+1}P(A_1 \ldots A_n)$$

Dogodki $A_1, A_2, \ldots, A_k$ in B so **neodvisni**, ce velja

$$P(A_1 \ldots A_k) = P(A_1) \ldots P(A_k)$$

ali z drugimi besedami.. Verjetnost produkta paroma neodvisnih dogodkov je enaka produktu vrjetnosti teh dogodkov.

2.2 Pogojna verjetnost Verjetnost da se zgodi dogodek A, ce vemo, da se zgodi dogodek B, je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Dogodka A in b sta **neodvisna**, ce velja $P(A|B) = P(A)$ ali $P(AB) = P(A)P(B)$. Pazi! Za par **nezdruzljivih** dogodkov A in B pa velja $P(AB) = 0$ in $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

2.3 Popolna verjetnost

Dogodki $H_1, H_2, \ldots H_n$ tvorijo **popoln sistem dogodkov**, ce se nobena dva dogodka ne moreta zgoditi hrkati in se vedno zgodi vsaj en od njih. Ce dogodki izpolnjujejo ta pogoj, potem po nacelu vkljucitev/izkljucitev velja:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_1)P(A|H_i)$$

Zanje velja tudi **Bayesova formula**:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} \\ = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}$$

2.4 Geometrijska verjetnost

Tocka je izbrana *na slepo* iz intervala, lika, telesa.. ce za vsak dogodek A velja:

$$P(A) = \frac{mera\ izidov,\ ki\ so\ v\ A}{mera\ vseh\ izidov}$$

Pri tem je mera lahko dolzina, ploscina, volumen,.. Basically upas da narises graf pravilno.

Splosno za vse nastete verjetnosti velja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ in} \\ P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

3 Porazdelitve

3.1 Diskretne slucjana spremenljivka

Naj bo X diskretna slucajna spremenljivka $\Longrightarrow$ X je funkcija s koncno ali stevno zalogo vrednosti $a_1, a_2, \ldots$ Verjetnost, da X zavzame vrednost $a_i \in R$, oznacimo z $P(X = a_i) = p_i$. Porazdelitev X lahko podamo na dva enakovredna nacina, in sicer s:

1. s **porazdelitveno shemo**

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}$$

velja $0 \leq p_i \leq 1$ in $p_1 + p_2 + \cdots = 1$

2. s **porazdelitveno funkcijo**

$$F_x(x) := P(X \leq x)$$

3.2 Bernoullijeva slucajna spremenljivka

$$X \sim B(p)$$

- V vsakem poskusu ima dogodek A verjetnost p, X pa ima vrednost 1, ce se je zgodil dogodek A, in 0 sicer.
- $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$

3.3 Binomska slucajna spremenljivka

$$X \sim B(n, p)$$

- X je stevilo pojavitev izida A v n ponovitvah poskusa
- $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}$ za $k = 0, 1, \ldots, n$.

Izvajamo n neodvisnih slucajnih poskusov. V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek A s konstantno verjetnostjo p, $p = P(A)$. X nam pove kolikokrat se je zgodil dogodek A v n poskusih. npr. kovanec vrzemo 10x, koliksne so vrjetnosti, da pade cifra 0x, 2x, vsaj 3x,.. ali 5x vrzemo posteno kocko, izracunaj stevilo sestic, ki pade $\Longrightarrow$ $B(5, \frac{1}{6})$

3.4 Geometrijska slucajna spremenljivka

$$X \sim G(p)$$

- X je stevilo ponovitev poskusa do (vkljucno) prve ponovitve izida A.
- $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ za $k = 1, 2, \ldots$
- $P(X \leq k) = 1-(1-p)^k$ za $k = 1, 2, \ldots$

Izvajamo neodvisne slucajne poskuse, dokler se ne zgodi dogodek A. V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek A s konstantno verjetnostjo p, $p = P(A)$. npr. koliko metov kocke je potrebnih, do prve sestice $\Longrightarrow$ $G(1/6)$.

3.5 Pascalova oz. **negativna binomska** slucajna spremenljivka

$$X \sim P(n, p)$$

- X je stevilo ponovitev poskusa do (vkljucno) n-te ponovitve izida A.
- $P(X = k) = \binom{k-1}{n-1}(1-p)^{k-n}p^n$ za $k = n, n+1, n+2, \ldots$

npr. koliko metov kocke je potrebnih, dokler sestica ne pade 5x $\Longrightarrow$ $P(5, \frac{1}{6})$. Stevilo metov kovanca, dokler grb ne pade 2x $\Longrightarrow$ $P(2, \frac{1}{2})$.

3.6 Hipergeometrijska slucjana spremenljivka

$$X \sim H(K, N-K, n)$$

- X je stevilo elementov z doloceno lastnostjo med izbranimi.
- $P(X = k) = \dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ za k = $0, 1, 2, \ldots min\{n, R\}$

V populaciji N imamo K elementov z doloceno lastnostjo. Izbiramo brez vracanja n elementov. npr. koliko pikov med 7 kartami, ki smo jih na slepo izbrali izmed 16 kart, kjer so bli stirje piki. imamo 400 ljudi, 100 brezposlenih, nakljucno jih izberemo 10. Zanima nas kaksna verjetnost je da sta 2 izmed teh brezposelna $\implies P(x = 2) = H(100, 400 - 100, 10)$.

3.7 **Poissonova** slucajna spremenljivka

$$X \sim P(\lambda)$$

- X je stevilo ponovitev dogodka A na danem intervalu, pri cemer:
  - se dogodki pojavljajo neodvisno
  - povprecno stevilo dogodgov λ, ki se pojavjio na dolocenem intervalu, je konstantno.
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ za k $= 0, 1, 2, \ldots$

npr. ce se dogodek pojavi v povprecju 3x na minuto, lahko uporabimo poissa za izracun kolikokrat se bo dogodek zgodil v 1/4h $\implies P(45)$. St avtomobilov, ki preckajo cestov v 1min.