

Kombinatorika

1.1 Permutacije

1. brez ponavljanja: $P_n = n!$
2. s ponavljanjem: $P_n^{k_1, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! \dots k_n!}$

1.2 Variacije

1. brez ponavljanja: $V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
2. s ponavljanjem: $V_n^r = n^r$

1.3 Kombinacije

1. brez ponavljanja: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
2. s ponavljanjem: $((\binom{n}{k})) = \binom{n+k-1}{k}$

Lastnosti binomskega simbola:

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Binomski izrek:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Za kombinacije velja, da vrstni red **ni** pomemben. Medtem pa ko v splošnem za variacije in permutacije velja, da vrstni red **je** pomemben.

2 Verjetnost

2.1 Elementarna verjetnost

Izid iz dane množice izidov je izbran na slepo, ce so vsi izidi iz te množice enako verjetni. Takrat se dogodek A zgodi z verjetnostjo:

$$P(A) = \frac{\text{st. izidov, ki so v } A}{\text{st. vseh izidov}}$$

Nasprotni dogodek pa z verjetnostjo:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Nacelo vključitev in izključitev dogodkov:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= P(A_1) + \dots + P(A_n) \\ &- P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - \dots - P(A_{n-1} A_n) \\ &+ P(A_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_4) + \dots + \\ &P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) - \dots \\ &+ (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n) \end{aligned}$$

Dogodki A_1, A_2, \dots, A_k in B so **neodvisni**, ce velja

$$P(A_1 \dots A_k) = P(A_1) \dots P(A_k)$$

ali z drugimi besedami... Verjetnost produkta paroma neodvisnih dogodkov je enaka produktu vrjetnosti teh dogodkov.

2.2 Pogojna verjetnost Verjetnost da se zgodi dogodek A , ce vemo, da se zgodi dogodek B , je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Dogodka A in B sta **neodvisna**, ce velja $P(A|B) = P(A)$ ali $P(AB) = P(A)P(B)$. Pazi! Za par **nezdružljivih** dogodkov A in B pa velja $P(AB) = 0$, $P(A+B) = P(A) + P(B)$, $P(A|B) = 0$ in $P(B|A) = 0$.

2.3 Popolna verjetnost

Dogodki H_1, H_2, \dots, H_n tvorijo **popoln sistem dogodkov**, ce se nobena dva dogodka ne moreta zgoditi hkrati in se vedno zgodi vsaj en od njih. Ce dogodki izpolnjujejo ta pogoj, potem po nacelu vključitev/izključitev velja:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$$

Za **popolni sistem dogodkov** velja unija hipotez:

$$\begin{aligned} P(A|H_1 \cup \dots \cup H_n) &= \\ \frac{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}{P(H_1) + \dots + P(H_{n-1}) + P(H_n)} \end{aligned}$$

Zanje velja tudi **Bayesova formula**:

$$\begin{aligned} P(H_i|A) &= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)} \end{aligned}$$

2.4 Geometrijska verjetnost

Tocka je izbrana *na slepo* iz intervala, lika, telesa.. ce za vsak dogodek A velja:

$$P(A) = \frac{\text{mera izidov, ki so v } A}{\text{mera vseh izidov}}$$

Pri tem je mera lahko dolžina, ploscina, volumen,.. Basically upas da narises graf pravilno.

Splosno za vse nastete verjetnosti velja:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ in} \\ P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \end{aligned}$$

3 Dss in porazdelitve

3.1 Diskretna slučajna spremenljivka

Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka $\implies X$ je funkcija s koncno ali stevno zalogo vrednosti a_1, a_2, \dots . Verjetnost, da X zavzame vrednost $a_i \in R$, označimo z $P(X = a_i) = p_i$. Porazdelitev X lahko podamo na dva enakovredna načina, in sicer s:

1. s **porazdelitveno shemo**

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

velja $0 \leq p_i \leq 1$ in $p_1 + p_2 + \dots = 1$

2. s **porazdelitveno funkcijo**

$$F_x(x) := P(X \leq x)$$

3.2 Bernoullijeva slučajna spremenljivka

$$X \sim B(p)$$

- V vsakem poskusu ima dogodek A verjetnost p , X pa ima vrednost 1, ce se je zgodil dogodek A , in 0 sicer.

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

3.3 Binomska slučajna spremenljivka

$$X \sim B(n, p)$$

- X je stevilo pojavitev izida A v n ponovitvah poskusa

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)} \text{ za } k = 0, 1, \dots, n.$$

Izvajamo n neodvisnih slučajnih poskusov. V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek A s konstantno verjetnostjo p , $p = P(A)$. X nam pove kolikokrat se je zgodil dogodek A v n poskusih. npr. kovanec vrzemo 10x, kolikšne so vrjetnosti, da pade cifra 0x, 2x, vsaj 3x,.. ali 5x vrzemo posteno kocko, izracunaj stevilo sestic, ki pade $\implies B(5, \frac{1}{6})$

3.4 Geometrijska slučajna spremenljivka

$$X \sim G(p)$$

- X je stevilo ponovitev poskusa do (vključno) prve ponovitve izida A .

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p \text{ za } k = 1, 2, \dots$$

$$P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k \text{ za } k = 1, 2, \dots$$

Izvajamo neodvisne slučajne poskuse, dokler se ne zgodi dogodek A . V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek A s **konstantno** verjetnostjo p , $p = P(A)$. npr. koliko metov kocke je potrebnih, do prve sestice $\implies G(1/6)$.

3.5 Pascalova oz. negativna binomska slučajna spremenljivka

$$X \sim P(n, p)$$

- X je stevilo ponovitev poskusa do (vključno) n -te ponovitve izida A .

$$P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} (1-p)^{k-n} p^n \text{ za } k = n, n+1, n+2, \dots$$

npr. koliko metov kocke je potrebnih, dokler sestica ne pade 5x $\implies P(5, \frac{1}{6})$. Stevilo metov kovanca, dokler grb ne pade 2x $\implies P(2, \frac{1}{2})$.

3.6 Hipergeometrijska slučajna spremenljivka

$$X \sim H(K, N-K, n)$$

- X je stevilo elementov z določeno lastnostjo med izbranimi.

$$\bullet P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ za } k = 0, 1, 2, \dots, \min\{n, R\}$$

V populaciji N imamo K elementov z določeno lastnostjo. Izbiramo brez vračanja n elementov. npr. koliko pikov med 7 kartami, ki smo jih na slepo izbrali izmed 16 kart, kjer so bli stirje piki. imamo 400 ljudi, 100 brezposlenih, naključno jih izberemo 10. Zanima nas kaksna verjetnost je da sta 2 izmed teh brezposelna $\implies P(x = 2) = H(100, 400 - 100, 10)$.

3.7 Poissonova slučajna spremenljivka

$$X \sim P(\lambda)$$

- X je število ponovitev dogodka A na danem intervalu, pri čemer:
 - se dogodki pojavljajo neodvisno
 - povprečno število dogodkov λ , ki se pojavijo na določenem intervalu, je konstantno.
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ za $k = 0, 1, 2, \dots$

npr. če se dogodek pojavi v povprečju 3x na minuto, lahko uporabimo poissa za izračun kolikokrat se bo dogodek zgodil v 1/4h $\implies P(45)$. St avtomobilov, ki prečkajo cesto v 1min.

4 Zss in porazdelitve

3.1 Zvezna slučajna spremenljivka Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka $\implies X$ je realna funkcija, za katero obstaja integrabilna funkcija $p_X : R \rightarrow [0, \infty)$, tako da za vsak $x \in R$ velja:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt$$

Funkciji p_X pravimo **gostota verjetnosti**, funkciji F_X pa **porazdelitvena** funkcija. Mnozici vrednosti, ki jih zavzame spremenljivka X , pravimo **zaloga vrednosti** in jo označimo z Z_X . Lastnosti:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1$
- $P(a < X < b) = \int_a^b p_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$, $a, b \in R$, $a < b$
- $P(X = a) = 0$, $a \in R$ nqot

če je funkcija zvezna v x , potem za njo velja tudi $F'(x) = p(x)$.

3.2 Enakomerna zvezna slučajna spremenljivka

$$X \sim U[a, b]$$

- $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$

Vsi izidi na intervalu $[a, b]$ so enako verjetni.

3.3 Eksponentna slučajna spremenljivka

$$X \sim \epsilon(\lambda)$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$

Slučajna spremenljivka X - čas med zaporednima dogodkoma, pri čemer so dogodki neodvisni in se pojavijo s konstantno stopnjo λ . λ predstavlja povprečno število dogodkov na izbrano časovno enoto.

3.4 Normalna slučajna spremenljivka

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

- $p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ za $x \in R$
- Za $F_X(x)$ ne obstaja eksplicitna formula. Vrednost preberemo iz porazdelitvenih tabel.

Po centralnem limitnem izreku sta vsota in povprečje veliko neodvisnih, enako porazdeljenih spremenljivk, *normalno porazdeljeni*. Porazdelitev $N(0, 1)$ je standardna normalna porazdelitev \implies potem za vsak x velja $P(X < x) = 1 - P(X > x)$.

3.5 Gamma slučajna spremenljivka

$$X \sim \Gamma(n, \lambda)$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} & x > 0 \end{cases}$

V povprečju imamo na časovno enoto λ ponovitev dogodka A , X pa je čas med prvo in $(n + 1)$ ponovitvijo dogodka A .

3.5 Hi kvadrat slučajna spremenljivka

$$X \sim \chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} & x > 0 \end{cases}$

Je vsota kvadratov n neodvisnih standardnih normalnih slučajnih spremenljivk.

appx. Odvodi

- $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$
- $x^n = nx^{n-1}$
- $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $\sin(ax) = a \cos ax$
- $\cos(ax) = -a \sin(ax)$
- $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $e^a x = a e^{ax}$
- $a^x = a^x \ln a$
- $x^x = x^x (1 + \ln x)$
- $\ln x = \frac{1}{x}$
- $\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- $\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$

appx. Integrali

- $\int x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & a \neq -1 \\ \ln|x| + C & a = -1 \end{cases}$
- $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C$
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$