

1 Vektorji in matrike

1.1 Vektor je urejena n-terica števil, ki jo običajno zapisemo kot stolpec

x = [x1; ...; xn]

1.2 Produkt vektorja x s skalarjem alpha je vektor

alpha x = alpha [x1; ...; xn] = [alpha x1; ...; alpha xn]

1.3 Vsota vektorjev x in y je vektor

x + y = [x1; ...; xn] + [y1; ...; yn] = [x1 + y1; ...; xn + yn]

1.4 Nicelni vektor 0 je tisti vektor, za katerega je a + 0 = 0 + a = a za vsak vektor a. Vse komponente nicelnega vektorja so enake 0. Vsakemu vektorju a priprada nasprotni vektor -a, tako da je a + (-a) = 0 Razlika vektorjev a in b je vsota a + (-b) in jo navadno zapisemo kot a - b.

- Lastnosti vektorske vsote
- a + b = b + a (komutativnost)
 - a + (b + c) = (a + b) + c (asociativnost)
 - a(a + b) = aa + ab (distributivnost)

1.5 Linearna kombinacija vektorjev x in y je vsota

ax + by

1.6 Skalarni produkt vektorjev

[x1; ...; xn] in [y1; ...; yn] je stevilo

x · y = x1y1 + x2y2 + ... + xnyn

alternativno:

x · y = ||x|| ||y|| cos phi

Lastnosti skalarnega produkta

- x · y = y · x (komutativnost)
- x · (y + z) = x · y + x · z (aditivnost)
- x · (ay) = a(x · y) = (ax) · y (homogenost)
- forall x velja x · x >= 0

1.7 Dolzina vektorja x je

||x|| = sqrt(x · x)

1.8 Enotski vektor je vektor z dolzino 1.
1.9 Za poljubna vektorja u, v in R^n velja:

||u · v|| <= ||u|| ||v||.

1.10 Za poljubna vektorja u, v in R^n velja:

||u + v|| <= ||u|| + ||v||.

1.11 Vektorja x in y sta ortogonalna (ali pravokotna) natakno takrat, kadar je

x · y = 0

1.12 Ce je phi kot med vektorjema x in y, potem je

(x · y) / (||x|| ||y||) = cos phi

1.13 Vektorski produkt:

a x b = (a2b3 - a3b2)i + (a3b1 - a1b3)j + (a1b2 - a2b1)k

Lastnosti vektorskega produkta

- a x (b + c) = a x b + a x c (aditivnost)
- b x a = -a x b (!komutativnost)
- (aa) x b = a(a x b) = a x (ab) (homogenost)
- a x a = 0
- a x b je perpendicular na vektorja a in b
- ||a x b|| = ||a|| ||b|| sin phi
- Dolzina vektorskega produkta je ploscina paralelograma, katerega vektorja oklepata

1.14 Mesani produkt(a, b, c) vektorjev a, b in c v R^3 je skalarni produkt vektorjev a x b in c:

(a, b, c) = (a x b) · c

Lastnosti mesanega produkta

- (a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b)
- (xa, b, c) = x(a, b, c) (homogenost)
- (a, u + v, c) = (a, u, c) + (a, v, c)
- Absolutna vrednost mesanega produkta (a, b, c) je enaka prostornini paralepipeda

Razdalje

Razdalja od tocke P do ravnine, v kateri lezi tocka A :

cos phi = (n · (rP - rA)) / (||n|| ||rP - rA||) oz.
d = |n / ||n|| · (rP - rA)|

Razdalja od tocke P do premice, katera gre skozi tocko A:

d = ||e x (rP - rA)|| / ||e||

Projekcije vektorjev
Naj bo proj_a b = x projekcija vektorja b na vektor a. Izracunamo jo po sledeci formuli:

proj_a b = (a · b / a · a) a

1.15 Matrika dimenzije m x n je tabela m x n števil, urejenih v m vrstic in n stolpcev:

A^{m x n} = [x11 x12 x13 ... x1n; x21 x22 x23 ... x2n; ...; xm1 xm2 xm3 ... xmn]

1.16 Matrika, katere elementi so enaki nič povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje diagonalna matrika. Za diagonalno matriko je a_ij = 0, kadarkoli velja i != j

1.17 Matrika A^{n x n} je spodnjetrokotna, kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0:

a_ij = 0 kadar je i < j

1.18 Matrika A^{n x n} je zgornjetrokotna, kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0:

a_ij = 0 kadar je i > j

1.19 Matrika je trikotna, ce je zgornjetrokotna ali spodnjetrokotna.

1.20 Dve matriki A in B sta enaki natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi:

A^{m x n} = B^{p x q} => m = p in n = q,
a_ij = b_ij za vsak i = 1, ..., m in j = 1, ..., n

1.21 Produkt matrike s skalarjem dobimo tako, da vsak element matrike pomnozimo s skalarjem

a A^{m x n} = [ax11 ax12 ax13 ... ax1n; ax21 ax22 ax23 ... ax2n; ...; axm1 axm2 axm3 ... axmn]

1.22 Vsoto dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da seštejemo istolezne elemente obeh matrik:

A + B = [a11 + b11 a12 + b12 ... a1n + b1n; a21 + b21 a22 + b22 ... a2n + b2n; ...; am1 + bm1 am2 + bm3 ... amn + bmn]

Osnovne matricne operacije

- A + B = B + A (komutativnost)
- (A + B) + C = A + (B + C) (asociativnost)
- a(A + B) = aA + aB (mnozenje s skalarjem)
- A + (-A) = 0
- x(yA) = (xy)A in 1 · A = A

1.23 Transponirana matrika k matriki A reda m x n je matrika reda n x m

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{m1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Lastnosti transponiranja matrik

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(xA)^T = xA^T$
- $(A^T)^T = A$

1.24 Produkt matrike A in vektorja \vec{x} je linearna kombinacija stolpcev matrike A, uteži linearne kombinacije so komponente vektorja \vec{x} :

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

1.25 Produkt vrstice \vec{x} z matriko A je linearna kombinacija vrstic matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice \vec{y} :

$$\vec{y} \cdot A = [y_1, y_2, y_3] \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\vec{u} \\ y_2\vec{v} \\ y_3\vec{w} \end{bmatrix}$$

1.26 Produkt matrik A in B je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike A s stolpci matrike B:

$$AB = A \begin{bmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \end{bmatrix}$$

1.27 Element c_{ij} v i -ti vrstici in j -tem stolpcu produkta $C = AB$ je skalarni produkt i -te vrstice A in j -tega stolpca matrike B

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

1.28 Produkt matrik A in B je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike A z matriko B:

$$[i - \text{ta vrstica } A] B = [i - \text{ta vrstica } AB]$$

Lastnosti matricnega produkta

- $AB \neq BA$ (!komutativnost)
- $(xA)B = x(AB) = A(xB)$ (homogenost)
- $C(A+B) = CA + CB$ (distributivnost)
- $A(BC) = (AB)C$ (asociativnost)
- $(AB)^T = B^T A^T$

1.29 Vrstice matrike A z n stolpci naj bodo a^1, \dots, a^n , stolpci matrike B z n vrsticami pa a_1, \dots, a_n . Potem je

$$AB = a^1 b_1 + \dots + a^n b_n$$

1.30 Če delitev na bloke v matriki A ustreza delitvi v matriki B, potem lahko matriki pomnožimo bločno:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

1.31 Kvadratna matrika I_k reda $k \times k$, ki ima vse diagonalne elemente enake 1, vse ostale elemente pa 0 ima lastnost, da za vsako matriko A reda $m \times n$ velja $AI_n = A$ in $I_m A = A$. Matrika I_k se imenuje enotska ali identična matrika.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

2 Sistemi linearnih enačb

2.1 Kvadratna matrika A je obrnljiva, če obstaja taka matrika A^{-1} , da je

$$AA^{-1} = I \text{ in } A^{-1}A = I$$

Matrika A^{-1} (če obstaja) se imenuje matriki A inverzna matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je singularna. Matrika **NI** obrnljiva, kadar je $\text{rang}(A) < n$!

2.2 Kvadratna matrika reda n je obrnljiva natanko tedaj, ko pri gaussovi eliminaciji dobimo n pivotov.

2.3 Vsaka obrnljiva matrika ima eno samo inverzno matriko.

2.4 Inverzna matrika inverzne matrike A^{-1} je matrika A

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2.5 Če je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ edino resitev $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

2.6 Če obstaja nenicelna resitev \vec{x} enačbe $A\vec{x} = \vec{0}$, matrika A ni obrnljiva (je singularna).

2.7 Če sta matriki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt $A \cdot B$ in

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Pozor! Pravilo

$$(AB)^p = A^p B^p$$

velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej $AB = BA$.

2.8 Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2.9 Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi a_{ii} je diagonalna matrika, ki ima na diagonali elemente a_{ii}^{-1}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

2.10 Za izračun inverza matrike A, uporabimo gaussovo eliminacijo nad matriko $[A|I]$

$$[A|I] = [I|A^{-1}]$$

2.11 Matrika A je simetrična $\Leftrightarrow A^T = A$. Za elemente a_{ij} simetrične matrike velja $a_{ij} = a_{ji}$.

2.12 Če je matrika A simetrična in obrnljiva, je tudi A^{-1} simetrična.

2.13 Če je R poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta $R^T R$ in $R R^T$ simetrični matriki.

3 Vektorski prostori

3.1 Realni vektorski prostor V je množica "vektorjev" skupaj z pravili za

- seštevanje vektorjev,
- množenje vektorja z realnim številom (skalarjem)

Če sta \vec{x} in \vec{y} poljubna vektorja v V, morajo biti v V tudi

- vsota $\vec{x} + \vec{y}$ in
- produkti $\alpha\vec{x}$ za vse $\alpha \in R$

V vektorskem prostoru V morajo biti tudi VSE linearne kombinacije $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

Pravila za operacije v vektorskih prostorih

Operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoščati naslednjim pravilom:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativnost)
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (asociativnost)
- obstaja en sam nenicelni vektor $\vec{0}$, da velja $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- za vsak \vec{x} obstaja natanko en $-\vec{x}$, da je $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
- $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ (distributivnost)
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

3.2 Podmnožica U vektorskega prostora V je *vektorski podprostor*, če je za vsak par vektorjev \vec{x} in \vec{y} iz U in vsako realno število α tudi

- $\vec{x} + \vec{y} \in U$ in
- $\alpha\vec{x} \in U$.

3.3 Množica vektorjev U je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz U tudi v U.

Lastnosti vektorskih podprostorov

- Vsak vektorski podprostor nujno vsebuje ničelni vektor $\vec{0}$

- Presek dveh podprostorov vektorskega podprostora je tudi podprostor

3.4 Stolpčni prostor $C(A)$ matrike $A \in R^{m \times n}$ je tisti podprostor vektorskega prostora R^m , ki vsebuje natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike A .

neformalno: linearna ogrinjaca stolpcev matrike (npr. ce imas 5 stolpcev pa lahko 2 zapises kot linearno kombinacijo ostalih 3 bo imel column space 3 elemente)

3.5 Sistem linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je resljiv natanko tedaj, ko je vektor $\vec{b} \in C(A)$

3.6 Naj bo matrika $A \in R^{m \times n}$. Mnozica resitev homogenega sistema linearnih enacb je podprostor v vektorskem prostoru R^n .

3.7 Mnozica vseh resitev sistema linearnih enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ se imenuje nicelni prostor matrike A . Oznacujemo ga z $N(A)$.

neformalno: mnozica vektorjev, ki se z neko matriko zmnozijo v nicelni vektor

3.8 Ce je matrika A kvadratna in ni obrnljiva, potem $N(A)$ vsebuje samo vektor $\vec{0}$

3.9 Matrika ima *stopnicasto* obliko, kadar se vsaka od njenih vrstic zacne z vsaj eno niclo vec kot prejsnja vrstica.

3.10 Prvi element, razlicen od nic v vsaki vrstici, je *pivot*. Stevilo pivotov v matriki se imenuje rang matrike. Rang matrike A zapisemo kot $\text{rang}(A)$.

3.11 Rang matrike ni vecji od stevila vrstic in ni vecji od stevila stolpcev matrike.

3.12

Stevilo prostih neznank matrike = st. stolpcev - rang matrike

3.13

1. Visoka in ozka matrika ($m > n$) ima poln stolpčni rang, kadar je $\text{rang}(A) = n$
2. Nizka in široka matrika ($m < n$) ima poln vrstični rang, kadar je $\text{rang}(A) = m$
3. Kvadratna matrika ($n = m$) ima poln rang, kadar je $\text{rang}(A) = m = n$

3.14 Za vsako matriko A s polnim stolpčnim rangom $r = n \leq m$, velja:

1. Vsi stolpci A so pivotni stolpci
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{0}$ nima prostih neznank, zato tudi nima posebnih resitev
3. Nicelni prostor $N(A)$ vsebuje le nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$
4. Kadar ima sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ resitev (kar ni vedno res!), je resitev ena sama
5. Reducirana vrstična oblika matrike (A) se da zapisati kot

$$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \times n \text{ enotska matrika} \\ m - n \text{ vrstic samih nicel} \end{bmatrix}$$

3.15 Za vsako matriko A s polnim vrstičnim rangom $r = m \leq n$ velja:

1. Vse vrstice so pivotne, ni prostih vrstic in U (stopnicasta oblika) in R (reducirana stopnicasta oblika) nimata nicelnih vrstic
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ je resljiv za vsak vektor \vec{b}
3. Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ ima $n - r = n - m$ prostih neznank, zato tudi prav toliko posebnih resitev
4. Stolpčni prostor $C(A)$ je ves prostor R^m

3.16 Za vsako kvadratno matriko A polnega ranga ($\text{rang}(A) = m = n$) velja:

1. Reducirana vrstična oblika matrike A je enotska matrika
2. Sistem enacb $A\vec{x} = \vec{b}$ ima natančno eno resitev za vsak vektor desnih strani \vec{b}
3. Matrika A je obrnljiva
4. Nicelni prostor matrike A je samo nicelni vektor $N(A) = \{\vec{0}\}$
5. Stolpčni prostor matrike A je cel prostor $C(A) = R^m$

3.17 Vektorji $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ so linearno neodvisni, ce je

$$0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n$$

edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka vektorju $\vec{0}$. Vektorji $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ so linearno odvisni, ce niso linearno neodvisni.

3.18 Ce so vektorji *odvisni*, lahko vsaj enega izrazimo z ostalimi.

3.19 Ce je med vektorji $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ tudi nicelni vektor, so vektorji *linearno odvisni*.

3.20 Vsaka mnozica n vektorjev iz R^n je odvisna, kadar je $n > m$.

3.21 Stolpci matrike A so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima homogeni enacba $A\vec{x} = \vec{0}$ edino resitev $\vec{x} = \vec{0}$.

3.22 Kadar je $\text{rang}(A) = n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisni. Kadar je pa $\text{rang}(A) < n$, so stolpci matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisni.

3.23 Kadar je $\text{rang}(A) = m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno neodvisne. Kadar je pa $\text{rang}(A) < m$, so vrstice matrike $A \in R^{m \times n}$ linearno odvisne.

3.24 Vrstični prostor matrike A je podprostor v R^n , ki ga razpenjajo vrstice matrike A .

3.25 Vrstični prostor matrike A je $C(A^T)$, stolpčni prostor matrike A^T .

3.26 Baza vektorskega prostora je mnozica vektorjev, ki

1. je linearno neodvisna in
2. napenja cel prostor.

3.27 Vsak vektor iz vektorskega prostora lahko na en sam način izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

3.28 Vektorji $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ so baza prostora R^n natanko tedaj, kadar je matrika, sestavljena iz stolpcev $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, obrnljiva.

3.29 Prostor R^n ima za $n > 0$ neskončno mnogo različnih baz.

3.30 Ce sta množici vektorjev $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ in $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ obe bazi istega vektorskega prostora, potem je $m = n \implies$ vse baze istega vektorskega prostora imajo isto število vektorjev.

3.31 Dimenzija vektorskega prostora je število baznih vektorjev.

3.32 Dimenziji stolpčnega prostora $C(A)$ in vrstičnega prostora $C(A^T)$ sta enaki rang matrike A

$$\dim(C(A)) = \dim(C(A^T)) = \text{rang}(A).$$

3.33 Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ matrike A z n stolpci in ranga r je enaka $\dim(N(A)) = n - r$.

3.34 Stolpčni prostor $C(A)$ in vrstični prostor $C(A^T)$ imata oba dimenzijo r . Dimenzija nicelnega prostora $N(A)$ je $n - r$, Dimenzija levega nicelnega prostora $N(A^T)$ pa je $m - r$.

3.35 Vsako matriko ranga 1 lahko zapisemo kot produkt (stolpčnega) vektorja z vrstičnim vektorjem $A = \vec{u}\vec{v}^T$.

4 Linearne preslikave

4.1 Preslikava $A : U \rightarrow V$ je linearna, ce velja

1. aditivnost: $A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2$ za vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$,
2. homogenost: $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$ za vse $\alpha \in R$ in $\vec{u} \in U$.

4.2 Preslikava $A : U \rightarrow V$ je linearna natanko tedaj, ko velja

$$A(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1 A\vec{u}_1 + \alpha_2 A\vec{u}_2$$

za vse $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ in vse $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$.

4.3 Ce je A linearna preslikava, je $A\vec{0} = \vec{0}$.

4.4 Naj bo $A : U \rightarrow V$ linearna preslikava in $\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i$ linearna kombinacija vektorjev. Potem je $A(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{u}_i$.

4.5 Naj bo $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ baza za vektorski prostor U . Potem je linearna preslikava $A : U \rightarrow V$ natanko določena, ce poznamo slike baznih vektorjev.

4.6 Naj bo $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ baza za U in $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$. Potem obstaja natanko ena linearna preslikava $A : U \rightarrow V$, za katero je $A\vec{u}_i = \vec{v}_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$.

4.7 Naj bo $A : U \rightarrow V$ linearna preslikava. Potem množico

$$\ker A = \{\vec{u} \in U; A\vec{u} = \vec{0}\}$$

imenujemo *jedro* linearne preslikave. Ker je $A\vec{0} = \vec{0}$, je $\vec{0} \in \ker A$ za vse A . Zato je jedro vedno neprazna množica.

4.8 Jedro linearne preslikave $A : U \rightarrow V$ je vektorski podprostor v U .

4.9 Mnozico

$$im\ A = \{\vec{v} \in V; \text{ obstaja tak } \vec{u} \in U, \text{ da je } \vec{v} = A\vec{u}\}$$

imenujemo *slika* linearne preslikave $A : U \rightarrow V$.

4.10 Če je $A : U \rightarrow V$ linearna preslikava, potem je njena slika *im* A vektorski podprostor v V .

5 Ortogonalnost

5.1 Podprostora U in V vektorskega prostora sta med seboj ortogonalna, če je vsak vektor $\vec{u} \in U$ ortogonalen na vsak vektor $\vec{v} \in V$.

5.2 Za vsako matriko $A \in R^{m \times n}$ velja:

- Nicelni prostor $N(A)$ in vrsticni prostor $C(A^T)$ sta ortogonalna podprostora R^n
- Levi nicelni prostor $N(A^T)$ in stolpicni prostor $C(A)$ sta ortogonalna podprostora prostora R^m .

5.3 Ortogonalni komplement V^\perp podprostora V vsebuje VSE vektorje, ki so ortogonalni na V .

5.4 Naj bo A matrika dimenzije $m \times n$.

- Nicelni prostor $N(A)$ je ortogonalni komplement vrsticnega prostora $C(A^T)$ v prostoru R^n
- Levi nicelni prostor $N(A^T)$ je ortogonalni komplement stolpicnega prostora $C(A)$ v prostoru R^m .

5.5 Za vsak vektor $4\vec{y}$ v stolpicnem prostoru $C(A)$ obstaja v vrsticnem prostoru $C(A^T)$ en sam vektor \vec{x} , da je $A\vec{x} = \vec{y}$.

5.6 Če so stolpci matrike A linearno neodvisni, je matrika $A^T A$ obrnljiva.

5.7 Matrika P je projekcijska, kadar

- je simetrična: $P^T = P$ in
- velja $P^2 = P$.

5.8 Če je P projekcijska matrika, ki projecira na podprostor U , potem je $I - P$ projekcijska matrika, ki projecira na U^\perp , ortogonalni komplement podprostora U .

5.9 Vektorji $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$ so ortonormirani kadar so ortogonalni in imanjo vsi dolžino 1, torej

$$\vec{q}_i^T \vec{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{ko je } i \neq j \text{ pravokotni vektorji} \\ 1 & \text{ko je } i = j \text{ enotski vektorji} \end{cases}$$

za matriko $Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n]$ velja $Q^T Q = I$.

5.10 Vektorji $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$ naj bodo ortonormirani v prostoru R^m . Potem za matriko

$$Q = [\vec{q}_1 \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n]$$

velja, da je $Q^T Q = I_n$ enotska matrika reda n .

5.11 Matrika Q je ortogonalna, kadar je

- kvadratna in
- ima ortonormirane stolpce.

5.12 Če je Q ortogonalna matirka, potem je obrnljiva in $Q^{-1} = Q^T$.

5.13 Množenje z ortogonalno matriko ohranja dolžino vektorjev in kote med njimi. Če je Q ortogonalna matrika, potem je

$$\begin{aligned} \|Q\vec{x}\| &= \|\vec{x}\| \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in} \\ (Q\vec{x})^T Q\vec{y} &= \vec{x}^T \vec{y} \text{ za vsak vektor } \vec{x} \text{ in } \vec{y} \end{aligned}$$

5.14 Če sta Q_1 in Q_2 ortogonalni matriki, je tudi produkt $Q = Q_1 Q_2$ ortogonalna matrika.

5.15 Iz linearno neodvisnih vektorjev a_1, \dots, a_n z *Gram-Schmidtovo* ortogonalizacijo dobimo ortonormirane vektorje q_1, \dots, q_n . Matriki A in Q s temi stolpci zadoscajo enacbi $A = QR$, kjer je R zgornjetrikotna matrika.

5.16 Vektorski prostor ι je množica vseh neskončnih zaporedij \vec{u} s končno dolžino

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + \dots < \infty$$

5.17 Polinomi $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x), \dots$ sestavljajo zaporedje ortogonalnih polinomov, kadar

- $p_i(x)$ je polinom stopnje i
- $(p_i(x), p_j(x)) = 0$, kadarkoli je $i \neq j$.

6 Determinante

6.1 Determinanta enotske matirke je $det(I) = 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ in } \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

6.2 Determinanta spremeni predznak, če med seboj zamenjamo dve vrstici.

6.3 Determinanta je linearna funkcija vsake vrstice posebej. To pomeni, da se

- determinanta pomnoži s faktorjem t , če eno vrstico determinante (vsak element v tej vrstici) pomnožimo s faktorjem t .

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- determinanta je vsota dveh determinant, ki se razlikujeta le v eni vrstici, če je v prvotni determinanti ta vrstica vsota obeh vrstic, ostale vrstice pa so enake v vseh treh determinantah.

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

Pozor! Kadar mnozimo matriko A s skalarjem t , se vsak element matrike pomnoži s skalarjem. Ko racunamo determinanto produkta matirke s skalarjem tA , skalar t izpostavimo iz vsake vrstice posebej, zato je $det(tA) = t^n det(A)$, kjer je n stevilo vrstic (ali stolpcev) determinante.

6.4 Matrika, ki ima dve enaki vrstici, ima determinanto enako 0.

6.5 Če v matriki od poljubne vrstice odstejemo mnogokratnik neke druge vrstice, se njena determinanta ne spremeni.

6.6 Naj bo A poljubna kvadratna matirka $n \times n$ in U njena vrsticno-stopnicasta oblika, ki jo dobimo z *Gaussovo eliminacijo*. Potem je

$$det(A) = \pm det(U).$$

6.7 Determinanta, ki ima vrstico samih nicel, je enaka 0.

6.8 Determinanta trikotne matrike A je produkt diagonalnih elementov:

$$det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

6.9 Determinanta singularne matrike je enaka 0, determinanta obrnljive matrike je razlicna od 0.

6.10 Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu determinant obeh matrik:

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

6.11 Determinanta inverzne matrike je enaka

$$det(A^{-1}) = 1/det(A)$$

in determinanta potence A^n matrike A je

$$det(A^n) = (det(A))^n.$$

6.12 Transponirana matrika A^T ima isto determinanto kot A .

6.13 Vsaka lastnost, ki velja za vrstice determinante, velja tudi za njene stolpce. Med drugim:

- Determinanta spremeni predznak, če med seboj zamenjamo dva stolpca
- Determinanta je enaka 0, če sta dva stolpca enaka
- Determinanta je enaka 0, če so v vsaj enem stolpcu same nicle.

6.14 (kofaktorska formula) Če je A kvadratna matrika reda n , njeno determinanto lahko izracunamo z razvojem po $i - ti$ vrstici

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

Kofaktorje C_{ij} izracunamo kot $C_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$, kjer je D_{ij} determinanta, ki jo dobimo, če v A izbrisemo i -to vrstico in j -ti stolpec.

6.15 Inverzna matrika A^{-1} matrike A je transponirana matrika kofaktorjev, deljena z determinanto $|A|$:

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)},$$

kjer je C matrika kofaktorjev matrike A.

6.16 Ploscina paralelograma, dolocenega z vektorjema \vec{a} in $\vec{b} \in R^2$ je enaka $\det([\vec{a}\vec{b}])$,

to je absolutni vrednosti determinante s stolpcema \vec{a} in \vec{b} .

6.17 Mesani produkt vektorjev \vec{a} in \vec{b} in \vec{c} je enak determinanti matrike, ki ima te tri

vektorje kot stolpce.

7 L. vrednosti in vektorji