Ponovitev osnov

1 Kombinatorika

1.1 Permutacije

1. brez ponavljanja: $P_n = n!$
2. s ponavljanjem: $P_n^{k_1,..,k_n} = \dfrac{n!}{k_1!,..,k_n!}$

1.2 Variacije

1. brez ponavljanja: $V_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
2. s ponavljanjem: $V_n^r = n^r$

1.3 Kombinacije

1. brez ponavljanja: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$
2. s ponavljanjem: $(\binom{n}{k}) = \binom{n+k-1}{k}$

Lastnosti binomskega simbola:
$\binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
Binomski izrek:
$(a+b)^n =$
$\binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n$

Za kombinacije velja, da vrstni red **ni** pomemben. Medtem pa ko v splosnem za variacije in permutacije velja, da vrstni red **je** pomemben.

2 Verjetnost

2.1 Elementarna verjetnost

Izid iz dane mnozice izidov je izbran na slepo, ce so vsi izidi iz te mnozice enako verjetni. Takrat se dogodek A zgodi z verjetnostjo:

$$P(A) = \frac{st.\ izidov,\ ki\ so\ v\ A}{st.\ vseh\ izidov}$$

Nasprotni dogodek pa z verjetnostjo:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Nacelo vkljucitev in izkljucitev dogodkov:

$$\begin{gathered} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) \\ -P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \cdots - P(A_{n-1}A_n) \\ +P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4) + \cdots + \\ P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \ldots + (-1)^{n+1}P(A_1 \ldots A_n) \end{gathered}$$

Dogodki $A_1, A_2, \ldots, A_k$ in B so **neodvisni**, ce velja

$$P(A_1 \ldots A_k) = P(A_1) \ldots P(A_k)$$

ali z drugimi besedami... Verjetnost produkta paroma neodvisnih dogodkov je enaka produktu vrjetnosti teh dogodkov.

2.2 Pogojna verjetnost Verjetnost da se zgodi dogodek A, ce vemo, da se zgodi dogodek B, je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Dogodka A in b sta **neodvisna**, ce velja $P(A|B) = P(A)$ ali $P(AB) = P(A)P(B)$. Pazi! Za par **nezdruzljivih** dogodkov A in B pa velja $P(AB) = 0$, $P(A+B) = P(A) + P(B)$, $P(A|B) = 0$ in $P(B|A) = 0$.

2.3 Popolna verjetnost

Dogodki $H_1, H_2, \ldots H_n$ tvorijo **popoln sistem dogodkov**, ce se nobena dva dogodka ne moreta zgoditi hrkati in se vedno zgodi vsaj en od njih. Ce dogodki izpolnjujejo ta pogoj, potem po nacelu vkljucitev/izkljucitev velja:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_1)P(A|H_i)$$

Za **popolni sistem dogodkov** velja unija hipotez:

$$P(A|H_1 \cup \cdots \cup H_n) = \frac{P(A|H_1)P(H_1) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n)}{P(H_1) + \cdots + P(H_{n-1}) + P(H_n)}$$

Zanje velja tudi **Bayesova formula**:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}$$

2.4 Geometrijska verjetnost

Tocka je izbrana *na slepo* iz intervala, lika, telesa.. ce za vsak dogodek A velja:

$$P(A) = \frac{mera\ izidov,\ ki\ so\ v\ A}{mera\ vseh\ izidov}$$

Pri tem je mera lahko dolzina, ploscina, volumen,.. Basically upas da narises graf pravilno.

Splosno za vse nastete verjetnosti velja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ in }$$
$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

3 Dss in porazdelitve

3.1 Diskretna slucjana spremenljivka

Naj bo X diskretna slucajna spremenljivka $\implies$ X je funkcija s koncno ali stevno zalogo vrednosti $a_1, a_2, \ldots$ Verjetnost, da X zavzame vrednost $a_i \in R$, oznacimo z $P(X = a_i) = p_i$. Porazdelitev X lahko podamo na dva enakovredna nacina, in sicer s:

1. s **porazdelitveno shemo**

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}$$

velja $0 \le p_i \le 1$ in $p_1 + p_2 + \cdots = 1$

2. s **porazdelitveno funkcijo**

$$F_x(x) := P(X \le x)$$

3.2 Bernoullijeva slucajna spremenljivka

$$X \sim B(p)$$

- V vsakem poskusu ima dogodek A verjetnost p, X pa ima vrednost 1, ce se je zgodil dogodek A, in 0 sicer.
- $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$

3.3 **Binomska** slucajna spremenljivka

$$X \sim B(n, p)$$

- X je stevilo pojavitev izida A v n ponovitvah poskusa
- $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}$ za $k = 0, 1, \ldots, n$.

Izvajamo n neodvisnih slucajnih poskusov. V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek A s konstantno verjetnostjo p, $p = P(A)$. X nam pove kolikokrat se je zgodil dogodek A v n poskusih. npr. kovanec vrzemo 10x, koliksne so vrjetnosti, da pade cifra 0x, 2x, vsaj 3x,.. ali 5x vrzemo posteno kocko, izracunaj stevilo sestic, ki pade $\implies B(5, \frac{1}{6})$

3.4 **Geometrijska** slucajna spremenljivka

$$X \sim G(p)$$

- X je stevilo ponovitev poskusa do (vkljucno) prve ponovitve izida A.
- $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ za $k = 1, 2, \ldots$
- $P(X \le k) = 1 - (1-p)^k$ za $k = 1, 2, \ldots$

Izvajamo neodvisne slucajne poskuse, dokler se ne zgodi dogodek A. V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek A s **konstantno** verjetnostjo p, $p = P(A)$. npr. koliko metov kocke je potrebnih, do prve sestice $\implies G(1/6)$.

3.5 **Pascalova** oz. **negativna binomska** slucajna spremenljivka

$$X \sim P(n, p)$$

- X je stevilo ponovitev poskusa do (vkljucno) n-te ponovitve izida A.
- $P(X = k) = \binom{k-1}{n-1}(1-p)^{k-n}p^n$ za $k = n, n+1, n+2, \ldots$

npr. koliko metov kocke je potrebnih, dokler sestica ne pade 5x $\implies P(5, \frac{1}{6})$. Stevilo metov kovanca, dokler grb ne pade 2x $\implies P(2, \frac{1}{2})$.

3.6 **Hipergeometrijska** slucjana spremenljivka

$$X \sim H(K, N-K, n)$$

- X je stevilo elementov z doloceno lastnostjo med izbranimi.
- $P(X = k) = \dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ za k $= 0, 1, 2, \ldots min\{n, R\}$

V populaciji N imamo K elementov z doloceno lastnostjo. Izbiramo brez vracanja n elementov. npr. koliko pikov med 7 kartami, ki smo jih na slepo izbrali izmed 16 kart, kjer so bli stirje piki. imamo 400 ljudi, 100 brezposlenih, nakljucno jih izberemo 10. Zanima nas kaksna verjetnost je da sta 2 izmed teh brezposelna $\implies P(x = 2) = H(100, 400 - 100, 10)$.

3.7 Poissonova slucajna spremenljivka

$$X \sim P(\lambda)$$

- X je stevilo ponovitev dogodka A na danem intervalu, pri cemer:
  - se dogodki pojavljajo neodvisno
  - povprecno stevilo dogodgov λ, ki se pojavjio na dolocenem intervalu, je konstantno.
- $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ za k $= 0, 1, 2, \ldots$

npr. ce se dogodek pojavi v povprecju 3x na minuto, lahko uporabimo poissa za izracun kolikokrat se bo dogodek zgodil v 1/4h $\implies P(45)$. St avtomobilov, ki preckajo cesto v 1min.

4 Zss in porazdelitve

4.1 Zvezna slucjana spremenljivka Naj bo X zvezna slucajna spremenljivka $\implies X$ je realna funkcija, za katero obstaja integrabilna funkcija $p_X : R \to [0, \infty)$, tako da za vsak $x \in R$ velja:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)\,dt$$

Funkciji p_X pravimo **gostota verjetnosti**, funkciji F_X pa **porazdelitvena** funkcija. Mnozici vrednosti, ki jih zavzame spremenljivka X, pravimo **zaloga vrednosti** in jo oznacimo z Z_X. Lastnosti:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\,dx = 1$
- $P(a < X < b) = \int_a^b p_X(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a),\ a, b \in R,\ a < b$
- $P(X = a) = 0, a \in R$ nqot

ce je funkcija zvezna v x, potem za njo velja tudi $F'(x) = p(x)$. Za zvezno slucajno spremenljivko X je *funkcija prezivetja* $S(x) = P(X > x)$ vedno zvezna, nenarascujoca in zavzema vrednosti na intervalu $[0, 1]$.

4.2 Enakomerna zvezna slucajna spremenljivka

$$X \sim U[a, b]$$

- $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & sicer \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$

Vsi izidi na intervalu $[a, b]$ so enako verjetni.

4.3 Eksponentna slucajna spremenljivka

$$X \sim \epsilon(\lambda)$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$

Slucajna spremenljivka X - cas med zaporednima dogodkoma, pri cemer so dogodki neodvisni in se pojavijo s konstantno stopnjo λ. λ predstavlja povprecno stevilo dogodkov na izbrano casovno enoto.

4.4 Normalna slucajna spremenljivka

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

- $p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ za $x \in R$
- Za $F_X(x)$ ne obstaja eksplicitna formula. Vrednost preberemo iz porazdelitvenih tabel.

Po centralnem limitnem izreku sta vsota in povprecje veliko neodvisnih, enako porazdeljenih spremenljivk, *normalno porazdeljeni*. Porzadelitev $N(0, 1)$ je standardna normalna porazdelitev $\implies$ potem za vsak x velja $P(X < x) = 1 - P(X > x)$.

4.5 Gamma slucajna spremenljivka

$$X \sim \Gamma(n, \lambda)$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} & x > 0 \end{cases}$

V povprecju imamo na casovno enoto λ ponovitev dogodka A, X pa je cas med prvo in $(n+1)$ ponovitvijo dogodka A.

4.6 Hi kvadrat slucajna spremenljivka

$$X \sim \chi^2(n) = \Gamma(\tfrac{n}{2}, \tfrac{1}{2})$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} & x > 0 \end{cases}$

Je vsota kvadratov n neodvisnih standardnih normalnih slucajnih spremenljivk.

5 Matematicno upanje

5.1 Matematicno upanje diskretne slucajne spremenljivke

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}$$

oz. zvezne slucajne spremenljivke z gostoto p_X je

$$E(X) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k \text{ oz.}$$
$$E(X) = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)\,dx.$$

Za vsaki slucajni spremenljivki X in Y (lahko sta odvisni, lahko je ena zvezna in druga diskretna) ter $a, b \in R$ velja

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

5.2 Matematicno upanje funkcije $f : R \to R$ slucajne spremenljivke X je

$$E(f(X)) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} f(x_k) p_k \text{ oz.}$$
$$E(f(X)) = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_X(x)\,dx.$$

5.3 Matematicna upanja dss in zss

- $X \sim Pois(\lambda) \implies E(x) = \lambda$
- $X \sim Pascal(n, p) \implies E(X) = \frac{n}{p}$
- $X \sim B(n, p) \implies E(X) = np$
- $X \sim G(p) \implies E(X) = \frac{1}{p}$
- $X \sim H(K, N - K, n) \implies E(X) = \frac{nK}{K + (N-K)}$
- $X \sim \epsilon(\lambda) \implies E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $X \sim U[a, b] \implies E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $X \sim N(\mu, \sigma) \implies E(X) = \mu$
- $X \sim \chi^2(n) \implies E(X) = n$

6 Disperzija in std. odklon

7.1 Disperzija ali *varianca* slucajnje spremenljivke X je definirana kot

$$D(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

Za $a, b \in R$ velja

$$D(aX + b) = a^2 D(X).$$

Ce sta X in Y *neodvisni* je

$$E(XY) = E(X)E(Y) \text{ in}$$
$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

7.2 Standardni odklon slucajnje spremenljivke X je enak

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Ponovitev analize

appx. Odvodi

1. $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$
2. $x^n = nx^{n-1}$
3. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
5. $\sin(ax) = a\cos ax$
6. $\cos(ax) = -a\sin(ax)$
7. $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $e^a x = ae^{ax}$
9. $a^x = a^x \ln a$
10. $x^x = x^x(1 + \ln x)$
11. $lnx = \frac{1}{x}$
12. $log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

13. $\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
16. $\text{arccot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}$

appx. Integrali

1. $\int x^a \, dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & a \neq -1 \\ \ln|x| + C & a = -1 \end{cases}$
2. $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} + C$
4. $\int e^x \, dx = e^x + C$
5. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \cos(ax) \, dx = \frac{sin(ax)}{a} + C$
7. $\int \sin(ax) \, dx = \frac{-cos(ax)}{a} + C$
8. $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$

Integriranje absolutnih vrednosti (primer): Imamo funkcijo $f(x) = |x|$, ki je zvezna na intervalu $[-1, 1]$ Ce hocemo to funkcijo in zelimo izracunati njeno *porazdelitveno* funkcijo integrirati locimo 2 primera:

1. $-1 \leq x < 0$
   $F(x) = \int_{-1}^{x} |t| \, dt = \int_{-1}^{x} -t \, dt = -\frac{t^2}{2}|_{-1}^{x} = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$
2. $0 \leq x < 1$
   $F(x) = \int_{-1}^{x} |t| \, dt = \int_{-1}^{0} -t \, dt + \int_{0}^{x} t \, dt = -\frac{t^2}{2}|_{0}^{-1} + -\frac{t^2}{2}|_{0}^{x} = \frac{1}{2}(1 + x^2)$

$\sqrt[n]{x} = (x)^{\frac{1}{n}}$