Slide04 必做题

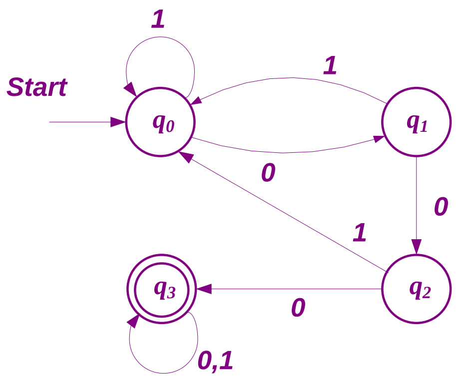
*!Exercise 2.2.2

参考解答： 从"课程文件"中下载网页文件，从中找到参考解答

Exercise 2.2.4 (b)

参考解答：取初态为 q_0，q_1 代表前一个输入字符为 *0*，q_2 代表前两个输入字符为子串 *00*，q_3 代表输入字符串中至少包含一个 *000* 字串，即 q_3 为终态。用转移表或转移图给出结果均可。

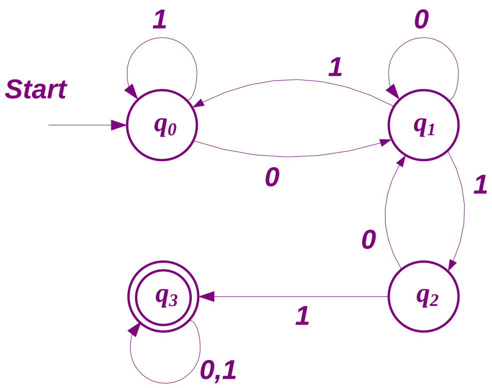
	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_3	q_0
$* q_3$	q_3	q_3



Exercise 2.2.4 (c)

参考解答：取初态为 q_0，q_1 代表前一个输入字符为 *0*，q_2 代表前两个输入字符为子串 *01*，q_3 代表输入字符串中至少包含一个 *011* 字串，即 q_3 为终态。用转移表或转移图给出结果均可。

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
$* q_3$	q_3	q_3



! Exercise 2.2.5(d)

参考解答：取每个状态为 $q_{i,j}$ 的形式，这里 i,j 满足：$0\le i \le 4$, $0\le j \le 2$。 $q_{i,j}$ 的含义：已扫描的输入串中 0 的个数被 5 除余 i，1 的个数被 3 除余 j。初态为 $q_{0,0}$，终态集只包含状态 $q_{0,0}$。

由于状态数目为 15，较多，所以只给出转移表：

	0	1
→ * $q_{0,0}$	$q_{1,0}$	$q_{0,1}$
$q_{0,1}$	$q_{1,1}$	$q_{0,2}$
$q_{0,2}$	$q_{1,2}$	$q_{0,0}$
$q_{1,0}$	$q_{2,0}$	$q_{1,1}$
$q_{1,1}$	$q_{2,1}$	$q_{1,2}$
$q_{1,2}$	$q_{2,2}$	$q_{1,0}$
$q_{2,0}$	$q_{3,0}$	$q_{2,1}$
$q_{2,1}$	$q_{3,1}$	$q_{2,2}$
$q_{2,2}$	$q_{3,2}$	$q_{2,3}$
$q_{3,0}$	$q_{4,0}$	$q_{3,1}$
$q_{3,1}$	$q_{4,1}$	$q_{3,2}$
$q_{3,2}$	$q_{4,2}$	$q_{3,0}$
$q_{4,0}$	$q_{0,0}$	$q_{4,1}$
$q_{4,1}$	$q_{0,1}$	$q_{4,2}$
$q_{4,2}$	$q_{0,2}$	$q_{4,0}$

Exercise 2.2.7 ***Let A be a DFA and q a particular state of A, such that***

$\delta(q,a) = q$ for all input symbols a. Show by induction on the length of the input that for all input strings w, $\hat{\delta}(q,w) = q$.

参考解答 归纳于 ***w*** 的长度.

1 设$|w| = 0$, 即 $w = \varepsilon$.
由定义, $\hat{\delta}(q,\varepsilon) = q$

2 设$|w| = n+1$, 且 $w = xa$, 其中 a 为一个输入符号. 显然, $|x| = n$.
由归纳假设, $\hat{\delta}(q,x) = q$.
所以, $\hat{\delta}(q,w) = \hat{\delta}(q,xa) = \delta(\hat{\delta}(q,x), a) = \delta(q,a) = q$.

Exercise 2.3.2

参考解答：注意：对于该题目，不要遗漏了状态 Φ .

	0	1
→ {p}	{q,s}	{q }
* {q}	{r}	{q,r}
* {q,s}	{r}	{p,q,r}
* {q,r}	{r,s}	{p,q,r}
{r}	{s}	{p}
* {p,q,r}	{q,r,s}	{p,q,r}
* {r,s}	{s}	{p}
* {s}	ϕ	{p}
* {q,r,s}	{r,s}	{p,q,r}
ϕ	ϕ	ϕ

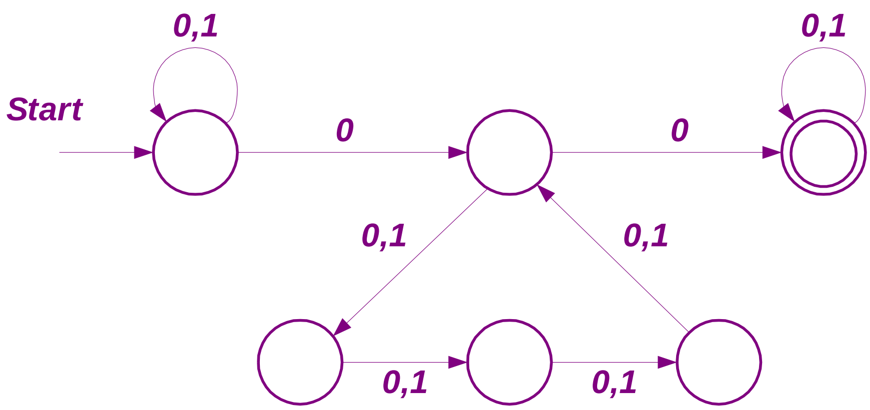
Exercise 2.3.4 (b)

参考解答：大部分同学没有困难，注意不要遗漏单个字符的情形. 如下是一种解法：

$Q=\{q_s, q_0, q_1, \ldots, q_9, q_f\}$, $\sum=\{0,1, \ldots, 9\}$,
初态 q_s,
终态集 $\{ q_f\}$,
$\delta(q_s,a)= \{ q_k \mid k\neq a \}\cup\{ q_f\}$;
$\delta(q_k,a)= \{ q_k\}$, if $k\neq a$;
$\delta(q_k,a)= \{ q_f\}$, if $k=a$.
其中，$k = 0,1, \ldots, 9$.

Exercise 2.3.4 (c)

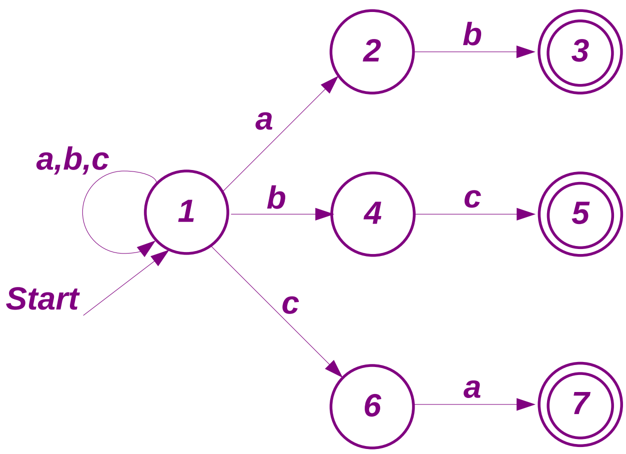
参考解答：题目要求被接受的字符串中存在两个 *0*，它们之间的字符数目为 *0*，*4*，*8*，*12*，…，即 *4* 的倍数。，如下状态图代表一种解法



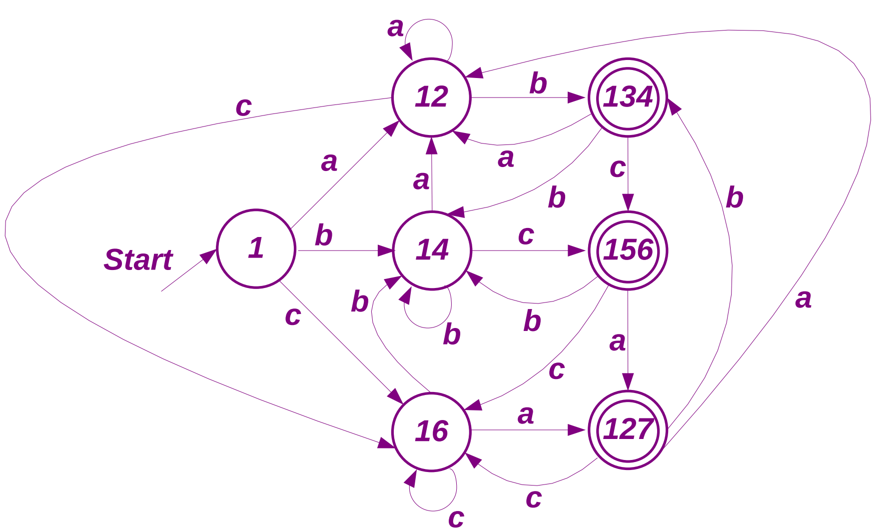
Exercise 2.4.2 (c)

参考解答：

假设 Exercise 2.4.1 (c) 的结果为



依 2.4 节的方法，Exercise 2.4.2 (c) 的结果为



Exercise 2.5.2

参考解答：

a) Compute the ε - closure of each state.

ECLOSE(p) = {p,q,r}

ECLOSE(q) = { q }

ECLOSE(r) = { r}

b) Give all the strings of length three or less accepted by the automaton.

ε , a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc, baa, bab, bac, bca, bcb, bcc, caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc.

c) Convert the automata to a DFA.

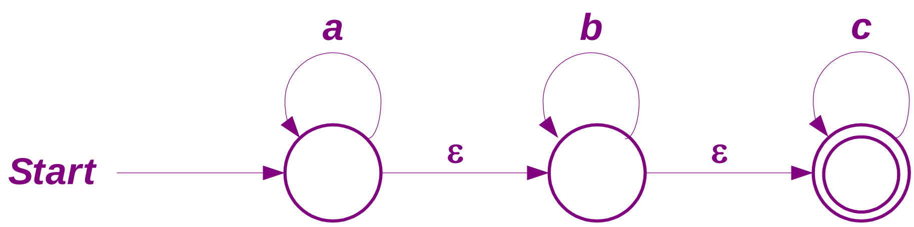
		a	b	c
→	* {p,q,r}	{p,q,r}	{q,r }	{p,q,r}
	* {q,r}	{p,q,r}	{ r}	{p,q,r}
	* {r}	ϕ	ϕ	ϕ
	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ

Exercise 2.5.3 设计下列语言的 ε - NFA. 注意应用 ε-转移简化你的设计.

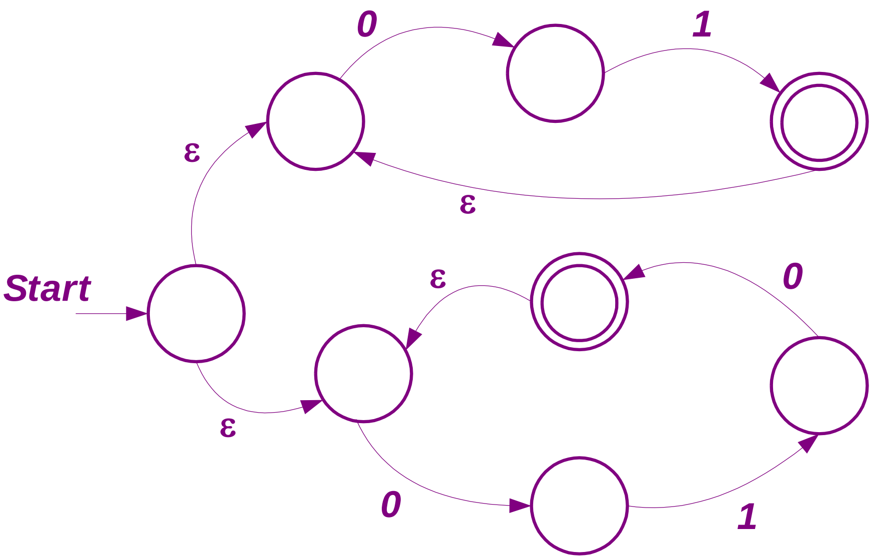
a) The set of strings consisting of zero or more a's followed by zero or more b's, followed by zero or more c's.

! b) The set of strings consisting of either 01 repeated one or more times or 010 repeated one or more times.

参考解答: a)



!b)



Exercise 4.4.2

对图 4.15 的 DFA 重复 Exercise 4.4.1 的工作.

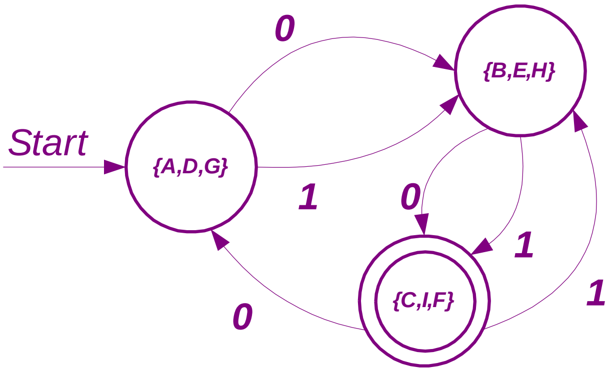
a) 画出填表算法所用的填充表，并标记可区别状态偶对.

b) 构造等价的最小状态自动机.

参考解答:

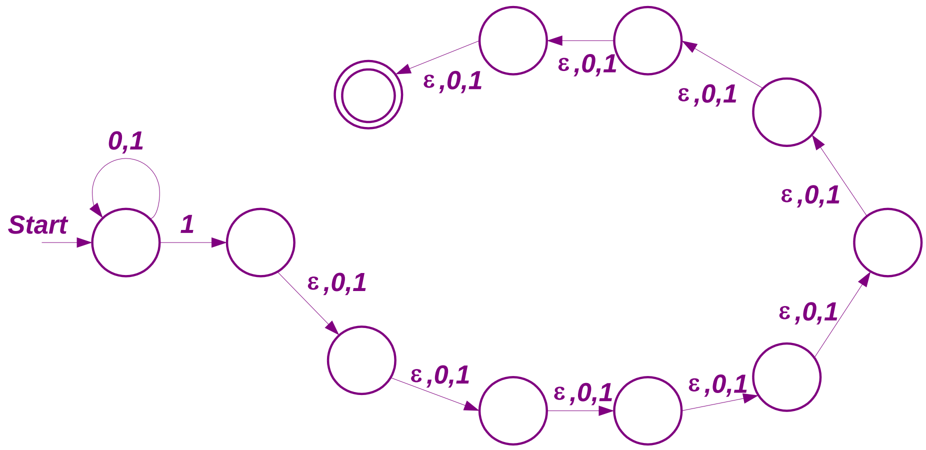
a) (A,D), (A,G),(B,E),(B,H),(C,F),(C,I),(D,G),(E,H),(F,I).

b) 等价类: {A,D,G}, {B,E,H}, {C,I,F}. 等价的最小状态 DFA 为



!Exercise 2.5.3(c)

参考解答:



Slide04 思考题

!Exercise 2.2.5(b)

参考解答:

状态集 $Q=\{ q_i \mid 0\le i<2^{10} \}$， 字母表 $\Sigma=\{0,1\}$， 初态$= q_0$， $F=\{ q_i \mid 2^9\le i<2^{10} \}$

$\delta(q_i,0)= q_k$； 其中 $k=2i \bmod 2^{10}$

$\delta(q_i,1)= q_k$； 其中 $k=(2i+1) \bmod 2^{10}$

!!*Exercise 2.2.6(a)

参考解答: 从"课程文件"中下载网页文件，从中找到参考解答

!! Exercise 2.2.6(b)

参考解答:

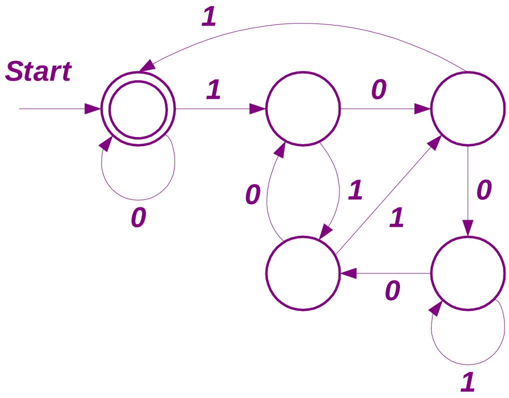
解答一. 借鉴（a ）的思想，状态中应包含当前已读过的输入串反向后的数字除以 5 的余数，然后考虑读入当前符号后余数的可能变化；所不同之处是数字是倒过来读的，因此大小与已有字符串的长度有关，但通过分析，长度对余数的影响也是有规律的，变化周期是 $1\to2\to4\to3\to1$。这样，*DFA* 的状态应该由上述两方面信息构成。：以下是其中一个代表解法：

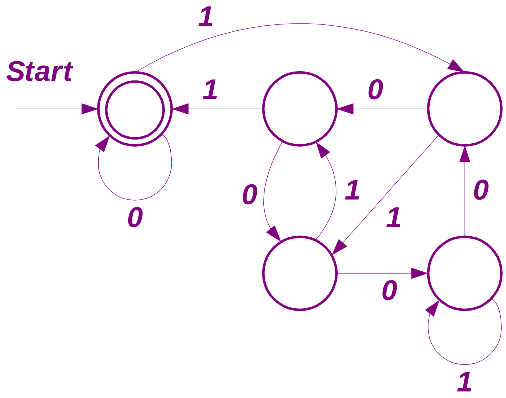
$Q=\{ q_{ij} \mid 0\le i \le4, 0\le j\le3 \}$， $\Sigma=\{0,1\}$， $q_0 = q_{00}$， $F=\{ q_{0j} \mid 0\le j\le3\}$

$\delta(q_{ij},0)= q_{ik}$； 其中 $k=(j+1) \bmod 4$

$\delta(q_{ij},1)= q_{sk}$； 其中 $s=(i+2^j) \bmod 5$， $k=(j+1) \bmod 4$

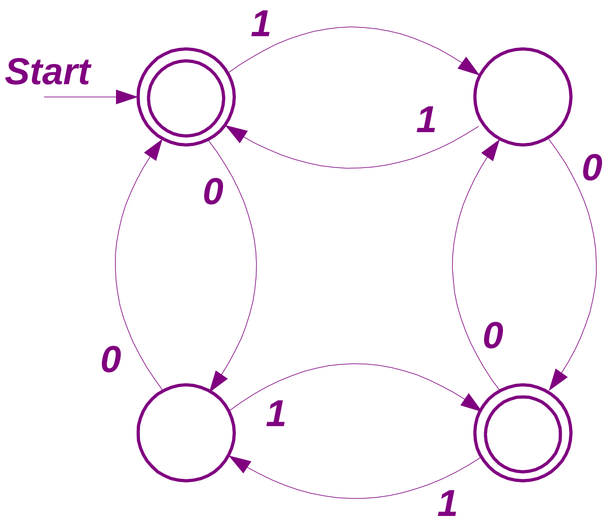
解答二. 利用（a ）的结果，若允许以 *0* 打头的串，则如下左图的 *DFA* 可接受的二进制串能被 5 整除；将该转移图的所有转移边反向，则可得到一个满足条件的 *DFA*。这里注意：允许出现以 *0* 打头的情况。





（附加的思考题）

思考题　定义 { *0*, *1* } 上的语言 *L* = { *w* ｜*w* 中 *0* 、*1* 数目的奇偶性相同 }. 试证明 *L* 是如下 *DFA* 的语言:



参考解答:　**设左上的状态为 P，右上的状态为 Q，右下的状态为 R，左下的状态为 S. δ 为此 DFA A 的转移函数。**

首先证明，对任何 w ∈ L，δ′(P，w)=P 或 δ′(P，w)=R，即证 w ∈ L(A)。

归纳于 w 的长度 (因 *w* 中 *0* 、*1* 数目的奇偶性相同，所以 w 具有偶数长度):

（1）　基础：｜w｜=0。 必有，δ′(P，w)=P，命题成立。

（2）　归纳：设｜w｜=2k (k≥0)时，命题成立。则当｜w｜=2（k+1）时，可令 $w=w_1w_2$, 其中｜w_1｜=2k、｜w_2｜=2。根据归纳假设，δ′(P，w_1)=P 或 δ′(P，w_1)=R。

若 δ′(P，w_1)=P，则有：当 w_2=01 或 w_2=10 时，δ′(P，w)=R；当 w_2=00 或 w_2=11 时，δ′(P，w)=P。

若 δ′(P，w_1)=R，则有：当 w_2=01 或 w_2=10 时，δ′(P，w)=P；当 w_2=00 或 w_2=11 时，δ′(P，w)=R。

所以｜w｜=2（k+1）时，上述命题成立。

再证明另一方面，对任何 w ∈ L(A)，有 w ∈ L。为方便，先利用互归纳法证明以下 4 个相关命题：

a. 若δ'(P，w)=P，则 w 中包含偶数个 0 偶数个 1；
b. 若δ'(P，w)=Q，则 w 中包含偶数个 0 奇数个 1；
c. 若δ'(P，w)=R，则 w 中包含奇数个 0 奇数个 1；
d. 若δ'(P，w)=S，则 w 中包含奇数个 0 偶数个 1；

归纳于 w 的长度：

（1） 基础：$|w|$=0。 必有，w 中包含偶数个 0 偶数个 1。而此时只有δ'(P，w)=P 成立，所以上述 4 个命题在$|w|$=0 时均成立。

（2） 归纳：设$|w|$=k ($k\geq 0$)时，上述 4 个命题均成立。下面证明当$|w|$=k+1 时，上述 4 个命题仍然成立。令 w=w′a，其中 a=0 或 a=1。分以下 4 种情形讨论：

case1: δ'(P，w′)=P, 根据归纳假设，w′ 中包含偶数个 0 偶数个 1.

若 a=0，则δ'(P，w)=S，上述 4 个命题中只有命题 d 的前提部分成立，而该命题的结论部分也成立，所以上述 4 个命题均成立；若 a=1，则δ'(P，w)=Q，上述 4 个命题中只有命题 b 的前提部分成立，而该命题的结论部分也成立，所以上述 4 个命题均成立。

Case2: δ'(P，w′)=Q, 根据归纳假设，w′ 中包含偶数个 0 奇数个 1.

若 a=0，则δ'(P，w)=R，上述 4 个命题中只有命题 c 的前提部分成立，而该命题的结论部分也成立，所以上述 4 个命题均成立；若 a=1，则δ'(P，w)=P，上述 4 个命题中只有命题 a 的前提部分成立，而该命题的结论部分也成立，所以上述 4 个命题均成立。

Case3: δ'(P，w′)=R, 根据归纳假设，w′ 中包含奇数个 0 奇数个 1.

若 a=0，则δ'(P，w)=Q，上述 4 个命题中只有命题 b 的前提部分成立，而该命题的结论部分也成立，所以上述 4 个命题均成立；若 a=1，则δ'(P，w)=S，上述 4 个命题中只有命题 d 的前提部分成立，而该命题的结论部分也成立，所以上述 4 个命题均成立。

Case4: δ'(P，w′)=S, 根据归纳假设，w′ 中包含奇数个 0 偶数个 1.

若 a=0，则δ'(P，w)=P，上述 4 个命题中只有命题 a 的前提部分成立，而该命题的结论部分也成立，所以上述 4 个命题均成立；若 a=1，则δ'(P，w)=R，上述 4 个命题中只有命题 c 的前提部分成立，而该命题的结论部分也成立，所以上述 4 个命题均成立。

这样，当$|w|$=k+1 时，上述 4 个命题仍然成立。

所以，对任何 $w \in L(A)$，有 $w \in L$。

证毕。