

Slide11 必做题

Exercise 7.2.1(b)

用 CFL 泵引理来证明下面的语言都不是上下文无关的:

$$b) \{a^n b^n c^i \mid i \leq n\}.$$

参考解答:

对于任意的 $n > 0$, 存在 $z = a^n b^n c^n$ 属于该语言.

令 $z = uvwxy$, 其中, $|vwx| \leq n$, $vx \neq \varepsilon$,

若 vwx 不包含 c , 取 $k=0$; 若 vwx 包含 c , 取 $k=2$; 这样就有 $uv^k wx^k y$ 不属于该语言(因为其中 c 的数目至少多于 a, b 之一),

因此由 pumping 引理, 该语言不是上下文无关语言.

*!Exercise 7.2.1(d)

用 CFL 泵引理来证明下面的语言都不是上下文无关的:

$$b) \{0^i 1^j \mid j = i^2\}.$$

参考解答:

从"课程文件"中下载网页文件, 从中找到参考解答。

*!Exercise 7.3.1(b)

参考解答:

从"课程文件"中下载网页文件, 从中找到参考解答。

Exercise 7.3.2 考虑以下两个语言:

$$L_1 = \{a^n b^{2n} c^m \mid n, m \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^n b^m c^{2m} \mid n, m \geq 0\}$$

a) 通过分别给出上述语言的文法来证明这些语言都是上下文无关的。

! b) $L_1 \cap L_2$ 是 CFG 吗? 证明你的结论的正确性。

参考解答:

a) 定义文法 G_1 的产生式集合为:

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow aAbb \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow cB \mid \varepsilon$$

定义文法 G_2 的产生式集合为:

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow aA \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow bBcc \mid \varepsilon$$

可以证明 $L_1=L(G_1)$, $L_2=L(G_2)$.

b) $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^{2n} c^{4n} \mid n \geq 0\}$ 不是 CFG 可以用 Pumping 引理证明之.

对于任意的 n , 存在 $z=a^n b^{2n} c^{4n}$ 属于该语言.

令 $z=uvwxy$, 其中, $|vwx| \leq n$, $vx \neq \varepsilon$,

若取 $k=0$, 则 uv^kwx^ky 不属于该语言(分析略), 因此该语言不是上下文无关语言.

Exercise 7.3.6 形式化地证明定理 7.25: CFL 在反向运算下是封闭的.

(附: 定理 7.25: 如果 L 是 CFL, 则 L^R 也是.)

参考解答:

做 $L=L(G)$, $G=(V, T, P, S)$. 构造 $G^R=(V, T, P^R, S)$, 其中 P^R 的每一产生式是 P 中的产生式的反向, 即 " $A \rightarrow \alpha^R$ " $\in P^R$ iff " $A \rightarrow \alpha$ " $\in P$.

下面将证明, 对任意 $w \in T^*$, $S \Rightarrow_G^* w$ iff $S \Rightarrow_{G^R}^* w^R$.

假设 $S \Rightarrow_G^* w$, 归纳于该推导的长度 n .

$n=1$ 时, $S \rightarrow w$ 为 G 中的一个产生式, 因而 $S \rightarrow w^R$ 为 G^R 中的一个产生式, 所以 $S \Rightarrow_{G^R}^* w^R$;

$n>1$ 时, 设第一步推导使用了产生式 $S \rightarrow X_1 X_2 \dots X_k$, 其中 $X_i \in V \cup T$, ($1 \leq i \leq k$). 若 $X_i \in V$, 则存在 $w_i \in T^*$, 使得在少于 n 步内 $X_i \Rightarrow_G^* w_i$, 由归纳假设, $X_i \Rightarrow_{G^R}^* w_i^R$; 若 $X_i \in T$, 则令 $w_i = X_i$, 自然有 $X_i \Rightarrow_{G^R}^* w_i^R$. 同时, $w = w_1 w_2 \dots w_k$. 又根据构造方法, G^R 中包含产生式 $S \rightarrow X_k X_{k-1} \dots X_1$. 这样, 我们有

$$S \Rightarrow_{G^R}^* X_k X_{k-1} \dots X_1 \Rightarrow_{G^R}^* w_k^R X_{k-1} \dots X_1 \Rightarrow_{G^R}^* w_k^R w_{k-1}^R \dots w_1^R \Rightarrow_{G^R}^* \dots \Rightarrow_{G^R}^* w_k^R w_{k-1}^R \dots w_1^R = (w_1 w_2 \dots w_k)^R = w^R$$

同理可证, 如果 $S \Rightarrow_{G^R}^* w^R$, 则有 $S \Rightarrow_G^* w$.

由此可知, $L^R=L(G^R)$. 所以, L^R 是上下文无关语言.

Exercise 7.4.3

对于例 7.34 种的文法 G , 用 CYK 算法来确定下列的串是否属于 $L(G)$:

c) aabab.

(附: 例 7.34: 如下是一个 CNF 文法 G 的产生式:

$$S \rightarrow AB \mid BC$$

$$A \rightarrow BA \mid a$$

$$B \rightarrow CC \mid b$$

$$C \rightarrow AB \mid a$$

)

参考解答:

由 CYK 算法构造的针对 aabab 的表如下:

		$\{S, C\}$			
	$\{S, A, C\}$	$\{B\}$			
	$\{B\}$	$\{B\}$	$\{S, C\}$		
	$\{B\}$	$\{S, C\}$	$\{S, A\}$	$\{S, C\}$	
	$\{A, C\}$	$\{A, C\}$	$\{B\}$	$\{A, C\}$	$\{B\}$
	a	a	b	a	b

由于 $S \in X_{15}$ (参见下表), 所以 $aabab \in L(G)$.

		X_{15}			
	X_{14}	X_{25}			
	X_{13}	X_{24}	X_{35}		
	X_{12}	X_{23}	X_{34}	X_{45}	
	X_{11}	X_{22}	X_{33}	X_{44}	X_{45}
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

第十一讲思考题

!Exercise 7.2.1 (f)

参考解答:

对于任意的 n , 存在 $z = 0^n 1 1 0^n 0^n 1$ 属于该语言.

令 $z = uvwxy$, 其中, $|vwx| \leq n$, $vx \neq \varepsilon$,

取 $k=0$, 有 uv^kwx^ky 不属于该语言 (原因不详述了, 请同学们自己补充吧).

因此由 pumping 引理, 该语言不是上下文无关语言.