第一周作业

第 1 章习题 1

计算球体积要使相对误差限为 1%，问度量半径 R 时允许的相对误差限是多少？

解：

球的半径为 $\mathbf{R}$，则球体积为$\mathbf{V}=\mathbf{f}(\mathbf{R})=\frac{4}{3}\boldsymbol{\pi}\mathbf{R}^3$。因此球体积的误差限为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{V}^*)=\mathbf{f}(\mathbf{R}^*)-\mathbf{f}(\mathbf{R})=|\mathbf{f}'(\mathbf{R})|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}^*)=4\boldsymbol{\pi}(\mathbf{R}^*)^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}^*)$$

所以球体积的相对误差限为

$$\varepsilon_r = \left|\frac{\varepsilon(V^*)}{V^*}\right| = \left|\frac{4\pi(R^*)^2\varepsilon(R^*)}{\frac{4}{3}\pi(R^*)^3}\right| = 3\left|\frac{\varepsilon(R^*)}{R^*}\right| = 3\varepsilon_r(R^*) = 1\%$$

有$\varepsilon_r(R^*) = \frac{1}{3}\times 1\% \approx 0.0033$

故度量半径 R 时允许的相对误差限是 0.0033。

第 1 章习题 2

考虑正弦函数 sin(x)的求值，特别是自变量 x 发生扰动 h 时函数值的误差。

（1）估计 sin(x)的绝对误差和相对误差。

（2）估计条件数

（3）自变量 x 为何值时，这个问题高度敏感。

解：

由于 sin(x+h)-sin(x)≈ (sin’(x)) (x+h-x)= h cos(x)

扰动 h 产生的绝对误差为 h cos(x)。

相对误差

$$\epsilon = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{\sin(x)} = h\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{h}{\tan(x)}$$

条件数

$$\mathrm{cond} = \left|\frac{x\sin'(x)}{\sin(x)}\right| = \left|\frac{x\cos(x)}{\sin(x)}\right| = |\frac{x}{\tan(x)}|$$

可见当 **x=kπ**，**k!=0** 的时候，条件数会变得很大。

第 1 章习题 4

设$\mathbf{Y_0 = 28}$，按递推公式

$$\mathbf{Y_n = Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783}\ (n = 1, 2, \ldots)}$$

计算到$\mathbf{Y_{100}}$。若取$\mathbf{\sqrt{783} \approx 27.982}$（5 位有效数字），计算$\mathbf{Y_{100}}$将有多大误差？

解：

由递推公式，得

$$\mathbf{Y_{100} = Y_{99} - \frac{1}{100}\sqrt{783} = \left(Y_{98} - \frac{1}{100}\sqrt{783}\right) - \frac{1}{100}\sqrt{783} = \cdots}$$

$$\mathbf{= Y_0 - \sqrt{783}}$$

由于有$\sqrt{783} \approx 27.982$，则

$$Y_{100}{}^{*} = Y_0 - 27.982$$

因此

$$|e(Y_{100}{}^{*})| = |Y_{100}{}^{*} - Y_{100}| = \left|\sqrt{783} - 27.982\right| \le \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

所以，计算Y_{100}的误差限为$\varepsilon(Y_{100}{}^{*}) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$

第 1 章习题 7

计算$f = (\sqrt{2} - 1)^6$，取$\sqrt{2} \approx 1.4$，利用下列等式计算，哪一个得到的结果最好？

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{6}}, \quad \left(3-2\sqrt{2}\right)^{3}$$

$$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^{3}}, \quad 99-70\sqrt{2}。$$

解：

避免误差危害的四项基本原则是：①要避免中间结果出现上溢或下溢；②要避免大数“吃掉”小数；③要避免符号相同的两近似数相减；④注意简化步骤，减少运算次数。

第二个和第四个明显违背原则②，结果不好。

第三个和第一个比，除法运算次数相同，但乘法运算次数是后者的一半，根据原则④，$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^{3}}$得到的结果相对最好。

第 1 章习题 9(a)

证明在规范化浮点数系统中，上溢值 OFL 为

$$\mathbf{OFL} = \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{U+1}}(\mathbf{1} - \boldsymbol{\beta}^{-\mathbf{p}})$$

解：

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\beta}} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\beta}}\right)^{2} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\beta}}\right)^{3} + \cdots + \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\beta}}\right)^{\mathbf{p-1}}\right)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{U}}$$

$(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x}$用等比数列求和，即可得到所求。

第二周作业

第 1 章习题 8

考虑 $f(x,y)=x-y$，用 $|x|+|y|$ 度量输入值 (x,y) 的大小，并假定 $|x|+|y|\approx 1$，$x-y=\epsilon$，再考虑 x，y 分别产生扰动的时候，证明条件数 $cond(f)\approx 1/\epsilon$。

将这个结论与减法的敏感性以及抵消现象联系起来，说明了什么？

解：

针对 x 扰动，条件数

$$\mathbf{cond}=\left|\frac{\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{f(x,y)}}{\dfrac{(x+\Delta x,y)-(x,y)}{(x,y)}}\right|=\left|\frac{\dfrac{(\Delta x)}{x-y}}{\dfrac{|x+\Delta x|-|x|}{|x|+|y|}}\right|=\left|\frac{|x|+|y|}{x-y}\right|\approx\frac{1}{\varepsilon}$$

同理可得到对 y 的扰动下的条件数。

加减法运算本身对扰动并不敏感，但是如果参加运算的数据发生抵消现象（结果接近零）的时候，条件数也会变得很大。

这也验证了数值计算中应该避免的第二个原则：应该避免两个近似数相减。

第 2 章习题 1(1)

为求方程$\mathbf{x^3-x^2-1=0}$在$\mathbf{x_0=1.5}$附近的一个根，设将方程改写成下列等价形式，并建立相应的迭代公式。$\mathbf{x=1+\ 1/x^2}$，迭代公式$\mathbf{x_{k+1}=1+\ 1/x_k^2}$。

选择一个合适的$[\mathbf{a},\mathbf{b}]$区间使该迭代公式收敛，使用利普希兹方法证明迭代法的收敛，然后求出具有四位有效数字的近似解。

解：

不妨设区间$[\mathbf{a},\mathbf{b}]$为$[\mathbf{1.45},\mathbf{1.55}]$，$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})=\mathbf{1+\ 1/x^2}$，则

$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$的值域为$[\mathbf{1.42},\mathbf{1.48}]$，即对$\forall\mathbf{x}\in[\mathbf{1.45},\mathbf{1.55}]$，有$\mathbf{1.45}\leq\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})\leq\mathbf{1.55}$；

同时

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| = \left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right| = \frac{x+y}{x^2y^2}|x-y| = \left(\frac{1}{xy^2}+\frac{1}{x^2y}\right)|x-y|$$

$$\leq \frac{2}{1.45^3}|x-y| \approx 0.66|x-y|$$

所以利普希兹系数 L=0.66，该迭代公式收敛。计算过程略。

第 2 章习题 2

给定函数$f(x)$，设对一切x，$f'(x)$存在且$0 < m \leq f'(x) \leq M$，证明对于范围$0 < \lambda < \frac{2}{M}$内的任意定数$\lambda$，迭代过程$x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$均收敛于$f(x) = 0$的根$x^*$。

证明：

依题意$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) > \boldsymbol{m} > 0$，所以$\mathbf{f}(\mathbf{x})$为单调递增函数。所以$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$只存在唯一的根$\mathbf{x}^*$，同时存在$\mathbf{x_0}$，使得$\mathbf{f}(\mathbf{x_0}) < \mathbf{0}$。

根据迭代公式，设迭代函数为$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 则$\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}'(\mathbf{x})$。

由于$\boldsymbol{\lambda} > 0$，同时$\mathbf{0} < m \leq f'(x) \leq M$，故

$$\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{M} < \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x}) < \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda m}$$

而$\mathbf{0} < \boldsymbol{\lambda} < \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{M}}$，即

$$\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{M} > -1 \quad 1 - \lambda m < 1$$

所以

$$|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})| \leq \mathbf{max}\{|\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{M}|, |\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{m}|\} < \mathbf{1}$$

因此，迭代过程$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{x_k} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\mathbf{x_k})$收敛于$\mathbf{x}^*$。

第 2 章习题 3

$\sqrt{a}$牛顿公式$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right), x_0>0$

证明对一切$k=1,2,\ldots, x_k\geq\sqrt{a}$且序列$x_1,x_2,\ldots$递减。

证明：

由递推关系易知，x_{k+1}与x_k同号。而$x_0>0$

所以$x_k>0 \quad k=1,2,\ldots$

于是，对$\forall k>0$，由平均不等式

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)\geq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_k\cdot\frac{a}{x_k}}=\sqrt{a}$$

另外

$$\mathbf{x_{k+1} - x_k = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_k} - x_k\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a - {x_k}^2}{x_k}\right) < 0}$$

所以，序列$\mathbf{x_1, x_2, \ldots}$是递减的。

第 2 章习题 4

应用牛顿法于方程$x^3-a=0$，导出求立方根$\sqrt[3]{a}$的迭代公式，并讨论其收敛性。

解：

设$f(x)=x^3-a$，则$f'(x)=3x^2$，所以，求立方根$\sqrt[3]{a}$的 Newton 迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-a}{3x_k^2}=\frac{2}{3}x_k+\frac{a}{3x_k^2}$$

令$\varphi(x)=\frac{2}{3}x+\frac{a}{3x^2}=\frac{2x^3+a}{3x^2}$

则$\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})=\frac{2}{3}\left(1-\frac{a}{x^3}\right)$,$\boldsymbol{\varphi}''^{(x)}=\frac{2a}{x^4}$

因为$x^*=\sqrt[3]{a}$，即

$$\varphi(x^*)=0 \qquad \varphi'(x^*)=0$$

所以，该求立方根$\sqrt[3]{a}$的 Newton 迭代公式至少局部二阶收敛。

如果采用 p 阶收敛判据的话

$$\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}=\frac{(x_k-\sqrt[3]{a})\left(2x_k+\sqrt[3]{a}\right)}{3x_k^2}=\frac{(x_k-x^*)(2x_k+x^*)}{3x_k^2}$$

于是有

$$\lim_{x_k \to x^*} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \lim_{x_k \to x^*} \frac{(2x_k + x^*)}{3x_k^2} = \frac{1}{x^*} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

和上面的结论相同，至少是局部二阶收敛。

注意：当 a=0 时，需要特别考虑。当 a=0 时有

$$\lim_{x_k \to x^*} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \infty$$

所以此时为一阶局部收敛。

第 2 章习题 6

牛顿法中设 x*为 f(x)=0 的单根，且 f’(x*)!=0。迭代公式φ(x)，

求证

$$\boldsymbol{\varphi}''(\mathbf{x}^*) = \frac{\mathbf{f}''(\mathbf{x}^*)}{\mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)}$$

略

第三周作业

第 2 章习题 5

证明迭代公式

$$\mathbf{x_{k+1}} = \frac{\mathbf{x_k(x_k^2 + 3a)}}{\mathbf{3x_k^2 + a}}$$

是计算$\sqrt{\mathbf{a}}$的三阶方法。假定初值$\mathbf{x_0}$充分靠近根$\mathbf{x}^*$，求$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\infty}(\sqrt{\mathbf{a}} - \mathbf{x_{k+1}})/(\sqrt{\mathbf{a}} - \mathbf{x_k})^3$ 。

解：

设$\mathbf{x}^* = \mathbf{a}$，且

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{x}^2 + 3\mathbf{a})}{3\mathbf{x}^2 + \mathbf{a}}$$

则

$$\boldsymbol{\varphi}'^{(\mathbf{x})} = \frac{3(\mathbf{x}^2 - \mathbf{a})^2}{(3\mathbf{x}^2 + \mathbf{a})^2}, \boldsymbol{\varphi}''^{(\mathbf{x})} = \frac{48\mathbf{ax}(\mathbf{x}^2 - \mathbf{a})}{(3\mathbf{x}^2 + \mathbf{a})^3}, \boldsymbol{\varphi}'''(\mathbf{x})$$

$$= \frac{-48\mathbf{a}(9\mathbf{x}^4 - 18\mathbf{ax}^2 + \mathbf{a}^2)}{(3\mathbf{x}^2 + \mathbf{a})^4}$$

故$\varphi'(x)=\varphi''(x)=0\qquad\varphi'''(x)=\frac{3}{2a}\neq 0$

所以，该迭代公式是计算$\sqrt{a}$的三阶方法。

对$x_{k+1}=\varphi(x_k)$作 Taylor 展开如下

$$x_{k+1}-x^*=\varphi(x_k)-\varphi(x^*)$$

$$=\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\varphi''(x^*)\frac{(x_k-x^*)^2}{2!}+\varphi'''(\xi_k)\frac{(x_k-x^*)^3}{3!}$$

ξ_k在x_k和x^*之间

故

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^3}=\frac{1}{3!}\varphi'''(x^*)$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^3}=\frac{1}{3!}\frac{3}{2a}=\frac{1}{4a}$$

第二章第 9 题

用下列方法求 $f(x)=x^3-3x-1=0$ 在 $x_0=2$ 附近的根。根的准确值 $x^*=1.87938524$，要求计算结果有 **4** 位准确的有效数字。

（**1**）用牛顿法

（**2**）用割线法，取 $x_0=2, x_1=1.9$

解：

（1）

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_{k+1})}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 1}{3(x_k^2 - 1)}$$

（2）

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

$$= x_k - \frac{(x_{k+1}^3 - 3x_k - 1)(x_k - x_{k-1})}{(x_k^3 - 3x_k) - (x_{k-1}^3 - 3x_{k-1})}$$

第 3 章习题 1

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0.6} & \mathbf{0.5}\\ \mathbf{0.1} & \mathbf{0.3}\end{bmatrix}$$

计算A的行范数，列范数，2-范数。

解：

$\mathbf{A}$的行范数$\|\mathbf{A}\|_\infty=\mathbf{1.1}$$\mathbf{A}$的列范数$\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{1}}=\mathbf{0.8}$为求$\mathbf{A}$的 2-范数，先求$\mathbf{A^TA}$的特征值

$$\mathbf{A^TA}=\begin{bmatrix}\mathbf{0.37} & \mathbf{0.33}\\ \mathbf{0.33} & \mathbf{0.34}\end{bmatrix}$$

设$\mathbf{A^TA}$的特征值为$\boldsymbol{\lambda}$

$$(\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{0.37})(\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{0.34}) - \mathbf{0.33} \times \mathbf{0.33} = \mathbf{0}$$

解，得$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}} = \mathbf{0.6853}, \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{2}} = \mathbf{0.0247}$

所以，A的 2-范数$\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{2}} = \sqrt{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{max}}} = \sqrt{\mathbf{0.6853}} = \mathbf{0.8278}$。

第三章第 2 题

设 $x \in R^n$ **，求证：** $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$

证明：

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{1 \le i \le n} |x_i|$$

不妨设$|x_k| = \|x\|_\infty$

则$\|x\|_1 = |x_k| + \sum_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne k}} |x_i| \ge |x_k| = \|\bar{x}\|_\infty$

对于任意$1 \le i \le n$，有$|x_i| \le |x_k|$

故$\|x\|_1 = \sum_{1\le i\le n} |x_i| \le n|x_k| \le n\|x\|_\infty$

得证。

第 3 章习题 3

设 $P \in R^{n\times n}$ 且非奇异，又设$\|x\|$为R^n上一向量范数，定义

$\|x\|_P = \|Px\|$，试证明$\|x\|_P$是R^n上向量的一种范数。

证明：从范数的定义出发，证明正定性、齐次性、三角不等式和相容性。

第 3 章习题 5

试证明：如果A是正交阵，则$cond(A)_2 = 1$

证明：根据矩阵条件数和 2 范数定义求证。

第 3 章习题 4

设矩阵$A = \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，其中$\lambda \in R$，证明当$\lambda = \pm\frac{2}{3}$时，$cond(A)_\infty = 1$有

最小值。

证明：

$$\|A\|_\infty = \begin{cases} 3|\lambda| & \left(|\lambda| \ge \dfrac{2}{3}\right) \\ 2 & \left(|\lambda| < \dfrac{2}{3}\right) \end{cases}$$

故有$\|A^{-1}\|_\infty = \dfrac{1}{\min\limits_{\|x\|_\infty} \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}} = \dfrac{1}{\min\limits_{i} \sum\limits_{j=1} a_{ij}} = \begin{cases} 0.5 & \left(|\lambda| \ge \dfrac{2}{3}\right) \\ \dfrac{1}{3|\lambda|} & \left(|\lambda| < \dfrac{2}{3}\right) \end{cases}$

即 $cond(A)_2=\begin{cases}0.5 & \left(|\lambda|\geq\dfrac{2}{3}\right)\\ \dfrac{1}{3|\lambda|} & \left(|\lambda|<\dfrac{2}{3}\right)\end{cases}$，因此有当 $\lambda=\pm\dfrac{2}{3}$ 时，$cond(A)_\infty=1$ 且为最小值。

第 3 章习题 7

证明：

右上角元素 a_1^T 表示经过消去法一步后得到的矩阵元素，由 **Guass** 消去法的原理可知，对 $\forall i,j=2,3,\cdots,n$ 有 $a_{ij}^{(1)}=a_{ij}-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}a_{ij}=a_{ij}-\dfrac{a_{i1}a_{ij}}{a_{11}}$

其中，由于 A 是对称矩阵，有 $a_{ij}=a_{j1}$，其对角位置上的元素为

$a_{ji}^{(1)} = a_{ji} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{i1} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{ij}}{a_{11}} = a_{ij}^{(1)}$，由于$i, j$的任意性，可知$A_2$是对称矩阵。

第 3 章习题 12

分别采用高斯消去法和直接 **LU** 分解法对下述矩阵进行 **LU** 分解，写出矩阵 **L** 和 **U**：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

解：

（1） $U=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$

（2） $U=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -24\end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -5 & 1\end{bmatrix}$

第 3 章习题 13

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\2&2&2&3\\4&2&4&3\\0&0&6&-1\end{bmatrix}$$

（1） $$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{2}{3}&1&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}3&5&6\\0&\frac{2}{3}&1\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

（2）$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ \frac{1}{2}&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}&1\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}4&2&4&3\\ 0&1&0&\frac{2}{3}\\ 0&0&6&-1\\ 0&0&0&\frac{2}{3}\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0\end{bmatrix}$

第 3 章习题 14

设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$均为$n\times n$矩阵，且$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$非奇异，$\boldsymbol{b}$是$n$维向量，要计算$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}^{-1}(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{b}$,

请给出一个合理、高效率的算法流程.

解：

显然应该从右至左，先计算向量和矩阵的乘法，避免矩阵之间的乘法。遇到求逆的时候，应该使用部分主元的 LU 分解法。

$y_1=C^{-1}b+Ab$

$y_2=(2A+I)y_1=2（A\ y_1）+\ y_1$

$x=B^{-1}y_2$

注意 y_2 的运算中数乘 2 可以提出来，减少一部分数乘运算。

答案不止一种，只要避免数乘矩阵，矩阵乘矩阵，并且没有多余的（超过两次）求逆运算，就算正确的解决方法。

解 2：由于求矩阵的逆需要较多计算，因此应该尽量避免求逆运算，故首先将求逆运算转化为一下步骤：

（1）计算$D=2A+I$，原式转化为：$X=B^{-1}DC^{-1}b+B^{-1}DAb$

（2）计算$b_1=Ab, b_2=Ab_1$

（3）设$Cb_3=b$解得b_3

（4）计算$b_4=Db_3$

（5）计算$b_5=Pb_2, b_6=Pb_4;$

（6）求解方程$\begin{cases} Ly_1=b_5, Ux_1=y_1 \\ Ly_2=b_6, Ux_2=y_2 \end{cases}$

（7）计算得到 $x = x_1 + x_2$

第 3 章习题 17

下述矩阵能否分解为**LU**（其中**L**为单位下三角阵，**U**为上三角阵）？若能分解，那么分解是否唯一？

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}，B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}。$$

解答：

一个非奇异矩阵**A**能够分解为**LU**的充分必要条件是，**A**的

各阶顺序主子式$\mathbf{A_i}$的秩与$\mathbf{A}$的的前$\mathbf{i}$列的秩相同。

如果矩阵$\mathbf{A}$能够分解为$\mathbf{LU}$，那么存在唯一的$\mathbf{LU}$分解的充要条件是，$\mathbf{A}$的各阶顺序主子式大于 0。

对于矩阵$\mathbf{A}$，$\mathbf{A_2}$的秩是 1，但$\mathbf{A}$前两列的秩是 2，所以矩阵$\mathbf{A}$不能分解为$\mathbf{LU}$。

对于矩阵$\mathbf{B}$，满足上述第一个条件，可以分解为$\mathbf{LU}$，但$\mathbf{det(B_2) = det(B_3) = 0}$，所以分解不唯一，例如

$$\mathrm{B} = \mathrm{LU} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 0 & -1 \\ & & x-2 \end{bmatrix} \quad (x \in \mathrm{R})$$

第 3 章习题 8

设$\mathbf{A}=(\mathbf{a_{ij}})_\mathbf{n}$是对称正定矩阵，经过高斯消去法一步后，$\mathbf{A}$约化为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_1^T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_2} \end{pmatrix},$$

其中$\mathbf{A_2}=(\mathbf{a_{ij}^{(2)}})_{\mathbf{n-1}}$。证明：$\mathbf{A}$的对角元素$\mathbf{a_{ii}}>\mathbf{0}\ (\mathbf{i}=\mathbf{1},\mathbf{2},\ldots,\mathbf{n})$；$\mathbf{A_2}$对称正定。

解：因为$\mathbf{A}$是正定矩阵，故对任意$\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$有

$$\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} > \mathbf{0}$$

不妨取$\mathbf{X} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$，可以得到$\mathbf{a}_{\mathbf{11}} > \mathbf{0}$。

同理，取$\mathbf{X} = (\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$，其中 1 的位置是$\mathbf{i}$，则可以得到$\mathbf{a}_{\mathbf{ii}} > \mathbf{0}$。

所以$\mathbf{A}$的对角元素$\mathbf{a}_{\mathbf{ii}} > \mathbf{0}\ (\mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n})$。

关于对称前面有证明，然后需要证明$\mathbf{A_2}$是正定的。

第一步 Gauss 消去法的作用相当于$\mathbf{A_2 = L_1 A}$，其中

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & & \\ -\dfrac{\mathbf{a_{21}}}{\mathbf{a_{11}}} & \mathbf{1} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\dfrac{\mathbf{a_{n1}}}{\mathbf{a_{11}}} & & & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

显然$\mathbf{L_1}$是非奇异阵，即对对任意$\mathbf{X} \in \mathbf{R^n}$有$\mathbf{L_1 X} \neq \mathbf{0}$。

因此$\left(\mathbf{L_1^T X}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{A} \left(\mathbf{L_1^T X}\right) > \mathbf{0}$ 即$\mathbf{X^T}\left(\mathbf{L_1 A L_1^T}\right)\mathbf{X} > \mathbf{0}$

故 $\mathbf{L_1AL_1^T}$ 正定，且 $\mathbf{A}$ 对称。而 $\mathbf{L_1AL_1^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_1^T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_2} \end{bmatrix} \mathbf{L_1^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_2} \end{bmatrix}$

同时$\mathbf{a_{11}} > \mathbf{0}$，所以$\mathbf{A_2}$正定。因此，$\mathbf{A_2}$是对称正定矩阵。

过程略，不可以省略选主元。

$$\mathbf{LA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{UA} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{LB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{UB} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{PB} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

第 3 章习题 15

计算矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

的Cholesky分解

解：

过程略，应该采用直接Cholesky分解（平方根法），而不是LDL^T，然后再计算$\mathbf{L}\sqrt{\mathbf{D}}$。

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}1.7321 & 0 & 0\\ 0.5774 & 1.6330 & 0\\ 0 & 0.6124 & 1.6202\end{bmatrix}$$

16、用追赶法解三对角方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解：对三对角矩阵进行LU分解得

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 & \\ & & & -\frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \\ & & \frac{4}{3} & -1 & \\ & & & \frac{5}{4} & -1 \\ & & & & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

即有 $LUX=b$

因 $LY=b$ 解算得 $Y=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}^T$，又因 $UX=Y$ 解算得 $X=\begin{bmatrix}\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}^T$.

18、设矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 严格对角占优，试证明：

（1）对矩阵 A 做部分主元高斯消去时，不需要交换行，即假设经过 $k-1$ 步消去后矩阵 A 变为 $A^{(k)}=\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{n\times n},(k=1,2,\cdots,n-1)$，则

$\left|a_{kk}^{(k)}\right|>\left|a_{sk}^{(k)}\right|,(s>k)$

（2）矩阵 A 非奇异。

证明：

因矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 严格对角占优，即 $\left|a_{jj}\right|\geq\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\left|a_{ij}\right|$ 且至少有一个不等式严格成立，

当因 $k=1$ 时，因 $\left|a_{ii}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1i}\right|\geq\left|a_{ii}\right|-\left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right|\left|a_{1i}\right|$

又因 $\sum_{j=2,j\neq i}\left|a_{ij}-a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right|\leq\sum_{j=2,j\neq i}\left(\left|a_{ij}\right|+\left|a_{i1}\right|\left|\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right|\right)$ 由此得到

$$\left|a_{ii}\right|-\left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right|\left|a_{1i}\right|-\sum_{j=2,j\neq i}\left(\left|a_{ij}\right|+\left|a_{i1}\right|\left|\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right|\right)$$

$$=\left|a_{ii}\right|-\sum_{j=2,j\neq i}\left|a_{ij}\right|-\sum_{j=2,j\neq i}\left|a_{i1}\right|\left|\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right|>0$$

综上，得到$\left|a_{ii}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1i}\right|>\sum_{j=2,j\neq i}\left(a_{ij}+a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right)$

故经过一次消去后 $A^{(1)}$ 仍为按列严格占优，

综上可得：$\left|a_{kk}^{(k)}\right|>\left|a_{sk}^{(k)}\right|(s>k)$

(2) 考虑 A^T 严格对角占优，即 $\det(A)\neq 0$，

则线性方程组 $Ax=0$ 有非零解 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，设 $\left|x_k\right|=\max\left|x_i\right|$，则 $\left|x_k\right|>0$，由假设

$\sum_{j=1} a_{kj} x_j = 0$，即$\left|\sum_{j=1} a_{kj} x_j\right| = \left|-a_{kk} x_k\right| = |a_{kk}||x_k| > |x_k| \sum_{k \neq j} |a_{kj}| \geq \sum_{k \neq j} |a_{kj}||x_k| \geq \left|\sum_{k \neq j} a_{kj} x_k\right|$

与假设矛盾，因此矩阵A非奇异。

第四章第1题

试证明$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A$的充要条件是对任意向量$x$都有$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} x = Ax$

解：

（1）充分条件：

若有$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A$，则$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$，故有$\lim_{k\to\infty} \left\|A^{(k)} - A\right\| = 0$，又因$\left\|A^{(k)} x - Ax\right\| \leq \left\|A^{(k)} - A\right\| \|x\|$

故可得$\left\|A^{(k)} x - Ax\right\| = 0$，即有$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} x = Ax$

（2）必要条件

若有$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} x = Ax$对任意$x$均成立，不妨取$x_i = \left(0, 0, \cdots 1, \cdots, 0\right)^T$，其中第$i$项为1，其余

为0，有

$A^{(k)}x_i=\left(a_{1i}^k,a_{2i}^k,\cdots,a_{ni}^k\right)^T$，同理有 $Ax_i=\left(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni}\right)^T$，当 i 取1,2,3，…,n时即有

$\lim\limits_{k\to\infty}a_{ji}^{(k)}=a_{ji}$，故有 $\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=A$

2、设有方程组 $Ax=b$，其中 A 为实对称正定矩阵，试证明当 $0<\omega<\frac{2}{\beta}(\beta\geq\rho(A))$ 时迭代法 $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\omega\left(b-Ax^{(k)}\right),k=0,1,2,\cdots$ 收敛

解：因A为实对称正定矩阵，$\|A\|_2=\rho(A)=\sqrt{\lambda_{\max}\left(A^TA\right)}$，不妨设 $\rho(A)=\lambda_{\max}$，又因 $\beta\geq\rho(A)$，即 $\beta\geq\lambda_{\max}>0,0<\frac{1}{\beta}<\frac{1}{\lambda_{\max}}$

进而得到 $0<\omega<\frac{2}{\lambda_{\max}}$

又因 $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\omega\left(b-Ax^{(k)}\right)=(I-\omega A)x^{(k)}+\omega b$，$(I-\omega A)$ 也是对称矩阵，不妨设 $\|I-\omega A\|_2=\lambda_{\max}$，即有 $|\rho(I-\omega A)|\in(0,1)$，又因

$I-(I-\omega A)=\omega A$ 为非奇异矩阵，综上所述，可知原式收敛。