Slide06 必做题

Exercise 4.1.1 证明下列语言不是正规语言:

e) $\{ 0^n1^m \mid n \le m \}$.

参考解答：对于任意的 $n \ge 1$，存在 $w=0^n1^n$ 属于该语言.

令 $w=xyz$，其中，$|xy| \le n$， $y \neq \varepsilon$，

由此可知，y 只包含 0，且至少包含一个 0

若取 $k=2$，则 xy^kz 不属于该语言，

因此由 pumping 引理，该语言不是正规语言。

! Exercise 4.1.2 证明下列语言不是正规语言:

e) $\{ ww \mid w$ 是 0，1 串 $\}$.

参考解答：对于任意的 n，存在 0^n10^n1 属于该语言.

令 $w=xyz$，其中，$|xy| \le n$， $y \neq \varepsilon$，

由此可知，y 只包含 0，且至少包含一个 0

若取 $k=2$，则 xy^kz 不属于该语言，

因此由 pumping 引理，该语言不是正规语言。

! Exercise 4.1.2 证明下列语言不是正规语言:

f) $\{ ww^R \mid w$ 是 0，1 串 $\}$.

参考解答：对于任意的 n，存在 0^n110^n 属于该语言.

令 $w=xyz$，其中，$|xy| \le n$， $y \neq \varepsilon$，

由此可知，y 只包含 0，且至少包含一个 0

若取 $k=2$，则 xy^kz 不属于该语言，

因此由 pumping 引理，该语言不是正规语言。

Exercise 4.2.1 设 h 是从字母表{0, 1, 2}到字母表{a, b}的同态，h 的定义为：h(0) = a; h(1) = ab; h(2) = ba。

(d) 如果 L 是语言 L(0+12)，则 h(L)是什么？

参考解答：

∵ L(0+12) = {0,12}

∴ h(L) = { h(0), h(12)} = { a, abba}

**!Exercise 4.2.2*

参考解答：从"课程文件"中下载网页文件，从中找到参考解答

! Exercise 4.2.3 若 L 是语言，a 是符号，则令 $a\backslash L = \{ w \mid aw \in L \}$.

例如，设 $L = \{ a, aab, baa \}$，则 $a\backslash L = \{\varepsilon, ab \}$. 证明若 L 是正规语言，则 $a\backslash L$ 也是.

提示：试想正规语言的反向运算以及 Exercise 4.2.2 介绍的商运算都是封闭的.

参考解答 1：因为 $a\backslash L = (L^R/a)^R$，而正规语言的反向运算以及商运算都是封闭的，

因此若 L 是正规语言，$a\backslash L$ 也是正规语言.

参考解答 2：从 L 的 DFA 构造新的 DFA，只需将初态改为 $\delta(q_0,a)$，然后证明该 DFA 的语言为 $a\backslash L$.

**!!Exercise 4.2.8*

参考解答：从"课程文件"中下载网页文件，从中找到参考解答

此题的解答也许会有同学感觉费解，这里简单解释一下：

half(L) 的状态形如 [q,S]，其中 q 为 A 的一个状态，S 为 A 中状态的一个子集。代表的意义如下：

若从初态到达 q 的路径长度为 x ，则 p 属于 S 当切仅当存在一条长度为 x 从 p 到某个终态的路径。

初态为 [q0,F]，其中 q0 为 A 的初态，F 为 A 的终态。

[q,S] 为终态当且仅当 q 属于 S。

[q,S] 对于输入符号 a 转移到[p,T]，当且仅当在 A 中，q 对于输入符号 a 转移到 p；t 属于 T 当且仅当在 A 中，从 t 到 S 中的某个 s 有一条转移边。

! Exercise 4.2.13 利用运算的封闭性可以帮助我们证明某些语言不是正视语言。已经知道，语言 $L_{0n1n} = \{ 0^n1^n \mid n \geq 0 \}$ 不是正视语言。从这一事实出发，证明下列语言不是正视语言(以这些语言为基础，利用正视语言的封闭运算，构造出语言 L_{0n1n}):

b) $\{ 0^n1^m2^{n-m} \mid n \geq m \geq 0\}$.

参考解答 1: 设映射 $h:\{0,1,2\}\rightarrow\{0,1\}^*$ 为 $h(0)=0, h(1)=h(2)=1$，则有

$$L_{0n1n} = h(\{ 0^n1^m2^{n-m} \mid n \geq m \geq 0\}),$$

因为 L_{0n1n} 不是正视语言，所以 $\{ 0^n1^m2^{n-m} \mid n \geq m \geq 0\}$ 不是正视语言.

参考解答 2: 因为 $L(0^*2^*)\cap\{ 0^n1^m2^{n-m} \mid n \geq m \geq 0\}= \{ 0^n2^n \mid n \geq 0 \}$,

设映射 $h:\{0, 2\}\rightarrow\{0,1\}^*$ 为 $h(0)=0, h(2)=1$，则有

$$L_{0n1n} = h(\{ 0^n2^n \mid n \geq 0 \}) = h(L(0^*2^*)\cap\{ 0^n1^m2^{n-m} \mid n \geq m \geq 0\})$$

而 L_{0n1n} 不是正视语言，所以 $\{ 0^n1^m2^{n-m} \mid n \geq m \geq 0\}$ 不是正视语言.

Exercise 4.3.4 给出一个判定两个正视语言是否拥有至少一个公共串的算法.

参考解答: 设两个正视语言分别为 L_1 和 L_2，则该问题等价于 $L_1\cap L_2$ 是否为空. 可以从语言为 L_1 和 L_2 的 DFA 构造语言为 $L_1\cap L_2$ 的 DFA，然后判定该 DFA 中，从初态是否可达某一终态.

第六讲思考题

!Exercise 4.1.2（c）

参考解答（1）：

对于任意的 n，存在 $w=0^m$ ($m>n$ 且 $m=2^p$)属于该语言.
令 $w=xyz$，其中，$|xy|\leq n$，$y\neq\varepsilon$，
设 $y=0^i$ ($0< i \leq n$)，
若取 $k=2^{p+1}+1$，则 $xy^kz=0^j$ ($j=2^p+i2^{p+1}=2^p(2i+1)$)不属于该语言
因此由 *pumping* 引理，该语言不是正规语言。

参考解答（2）：

对于任意的 n，存在 $w=0^m$ ($m=2^n$)属于该语言.
令 $w=xyz$，其中，$|xy|\leq n$，$y\neq\varepsilon$，
设 $y=0^i$ ($0< i \leq n$)，
若取 $k=2$，则 $xy^kz=0^j$ ($j=2^n+i$)不属于该语言，因为 $2^n < j < 2^{n+1}$.
因此由 *pumping* 引理，该语言不是正规语言。

参考解答（3）：

对于任意的 n，存在 $w=0^m$ ($m=2^{n+1}$)属于该语言.
令 $w=xyz$，其中，$|xy|\leq n$，$y\neq\varepsilon$，
设 $y=0^i$ ($0< i \leq n$)，
若取 $k=0$，则 $xy^kz=0^{m-i}$ 不属于该语言(因为，$2^n < m-i < 2^{n+1}$))，
因此由 *pumping* 引理，该语言不是正规语言。

!Exercise 4.2.1（f）

参考解答:

$h^{-1}(L) = L(1^*02^*)$

(思路: abab…aba 中，一旦某个 a 反射至 0，则其后的串只能反射至 22…2)

!Exercise 4.2.6

参考解答:

（a）对 L 的一个 DFA M 进行如下改造：删掉每个终态的输出边。结果自动机的语言即为 min（L）。

（b）对 L 的一个 DFA M 进行如下改造：如果 M 的某个终态可达 M 的任何一个其它终态，则将这个终态改为非终态。结果自动机的语言即为 max（L）。

（c）对 L 的一个 DFA M 进行如下改造：如果 M 的某个非终态可达 M 的任何一个终态，则将这个非终态改为终态。结果自动机的语言即为 init（L）。

Exercise 4.3.2

参考解答:

把对应的 **DFA** 看作一个有向图，利用图论知识计算从初态到（任一个）终态的长度为 **0 , 1, 2, …, n** 的路经数(**n** 为状态数),若数目达到或超过 **100**,则有解，结束；否则，判断一下所有这些路径上是否有重复的状态，若有则有解，若无则无解，结束。

（请思考一下其中的道理）