

UNIVERSITETI I PRISHTINËS

FAKULTETI I SHKENCAVE MATEMATIKE NATYRORE

PUNIM SEMINARIK

TEMA : **Perafrimi I të dhënave dhe metoda e Nevill-it**

Punuar nga: Asistent:

Blerton Rexha Eliot Bytyqi

Ideal Cocaj

- **Interpolimi dhe Metoda e Nevill-it**

Në pjesën e mëparshme ne kemi gjetur një përfaqësim të qartë për polinomet e Lagranzhit dhe gabimi i tyre kur përafrimit një funksion në një interval .Perdorimi të këtyre polinomve perfshin interpolimi I te dhënav te nxjerra.

Tabela 1 liston vlerat e funksionit ne pika të ndryshme. Përafrime të *f(1.5)* i arritur me polinome te ndryshme të Lagranzh-it do të krahasohen



*Tabela 1*

Meqë 1.5 është në mes 1.3 dhe 1.6 polinomi linear më i përshtatshëm përdor *x0*= 1.3 dhe *x1* =1.6. Vlera e polinomit interpolues në 1.5 është

.

Dy polinomet të shkallës 2 mund të përdorën në mënyrë të arsyeshme nën një duke marrë *x0* =1.3 dhe *x1*= 1.6 dhe *x2*= 1.9 e cila jep





dhe tjetra duke marrë *x0* = 1, *x1* = 1.3 dhe *x2* = 1.6 që jep



Në rastin e shkallës së tretë kemi po ashtu dy zgjidhjet arsyeshme për polinomin. Njëra është me *x0* =1.3, *x1* = 1.6, *x2* = 1.9 dhe *x3* = 2.2 qe jep

.

Tjetra fitohet duke marrë *x0* =1.0, *x1* = 1.3, *x2* = 1.6 dhe *x3* = 1.9 qe jep

s

Polinomi i shkallës 4 të Lagranzh-it përdor të gjitha të dhënat nga tabela. Me *x0* =1.0, *x1* = 1.3, *x2* = 1.6, *x3* = 1.9 dhe *x4* = 2.2 dhe përafrimi është

.

Meqë ** dhe *P4(1.5)* të gjitha pajtohen brenda 2 x 10-5 njësive ne presim këtë shkallë të saktësisë për këto përafrime. Ne po ashtu presim që *P4(1.5)* të jetë përafrimi më i mirë pasi që përdor më së shumti informatat e dhëna.

Funksioni që po e përafrojmë është funksion i Besel-it i llojit të parë të rendit zero, vlera e të cilit te 1.5 dihet të jetë 0.5118277. Kështu që, vlerat e sakta të saktësisë së përafrimeve janë:

 

 

 

Megjithëse *P3(1.5)* është përafrimi më i saktë. Nëse nuk do të pranonim *P4(1.5)* si përafrimin më të mirë pasi që ai përfshin më së shumti të dhëna rreth funksionit. Termi i gabimit të Lagranzh-it i fituar me Teoremën 3 nuk mund të përdorët këtu meqë nuk kemi njohuri të nevojshme të derivatit të katërt të *f*. Për fat të keq ky është rasti i përgjithshëm.

Vështirësitë praktike me interpolimin e Lagranzh-it janë që termi i gabimit është i vështir për tu zbatuar, shkalla e dëshiruar zakonisht nuk dihet derisa të caktohen llogaritjet. Praktikë e rëndomtë është të llogaritën rezultat e dhëna prej polinomeve të ndryshme deri sa të arrihet pajtueshmëria përkatëse siç bëmë ne shembullin paraprak. Megjithëse puna e kryer në llogaritjen e përafrimit prej polinomit të shkallës së dyte nuk e lehtëson punën për të llogaritur përafrimin e tretë as që përafrimi i shkallës është më i lehtë për tu llogaritur pasi që dihet përafrimi i tretë, dhe kështu me radhë. Ne tani do të përdorim këto përafrime paraprake si përparësi të madhe.

***Definicioni 1***. Le të jetë funksioni i definuar si *x0, x1, . . . , xn* dhe supozojmë se *m1, m2, . . . , mk* janë *k* numra të ndryshëm *0 ≤ mi ≤ n* për çdo i. Polinomi i Lagranzh-it që pajtohet me *f(x)* ne k pika të ndryshme  është i shënuar *Pm1, m2,,...,mk(x)* .

**Shembulli 4**. Nëse *x0 = 2, x1 = 3, x2 = 4, x4 = 6* dhe *f(x) = ex* atëherë *P1,2,4(x)* është polinomi që pajtohet me *f(x)* të pikat  *x1 = 2, x2 = 3,* dhe *x4 = 6* që është



Rezultati i ardhshëm përshkruan metodën rekursive për gjenerimin e përafrimit polinomial të Lagranzh-it.

**Teorema 4**. Le te jetë f e definuar te *x0, x1, . . . , xn,* dhe le të jenë *xj* dhe *xi­*  dy numra të ndryshëm nga kjo bashkësi, atëherë



Përshkruan polinomin e k-të të Lagranzh-it që e interpolon *f* ne *k* + 1 pika *x0, x1, . . . , xn*.

**Vërtetimi.** Për lehtësim të shënimit shënojmë  dhe  meqë dhe janë polinome të shkallës k -1 ose më të vogël *P(x) ë*shtë më së shumti i shkallës k. Meqë 0≤ ri ≤ k dhe k ≠ i, j, atëherë Q(xr) =  kështu që



Aq më tepër kemi



Ngjashëm meqë *Q(xj) = f(xj)* kemi *P(xj) = f(xj).* Por prej definicionit është polinomi i vetëm më së shumti i shkallës së *k* që pajtohet me *f* të *x0, x1, . . . , xk.*

Kështu . 

Nga Teorema 4 rrjedh se polinomet interpoluese mund të formohen në mënyrë rekursive. Për shembull, ato mund të krijohen si në tabelën 3, ku çdo rresht përfundon para fillimit të rreshtave vijues.



*Tabela 3*

Kjo procedure quhet **Metoda e Nevillit.** Anotacioni *P* i përdorur në tabelën 3 është i pavolitshëm për shkak të numrit të indekseve te poshtme që përdoren për të paraqitur një të dhënat. Vërejmë megjithatë se për të krijuar një varg (array ne gjuhen e kompjuterit) vetëm dy indekse të poshtëm janë të nevojshëm. Duke vazhduar tabelës tatëpjetë korrespondon në përdorim të pikave njëpasnjëshme *x­i* me i të madhe, dhe duke shkuar neper tabelë në të djathtë korrespondon me ngritjen e shkallës së polinomit interpolues. Meqë pikat duken te vazhdueshme ne çdo te dhënë, neve na nevojitet te caktojmë vetëm pikën fillestare dhe numrin e pikave vijuese që përdoren për të ndërtuar përafrimin.

Për të shmangur shumë indekse te poshtme, le të jetë *Qi,j*(x), për çdo 0 ≤ j ≤ i polinomi interpolues i shkallës *j* në *(j + 1)* numrat *xi-j,, xi-j+1,...,xi-1,xi*: që d.m.th.



Duke përdorur këtë anotacion për metodën e Nevillit, fitojmë shënimin Q të vargut ne tabelën 3.

**Shembulli 5.**  Vlerat e polinomeve te ndryshme interpoluese te x=1.5 janë marrë ne Ekuacionin 3 duke përdorur të dhënat e paraqitura ne dy kolonat e para të tabelës 4. Në ketë shembull ne përafrojmë *f(1.5)* duke përdorur rezultatin ne Teoremën 4. Nëse *x0* = 1.0, *x1* = 1.3*, x2* = 1.6, *x3* = 1.9 dhe *x4 =* 2.2, atëherë *Q0,0 = f(1.0), Q1,0 = f(1.3), Q2,0 = f(1.6), Q3,0 = f(1.9)* dhe *Q4,0 = f(2.2).* Këto janë pesë polinomet e shkallës zero (konstante) që e përafrojn *f(1.5).*

Duke llogaritur përafrimin e shkallës së parë *Q1,1(1.5)* marrim







ngjashëm,



 dhe 

Përafrimi më i mirë linear pritet të jetë *Q2,1* meqë 1.5 është në mes të *x1* = 1.3 dhe *x2* = 1.6.

Në mënyrë të njëjtë, përafrimi duke përdorur polinome të shkallëve më të lartë është dhënë me



 dhe .

Edhe përafrimet e shkallëve më të larta janë krijuar në mënyrë të njëjtë dhe janë paraqitur në tabelën 4.



*Tabela 4*

Nëse përafrimi i fundit *Q4,4* nuk është mjaftë i saktë, mund të zgjodhët një pikë tjetër dhe të shtohet një rresht tjetër në tabelë.

*x5 Q5,0 Q5,1 Q5,2 Q5,3 Q5,4 Q5,5*

Atëherë *Q4,4, Q5,4* dhe *Q5,5* mund të krahasohen për të përcaktuar për saktësi të më tepërt.

Në shembullin tonë, funksioni është funksion i Bessel-it të llojit të parë të rendit zero, vlera e të cilit te 2.5 është -0.0483838 dhe një rresht i ri i përafrimit te *f(1.5)* është

2.5 - 0.0483838 0.4807699 0.5301984 0.5301984 0.5119070 0.5118430 0.5118277.

Rreshti i ri i fundit 0.5118277, është i saktë në shtatë pozita decimale.

Algoritmi ne vijim ndërton të dhënat e metodës së Neville-it rresht për rresht.

**Interpolimi Iterativ i Neville-it**

Për të përcaktuar polinomin interpolues *P* ne *n* + 1 numrat e ndryshëm *x0,...,xn* te numri *x* për funksionin *f*:

HYRJA: numrat *x,x0,...,xn*; vlerat *f(x0), f(x1),..., f(xn),* si kolona e parë

*Q0,0 , Q1,0, ...,Qn,0 të Q.*

DALJA: Tabela *Q* me *P(x)= Qn,n*

Hapi 1 Për *i = 1, 2, . . . , n*

Për *j = 1, 2, . . . , i*

Cakto 

Hapi 2 DALJA(Q);

NDAL.

Algoritmi mund të modifikohet që të lejojë si shtesë pika të reja interpoluese.

Për shembull, jo barazimi



Mund të përdoret si kriter ndalës, ku ε është masa e tolerancës të gabimit. Nëse jo-barazia plotësohet *Qi,i* është përafrim i arsyeshëm për *f(x)*. Nëse nuk plotësohet jo-barazia shtohet një pikë e re interpoluese *xi+1*.

Bibliografia

*-Burden Faires Numerical Analysis 9th*

*-Numerical Methods using matlab 4th*