ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет компьютерных наук

Департамент программной инженерии

УДК 004.021/.023

СОГЛАСОВАНО

Научный руководитель,

Старший преподаватель департамента

программной инженерии

факультета

компьютерных наук

____________________М.И. Фомичёв

«_____»_____________ 2020 г.

УТВЕРЖДАЮ

Академический руководитель

образовательной программы

«Программная инженерия»

профессор департамента

программной инженерии, канд. техн.

наук

____________________В.В. Шилов

«_____»_____________ 2020 г.

Отчет

по курсовой работе

на тему «Исследование комбинации алгоритма Лин–Керниган–Хелсгауна и алгоритма метода ветвей и границ для решения задачи коммивояжёра»

Выполнил

студент группы БПИ185

образовательной программы

09.03.04 «Программная

инженерия»

____

И.О. Фамилия

____

Подпись, Дата

Москва 2020

Список исполнителей

Научный руководитель,
старший преподаватель М.И. Фомичёв ____________________

Студент Б.Т. Малашенко ____________________

Реферат

Отчет 24 с, 8 рис., 3 табл., 23 источн.

Ключевые слова: метод ветвей и границ; Лин–Керниган–Хелсгаун; задача коммивояжёра.

В отчёте представлены результаты курсовой работы на тему «Исследование комбинации алгоритма Лин–Керниган–Хелсгауна и алгоритма метода ветвей и границ для решения задачи коммивояжёра», выполненной на основе приказа Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» № 2.3-02/2004-04 от 20.04.2020.

Объект исследования – комбинация точного алгоритма решения задачи коммивояжёра метода ветвей и границ и эвристического алгоритма Лин–Керниган–Хелсгауна.

Предмет исследования – время, затраченное на решение задачи коммивояжёра.

Цель исследования – анализ взаимодействий метода ветвей и границ и алгоритма Лин-Керниган-Хелсгауна, которые могут привести к уменьшению времени решения задачи коммивояжёра.

Задачи исследования

- изучение наиболее эффективных и применимых на практике алгоритмов решения задачи коммивояжёра;
- генерация случайной выборки для исследования, на основании ограничений вычислительного узла;
- рассчет промежуточных туров при помощи алгоритма Лин-Керниган-Хелсгауна.
- реализация улучшенного алгоритма метода ветвей и границ.
- рассчет окончательных результатов работы комбинации алгоритмов.
- сравнение и обоснование полученных результатов, построение рекомендаций по использованию предложенных алгоритмов.

Методы исследования

- изучение существующих публикаций и статей;
- сравнительный анализ;
- теоретическое обоснование.

Достоверность научных результатов подтверждена результатами экспериментальных исследований на большой выборке задач разных размерностей.

Результаты исследования могут быть использованы для решения задачи коммивояжёра, задачи о рюкзаке или в других задачах дискретной и комбинаторной оптимизации.

Содержание

Термины и определения **7**

Перечень сокращений и обозначений **8**

Введение **9**

Задача коммивояжёра **10**

1.1. Постановка задачи 10

1.2. Метод ветвей и границ 10

1.3. Алгоритм Лин-Керниган-Хелсгауна 11

1.4. Современное состояние исследований 11

Теоретический анализ исследуемых подходов **12**

2.1. Установка начальной верхней грани 12

2.2. Умный выбор вершин для ветвления 12

2.3. Метод ветвей и границ с предвычисленным туром 13

Экспериментальное исследование **14**

3.1. Описание плана эксперимента 14

3.1.1. Входные данные 14

3.1.2. Аппаратные и программные особенности компьютера 14

3.1.3. Особенности реазлиции 14

3.2. Результаты экспериментов 14

Анализ результатов экспериментов **21**

4.1. Анализ влияния установки результата LKH в качестве верхней границы 21

4.2. Анализ влияния «умного» выбора вершин для ветвления 21

4.3. Анализ влияния предвычисленного тура 21

4.4. Выводы 21

Заключение **22**

Список использованных источников **23**

Термины и определения

В настоящей научно-исследовательской работе используются следующие термины с соответствующими определениями:

- Временная сложность алгоритма – асимптотическая оценка функции трудоёмкости [23].
- Точный алгоритм – алгоритм, гарантированно возвращающий точное решение задачи [18].
- Эвристический алгоритм – алгоритм решения задачи, не являющийся гарантированно точным или оптимальным, но достаточный для решения поставленной задачи [18].
- Граф – это конечное множество V, называемое множеством вершин, и множество E (множество ребер) двухэлементных подмножеств множества V [15].
- Задача является NP-трудной (NP-hard), если эта задача в постановке принятия решения (decision problem) принадлежит к классу NP-полных задач [23].
- Класс NP – класс задач с полиномиально-проверяемым решением или класс полиномиально-проверяемых задач. Задача относится к классу NP, если её решение может быть проверено с полиномиальной временной сложностью [23].
- Класс P – класс полиномиально-решаемых задач. Задача относится к классу P, если существуют константа k и алгоритм, решающий эту задачу за время $O(n^k)$, где n - для входа [23].

Перечень сокращений и обозначений

В настоящей НИР используются следующие обозначения:

- *МВГ* – метод ветвей и границ.
- *LKH* – эвристический алгоритм Лин–Керниган–Хелсгауна (Lin-Kernighan-Helsgaun).
- *TSP* – задача коммивояжёра (travelling salesman problem).
- *Тур* – Гамильтонов цикл в графе, результат решения задачи коммивояжёра.
- $\bar{t}_{alg}(n)$ – среднее время работы реализации алгоритма alg на входе длины n для представленной выборки в микросекундах.
- *ARS* – классический алгоритм метода ветвей и границ для решения задачи коммивояжёра.
- ARS_{upper} – ARS с начальной верхней границей.
- ARS_{smart} – ARS с «умным» выбором вершин из тура LKH.
- ARS_{LKH} – ARS с туром LKH.

Введение

Задача коммивояжёра является одной из самых известных и фундаментальных проблем в комбинаторной оптимизации [5]. Эта проблема рассматривается уже много лет с переменным успехом [9].

Хоть и существует большое количество разных подходов к решению задачи коммивояжёра [8], до сих пор неизвестнен лучший по времени алгоритм для точного решения и его ассимптотика [7]. Нл даже имея самый быстрый из точных алгоритмов, на рассчет решения для сотни городов уйдёт не менее суток на среднем компьютере. А если подумать о бизнесс процессах, в которых могут участвовать тысячи агентов. В таких случаях времени на точный рассчёт решения может не хватать.

В данной работе будут рассмотрены два алгоритма решения задачи коммивояжёра: метод ветвей и границ и алгоритм Лин-Керниган-Хелсгауна, их комбинации и анализ.

Задача коммивояжёра

1.1. Постановка задачи

Задача коммивояжёра (TSP) – это NP трудная задача[6,14] о нахождении Гамильтонового цикла минимальной стоимости на полном графе. Коммивояжёр начинает свой путь в одном из городов, проходит через остальные города единожды и возвращается в начальный город, пытаясь пройти наименьшее расстояние. Очевидно, что вместо расстояния мы можемм рассматривать время, стоимость или любые другие величины.

Более формально, пусть имеется матрица:

$$\begin{pmatrix} \infty & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \infty & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \infty \end{pmatrix}$$

Задача коммивояжёра состоит в нахождении такой перестановки $P = (1 i_2 i_3 \dots i_n)$ целых чисел от *1* до n, что сумма $a_{1i_2} + a_{i_2i_3} + \dots + a_{i_n1}$ будет наименьшей.

В различных областях: экономике, логистике, микроэлектронике и компьютерных науках существуют проблемы, которые могут быть сведены к задаче коммивояжёра, например:

- оптимизация работы кранов[17];
- планирование работы оборудования с реконфигурациями[17];
- прокладка компьютерных сетей[19];
- прогнозирование белковой функции[19];
- построение черных и белых изображений непрерывными линиями без пересечений[19];

1.2. Метод ветвей и границ

Метод ветвей и границ является точным алгоритмом решения задачи коммивояжёра. Основная его идея в вычислении верхних и нижних оценок для возможной длины лучшего тура и ветвлении относительно этого.

Чтобы вычислить оценку снизу проводится следующее преобразование матрицы: из каждой строки выбирается наименьший элемент и вычитается и остальных в этой строке, после этого операция повтроряется для столбцов. Подобное преобразование основано на следующем замечании, если вычесть из строки некую константу, то стоимость оптимального маршрута уменьшится на величину этой константы. Сумма полученных по строкам и столбцам значений будет границей снизу для текущего шага алгоритма.

После вычисления оценки алгоритм переходит к процедуре ветвления. Из всех доступных маршрутов между городами выбирается один по определенному признаку (в классическом МВГ по наибольшей сумме весов из него и в него), строятся две новые вершины дерева. Первая содержит матрицу, в которой мы проходим через выбранную пару городов. Во второй же матрица, где на выбранном маршруте становится бесконечность. Подобным образом мы продолжаем строить двоичное дерево, пока не получим полный тур.

Хоть алгоритм в среднем и даёт существенное уменьшение времени работы в сравнений с полным перебором, он непредсказуем, нельзя по входной матрице определить, сколько времени потребуется на рассчеты.

1.3. Алгоритм Лин-Керниган-Хелсгауна

Алгоритм Лин-Керниган-Хелсгауна является эффективной модификацией алгоритма Лин-Кернигана [10] и одним из самых эффективных эвристических алгоритмов решения задачи коммивояжёра. Временная оценка сложности алгоритма – $O(n^{2.2})$ [3], что позволяет решать задачи таких объемов, на которые при решении точными алгоритмами не хватит всех мощностей планеты. При этом всем алгоритм достаточно точен, в следующей главе рассмотрена точность работы алгоритма на сгенерированной выборке.

Алгоритм крайне сложен в реализации, он использует и комбинирует многие более простые эвристические алгоритмы: $2-opt$, $3-opt$ [11] и другие алгоитмы локальной оптимизации [2,4].

1.4. Современное состояние исследований

Существует большое число модификаций метода ветвей и границ с рассчетом на улучшение ассимптотики времени работы, например:

- метод ветвей и границ с дополнительным преобразованием матриц, при котором выбираются дополнительные маршруты для ветвления, но итоговое дерево быстрее сходится к оптимальному решению [20];
- алгоритм, который строит двойственную задачу [16];
- комбинация метода ветвей и границ и алгоритма имитационной нормализации [22].
- в работе [21], рассматривается решение с упорядоченным обходом дерева решений в ширину, когда на каждом этапе выбирается тот узел дерева решений, которому соответствует матрица с минимальной оценкой снизу.

Теоретический анализ исследуемых подходов

2.1. Установка начальной верхней грани

Метод ветвей и границ для решения задачи коммивояжёра использует верхние и нижние границы для ограничения области поиска оптимального тура. В первой итерации алгоритма за верхнюю грань принимается случайный тур, скорее всего очень далекий по своей стоимости от оптимального. Однако, после LKH мы получим стоимость какого-то тура близкую к стоимости лучшего. Если мы установим эту стоимость в качестве верхней грани, то часть ветвлений на последних шагах алгоритм не будет рассматривать.

Рассмотрим дерево решений для классического метода ветвей и границ (рис.1). Дерево строится в порядке $1->2->3->4->5->6->7$.

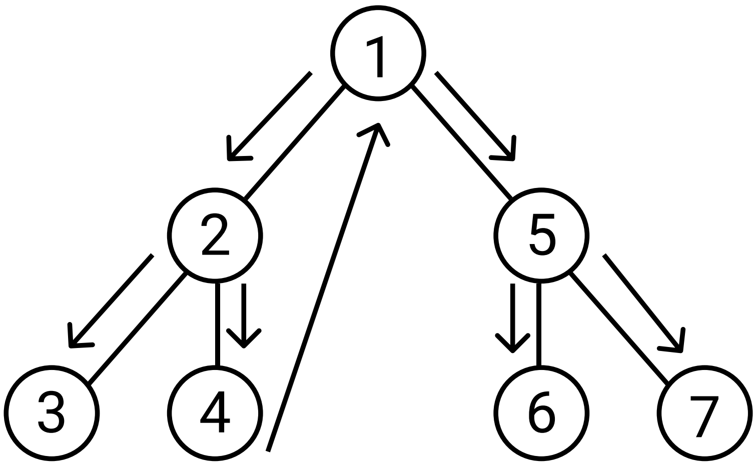

Рисунок 1. Дерево обхода ARS

С помощью модификации по установке начальной верхней грани алгоритм должен сократить свой путь и сходиться быстрее к минимальному туру (рис.2). Подобный алгоритм пропустит часть вершин, в которые бы зашёл классический алгоритм. Если вес тура, получаемый в вершинах 3 и 4 больше, чем вес, установленный в качестве верхней границы, то алгоритм пропустит их посещение.

2.2. Умный выбор вершин для ветвления

В ходе работы метода ветвей и границ для решения задачи коммивояжёра, возникает необходимость найти новую вершину для ветвления. Классический алгоритм выбирает такое ребро с нулевым весом, для которого вес суммы ребер в строке или столбце максимальный. Подобный выбор шага ветвления вполне обоснован, выбирая такое ребро нам не придётся идти в дргуое множество задач. Попробуем ещё немного

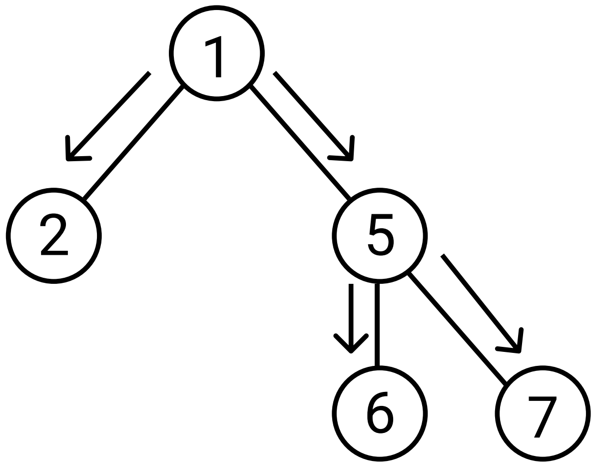

Рисунок 2. Дерево обхода ARS_{upper}

модифицировать алгоритм и явно отдавать приоритет ребрам, которые принадлежат туру, возвращенному LKH, но при этом имеют на данном шаге нулевой вес. В теории, чем меньше размерность матрицы и вероятность ошибки LKH, тем эффективней подобный подход. Но на больших размерностях он будет совпадать с классическим МВГ, а может и проигрывать ему.

2.3. Метод ветвей и границ с предвычисленным туром

Хоть классический метод ветвей и границ и выбирает ребра с нулевым весом, он также может выбирать любые ребра, какие мы захотим. Единственное, что придется изменить, это прибавление ненулевого веса ребра к ветви дерева, идущей по текущему ребру.

Данная модификация будет использовать полученный в LKH тур в качестве каркаса для дерева ветвления. Тяжело предположить, как это скажется на итоговом времени работы алгоритма. Возможно подобный подход будет эффективен только для определенных матриц, ведь мы не знаем, как дальше будет ветвиться выбранный путь.

Экспериментальное исследование

3.1. Описание плана эксперимента

3.1.1. Входные данные

Для исследования сгенерирован набор несимметричных матриц размерностей от 20 до 40. Для каждой размерности количество матриц: 10000. Элементы матриц – значения от 1 до 1000000, сгенерированны по равномерному распределению.

3.1.2. Аппаратные и программные особенности компьютера

Все эксперименты проводились на персональном компьютере со следующими характеристиками:

- процессор Intel Core i5-3230M 2.60GHz;
- 8гб оперативной памяти DDR3.

В качестве операционной системы использовался дистрибутив Linux Archlinux с версией ядра 5.5.11-arch1-1. В системе не установлено никаких посторонних компонент, в частности графического интерфейса.

3.1.3. Особенности реазлиции

Реализация всех алгоритмом осуществлялась на языке C++ с использованием библиотеки стандартных шаблонов (STL). Версия компилятора: GNU GCC 9.3.0.

Замер времени работы алгоритмов осуществлялся посредством chrono.

3.2. Результаты экспериментов

В таблице 1 и на рисунках 2-7 представлены результаты экспериментов для классического метода ветвей и границ (ARS), для метода ветвей и границ с установкой начальной верхней границы (ARS_{upper}), для метода ветвей и границ с умным выбором вершин ветвления (ARS_{smart}), для метода ветвей и границ, строящего дерево по заданному из LKH тура (ARS_{LKH}), для LKH.

Таблица 1

Среднее затраченное время для ARS, ARS_{upper}, ARS_{smart} и ARS_{LKH}, $LKH(n)$

n	$\bar{t}_{ARS}(n)$	$\bar{t}_{ARS_{upper}}(n)$	$\bar{t}_{ARS_{smart}}(n)$	$\bar{t}_{ARS_{LKH}}(n)$	$\bar{t}_{LKH}(n)$
20	7374	7240	7272	11055	4792
21	9760	9798	9652	14678	5055
22	13384	13527	13321	20042	5289

23	17849	17768	17513	26712	5584
24	23413	23547	23256	35214	5841
25	31577	31631	31306	47161	6161
26	40664	40532	40420	60665	6427
27	53626	53273	53145	80533	6815
28	70152	69413	69339	104401	7139
29	92436	91218	91439	135968	7543
30	122752	120864	121387	181298	7846
31	158293	155627	156575	233019	8512
32	201738	198239	199501	299747	8737
33	261083	257556	259942	389206	9163
34	329970	325081	327930	492271	9636
35	422669	416364	419714	634116	10102
36	561212	551876	558373	832938	10645
37	705424	692835	700099	1041384	11144
38	953764	934081	943240	1399860	11767
39	1184474	1162172	1170604	1745653	12365
40	1531511	1512040	1519499	2262286	13022

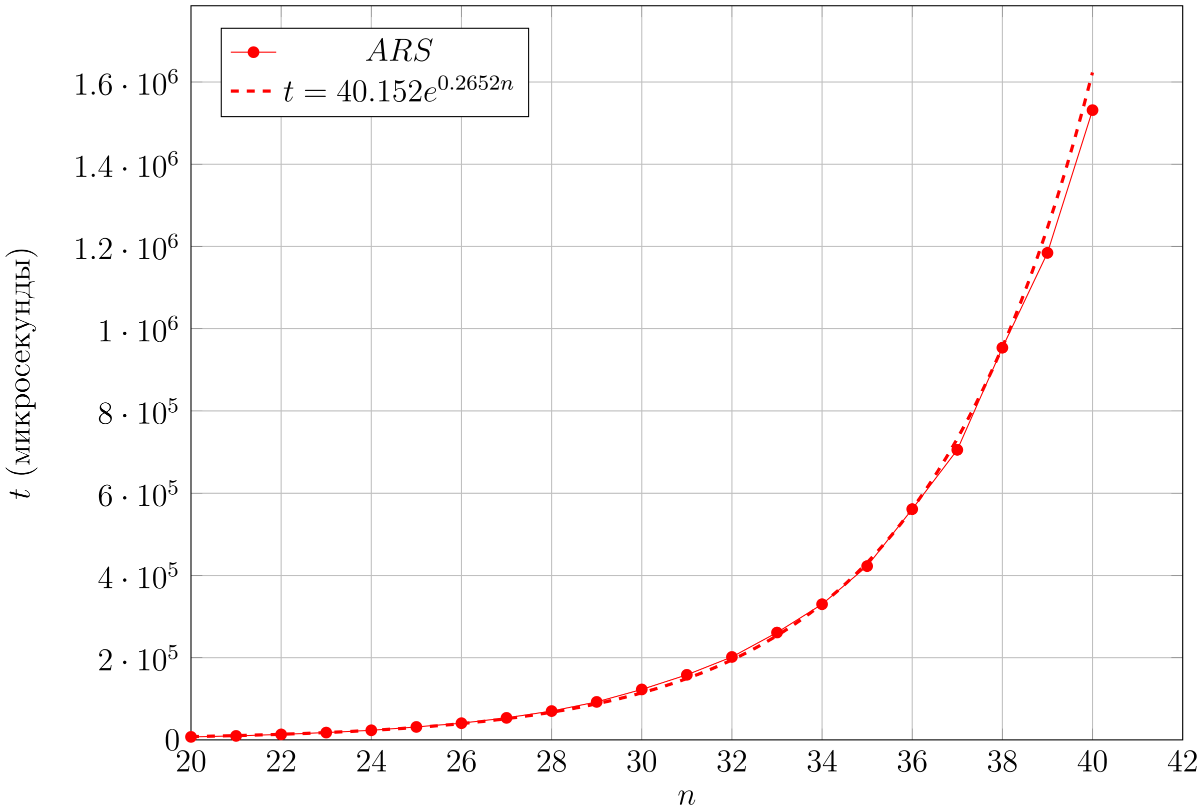

Рисунок 3. среднее время работы ARS

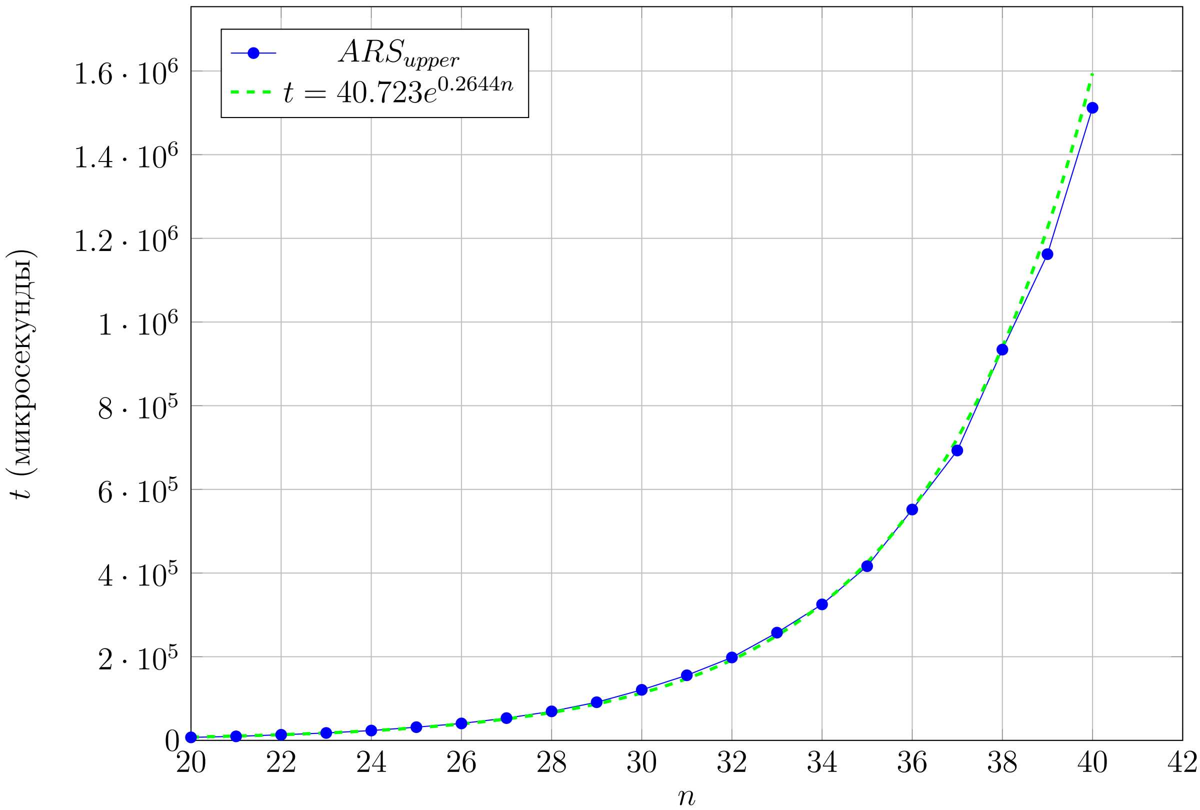

Рисунок 4. Среднее время работы ARS_{upper}

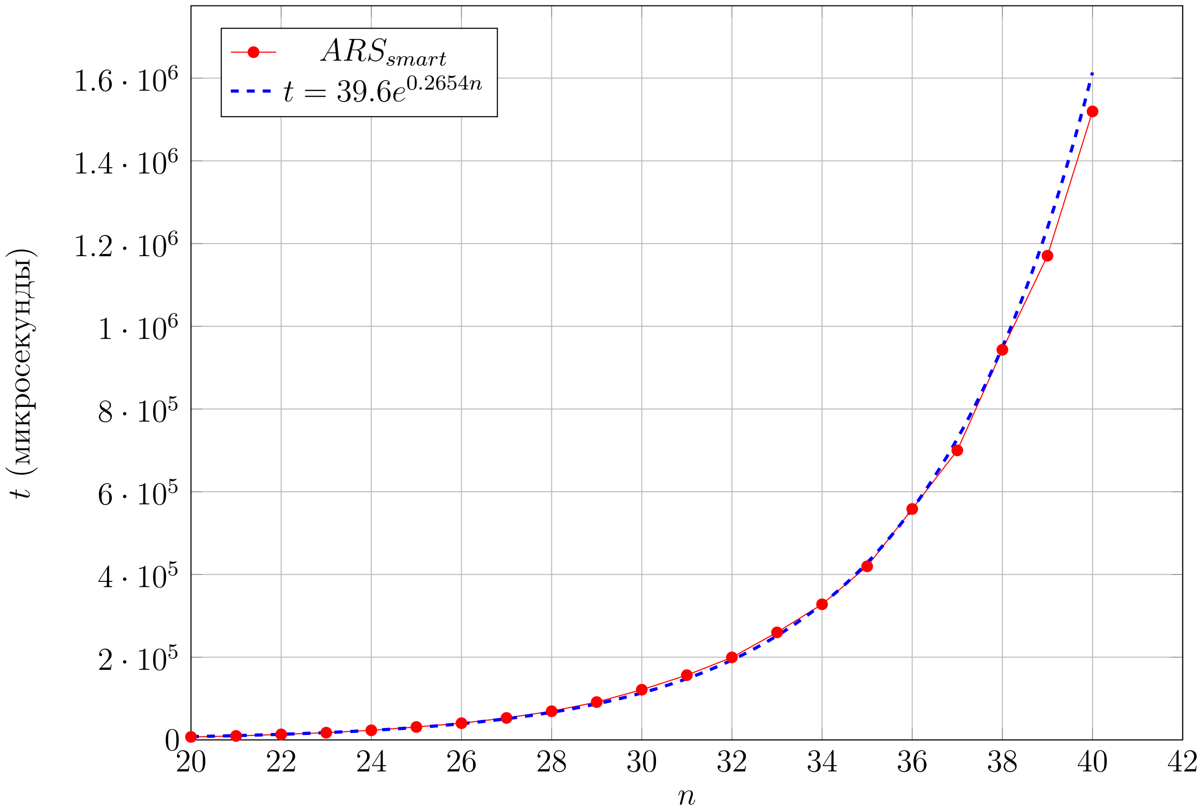

Рисунок 5. Среднее время работы ARS_{smart}

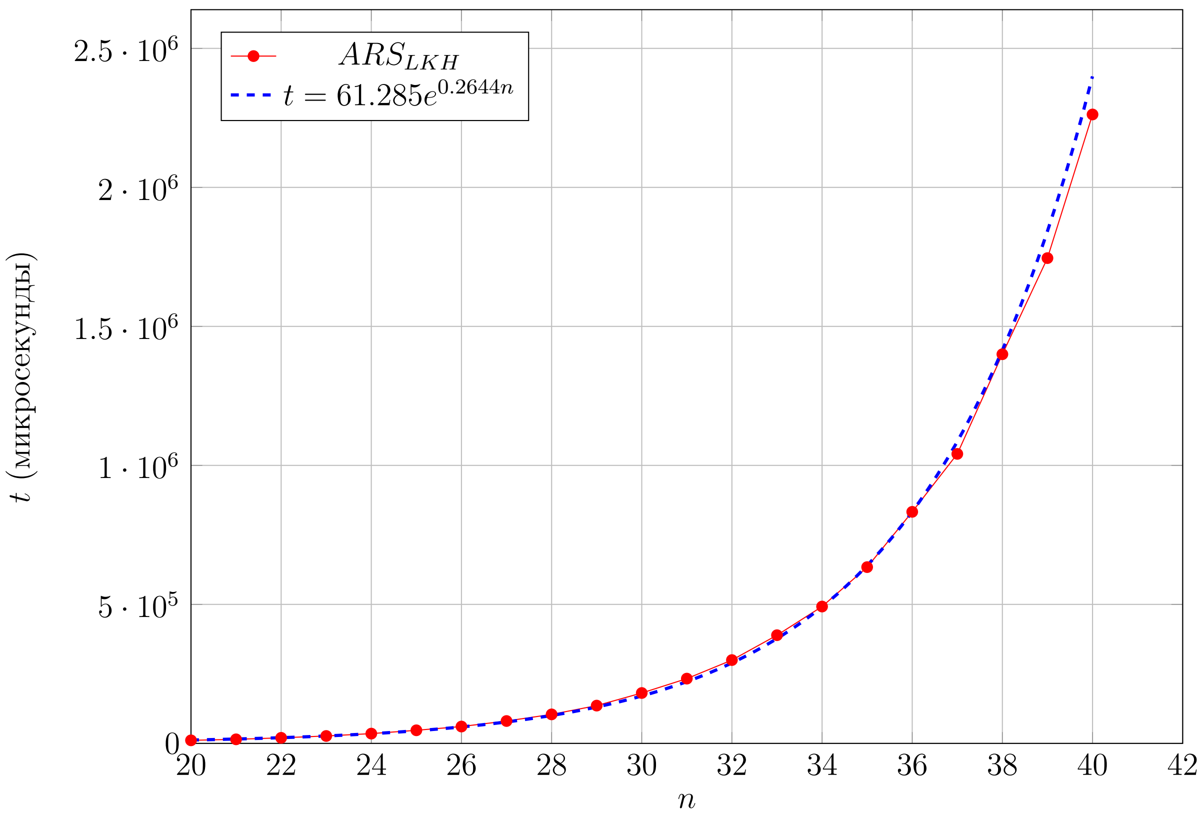

Рисунок 6. Среднее время работы ARS_{LKH}

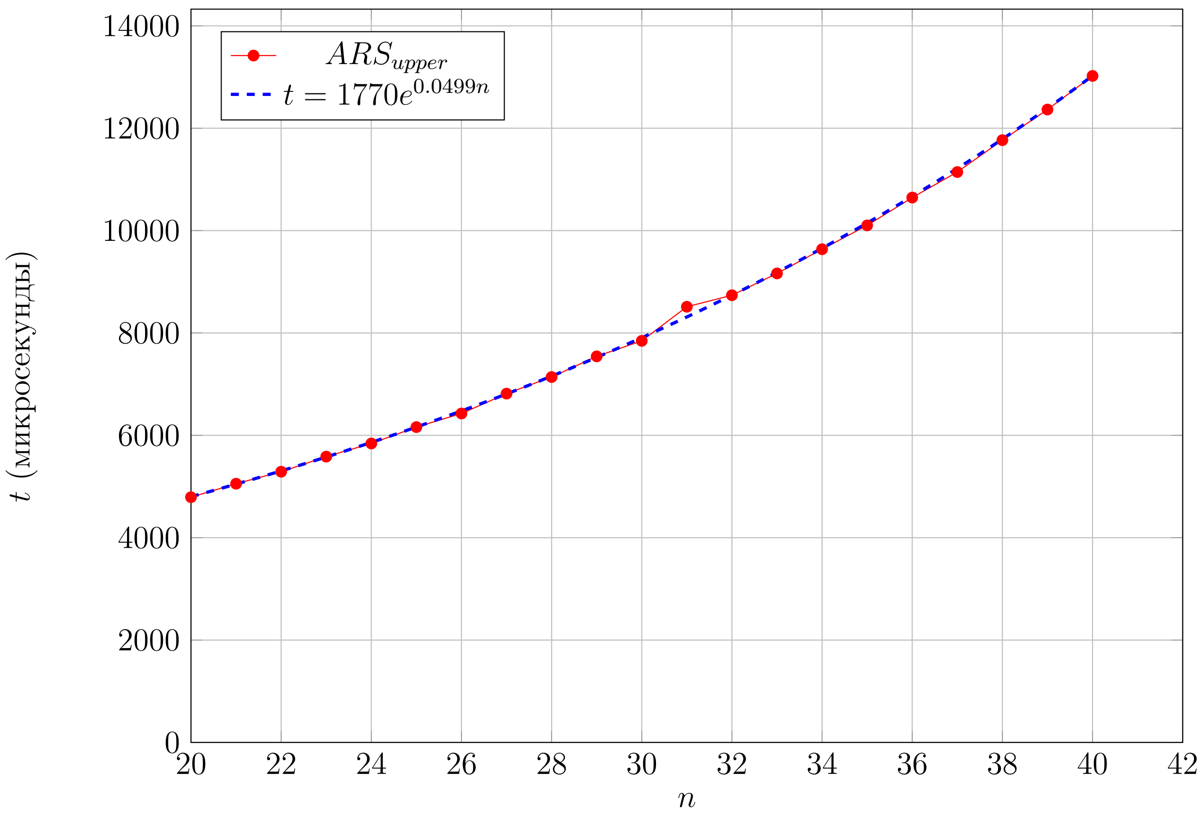

Рисунок 7. Среднее время работы LKH

В таблице 2 и на рисунке 8 представлено сравнение отношений среднего времени для классического метода ветвей и границ (ARS), для метода ветвей и границ с установкой начальной верхней границы (ARS_{upper}), для метода ветвей и границ с умным выбором вершин ветвления (ARS_{smart}), для метода ветвей и границ, строящего дерево по заданному из LKH тура (ARS_{LKH}) к $\bar{t}_{ARS}(n)$.

Таблица 2

Отношение среднего затраченного времени для ARS_{upper}, ARS_{smart} и ARS_{LKH} к среднему времени ARS:

n	$\bar{t}_{ARS}(n)$	$\bar{t}_{ARS_{upper}}(n)$	$\bar{t}_{ARS_{smart}}(n)$	$\bar{t}_{ARS_{LKH}}(n)$
20	1	0.98183	0.98617	1.49769
21	1	99365	0.98893	1.50389
22	1	1.00321	0.99529	1.49745
23	1	0.99546	0.98118	1.49655
24	1	1.00572	0.99329	1.50403
25	1	1.00171	0.99142	1.49352
26	1	0.99675	0.99400	1.49186

27	1	0.99342	0.99103	1.50175
28	1	0.98947	0.98841	1.48821
29	1	0.98682	0.98921	1.47094
30	1	0.98462	0.98888	1.47694
31	1	0.98316	0.98915	1.47207
32	1	0.98266	0.98891	1.48582
33	1	0.98649	0.99563	1.49073
34	1	0.98518	0.99382	1.49186
35	1	0.98508	0.99301	1.50026
36	1	0.98335	0.99494	1.48417
37	1	0.98239	0.99245	1.47625
38	1	0.97936	0.98897	1.46772
39	1	0.98117	0.09929	1.47377
40	1	0.98729	0.99216	1.47715

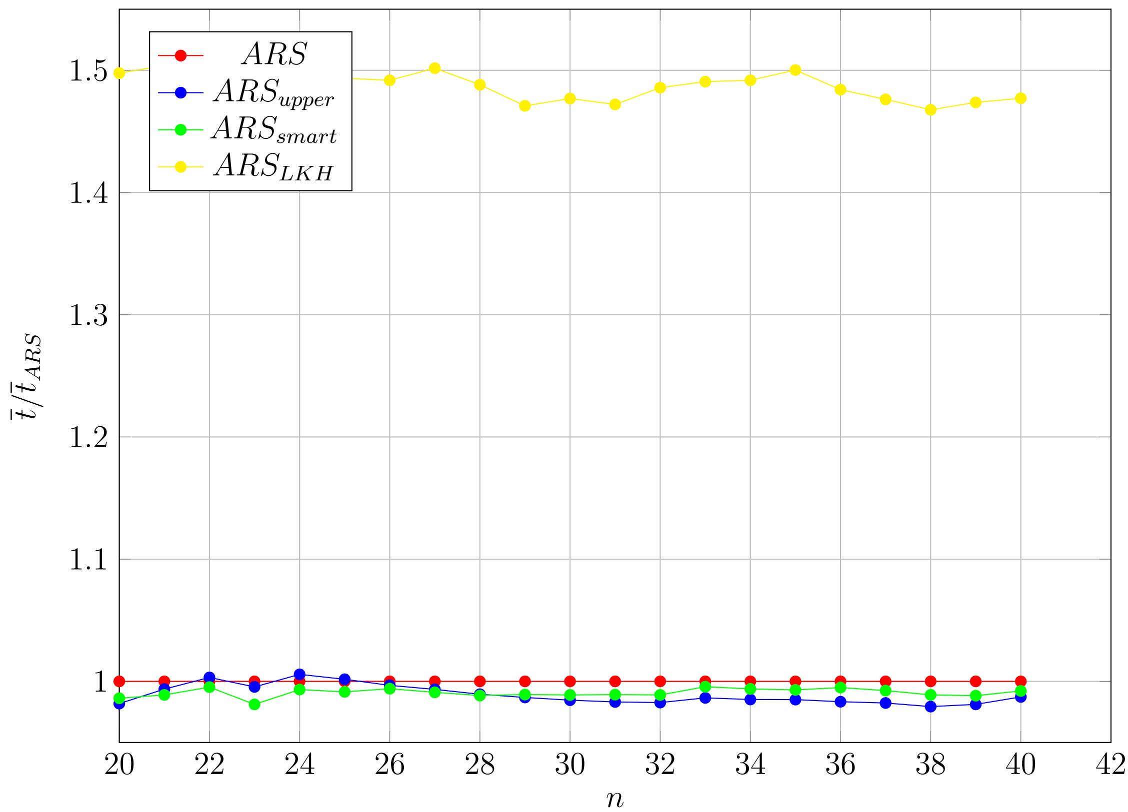

Рисунок 8. Отношение среднего времени работы алгоритмов к $\bar{t}_{LKH}$

В таблице 3 представлен процент ошибок алгоритма Лин-Керниган-Хелсгауна для различных размерностей текущей выборки:

размерность	20	21	22	23	24	25
% ошибок	0.012	0.015	0.0173	0.0178	0.0186	0.0187
размерность	26	27	28	29	30	31
% ошибок	0.0184	0.0196	0.0205	0.0245	0.0204	0.0229
размерность	32	33	34	35	36	37
% ошибок	0.0242	0.0249	0.0251	0.0244	0.0266	0.0267
размерность	38	39	40			
% ошибок	0.0274	0.0266	0.278			

Таблица 3

Процент ошибок алгоритма Лин-Керниган-Хелсгауна

Анализ результатов экспериментов

4.1. Анализ влияния установки результата LKH в качестве верхней границы

Экспериментальные данные показали, что подобная модификация метода ветвей и границ даёт небольшую прибавку к скорости работы алгоритма. На значениях $n < 26$ эта разница мало заметна, но при при больших данных имеет место быть. Кроме того, данная модификация может быть интересна простотой реализации, достаточно лишь подставить одно, полученное ранее, значение в готовый алгоритм.

4.2. Анализ влияния «умного» выбора вершин для ветвления

Экспериментальные данные показали, что подобная модификация метода ветвей и границ даёт небольшую прибавку к скорости работы алгоритма. На значениях $n < 30$ эта разница мало заметна, но при при больших данных имеет место быть. Результаты очень похожы на результат предыдущей модификации, но немного хуже. Данная модификация может быть гораздо эффективней на иной выборке, так как на текущей классический метод ветвей и границ уже включает большую часть вершин итогового тура.

4.3. Анализ влияния предвычисленного тура

Из таблицы 2 и рисунка 6 видно, что предвычисленный тур, полученный с помощью алгоритма Лин-Керниган-Хелсгауна, оказывает отрицательный эффект на метод ветвей и границ и не оказывает влияния на его ассимптотику, хоть LKH и показал отличные результаты для сгенерированной выборки. Скорее всего причина такого поведения в порождении такого дерева решений, которое требует большее количество смены направлений обхода поискового дерева решений.

4.4. Выводы

Итоговые результаты экспериментов неоднозначны. С одной стороны время работы алгоритма уменьшилось для части исследуемых модификаций, с другой стороны ассимптотика осталась прежней. Стоит заметить, что результаты могут получиться другими для других выборок матриц. Например, для нормального распределения графы будут содержать большее количество туров с близкими весами и модификации будут быстрее сводить дерево решений к оптимальному туру. Но на подобной выборке по другому будет себя вести LKH.

Заключение

Задача коммивояжёра является одной из главных задач комбинаторной оптимизации. Существующие точные алгоритмы позволяют решить задачу для ста городов за приемлимое время, эвристические для тысяч и десятков тысяч. На данный момент самая большая решенная проблема состояла из 109399 городов [13]. Но существуют задачи, где необходимо точное решение, где недопустимо совершить ошибку. Поэтому точные алгоритмы должны развиваться параллельно с эвристическими.

В рамках выполнения научно-исследовательской работы, был проведён анализ трех подходов к уменьшению времени работы метода ветвей и границ для решения задачи коммивояжёра, а именно:

- установка начальной верхней грани;
- умный выбор вершин для ветвления;
- ветвление по предвычисленному туру.

В процессе выполнения работы были решены следующие задачи:

- изучены современные эффективные алгоритмы решения задачи коммивояжёра;
- сформирован набор матриц стоимостей для изучения работы модифицированной задачи коммивояжёра.
- посчитаны промежуточные туры с помощью алгоритма Лина-Керниган-Хелсгауна;
- реализованы модифицированные алгоритмы метода ветвей и границ;
- рассчитано время работы на сформированном ранее наборе матриц;
- проведен анализ полученных рехультатов.

Исходя из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- установка верхней границы даёт небольшое, но постояное ускорение алгоритма.
- умный выбор вершин тура даёт меньшее ускорение, чем выбор верхней грани, но также может быть использован;
- предвычисленный тур, полученный с помощью алгоритма Лин-Керниган-Хелсгауна оказывает негативное влияние на работу метода ветвей и границ в среднем случае.

Список использованных источников

1. Bonavear E., Dorigo M., Swarm Intelligence: from Natural to Artificial Systems, Oxford, the UK: OUP, 1999.
2. Christofides N., Eilon S., Algorithms for Large-scale Travelling Salesman Problems, Oper. Res. Quart., 1972.
3. Helsgaun K., An Effective Implementation of the Lin-Kernighan Traveling Salesman Heuristic, Roskilde University, No. 81, 1998.
4. Johnson D., Local optimization and the traveling salesman problem, Lecture Notes in Computer Science, 1990.
5. Jünger M., Thienel S., Reinelt G. Provably good solutions for the traveling salesman problem //Zeitschrift für Operations Research. – 1994. – T. 40. – №. 2. – C. 183-217.
6. Karp - Karp, R.M.: Reducibility among combinatorial problems. In: Miller, R.E., Thatcher, J.W. (eds.) Complexity of Computer Computations. Plenum Press, New York, 1972.
7. Karpinski M., New inapproximability bounds for TSP, Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS), Kyoto University, Japan, 2015.
8. Laporte - Laporte G. The traveling salesman problem: An overview of exact and approximate algorithms //European Journal of Operational Research. – 1992. – T. 59. – №. 2. – C. 231-247.
9. Laporte G. A short history of the traveling salesman problem //Canada Research Chair in Distribution Management, Centre for Research on Transportation (CRT) and GERAD HEC Montréal, Canada. – 2006.
10. Lin S., Computer Solutions of the Traveling Salesman Problem, Bell System Tech. J., 44, 1965.
11. Lin S., Kernighan B., An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem, Oper. Res. 21, 1973.
12. Little J. D. C., Murty K. G., Sweeney D. W., and Karel C. An algorithm for the Traveling Salesman Problem // Operations Research. 1963. No. 11. P. 972-989.
13. Official LKH resource [Электронный ресурс].
    URL: http://webhotel4.ruc.dk/ keld/research/LKH/
14. Papa - Papadimitriou, C.H.: The euclidean traveling salesman problem is NP-complete. Theor. Comput. Sci. 4(3), 1977.
15. Ulyanov M. V., Fomichev M. I., Resource characteristics of ways to organize a decision tree in the branch-and-bound method for the travelling salesman problem, Business

Informatics, no. 34, pp 38-46, Dec. 2015.

16. Алексеев А. О. и др. Применение двойственности для повышения эффективности метода ветвей и границ при решении задачи о ранце //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1985. – Т. 25. – №. 11. – С. 1666-1673.
17. Бородин В.В., Ловецкий С.Е., Меламед И.И., Плотинский Ю.М. Экспериментальное исследование эффективности эвристических алгоритмов решения задачи коммивояжера, Автоматика и телемеханика, 1980, выпуск 11, с. 76–84.
18. Гудман - С. Гудман. Введение в разработку и анализ алгоритмов / С. Гудман, С. Хидетниеми. — М. : Мир, 1981.
19. Колесников А.В., Кириков И.А., Листопад С.В., Румовская С.Б., Доманицкий А.А. Решение сложных задач коммивояжера методами функциональных гибридных интеллектуальных систем / Под ред. А.В. Колесникова. — М.: ИПИ РАН, 2011 — 295 с.
20. Костюк Ю. Л. Эффективная реализация алгоритма решения задачи коммивояжёра методом ветвей и границ //Прикладная дискретная математика. – 2013.
21. Меламед И.И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжёра. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. №10. С. 3-29
22. Мельников Б. Ф., Эйрих С. Н. Подход к комбинированию незавершенного метода ветвей и границ и алгоритма имитационной нормализации //Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2010. – №. 1. – С. 35-38.
23. Сигал И.Х., Бабинская Я.Л., Посыпкин М.А. Параллельная реализация метода ветвей и границ в задаче коммивояжера на базе иблиотеки BNB-Solver // Труды ИСА РАН. – 2006. – Т. 25. - С. 26-26.