

1. Пусть b - брак, b' - прибор показал брак. Распишем по формуле Байеса:

$$P(b|b') = \frac{P(b'|b)P(b)}{P(b')} = \frac{P(b'|b)P(b)}{P(b'|b)P(b) + P(b'|\bar{b})P(\bar{b})} = \frac{0.95 \cdot 0.05}{0.95 \cdot 0.05 + 0.05 \cdot 0.95} = \frac{1}{2}$$

То есть вероятность того, что мы выявили брак, если прибор выдал положительный результат, равна 0.5.

2. Посчитаем другую вероятность, а именно вероятность того, что деталь брак, а прибор указывает "продукция в норме":

$$P(b|\bar{b}') = \frac{P(\bar{b}'|b)P(b)}{P(\bar{b}')} = \frac{0.05 \cdot 0.05}{1 - 2 \cdot 0.05 \cdot 0.95} = 0.00276$$

То есть, хоть мы и будем маркировать часть хороших деталей браком, процент брака, который уходит с предприятия, упадёт с 5% до 0.276%.

Чтобы увеличить вероятность $P(b|b')$ мы можем уменьшить трешхолд, тогда увеличится ошибка первого рода, но уменьшится ошибка второго рода.

3. Распишем и найдём соотношение (α - ошибка первого рода, β - второго рода). Я так понимаю мы ищем соотношение при равных ошибках 1-го и 2-го рода:

$$P(b|b') = \frac{P(b)(1 - \beta)}{P(b)(1 - \beta) + P(\bar{b})\alpha} = \frac{P(b)(1 - \beta)}{P(b)(1 - \beta) + P(\bar{b})\beta}$$

Сравним с 0.5:

$$\frac{P(b)(1 - \beta)}{P(b)(1 - \beta) + P(\bar{b})\beta} \sim 0.5 \Rightarrow 2(P(b)(1 - \beta)) \sim P(b) + \beta - 2P(b)\beta \Rightarrow P(b) \sim \beta$$

То есть, если мы хотим точность больше 0.5, $P(b) > \beta$.