

# Calcul littéral

## Les règles de priorité

### Exercice 1

- $7+3 \times 10=7+30=37$
- $5-6 \times (3+4)=5-6 \times 7=5-42=-37$
- $8 \times 7-(6+2)^2=56-8^2=56-64=-8$
- $3 \times 10-5 \times (-2)^4=30-5 \times 16=30-80=-50$
- $3 \times (4-(1+3^3))-2=3 \times (4-(1+27))-2=3 \times (4-28)-2=3 \times (-24)-2=-72-2=-74$
- $5+5^{7-3 \times 2}=5+5^{7-6}=5+5^1=5+5=10$

### Exercice 2

- $6 \times \frac{4+5}{5}=6 \times \frac{9}{5}=\frac{54}{5}$
- $\frac{7+8}{5-1} \times 3=\frac{15}{4} \times 3=\frac{45}{4}$
- $\frac{7-1^2 \times 4}{8^2}-1=\frac{7-1 \times 4}{64}-1=\frac{7-4}{64}-1=\frac{3}{64}-\frac{64}{64}=\frac{-61}{64}$
- $5 \times \frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}}{3}=5 \times \frac{\frac{4}{4}}{3}=5 \times \frac{1}{3}=\frac{5}{3}$
- $\frac{4x}{7}-\frac{2x}{7}=\frac{2x}{7}$
- $\frac{3x+1}{x+1}-\frac{5}{x+1}=\frac{3x+1-5}{x+1}=\frac{3x-4}{x+1}$
- $\frac{4x+2}{x+2}-\frac{x-1}{x+2}=\frac{4x+2-(x-1)}{x+2}=\frac{4x+2-x+1}{x+2}=\frac{3x+3}{x+2}$
- $\frac{4x^2-7}{2x+1}-\frac{3x^2-8}{2x+1}=\frac{4x^2-7-(3x^2-8)}{2x+1}=\frac{4x^2-7-3x^2+8}{2x+1}=\frac{x^2+1}{2x+1}$

## Les fractions

### Exercice 3

- $\frac{65}{55}=\frac{13 \times 5}{11 \times 5}=\frac{13}{11}$  (on simplifie par 5 en haut et en bas)
- $\frac{78}{56}=\frac{39}{28}$
- $\frac{90}{396}=\frac{45}{198}=\frac{5}{22}$
- $\frac{150}{165}=\frac{30}{33}=\frac{10}{11}$
- $\frac{4x}{x^2}=\frac{4}{x}$
- $\frac{4-x}{3-x}$  pas de simplification possible
- $\frac{x^2(3x-1)}{2x(3x-1)}=\frac{x}{2}$
- $\frac{2x^2-3}{x+2}$  pas de simplification possible
- $\frac{3(x+4)}{x^2(x+4)}=\frac{3}{x^2}$
- $\frac{4(2x+1)}{(2x+1)(x+2)}=\frac{4}{x+2}$

## Exercice 4

- $\frac{13}{4} + \frac{7}{8} = \frac{26}{8} + \frac{7}{8} = \frac{33}{8}$
- $\frac{4}{25} - \frac{6}{5} = \frac{4}{25} - \frac{30}{25} = \frac{-26}{25}$  (attention à ne pas oublier le signe  $-$ !)
- $4 - \frac{3}{8} = \frac{4}{1} - \frac{3}{8} = \frac{32}{8} - \frac{3}{8} = \frac{29}{8}$
- $\frac{5}{9} - 3 = \frac{5}{9} - \frac{27}{9} = \frac{-22}{9}$
- $\frac{7}{3} + \frac{5}{2} = \frac{14}{6} + \frac{15}{6} = \frac{29}{6}$
- $\frac{7}{9} + \frac{1}{4} = \frac{28}{36} + \frac{9}{36} = \frac{37}{36}$
- $\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{4x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{4x-2}{x^2}$
- $\frac{5}{x^2} - \frac{x+1}{x} = \frac{5}{x^2} - \frac{x^2+x}{x^2} = \frac{5-x^2-x}{x^2}$
- $3 - \frac{2}{x} = \frac{3x}{x} - \frac{2}{x} = \frac{3x-2}{x}$
- $\frac{4}{x+1} + 5 = \frac{4}{x+1} + \frac{5(x+1)}{x+1} = \frac{4}{x+1} + \frac{5x+5}{x+1} = \frac{5x+9}{x+1}$
- $\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{(x+1)(x+2)} - \frac{3(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{2x+4}{(x+1)(x+2)} - \frac{3x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{-x+1}{(x+1)(x+2)}$
- $\frac{x}{2x+1} + \frac{1}{3-x} = \frac{x(3-x)}{(2x+1)(3-x)} + \frac{2x+1}{(2x+1)(3-x)} = \frac{3x-x^2}{(2x+1)(3-x)} + \frac{2x+1}{(2x+1)(3-x)} = \frac{-x^2+5x+1}{(2x+1)(3-x)}$

## Exercice 5

- $\frac{4}{7} \times \frac{9}{5} = \frac{36}{35}$
- $\frac{-13}{4} \times \frac{3}{11} = \frac{-39}{44}$
- $\frac{8}{15} \times 4 = \frac{8}{15} \times \frac{4}{1} = \frac{32}{15}$
- $-6 \times \left(\frac{-20}{7}\right) = \frac{6}{1} \times \frac{20}{7} = \frac{120}{7}$
- $\frac{35}{51} \times \frac{11}{15} = \frac{7}{51} \times \frac{11}{3} = \frac{77}{153}$
- $\frac{-18}{7} \times \frac{1}{42} = \frac{-3}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{-3}{49}$
- $\frac{3}{x} \times \frac{x+1}{4} = \frac{3x+3}{4x}$
- $\frac{-2x}{3} \times \frac{5}{x-1} = \frac{-10x}{3x-3}$
- $\frac{5}{2x-1} \times 4 = \frac{20}{2x-1}$
- $-6 \times \left(\frac{-x+1}{x}\right) = \frac{6x+6}{x}$
- $\frac{x+1}{3x} \times \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+2}{3x}$
- $\frac{-x^2}{2x-1} \times \frac{2x-1}{x^3} = \frac{-1}{x}$

## Exercise 6

$$\bullet \frac{\frac{5}{6}}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{18}$$

$$\bullet \frac{\frac{5}{2}}{7} = 2 \times \frac{9}{7} = \frac{18}{7}$$

$$\bullet \frac{\frac{-4}{9}}{25} = \frac{-4}{9} \times \frac{1}{25} = \frac{-4}{225}$$

$$\bullet \frac{\frac{-16}{15}}{-1} = \frac{16}{15} \times 2 = \frac{32}{15}$$

$$\bullet \frac{\frac{15}{2}}{6} = \frac{15}{2} \times \frac{17}{6} = \frac{5}{2} \times \frac{17}{2} = \frac{85}{4}$$

$$\bullet \frac{\frac{18}{-27}}{11} = \frac{-18}{11} \times \frac{22}{27} = \frac{-2}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$\bullet \frac{\frac{x+1}{6}}{3} = \frac{x+1}{6} \times \frac{x}{3} = \frac{x(x+1)}{18} = \frac{x^2+x}{18}$$

$$\bullet \frac{\frac{2}{3}}{x} = 2 \times \frac{x+3}{3} = \frac{2x+6}{3}$$

$$\bullet \frac{\frac{x}{x+3}}{5} = \frac{-4}{x} \times \frac{1}{5} = \frac{-4}{5x}$$

$$\bullet \frac{\frac{-x}{x+1}}{-1} = \frac{x}{x+1} \times 2 = \frac{2x}{x+1}$$

$$\bullet \frac{\frac{x+5}{2}}{x+3} = \frac{x+5}{2} \times \frac{4}{x+3} = \frac{x+5}{1} \times \frac{2}{x+3} = \frac{2x+10}{x+3}$$

$$\bullet \frac{\frac{8}{x}}{-7} = \frac{8}{x} \times \left( \frac{-x}{7} \right) = \frac{-8}{7}$$

# Les puissances

## Exercice 7

- $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$
- $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
- $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$
- $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$
- $-9^2 = -(9 \times 9) = -81$
- $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$
- $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$
- $8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$
- $(-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49}$
- $-9^{-2} = \frac{-1}{9^2} = \frac{-1}{81}$

## Exercice 8

- $3^2 \times 3^{-4} = 3^{2-4} = 3^{-2}$
- $(-4)^{-3} \times (-4)^{-2} = (-4)^{-3-2} = (-4)^{-5}$
- $\frac{7^{10}}{7^4} = 7^{10-4} = 7^6$
- $\frac{5^8}{4^8} = \left(\frac{5}{4}\right)^8$
- $(-10)^{11} \times 8^{11} = (-10 \times 8)^{11} = (-80)^{11}$
- $(4^5)^2 = 4^{5 \times 2} = 4^{10}$
- $((-2)^4)^{-5} = (-2)^{4 \times (-5)} = (-2)^{-20}$
- $\frac{14^3}{5^3} = \left(\frac{14}{5}\right)^3$

# Développements

## Exercice 9

Développer les expressions suivantes. Écrire les expressions finales sous forme réduite et ordonnée.

$$4(2x+7) = 4*2x + 4*7 = 8x + 28$$

$$5(x-9) = 5*x + 5*(-9) = 5x - 45$$

$$x(3x-6) = x*3x - x*6 = 3x^2 - 6x$$

$$-5(2x+2) = -5*2x + (-5)*2 = -10x - 10$$

$$4(x+7) - 5 + 3(2x+3) = 4x + 28 - 5 + 3*2x + 3*3 = 4x + 28 - 5 + 6x + 9 = 10x + 32$$

$$5 - 3(3x-5) - 6(3-x) = 5 - 9x - 15 - 18 - 6*(-x) = 5 - 9x - 15 - 18 + 6x = -3x - 28$$

$$4x - 6(x^2 - 2x + 4) = 10x - 24$$

$$-3(5x+6) - (5x^2 + 3x) = -5x^2 - 18x - 18$$

## Exercice 10

Développer les expressions suivantes. Écrire les expressions finales sous forme réduite et ordonnée.

$$(3x+1)(2x+3) = 3x*2x + 3x*3 + 1*2x + 1*3 = 6x^2 + 9x + 2x + 3 = 6x^2 + 11x + 3$$

$$(2+4x)(x-2) = 4x^2 - 6x - 4$$

$$(-3x+2)(6x-10) = -18x^2 + 42x - 20$$

$$3(x-4)(x+7) = 3(x^2 + 3x - 28) = 3x^2 + 9x - 84$$

$$-2(3-x)(2x+4) = 4x^2 - 4x - 24$$

$$-4(x+8)(8-3x) = \dots$$

$$5(x+6) - (3x+7)(-x-9) = \dots$$

$$4 - (4-x)(3x+2) = \dots$$

## Exercice 11

Développer les expressions suivantes. Écrire les expressions finales sous forme réduite et ordonnée.

$$(x+4)^2 = \text{IR}_1 (a+b)^2 = x^2 + 2*x*4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$(5+2x)^2 = 4x^2 + 20x + 25$$

$$(7x-1)^2 = \text{IR}_2 (a-b)^2 = 49x^2 - 14x + 1$$

$$(x-1)^2 = \dots$$

$$(2-x)^2 = \dots$$

$$(x+4)(x-4) = \text{IR}_3 (a+b)(a-b) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$$

$$(2x-3)(2x+3) = \dots$$

$$(5x+1)(5x-1) = \dots$$

## Factorisations

### Exercice 12

Factoriser les expressions suivantes.

#### PRINCIPE n°1 : TROUVER LES FACTEURS COMMUNS

$$\bullet 7x+14 = 7*x + 7*2 = 7*(x+2)$$

$$\bullet 3x-3 = 3*x - 3*1 = 3(x-1)$$

$$\bullet x^2+2x = x*x + x*2 = x(x+2)$$

$$\bullet 3x^2-x = x(3x-1)$$

$$\bullet (x+2)(x+1) + (x+2)(3x-4) = (x+2)*[(x+1)+(3x-4)] = (x+2)(x+1+3x-4) = (x+2)(4x-2)$$

$$\bullet 4x(3x-2) - (x+2)(3x-2) = [4x - (x+2)]*(3x-2) = (4x-x-2)(3x-2) = (3x-2)(3x-2) = (3x-2)^2$$

$$\bullet (3-x)(5x+1) - 4(3-x) = (3-x)*[(5x+1)-4] = \dots$$

$$\bullet (x+4)^2 + (x+4)(x+5) = \dots$$

$$\bullet (5-x)(6+x) + (6+x) = (5-x)*(6+x) + 1*(6+x) = [(5-x) + 1] * (6+x) = (6-x) * (6+x)$$

$$\bullet (8+2x) - (8+2x)(x+9) = \dots$$

$$\bullet (5x-1)^2 - (5x-1) = \dots$$

$$\bullet (7x+2) - (7x+2)^2 = \dots$$

### Exercice 13

Factoriser les expressions suivantes.

#### PRINCIPE n°2 : CHERCHER UNE IDENTITE REMARQUABLE

$$\bullet x^2+6x+9 = x^2 + 2*x*3 + 3^2 = \text{IR}_1 = (x+3)^2$$

$$\bullet 4x^2+4x+1$$

$$\bullet x^2-8x+16$$

$$\bullet 9x^2-6x+1^2$$

$$\bullet x^2-9$$

$$\bullet 49-x^2 = 7^2 - x^2 = \text{IR}_3 = (7-x)(7+x)$$

$$\bullet 4x^2-1$$

$$\bullet 25-9x^2$$

$$\bullet (x+3)^2 - (x-5)^2$$

$$\bullet (5x-7)^2 - (2x+1)^2 = \text{IR}_3 = [(5x-7) - (2x+1)]*[(5x-7) + (2x+1)]$$

$$= (5x-7-2x-1)(5x-7+2x+1) = (3x-8)(7x-6)$$

# Equations du premier degré – équations produit nul

## Exercice 14

Résoudre les équations suivantes :

$$\bullet 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow 4x - 5 + 5 = 0 + 5 \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow 4x \div 4 = 5 \div 4 \Leftrightarrow x = 5/4 \Leftrightarrow x = 1,25$$

L'ensemble solution est  $S = \{\frac{5}{4}\}$

##### ajout d'une équation (corrigée) par rapport à l'énoncé #####

$$\bullet 7x + 3 = 13x - 6 \Leftrightarrow 7x - 13x = -6 - 3 \Leftrightarrow -6x = -9 \Leftrightarrow x = -9 \div (-6) \Leftrightarrow x = 1,5$$

$$\bullet \frac{-2}{5}x + 4 = \frac{1}{7}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{2}{5}x - \frac{1}{7}x = \frac{-1}{2} - 4 \Leftrightarrow -\frac{14}{35}x - \frac{5}{35}x = \frac{-1}{2} - \frac{8}{2} \Leftrightarrow -\frac{19}{35}x = \frac{-9}{2} \\ \Leftrightarrow x = \frac{-9}{2} \times \left(\frac{-35}{19}\right) \Leftrightarrow x = \frac{315}{38}$$

$$S = \{\frac{315}{38}\}$$

$$\bullet \frac{1}{3}x + \frac{4}{5} = 6x - 7 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x - 6x = -7 - \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{3}x - \frac{18}{3}x = \frac{-35}{5} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow -\frac{17}{3}x = \frac{-39}{5} \\ \Leftrightarrow x = \frac{-39}{5} \times \left(\frac{-3}{17}\right) \Leftrightarrow x = \frac{117}{85}$$

$$S = \{\frac{117}{85}\}$$

$$\bullet -9x + 1 = 1 \Leftrightarrow -9x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ S = \{0\}$$

$$\bullet x(x+2) = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = x^2 - 1 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2} \\ S = \{-\frac{1}{2}\}$$

$$\bullet 2x(x+5) + x(4-2x) = 7 \Leftrightarrow 2x^2 + 10x + 4x - 2x^2 = 7 \Leftrightarrow 14x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{14} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ S = \{\frac{1}{2}\}$$

$$\bullet (3x+1)(6-x) = x(-3x+8) \Leftrightarrow 18x - 3x^2 + 6 - x = -3x^2 + 8x \Leftrightarrow 9x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{9} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{3} \\ S = \{-\frac{2}{3}\}$$

## Exercice 15

Résoudre les équations suivantes :

**PRODUIT NUL** → Règle :  $A \cdot B = 0$  ssi  $A = 0$  ou  $B = 0$

$$\bullet (5x+4)(4+x)=0 \Leftrightarrow 5x+4=0 \text{ ou } 4+x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{5} \text{ ou } x=-4$$

$$S = \left\{ -4; -\frac{4}{5} \right\}$$

$$\bullet (-x+8)(9x+1)=0 \Leftrightarrow -x+8=0 \text{ ou } 9x+1=0 \Leftrightarrow -x=-8 \text{ ou } 9x=-1 \Leftrightarrow x=8 \text{ ou } x=-\frac{1}{9}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{9}; 8 \right\}$$

$$\bullet (x+3)^2=0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$$

$$S = \{-3\}$$

$$\bullet (6x-3)^2=0 \Leftrightarrow 6x-3=0 \Leftrightarrow 6x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{6} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$\bullet (2x+1)(x+3)+(2x+1)(x+4)=0 \Leftrightarrow (2x+1)((x+3)+(x+4))=0 \Leftrightarrow (2x+1)(2x+7)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=0 \text{ ou } 2x+7=0 \Leftrightarrow 2x=-1 \text{ ou } 2x=-7 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \text{ ou } x=-\frac{7}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{7}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$$

$$\bullet (x-5)(x+5)-(1-x)(x-5)=0 \Leftrightarrow (x-5)((x+5)-(1-x))=0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5-1+x)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-5)(2x+4)=0 \Leftrightarrow x-5=0 \text{ ou } 2x+4=0 \Leftrightarrow x=5 \text{ ou } 2x=-4 \Leftrightarrow x=5 \text{ ou } x=-2$$

$$S = \{-2; 5\}$$

## Résoudre une inéquation du 1<sup>er</sup> degré

### Exercice 16

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\bullet 3x-6>0 \Leftrightarrow 3x-6+6>0+6 \Leftrightarrow 3x>6 \Leftrightarrow x>6/3 \Leftrightarrow x>2.$$

L'ensemble des solutions est  $S = ]2; +\infty[$

$$\bullet \frac{-3}{4}x+3 \leq \frac{2}{3}x-\frac{2}{5} \Leftrightarrow 3 + \frac{2}{5} \leq \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x \Leftrightarrow \frac{15}{5} + \frac{2}{5} \leq \frac{8}{12}x + \frac{9}{12}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{5} \leq \frac{17}{12}x \Leftrightarrow \frac{17}{5} \div \frac{17}{12} \leq x \Leftrightarrow \frac{17}{5} \times \frac{12}{17} \leq x \Leftrightarrow \frac{12}{5} \leq x \Leftrightarrow 2,4 \leq x$$

L'ensemble des solutions est  $S = ]2,4; +\infty[$

$$\bullet \frac{1}{3}x+3 < 5x+5 \Leftrightarrow (1/3-5)x < 5-3 \Leftrightarrow -(14/3) \cdot x < 2$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \cdot - (3/14) \Leftrightarrow x > -6/14 \Leftrightarrow x > -3/7$$

L'ensemble des solutions est  $S = ]-3/7; +\infty[$

$$\bullet -3x+1 \geq 1 \Leftrightarrow -3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0. S = ]-\infty; 0[$$

$$\bullet x(x+3) > x^2 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 + 3x > x^2 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x > -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x > -\frac{2}{9}. S = ]-2/9; +\infty[$$

$$\bullet x(2-3x)+3x(x-1) < 7 \Leftrightarrow 2x-3x^2+3x^2-3x < 7 \Leftrightarrow -x < 7 \Leftrightarrow x > -7. S = ]-7; +\infty[$$

# Résoudre un système d'équations

## Exercice 17

**Par substitution**

$$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ -2x + 3y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 4 \\ -2(2y + 4) + 3y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 4 \\ -4y - 8 + 3y + 5 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 4 \\ -y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \times (-3) + 4 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

**Par substitution**

$$\begin{cases} 4x + y + 3 = 0 \\ 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x - 3 \\ 2x + 2(-4x - 3) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x - 3 \\ 2x - 8x - 6 - 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x - 3 \\ -6x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \times (-\frac{3}{2}) - 3 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

**Par substitution**

$$\begin{cases} -3x - y + 1 = 0 \\ -5x + 5y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 1 \\ -5x + 5(-3x + 1) - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 1 \\ -5x - 15x + 5 - 4 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 1 \\ -20x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \times \frac{1}{20} + 1 \\ x = \frac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{17}{20} \\ x = \frac{1}{20} \end{cases}$$

**Par combinaison**

$$\begin{cases} 5x - 2y - 6 = 0 \\ 3x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(5x - 2y - 6) - 5(3x + 3y - 1) = 3 \times 0 - 5 \times 0 \\ 3x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 15x - 6y - 18 - 15x - 15y + 5 = 0 \\ 3x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21y = 13 \\ 3x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{13}{21} \\ 3x + 3 \times (-\frac{13}{21}) - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{13}{21} \\ 3x = \frac{20}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{13}{21} \\ x = \frac{20}{21} \end{cases}$$

**Par combinaison**

$$\begin{cases} -2x + 5y + 3 = 0 \\ 3x - 7y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2x + 5y + 3) + 2(3x - 7y + 2) = 3 \times 0 + 2 \times 0 \\ 3x - 7y + 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 15y + 9 + 6x - 14y + 4 = 0 \\ 3x - 7y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -13 \\ 3x - 7 \times (-13) + 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = -13 \\ 3x = -93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -13 \\ x = -31 \end{cases}$$

**Par combinaison**

$$\begin{cases} -3x + 2y = 4 \\ 2x + 7y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3x + 2y) + 3(2x + 7y) = 2 \times 4 + 3 \times 2 \\ 2x + 7y = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 4y + 6x + 21y = 14 \\ 2x + 7y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{14}{25} \\ 2x + 7 \times \frac{14}{25} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{14}{25} \\ 2x = -\frac{48}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{14}{25} \\ x = -\frac{24}{25} \end{cases}$$

**Par substitution**

$$\begin{cases} 3x - y - 7 = 0 \\ x - 5y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(5y + 10) - y - 7 = 0 \\ x = 5y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15y + 30 - y - 7 = 0 \\ x = 5y + 10 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 14y = -23 \\ x = 5y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{23}{14} \\ x = 5 \times (-\frac{23}{14}) + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{23}{14} \\ x = \frac{25}{14} \end{cases}$$

**Par substitution**

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y + 1 \\ 4x - 5y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y + 1 \\ 4(\frac{1}{2}y + 1) - 5y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y + 1 \\ 2y + 4 - 5y = 20 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y + 1 \\ -3y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \times (-\frac{16}{3}) + 1 \\ y = -\frac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

**Autre méthode**

$$\begin{cases} 3x = 2y + 3 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y + 3 \\ 4x = 2y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 4x \\ 4x = 2y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 2y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$



# Signe d'une expression algébrique - Inéquations

## Exercice 18

Déterminer le signe de chacune des expressions suivantes :

**a)**  $(3x+2)(2x-5)$

**b)**  $(-2x+7)(3x+6)$

**c)**  $x^3 - 2x^2$

**a)**  $(3x+2)(2x-5)$ .

Zéros :  $3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$ ,  $2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$ .

Intervalle	$(-\infty, -2/3)$	$-2/3$	$(-2/3, 5/2)$	$5/2$	$(5/2, \infty)$
$3x+2$	-	0	+		+
$2x-5$	-		-	0	+
Produit	+	0	-	0	+

Signe (tableau rapide) :

- pour  $x < -\frac{2}{3}$  : les deux facteurs ont même signe  $\Rightarrow$  produit  $> 0$ ;
  - pour  $-\frac{2}{3} < x < \frac{5}{2}$  : signes opposés  $\Rightarrow$  produit  $< 0$ ;
  - pour  $x > \frac{5}{2}$  : produit  $> 0$ .
- Zéros en  $x = -\frac{2}{3}$  et  $x = \frac{5}{2}$ .

**b)**  $(-2x+7)(3x+6)$ .

Zéros :  $-2x+7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{2}$ ,  $3x+6=0 \Rightarrow x=-2$ .

Intervalle	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, 7/2)$	$7/2$	$(7/2, \infty)$
$-2x+7$	+		+	0	-
$3x+6$	-	0	+		+
Produit	-	0	+	0	-

**c)**  $x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$ .

Zéros :  $x=0$  (multiplicité 2) et  $x=2$ .

Signe :

Intervalle	$(-\infty, 0)$	$0$	$(0, 2)$	$2$	$(2, \infty)$
$x^2$	+	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
Produit	-	0	-	0	+

## Exercice 19

Résoudre les inéquations suivantes :

**a)**  $(2x+3)(-3x+4)(5-4x) > 0$       **b)**  $(-2x+3)(x+6) \leq (x+1)(x+6)$

**a)**  $(2x+3)(-3x+4)(5-4x) > 0.$

Zéros :  $x = -\frac{3}{2}$ ,  $x = \frac{4}{3}$ ,  $x = \frac{5}{4}$ . Ordre :  $-\frac{3}{2} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3}$ .

Intervalle	$(-\infty, -3/2)$	$-3/2$	$(-3/2, 5/4)$	$5/4$	$(5/4, 4/3)$	$4/3$	$(4/3, \infty)$
$2x+3$	-	0	+		+		+
$-3x+4$	+		+		+	0	-
$5-4x$	+		+	0	-		-
Produit	-	0	+	0	-	0	+

Tableau rapide donne signe  $> 0$  sur les intervalles

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$$

(les zéros sont exclus parce que strict).

**b)**  $(-2x+3)(x+6) \leq (x+1)(x+6).$

Réduire :  $(x+6)[(-2x+3) - (x+1)] \leq 0 \Rightarrow (x+6)(-3x+2) \leq 0.$

Zéros :  $x = -6$  et  $x = \frac{2}{3}$ .

Intervalle	$(-\infty, -6)$	$-6$	$(-6, 2/3)$	$2/3$	$(2/3, \infty)$
$x+6$	-	0	+		+
$-3x+2$	+		+	0	-
Produit	-	0	+	0	-

Le produit  $\leq 0$  sur

$$(-\infty, -6] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

(les deux zéros inclus).

## Exercice 20

Résoudre les inéquations suivantes :

a)  $\frac{3x+6}{2x-5} \geq 0$       b)  $\frac{3}{x+1} > \frac{2}{x-1}$       c)  $\frac{2}{3x+1} \leq 5$

a)  $\frac{3x+6}{2x-5} \geq 0$ . Simplification : numérateur =  $3(x+2)$ . Zéros en  $x = -2$ , interdit  $x = \frac{5}{2}$ .

Intervalle	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, 5/2)$	$5/2$	$(5/2, \infty)$
$3x+6$	-	0	+		+
$2x-5$	-		-	—	+
Fraction	+	0	-	—	+

Signe positif pour  $x < -2$  et  $x > \frac{5}{2}$ , et zéro en  $-2$ . Donc  $\boxed{(-\infty, -2] \cup (\frac{5}{2}, +\infty)}$ .

b)  $\frac{3}{x+1} > \frac{2}{x-1}$ .

Regrouper :  $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{x-5}{(x+1)(x-1)} > 0$ . Zéros/ interdit :  $x = -1, 1, 5$  (les  $x = -1, 1$  rendent le dénominateur nul).

Intervalle	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 1)$	$1$	$(1, 5)$	$5$	$(5, \infty)$
$x-5$	-		-		-	0	+
$(x+1)(x-1)$	+	—	-	—	+		+
Fraction	-	—	+	—	-	0	+

Signe  $> 0$  sur  $\boxed{(-1, 1) \cup (5, \infty)}$ .

(Rem.  $x = 5$  donne 0, exclu car strict).

c)  $\frac{2}{3x+1} \leq 5$ .

Transformer :  $\frac{2}{3x+1} - 5 \leq 0 \Rightarrow \frac{-15x-3}{3x+1} \leq 0$ . Diviser par  $-3$  (change le sens) donne  $\frac{5x+1}{3x+1} \geq 0$ .

Zéros/ interdit :  $x = -\frac{1}{5}$  (numérateur),  $x = -\frac{1}{3}$  (dénominateur).

Intervalle	$(-\infty, -1/3)$	$-1/3$	$(-1/3, -1/5)$	$-1/5$	$(-1/5, \infty)$
$5x+1$	-		-	0	+
$3x+1$	-	—	+		+
Fraction	+	—	-	0	+

Signe  $\geq 0$  sur  $\boxed{(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup [-\frac{1}{5}, +\infty)}$ . ( $x = -\frac{1}{5}$  inclus,  $x = -\frac{1}{3}$  exclu).

## Exercice 21

Résoudre les inéquations suivantes :

a)  $\frac{3x+1}{6-5x} \geq 2$       b)  $\frac{2x^2+1}{3+x} < 2x$       c)  $\frac{x-3}{x+1} + \frac{2x+5}{x-2} \geq 3$

a)  $\frac{3x+1}{6-5x} \geq 2.$

$\frac{3x+1}{6-5x} - 2 = \frac{13x-11}{6-5x} \geq 0$ . Zéros/ interdit :  $x = \frac{11}{13}$  (numérateur),  $x = \frac{6}{5}$  (dénominateur).

Intervalle	$(-\infty, 11/13)$	$11/13$	$(11/13, 6/5)$	$6/5$	$(6/5, \infty)$
$13x-11$	-	0	+		+
$6-5x$	+		+	-	-
Fraction	-	0	+	-	-

Signe  $\geq 0$  sur  $\left[ \frac{11}{13}, \frac{6}{5} \right)$ .

b)  $\frac{2x^2+1}{x+3} < 2x.$

$\frac{2x^2+1}{x+3} - 2x = \frac{1-6x}{x+3} < 0$ . Zéros/ interdit :  $x = \frac{1}{6}$  (numérateur),  $x = -3$  (déno.).

Intervalle	$(-\infty, -3)$	$-3$	$(-3, 1/6)$	$1/6$	$(1/6, \infty)$
$1-6x$	+		+	0	-
$x+3$	-	-	+		+
Fraction	-	-	+	0	-

Signe  $< 0$  sur  $\left( -\infty, -3 \right) \cup \left( \frac{1}{6}, +\infty \right)$  ( $x = \frac{1}{6}$  non inclus,  $x = -3$  exclu).

c)  $\frac{x-3}{x+1} + \frac{2x+5}{x-2} \geq 3.$

Mettre sur dénominateur commun et simplifier : on obtient

$$\frac{(x-3)(x-2) + (2x+5)(x+1)}{(x+1)(x-2)} \geq 3$$

après développements et simplifications l'inégalité devient

$$\frac{5x+17}{(x+1)(x-2)} \geq 0.$$

Zéros/ interdit :  $x = -\frac{17}{5}$  (numérateur),  $x = -1$  et  $x = 2$  (dénominateur).

Intervalle	$(-\infty, -17/5)$	$-17/5$	$(-17/5, -1)$	$-1$	$(-1, 2)$	$2$	$(2, \infty)$
$5x+17$	-	0	+		+		+
$(x+1)(x-2)$	+		-	-	-	-	+
Fraction	-	0	+	-	-	-	+

Signe  $\geq 0$  donne  $\left[ -\frac{17}{5}, -1 \right) \cup (2, +\infty)$  ( $x = -\frac{17}{5}$  inclus,  $x = -1$  et  $x = 2$  exclus).