

#курс

# про $\phi$ иматика

возможно, самый понятный  
канал по математике

## Прямоугольный треугольник



## Задачи к вебинару 29.09.2022

### Задание 1

Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом  $15^\circ$ , если известно, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.

### Задание 2

Через основание биссектрисы  $AD$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с вершиной  $B$  проведен перпендикуляр к этой биссектрисе, пересекающий прямую  $AC$  в точке  $E$ . Найдите отрезок  $AE$ , если известно, что  $CD = 4$ .

### Задание 3

Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 8 и 9. Найдите стороны треугольника.

### Задание 4

Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении 1:3. Найдите острые углы треугольника.

### Задание 5

Точка  $D$  – середина  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Окружность, вписанная в треугольник  $ACD$ , касается отрезка  $CD$  в его середине. Найдите острые углы треугольника  $ABC$ .

### Задание 6

В прямоугольном треугольнике  $ABC$  из вершины прямого угла  $C$  проведены биссектриса  $CL$  и медиана  $CM$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $LM = a$ ,  $CM = b$ .

### Задание 7

Вне треугольного треугольника  $ABC$  на его катетах  $AC$  и  $BC$  построены квадраты  $ACDE$  и  $BCFG$ . Продолжение медианы  $CM$  треугольника  $ABC$  пересекает прямую  $DF$  в точке  $N$ . Найдите отрезок  $CN$ , если его катеты равны 1 и 4.

### Задание 8

Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне, а угол при основании трапеции равен  $120^\circ$ .

- Докажите, что одно из оснований трапеции вдвое больше другого.
- Найдите стороны трапеции, если ее диагональ равна  $2\sqrt{3}$ .

### Задание 9

Точка  $E$  – середина гипотенузы  $ML$  прямоугольного треугольника с углом  $30^\circ$  при вершине  $A$ . Окружность, вписанная в треугольник  $KLE$ , касается катета  $KL$  в точке  $B$ .

- Докажите, что  $KE = AB$ .
- В каком отношении точка касания большей из этих окружностей делит гипотенузу?



## Задание 10

На катетах  $AC$  и  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  вне треугольника построены квадраты  $ACDE$  и  $BFKC$ . Точка  $M$  – середина гипотенузы  $AB$ ,  $H$  – точка пересечения прямых  $CM$  и  $DK$ .

- Докажите, что  $CM \perp DK$ .
- Найдите  $MH$ , если катеты треугольника  $ABC$  равны 30 и 40.

## Задание 11

Точка  $P$  – основание высоты  $BP$  равнобедренного треугольника  $ABC$ , опущенной на боковую сторону  $AC$ . Точки  $E$  и  $F$  середины основания  $BC$  и  $AB$  боковой стороны соответственно.

- Докажите, что в четырехугольник  $BEPF$  можно вписать окружность.
- Найдите ее радиус, если  $BC = 12$  и  $AB = AC = 10$ .

## Задание 12

Точка  $A$  расположена вне квадрата  $KLMN$  с центром  $O$ , причем треугольник  $KAN$  прямоугольный (угол  $A = 90^\circ$ ) и  $AK = 2AN$ . Точка  $B$  – середина стороны  $KN$ .

- Докажите, что  $BM \parallel AN$
- Прямая  $AO$  пересекает сторону  $ML$  квадрата в точке  $P$ . Найдите отношение  $LP : PM$ .

## Домашнее задание

## Основная часть

## Задание 1

В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  известно, что  $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$ .

- Докажите, что  $AC \perp CD$ .
- Найдите углы трапеции.

## Задание 2

Точка  $M$  – середина гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с углом  $30^\circ$  при вершине  $A$ . Окружность, вписанная в треугольник  $BMC$ , касается его сторон  $BC$  и  $BM$  в точках  $P$  и  $Q$ .

- Докажите, что  $PQ \parallel CM$ .
- Найдите  $PQ$ , если  $AB = 8$ .

## Задание 3

На катетах  $KL$  и  $ML$  прямоугольного треугольника  $KLM$  вне треугольника построены квадраты  $ABKL$  и  $CDLM$ ,  $LP$  – высота треугольника  $ADL$ .

- Докажите, что прямая  $PL$  проходит через середину  $E$  гипотенузы  $KM$ .
- Найдите  $EP$ , если катеты треугольника  $KLM$  равны 10 и 24.



## Задание 4

Из вершины  $C$  тупого угла треугольника  $ABC$  проведена высота  $CH$ . Точку  $H$  соединили с серединами  $M$  и  $N$  сторон  $AC$  и  $BC$ .

- Докажите, что в четырехугольник  $CMHN$  можно вписать окружность.
- Найдите ее радиус, если сумма сторон  $AC$  и  $BC$  равна 20 и площадь треугольника  $ABC$  равна 24.

## Задание 5

Точка  $E$  расположена вне квадрата  $ABCD$  с центром  $O$ , причем треугольник  $BEC$  прямоугольный (угол  $E = 90^\circ$ ) и неравносторонний. Точка  $M$  - середина стороны  $BC$ .

- Докажите, что треугольник  $OME$  равнобедренный.
- Прямая  $EO$  пересекает сторону  $AD$  квадрата в точке  $K$ . Найдите отношение  $AK : KD$ , если угол  $CBE = 30^\circ$ .

## Дополнительная часть

## Задание 1

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4. Найдите радиус описанной окружности.

## Задание 2

Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна  $m$  и делит прямой угол в отношении 1:2. Найдите стороны треугольника.

## Задание 3

В треугольнике  $ABC$  к стороне  $AC$  проведены высота  $BK$  и медиана  $MB$ , причем  $AM = BM$ . Найдите косинус угла  $KBM$ , если  $AB = 1$ ,  $BC = 2$ .

## Задание 4

Две стороны треугольника равны 6 и 5, площадь треугольника равна 9. Медиана, проведенная к его третьей стороне, больше ее половины.

- Докажите, что треугольник остроугольный.
- Найдите его наибольшую высоту.

## Задание 5

Продолжения высот  $PP_1$  и  $QQ_1$  треугольника  $PQR$  с тупым углом при вершине  $R$  пересекаются в точке  $H$ . Точки  $A$  и  $B$  середины отрезков  $PQ$  и  $RH$  соответственно.

- Докажите, что  $P_1Q_1 \perp AB$ .
- Найдите диагонали четырехугольника  $AP_1BQ_1$ , если  $PQ = 10$ ,  $RH = 6$  и  $AM = 3BM$ , где  $M$  - точка пересечения диагоналей.

## Задание 6

Медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ , причём  $BB_1 \perp CC_1$ .

- Докажите, что из отрезков  $A_1M$ ,  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$  можно построить треугольник.
- Найдите площадь этого треугольника, если  $BB_1 = 18$  и  $CC_1 = 9$ .



## Задание 7

Высота  $АН$  и медиана  $АМ$  треугольника  $АВС$  делят угол  $ВАС$  треугольника  $АВС$  на три равные части, причем точка  $Н$  лежит между  $В$  и  $М$ . Из точки  $М$  опущен перпендикуляр  $МК$  на сторону  $АС$ .

- а) Докажите, что  $МК = ВН$ .
- б) Найдите углы треугольника  $АВС$ .

## Задание 8

Медианы  $АМ$  и  $ВN$  треугольника  $АВС$  перпендикулярны и пересекаются в точке  $P$ .

- а) Докажите, что  $СР = АВ$ .
- б) Найдите площадь треугольника  $АВС$ , если  $АС = 3$  и  $ВС = 4$ .

## Ответы

### Задачи к вебинару

1. 1;
2. 8;
3. 3; 4; 5;
4.  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ;
5.  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ;
6.  $\frac{b^2(b^2-a^2)}{a^2+b^2}$ ;
7.  $\frac{4}{\sqrt{17}}$ ;
8. 2, 2, 2, 4;
9. 1 : 3, считая от точки  $L$ ;
10. 49;
11.  $\frac{24}{\sqrt{12}}$ ;
12. 1 : 2.

### Домашнее задание

#### Основная часть

1.  $60^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $120^\circ$ ;
2. 2;
3.  $\frac{289}{13}$ ;
4. 1,2;
5.  $\sqrt{3} : 3$ .

#### Дополнительная часть

1. 2;
2.  $2m$ ,  $m$ ,  $m\sqrt{3}$ ;
3.  $\frac{4}{5}$ ;
4.  $\frac{18}{\sqrt{13}}$ ;
5.  $4\sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{7}$ ;
6. 27;
7.  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ;
8.  $\sqrt{11}$ .