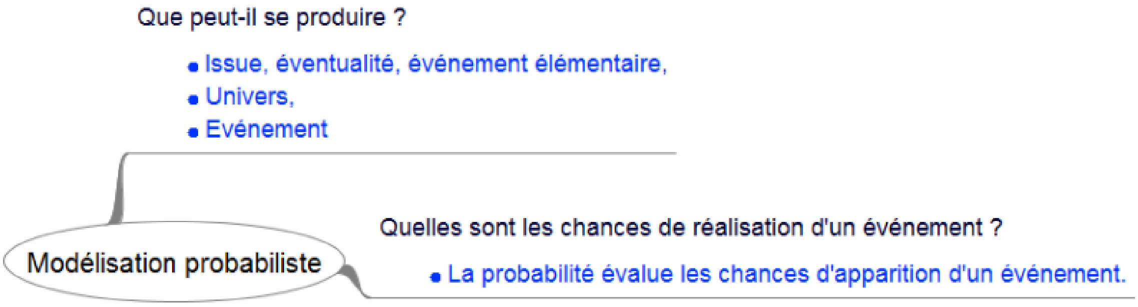
INTRODUCTION AU CALCUL DE PROBABILITES

Le calcul des probabilités est une branche des mathématiques qui permet de modéliser les **expériences aléatoires**, c'est-à-dire les expériences pour lesquelles on ne peut pas prévoir le résultat.

MODELISATION

La construction du « modèle probabiliste » se fait en deux étapes :

1. Description de ce qui peut se produire (ensemble des résultats possibles).
2. Calcul de la probabilité (mesurant les chances d'apparition d'un résultat).



UNIVERS : QUE PEUT-IL SE PRODUIRE ?

Issue ou éventualité ou événement élémentaire : résultat possible de l'expérience aléatoire.
Univers : ensemble des issues, c'est-à-dire des résultats possibles de l'expérience aléatoire. On le note Ω.
Événement : propriété du résultat qui peut être réalisée ou pas. Un événement est un sous-ensemble de Ω. Il y a ainsi une correspondance entre le langage des événements et la théorie des ensembles.

LANGAGE DES EVENEMENTS - ENSEMBLES

Événements	Ensembles
A événement	$A \subset \Omega$ (A sous-ensemble de Ω)
Événement **certain** (il est toujours réalisé)	Ω
Événement **impossible** (il n'est jamais réalisé)	$\varnothing$
$\overline{A}$, événement **contraire** de A, il se réalise lorsque A n'est pas réalisé	$\overline{A}$ complémentaire de A dans Ω
A et B sont **incompatibles** : A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps	$A \cap B = \varnothing$: A et B disjoints
A **et** B se réalisent tous les deux : $A \cap B$ est réalisé	Intersection $A \cap B$
A **ou** B (éventuellement les deux) se réalise : $A \cup B$ est réalisé	Réunion $A \cup B$
A est réalisé et B ne l'est pas : $A - B$ est réalisé	Différence $A - B = A \cap \overline{B}$
$\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ **système complet d'événements**	$\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ partition de Ω.

PROBABILITE : QUELLES SONT LES CHANCES DE REALISATION D'UN EVENEMENT ?

PROBABILITE : nombre compris entre 0 et 1 mesurant les chances de réalisation d'un événement.

La probabilité d'un événement impossible est 0.
La probabilité d'un événement certain est 1.

Dans le langage courant, la probabilité est aussi exprimée en pourcentage de « chances » de réalisation de l'événement : par exemple, pour une probabilité de 0,1, on dira aussi qu'« il y a 10% de chances que l'événement se réalise ». Le mode de calcul de la probabilité va nous permettre de préciser la nature de ce pourcentage.

COMMENT CALCULE-T-ON UNE PROBABILITE ?

PROBABILITE « THEORIQUE » OU PROBABILITE « A PRIORI »

On la détermine sans expérimenter, en analysant le phénomène aléatoire (ex : jet d'un dé).
Les cas de déterminations « a priori » des probabilités correspondent aux situations **d'équiprobabilité.**

Équiprobabilité : Il y a équiprobabilité lorsque les issues d'une expérience aléatoire sont toutes également vraisemblables c'est-à-dire ont la même probabilité (ex : jet d'un dé).

Définition de la probabilité dans une situation d'équiprobabilité : dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement E est le rapport entre le nombre de résultats favorables à cet événement et le nombre total de résultats possibles : $p(E) = \frac{cardE}{card\Omega}$

Exemples

→ *Lorsqu'on jette un dé, la probabilité d'avoir un nombre pair est de 0,5 car 50% des résultats possibles (3 sur 6) donnent un nombre pair :*

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- P *l'événement « obtenir un nombre pair » :* $P = \{2,4,6\}$

$$p(P) = \frac{card(P)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

→ ***Tirage d'un individu dans une population :***

On s'intéresse à la probabilité d'avoir une femme (événement F).

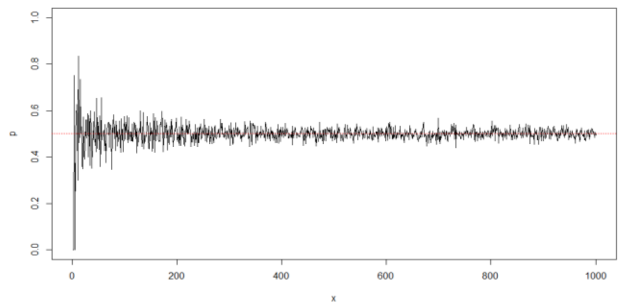
$$p(F) = \frac{cardF}{card\Omega} = \frac{nombre\ de\ femmes\ dans\ la\ population}{nombre\ d'individus\ dans\ la\ population}$$

P(F) correspond donc exactement, dans ce cas, à ………………………………………………………………

PROBABILITE "EXPERIMENTALE" - DEFINITION FREQUENTISTE DE LA PROBABILITE

Il n'est pas toujours possible de compter les cas favorables et les cas possibles. On n'a pas toujours non plus « l'équiprobablité » (imaginez un dé pipé). Dans la pratique, une autre façon de définir la probabilité s'impose, fondée sur des résultats expérimentaux.

Nous avons vu TP, qu'en simulant un **grand nombre** de jets d'une pièce *(rbinom(100,1,0.5) par exemple),* la proportion de « pile » *(mean(rbinom(100,1,0.5)))* tendait vers une **valeur limite, la probabilité.**



Cette approche, appelée « **fréquentiste** », présente la probabilité d'un événement comme étant la **fréquence de réalisation** de l'évènement sur un nombre « **infini** » d'expériences.

Loi des grands nombres : à mesure que le nombre d'expériences augmente, la fréquence d'apparition d'un événement tend vers sa probabilité.

Plus précisément : Une épreuve est répétée N fois. À chaque essai, on note le résultat de l'épreuve. Soit N_E, le nombre de réalisations de l'événement E au cours des N épreuves. La fréquence de réalisation de l'événement E au cours des N épreuves, N_E/N, tend vers la probabilité P(E) quand N tend vers l'infini :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{N_E}{N} = p(E)$$

Cette définition permet de préciser l'interprétation de la probabilité : ***la probabilité d'un événement correspond à sa fréquence d'apparition sur un très grand nombre d'expériences aléatoires.***

Proprietes des probabilites

Axiomes du calcul des probabilites

Soit Ω un univers et A un événement :

- La probabilité de l'événement A est un nombre positif ou nul : $p(A) \geq 0$.
- La probabilité de l'univers Ω est égale à 1 : $p(\Omega) = 1$.
- Si A et B sont deux événements incompatibles alors la probabilité de réalisation de l'un ou l'autre est égale à la somme des probabilités de A et de B : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Ces trois axiomes sont connus comme étant les ***axiomes de Kolmogorov****, du nom du mathématicien russe, Andreï Kolmogorov (1903-1987) qui les a développés*.

Autres proprietes

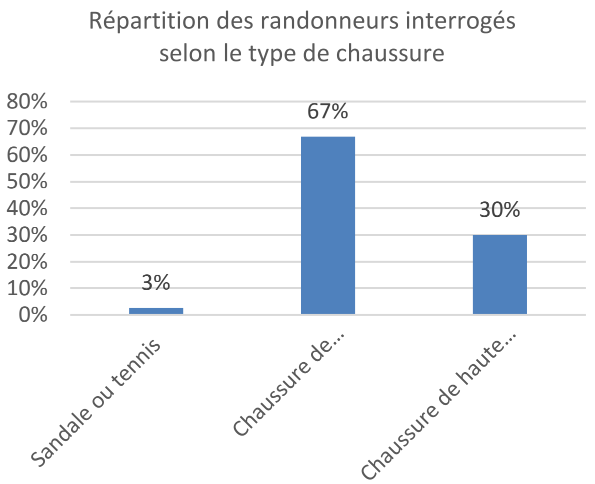
- Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ alors :
$$\sum_{i=1}^{n} p(\{\omega_i\}) = 1$$
- $p(\emptyset) = 0$
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- $p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Si les événements A_i sont deux à deux incompatibles alors :
$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

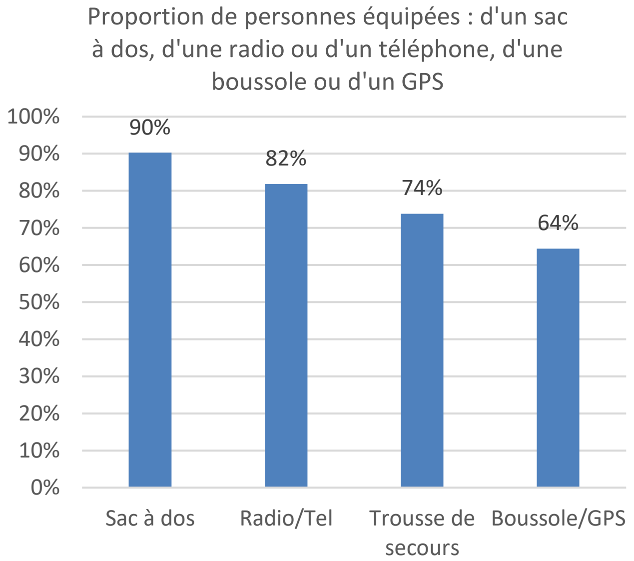
ILLUSTRATION

Une enquête a été réalisée au cours des étés 2004 et 2005, auprès de 4318 randonneurs effectuant l'ascension d'un des trois somment suivants : Aneto, Posets, Mont Perdu (pyrénées aragonaises).

Le diagramme ci-dessous résume les pourcentages de randonneurs enquêtés qui ont répondu aux questions suivantes :

- *Quel type de chaussure avez-vous ?*
- *Avez-vous une boussole ? une trousse de secours ? une carte ? un téléphone portable ?*





QUESTIONS

A. On choisit au hasard un randonneur parmi les **4318 randonneurs interrogés au cours des étés 2004 et 2005**.
   1. Donner un univers associé à cette expérience.
   2. Donner un exemple d'événement associé à cette expérience pour lequel on peut donner une probabilité. S'agit-il d'une valeur exacte ou approchée ?

B. On choisit au hasard un randonneur dans la montagne **parmi ceux effectuant l'ascension de l'Aneto, des Posets ou du Mont Perdu.**
   1. Donner un univers associé à cette expérience.
   2. Donner un exemple d'événement associé à cette expérience pour lequel on peut donner une probabilité. S'agit-il d'une valeur exacte ou approchée ?

C. Événements compatibles et incompatibles

On choisit au hasard un randonneur parmi les 4318 randonneurs interrogés au cours des étés 2004 et 2005.
   1. Donner un exemple de deux événements incompatibles asssociés à l'expérience précédente du A.
   2. Donner un exemple de deux événements compatibles. *Justifiez pourquoi ils sont compatibles.

D. Nouvelle notion…

On choisit au hasard un randonneur parmi les 4318 randonneurs interrogés au cours des étés 2004 et 2005.
On note H et E les événements suivants :
H : « le randonneur choisi est un homme » ; E : « le randonneur choisi est espagnol »

Dans la population étudiée, on a observé que 82% des randonneurs espagnols étaient des hommes.
Peut-on transformer ce pourcentage en probabilité ? Si oui à quoi correspondrait la probabilité 0,18 ?

CORRECTION

A. On choisit au hasard un randonneur parmi les 4318 randonneurs interrogés au cours des étés 2004 et 2005.

1. Donner un univers associé à cette expérience.

   L'univers est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience. Le résultat d'un tirage étant un randonneur, l'univers est l'ensemble des randonneurs.

   $$\boldsymbol{card(\Omega) = 4318}$$

2. Donner un exemple d'événement associé à cette expérience pour lequel on peut donner une probabilité. S'agit-il d'une valeur exacte ou approchée ?

   30% des randonneurs portent des chaussures de haute montagne.

   On note H l'événement « le randonneur choisi porte des chaussures de haute montagne ».

   On suppose que chaque randonneur a la même chance d'être choisi, d'où équiprobabilité :

   $$\boldsymbol{p(H) = \frac{cardH}{card\Omega}}$$

   Or le quotient $\frac{cardH}{card\Omega}$ correspond exactement à 30%, proportion dans la population.

   $p(H) = 0,3$: cette probabilité est une valeur exacte (elle a été obtenue grâce à l'hypothèse d'équiprobabilité et il n'a pas été nécessaire d'expérimenter pour l'obtenir.

B. On choisit au hasard un randonneur parmi ceux effectuant l'ascension de l'Aneto, des Posets ou du Mont Perdu.

1. Donner un univers associé à cette expérience.

   Cette fois-ci l'univers est l'ensemble des randonneurs effectuant l'ascension de l'Aneto, des Posets ou du Mont Perdu. On ne connait pas précisément l'univers et notamment son cardinal.

2. Donner un exemple d'événement associé à cette expérience pour lequel on peut donner une probabilité. S'agit-il d'une valeur exacte ou approchée ?

   Comme on ne connait pas le cardinal de l'univers on ne peut pas utiliser la formule $\frac{cardH}{card\Omega}$ et déterminer de façon exacte les probabilités.

   Par contre 30% correspond à la fréquence obtenue pour l'événement A au cours d'une répétition de l'expérience 4318 fois. 0,3 peut être considéré comme une valeur approchée (on ne connaît pas trop la précision) de p(H) selon la loi des grands nombres.

C. Événements compatibles et incompatibles

On choisit au hasard un randonneur parmi les 4318 randonneurs interrogés au cours des étés 2004 et 2005.

1. Donner un exemple de deux événements incompatibles associés à l'expérience précédente du A.

   On suppose qu'un randonneur ne peut pas porter deux types de chaussures différentes. Si on note S l'événement, « le randonneur chois porte des sandales », on peut donc en déduire que :

   $$\boldsymbol{S \cap A = \emptyset}$$

   Les événements S et H sont incompatibles

2. Donner un exemple de deux événements compatibles. *Justifiez pourquoi ils sont compatibles.

   On note T l'événement « le randonneur choisi a un téléphone », on peut a priori penser qu'il existe des randonneurs ayant un téléphone et des chaussures de haute montagne : T et A sont compatibles.

   En est-on sûr ?

   Oui car $p(A) + p(T) = 0,3 + 0,82 = 1,12 > 1$

   En effet, on sait que : $p(A \cup T) = p(A) + p(T) - p(A \cap T)$

   Donc $p(A \cap T) = p(A) + p(T) - p(A \cup T)$

   Or $p(A \cup T) \leq 1$, donc $p(A \cap T) \geq p(A) + p(T) - 1$

   $$\boldsymbol{p(A \cap T) \geq 1,12 - 1}$$

   $$\boldsymbol{p(A \cap T) \geq 0,12}$$

   On est sûr qu'il y a au moins 12% des randonneurs qui ont, à la fois des chaussures de haute montagne et un téléphone.

D. Nouvelle notion…

On choisit au hasard un randonneur parmi les 4318 randonneurs interrogés au cours des étés 2004 et 2005.
On note H et E les événements suivants :
H : « le randonneur choisi est un homme » ; E : « le randonneur choisi est espagnol »

Dans la population étudiée, on a observé que 82% des randonneurs espagnols étaient des hommes.

Peut-on transformer ce pourcentage en probabilité ? Si oui à quoi correspondrait la probabilité 0,18

Le pourcentage 82% ne porte pas sur toute la population, mais uniquement sur les randonneurs espagnols.

$$\mathbf{0,82} = \frac{\boldsymbol{nombre\ de\ randonneurs\ espagnols\ et\ masculins}}{\boldsymbol{nombre\ de\ randonneurs\ espagnols}}$$

Pour traduire ce pourcentage en probabilité, il faudrait que l'univers ne soit plus l'ensemble des randonneurs mais l'ensemble des randonneurs espagnols.

0,82 est la probabilité d'avoir un homme si on choisit un randonneur parmi les espagnols.

On dit aussi que 0,82 est LA PROBABILITE CONDITIONNELLE D'AVOIR UN HOMME SACHANT QU'IL EST ESPAGNOL, elle se note $\boldsymbol{p_E(M)}$.

Ici, comment se calcule une probabilité conditionnelle ?

$$\boldsymbol{p_E(M) = 0,82 = \frac{nombre\ de\ randonneurs\ espagnols\ et\ masculins}{nombre\ de\ randonneurs\ espagnols} = \frac{card(E \cap M)}{card(E)}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{card(E \cap M)/card(\Omega)}{card(E)/card(\Omega)} = \frac{p(E \cap M)}{p(E)}}$$

De façon générale : $\boldsymbol{p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$

PROBABILITE CONDITIONNELLES

Soit A et B deux événements, B de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé ou ***probabilité de A sachant B*** le nombre : $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

Numériquement, travailler avec des probabilités conditionnelles « sachant B » revient à « ramener » l'univers initial à l'événement B (B « devient » l'événement certain). Dans le cas de l'équiprobabilité, la probabilité $p_B(A)$ correspond à la proportion, dans B, des éléments de A (donc de $A \cap B$).

Remarques :

- $p_B(\overline{A}) = 1 - p_B(A)$ mais il n'y a pas de relation directe entre $p_B(A)$ et $p_{\overline{B}}(A)$
- $\boldsymbol{p(A \cap B) = p_B(A)p(B)}$

FORMULE DES PROBABILITES TOTALES

Notion préliminaire : un système complet d'événements $\{A_1, A_2, .. A_n\}$ est une partition de Ω.

Exemple de système complet d'événements (partition de Ω).
Une usine de fabrication de pièces métalliques comprend trois unités de fabrication : U1, U2 et U3.
Ces unités fabriquent le même type de pièce en proportion différentes : 50%, 30% et 20%.
On choisit une pièce au hasard.
L'univers Ω est l'ensemble des pièces fabriquées par l'usine.
On note U1 : « la pièce choisie est fabriquée par U1 », U2…
Une pièce choisie au hasard est forcément fabriquée dans l'une des trois unités de fabrication :

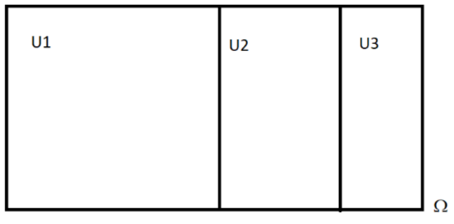
$$U1 \cup U2 \cup U3 = \Omega$$

Une pièce choisie au hasard ne peut pas être fabriquée par plusieurs unités à la fois :

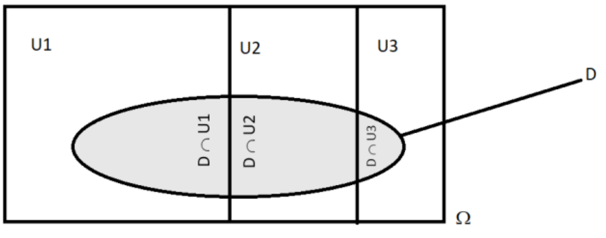
$$Les\ \text{événements}\ Ui\ sont\ deux\ \text{à}\ deux\ incompatibles$$

→ {U1,U2, U3} est une partition ou un système complet d'événements de Ω :

$$\begin{cases} \boldsymbol{U1 \cup U2 \cup U3 = \Omega} \\ \boldsymbol{Les\ \text{événements}\ Ui\ sont\ deux\ \text{à}\ deux\ incompatibles} \end{cases}$$



Introduction à la formule des probabilités totales
Imaginons un quatrième événement, D : « la pièce choisie est défectueuse »



$$D = (D \cap U1) \cup (D \cap U2) \cup (D \cap U3)$$
$$p(D) = p(D \cap U1) + p(D \cap U2) + p(D \cap U3)$$

L'entreprise précise que les taux de pièces défectueuses ne sont pas les mêmes selon les unités : 5% des pièces fabriquées par U1, 3% des pièces fabriquées par U2 et 4% des pièces fabriquées par U3 sont défectueuses.

Ces informations se traduisent de la sorte : $p_{U1}(D) = 0{,}05$; $p_{U2}(D) = 0{,}03$; $p_{U3}(D) = 0{,}04$

Question : peut-on calculer la probabilité d'avoir une pièce défectueuse p(D), à partir des probabilités précédentes ?

Il suffit de partir de la relation $p(D) = p(D \cap U1) + p(D \cap U2) + p(D \cap U3)$
et de se rappeler que : $p(D \cap U1) = p_{U1}(D)p(U1)$...

On obtient ainsi la relation (formule des probabilités totales) :

$$\boldsymbol{p(D)} = \boldsymbol{p_{U1}(D)}p(U1) + \boldsymbol{p_{U2}(D)}p(U2) + \boldsymbol{p_{U3}(D)}p(U3)$$

On obtient numériquement : $\boldsymbol{p(D)} = \mathbf{0,05} \times 0{,}5 + \mathbf{0,03} \times 0{,}3 + \mathbf{0,04} \times 0{,}2 = 0{,}042$

Il y a 4,2% de pièces défectueuses sur l'ensemble de la production, ce pourcentage est une moyenne pondérée des pourcentages de pièces défectueuses fabriquées par U1, U2 et U3.
De façon générale, la formule des probabilités totales permet d'exprimer la probabilité d'un événement comme moyenne **pondérée de probabilités conditionnelles** de cet événement sur un système complet d'événements.

FORMULE DES PROBABILITES TOTALES

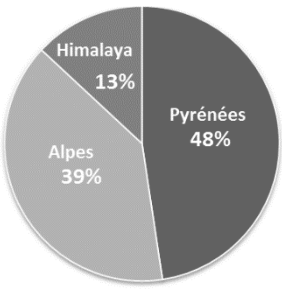
Soit A un événement et $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un système complet d'événements. La probabilité de l'événement A s'exprime comme "moyenne" des probabilités conditionnelles $p_{A_i}(A)$ pondérée par les $p(A_i)$:

$$\boldsymbol{p(A)} = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_{A_i}(A)\, p(A_i)}$$

APPLICATION

CLIENTELE AGENCE DE VOYAGE

On s'intéresse à la clientèle d'une agence de voyage spécialisée dans les randonnées. Celle-ci est constituée de 6785 randonneurs (clients).
L'agence, située dans les Pyrénées, offre trois types de destinations : les Pyrénées, les Alpes et l'Himalaya.



On s'intéresse à la clientèle retraitée de cette agence.
Le tableau suivant donne la proportion de retraités par destination :

	Proportion de retraités (par destination)
Pyrénées	27%
Alpes	18%
Himalaya	8%

A. Tirage d'un client

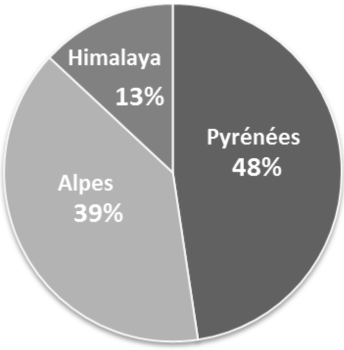
On choisit au hasard un client de l'agence

1. Donner un univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Traduire les données du graphique et du tableau par des probabilités.
3. Quelle est la probabilité que le client choisi soit retraité ?
4. Quelle est la probabilité que le client soit retraité et ait choisi les Pyrénées pour destination.
5. Le client tiré au sort a choisi comme destination les Pyrénées. Quelle est la probabilité qu'il soit retraité ?
6. Le client tiré au sort est retraité. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi les Pyrénées comme destination ?

CORRECTION

CLIENTELE AGENCE DE VOYAGE

On s'intéresse à la clientèle d'une agence de voyage spécialisée dans les randonnées. Celle-ci est constituée de 6785 randonneurs (clients).
L'agence, située dans les Pyrénées, offre trois types de destinations : les Pyrénées, les Alpes et l'Himalaya.



On s'intéresse à la clientèle retraitée de cette agence.
Le tableau suivant donne la proportion de retraités par destination :

	Proportion de retraités (par destination)
Pyrénées	27%
Alpes	18%
Himalaya	8%

On choisit au hasard un client de l'agence

1. Donner un univers associé à cette expérience aléatoire.
   L'univers est l'ensemble des 6785 clients de l'agence
2. Traduire les données du graphique et du tableau par des probabilités.
   On note :
   H : « l'Himalaya est la destination du séjour du client choisi »
   P : « les Pyrénées sont la destination du séjour du client choisi »
   A : « les Alpes sont la destination du séjour du client choisi »
   R : « le client choisi est retraité »
   Traduction des données du graphique :
   $$p(P) = 0,48\,;\ p(A) = 0,39\,;\ p(H) = 0,13$$
   Données su tableau :
   $$p_P(R) = 0,27\ ;\ \ p_A(R) = 0,18\ ;\ \ p_H(R) = 0,08$$
3. Quelle est la probabilité que le client choisi soit retraité ?
   {H,P,A} est un système complet d'événements, on applique la formule des probabilités totales :
   $$p(R) = p_P(R)p(P) + p_A(R)p(A) + p_H(R)p(H)$$
   $$p(R) = 0,27 \times 0,48 + 0,18 \times 0,39 + 0,08 \times 0,13 = 0,21$$
4. Quelle est la probabilité que le client soit retraité et qu'il ait choisi les Pyrénées pour destination.
   $$p(R \cap P) = p_P(R)p(P) = 0,27 \times 0,48 = 0,13$$
5. Le client tiré au sort a choisi comme destination les Pyrénées. Quelle est la probabilité qu'il soit retraité ?
   $$p_P(R) = 0,27$$
6. Le client tiré au sort est retraité. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi les Pyrénées comme destination ?
   $$p_R(P) = \frac{p(R \cap P)}{p(R)} = \frac{p_P(R)p(P)}{p(R)} = \frac{0,27 \times 0,48}{0,21} = 0,62$$

INDEPENDANCE

INTRODUCTION

On reprend l'exemple des pièces dans l'usine

Une usine de fabrication de pièces métalliques comprend trois unités de fabrication : U1, U2 et U3.
Ces unités fabriquent le même type de pièce en proportion différentes : 50%, 30% et 20%.
On choisit une pièce au hasard.
Imaginons que les taux de pièces défectueuses soient les mêmes pour chaque unité : 5% des pièces fabriquées par U1, U2 ou par U3.

$$p_{U1}(D) = p_{U2}(D) = p_{U3}(D) = 0{,}05$$

On aura donc aussi 5% de pièces défectueuses dans l'ensemble de la production : $p(D) = 0{,}05$

$\boldsymbol{p_{U1}(D) = p(D)}$ **: la probabilité de réalisation de D est la même que U1 soit réalisé ou pas, on dit que les événements U1 et D sont indépendants.**

SIGNIFICATION DE L'INDEPENDANCE

- Deux événements **A et B** sont **indépendants** si la probabilité de réalisation de l'un n'est pas liée à la réalisation de l'autre c'est-à-dire si $p_B(A)=p(A)$ ou $p_A(B)=p(B)$

- **L'événement impossible** est indépendant de tout autre événement.

- Deux événements (non impossibles) incompatibles ne sont **jamais indépendants** car la réalisation de l'un rend impossible la réalisation de l'autre : $p(A \cap B) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_A(B) = 0 & (p(A) \neq 0) \\ p_B(A) = 0 & (p(B) \neq 0) \end{cases}$

*L'indépendance de deux événements n'est pas toujours une notion intuitive. Elle l'est surtout quand les événements sont issus d'**expériences indépendantes**.*

DEFINITION

Pour ne pas avoir à introduire de discussion sur l'éventuelle impossibilité des événements en jeu, on préfère habituellement utiliser la définition suivante valable que les événements soient possibles ou non. La définition obtenue perd en signification.

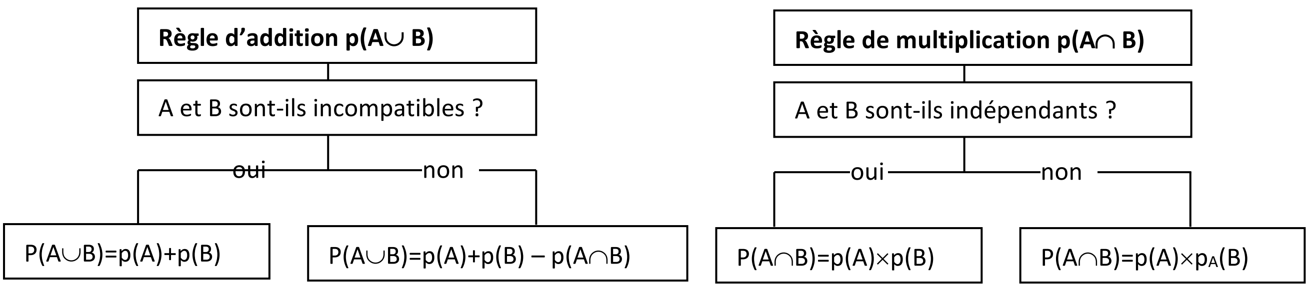
Soit A et B deux événements. A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

PROPRIETES

- Si B est de probabilité non nulle : « A et B indépendant » $\Leftrightarrow p_B(A) = p(A)$
- Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
- Des événements issus **d'expériences indépendantes** sont (**mutuellement**) **indépendants** (ex : tirage avec remise)

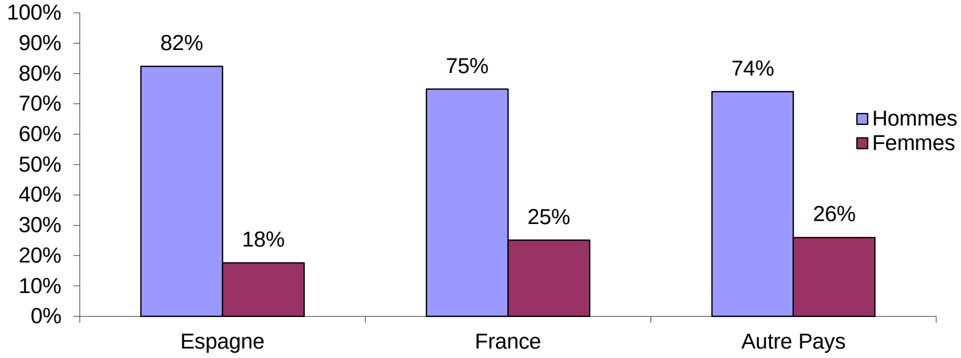
RESUME : DEUX REGLES IMPORTANTES DU CALCUL DES PROBABILITES



APPLICATION

ENQUETE PYRENEES

On choisit au hasard un individu parmi les randonneurs les 4318 randonneurs.

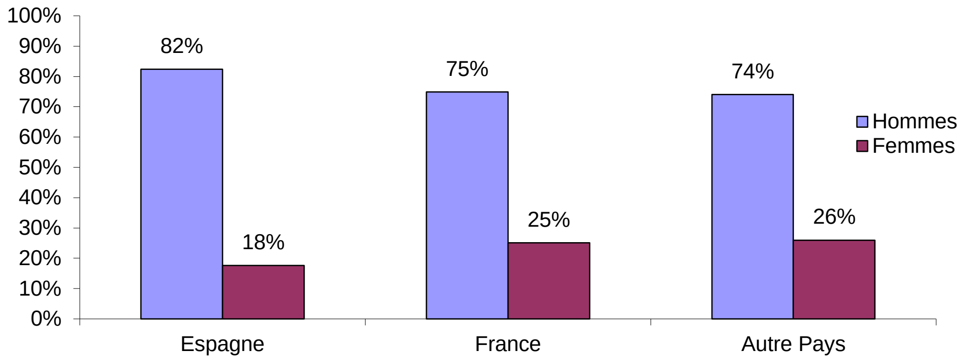


1. À quelles probabilités correspondent les pourcentages du graphique ci-dessus ?
2. A partir de ces probabilités, peut-on calculer la probabilité que l'individu choisi soit un homme ?
3. Peut-on dire que les événements « l'individu choisi est un homme » et « l'individu choisi est espagnol » sont indépendants ?
4. *Peut-on dire que les événements « l'individu choisi est un homme » et « l'individu choisi est français » sont indépendants ?

CORRIGE

ENQUETE PYRENEES

On choisit au hasard un individu parmi les randonneurs les 4318 randonneurs.



1. À quelles probabilités correspondent les pourcentages du graphique ci-dessus ?
   On note :
   E : « Le randonneur choisi habite en Espagne »
   F : « Le randonneur choisi habite en France »
   A : « Le randonneur choisi habite dans un autre pays »
   H : « Le randonneur choisi est un homme »
   $\overline{\mathrm{H}}$: « le randonneur choisi est une femme »

   Les pourcentages du graphique peuvent se traduire par les probabilités suivantes :
   $$p_E(H) = 0,82 \; ; \; p_E(\overline{H}) = 0,18$$
   $$p_F(H) = 0,75 \; ; \; p_F(\overline{H}) = 0,25$$
   $$p_A(H) = 0,74 \; ; \; p_A(\overline{H}) = 0,26$$

2. A partir de ces probabilités, peut-on calculer la probabilité que l'individu choisi soit un homme ?
   Pour calculer p(H) il faudrait pouvoir appliquer la formule des probabilités totales qui nécessite la connaissance de p(E,) p(F) et p(A) : $p(H) = p_E(H)p(E) + p_F(H)p(F) + p_A(H)p(A)$
   On ne connait pas p(E,) p(F) et p(A), on ne peut donc pas calculer p(H).
   Ce que l'on peut dire, c'est que $p(H)$ est une moyenne de $p_E(H),\ p_F(H),\ p_A(H)$
   Comme : $p_E(H) > \ p_F(H) > \ p_A(H)$, on est sûr que $p_E(H) > \ p(H) > \ p_A(H)$

3. Peut-on dire que les événements « l'individu choisi est un homme » et « l'individu choisi est espagnol » sont indépendants ?
   D'après la remarque précédente : $p_E(H) > \ p(H)$ donc $p_E(H) \neq \ p(H)$
   E et H ne sont pas indépendants

4. *Peut-on dire que les événements « l'individu choisi est un homme » et « l'individu choisi est français » sont indépendants ?
   D'après la remarque de la question 2, on sait que $p_E(H) \neq \ p(H)$ et $p_A(H) \neq \ p(H)$ par contre on ne peut pas être sûr que $p_F(H)$ est différent de p(H).
   On ne sait donc pas si H et F sont indépendants ou liés.

EXERCICE

La population des 4650 allocataires de la CAF d'une partie du Béarn a été étudiée en décembre 2008.
On s'intéresse à deux caractéristiques de ces allocataires :

- Leur nombre d'enfants,
- S'ils sont ou non bénéficiaires du RMI.

RMI	non bénéficiaire	bénéficiaire	Total général
pas d'enfant	86%	14%	984
1 ou 2 enfants	98%	2%	1024
au moins 3 enfants	97%	3%	2039

A. <u>Tirage d'un allocataire</u>

On choisit un allocataire au hasard

1. Donner un univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Traduire les données du tableau par des probabilités
3. Quelle est la probabilité que l'allocataire choisi soit bénéficiaire du RMI ?
4. Quelle est la probabilité que l'allocataire choisi soit sans enfant et bénéficiaire du RMI ?
5. L'allocataire choisi est sans enfant. Quelle est la probabilité qu'il soit bénéficiaire du RMI ?
6. L'allocataire choisi est bénéficiaire du RMI. Quelle est la probabilité qu'il soit sans enfant ?

B. <u>*Erreurs de traitements dans les données</u>

Lors du traitement statistique du fichier, les 4650 allocataires ont été classés en deux catégories :

- Catégorie A : « avec enfant(s) »,
- Catégorie S : « sans enfant »

Il y a malheureusement eu des erreurs manipulation du fichier. En conséquence 6% des allocataires sans enfant ont été classés A et 2% des allocataires avec enfant(s) ont été classé S.

On choisit un allocataire au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait été classé A ?
2. L'allocataire choisi a été classé S. Quelle est la probabilité qu'il soit réellement sans enfant ?
3. Quelle est la probabilité que l'allocataire choisi ait été mal classé ?
4. L'allocataire choisi a été mal classé. Quelle est la probabilité qu'il ait été classé A ?

CORRIGE

La population des 4047 allocataires de la CAF d'une partie du Béarn a été étudiée en décembre 2008.
On s'intéresse à deux caractéristiques de ces allocataires :

- Leur nombre d'enfants,
- S'ils sont ou non bénéficiaires du RMI.

RMI	non bénéficiaire	bénéficiaire	Total général
pas d'enfant	86%	14%	984
1 ou 2 enfants	98%	2%	1024
au moins 3 enfants	97%	3%	2039

A. Tirage d'un allocataire

On choisit un allocataire au hasard

1. Donner un univers associé à cette expérience aléatoire.
   L'univers est l'ensemble des 4047 allocataires
2. Traduire les données du tableau par des probabilités
   On note :
   B : « l'allocataire choisi est bénéficiaire du RMI »
   P : « l'allocataire choisi n'a pas d'enfant »
   U : « l'allocataire choisi a un ou deux enfants »
   T : « l'allocataire choisi a au moins 3 enfants »

   Les pourcentages du tableau peuvent se traduire par les probabilités suivantes :

$$\boldsymbol{p_P(B) = 0,86\ ;\ p_P(\overline{B}) = 0,14}$$
$$\boldsymbol{p_U(B) = 0,98\ ;\ p_U(\overline{B}) = 0,02}$$
$$\boldsymbol{p_T(B) = 0,97\ ;\ p_T(\overline{B}) = 0,03}$$

   A partir de la dernière colonne, on peut calculer :

$$\boldsymbol{p(P) = \frac{984}{4047}\ ;\ p(U) = \frac{1024}{4047}\ ;\ p(T) = \frac{2039}{4047}}$$

3. Quelle est la probabilité que l'allocataire choisi soit bénéficiaire du RMI ?
   On applique la formule des probabilités totales :

$$\boldsymbol{p(B) = p_P(B)p(P) + p_U(B)p(U) + p_T(B)p(T) = \cdots}$$

4. Quelle est la probabilité que l'allocataire choisi soit sans enfant et bénéficiaire du RMI ?

$$\boldsymbol{p(B \cap P) = p_P(B)p(P) = 0,86 \times \frac{984}{4047}}$$

5. L'allocataire choisi est sans enfant. Quelle est la probabilité qu'il soit bénéficiaire du RMI ?

$$\boldsymbol{p_P(B) = 0,86}$$

6. L'allocataire choisi est bénéficiaire du RMI. Quelle est la probabilité qu'il soit sans enfant ?

$$\boldsymbol{p_B(P) = \frac{p(B \cap P)}{p(B)} = \frac{p_P(B)p(P)}{p(B)} = \cdots}$$

*Erreurs de traitements dans les données

Lors du traitement statistique du fichier, les 4650 allocataires ont été classés en deux catégories :

- Catégorie A : « avec enfant(s) »,
- Catégorie S : « sans enfant »

Il y a malheureusement eu des erreurs de manipulation du fichier. En conséquence 6% des allocataires sans enfant ont été classés A et 2% des allocataires avec enfant(s) ont été classé S.

Traduction de l'énoncé :
A : « l'allocataire choisi a été classé avec enfant »
S : « l'allocataire chois a été classé sans enfant »
6% des allocataires sans enfant ont été classés A : $p_P(A) = 0,06$
2% des allocataires avec enfant(s) ont été classé S : $p_{\overline{P}}(S) = p_{\overline{P}}(\overline{A}) = 0,02$

On choisit un allocataire au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait été classé A ?
   On connaît p(P) : $p(P) = \frac{984}{4047}$ **et donc** $p(\overline{P}) = 1 - p(P)$
   Formule des probabilités totales :
   $$p(A) = p_P(A)p(P) + p_{\overline{P}}(A)p(\overline{P}) = p_P(A)p(P) + \left(1 - p_{\overline{P}}(\overline{A})\right)\left(1 - p(P)\right)$$
   $$p(A) = p_P(A)p(P) + \left(1 - p_{\overline{P}}(S)\right)\left(1 - p(P)\right)$$

2. L'allocataire choisi a été classé S. Quelle est la probabilité qu'il soit réellement sans enfant ?
   $$p_S(P) = \frac{p(P \cap S)}{p(S)} = \frac{p_P(S)p(P)}{1 - p(A)} = \frac{\left(1 - p_P(A)\right)p(P)}{1 - p(A)}$$
3. Quelle est la probabilité que l'allocataire choisi ait été mal classé ?
   L'allocataire a été mal classé. Deux possibilités :
   - **soit il est parent et il est classé sans enfant :** $\overline{P} \cap S$
   - **soit il n'a pas d'enfant et il est classe comme en ayant :** $P \cap A = P \cap \overline{S}$

   Il faut donc calculer :

   $$p(M) = p[(\overline{P} \cap S) \cup (P \cap A)] = p(\overline{P} \cap S) + p(P \cap A) = p_{\overline{P}}(S)p(\overline{P}) + p_P(A)p(P)$$

4. L'allocataire choisi a été mal classé. Quelle est la probabilité qu'il ait été classé A ?
   $$p_M(A) = \frac{p(A \cap M)}{p(M)} = \frac{p(P \cap A)}{p(M)} = \frac{p_P(A)p(P)}{p_{\overline{P}}(S)p(\overline{P}) + p_P(A)p(P)}$$