Thierry Gil

thierry.gil@sudest.pleiad.net

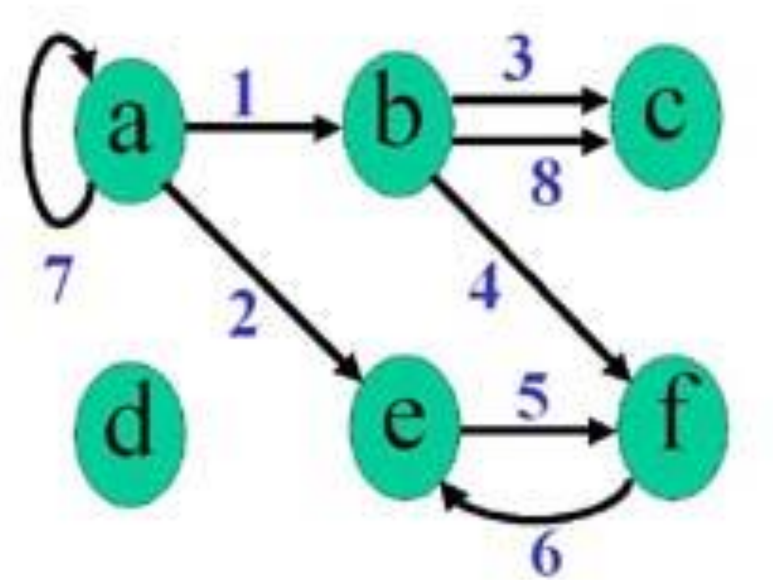
La théorie des graphes

- Qu'est ce qu'un graphe
- Connexité dans un graphe.
- Représentation d'un graphe.

Qu'est ce qu'un graphe ?

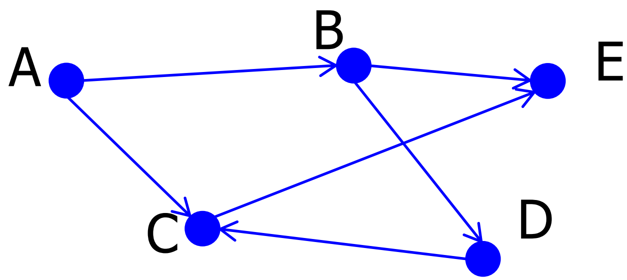
Graphes

Un Graphe, au départ, c'est simple : des sommets et des arcs, des points et des flèches ou des traits qui les relient. Quand ce sont des flèches, on a affaire à des graphes orientés; si ce sont des traits, le graphe n'est pas orienté. Certains problèmes font intervenir l'orientation, d'autres non.



Qu'est ce qu'un graphe ?

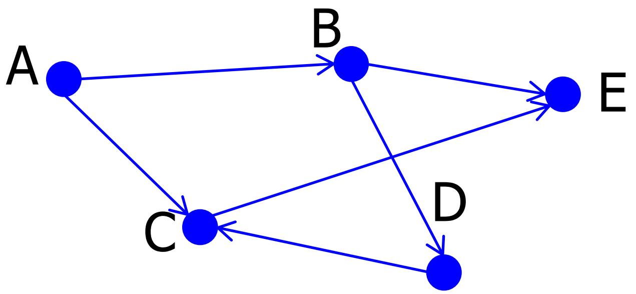
- Considérons les points A, B, C, D, E et un certain nombre de flèches joignant entre eux plusieurs couples de ces points.



- Au sens mathématique, ces flèches peuvent symboliser une application Γ dont le point extrémité initiale est l'argument et le point extrémité terminale, l'image.
- On peut écrire Γ(A)={B,C}; Γ(B)={D,E}; Γ(C)={E}; Γ{D}={C}; Γ(E)=$\varnothing$
- Si on remonte les flèches, on obtient les images réciproques: Γ^{-1}(A)= $\varnothing$; Γ^{-1} (B)={A}; Γ^{-1} (C)={A,D}; Γ^{-1} {D}={B}; Γ^{-1} (E)={B,C}

- Le graphe G est défini lorsqu'on connait l'ensemble X={A,B,C,D,E} des sommets et l'application Γ d'où l'écriture G=(X, Γ).
- Or Γ représente les flèches ou arcs entre 2 sommets, on peut donc remplacer Γ par l'ensemble U des arcs:
  - U ={(A,B);(A,C);(B,D);(B,E);(C,E);(D,C)}

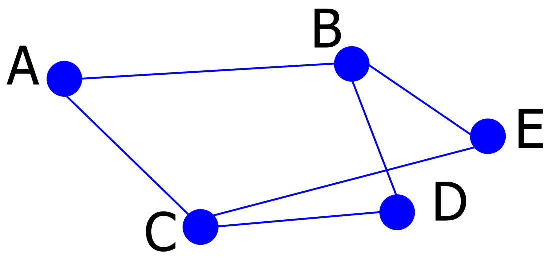
Qu’est ce qu’un graphe ?



- On définit donc le graphe par:
  - G = (X,U)
  - Avec X = {A, B, C, D, E} l’ensemble des sommets,
  - Et U ={(A,B);(A,C);(B,D);(B,E);(C,E);(D,C)} l’ensemble des arcs.

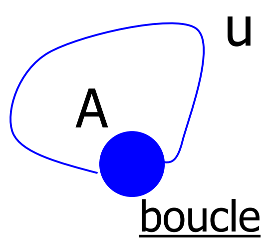
Graphe non orienté

- Dans certaines applications, on n'a pas besoin de noter les orientations d'un graphe.
- On l'appelle un graphe non orienté.
- Les arcs d'un graphe non orienté se nomment les arêtes.



Graphe simple

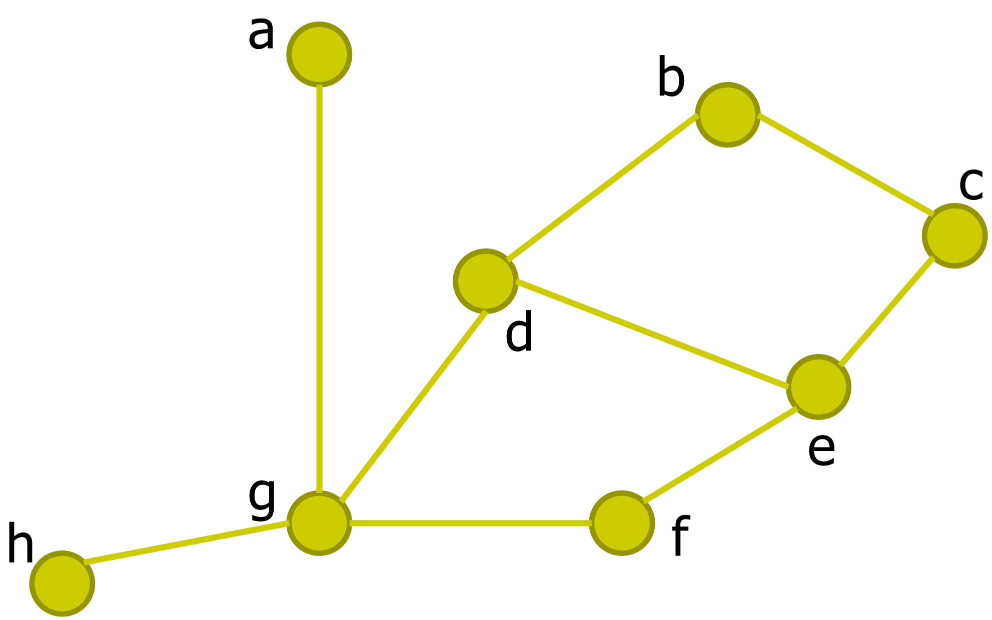
- Un graphe est dit simple si:
  - Il n’existe pas de boucle,
  - Il n’existe pas plus d’un arc entre 2 sommets.



Ordre d’un graphe

- Le nombre de sommets est appelé ordre, rang ou degré du graphe.

Exemple



G=(X,U)
Combien de sommets ?
Combien d'arêtes ?

G est un graphe comportant 8 sommets notés de a à h et 9 arêtes.

X = ?
U = ?

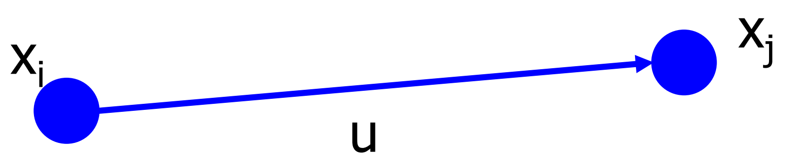
X = {a, b, c, d, e, f, g, h}
U = { (a,g), (b,c), (b,d), (c,e), (d,e), (d,g), (e,f), (f,g), (g,h) }

Graphes orientés

- Un graphe orienté ou digraphe est un couple G=(X,U) dans lequel X est un ensemble finis de sommets et U l'ensemble des arcs.

- La représentation visuelle d'un graphe orienté consiste en un ensemble de sommets étiquetés et d'arêtes orientées reliant certains couples de sommets. Les arêtes orientées forment les éléments de U et sont appelés des arcs.

- Pour un arc $u=(x_i, x_j)$, on dit que:
  - x_i est l'extrémité initiale de l'arc,
  - x_j est l'extrémité finale de l'arc.



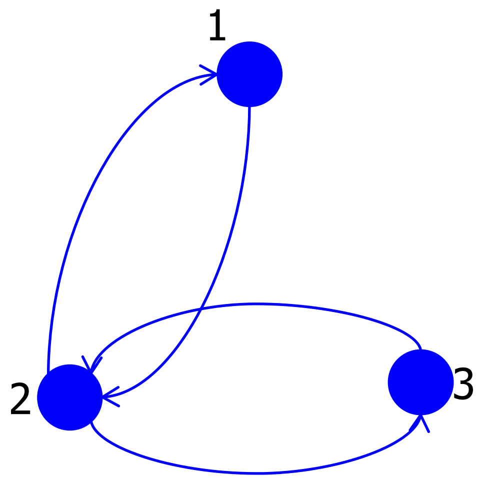
Graphe symétrique, Graphe antisymétrique

- Un graphe G=(X,U) est symétrique si:

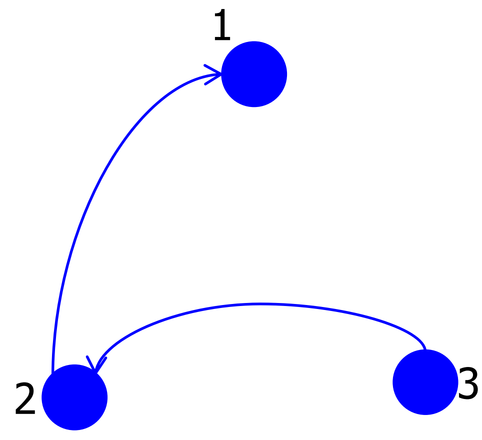
  $\forall x \in X$, $\forall y \in X$, Si (x,y) est un arc $\Leftrightarrow$ (y,x) est un arc.

- Un graphe G=(X,U) est antisymétrique si:

  $\forall x \in X$, $\forall y \in X$, Si (x,y) est un arc alors (y,x) n'est pas un arc.



Graphe symétrique



Graphe antisymétrique

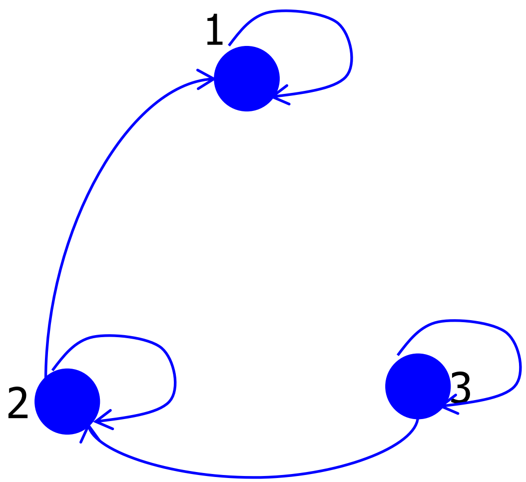
Graphe réflexif, Graphe antiréflexif

- Un graphe G=(X,U) est réflexif si:

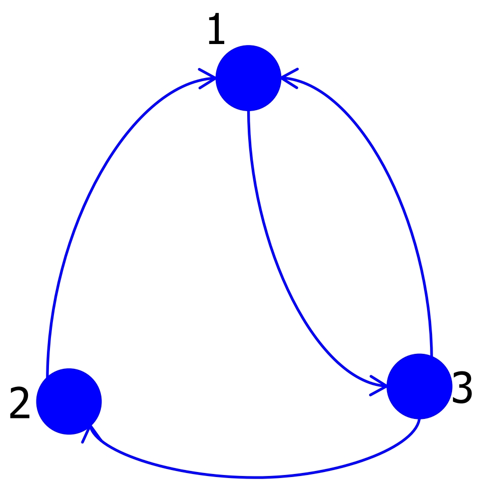
  $\forall x \in X$, Il existe un arc (x,x).

- Un graphe G=(X,U) est antiréflexif si:

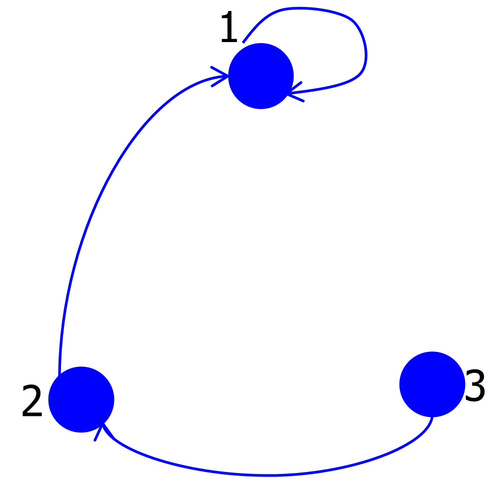
  $\forall x \in X$, il n'y a pas d'arc (x,x).



Graphe réflexif



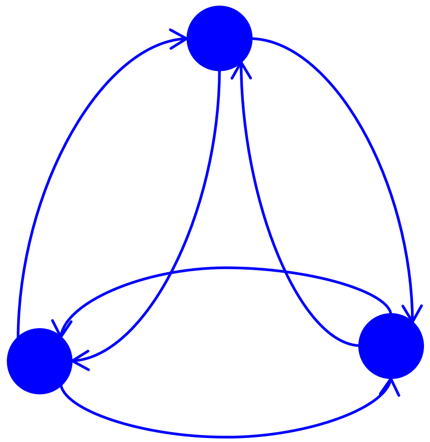
Graphe antiréflexif
(sans boucle)



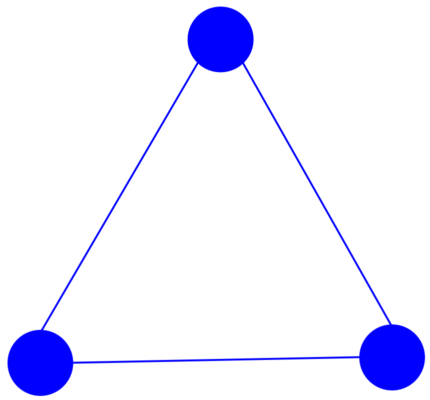
Graphe non réflexif et
non antiréfléxif

Graphe complet

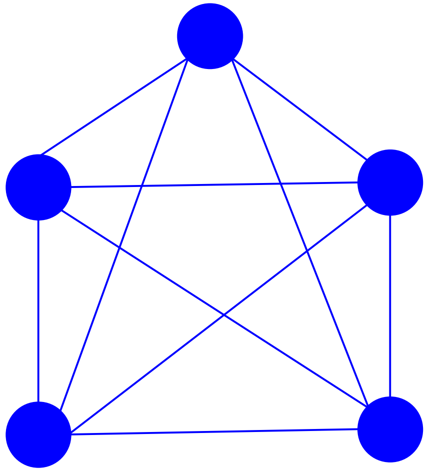
- Un graphe G=(X,U) est dit complet si pour tout couple de sommets (x,y) distincts, il existe au moins un arc (x,y) ET un arc (y,x) dans le graphe.
- Un graphe non orienté est complet si pour tout couple de sommets (x,y) distincts, il existe au moins une arête (x,y) dans le graphe, c'est-à-dire si tous les sommets sont adjacents.



Graphe complet orienté sur 3 sommets

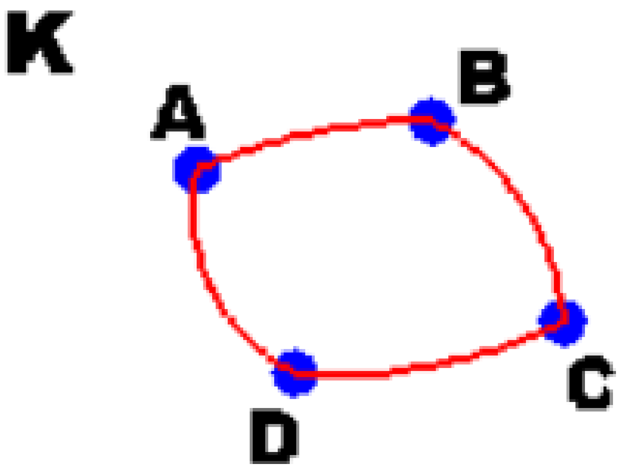


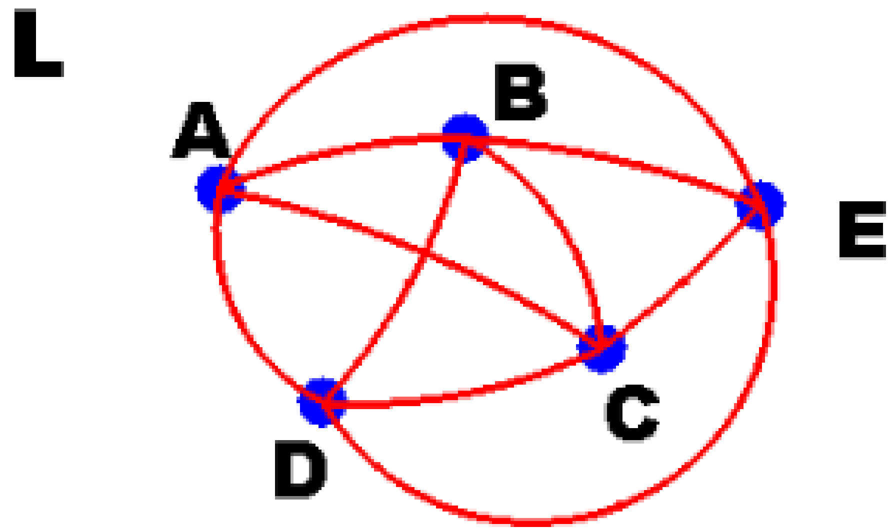
Graphe complet non orienté sur 3 sommets



Graphe complet non orienté sur 5 sommets

Graphe complet





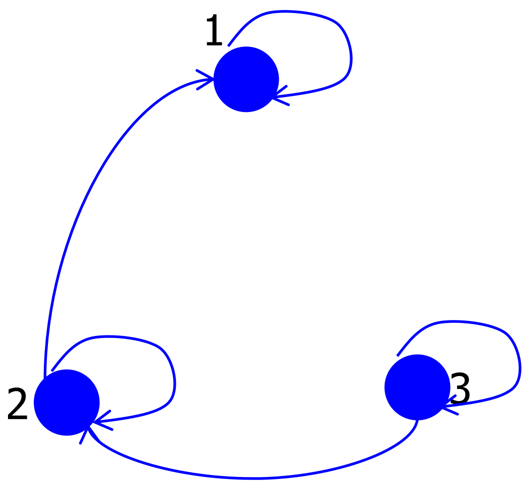
K n’est pas complet, il manque les arêtes AC et BD.

L est complet.

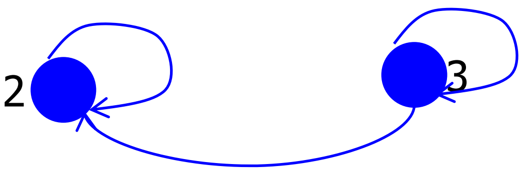
Sous-Graphe

- Soit G=(X,U) un graphe.

Un sous-graphe G' s'obtient en enlevant un ou plusieurs sommets au graphe G, ainsi que toutes les arêtes incidentes à ces sommets.



Graphe G

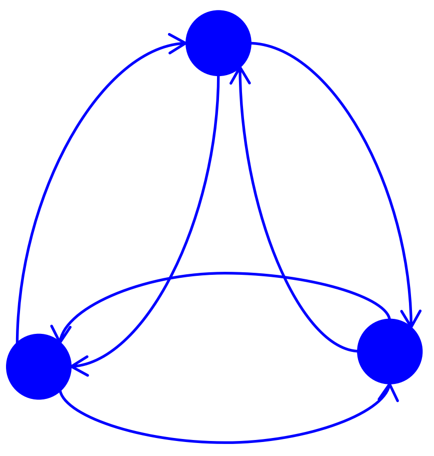


Sous-Graphe G'

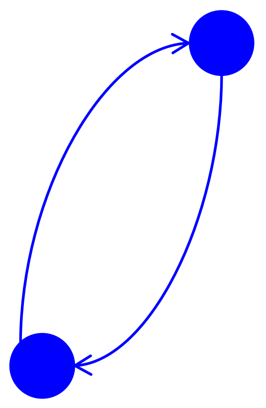
Clique

- Soit G=(X,U) un graphe.

Une clique est un sous-graphe complet.



Graphe complet
orienté sur 3
sommets



Clique

Degré et Demi-degré

- Dans un graphe non orienté, le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui contiennent ce sommet.

- Dans un graphe orienté, on distingue:
  - Le demi-degré intérieur:
    - Nombre d'arcs dont le sommet x est l'origine (degré sortant). On le nomme $d^+(x)$.
  - Le demi-degré extérieur:
    - Nombre d'arcs dont le sommet x est l'extrémité (degré entrant). On le nomme $d^-(x)$.

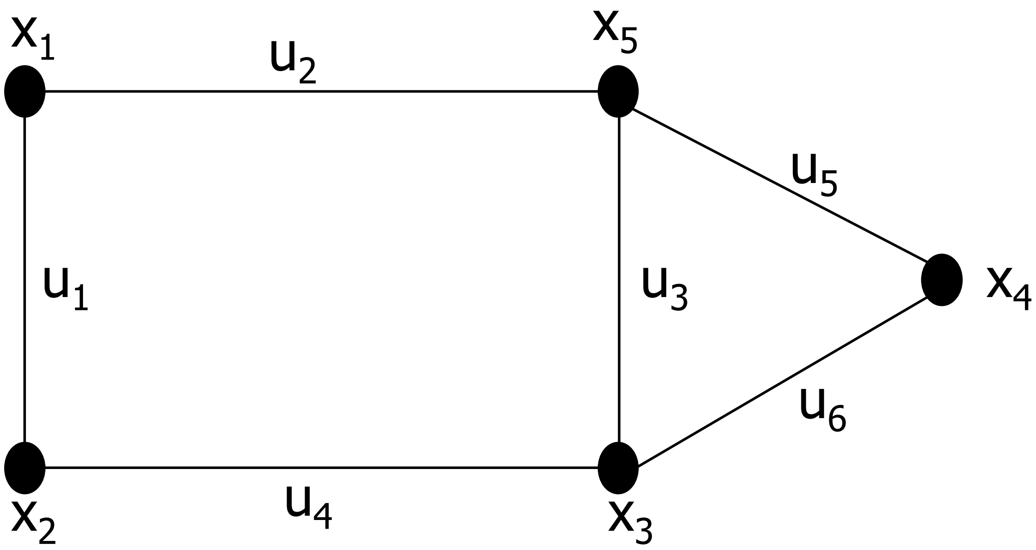
Chaîne – Cycle
(Graphe Non Orienté)

- Chaîne
  - Une chaîne est une séquence finie d'arêtes telle que chaque arête ait une extrémité commune avec la suivante.
  - Le premier et le dernier sommet sont appelés sommets extrémités de la chaîne.
  - La longueur de la chaîne est égale aux nombres d'arêtes qui la composent.
  - Si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, la chaîne est dite chaîne élémentaire.
  - Si aucune des arêtes composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, la chaîne est dite chaîne simple.

Chaîne – Cycle
(Graphe Non Orienté)

- Cycle
  - Un cycle est une chaîne dont les extrémités coïncident.

Chaîne – Cycle
(Graphe Non Orienté)



u_1, u_4, u_3, u_5 est une chaîne, u_5, u_6, u_3 est une cycle.

Chemin – Circuit
(Graphe Orienté)

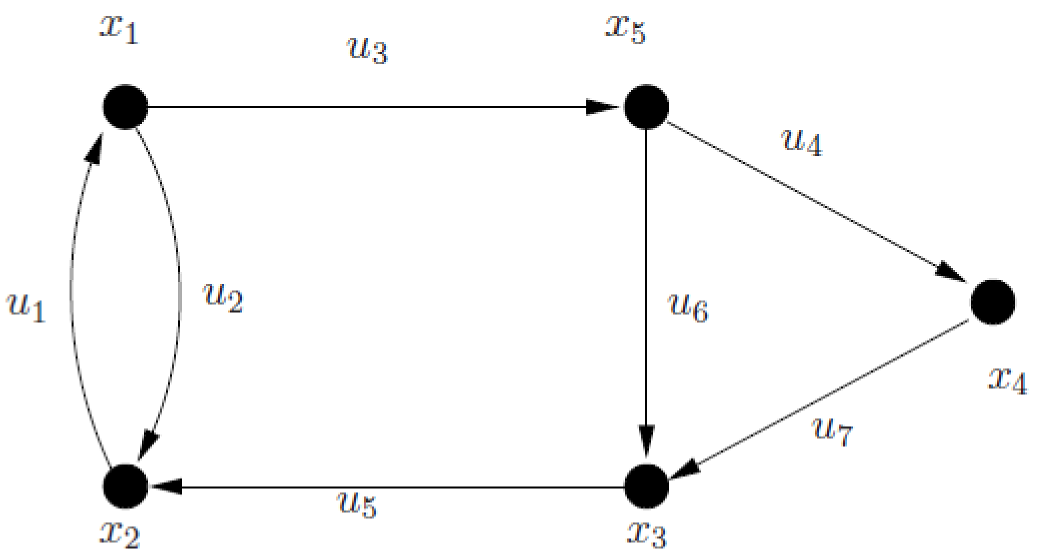
- Chemin
  - Ce sont les mêmes définitions que les précédentes mais pour des graphes orientés.
  - Un chemin est une séquence finie d'arcs, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arc est sortant d'un sommet et incident au sommet suivant la séquence (cela correspond à la notion de chaîne orientée).
  - Si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, le chemin est dit chemin élémentaire.
  - Si aucune des arêtes composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, la chaîne est dite chemin simple.
  - La longueur d'un chemin est le nombre de ses arcs.

Chemin – Circuit
(Graphe Orienté)

- Circuit
  - Un circuit est un chemin dont les extrémités coïncident.
  - En parcourant un circuit élémentaire, on ne rencontre pas deux fois le même sommet.
  - Un circuit de longueur 1 est une boucle.

- Un circuit absorbant est un circuit dont la somme des poids des arcs est négative.

Chemin – Circuit
(Graphe Orienté)

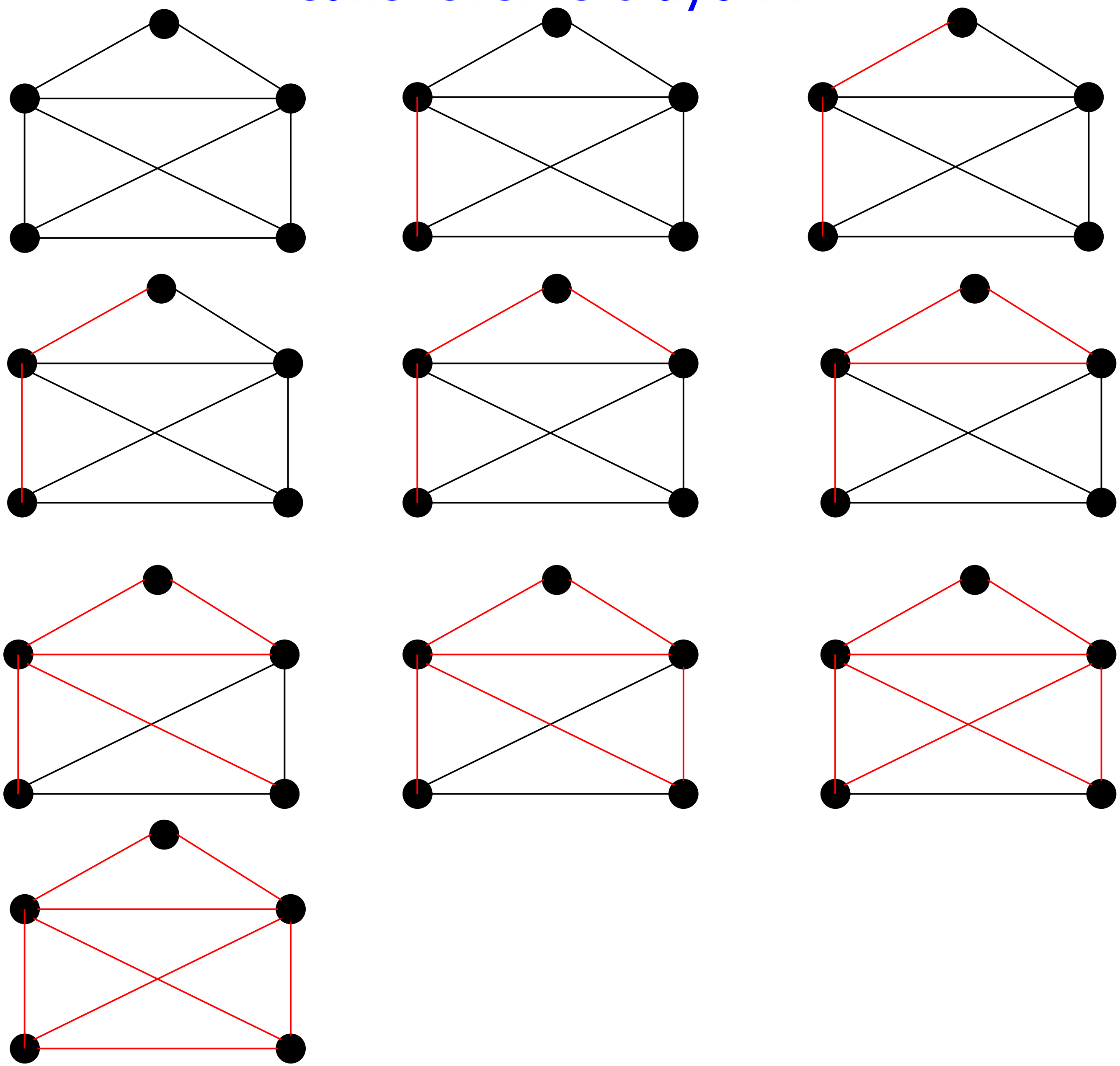


u_1, u_3, u_4, u_7 est un chemin de x_2 à x_3. u_1, u_3, u_6, u_5 est un circuit.

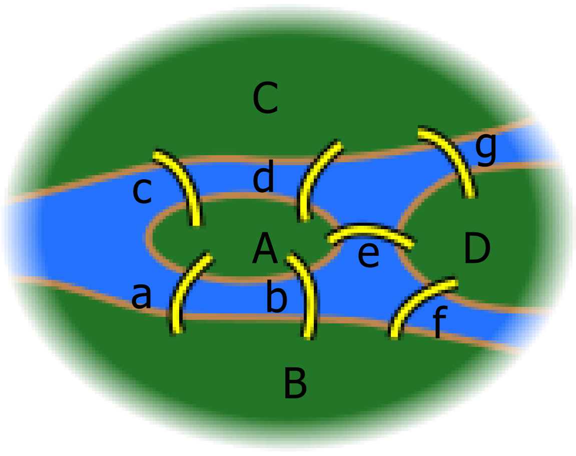
Parcours

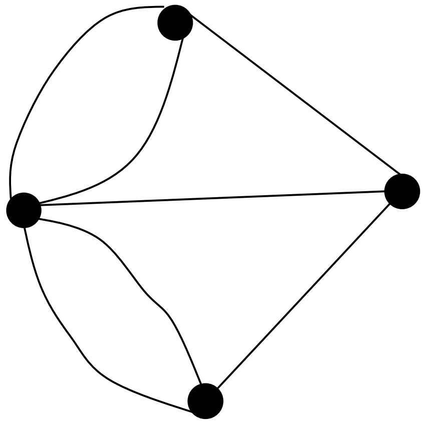
- Le terme de parcours regroupe les chemins, les chaînes, les cycles et les circuits.
- Un parcours est:
  - Élémentaire: si tous les sommets qui le composent sont tous distincts,
  - Simple: si tous les arcs qui le composent sont tous distincts,
  - Hamiltonien: passe une fois et une seule par chaque sommet,
  - Eulérien: passe une fois et une seule par chaque arc,
  - Préhamiltonien: passe au moins une fois par chaque sommet,
  - Préeulérien: passe au moins une fois par chaque arc.

Chemin eulérien? Est-il possible de tracer le graphe sans lever le crayon ?



Chemin eulérien? Est-il possible de tracer le graphe sans lever le crayon ?



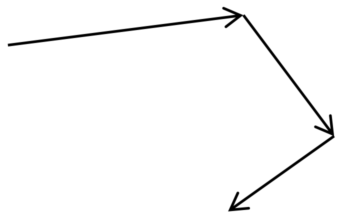


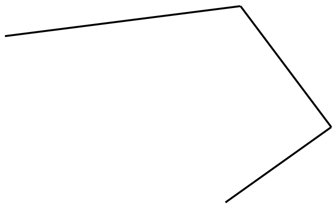
IMPOSSIBLE

Vocabulaire

Graphe non orienté	Graphe orienté
arête	arc
chaîne	chemin
cycle	circuit

Résumé





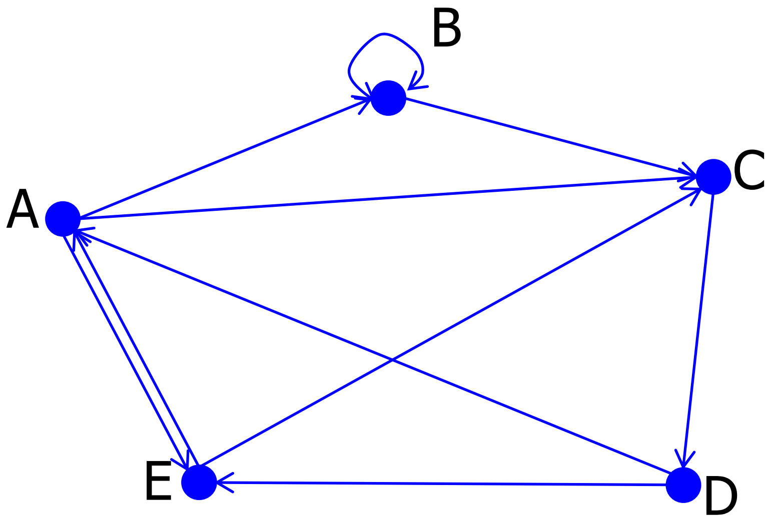
Chemin
= succession d’arcs

Chaîne
= succession d’arêtes

Circuit
= chemin qui se referme

Cycle
= chaîne qui se referme

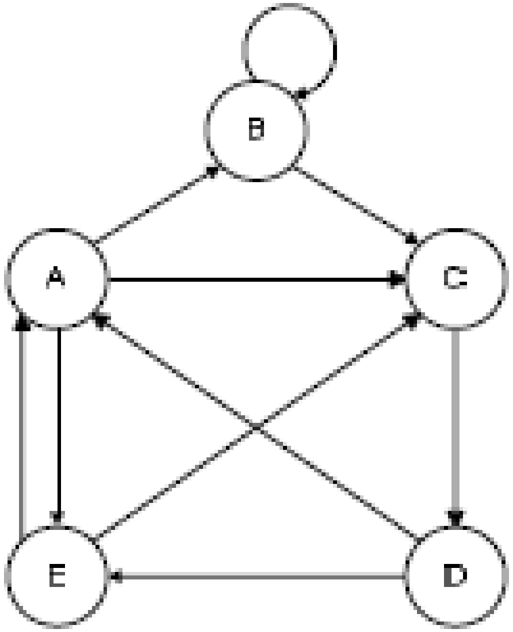
Circuit Hamiltonien
= chemin qui passe une fois et
une seule par tous les sommets et
qui comprend l’ensemble des sommets



- (D,A,E,A,E,A) est un chemin.
- (A,C,D,A) est un circuit.
- En B existe une boucle.
- (D,A,E,A,E,A) n'est pas un chemin simple.
- (D,A,E,A) est un chemin simple mais pas élémentaire.
- (D,A,E) est un chemin élémentaire.

- Élémentaire: si tous les sommets qui le composent sont tous distincts.
- Simple: si tous les arcs qui le composent sont tous distincts.

Recherche des chemins élémentaires



Chemins élémentaires de longueur 1

A'=

	A	B	C	D	E
A	0	AB	AC	0	AE
B	0	0	BC	0	0
C	0	0	0	CD	0
D	DA	0	0	0	DE
E	EA	0	EC	0	0

Chemins élémentaires de longueur 2

On calcule A’ * A’

La multiplication revient à concaténer 2 chemins :
AB x BC → ABC
arc x arc → chemin
(ABC) x (CDE) → ABCDE

L’addition est équivalente à la réunion ensembliste :
(A,B,C) + (A,E,C) → ils figurent dans la même case de la matrice aux arcs A_2.
Les chemins (A,B,C) et (A,E,C) sont 2 chemins de longueur 2 reliant le sommet A au sommet C.

(A,E) x (E,A) → (A,E,A) chemins de longueur 2 passant 2 fois par le sommet A.
Ce chemin est éliminé de A’2 puisqu’il n’est pas élémentaire.

$A'^2=$

	A	B	C	D	E
A	0	0	ABC AEC	ACD	0
B	0	0	0	BCD	0
C	CDA	0	0	0	CDE
D	DEA	DAB	DAC DEC	0	DAE
E	0	EAB	EAC	ECD	0

Chemins élémentaires de longueur 4

$A'^4=$

	A	B	C	D	E
A	0	0	0	0	ABCDE
B	BCDEA	0	0	0	BCDAE
C	0	CDEAB	0	0	0
D	0	0	DEABC	0	0
E	0	ECDAB	0	EABCD	0

Graphes hamiltoniens

- Si dans un graphe on trouve un cycle qui passe par chaque sommet une fois et une seule, on dit que le cycle est hamiltonien et le graphe est appelé hamiltonien.
- Il n'y a pas de règle simple qui permette de savoir (par exemple, en regardant le degré des sommets) s'il existe un cycle hamiltonien. Toutefois, si chaque sommet est relié à au moins la moitié des autres sommets, on est certain qu'il y a un cycle hamiltonien.

- Les graphes complets sont des graphes hamiltoniens.

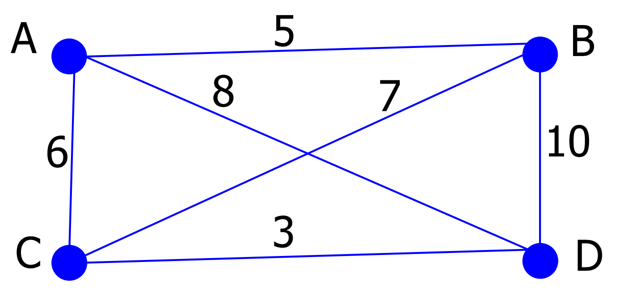
- La recherche d'un cycle hamiltonien est le problème classique du voyageur de commerce.
  - *Un voyageur de commerce habitant Bordeaux doit effectuer une tournée passant par Lyon, Nantes et Paris. Dans quel ordre devrait-il effectuer ses déplacements de façon à minimiser le trajet parcouru?*

Graphes hamiltoniens

- Algorithme du plus proche voisin.

```
begin
    Choisir un sommet x ∈ X
    route = x
    y = 0
    x’ = x
    Marquer x’
        while subsistent des sommets non marqués do
            begin
                Choisir un sommet non marqué z le plus proche de x’
                route = route z
                y = y + poids de l’arête x’z
                x’ = z
                Marquer x’
            end
        route = route x
        y = y + poids de l’arête x’x
end
```

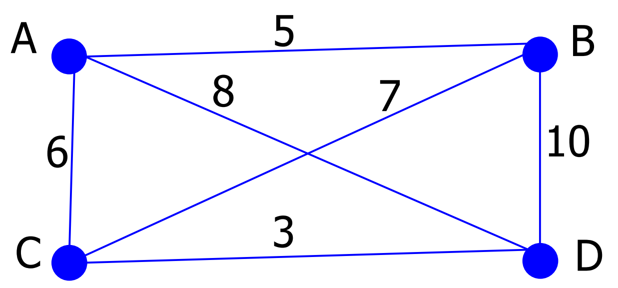
Graphes hamiltoniens



On part de D:

	Sommet x	Route	y	x'
Initialement	-	D	0	D
	C	DC	3	C
	A	DCA	9	A
	B	DCAB	14	B
	D	DCABD	24	D

Graphes hamiltoniens

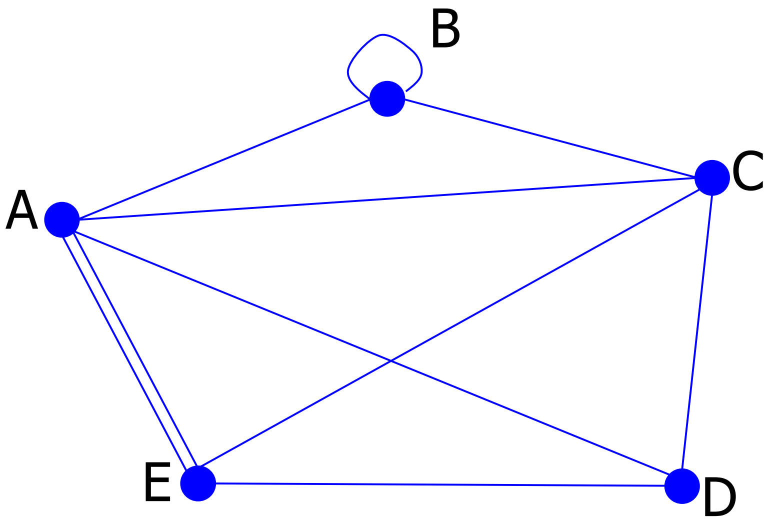


On part de A:

	Sommet x	Route	y	x'
Initialement	-	A	0	A
	B	AB	5	B
	C	ABC	12	C
	D	ABCD	15	D
	A	ABCDA	23	A

La connexité
(Graphe non orienté)

- Un graphe G=(X,U) non orienté est connexe s'il existe au moins une chaîne entre toutes paires de sommets G.

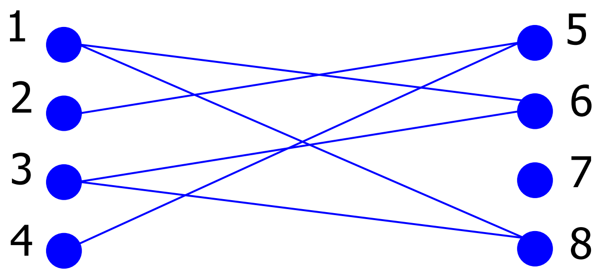


- Si G n'est pas connexe, alors il existe peut-être des sous-graphes de G connexes appelés composantes connexes de G.

Algorithme de connexité

- Soit un graphe G=(X,U).

begin
X'=X //ensemble des sommets
c = 0
while X' ≠ ∅
begin
Choisir un sommet y ∈X'
Trouver tous les sommets joignant y par n'importe quel chemin.
Supprimer ces sommets et le sommet y de X'.
Supprimer les arêtes correspondantes de U
c = c + 1 // c = nombre de sous-graphes connexes
end
end

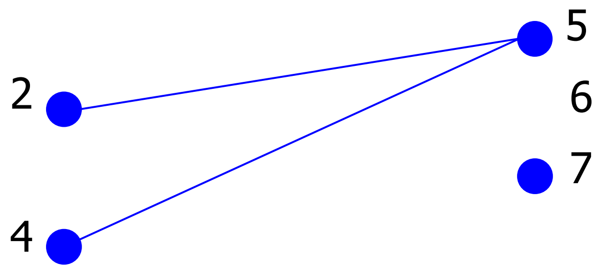


	On supprime	X'	c
Valeurs initiales		{1,2,3,4,5,6,7,8}	0
On choisit y=1	1,6,8,3	{2,4,5,7}	1

Algorithme de connexité

- Soit un graphe G=(X,U).

```
begin
    X'=X     //ensemble des sommets
    c = 0
    while X' ≠ ∅
        begin
            Choisir un sommet y ∈X'
            Trouver tous les sommets joignant y par n'importe quel chemin.
            Supprimer ces sommets et le sommet y de X'.
            Supprimer les arêtes correspondantes de U
            c = c + 1                          // c = nombre de sous-graphes connexes
        end
end
```

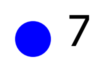


	On supprime	X'	c
Valeurs initiales		{1,2,3,4,5,6,7,8}	0
On choisit y=1	1,6,8,3	{2,4,5,7}	1
On choisit y=2	2,5,4	{7}	2

Algorithme de connexité

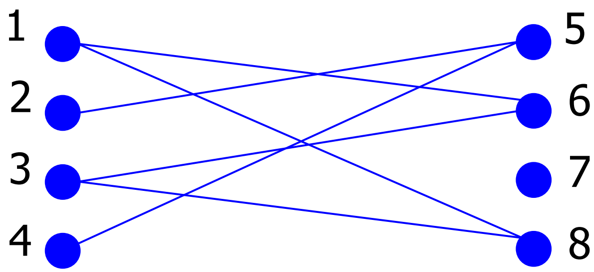
- Soit un graphe G=(X,U).

```
begin
    X'=X      //ensemble des sommets
    c = 0
    while X' ≠ ∅
        begin
            Choisir un sommet y ∈X'
            Trouver tous les sommets joignant y par n'importe quel chemin.
            Supprimer ces sommets et le sommet y de X'.
            Supprimer les arêtes correspondantes de U
            c = c + 1                              // c = nombre de sous-graphes connexes
        end
end
```



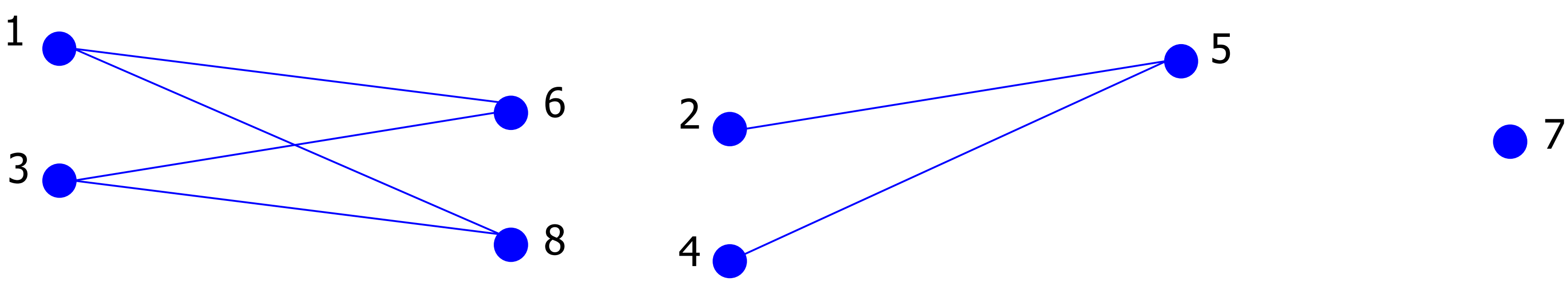
	On supprime	X'	c
Valeurs initiales		{1,2,3,4,5,6,7,8}	0
On choisit y=1	1,6,8,3	{2,4,5,7}	1
On choisit y=2	2,5,4	{7}	2
On choisit y=7	7	∅	3

Algorithme de connexité



	On supprime	X’	c
Valeurs initiales		{1,2,3,4,5,6,7,8}	0
On choisit y=1	1,6,8,3	{2,4,5,7}	1
On choisit y=2	2,5,4	{7}	2
On choisit y=7	7	$\varnothing$	3

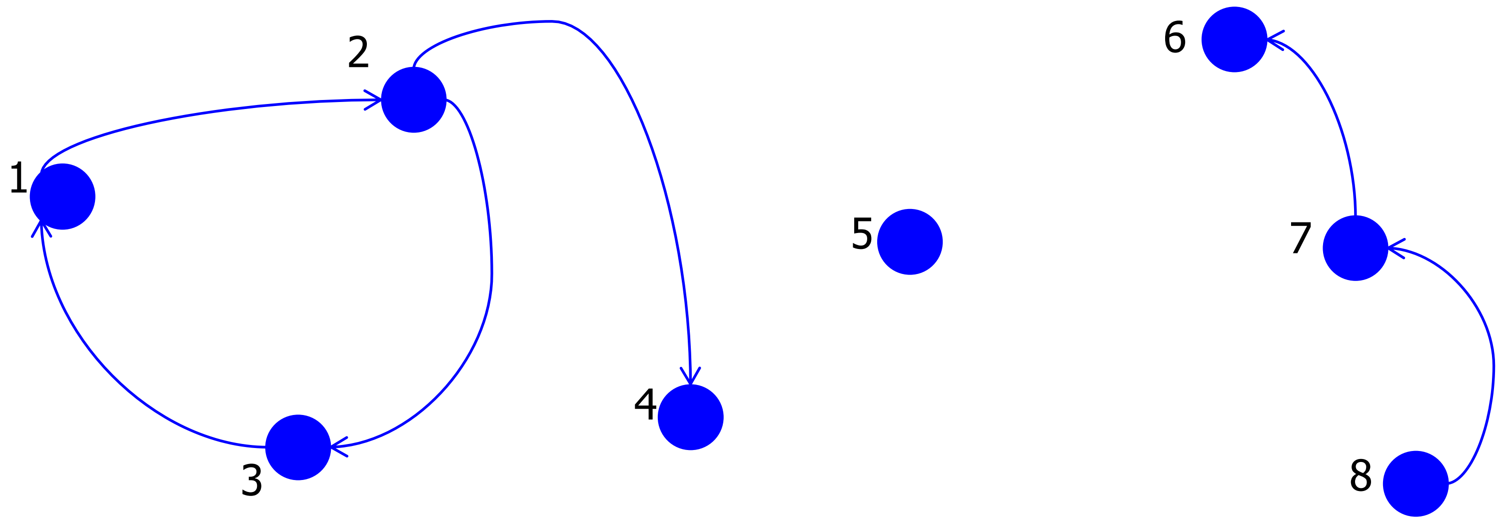
- 3 sous-graphes connexes:



- Si G n’est pas connexe, alors il existe peut-être des sous-graphes de G connexes appelés composantes connexes de G.

La composante fortement connexe (Graphe orienté)

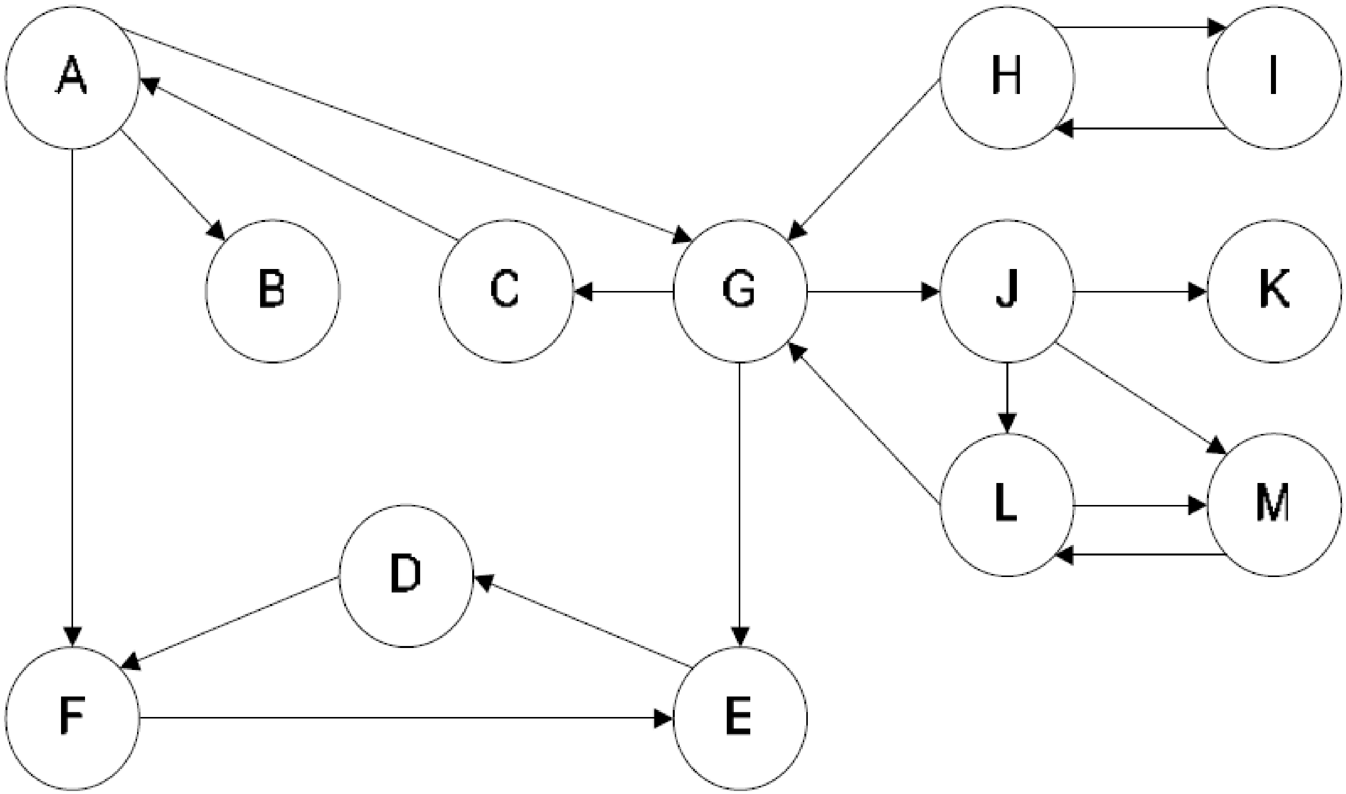
- Un graphe G=(X,U) est fortement connexe si pour chaque paire de sommets i,j de X, il existe un chemin de i à j et il existe un chemin de j à i.
- Si G n'est pas fortement connexe, alors il existe peut-être des sous-graphes de G fortement connexes appelés composantes fortement connexes de G.



$C'_1=\{1,2,3\}=C'_2=C'_3$
$C'_4 = \{4\}$ il existe un chemin de longueur nulle de 4 à 4
$C'_5 = \{5\}$
$C'_6 = \{6\}$
$C'_7 = \{7\}$
$C'_8 = \{8\}$

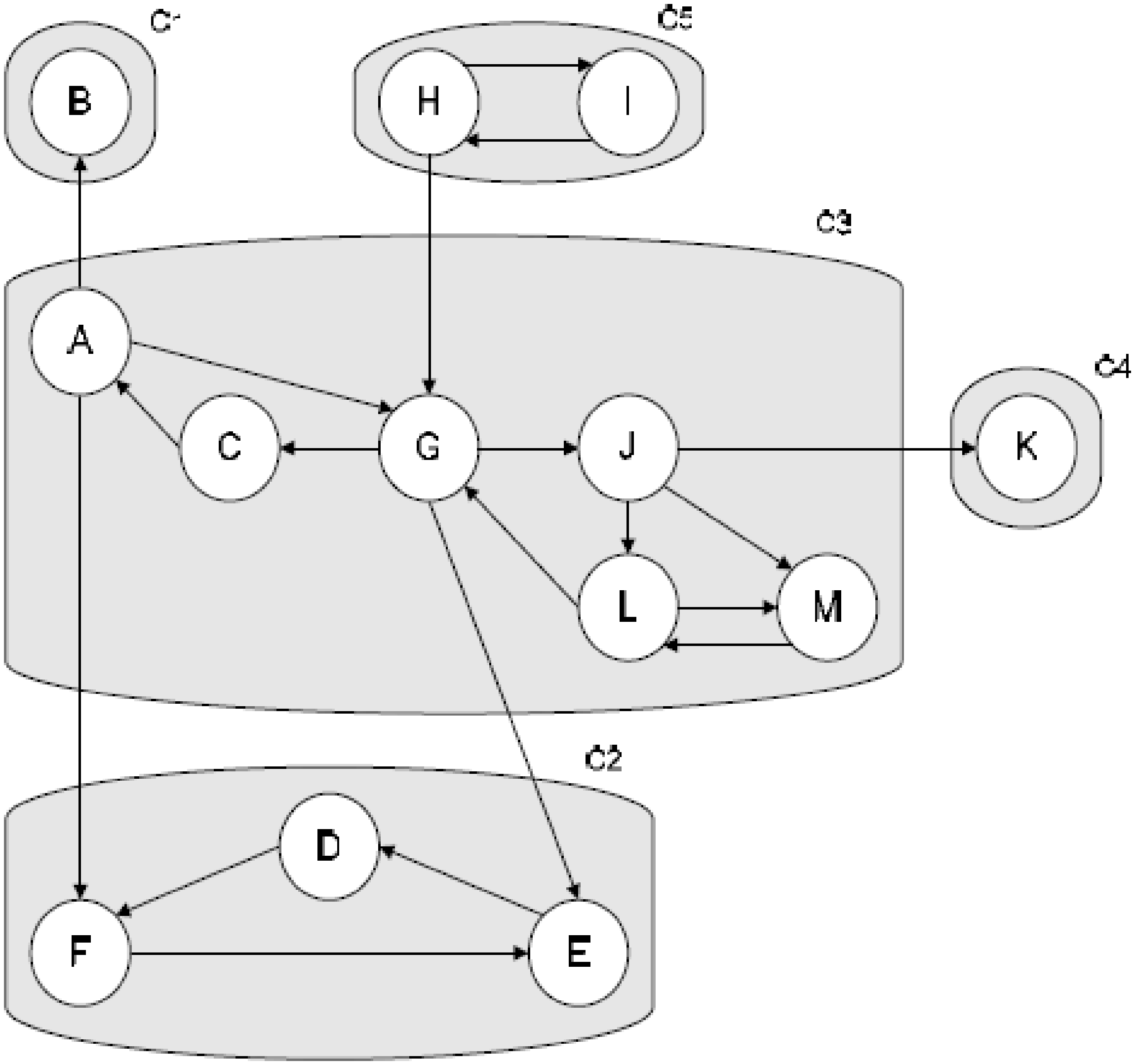
La composante fortement connexe (Graphe orienté)

- Calculer les composantes fortement connexes de ce graphe.



La composante fortement connexe (Graphe orienté)

- Solution

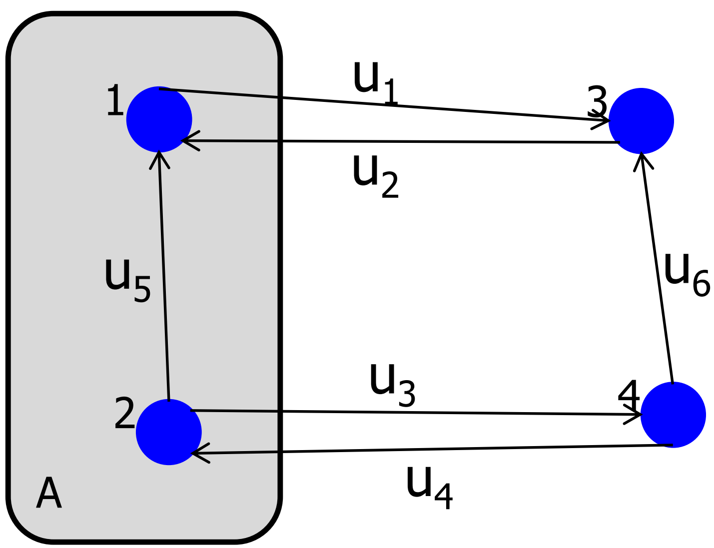


Cocycle d'un graphe

- Soit un graphe G=(X,U) et A un sous ensemble de X.
- Le cocycle du graphe G associé à l'ensemble A est noté : ω(A).
  - ω+ (A) est l'ensemble des arcs ayant leur extrémité initiale dans A et leur extrémité terminale dans non(A).
  - ω− (A) est l'ensemble des arcs ayant leur extrémité terminale dans A et leur extrémité initiale dans non(A)

- Cocycle =

  ω(A) = ω− (A) + ω+ (A)



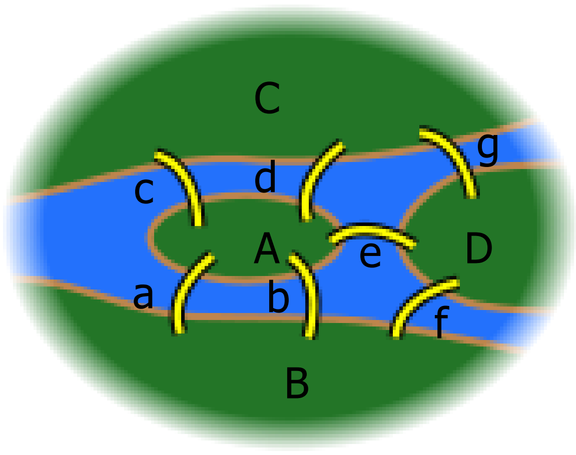
ω+ (A) = {u1,u3}

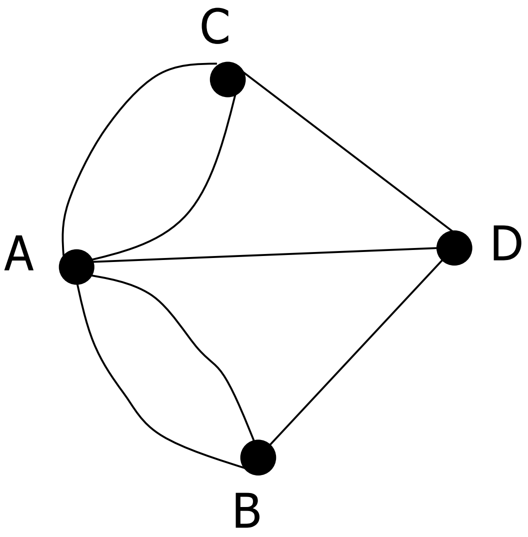
ω - (A) = {u2,u4}

ω (A) = {u1,u2,u3,u4}

Théorème d'Euler

- Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne (passe une fois et une seule par chaque arête) si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.





Degré(A)=5, degré(B)=3, degré(C)=3, degré(D)=3. 4 sommets de degré impair.

Représentation d’un graphe

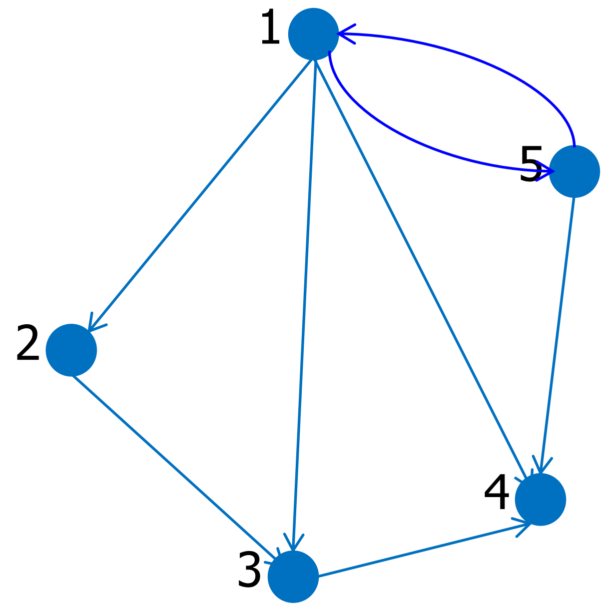
Représentation d'un graphe par des listes

- Listes des successeurs

1	**2 3 4 5**
2	3
3	4
4	
5	1 4

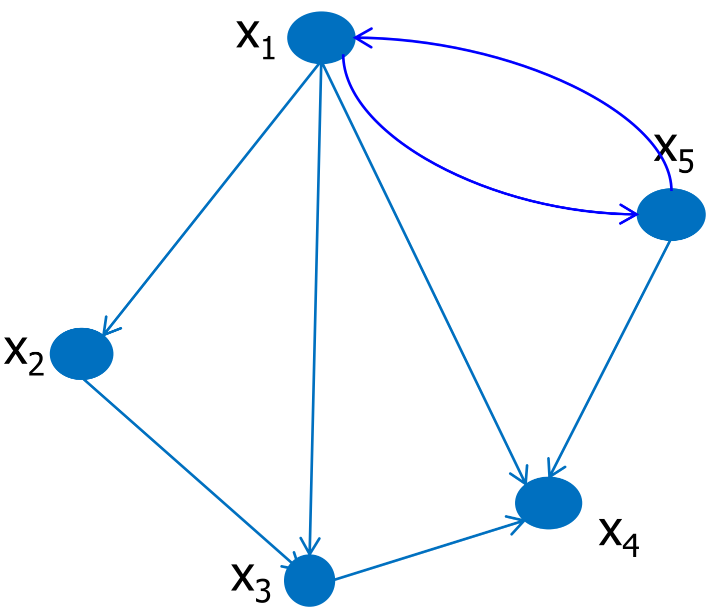
- Listes des prédécesseurs

1	**5**
2	1
3	1 2
4	1 3 5
5	1



Représentation d'un graphe par une matrice d'adjacence

- Matrice d'adjacence
  - Soit un graphe G=(X,U) comportant n sommets. La matrice d'adjacence fait correspondre les sommets origines des arcs aux sommets destination.
  - L'existence d'un arc se traduit par un 1 dans la matrice, l'absence d'un arc se traduit par un 0.



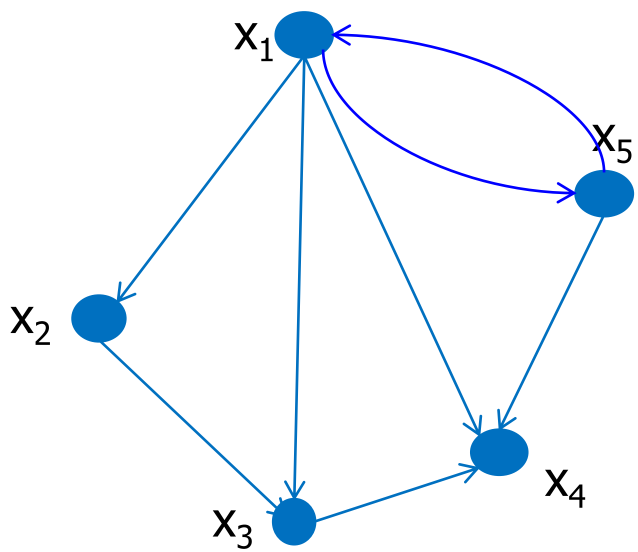
destination

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	0	0
x_3	0	0	0	1	0
x_4	0	0	0	0	0
x_5	1	0	0	1	0

origine

Représentation d'un graphe par une matrice d'adjacence

- Matrice d'adjacence
  - La somme des éléments de la ième ligne de la matrice est égale au degré sortant du sommet x_i de G.
  - La somme des éléments de la jème colonne de la matrice est égale au degré entrant du sommet x_j de G.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le sommet 5 a 2 arcs sortants.

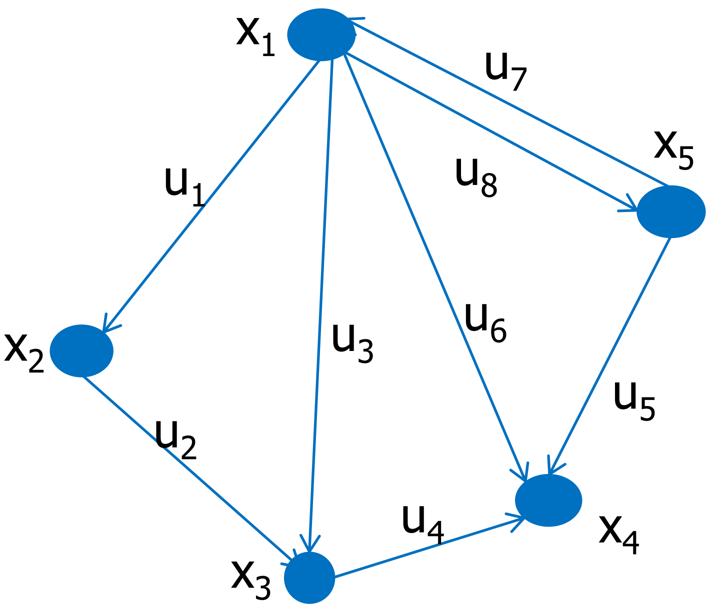
Le sommet 3 a 2 arcs entrants.

  - La matrice d'adjacence est symétrique si et seulement si le graphe G est symétrique.

Représentation d'un graphe par une matrice d'incidence

- Matrice d'incidence sommets – arcs.
  - Lignes = sommets
  - Colonnes = arcs

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si le sommet } x_i \text{ est l'origine de } u_j \\ -1 \text{ si le sommet } x_i \text{ est l'extrémité de } u_j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



arcs

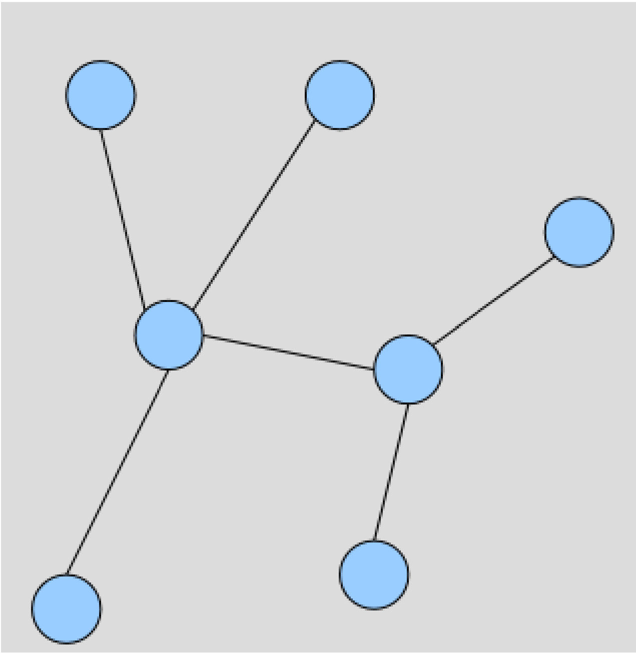
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	1	0	1	0	0	1	-1	1
x_2	-1	1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	-1	-1	1	0	0	0	0
x_4	0	0	0	-1	-1	-1	0	0
x_5	0	0	0	0	1	0	1	-1

sommets

- Remarque: La somme de chaque colonne est égale à 0 car chaque arc a une origine et une destination.

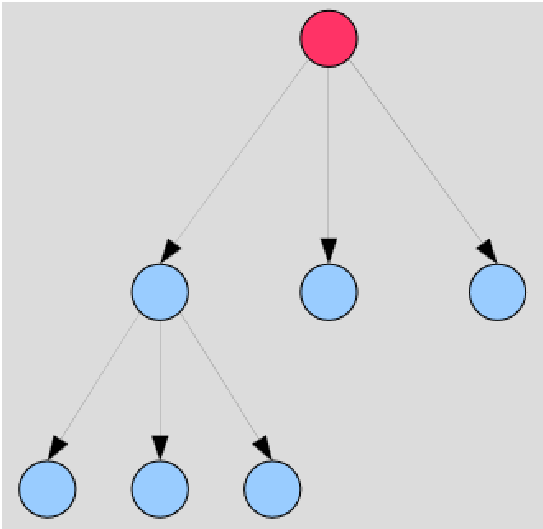
Arbres et arborescences

- Arbre
  - Un arbre est un graphe non orienté, connexe et sans cycle (il n’existe qu’un chemin unique entre 2 sommets).
  - Un arbre ne comporte pas de boucles.



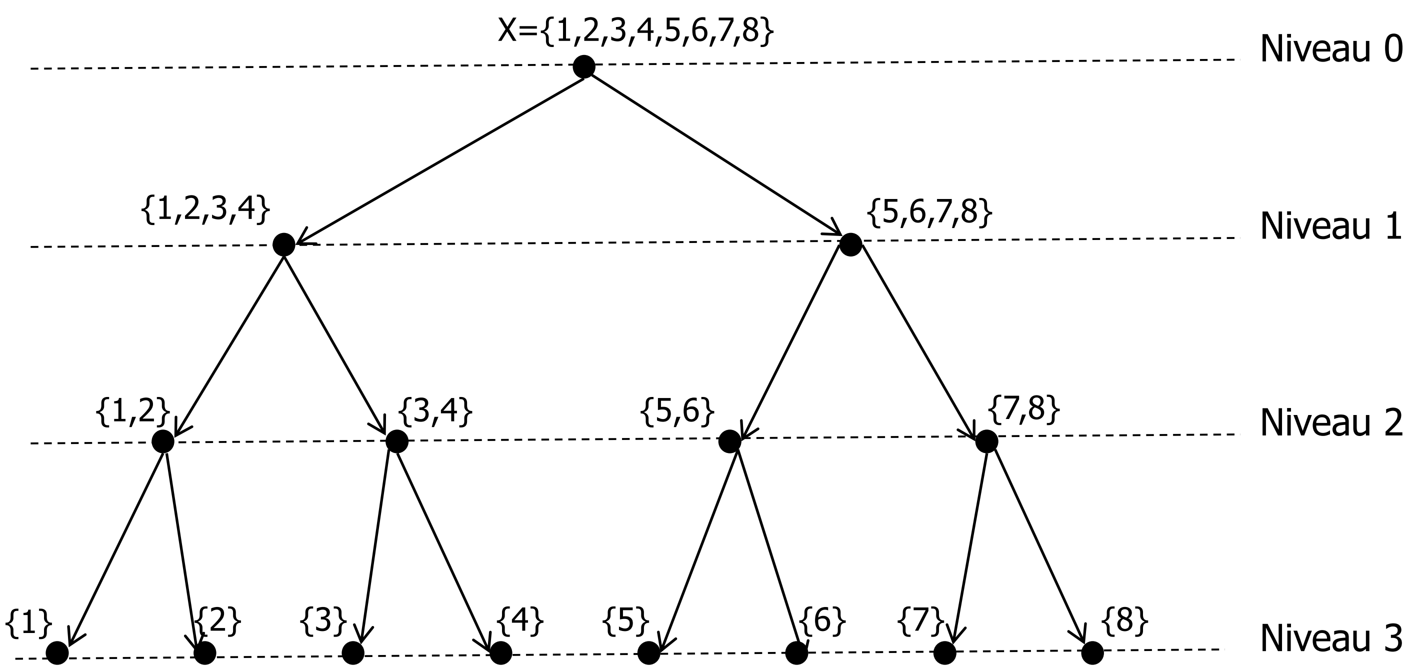
Arbres et arborescences

- Arborescence
  - Une arborescence est un graphe orienté pour lequel chaque sommet a un seul antécédent sauf un sommet qui n’a pas d’antécédent et qui s’appelle la racine.
  - Racine = dans un graphe orienté on appelle racine un sommet r tel qu’il existe un chemin de r à tout autre sommet du graphe.
  - Feuille = sommet d’une arborescence qui n’a aucun successeur.
  - Branche = chemin de la racine à une feuille.
  - Profondeur = longueur de la plus longue branche.



Exemple: Arborescence de décision

- Soit 8 pièces de monnaie, dont une est fausse (elle est plus légère que les autres). On possède une balance qui permet de savoir quel plateau est le plus lourd et ne possède que 2 états ($<, \geq$). On cherche à trouver la fausse pièce en minimisant le nombre de pesées. Pour modéliser la résolution de ce problème, on va utiliser une arborescence.



On pose 4 pièces sur chaque plateau. Un des deux plateaux sera forcément moins lourd car il contient une fausse pièce. On prend le lot de 4 pièces les moins lourdes et on le divise par 2 et ainsi de suite. Le nombre de pesées pour trouver la fausse pièce est égale au nombre de niveau moins 1 soit ici 3.