Laboratorium z Metod Numerycznych
Sprawozdanie

Autor Łukasz Gut - WFiIS, Informatyka Stosowana, Rok 2.
17 maja 2019

Laboratorium nr 9 - Minimalizacja funkcji metodą złotego podziału

Cel laboratorium

Celem dziesiątego laboratorium było zapoznanie się z zagadnieniem minimalizacji funkcji przy użyciu metody złotego podziału, zaprogramowanie tej metody i znalezienie minimum dwóch danych funkcji.

Wstęp teoretyczny

Optymalizacja matematyczna - w matematyce oraz informatyce zagadnienie polegające na znalezieniu elementu w danym zbiorze, który najlepiej odpowiada określonym wcześniej kryteriom. Najprostszymi zagadnieniami optymalizacyjnymi są zagadnienia minimalizacji i maksymalizacji funkcji rzeczywistych.

Minimalizacja funkcji - metoda optymalizacyjna polegająca na znalezieniu minimum danej funkcji. Istnieje wiele algorytmów pozwalających na znalezienie optymalnego rozwiązania w przeszukiwanym zbiorze.

Metoda złotego podziału - numeryczna metoda optymalizacji jednowymiarowej funkcji celu. Aby móc zastosować algorytm funkcja celu f:

$$R \supset D \ni x \rightarrow f(x) \in R$$

Musi spełniać następujące założenia:

- Być określona i ciągła na przedziale $[a,\ b] \subset D$.
- Posiadać co najwyżej jedno minimum lokalne w przedziale $[a,\ b]$.

Ideą algorytmu jest wyszukiwanie minimum lokalnego poprzez zawężanie początkowego przedziału do kolejnych podprzedziałów. W tym celu należy obliczyć wartości w dwóch punktach x_{left} oraz x_{right}, takie że $a < x_{left} < x_{right} < b$, a następnie zbadać ich wielkości:

- Jeżeli $f(x_{left}) > f(x_{right})$, to szukane minimum znajduje się w przedziale $[x_{left},\ b]$.
- Jeżeli $f(x_{left}) < f(x_{right})$, to szukane minimum znajduje się w przedziale $[a,\ x_{right}]$.

W ten sposób możemy zawężać przedział aż do momentu, gdy spełniony zostanie warunek:

$$|a - b| < \varepsilon,$$

dla ustalonego z góry ε.

Kolejne wartości x_{left}, x_{right} wybieramy przy pomocy współczynnika k.

$$x_{left} = a - k_1 * (b - a)$$
$$x_{right} = a - k_2 * (b - a),$$

gdzie $k_1 = r^2$, $k_2 = r,\ dla\ r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Problem

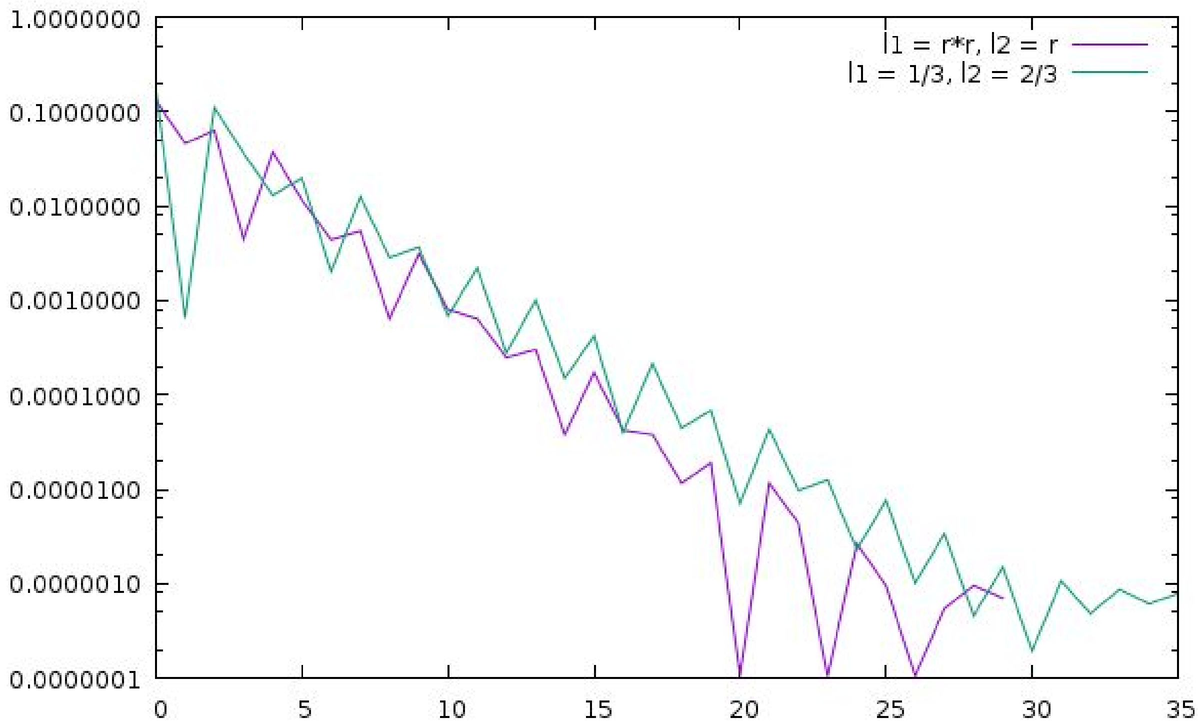
Problemem, z którym przyszło nam się zmierzyć na dziesiątym laboratorium był problem minimalizacji dwóch danych funkcji najpierw przy pomocy złotego podziału, a następnie korzystając z tej samej metody, ale wybierając $k_1 = \frac{1}{3},\ k_2 = \frac{2}{3}$ i porównanie wyników.

Funkcje te miały następujące wzory:

$$f(x) = ln(x^5 + 3x^2 + x + 9),\ x \in [-0.5,\ 1]$$
$$g(x) = x^6,\ x \in [-4,\ 1]$$

Wyniki

Poniżej przedstawiam wyniki działania programu dla funkcji $f(x)$:



Rys 1. Moduł różnicy dokładnego i przybliżonego rozwiązania funkcji f w funkcji numeru iteracji

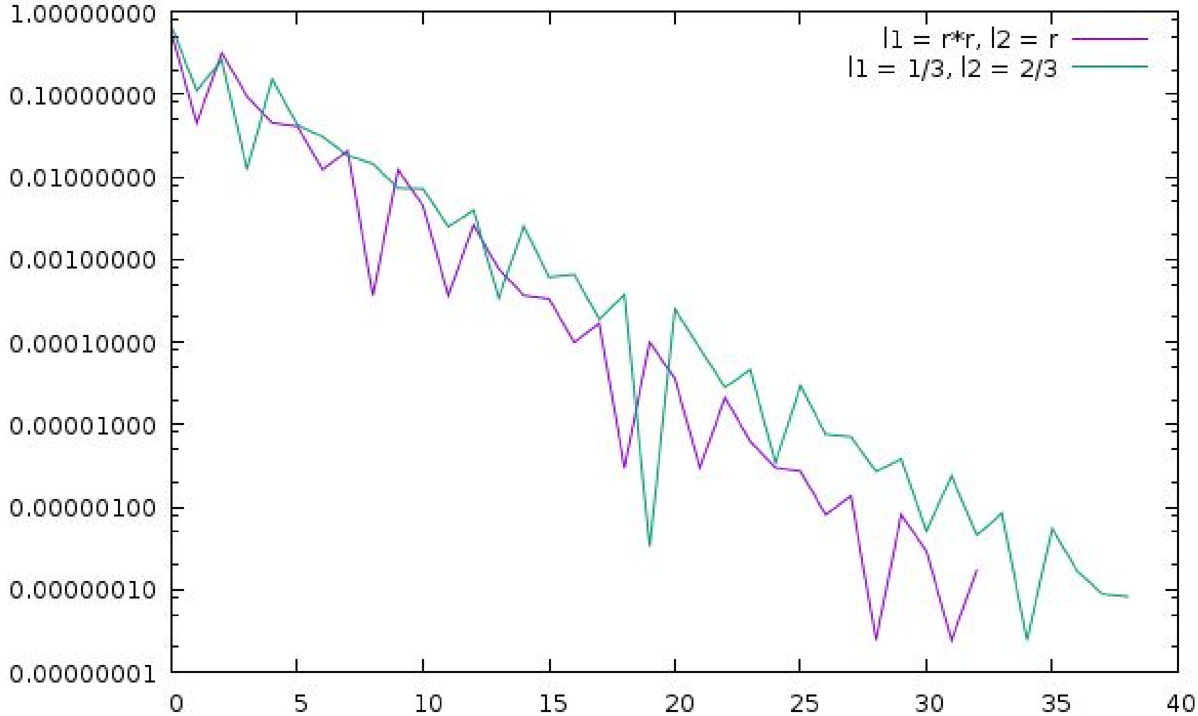
Na powyższym wykresie widzimy, że korzystając ze złotego podziału algorytm znajdowania minimum wykazuje lepszą zbieżność. Warto również zauważyć, że ostateczne rozwiązanie nie jest najlepszym, które pojawiło się w trakcie działania algorytmu. Na pewno warto się nad tym zastanowić i być może uzupełnić algorytm o prosty bufor, którego zadaniem byłoby trzymanie globalnie najlepszego rozwiązania.

Tabela 1

Podział	Ilość iteracji	$x_{przybliżone}$	$\lvert x_{dokładne} - x_{przybliżone} \rvert$
$k_1 = r^2$, $k_2 = r,\ dla\ r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	30	-0.16732	7.0138e-07
$k_1 = \frac{1}{3},\ k_2 = \frac{2}{3}$	36	-0.16732	7.83952e-07

Powyższa tabela potwierdza powyższe wnioski. Jasno widzimy, że nie korzystając ze złotego podziału algorytm wykazuje gorszą zbieżność. Co ciekawe, rozwiązanie otrzymane bez użycia złotego podziału jest nieco dokładniejsze.

Poniżej przedstawiam wyniki działania programu dla funkcji $g(x)$:



Rys 2. Moduł różnicy dokładnego i przybliżonego rozwiązania funkcji g w funkcji numeru iteracji

Na powyższym wykresie ponownie widzimy podobne zachowanie algorytmu, jak poprzednio - wybierając złoty podział otrzymujemy lepszą zbieżność.

Tabela 2

Podział	Ilość iteracji	$x_{przybliżone}$	$\lvert x_{dokładne} - x_{przybliżone}\rvert$
$k_1 = r^2$, $k_2 = r,\ dla\ r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	33	1.71814e-07	1.71814e-07
$k_1 = \frac{1}{3},\ k_2 = \frac{2}{3}$	39	8.16183e-08	8.16183e-08

W tym przypadku tabela również pokazuje, że pomimo lepszej zbieżności, ostateczny wynik jest nieco lepszy. Dla funkcji g mówimy już tutaj o jednym rzędzie wielkości.

Wnioski

Metoda znajdowania minimum przy użyciu złotego podziału jest jedną z najprostszych w implementacji numerycznych metod optymalizacyjnych. Działa bardzo szybko i dokładnie. Warto tutaj jednak zauważyć jej niesamowite ograniczenia - sprawdza się jedynie w przypadku funkcji jednowymiarowych, która dodatkowo musi być ciągła na szukanym przedziale i mieć co najwyżej jedno minimum w tym przedziale. Jej plusem w porównaniu do metod gradientowych jest fakt, że funkcja celu nie musi być różniczkowalna, jednak zdecydowanie brakuje tutaj możliwości badania złożonych problemów wielowymiarowych, przy których idealnie sprawdzają się między innymi algorytmy genetyczne czy optymalizacji rojem cząstek.