Laboratorium z Metod Numerycznych
Sprawozdanie

Autor Łukasz Gut - WFiIS, Informatyka Stosowana, Rok 2.
13 maja 2019

Laboratorium nr 9 - Aproksymacja funkcji okresowych

Cel laboratorium
Celem dziewiątego laboratorium było zapoznanie się z aproksymacją średniokwadratową w bazie funkcji trygonometrycznych oraz napisanie programu aproksymującego zadane funkcje.

Wstęp teoretyczny
Aproksymacja - proces określania rozwiązań przybliżonych na podstawie rozwiązań znanych, które są bliskie rozwiązaniom dokładnym w ściśle sprecyzowanym sensie.

Aproksymacja średniokwadratowa - jedna z rodzajów aproksymacji, której celem jest minimalizacja błędu na przedziale $[a,\ b]$. Istotność błędu w poszczególnych punktach mierzy się za pomocą funkcji wagowej $w(x)$. Jeśli funkcję $f(x)$ przybliżamy funkcją $F(x)$, to szukamy minimum całki:

$$||F(x)\ -\ f(x)|| = \int_a^b w(x)[F(x) - f(x)]^2 dx\,,$$

lub sumy:

$$||F(x)\ -\ f(x)|| = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i) - f(x_i)]^2\,,$$

gdy funkcja jest określona na zbiorze n+1 punktów.

Aproksymacja średniokwadratowa w bazie funkcji trygonometrycznych - jedna z rodzajów aproksymacji średniokwadratowej, w której funkcje okresowe aproksymujemy przy użyciu funkcji trygonometrycznych, czyli w bazie:

$$1,\ sin(x),\ cos(x),\ sin(2x),\ cos(2x),\ ...,\ sin(mx),\ cos(mx)$$

Zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa, dla każdej funkcji $y = f(x)$ określonej i ciągłej na R oraz okresowej o okresie 2π istnieje taki wielomian trygonometryczny

$$Q_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m}[a_j cos(jx) + b_j sin(jx)],$$

Który przybliża jednostajnie funkcję $y = f(x)$.

Jeśli funkcja $f(x)$ jest określona na dyskretnym zbiorze równoodległych punktów, a liczba punktów jest parzysta i wynosi 2n, to współczynniki można wyliczyć z następujących wzorów:

$$a_0 = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{2N-1} f(x_i)$$

$$a_{j>0} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} f(x_i) cos(\frac{\pi ij}{N})$$

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} f(x_i) sin(\frac{\pi ij}{N}).$$

Problem

Problemem do rozwiązania podczas dziewiątego laboratorium był problem aproksymacji trzech funkcji:

$$f_1(x) = 2sin(x) + sin(2x) + 2sin(3x) + \alpha,$$

$$f_2(x) = 2sin(x) + sin(2x) + 2cos(x) + cos(2x),$$

$$f_3(x) = 2sin(1.1x) + sin(2.1x) + 2sin(3.1x),$$

gdzie $\alpha = \frac{rand()}{RAND\_MAX+1.0} - 0.5$.

Przy czym α, czyli szum, miał pojawić się jedynie w ostatnim podpunkcie. W innych przypadkach $\alpha = 0$.

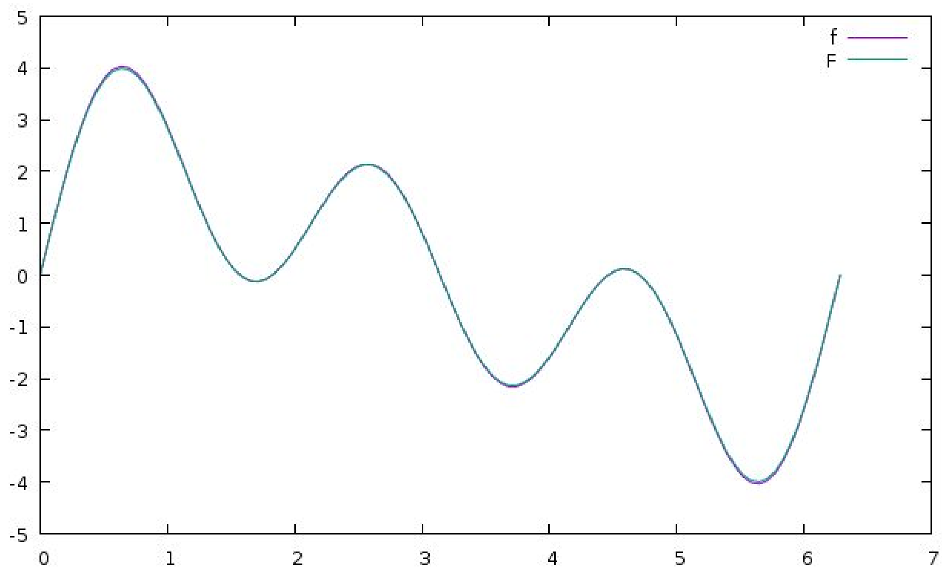
Do rozwiązania problemu mieliśmy posłużyć się metodą aproksymacji średniokwadratowej w bazie funkcji trygonometrycznych, czyli aproksymować funkcje przy pomocy funkcji

$$F(x) = \sum_{k=0}^{M_s} a_k sin(kx) + \sum_{j=0}^{c} b_j cos(jx).$$

Wyniki

Poniżej przedstawiam wyniki działania programu:

Rys 1. Aproksymacja funkcji f_1 *dla* $(M_s, M_c) = \{(5,5)\}$.

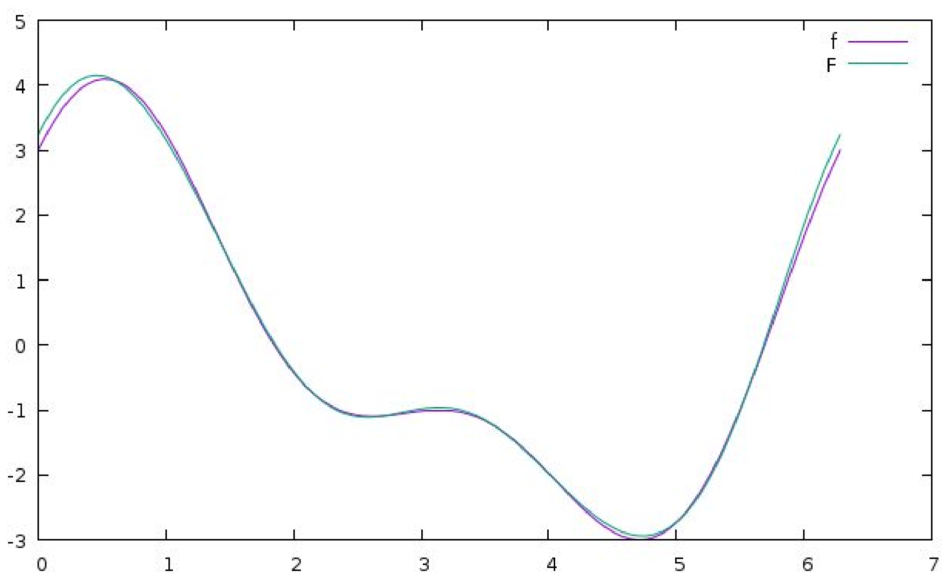


Widzimy, że aproksymacja funkcji w postaci:

$$f_1(x) = 2sin(x) + sin(2x) + 2sin(3x) + \alpha,$$

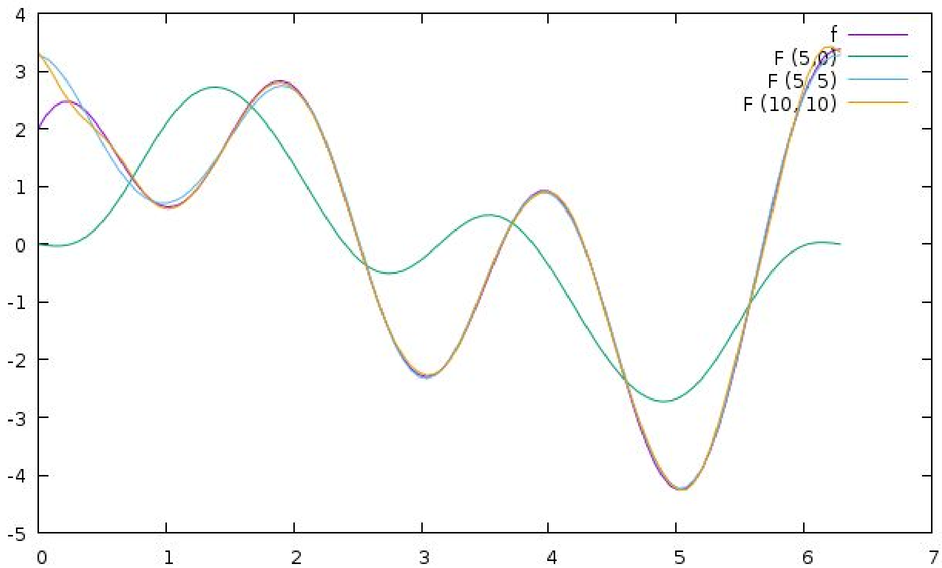
jest bardzo dokładna. Dzieje się tak, ponieważ w przypadku funkcji f_1 współczynniki przy argumentach są kolejnymi liczbami naturalnymi.

Rys 2. Aproksymacja funkcji f_2 *dla* $(M_s, M_c) = \{(5,5)\}$.



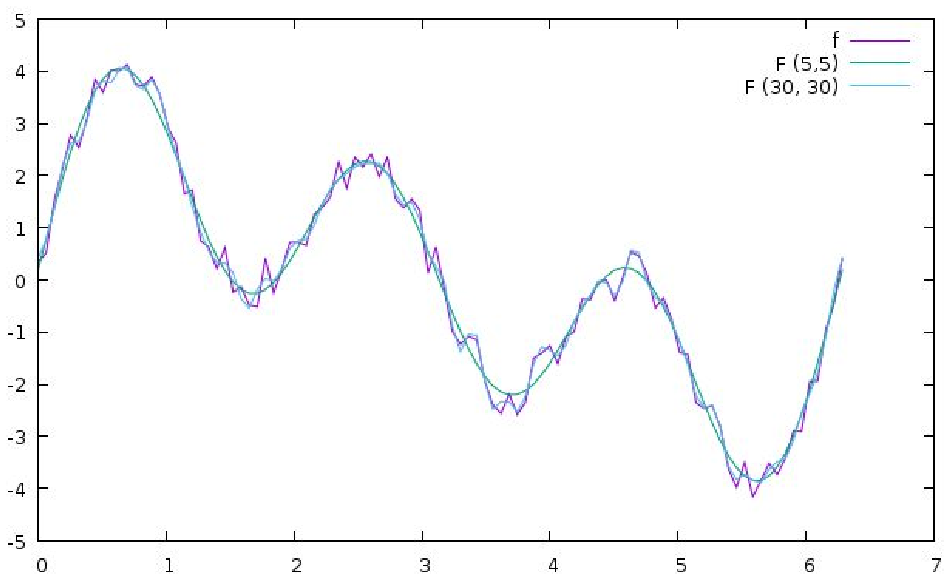
Podobne zachowanie funkcji aproksymującej widzimy w przypadku aproksymacji funkcji f_2. Tutaj również aproksymacja jest bardzo dobra.

Rys 3. Aproksymacja funkcji f_3 *dla* $(M_s, M_c) = \{(5,0),\ (5,5),\ (10,10)\}$.



Aproksymacja funkcji f_3 nie jest już tak dokładna, ponieważ współczynniki nie są liczbami naturalnymi. W takim przypadku dużo ciężej jest dokładnie dopasować funkcję dla niskich wartości M_s i M_c. Warto tutaj również zwrócić uwagę jak rozbieżne są funkcje f i $F(5,0)$. Pokazuje to, że aproksymacja z wykorzystaniem tylko jednej z funkcji trygonometrycznych jest w tym przypadku niemożliwa.

Rys 3. Aproksymacja funkcji f_1 *dla* $(M_s, M_c) = \{(5,5),\ (30,30)\}$.



Po dodaniu szumów funkcja aproksymująca w dalszym ciągu przypomina kształtem funkcję f. Widać jednak, że dopiero po zwiększeniu ilości funkcji bazowych funkcja aproksymująca pokrywa się z zadaną funkcją f.

Wnioski

Aproksymacją średniokwadratowa w bazie funkcji trygonometrycznych jest bardzo dobrym i ssposobem przybliżania funkcji okresowych.