Laboratorium z Metod Numerycznych
Sprawozdanie

Autor Łukasz Gut - WFiIS, Informatyka Stosowana, Rok 2.
7 marca 2019

Laboratorium nr 2 - Rozkład LU macierzy trójdiagonalnej - rozwiązanie równania Poissona w jednym wymiarze

Cel laboratorium

Celem drugiego laboratorium było zaimplementowanie algorytmu, który pozwalał na numeryczne rozwiązanie równania Poissona w jednym wymiarze przy pomocy rozkładu LU macierzy trójdiagonalnej.

Wstęp teoretyczny

Równanie Poissona - W ogólności równaniem Poissona określamy niejednorodne równanie różniczkowe cząstkowe liniowe drugiego rzędu typu eliptycznego (są również inne typy, takie jak hiperboliczne, czy paraboliczne - określa się je przy pomocy znaku wyróżnika). Równanie to można zapisać w postaci:

$$\Delta u = f,$$

gdzie: $\Delta -$ *operator różniczkowy drugiego rzędu tzw. laplasjan*, $u, f -$ *funkcje*.

Równanie Poissona jest o tyle szczególne, że opisuje wiele procesów zachodzących w przyrodzie takich jak: potencjał pola grawitacyjnego w obecności źródeł, potencjał pola elektrostatycznego w obecności gatunków i wiele, wiele więcej.

Macierz trójdiagonalna - Jeden z rodzajów kwadratowych macierzy rzadkich, a dokładniej szczególny przypadek macierzy wstęgowej. Charakteryzuje ją fakt, że wszystkie elementy są zerowe poza główną diagonalą oraz "wstęgą" wokół niej. Dla macierzy wstęgowej określa się tzw. szerokość pasma. W przypadku naszego problemu szerokość pasma wynosi 3.

$$M'_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Dyskretyzacja równań - Nazwa procesu transformacji modeli oraz równań ciągłych na ich dyskretne odpowiedniki. W metodach numerycznych jest to zazwyczaj pierwszy krok, który należy podjąć przed przystąpieniem do implementacji algorytmu rozwiązującego zadany problem. Istnieje kilka różnych metod dyskretyzacji równań. W naszym problemie posłużymy się dyskretyzacją równań różniczkowych metodą Eulera.

Rozkład LU macierzy trójdiagonalnej - Bardzo często macierze układów równań z ilorazami różnicowymi przyjmują postać macierzy trójdiagonalnej. Można wtedy wykorzystać rozkład LU, aby w łatwy sposób otrzymać rozwiązanie takiego układu równań.

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & d_n \end{bmatrix} = L{\cdot}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & l_{n-1} & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & c_3 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_n \end{bmatrix}$$

Aby rozłożyć macierz trójdiagonalną na dwie macierze L i U należy zastosować następujący wzór:

$$u_1 = d_1$$
$$l_i = \frac{a_i}{u_i - 1}$$
$$u_i = d_i - l_i c_{i-1} \text{ ,}$$

dla i = 2, 3, … , n.

Następnie aby otrzymać ostateczne rozwiązanie x wystarczy rozwiązać układ równań:

$$Ly = b$$
$$Ux = y$$

Problem

Problemem z którym przyszło nam się zmierzyć na drugich laboratoriach był problem rozwiązania następującego równania Poissona:

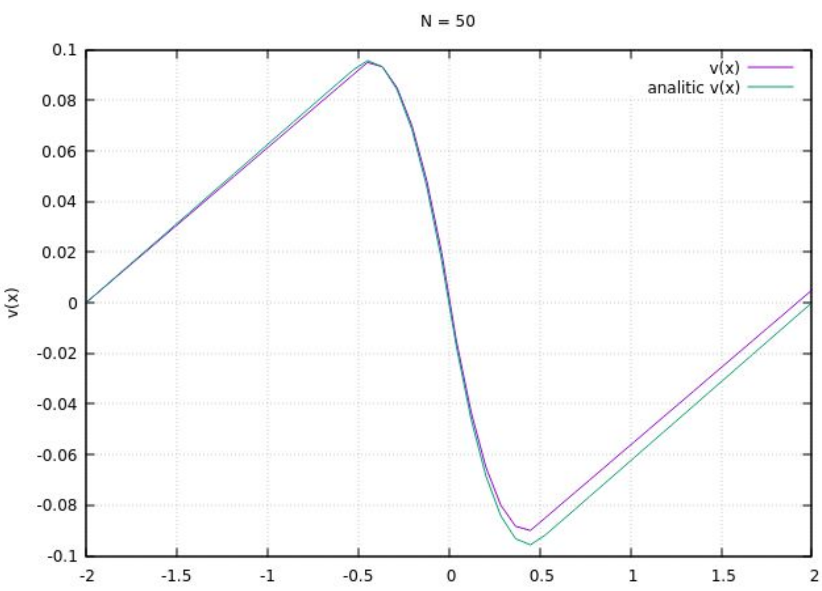
$$\Delta V(x) = -\rho(x),$$

gdzie:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-b, -a) \\ +1, & x \in [-a, 0) \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x \in (0, a] \\ 0, & x \in (a, b] \end{cases}$$

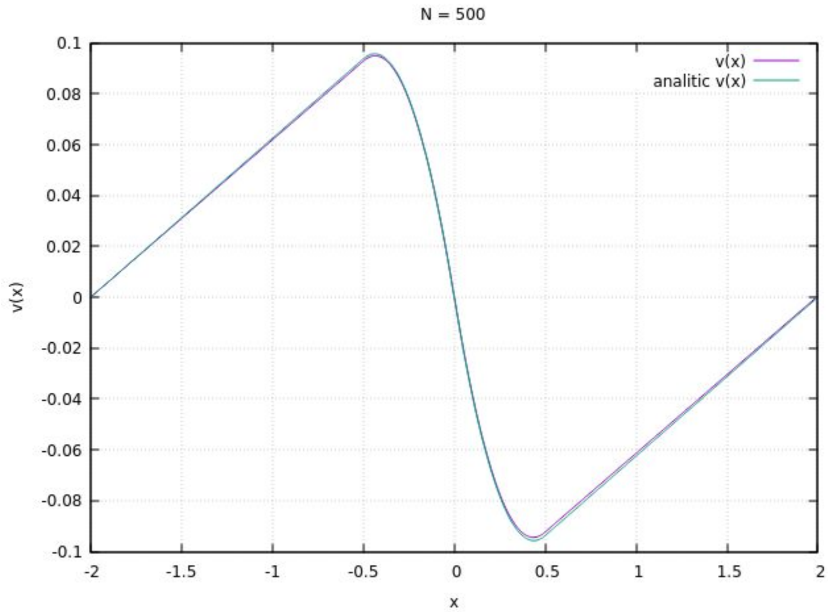
Wyniki

Poniżej prezentuję wyniki działania programu.



Rys. 1 - Rozwiązanie numeryczne oraz analityczne dla N = 50

Jak widać na powyższym wykresie, przy siatce o wielkości 50 rozwiązanie numeryczne generalnie podąża za trendem wyznaczonym przez rozwiązanie analityczne, jednak widoczne są różnice - szczególnie na przedziale $x \in [0, 2]$.



Rys. 2 - Rozwiązanie numeryczne oraz analityczne dla N = 500

Po zwiększeniu gęstości siatki nasze przybliżenie wygląda zdecydowanie lepiej, jednak w dalszym ciągu widać niewielkie różnice.

Wnioski

Zastosowanie metody bezpośredniej do rozwiązania równania Poissona w jednym wymiarze okazuje się bardzo sensowne. Przy gęstości siatki na poziomie N = 500 czas wykonania się programu (łącznie z zapisem do plików) to około 0.01 sekundy. Moim zdaniem jest to wynik bardzo dobry. Dodatkowo uzyskana przez nas dokładność jest moim zdaniem zadowalająca.