

Laboratorium z Metod Numerycznych

Sprawozdanie

Autor Łukasz Gut - WFiIS, Informatyka Stosowana, Rok 2.
4 czerwca 2019

Laboratorium nr 11 - Odszumianie sygnału przy użyciu FFT

Cel laboratorium

Celem jedenastego laboratorium było napisanie programu zdolnego do odszumiania sygnału periodycznego przy użyciu szybkiej transformacji Fouriera.

Wstęp teoretyczny

Szybka transformacja Fouriera (FFT) - algorytm wyznaczania dyskretnej transformaty Fouriera oraz transformaty do niej odwrotnej. Niech x_0, \dots, x_{N-1} będą liczbami zespolonymi, wtedy dyskretna transformata Fouriera określona jest wzorem:

$$X_K = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}nk}, \text{ dla } k = 0, \dots, N-1$$

Obliczanie powyższej sumy wymaga wykonania $O(N^2)$ operacji. Istnieją jednak pewne algorytmy, które pozwalają wyznaczyć transformatę dużo szybciej. Najpopularniejszym z nich jest algorytm J. W. Cooleya i J. Tukeya o nazwie radix 2. Pozwala on wyrazić dyskretną transformację Fouriera rekurencyjnie w czasie $O(N \log N)$.

Radix 2 - najprostsza i najpowszechniej stosowana forma algorytmu Cooleya-Tukeya. Polega na podzieleniu dyskretnej transformacji Fouriera na dwie przeplatane wzajemnie DFT, każda o rozmiarach $\frac{N}{2}$. Dzieje się to na każdym etapie rekurencyjnym. Dzięki temu można dojść do złożoności obliczeniowej rzędu $O(N \log N)$. Pomysł ten, choć genialny, zakłada, że N jest potęgą dwójki. Bardzo często w momencie, kiedy mamy niewystarczającą/zbyt dużą liczbę węzłów, ale zbliżoną do potęgi dwójki, to węzły się dodaje/obcina, ponieważ zazwyczaj nie wpływa to znacząco na efekt, który chcemy uzyskać.

Odszumianie sygnału - proces, w którym zaszumiony w jakiś sposób sygnał “wygładzamy”. Istnieje wiele metod odszumiania. Na jedenastym laboratorium wykorzystaliśmy do tego celu operację splotu.

Splot - działanie określone dla dwóch funkcji (w naszym przypadku funkcją są sygnały), dające w wyniku inną funkcję. Splot definiujemy następująco:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

Jeśli funkcję f potraktujemy jako sygnał, zaś funkcję g jako funkcję wagową, to splot obu tych funkcji możemy potraktować jako “uśrednienie” funkcji f pewną ustaloną funkcją wagową g . Taki zabieg pozwala oraz poniżej wypisana ciekawa zależność pozwalają nam wygładzić zaszumiony sygnał w bardzo łatwy sposób. Zależnością tą jest fakt, iż transformacja Fouriera ze splotu funkcji daje w wyniku iloczyn transformat tych funkcji.

$$FFT\{(f * g)(t)\} = FFT\{f\} * FFT\{g\} = F * G$$

$$(f * g)(t) = FFT^{-1}\{F * G\}$$

Problem

Problemem, z którym przyszło nam się zmierzyć na jedenastym laboratorium był problem odsumiania sygnału zadanego funkcją:

$$f(t) = \sin(1 * wt) + \sin(2 * wt) + \sin(3 * wt) + \Delta,$$

gdzie : $w = \frac{2\pi}{T}$ – pulsacja, T – okres, Δ – liczba pseudolosowa z zakresu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

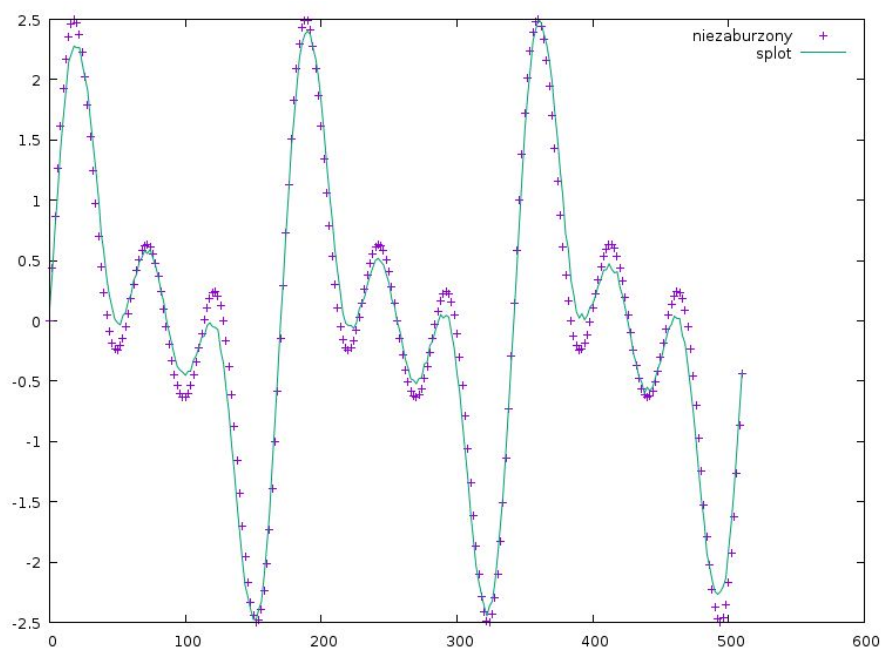
Jako funkcję wagową przyjęliśmy funkcję gaussowską:

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

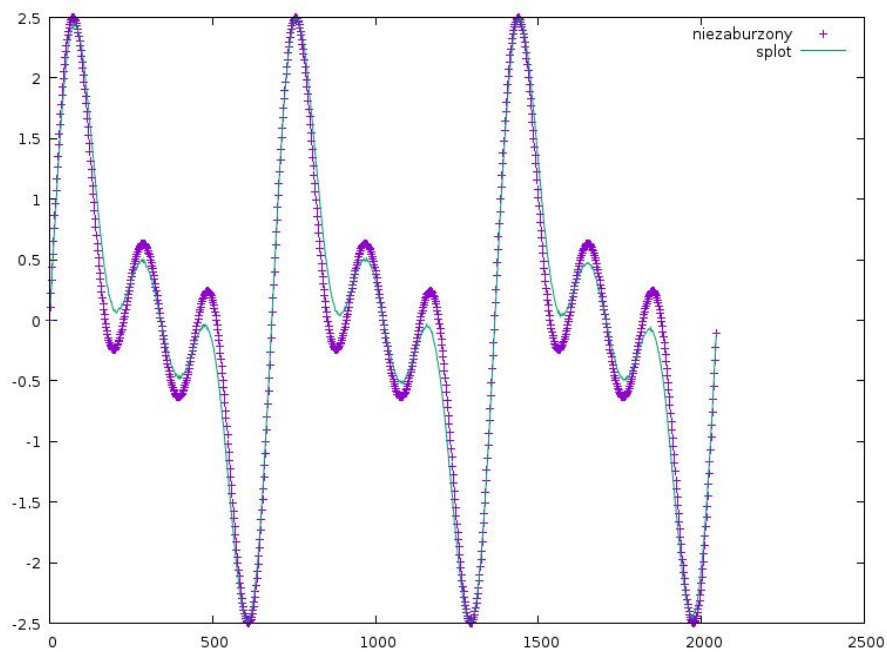
Wyniki

Poniżej przedstawiam wyniki działania programu.

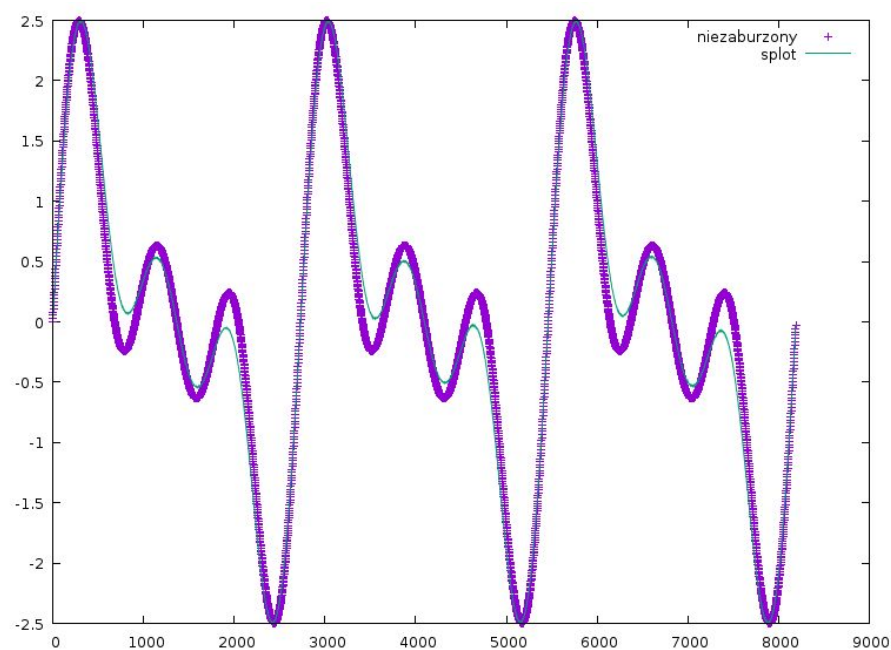
Wykres 1. Niezaburzona funkcja, liczba węzłów $N=2^8$



Wykres 2. Niezaburzona funkcja, liczba węzłów $N=2^{10}$

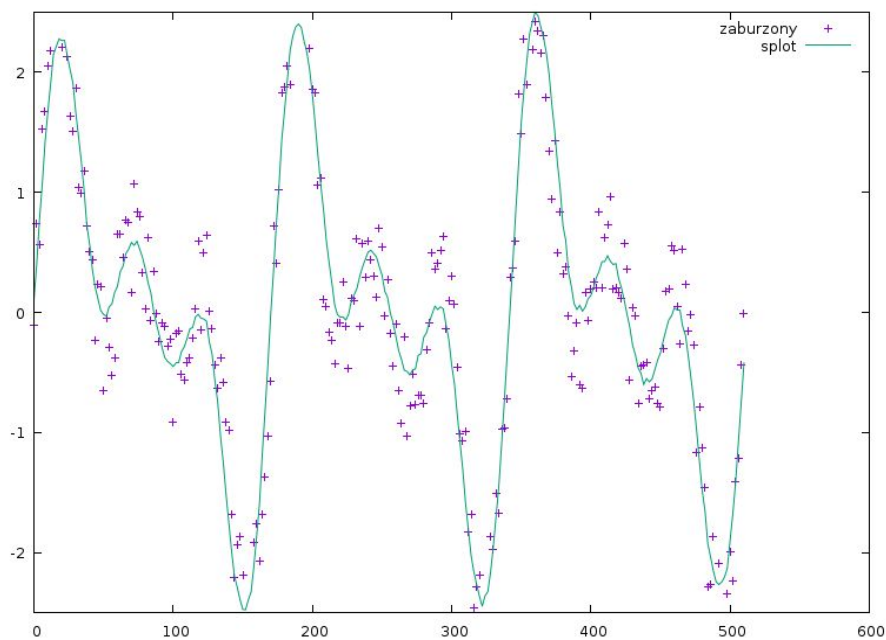


Wykres 3. Niezaburzona funkcja, liczba węzłów $N=2^{12}$

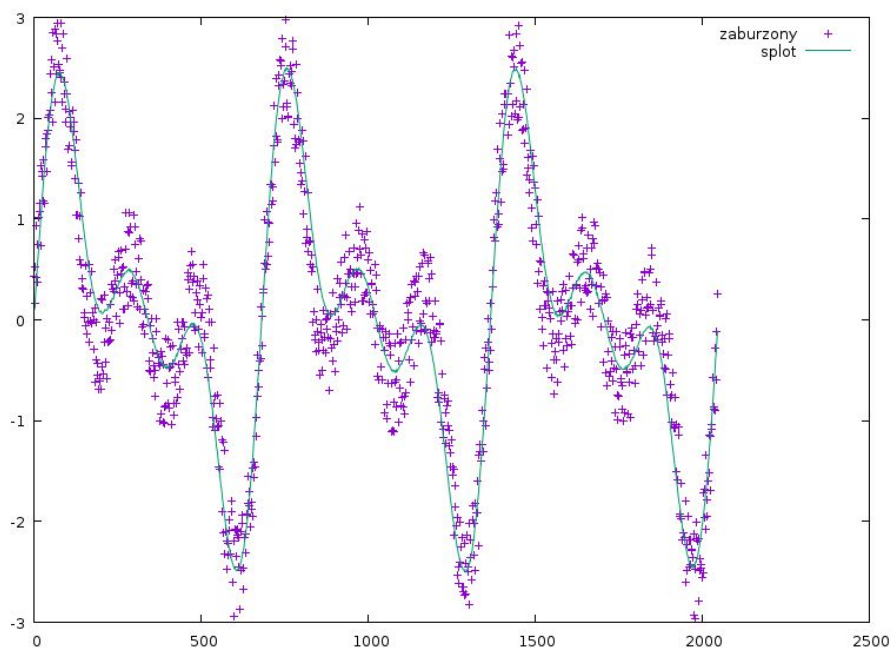


Na powyższych wykresach widzimy, że odsumowanie funkcji, która nie jest zaszumiona w rezultacie daje nieco inną funkcję. Różnice widoczne są głównie w okolicy ekstremów, których harmoniczne małą mniejszy wkład w ogół funkcji.

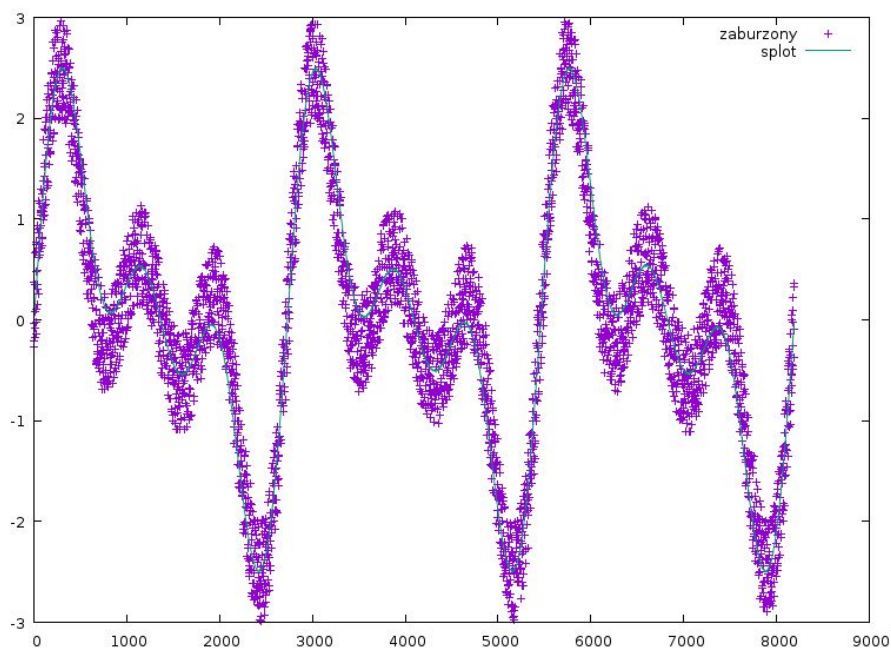
Wykres 4. Zaburzona funkcja, liczba węzłów $N=2^8$



Wykres 5. Zaburzona funkcja, liczba węzłów $N=2^{10}$



Wykres 6. Zaburzona funkcja, liczba węzłów $N=2^{12}$



W przypadku funkcji zaszumionej, widzimy, że po zastosowaniu splotu sygnał został odszumiony. Jak się można było spodziewać, na odszumionym sygnale widać czasami pewne niedoskonałości w formie ostrych krawędzi, jednak w ogólności efekt jest zadowalający.

Wnioski

Wykorzystanie FFT w połączeniu ze splotem funkcji to bardzo prosta w implementacji i dobrze działająca metoda odszumiania sygnału.