UNCuyo - FI

MATEMÁTICA DISCRETA - 2025

Trabajo Práctico 4B

Contando Clases de Equivalencia

Ejercicio 1 Hay solo dos particiones posibles del conjunto $\{1, 2\}$. Estas son $\{\{1\}, \{2\}\}$ y $\{\{1, 2\}\}$. Encuentra todas las particiones posibles de $\{1, 2, 3\}$ y de $\{1, 2, 3, 4\}$.

Ejercicio 2 ¿Cuántos anagramas diferentes y cuántos no diferentes (incluyendo palabras sin sentido) se pueden formar con cada una de las siguientes palabras?

- ABUELITO
- ALGORITMO
- DISCRETAS
- MATEMÁTICAS (sin considerar el tilde)
- ANAGRAMA
- MISSISSIPPI
- TELESCOPIOS
- COMPUTADORA

Ejercicio 3 ¿Cuántos anagramas diferentes (incluyendo palabras sin sentido) se pueden formar con GALLETA si se requiere que la primera y la última letra sean ambas L?

Ejercicio 4 ¿Cuántos anagramas diferentes (incluyendo palabras sin sentido) se pueden formar con MURCIELAGOS si se requiere que las cinco vocales estén en orden alfabético (pero no necesariamente contiguas entre sí)?

Ejercicio 5 Doce personas se toman de las manos para un baile en círculo.

¿De cuántas formas pueden hacer esto?

Ejercicio 6 Continuación del problema anterior. Suponga que seis de estas personas son hombres y las otras seis son mujeres.

¿De cuántas maneras pueden unirse de las manos en un baile en círculo, asumiendo que se alternan en género alrededor del círculo?

Ejercicio 7 Se desea confeccionar un collar con 20 piedras preciosas diferentes.

¿De cuántas maneras diferentes puede hacer esto?

Ejercicio 8

22	4	5	20	23
16	3	8	7	14
21	1	25	9	15
6	12	11	2	24
19	10	17	13	18

20	4	5	22	23
7	3	8	16	14
9	1	25	21	15
2	12	11	6	24
13	10	17	19	18

Los enteros del 1 al 25 están dispuestos en una matriz de 5×5 (utilizamos cada número del 1 al 25 exactamente una vez). Lo único que importa es qué números están en cada columna y cómo están dispuestos en las columnas. No importa en qué orden aparezcan las columnas. (Ver la figura. Los dos arreglos mostrados deben considerarse iguales).

¿Cuántas de estas matrices diferentes se pueden formar?

Ejercicio 9 Veinte personas deben dividirse en dos equipos con diez personas en cada equipo. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Ejercicio 10 Un club de tenis tiene 40 miembros. Una tarde, se reúnen para jugar partidos individuales (competiciones uno a uno). Cada miembro del club juega un partido con otro miembro del club, por lo que se realizan veinte partidos. ¿De cuántas maneras se pueden organizar estos partidos?

La tarde siguiente, los miembros del club deciden jugar partidos de dobles (equipos de dos enfrentados entre sí). Los jugadores se forman en 20 equipos, y estos equipos juegan un partido cada uno contra otro equipo (para un total de diez partidos).

¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Ejercicio 11 Se deben dividir cien personas en diez grupos de discusión con diez personas en cada grupo.

¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Ejercicio 12 Una escuela de música tiene 40 estudiantes, con 10 estudiando violín, viola, violonchelo y contrabajo. El director desea dividir la clase en 10 cuartetos de cuerdas; los cuatro estudiantes de cada cuarteto deben estudiar los cuatro instrumentos diferentes.
¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Un cuarteto de cuerdas generalmente tiene dos violines, una viola y un violonchelo. Para este problema, consideramos cuartetos con uno de cada uno de los cuatro tipos de instrumentos de cuerda, pero puedes tratar de pensar en la situación en la que hay 20 violinistas, 10 violistas y 10 violonchelistas que deben ser divididos en cuartetos de cuerdas tradicionales.

Ejercicio 13 ($*$) ¿Cuántas particiones, con exactamente dos partes, se pueden hacer del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$? Responder la misma pregunta para el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

Ejercicio 14 ($*$) ¿Cuántas particiones del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ hay tales que

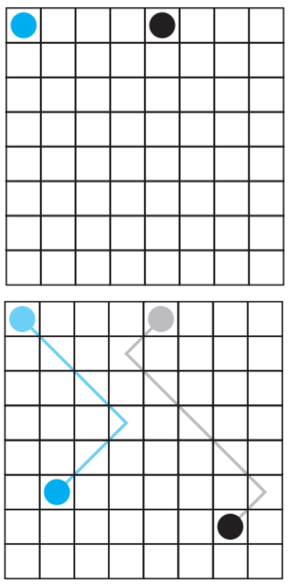
a) hay exactamente tres partes?

b) los elementos 1, 2 y 3 están en partes diferentes?

Ejercicio 15 ($*$) Sea X un conjunto con 100 elementos.

¿Es mayor el número de particiones del conjunto X en 10 partes de tamaño 5 o el número de particiones del conjunto X en 5 partes de tamaño 20?

Ejercicio 16



($*$) Dos monedas diferentes se colocan en los cuadros de un tablero de ajedrez estándar de 8×8; ambas pueden estar en la misma casilla.
Llamamos equivalentes a dos arreglos de estas monedas en el tablero de ajedrez si podemos mover las monedas diagonalmente para pasar de un arreglo a otro. Por ejemplo, las dos posiciones mostradas en los dos tableros de la figura son equivalentes.

¿Cuántas formas diferentes (no equivalentes) hay de colocar las monedas en el tablero de ajedrez?

Sugerencia Recuerde que los tableros de ajedrez tienen colores, en general blanco y negros.

Ejercicio 17 ($*$) Repita el problema anterior, esta vez asumiendo que las monedas son idénticas.

UNCuyo - FI

MATEMÁTICA DISCRETA - 2025

Trabajo Práctico 4B

Coeficiente Binomial

Ejercicio 1 Evaluar lo siguiente sin usar la fórmula del Teorema 3.18. Intente encontrar la respuesta sin escribir o hacer aritmética.

a. $\binom{9}{0}$ c. $\binom{9}{1}$ e. $\binom{9}{2} - \binom{9}{7}$ g. $\binom{9}{3}$

b. $\binom{9}{9}$ d. $\binom{9}{8}$ f. $\binom{9}{6}$ h. $\binom{9}{4}$

Ejercicio 2 Escriba todos los subconjuntos de 3 elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para verificar que $\binom{6}{3} = 20$.

Ejercicio 3 ¡Encuentra el coeficiente! Responda las siguientes preguntas con la ayuda del Teorema del Binomio:

- ¿Cuál es el coeficiente de x^3 en $(1 + x)^6$?
- ¿Cuál es el coeficiente de x^3 en $(2x - 3)^6$?
- ¿Cuál es el coeficiente de x^3 en $(x + 1)^{20} + (x - 1)^{20}$?
- ¿Cuál es el coeficiente de x^3y^3 en $(x + y)^6$?
- ¿Cuál es el coeficiente de x^3y^3 en $(x + y)^7$?

Ejercicio 4 Marcos Torcido tiene un cajón lleno de 30 medias diferentes (no hay dos iguales). Toma dos al azar.

¿De cuántas formas diferentes puede hacer esto?

Ahora se los pone en los pies (presumiblemente, uno en el pie izquierdo y otro en el derecho).

¿De cuántas maneras diferentes puede hacerlo?

Ejercicio 5 Veinte personas asisten a una fiesta. Si todos se dan la mano exactamente una vez, ¿cuántos apretones de manos ocurren?

Ejercicio 6

a) ¿Cuántas sucesiones binarias (0,1) de n dígitos contienen exactamente k unos?

b) ¿Cuántas sucesiones ternarias (0,1,2) de n dígitos contienen exactamente k unos?

Ejercicio 7 ¿Cuántas listas de longitud 12 podemos formar que contengan exactamente cuatro de cada una de las letras A, B y C?

Ejercicio 8 Para hacer este problema manejable, suponga que no hay empates.

Cincuenta corredores compiten en una carrera de 10 km. ¿Cuántos resultados diferentes son posibles?

La respuesta a esta pregunta depende de lo que estamos juzgando. Encuentra diferentes respuestas a esta pregunta dependiendo del contexto.

a) Queremos saber en qué lugar terminó cada corredor.

b) La carrera es una carrera clasificatoria, y solo queremos elegir a los diez corredores más rápidos.

c) La carrera es una final olímpica, y solo nos importa quién gana las medallas de oro, plata y bronce.

Ejercicio 9 Escribir todos los subconjuntos de tres y cuatro elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en dos columnas. Empareja cada subconjunto de tres elementos con su complemento. Tu tabla debe tener 35 filas, ¿por qué?

Ejercicio 10 Un tipo especial de cerradura de puerta tiene un panel con cinco botones etiquetados con los dígitos del 1 al 5. Esta cerradura se abre con una secuencia de tres acciones. Cada acción consiste en presionar uno de los botones o presionar simultáneamente un par de ellos.

Por ejemplo, 12-4-3 es una combinación posible. La combinación $12 - 4 - 3$ es la misma que $21 - 4 - 3$ porque tanto el 12 como el 21 simplemente significan presionar simultáneamente los botones 1 y 2.

a) ¿Cuántas combinaciones son posibles?

b) ¿Cuántas combinaciones son posibles si no se repite ningún dígito en la combinación?

Ejercicio 11 ¿De cuántas formas diferentes podemos dividir un conjunto de n elementos en dos partes si una parte tiene cuatro elementos y la otra parte tiene todos los elementos restantes?

Ejercicio 12 Observa la columna central del triángulo de Pascal. Nota que, excepto en la parte superior, todos estos números son pares. ¿Por qué?

Ejercicio 13 Usa el Teorema 3.18 para demostrar la Proposición 3.15.

Ejercicio 14 Mostrar que la suma de los números en la n-ésima fila del triángulo de Pascal es 2^n.

Una forma sencilla de hacer esto es sustituir $x = y = 1$ en el Teorema Binomial.

Sin embargo, por favor, proporcionar una demostración combinatoria. Es decir, mostrar que

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

encontrando una pregunta que se responda correctamente en ambos lados de esta ecuación.

Dar también una demostración por inducción.

Ejercicio 15 Usar el Teorema Binomial para mostrar que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots \pm \binom{n}{n} = 0$$

dado que $n > 0$.

Operando

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots.$$

Dar una descripción combinatoria de lo que esto significa y conviértelo en una prueba combinatoria. Usa el “método diferente”.

Ejercicio 16 Considera la siguiente fórmula:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Dar dos pruebas diferentes. Una prueba debe usar la fórmula factorial para $\binom{n}{k}$ (Teorema 17.12). La otra prueba debe ser combinatoria; desarrolla una pregunta que ambas partes de la ecuación respondan.

Ejercicio 17 Sean $n \geq k \geq m \geq 0$ enteros. Considerar la siguiente fórmula:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

Dar dos demostraciones diferentes. Una prueba debe usar la Fórmula Factorial para $\binom{n}{k}$ (Teorema 3.18). La otra prueba debe ser combinatoria. Tratar de desarrollar una pregunta que ambas partes de la ecuación respondan.

Ejercicio 18 ¿Cuántos rectángulos se pueden formar en un tablero de ajedrez de $m \times n$? Por ejemplo, para un tablero de ajedrez de 2×2, hay nueve rectángulos posibles.

Ejercicio 19 Sea n un número natural. Dar una prueba combinatoria de lo siguiente:

$$\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}.$$

Ejercicio 20 Sea n un entero positivo. Prueba que $n - \binom{n}{2} \leq 1$.

Ejercicio 21 $(***)$ Usar la fórmula de Stirling (ver Ejercicio 7 del TP3A segunda sección) para desarrollar una fórmula aproximada para $\binom{2n}{n}$.

Sin usar la fórmula de Stirling, dar una prueba directa de que $\binom{2n}{n} \leq 4^n$.

Ejercicio 22 Usa la fórmula factorial (Teorema 3.19) para $\binom{n}{k}$ para probar la Identidad de Pascal (Teorema 3.18).

Ejercicio 23 Pruobar

$$\binom{n}{3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2}.$$

Ejercicio 24 (∗)El ejercicio anterior te pide que pruebes que $\binom{n}{3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2}$. En una copia grande del triángulo de Pascal, marca los números $\binom{7}{2}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{3}{2}$, y $\binom{2}{2}$. ¿Cuál es el patrón?

Ahora generaliza estas fórmulas y prueba tu afirmación.

Ejercicio 25 Dar una prueba geométrica y una prueba algebraica de que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = n^2.$$

Ejercicio 26 Probar que:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-k}{1}\binom{n-1}{0} = \binom{2n}{n}.$$

Ejercicio 27 ¿Cuántos números de *zhen* (ver **Ejercicio 12** de la primera sección del TP4A) tienen 10 dígitos en orden estrictamente creciente?

El siguiente conjunto de problemas introduce el concepto de coeficientes multinomiales.

Ejercicio 28 (∗) El coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ es el número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos. Aquí hay otra manera de pensar en $\binom{n}{k}$. Sea A un conjunto de n elementos y supongamos que tenemos un suministro ilimitado de etiquetas; tenemos k etiquetas que dicen "bueno" y $n-k$ etiquetas que dicen "malo". ¿Cuántas maneras hay de asignar exactamente una etiqueta a cada elemento de A?

Ejercicio 29 (∗) Sea A un conjunto de n elementos. Supongamos que tenemos tres tipos de etiquetas para asignar a los elementos de A. Podemos llamar a estas etiquetas "bueno", "malo" y "feo", o darles nombres menos interesantes como "Tipo 1", "Tipo 2" y "Tipo 3".

Sean a, b y c en $\mathbb{N}$. Define el símbolo $\binom{n}{a\ b\ c}$ como el número de maneras de etiquetar los elementos de un conjunto de n elementos con tres tipos de etiquetas en las que damos exactamente a de los elementos etiquetas de Tipo 1, b de los elementos etiquetas de Tipo 2 y c de los elementos etiquetas de Tipo 3.

Evalúa lo siguiente en base a estos principios:

a) $\binom{3}{1\ 1\ 1}$

b) $\binom{10}{2\ 5\ 3}$

c) $\binom{5}{0\ 5\ 0}$

d) $\binom{7}{3\ 0\ 4}$

e) $\binom{10}{2\ 3\ 5}$

Ejercicio 30 (∗∗∗) Sean n, a, b, c en $\mathbb{N}$ con $a + b + c = n$. Por favor, prueba lo siguiente:

a) $\binom{n}{a\ b\ c} = \binom{n}{a}\binom{n-a}{b}$.

b) $\binom{n}{a\ b\ c} = \frac{n!}{a!b!c!}$.

c) Si $a + b + c \neq n$, entonces $\binom{n}{a\ b\ c} = 0$.

Ejercicio 31 (∗∗∗) Sea $n \in \mathbb{N}$. Mostrar

$$(x + y + z)^n = \sum_{a+b+c=n} \binom{n}{a\ b\ c} x^a y^b z^c$$

donde la suma es sobre todos los números naturales a, b, c con $a + b + c = n$.

Dar también una demostración por inducción.

Ejercicio 32 Una mano de póker consiste en 5 cartas elegidas de un mazo estándar de 52 cartas. ¿Cuántas manos de póker diferentes son posibles?

Ejercicio 33 *Continuación del póker.* Hay una variedad de manos especiales que se pueden repartir en el póker. Para cada uno de los siguientes tipos de manos, cuenta cuántas manos tienen ese tipo.

a) Poker de cuatro iguales: La mano contiene cuatro cartas del mismo valor numérico (por ejemplo, cuatro jotas) y otra carta.

b) Trío: La mano contiene tres cartas del mismo valor numérico y dos cartas más con dos valores numéricos diferentes.

c) Color: La mano contiene cinco cartas del mismo palo.

d) Full: La mano contiene tres cartas de un valor y dos cartas de otro valor.

e) Escalera: Las cinco cartas tienen valores numéricos consecutivos, como 7-8-9-10-Jota. El As puede considerarse mayor que el Rey pero no menor que el 2. Los palos son irrelevantes.

f) Escalera de color: La mano es tanto una escalera como un color.

Ejercicio 34 $(***)$ En primer lugar, por favor verificar que $\binom{n}{4} = n(n-1)(n-2)(n-3)/4!$.

Podemos pensar en esto como una expresión polinómica y sustituir $n = -1/2$ en la representación polinómica de $\binom{n}{4}$ (aunque esto no tiene sentido con la definición de coeficiente binomial) para obtener

$$\binom{-1/2}{4} = \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)(-7/2)}{4!} = \frac{105/16}{24} = \frac{35}{128}.$$

Encuentra una fórmula para $\binom{-1/2}{k}$ donde k es un entero no negativo.

Ejercicio 35 $(*)$ Para calcular $\binom{n}{k}$ generando el triángulo de Pascal, no es necesario generar el triángulo completo hasta la fila n; solo se necesita la parte del triángulo en un ángulo de 90° por encima de $\binom{n}{k}$.

Estime cuántas operaciones de suma necesitaría realizar para calcular $\binom{100}{30}$ utilizando este método. ¿Cuántas operaciones de suma necesitaría realizar si tuviera que calcular todo el triángulo de Pascal hasta la fila 30?

Ejercicio 36 $(*)$ Usar una computadora para imprimir una copia muy grande del triángulo de Pascal, pero con una variación. En lugar de imprimir los números, imprima un punto si el número es impar y deje el espacio en blanco si el número es par. Produzca al menos 64 filas.

Tenga en cuenta que la computadora no necesita calcular los valores exactos de los elementos en el triángulo de Pascal; solo necesita calcular su paridad. (Explique.) ¿Qué observa?

Contando Multiconjuntos

Ejercicio 1 Evaluar $\left(\!\binom{3}{2}\!\right)$ y $\left(\!\binom{2}{3}\!\right)$ listando explícitamente todos los multiconjuntos de tamaño apropiado. Verifica que tus respuestas coincidan con la fórmula para la cantidad de multiconjuntos. Además dar una representación usando estrellas y barras para todos los conjuntos que encontraste.

Ejercicio 2 Sea n un entero positivo. Evalúa lo siguiente desde primeros principios (es decir, sin usar la Proposición 18.6):

a) $\left(\!\binom{0}{n}\!\right)$. **b)** $\left(\!\binom{n}{0}\!\right)$. **c)** $\left(\!\binom{0}{0}\!\right)$.

Explica tus respuestas.

Ejercicio 3 Sea n un entero positivo. Hay 2^n conjuntos posibles que se pueden formar usando los elementos en $\{1, 2, \ldots, n\}$. ¿Cuántos multiconjuntos se pueden formar usando esos elementos?

Ejercicio 4 ¿Qué multiconjunto está codificado por la notación de estrellas y barras $* \,||\, * * *$?

Ejercicio 5 Evalúa desde de la definición $\left(\!\binom{2}{k}\!\right)$ (donde k es un número entero no negativo).

Ejercicio 6 Por favor, calcula $\left(\!\binom{8}{4}\!\right)$ y $\left(\!\binom{4}{8}\!\right)$. ¿Notas algo interesante? Haz una conjetura.

Ejercicio 7 Expresa $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ usando notación factorial.

Ejercicio 8 Sea n un entero positivo. ¿Cuál es mayor: $\binom{2n}{n}$ o $\left(\!\binom{n}{n}\!\right)$? Justifica tu respuesta.

Mostrar que la razón entre $\binom{2n}{n}$ y $\left(\!\binom{n}{n}\!\right)$ es la misma para todos los enteros positivos n.

Ejercicio 9 En el **Ejercicio 7** calculaste $\left(\!\binom{8}{4}\!\right)$ y $\left(\!\binom{4}{8}\!\right)$, y esperamos que hayas notado que el primero es el doble del segundo. Demostrar esto en general. Es decir:

Sea a un entero positivo. Mostrar (algebraicamente) que $\left(\!\binom{2a}{a}\!\right)$ es el doble de $\left(\!\binom{a}{2a}\!\right)$.

Ejercicio 10 El teoría vimos una fórmula para $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ de la forma $\binom{?}{?}$. Deriva una fórmula para $\binom{a}{b}$ de la forma $\left(\!\binom{?}{?}\!\right)$, donde las entradas superior e inferior son expresiones que involucran los enteros a y b con $a \geq b \geq 0$.

Ejercicio 11 Demostrar (algebraicamente):

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{k+1}{n-1}\!\!\right).$$

Ejercicio 12 Sea $[n\ k]$ el número de multiconjuntos de cardinalidad k que podemos formar eligiendo los elementos en $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ con la condición adicional de que debemos usar cada uno de estos n elementos al menos una vez en el multiconjunto.

a) Evalúa desde la definición $[n\ 1]$.

b) $(*)$Demostrar que: $[n\ k] = \left(\!\binom{n}{k-n}\!\right)$.

Ejercicio 13 Sean n y k enteros positivos. Demostrar (por inducción):

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{0}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{2}\!\!\right) + \cdots + \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right).$$

Ejercicio 14 Sean n y k enteros positivos. Demostrar (por inducción):

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{1}{k-1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{2}{k-1}\!\!\right) + \cdots + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right).$$

Ejercicio 15 $(***)$ En el **Ejercicio 34** de la sección anterior vimos que $\binom{n}{k}$ se puede expresar como un polinomio en n; por ejemplo, $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$. En este ejercicio exploraremos la misma idea para $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

a) Muestra que para un entero positivo n, $\left(\!\binom{n}{1}\!\right) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$.

b) Desarrolla la expresión en la parte (a) y compárala con la expresión análoga para $\binom{n}{4}$.

c) Formular (y probar) una conjetura que relacione las expresiones $\left(\!\binom{-x}{k}\!\right)$ y $\left(\!\binom{x}{k}\!\right)$ donde k es un entero no negativo.

d) Derivar una fórmula para $\left(\!\!\binom{1/2}{k}\!\!\right)$.

Ejercicio 16 ($***$) Usa la parte (c) del problema anterior para dar una derivación alternativa del Teorema Binomial Negativo mediante la sustitución en el Teorema del Binomio. Es decir, puedes asumir (sin justificación) que la fórmula

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

funciona incluso si usamos un entero negativo para n.

Ejercicio 17 ($***$) Suponer que el Teorema Binomial Negativo (Teorema 3.22) se extiende a cualquier número real negativo para desarrollar una serie infinita para

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Luego, sustituye $x = \frac{1}{2}$ en tu fórmula hasta el término x^5 para calcular una aproximación a $\sqrt{2}$. ¿Qué tan buena es esta aproximación?

Ejercicio 18 Una pastelería ofrece 8 variedades de donas. ¿De cuántas maneras puedes seleccionar una docena de donas para llevar a una reunión?

Ejercicio 19 Un centro de datos tiene 4 servidores idénticos en su rendimiento. Se recibe una ráfaga de 15 tareas computacionales, también idénticas. El balanceador de carga debe distribuir estas 15 tareas entre los 4 servidores.

a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las tareas sin ninguna restricción?

b) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir si cada servidor debe recibir al menos una tarea para asegurar que todos estén activos?

Ejercicio 20 ($*$) En ciencias de la computación, a menudo se necesita analizar la cantidad de veces que se ejecuta el cuerpo de un bucle. Considera el siguiente fragmento de código en C++:

```
int N = 20;
int count = 0;
for (int i = 1; i <= N; i++) {
    for (int j = i; j <= N; j++) {
        for (int k = j; k <= N; k++) {
            count++; // Cuerpo del bucle
        }
    }
}
```

La variable `count` registra el número de veces que se ejecuta el cuerpo del bucle. ¿Cuál es el valor final de `count`?

[*Sugerencia* cada iteración corresponde a una selección de tres números (i, j, k) del conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$ con una restricción particular.]

Ejercicio 21 Un inversor tiene \$20,000 para distribuir en 5 fondos de inversión diferentes. Por simplicidad, el inversor solo puede asignar dinero en bloques de \$1,000. ¿Cuántos portafolios de inversión diferentes puede crear? (Se permite no invertir en algunos fondos).

Ejercicio 22 Se lanzan simultáneamente 5 dados idénticos de 6 caras. Un resultado se considera la colección de números que aparecen en las caras superiores. Por ejemplo, $\{1, 1, 2, 4, 5\}$ es un posible resultado. Como los dados son idénticos, el orden no importa. ¿Cuántos resultados distinguibles son posibles?

Principio de Inclusión-Exclusión

Ejercicio 1 Hay cuatro grandes grupos de personas, cada uno con 1000 miembros. Cualquier par de estos grupos tiene 100 miembros en común. Cualquier tres de estos grupos tienen 10 miembros en común. Y hay una persona en los cuatro grupos. ¿Cuántas personas en total hay en estos grupos?

Ejercicio 2 De los enteros entre 1 y 100 (incluyendo ambos), ¿cuántos son divisibles por 2 o por 5?

Ejercicio 3 De los enteros entre 1 y 1,000,000 (incluyendo ambos), ¿cuántos no son divisibles por 2, 3 o 5?

Ejercicio 4 Sean A, B, y C conjuntos finitos. Probar o refutar: Si $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$, entonces A, B, y C deben ser disjuntos por pares.

Ejercicio 5 ¿Cuántas "palabras" de cinco letras puedes formar en las que no haya dos letras consecutivas iguales? Una "palabra" puede ser cualquier lista de las 26 letras estándar, por lo que WENJW es una palabra válida, pero NUTTY no lo es.

Nota: Aquí hay una solución fácil: Usando los métodos de conteo de listas, la respuesta es $26 \times 25 \times 25 \times 25 \times 25 = 26 \times 25^4$.

Dar una solución más complicada usando inclusión-exclusión, y luego muestra que ambas respuestas son iguales.

Ejercicio 6 ¿Cuántos números de seis dígitos no tienen tres dígitos consecutivos iguales? (Para este problema, puedes considerar números de seis dígitos cuyos dígitos iniciales puedan ser 0. Por lo tanto, debes contar 012345 y 001122, pero no 000987 o 122234).

Ejercicio 7 ¿Cuántos caminos de la cuadrícula evitan ambos lugares A y B? Estos caminos deben consistir exactamente de 18 pasos: nueve pasos hacia la derecha y nueve pasos hacia arriba. Un camino de este tipo se muestra en la figura.

Ejercicio 8 $(***)$ Este ejercicio es para aquellos que han estudiado cálculo. En el apunte el número de desarreglos de los números del 1 al n es

$$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Si dividimos esto por $n!$ obtenemos la probabilidad p_n de que nadie recupere su propio sombrero del portero de sombreros desordenado. Evaluar:

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!},$$

¿Qué significado tiene el valor de dicho límite?

Ejercicios Adicionales

Ejercicio 1 Las letras de la palabra **ELECTRICITY** se reorganizan para formar dos palabras, posiblemente sin sentido (por ejemplo, **TIREEL CICTY**). ¿Cuántos de estos anagramas son posibles?

Ejercicio 2 Dos niños están jugando TA-TE-TI. ¿De cuántas maneras se pueden hacer los dos primeros movimientos?

Una respuesta posible es $9 \times 8 = 72$ ya que hay 9 ubicaciones para que el primer jugador marque una X y, para cada una de estas opciones, 8 ubicaciones para que el segundo jugador marque una O.

Sin embargo, debido a la simetría, algunos de estos pares iniciales de movimientos son iguales. Por ejemplo, si el primer jugador elige un cuadro en la esquina y el segundo jugador elige el centro, en realidad no importa qué esquina eligió el primer jugador.

Tomando esto en cuenta, ¿en cuántas formas distintas se pueden hacer los dos primeros movimientos?

Ejercicio 3 Hay 21 estudiantes en una clase de química. Los estudiantes deben emparejarse para trabajar como compañeros de laboratorio, pero, por supuesto, un estudiante quedará sin pareja para trabajar solo. ¿De cuántas formas se pueden emparejar los estudiantes?

Ejercicio 4 Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. ¿Cuántos subconjuntos de 10 elementos de A consisten solo en números impares?

Ejercicio 5 La expresión $(x + 2)^{50}$ se expande. ¿Cuál es el coeficiente de x^{17}?

Ejercicio 6 Sea n un entero positivo. Simplifica la siguiente expresión:

$$n + (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (2n).$$

Ejercicio 7 En una escuela de 200 niños, se eligen 15 estudiantes para formar parte del equipo de matemáticas de la escuela, y de estos, 2 estudiantes son elegidos como co-capitanes. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Ejercicio 8 Sean n y k enteros positivos con $k + 2 \leq n$. Prueba la identidad

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$$

mediante los siguientes dos métodos: combinatoriamente y usando la Identidad de Pascal (Teorema 3.18).

Ejercicio 9 Sean n y k enteros positivos. Considera la siguiente ecuación:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k.$$

a. ¿Cuántas soluciones hay si las variables x_i deben ser enteros no negativos?
b. ¿Cuántas soluciones hay si las variables x_i deben ser enteros positivos?
c. ¿Cuántas soluciones hay si las variables x_i solo pueden tomar los valores 0 o 1?

Ejercicio 10 Un restaurante de pizzas ofrece diez tipos diferentes de ingredientes. Cuando pides una pizza cuádruple, puedes elegir cuatro ingredientes para tu pizza.

a. ¿Cuántas pizzas cuádruples diferentes se pueden hacer si los cuatro ingredientes deben ser diferentes?
b. ¿Cuántas pizzas cuádruples diferentes se pueden hacer si los ingredientes pueden repetirse (por ejemplo, cebolla, aceitunas, doble champiñones, o triple anchoas con ajo)?

Ejercicio 11 Sea n un entero positivo. ¿Cuántos multiconjuntos se pueden hacer usando los números del 1 al n, donde cada uno se usa como máximo tres veces? Asegúrate de justificar tu respuesta.

Por ejemplo, si $n = 5$, entonces contaríamos $\langle 1, 2, 2, 3\rangle$ y $\langle 1, 2, 3, 4, 4, 5\rangle$, pero no contaríamos $\langle 1, 2, 4, 4, 4, 4, 4\rangle$ (demasiados 4s) o $\langle 3, 4, 6\rangle$ (6 no está en el rango de 1 a n).

Ejercicio 12 Las casillas de un tablero de ajedrez de 4×4 están coloreadas en blanco o negro. Usa inclusión-exclusión para encontrar el número de formas en que el tablero puede ser coloreado de modo que ninguna fila sea enteramente de un solo color.

Explica por qué tu expresión se simplifica a 14^4.

Ejercicios sugeridos

Contando Clases de Equivalencia

Ejercicio 2, Ejercicio 4, Ejercicio 7, Ejercicio 9 y Ejercicio 13.

Coeficiente Binomial

Ejercicio 1, Ejercicio 4, Ejercicio 7 y Ejercicio 10.

Contando Multiconjuntos

Ejercicio 1, Ejercicio 2, Ejercicio 5, Ejercicio 11 y Ejercicio 16.

Principio de Inclusión-Exclusión

Ejercicio 1, Ejercicio 3 y Ejercicio 6.