El Principio de Multiplicación a través de las *listas*

Ejercicio 1 Escribir todas las posibles "palabras" de dos letras que se pueden formar utilizando solo las vocales A, E, I, O y U. Estas serán, en su mayoría, palabras sin sentido, desde "AA" hasta "UU".

¿Cuántas de estas no tienen letras repetidas?

Ejercicio 2 Los aeropuertos tienen nombres, pero también tienen códigos de tres letras. Por ejemplo, el aeropuerto de nuestra querida Mendoza es `MDZ`, y el código `SDU` es para el aeropuerto Santos Dumont, Rio de Janeiro, Brasil.

¿Cuántos códigos diferentes de aeropuertos son posibles?

Ejercicio 3 Una cadena de bits es una lista de 0 (ceros) y 1 (unos). ¿Cuántas cadenas de bits de longitud k se pueden formar?

Ejercicio 4 El sistema de ventilación de un automóvil tiene varios controles. El control del ventilador tiene cuatro configuraciones: apagado, bajo, medio y alto. El flujo de aire puede configurarse para salir por el suelo, a través de las rejillas de ventilación o por el desempañador. El botón del aire acondicionado puede estar encendido o apagado. El control de la temperatura puede ajustarse a frío, fresco, cálido o caliente. Y finalmente, el botón de recirculación puede estar encendido o apagado.

¿De cuántas maneras diferentes se pueden configurar estos controles?

Nota Varios de estos ajustes resultan en el mismo efecto, ya que no ocurre nada si el control del ventilador está apagado. Sin embargo, el problema pregunta por el número de configuraciones diferentes de los controles, no por el número de efectos de ventilación diferentes posibles.

Ejercicio 5) Un músico tiene 12 canciones de su autoría. Quiere crear dos repertorios para sus conciertos: uno para la "Mañana" y otro para la "Noche". Cada repertorio debe consistir en una lista ordenada de 3 canciones distintas.

a) ¿De cuántas maneras puede armar los dos repertorios si puede usar las mismas canciones en ambos? (Por ejemplo, la canción "A" puede estar en el repertorio de la Mañana y también en el de la Noche).

b) ¿De cuántas maneras puede armar los repertorios si todas las canciones seleccionadas (las 3 de la mañana y las 3 de la noche) deben ser diferentes entre sí?

Ejercicio 6 ¿Cuántas listas de 3 elementos se pueden formar cuyos elementos se extraen de un conjunto de n elementos posibles si requerimos que la primera y la última entrada de la lista sean iguales?

¿Cuántas de estas listas se pueden formar si requerimos que la primera y la última entrada sean diferentes?

Nota En ambos casos, no hay restricción sobre la entrada del medio en la lista.

Ejercicio 7 Tienes una colección de 10 fotos distintas de tus vacaciones. Quieres seleccionar algunas para subirlas a tu sitio web en dos galerías ordenadas: "Viajes" y "Eventos".

a) ¿De cuántas maneras puedes seleccionar y ordenar 3 de las 10 fotos para la galería "Viajes"? (El orden en que aparecen importa).

b) Después de haber armado la galería "Viajes", ¿de cuántas maneras puedes seleccionar y ordenar 4 fotos *de las restantes* para la galería "Eventos"?

c) ¿De cuántas maneras puedes realizar ambas tareas, es decir, armar primero la galería "Viajes" con 3 fotos y luego la galería "Eventos" con 4 fotos distintas a las anteriores?

Ejercicio 8 Tienes tres anillos diferentes. Usas los tres anillos, pero ninguno de los dos anillos está en el mismo dedo, ni en ninguno de tus pulgares. ¿De cuántas maneras puedes usar tus anillos? (Asumir que cualquier anillo cabe en cualquiera de tus dedos).

Ejercicio 9 ¿De cuántas maneras se puede colocar una torre negra y una torre blanca en diferentes casillas de un tablero de ajedrez tal que ninguna esté atacando a la otra? (En otras palabras, no pueden estar en la misma fila o en la misma columna del tablero de ajedrez. Un tablero de ajedrez estándar es de 8×8).

Ejercicio 10 Las patentes en **CARCITY** consisten en seis caracteres[1]: Los primeros tres caracteres son letras mayúsculas (A-Z), y los últimos tres caracteres son dígitos (0-9).

a) ¿Cuántas patentes hay en **CARCITY**?

b) ¿Cuántas patentes hay en **CARCITY** si ningún caracter puede repetirse en la misma matrícula?

Ejercicio 11 Un número de teléfono en **PHONECITY** es un número de diez dígitos cuyo primer dígito no puede ser un 5 o un 9. ¿Cuántos números de teléfono hay en **PHONECITY**?

Ejercicio 12 Un número es *zhen*[2] en **NUMBERLAND** si es un número de diez dígitos. Los primeros dígitos pueden ser 0 (por ejemplo, 0000006209).

a) ¿Cuántos números *zhen* existen?

b) ¿Cuántos números *zhen* son pares?

c) ¿Cuántos números *zhen* tienen todos sus dígitos iguales?

d) ¿Cuántos números *zhen* se leen igual hacia adelante y hacia atrás? Por ejemplo, 1229779221.

e) ¿Cuántos números *zhen* no tienen a 8 como alguno de sus dígitos?

f) ¿Cuántos números *zhen*tienen al menos un dígito igual a 8?

g) ¿Cuántos números *zhen* tienen exactamente un 8?

Ejercicio 13 Sea n un número entero positivo. Mostrar que $n^2 = (n)_2 + n$ de dos maneras diferentes[3].

Primero (y de manera más simple) muostrar que esta ecuación es verdadera algebraicamente.

Segundo (y más interesante) interpretar los términos n^2, $(n)_2$, y n en el contexto de conteo de listas y usar eso para argumentar por qué la ecuación debe ser verdadera.

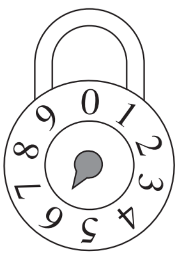
Ejercicio 14 Un sistema operativo de computadora permite que los archivos sean nombrados usando cualquier combinación de letras mayúsculas (A-Z) y dígitos (0-9), pero el número de caracteres[1] en el nombre del archivo es de hasta ocho (y debe haber al menos un caracter en el nombre del archivo). Por ejemplo, X23, W, 4AA, y ABCD1234 son nombres de archivos válidos, pero W-23 y W0ND3RFUL no son válidos (el primero tiene un caracter no permitido, y el segundo es demasiado largo).

¿Cuántos nombres de archivos diferentes son posibles en este sistema?

Ejercicio 15 (∗) ¿Cuántos *números* de cinco dígitos hay que no tengan dos dígitos consecutivos iguales? Por ejemplo, contarías 12104 y 12397 pero no 6321 (no es de cinco dígitos) ni 43356 (tiene dos 3 consecutivos).

Nota Los primeros dígitos no puede ser 0. Por ejemplo no estamos considerando 01845.

Ejercicio 16



(∗) Un candado tiene los dígitos 0 a 9 dispuestos en un círculo como se observa en la figura. Una combinación para este candado es una lista de cuatro dígitos de largo. Debido a la mecánica interna del candado, no se permite que ningún par de dígitos consecutivos en la combinación sea el mismo ni que estén separados por un lugar (en el candado).
Por ejemplo, 0-2-7-1 es una combinación válida, pero ni 0-4-4-7 (dígito 4 repetido) ni 3-0-9-5 (dígitos adyacentes 0-9) están permitidos.
¿Cuántas combinaciones son posibles?

Ejercicio 17 Una estantería contiene 20 libros. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar estos libros en la estantería?

Ejercicio 18 En un curso de *Matemática Discreta* hay diez chicos y diez chicas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden estar de pie en una línea si deben alternarse en género (dos chicos y dos chicas no pueden estar juntos)?

Ejercicio 19 (∗) Se extraen cuatro cartas de un mazo estándar de 40 cartas de truco. ¿De cuántas maneras puede suceder si las cartas son de todos valores diferentes (por ejemplo, no podemos extrar el *macho* y la *hembra*, o dos 5) y de diferentes palos? (Para este problema, el orden en que se extraen las cartas importa, por lo que extraer 5 7 1 10 no es lo mismo que extraer 10 5 1 7 .)

[1] La palabra *caracter*, en este contexto, significa una letra o un dígito.
[2] La palabra *zhen* significa diez (10) en alemán.
[3] Esto es un ejemplo de una *demostración combinatoria*.

Factorial

Ejercicio 1 Resolver la ecuación $n! = 720$ para n.

Ejercicio 2 Hay seis libros diferentes en francés, ocho libros diferentes en ruso y cinco libros diferentes en español.

a) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar estos libros en una estantería?

b) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar estos libros en una estantería si todos los libros del mismo idioma están agrupados juntos?

Ejercicio 3 Dar una discusión estilo "Ana y Bruno" sobre qué significa sumar (y multiplicar) una lista de números que solo contiene un número.

Ejercicio 4 Considera la fórmula

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Esta fórmula es mayormente correcta. ¿Para qué valores de n y k es correcta? Demuestra que la fórmula es correcta bajo una hipótesis adecuada; es decir, este problema pide que encuentres y demuestres un teorema de la forma

$$\text{“Si (condiciones sobre } n \text{ y } k\text{), entonces } (n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}\text{”.}$$

Ejercicio 5 Evaluar $\dfrac{100!}{98!}$ sin calcular 100! o 98!.

Ejercicio 6 $(***)$ Ordenar los siguientes enteros de menor a mayor: 2^{100}, 100^2, 100^{10}, $100!$, 10^{10}.

Ejercicio 7 $(***)$ El matemático escocés James Stirling encontró una fórmula aproximada para $n!$. La fórmula de Stirling es

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

donde $\pi = 3{,}14159\ldots$ y $e = 2{,}71828\ldots$. (Las calculadoras científicas tienen una tecla que calcula e^x; esta tecla podría estar etiquetada como `exp(x)`).

Calcular $n!$ y la aproximación de Stirling a $n!$ para $n = 10, 20, 30, 40, 50$. ¿Cuál es el error relativo en las aproximaciones?

Ejercicio 8 Calcular los siguientes productos:

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{4}(2k+1)$.

b) $\displaystyle\prod_{k=-3}^{4} k$.

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \tfrac{k+1}{k}$, donde n es un entero positivo.

d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\tfrac{1}{k}\right)^k$, donde n es un entero positivo.

Ejercicio 9 $(***)$ Calcular lo siguiente:

a) $1 \cdot 1!$.

b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2!$.

c) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3!$.

d) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4!$.

e) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + 5 \cdot 5!$.

Ahora, haz una conjetura. Es decir, intenta predecir el valor de

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!.$$

Demostrar por inducción la fórmula encontrada.

Sugerencia Recordar series telescópicas.

Ejercicio 10 ($***$) Cuando 100! se escribe completamente, se obtiene

$$100! = 9332621\ldots000000.$$

Sin usar una computadora (calculadora, ChatGPT, etc), determinar la cantidad de dígitos 0 al final de este número.

Ejercicio 11 ($***$) Mostrar que todos los siguientes números son compuestos: $1000! + 2$, $1000! + 3$, $1000! + 4$, $\ldots$, $1000! + 1002$.

El punto de este problema es presentar una larga lista de enteros consecutivos, todos los cuales son compuestos.

Ejercicio 12 ($***$) Un "factorión" es un entero positivo con la siguiente propiedad interesante. Cuando se escribe en la base ordinaria 10, es igual a la suma de los factoriales de sus dígitos. Por ejemplo, 145 es un factorión porque

$$1! + 4! + 5! = 1 + 24 + 120 = 145.$$

Los números 1 y 2 también son factoriones (porque $1! = 1$ y $2! = 2$). Hay solo otro factorión; ¡encuéntralo!

No conocemos una solución fácil "a lápiz y papel" para este problema. Es mejor que lo resuelvas con la ayuda de un programa de computadora.

Ejercicio 13 ($*$) El doble factorial $n!!$ se define para números enteros positivos impares n; es el producto de todos los números impares de 1 a n inclusive. Por ejemplo, $7!! = 1 \times 3 \times 5 \times 7 = 105$. Por favor responder lo siguiente:

a) Evaluar $9!!$.

b) Para un entero impar n, ¿son $n!!$ y $(n!)!$ iguales?

c) Escribir una expresión para $n!!$ usando notación de producto.

d) Explicar por qué funciona esta fórmula:

$$(2k-1)!! = \frac{(2k)!}{k!2^k}.$$

Se necesita **Análisis Matemático I** para el siguiente ejercicio:

Ejercicio 14 ($***$) Evalúa la siguiente integral para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx.$$

Nota El caso $n = 0$ es el más fácil. Haz los valores restantes de n en orden (primero 1, luego 2, etc.) y utiliza integración por partes. Luego aplica inducción matemática.

¿Cuál es el valor de esta integral para un número natural n arbitrario?

Extra para valientes Evalúa la integral con $n = \frac{1}{2}$.

Principio de Adición & Demostraciones Combinatorias

Ejercicio 1 Sean A y B conjuntos con $|A| = 10$ y $|B| = 7$. Calcule $|A \cap B| + |A \cup B|$ y justifique su respuesta.

Ejercicio 2 Supongamos que X, Y y Z son conjuntos finitos con $X \cap Y \cap Z = \emptyset$. Mostrar o refutar:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z|\,.$$

Ejercicio 3 Supongamos que X, Y y Z son conjuntos finitos disjuntos dos a dos. Mostrar o refutar:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z|\,.$$

Ejercicio 4 Sean X y Y conjuntos finitos. Mostrar o refutar:

$$|X \Delta Y| = |X - Y| + |Y - X|\,.$$

Ejercicio 5 Sean X, Y, Z conjuntos finitos. Mostrar que:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Y| - |X \cap Y| + |X \cap Y \cap Z|\,.$$

Ejercicio 6 Demostrar la **Proposición 3.8**.

Ejercicio 7 Sea n un entero positivo. Proporcionar una prueba combinatoria de que $n^2 = n(n-1) + n$.

Ejercicio 8 $(*)$ En este problema queremos calcular el número de listas de dos elementos (a, b) que podemos formar usando los números $0, 1, \ldots, n$ con $a < b$.

a. Mostrar que la respuesta es $\dfrac{(n+1)n}{2}$ considerando el número de listas de dos elementos (a, b) en las que $a < b$ o $a > b$.

b. Mostrar que la respuesta es $1 + 2 + \ldots + n$.

Tomando ambos puntos juntos, demostrar la fórmula:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Ejercicio 9 $(*)$ ¿Cuántas listas de dos elementos podemos formar usando los enteros del 1 al n en las que el mayor elemento de la lista es a (donde a es un entero entre 1 y n)?

Utilizar tu respuesta para mostrar que:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Ejercicios Adicionales

Ejercicio 1 El indicativo de llamada de una estación de radio (en los Estados Unidos) es una lista de tres o cuatro letras, como WJHU o WJZ. La primera letra debe ser una W o una K, y no hay restricción sobre las otras letras. ¿De cuántas formas se puede formar el indicativo de llamada de una estación de radio?

Ejercicio 3 ¿De cuántas formas se puede hacer una lista de tres enteros (a, b, c) donde $0 \leq a, b, c \leq 9$ y abc es par?

Ejercicio 4 Sin usar ayudas computacionales (calculadora, ChatGPT, etc), simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{20!}{17! \cdot 3!}$$

Ejercicio 5 ¿De cuántas formas podemos organizar una mazo española estándar de 50 cartas de manera que todas las cartas de un mismo palo aparezcan contiguas (por ejemplo, primero todas los oros, luego todos las espadas, luego todos los bastos, y finalmente todas las copas)?

Ejercicio 6 Diez parejas casadas están esperando en fila para entrar a un restaurante. Los esposos y las esposas se paran uno al lado del otro, pero cualquiera de los dos podría estar adelante del otro. ¿Cuántas de esas ordenaciones son posibles?

Ejercicio 7 Evaluar lo siguiente sin calculadora:

$$\prod_{k=0}^{100} \frac{k^2}{k+1}$$

[*Sugerencia* Hay una forma simple de hacerlo.]

Ejercicio 8 Suponga que A y B son conjuntos finitos. Dado que $|A| = 10$, $|A \cup B| = 15$, y $|A \cap B| = 3$, determine $|B|$.

Ejercicio 9 Sean A y B conjuntos con $|A| = 10$ y $|B| = 7$. ¿Qué podemos decir sobre $|A \cap B|$? En particular, encuentre dos números x y y tales que se pueda asegurar que $x \leq |A \cap B| \leq y$ y luego encuentre conjuntos específicos A y B tales que $|A \cap B| = x$ y otro par de conjuntos tales que $|A \cap B| = y$.

Ejercicio 10 $(*)$ Sea n un entero positivo. Dar una demostración combinatoria de la identidad:

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$

Ejercicios sugeridos

El Principio de Multiplicación a través de las *listas*

Ejercicio 2, Ejercicio 5, Ejercicio 9, Ejercicio 12, Ejercicio 16 y Ejercicio 19.

Factorial

Ejercicio 2, Ejercicio 6, Ejercicio 9, Ejercicio 10 y Ejercicio 15.

Principio de Adición & Demostraciones Combinatorias

Ejercicio 1, Ejercicio 3, Ejercicio 6 y Ejercicio 14.