Notas de Matemática Discreta

Versión del 22 de octubre de 2025

Basadas principalmente en los libros
Mathematics: A Discrete Introduction
de Edward R. Scheinerman

& *Discrete Mathematics - An Open Introduction, 4th Edition de Oscar Levin* y complementadas con otros textos y notas de cátedra.

Índice general

Capítulo 4

Técnicas de Conteo

4.1. El Principio de Multiplicación a través de las *listas*

Una *lista* es una sucesión ordenada de objetos. Escribimos listas empezando con un paréntesis abierto, seguido por los elementos de la lista separados por comas, y finalizando con un paréntesis cerrado. Por ejemplo, $(1, 2, \mathbb{Z})$ es una lista cuyo primer elemento es el número 1, cuyo segundo elemento es el número 2, y cuyo tercer elemento es el conjunto de números enteros: $\mathbb{Z}$. Otra lista podría ser $(\square, \bigcirc, \diamondsuit)$. En general estamos interesados en listas cuyos elementos son números naturales.

- El orden en el que aparecen los elementos en una lista es significativo. La lista $(1, 2, 3)$ no es la misma que la lista $(3, 2, 1)$.
- Elementos en una lista pueden repetirse, como en $(3, 3, 2)$.
- El número de elementos en una lista se llama su *longitud*. Por ejemplo, la lista $(1, 1, 2, 1)$ es una lista de longitud cuatro.
- Una lista de longitud dos tiene un nombre especial; se llama un *par ordenado*.
- Una lista de longitud cero se llama la *lista vacía* o *lista nula*, y se denota como $()$.
- Dos listas son iguales siempre que tengan la misma longitud, y los elementos en las posiciones correspondientes de las dos listas sean iguales. Las listas (a, b, c) y (x, y, z) son iguales si $a = x$, $b = y$, y $c = z$.

¡Lenguaje Matemático! Otra palabra que los matemáticos usan para listas es *tupla*. Una lista de n elementos se conoce como una n-tupla.

Las listas están presentes en toda la matemática y más allá. Un punto en el plano a menudo se especifica por un par ordenado de números reales (x, y). Un número natural, cuando se escribe en notación estándar, es una lista de dígitos; puedes pensar en el número 172 como la lista $(1, 7, 2)$. Una palabra en español es una lista de letras. Un identificador en un programa de computadora es una lista de letras y dígitos (donde el primer elemento de la lista es una letra).

Contando Pares Ordenados

Abordaremos preguntas del tipo: "¿cuántas listas podemos hacer?

Ejemplo 4.1.1

Supongamos que deseamos hacer una lista de dos elementos donde las entradas en la lista pueden ser cualquiera de los dígitos 1, 2, 3 y 4. ¿Cuántas de estas listas son posibles?
El enfoque más directo para responder a esta pregunta es escribir todas las posibilidades.

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) \end{array}$$

Hay 16 listas de este tipo.

Organizamos las listas de manera que aseguremos que no se ha repetido ni omitido ninguna lista. La primera fila de la tabla contiene todas las listas posibles que comienzan con 1, la segunda fila aquellas que comienzan con 2, y así sucesivamente. Por lo tanto, hay $4 \cdot 4 = 16$ listas de longitud dos cuyos elementos son cualquiera de los dígitos del 1 al 4.

¡Lenguaje Matemático! El uso matemático de la palabra *elección* es extraño. Si un restaurante tiene un menú con un solo plato principal, un matemático diría que este menú ofrece una elección. El resto del mundo probablemente diría que el menú no ofrece ninguna elección. ¡El uso matemático de la palabra *elección* es similar a la palabra *opción*!

Generalicemos un poco más este ejemplo. Supongamos que deseamos conocer el número de listas de dos elementos donde hay n opciones posibles para cada entrada en la lista. Podemos suponer que las posibles entradas son los enteros del 1 al n. Como antes, organizamos todas las listas posibles en una tabla:

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n,1) & (n,2) & \cdots & (n,n) \end{array}$$

La primera fila contiene todas las listas que comienzan con 1, la segunda las que comienzan con 2, y así sucesivamente. Hay n filas en total. Cada fila tiene exactamente n listas. Por lo tanto, hay $n \cdot n = n^2$ listas posibles.

Cuando se forma una lista, las opciones para la segunda posición pueden ser diferentes de las opciones para la primera posición. Imaginemos que una comida es una lista de dos elementos que consiste en un plato principal seguido de un postre. El número de platos principales podría ser diferente del número de postres posibles.

Ahora preguntémonos: ¿Cuántas listas de dos elementos son posibles en las que hay n opciones para el primer elemento y m opciones para el segundo elemento? Supongamos que las posibles entradas en la primera posición de la lista son los enteros del 1 al n, y las posibles entradas en la segunda posición son del 1 al m.

Construimos una tabla de todas las posibilidades como antes:

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,m) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n,1) & (n,2) & \cdots & (n,m) \end{array}$$

Hay n filas (una por cada opción posible para la primera posición), y cada fila contiene m entradas. Por lo tanto, el número total de listas posibles es:

$$\underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ veces}} = m \cdot n.$$

A veces, los elementos de una lista cumplen propiedades especiales. En particular, la elección del segundo elemento podría depender de lo que sea el primer elemento. Por ejemplo, supongamos que deseamos contar el número de listas de dos elementos que podemos formar a partir de los enteros 1 a 5, en las cuales los dos números en la lista deben ser diferentes. Podemos hacer una tabla de las listas posibles:

$$\begin{array}{ccccc} - & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) \\ (2,1) & - & (2,3) & (2,4) & (2,5) \\ (3,1) & (3,2) & - & (3,4) & (3,5) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & - & (4,5) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & - \end{array}$$

Como antes, la primera fila contiene todas las listas posibles que comienzan con 1, la segunda fila aquellas que comienzan con 2, y así sucesivamente. Hay 5 filas. Nota que cada fila contiene exactamente $5 - 1 = 4$ listas, por lo que el número de listas es $5 \cdot 4 = 20$.

Resumamos y generalicemos lo que hemos aprendido en un principio general.

Teorema 4.1.2 ▷ Principio de Multiplicación

Consideremos listas de dos elementos para las cuales hay n opciones para el primer elemento, y para cada elección del primer elemento hay m opciones para el segundo elemento. Entonces, el número de dichas listas es $n \cdot m$.

Demostración

Construyamos una tabla de todas las listas posibles. Cada fila de esta tabla contiene todas las listas de dos elementos que comienzan con un elemento particular. Dado que hay n opciones para el primer elemento, hay n filas en la tabla. Como para cada elección del primer elemento hay m opciones para el segundo elemento, sabemos que cada fila de la tabla tiene m entradas. Por lo tanto, el número de listas es

$$\underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ veces}} = n \cdot m.$$

■

Otra forma de considerar el Principio de Multiplicación es:

Principio del Producto (Regla del Producto)

Supongamos que un procedimiento se puede descomponer en una secuencia de dos tareas. Si hay n formas de realizar la primera tarea y para cada una de estas formas hay m formas de realizar la segunda tarea, entonces hay $n \cdot m$ formas de realizar el procedimiento completo.

Consideremos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.1.3

Las iniciales de una persona son la lista de dos elementos formada por las letras iniciales de su nombre y apellido. Por ejemplo, las iniciales del autor son JR. ¿De cuántas formas se pueden formar las iniciales de una persona? ¿De cuántas formas se pueden formar iniciales donde las dos letras sean diferentes?
La primera pregunta solicita el número de listas de dos elementos donde hay 26 opciones para cada elemento. Hay 26^2 de estas listas.
La segunda pregunta solicita el número de listas de dos elementos donde hay 26 opciones para el primer elemento y, para cada elección del primer elemento, 25 opciones para el segundo elemento. Así, hay $26 \cdot 25$ listas.

Otra manera de responder a la segunda pregunta del ejemplo anterior es la siguiente:

Hay 26^2 formas de formar iniciales (si se permiten repeticiones). De estas, hay 26 formas "malas" de formar iniciales en los que hay una repetición, es decir, AA, BB, CC, ..., ZZ. Las listas restantes son las que queremos contar, por lo que hay $26^2 - 26$ posibilidades. Dado que $26 \cdot 25 = 26 \cdot (26-1) = 26^2 - 26$, ambas respuestas coinciden.

Por favor, ten en cuenta que reportamos las respuestas a estas preguntas como 26^2 y $26 \cdot 25$, y no como 676 y 650. Aunque este último par de respuestas es correcto, se prefieren las respuestas 26^2 y $26 \cdot 25$ porque conservan la esencia del razonamiento usado para derivarlas. Además, la conversión de 26^2 y $26 \cdot 25$ a 676 y 650, respectivamente, no es interesante y se puede hacer fácilmente con una calculadora.

Ejemplo 4.1.4

Un club tiene diez miembros. Los miembros desean elegir un presidente y a otra persona como vicepresidente. ¿De cuántas formas se pueden llenar estos puestos?
Reformulamos esta pregunta como un problema de conteo de listas. ¿Cuántas listas de dos elementos de personas se pueden formar en las cuales las dos personas de la lista son seleccionadas de una colección de diez candidatos y la misma persona no puede ser seleccionada dos veces?
Hay diez opciones para el primer elemento de la lista. Para cada elección del primer elemento (para cada presidente), hay nueve opciones posibles para el segundo elemento de la lista (vicepresidente). Por el Principio de Multiplicación, hay $10 \cdot 9$ posibilidades.

Listas más largas

Exploremos cómo usar el Principio de Multiplicación para contar listas más largas.

Consideremos el siguiente problema. ¿Cuántas listas de tres elementos podemos crear usando los números 1, 2, 3, 4 y 5? Escribamos todas las posibilidades. A continuación, mostramos una manera de organizar nuestro trabajo:

¿Cuántas líneas hay en esta tabla?

La primera línea de esta tabla contiene todas las listas que comienzan con $(1, 1, \ldots)$. La segunda línea contiene todas las listas que comienzan con $(1, 2, \ldots)$, y así sucesivamente. Claramente, cada línea tiene cinco listas. La pregunta es:

¿Cuántas líneas hay en esta tabla?

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1,1) & (1,1,2) & (1,1,3) & (1,1,4) & (1,1,5) \\
(1,2,1) & (1,2,2) & (1,2,3) & (1,2,4) & (1,2,5) \\
(1,3,1) & (1,3,2) & (1,3,3) & (1,3,4) & (1,3,5) \\
(1,4,1) & (1,4,2) & (1,4,3) & (1,4,4) & (1,4,5) \\
(1,5,1) & (1,5,2) & (1,5,3) & (1,5,4) & (1,5,5) \\
(2,1,1) & (2,1,2) & (2,1,3) & (2,1,4) & (2,1,5) \\
(2,2,1) & (2,2,2) & (2,2,3) & (2,2,4) & (2,2,5) \\
 & & \textit{y así sucesivamente hasta} & & \\
(5,5,1) & (5,5,2) & (5,5,3) & (5,5,4) & (5,5,5)
\end{array}$$

Este es un problema que ya hemos resuelto. Nota que cada línea de la tabla comienza, en esencia, con una lista de dos elementos diferente; el número de listas de dos elementos donde cada elemento es uno de los cinco valores posibles es $5 \cdot 5$, por lo que esta tabla tiene $5 \cdot 5$ líneas. Por lo tanto, dado que cada línea de la tabla tiene cinco entradas, el número de listas de tres elementos es $(5 \cdot 5) \cdot 5 = 5^3$.

Supongamos que A y B son listas. Su *concatenación*, $A * B$, es la nueva lista formada al listar primero los elementos de A y luego los elementos de B. Por ejemplo la concatenación de las listas $(1,2,1)$ y $(1,3,5)$ es la lista $(1,2,1,1,3,5)$.

Podemos pensar en una lista de tres elementos como la *concatenación* de una lista de dos elementos y una lista de un elemento. En este problema, hay 25 listas de dos elementos posibles para ocupar la parte final de la lista de tres elementos, y para cada opción de la parte delantera, hay cinco opciones para la parte inicial de la lista.

A continuación, contemos listas de tres elementos cuyos elementos son los enteros del 1 al 5 en los cuales no se repite ningún número. Como antes, hacemos una tabla.

$$\begin{array}{ccc}
(1,2,3) & (1,2,4) & (1,2,5) \\
(1,3,2) & (1,3,4) & (1,3,5) \\
(1,4,2) & (1,4,3) & (1,4,5) \\
(1,5,2) & (1,5,3) & (1,5,4) \\
(2,1,3) & (2,1,4) & (2,1,5) \\
 & \textit{y así sucesivamente hasta} & \\
(5,4,1) & (5,4,2) & (5,4,3)
\end{array}$$

La primera línea de la tabla contiene todas las listas que comienzan con $(1,2,\ldots)$. [No puede haber líneas que comiencen con $(1,1,\ldots)$ porque no se permiten repeticiones]. La segunda línea contiene todas las listas que comienzan con $(1,3,\ldots)$, y así sucesivamente. Cada línea de la tabla contiene solo tres listas; una vez que hemos elegido los primeros y segundos elementos de la lista (de un mundo de solo cinco opciones), hay exactamente tres formas de terminar la lista. Entonces, como antes, la pregunta se convierte: ¿Cuántas líneas hay en esta tabla? Y como antes, este es un problema que ya hemos resuelto.

los primeros dos elementos de la lista forman, por sí mismos, una lista de dos elementos con cada elemento elegido de una lista de cinco objetos posibles y sin repetición. Por lo tanto, por el Principio de Multiplicación, hay $5 \cdot 4$ líneas en la tabla. Dado que cada línea tiene tres elementos, hay un total de $5 \cdot 4 \cdot 3$ listas posibles en todas.

Estas listas de tres elementos son una *concatenación* de una lista de dos elementos (20 opciones) y, para cada lista de dos elementos, hay una lista de un elemento (3 opciones), dando un total de $20 \cdot 3$ listas.

De esta forma podemos extender el Principio de Multiplicación para contar listas más largas. Consideremos listas de longitud tres. Supongamos que tenemos a opciones para el primer elemento de la lista y, para cada elección del primer elemento, hay b opciones para el segundo elemento, y para cada elección de los primeros y segundos elementos, hay c opciones para el tercer elemento. Así, en total hay abc listas. Para ver por qué, imagina que la lista de tres elementos consiste en dos partes: los dos primeros elementos y el elemento final. Hay ab formas de llenar los dos primeros elementos (por el Principio de Multiplicación), y hay c formas de completar el último elemento una vez especificados los primeros dos. Por lo tanto, por el Principio de Multiplicación, hay $(ab)c$ formas de hacer las listas. Podríamos aplicar la misma idea para listas de cuatro o más elemento.

Una generalización del Principio de Multiplicación para listas de k elementos y con diferentes opciones para cada elemento es:

Teorema 4.1.5 ▷ Principio de Multiplicación (GENERALIZADO)

Consideremos listas de k elementos para las cuales hay n_1 opciones para el primer elemento, n_2 opciones para el segundo elemento, y continuando, n_k opciones para el k-ésimo elemento. Entonces, el número de dichas listas es $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Demostración

Su demostración es por inducción. No la daremos en este curso. ■

Otra forma de considerar el Principio de Multiplicación (GENERALIZADO) es:

Principio del Producto (Generalizado)

Supongamos que un procedimiento se puede descomponer en una secuencia de k tareas. Si hay n_1 formas de realizar la primera tarea, n_2 formas de realizar la segunda, y así sucesivamente hasta n_k formas para la k-ésima tarea, entonces el número total de formas de realizar el procedimiento es el producto:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Ejemplo 4.1.6

Como en el ejemplo anterior supongamos que tenemos un club con diez miembros. Queremos elegir una junta directiva que consista en un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas formas podemos hacer esto (suponiendo que ningún miembro del club puede ocupar dos cargos)? Dibujamos el siguiente diagrama:

Pres.	V.P.	Sec.	Treas.
10	9	8	7

Esto muestra que hay diez opciones para presidente. Una vez seleccionado el presidente, hay nueve opciones para vicepresidente, por lo que hay $10 \cdot 9$ formas de llenar los primeros dos elementos de la lista. Una vez llenos estos, hay ocho formas de llenar el siguiente elemento de la lista (secretario), por lo que hay $(10 \cdot 9) \cdot 8$ formas de completar los primeros tres cargos. Finalmente, una vez llenos los primeros tres cargos, hay siete formas de seleccionar un tesorero, por lo que hay $(10 \cdot 9 \cdot 8) \cdot 7$ formas de seleccionar la lista completa de oficiales.

Dos problemas particulares de creación de listas ocurren con suficiente frecuencia como para merecer atención especial. Estos problemas implican hacer una lista de longitud k en la cual cada elemento de la lista es seleccionado de entre n posibilidades. En el primer problema, contamos todas las listas; en el segundo problema, contamos las listas sin elementos repetidos.

Esta fórmula da el número de listas de longitud k donde hay n posibles entradas en cada posición de la lista y se permiten repeticiones.

Cuando se permiten repeticiones, tenemos n opciones para el primer elemento de la lista, n opciones para el segundo elemento de la lista, y así sucesivamente, y n opciones para el último elemento de la lista. En total, hay:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{k \text{ veces}} = n^k \tag{4.1}$$

listas posibles.

Las listas sin repeticiones a veces en algunos contextos se denominan *permutaciones*

Esta fórmula cuenta el número de listas de longitud k donde los elementos se eligen de un conjunto de n posibilidades y no hay dos elementos iguales en la lista.

Ahora supongamos que rellenamos una lista de longitud k con n valores posibles, pero en este caso, no se permite la repetición. Hay n formas de seleccionar el primer elemento de la lista. Una vez hecho esto, hay $n-1$ opciones para el segundo elemento de la lista. Hay $n-2$ formas de llenar la posición tres, $n-3$ formas para llenar la posición cuatro, y así sucesivamente, hasta llegar a $n-k+1$ formas de llenar la posición k. Por lo tanto, el número de formas de hacer una lista de longitud k donde los elementos se eligen de un grupo de n posibilidades y no se repiten dos elementos en la misma lista es:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot [n-(k-1)]. \tag{4.2}$$

Esta fórmula es correcta, pero hay un pequeño error en nuestro razonamiento. ¿Cuántas listas de longitud seis podemos hacer donde cada elemento de la lista es uno de los dígitos 1, 2, 3 o 4 y no se permite la repetición? La respuesta, obviamente, es cero; ¡no se puede hacer una lista de longitud seis usando solo cuatro elementos posibles y sin repetir un elemento! ¿Qué da la fórmula? La ecuación (4.2) dice que el número de tales listas es

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1)$$

lo cual es igual a 0. Sin embargo, el razonamiento detrás de la fórmula falla. Aunque es cierto que hay 4, 3, 2, 1 y 0 opciones para las posiciones de uno a cinco, no tiene sentido decir que hay -1 opciones para la última posición. ¡La fórmula (4.2) da la respuesta correcta, pero el razonamiento usado para llegar a ella necesita ser revisado!

En este párrafo, usamos el siguiente hecho:
Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces

$$a < b \iff a \leqslant b-1$$

¿puedes probarlo?

Si el número de elementos del cual seleccionamos entradas en la lista, n, es menor que la longitud de la lista, k, no es posible ninguna lista sin repetición. Pero como $n < k$, sabemos que $n-k < 0$ y por lo tanto $n-k+1 < 1$. Dado que $n-k+1$ es un número entero, sabemos que $n-k+1 \leq 0$. Por lo tanto, en el producto $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)$, sabemos que al menos uno de los factores es cero. Por lo tanto, toda la expresión se evalúa en cero, ¡que es lo que queríamos!

Por otro lado, si $n \geq k$, nuestro razonamiento tiene sentido (todos los números son positivos), y la fórmula en (4.2) da la respuesta correcta.

Vale la pena mencionar un caso especial: $k = 0$. Nos preguntamos: ¿Cuántas listas de longitud cero se pueden formar de un conjunto de n elementos? La respuesta es una, ya que la lista vacía (una lista sin elementos) es una lista válida.

La notación especial para $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ es $(n)_k$.

Una notación alternativa, aún en uso en algunas calculadoras, es nP_k.

Dado que la expresión $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ aparece con bastante frecuencia, existe una notación especial para ello. La notación es:

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Esta notación se llama *factorial descendente*. Resumimos nuestros resultados sobre listas con o sin repetición de manera concisa usando esta notación.

Teorema 4.1.7

El número de listas de longitud k cuyos elementos se eligen de un conjunto de n elementos posibles es:

$$= \begin{cases} n^k & \text{si se permiten repeticiones} \\ (n)_k & \text{si no se permiten repeticiones.} \end{cases}$$

Observación 4.1.8 ▷ RAZONAR ANTES QUE MEMORIZAR

No recomendamos memorizar este resultado porque es muy fácil confundirse entre los significados de n y k. En lugar de eso, vuelve a derivarlo mentalmente cuando lo necesites. Imagina los k cuadros escritos frente a ti, coloca los números correspondientes en los cuadros y multiplica.

Observación 4.1.9

Estudiamos el conteo de listas de objetos. La herramienta central es el *Principio de Multiplicación*. Se desarrolló una fórmula general para contar listas de longitud k de elementos seleccionados de un conjunto de n elementos, ya sea con o sin repeticiones.

4.2. Factorial y Permutaciones

Anteriormente contamos listas de elementos de varias longitudes en las que se permitía o se prohibía repetir elementos. Un caso especial de este problema es contar el número de listas de longitud n seleccionadas de un conjunto de n objetos en el que no se permite la repetición. En otras palabras, queremos ordenar n objetos en una lista, usando cada objeto exactamente una vez. Por el último teorema de la sección anterior, el número de tales listas es:

$$(n)_n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1) = n(n-1)(n-2)\cdots(1).$$

La cantidad $(n)_n$ ocurre con frecuencia en matemáticas y tiene un nombre y una notación especiales; se llama *factorial de* n y se escribe $n!$. Por ejemplo, $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$.

Dos casos especiales de la función factorial requieren atención especial.

Primero, consideremos $1!$. Esto es el resultado de multiplicar todos los números desde 1 hasta, bueno, 1. La respuesta es 1. En caso de que esto no esté claro, volvamos a la aplicación de conteo de listas. ¿De cuántas formas podemos hacer una lista de longitud 1 en la que solo hay un elemento posible para llenar la primera (¡y única!) posición? Obviamente, solo hay una lista posible. Así que $1! = 1$.

El otro caso especial es $0!$.

Mucho ruido por nada: 0![1]

0! = 1! Las reacciones de los estudiantes ante esta afirmación suelen variar desde "Eso no tiene sentido" hasta "¡Eso está mal". Parece haber un impulso abrumador de evaluar 0! como 0.

Debido a esta confusión, siento que debo ofrecerte una explicación clara y sin ambigüedades de por qué $0! = 1$. Aquí está: ¡Porque lo digo yo!

No, esa no fue una respuesta muy satisfactoria, y me esforzaré por hacerlo mejor, pero el simple hecho es que los matemáticos han definido 0! como 1, y todos estamos de acuerdo en este punto. Así como declaramos (vía nuestra definición) que el número 1 no es primo, también podemos declarar que $0! = 1$. Las matemáticas son una invención humana, y mientras seamos consistentes, podemos establecer las cosas prácticamente como queramos.

Por lo tanto, recae sobre mí explicar por qué es una buena idea que $0! = 1$ y una mala idea que sea 0, $\sqrt{17}$, o cualquier otra cosa.

Para comenzar, repensemos el problema del conteo de listas. El número 0! debería ser la respuesta al siguiente problema:

¿De cuántas maneras podemos hacer una lista de longitud 0 cuyos elementos provienen de un conjunto de 0 elementos en los que no hay repetición?

Es tentador decir que no es posible tal lista, pero esto no es correcto. Hay una lista cuya longitud es cero: la lista vacía (). La lista vacía tiene longitud cero y sus elementos (¡*trivialmente*!) satisfacen las condiciones del problema. Por lo tanto, la respuesta al problema es $0! = 1$.

Aquí hay otra explicación de por qué $0! = 1$. Consideremos la ecuación:

$$n! = n \cdot (n-1)! \tag{4.3}$$

Por ejemplo, $5! = 5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 5 \cdot 4!$. La ecuación (4.3) tiene sentido para $n = 2$ ya que $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1$. La pregunta es: ¿La ecuación (4.3) tiene sentido para $n = 1$? Si queremos que la ecuación (4.3) funcione cuando $n = 1$, necesitamos $1! = 1 \cdot 0!$. Esto nos obliga a elegir $0! = 1$.

Otra explicación de por qué $0! = 1$. Podemos pensar en $n!$ como el resultado de multiplicar n números juntos. Por ejemplo, 5! es el resultado de multiplicar los números en la lista $(5, 4, 3, 2, 1)$. ¿Qué debería significar multiplicar los números en la lista vacía ()? Voy a intentar convencerte de que la respuesta sensata es 1. Comenzamos considerando lo que significa sumar los números en el espacio vacío.

Ana y Bruno van a sumar los números de la lista $(2, 3, 3, 5, 4)$. La respuesta debería ser 17.

Ana y Bruno trabajan en una fábrica de números y se les da una lista de números para sumar. Ambos son bastante hábiles en la suma, por lo que deciden dividir la lista en dos. Ana sumará sus números, Bruno sumará los suyos, y luego sumarán sus resultados para obtener la respuesta final. Este es un procedimiento sensato, y le piden a Matías que divida la lista en dos para ellos.

[1] Juego de palabras (el título original en inglés es *Much Ado About* 0!) que hace referencia a "Much Ado About Nothin" de Shakespeare (en español *Mucho rudio y pocas nueces*), pero adaptada para incluir el concepto de "cero" de manera creativa.

Matías le da a Ana la lista $(2, 3, 3, 5, 4)$ y a Bruno la lista $()$. Ana suma sus números y obtiene 17. ¿Qué debería decir Bruno?

Matías, tal vez porque se siente travieso, decide darle a Ana todos los números y a Bruno ninguno de los números. Ana recibe la lista completa y Bruno recibe la lista vacía. Ana suma sus números como de costumbre, pero ¿qué debe informar Bruno como la suma de los números en su lista? Si Bruno da una respuesta diferente de 0, la respuesta final al problema será incorrecta. Lo único sensato que Bruno puede decir es que su lista -la lista vacía- suma 0.

La suma de los números en la lista vacía es 0.

Ana y Bruno deben multiplicar los números de la lista $(2, 3, 3, 5, 4)$. La respuesta debería ser 360.

Ahora, los tres han recibido un ascenso y están trabajando en la multiplicación. Su procedimiento de multiplicación es el mismo que su procedimiento de suma. Se les pide que multipliquen listas de números. Cuando reciben una lista, le piden a Matías que divida la lista en dos partes. Ana multiplica los números en su lista, y Bruno multiplica los números en la suya. Luego multiplican juntos sus resultados individuales para obtener la respuesta final.

Matías le da a Ana la lista $()$ y a Bruno la lista $(2, 3, 3, 5, 4)$. Bruno multiplica sus números y obtiene 360. ¿Qué debería decir Ana?

Pero, por supuesto, Matías decide divertirse y le da todos los números a Bruno; a Ana le da la lista vacía. Bruno informa el producto de sus números como de costumbre. ¿Qué debería decir Ana? ¿Cuál es el producto de los números en $()$? Si dice 0, entonces cuando su respuesta se multiplica por la respuesta de Bruno, el resultado final será 0, y es probable que sea la respuesta incorrecta. De hecho, la única respuesta sensata que Ana puede dar es 1.

El producto de los números en la lista vacía es 1. Dado que $0!$ "te pide" que multipliques una lista que no contiene números, la respuesta sensata es 1.

La razón final por la que declaramos que $0! = 1$ es que, a medida que avanzamos, otras fórmulas funcionan mejor si tomamos $0! = 1$. Si no definiéramos $0! = 1$, estas otras fórmulas tendrían que tratar el 0 como un caso especial, diferente de cualquier otro número natural. Esta discusión nos permite dar la definición de factorial en forma recursiva:

Definición 4.2.1 ▷ Factorial

El **factorial** de un número entero no negativo n, denotado por $n!$, se define recursivamente como:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Notación de Producto

Aquí hay otra forma de escribir $n!$:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

¿Qué significa esto? El símbolo $\prod$ es la forma mayúscula de la letra griega pi (π), y representa el producto (es decir, multiplicar). Esta notación es similar a usar $\sum$ para la suma.

La letra k se llama variable muda y actúa como un marcador que va desde el valor inferior (escrito debajo del símbolo $\prod$) hasta el valor superior (escrito en la parte superior). La variable k toma los valores 1, 2, ..., n.

A la derecha del símbolo $\prod$ están las cantidades que multiplicamos. En este caso, es simple: multiplicamos los valores de k desde 1 hasta n; es decir, multiplicamos:

$$1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n.$$

La expresión a la derecha del símbolo $\prod$ puede ser más compleja. Por ejemplo, consideremos el producto:

$$\prod_{k=1}^{5} (2k + 3).$$

Esto especifica que multiplicamos los diversos valores de $(2k + 3)$ para $k = 1, 2, 3, 4, 5$. En otras palabras:

$$\prod_{k=1}^{5} (2k + 3) = 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13.$$

La expresión a la derecha del $\prod$ puede ser más simple. Por ejemplo,

$$\prod_{k=1}^{n} 2$$

es una forma elegante de escribir 2^n.

Consideremos la siguiente forma de escribir $0!$:

$$\prod_{k=1}^{0} k.$$

Esto significa que k comienza en 1 y sube hasta 0. Como no hay ningún valor posible de k con $1 \leq k \leq 0$, no hay términos para multiplicar. Por lo tanto, el producto está vacío y evalúa como 1.

Observación 4.2.2

En esta sección, introdujimos el factorial, discutimos por qué $0! = 1$ y presentamos la notación de producto.

4.3. El Principio de Adición

Contar subconjuntos

¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto? Consideremos un ejemplo.

Ejemplo 4.3.1

¿Cuántos subconjuntos tiene $X = \{1, 2, 3\}$?
La forma más sencilla de hacer esto es listar todas las posibilidades. Dado que $|X| = 3$, un subconjunto de X puede tener entre cero y tres elementos. Escribamos todas las posibilidades organizadas de esta manera.

Número de elementos	Subconjuntos	Número
0	$\varnothing$	1
1	$\{1\}, \{2\}, \{3\}$	3
2	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$	3
3	$\{1, 2, 3\}$	1
Total		8

Por lo tanto, hay ocho subconjuntos de $X = \{1, 2, 3\}$.

Hay otra manera de analizar este problema. Cada elemento del conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ o es miembro o no es miembro de un subconjunto. Observa el siguiente diagrama.

Teorema 4.3.2

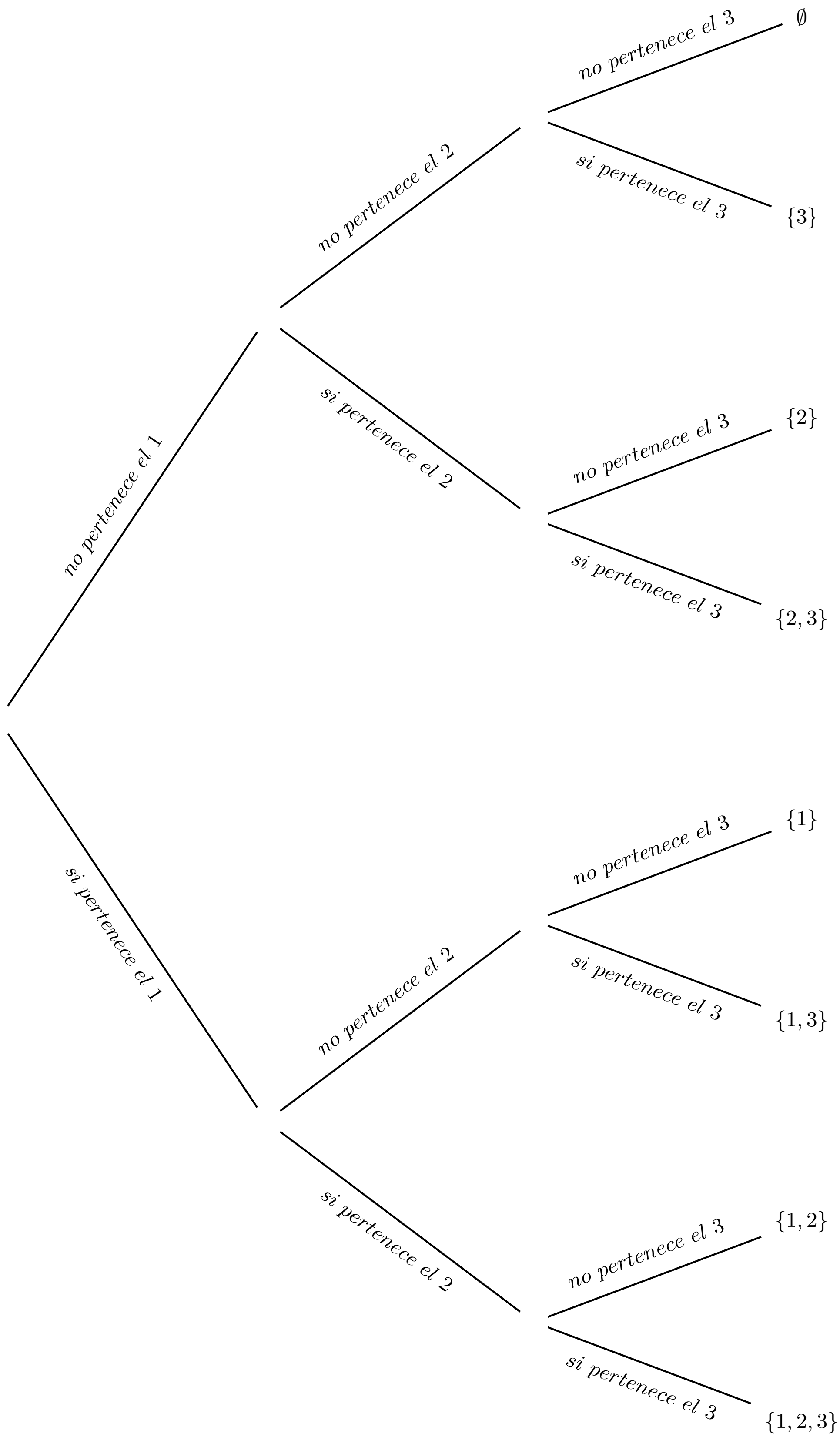
Sea X un conjunto finito. El número de subconjuntos de X es $2^{|X|}$. En otras palabras:

$$|\mathcal{P}(X)| := \left|2^X\right| = 2^{|X|}.$$

Demostración

Sea X un conjunto finito y sea $n = |X|$. Sean los n elementos de X nombrados $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A cada subconjunto A de X podemos asociar una lista de longitud n; cada elemento de la lista es una de las palabras "sí" o "no." El k-ésimo elemento de la lista es "sí" precisamente cuando $x_k \in A$. Esto establece una relación entre listas de longitud n de sí-no y subconjuntos de X. Observar que cada subconjunto de X genera una lista sí-no, y cada lista sí-no determina un subconjunto diferente de X. Por lo tanto, el número de subconjuntos de X es exactamente igual al número de listas de longitud n de sí-no. El número de tales listas es 2^n, por lo tanto el número de subconjuntos de X es 2^n donde $n = |X|$. ■

Este estilo de demostración se llama demostración combinatoria. *Para mostrar que dos problemas de conteo tienen la misma respuesta, establecemos una relación biunívoca entre los dos conjuntos que queremos contar. Si sabemos la respuesta a uno de los problemas de conteo, entonces sabemos la respuesta al otro.*


no pertenece el 1
si pertenece el 1
no pertenece el 2
si pertenece el 2
no pertenece el 2
si pertenece el 2
no pertenece el 3
si pertenece el 3
no pertenece el 3
si pertenece el 3
no pertenece el 3
si pertenece el 3
no pertenece el 3
si pertenece el 3
$\emptyset$
$\{3\}$
$\{2\}$
$\{2,3\}$
$\{1\}$
$\{1,3\}$
$\{1,2\}$
$\{1,2,3\}$

El tamaño de una unión

Supongamos que X y Y son conjuntos finitos. Existe una relación simple entre las cantidades $|X|$, $|Y|$, $|X \cup Y|$, y $|X \cap Y|$.

Proposición 4.3.3

Sean X y Y conjuntos finitos. Entonces:

$$|X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y|.$$

Demostración

Imaginemos que asignamos etiquetas a cada objeto. Colocamos una etiqueta X a los objetos en el conjunto X, y colocamos una etiqueta Y a los objetos en Y.
Pregunta: ¿Cuántas etiquetas hemos asignado?
Por un lado, la respuesta a esta pregunta es $|X| + |Y|$ porque asignamos $|X|$ etiquetas a los objetos en X y $|Y|$ etiquetas a los objetos en Y.
Por otro lado, hemos asignado al menos una etiqueta a los elementos en $X \cup Y$. Entonces, $|X \cup Y|$ cuenta el número de objetos que obtienen al menos una etiqueta. Los elementos en $X \cap Y$ reciben dos etiquetas. Así, $|X \cup Y| + |X \cap Y|$ cuenta todos los elementos que reciben una etiqueta y cuenta dos veces aquellos que reciben dos etiquetas. Esto nos da, nuevamente, el número de etiquetas.
Dado que estas dos cantidades, $|X| + |Y|$ y $|X \cup Y| + |X \cap Y|$, responden a la misma pregunta, deben ser iguales. ■

Esta prueba es un nuevo ejemplo de una *demostración combinatoria*. Típicamente, una prueba combinatoria se usa para demostrar que una identidad (como la de la proposición anterior) es verdadera. Lo hacemos planteando una pregunta y luego argumentando que ambos lados de la igualdad dan una respuesta correcta a la pregunta. Se sigue que, dado que ambos lados son respuestas correctas, los dos lados de la supuesta identidad deben ser iguales. Esta técnica se resume a continuación:

Esquema de una Demostración Combinatoria

Para demostrar una identidad de la forma $LI = LD$:

- Plantear una pregunta del tipo: "¿De cuántas maneras. . . ?"
- Por un lado, argumentar por qué LI es una respuesta correcta a la pregunta.
- Por otro lado, argumentar por qué LD es una respuesta correcta.
- Por lo tanto, $LI = LD$.

Encontrar la pregunta correcta puede ser difícil. Escribir demostraciones combinatorias es similar a jugar el juego de televisión *Jeopardy!*. Se te dan las respuestas (de hecho, dos respuestas) a una pregunta de conteo; tu tarea es encontrar una pregunta cuyas respuestas sean los dos lados de la ecuación que intentas demostrar.

Haremos más pruebas combinatorias. Volviendo a la proposición anterior, una forma útil de reescribir este resultado es la siguiente:

Proposición 4.3.4

Sean X y Y conjuntos finitos. Entonces:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

Esta es una versión especial de un método de conteo llamado *inclusión-exclusión*. Puede interpretarse de la siguiente manera:

Supongamos que queremos contar el número de cosas que tienen una propiedad u otra. Imagina que el conjunto X contiene las cosas que tienen una propiedad y el conjunto Y contiene aquellas que tienen la otra. Entonces, el conjunto $X \cup Y$ contiene las cosas que tienen una propiedad o la otra, y podemos contar esas cosas calculando $|X| + |Y| - |X \cap Y|$. Esto es útil cuando calcular $|X|$, $|Y|$ y $|X \cap Y|$ es más fácil que calcular $|X \cup Y|$.

Desarrollaremos el concepto de inclusión-exclusión más extensamente más adelante.

Ejemplo 4.3.5

¿Cuántos enteros en el rango de 1 a 1000 (inclusive) son divisibles por 2 o por 5? Sean

$$X = \{n \in \mathbb{Z} : 1 \leq n \leq 1000 \text{ y } 2|n\} \quad \text{y} \quad Y = \{n \in \mathbb{Z} : 1 \leq n \leq 1000 \text{ y } 5|n\}.$$

El problema pide $|X \cup Y|$.
No es difícil ver que $|X| = 500$ y $|Y| = 200$. Ahora, $X \cap Y$ son aquellos números (en el rango de 1 a 1000) que son divisibles por 2 y por 5. Un número es divisible por 2 y 5 si y solo si es divisible por 10, por lo que

$$X \cap Y = \{n \in \mathbb{Z} : 1 \leq n \leq 1000 \text{ y } 10|n\}$$

y se sigue que $|X \cap Y| = 100$. Finalmente, tenemos:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 500 + 200 - 100 = 600.$$

Hay 600 enteros en el rango de 1 a 1000 que son divisibles por 2 o por 5.

La última proposición tiene una consecuencia inmediata:

Corolario 4.3.6

Sean X y Y conjuntos finitos. Si $X \cap Y = \varnothing$, entonces

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|.$$

Demostración

Trivial. ■

En otras palabras, si dos conjuntos no tienen elementos en común, entonces el tamaño de su unión es igual a la suma de sus tamaños. Hay un término especial para los conjuntos sin elementos en común.

Definición 4.3.7 ▷ Conjuntos disjuntos - Conjuntos disjuntos dos a dos

Sean X y Y conjuntos. Decimos que X y Y son disjuntos si $X \cap Y = \varnothing$.
Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una colección de conjuntos. Estos conjuntos se llaman disjuntos dos a dos si $X_i \cap X_j = \varnothing$ siempre que $i \neq j$. En otras palabras, son disjuntos dos a dos siempre que no haya dos de ellos que tengan un elemento en común.

Ejemplo 4.3.8

Sean $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{4, 5, 6\},$ y $Z = \{7, 8, 9\}$. Estos conjuntos son disjuntos dos a dos porque $X \cap Y = X \cap Z = Y \cap Z = \varnothing$.
Sin embargo, sea $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{4, 5, 6, 7\},$ y $Z = \{7, 8, 9, 10\}$. Esta colección de conjuntos no es disjunta dos a dos porque $Y \cap Z \neq \varnothing$ (todas las demás intersecciones dos a dos están vacías).

Con las definiciones previas podemos reconfigurar el corolario:

Corolario 4.3.9 ▷ Principio de Adición

Sean X y Y conjuntos finitos. Si X e Y son disjuntos, entonces

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|.$$

Demostración

Trivial. ■

Otra forma de considerar el Principio de Adición es:

Principio de la Suma (Regla de la Suma)

Si una tarea se puede realizar de una de n maneras **o** de una de m maneras, donde ninguna de las n maneras es igual a alguna de las m maneras (es decir, son casos disjuntos), entonces hay $n + m$ maneras de realizar la tarea.

Una generalización del Principio de Adición para más de dos conjuntos es:

Teorema 4.3.10 ▷ Principio de Adición (GENERALIZADO)

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son conjuntos disjuntos dos a dos, entonces

$$|X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|.$$

Una forma elegante de escribir esto es:

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} X_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |X_k|.$$

El gran $\bigcup$ es análogo a los símbolos $\sum$ y $\prod$. Esto significa que, al ir k de 1 a n (los valores inferiores y superiores), toma la unión de la expresión a la derecha (en este caso, X_k). Así que la gran $\bigcup$ no es más que una abreviatura de $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$. Esto está rodeado por barras verticales, por lo que queremos el tamaño del conjunto. A la derecha, vemos un símbolo de suma ordinario que nos dice sumar las cardinalidades de $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Demostración

Su demostración es por inducción. No la daremos en este curso. ■

Otra forma de considerar el Principio de Adición (GENERALIZADO) es:

Principio de la Suma (Generalizado)

Si una tarea se puede realizar de n_1 maneras, o de n_2 maneras, ..., o de n_k maneras, donde cada par de conjuntos de maneras es disjunto (no hay superposición), entonces el número total de formas de realizar la tarea es la suma:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

A continuación damos un ejemplo englobador:

Ejemplo 4.3.11 ▷ Combinando los Principios: Contraseñas

Un sitio web requiere que las contraseñas tengan 1 o 2 caracteres. Los caracteres permitidos son las letras (A, B, C) y los números (1, 2). ¿Cuántas contraseñas distintas se pueden formar?

Solución: Para resolver este problema, debemos notar que una contraseña puede tener longitud 1 **O** longitud 2. Estos son dos casos que no pueden ocurrir al mismo tiempo (son disjuntos), por lo que usaremos el **Principio de Adición** para sumar los resultados de cada caso.

- **Caso 1: Contraseñas de 1 caracter.** La tarea es simplemente elegir un caracter. Tenemos 3 letras + 2 números, lo que nos da un total de 5 opciones.

- **Caso 2: Contraseñas de 2 caracteres.** Para formar una de estas contraseñas, la tarea se compone de dos etapas secuenciales: debemos elegir el primer caracter **Y** luego el segundo. Aquí aplicamos el **Principio de Multiplicación**.

  El conjunto total de caracteres disponibles es de 5 (3 letras y 2 números). Por lo tanto, tenemos 5 opciones para la primera etapa y 5 opciones para la segunda, dándonos un total de $5 \cdot 5 = 25$ contraseñas posibles de 2 caracteres.

Finalmente, como la contraseña puede ser del Caso 1 **O** del Caso 2, por el **Principio de Adición** sumamos los resultados: $5+25 = 30$. Hay 30 contraseñas posibles en total.

El tamaño del producto cartesiano

Proposición 4.3.12

Sea X y Y conjuntos finitos. Entonces $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

Demostración

Ejercicio. ■

Teorema 4.3.13 ▷ Producto cartesiano (GENERALIZADO)

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son conjuntos finitos, entonces

$$|X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n|.$$

Una forma elegante de escribir esto es:

$$\left|\prod_{k=1}^{n} X_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |X_k|.$$

Demostración

Su demostración es por inducción. No la daremos en este curso. ■

La Regla del "O" y el "Y": ¿Cuándo Sumar y Cuándo Multiplicar?

A menudo, el mayor desafío en los problemas de conteo no es el cálculo en sí, sino decidir qué principio aplicar. La clave está en analizar la estructura de la tarea que se quiere contar. A continuación, presentamos una guía simple para tomar esta decisión.

La Regla de la Suma (el "O")

Se utiliza cuando una tarea se puede descomponer en **casos alternativos** que son mutuamente excluyentes (disjuntos). Si un procedimiento se puede realizar de una manera **O** de otra, y no hay superposición entre estas maneras, entonces el número total de formas de realizar la tarea es la **suma** de las posibilidades de cada caso.

La Regla del Producto (el "Y")

Se utiliza cuando una tarea se describe como una secuencia de **etapas o pasos** que se deben realizar uno tras otro. Si para completar la tarea debes realizar el paso 1 **Y** luego el paso 2 **Y** así sucesivamente, entonces el número total de formas de completar la tarea es el **producto** de las posibilidades de cada etapa.

Ejemplo 4.3.14 ▷ Un ejemplo integrador para aclarar la diferencia

Pensemos en una situación que ilustra perfectamente cuándo usar cada regla. Una biblioteca tiene 5 novelas de ciencia ficción distintas y 4 novelas de terror distintas.

- **Situación de Suma:** Si quieres elegir **un libro** para leer, ¿cuántas opciones tienes?

  Aquí, la tarea es elegir una novela de ciencia ficción **O** una novela de terror. Son casos disjuntos y alternativos. Por lo tanto, aplicas el Principio de Adición: $5 + 4 = 9$ opciones.

- **Situación de Multiplicación:** Si quieres elegir **un libro de cada género** para llevarte a casa, ¿cuántas selecciones posibles puedes hacer?

  Aquí, la tarea consiste en dos etapas secuenciales: elegir una novela de ciencia ficción **Y** elegir una novela de terror. Por lo tanto, aplicas el Principio de Multiplicación: $5 \cdot 4 = 20$ selecciones posibles.

La clave es siempre preguntarse: ¿estoy dividiendo el problema en casos alternativos (sumo) o en pasos secuenciales (multiplico)?

4.4. Contando Clases de Equivalencia

En matemáticas discretas, a menudo nos encontramos con problemas de conteo de la forma“¿De cuántas maneras diferentes se puede...?”. La palabra en la que nos queremos enfocar es *diferentes*.

Anagramas de *HOLA*

Ejemplo 4.4.1

¿De cuántas maneras se pueden reorganizar las letras de la palabra HOLA? Una palabra es simplemente una lista de letras. Tenemos una lista de cuatro letras posibles y queremos contar listas utilizando cada una de ellas exactamente una vez. Este es un problema que ya sabemos resolver. La respuesta es $4! = 24$. Aquí están:

$HOLA$	$HOAL$	$HAOL$	$HALO$	$HLAO$	$HLOA$
$OHLA$	$OHAL$	$OAHL$	$OALH$	$OLHA$	$OLAH$
$LHOA$	$LHAO$	$LOHA$	$LOAH$	$LAHO$	$LAOH$
$AHOL$	$AHLO$	$AOHL$	$AOLH$	$ALHO$	$ALOH$

El problema anterior tiene la “ventaja” de que todas las letras en la palabra HOLA son diferentes.

Anagramas de *HELEN*

Por ejemplo, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden reorganizar las letras en la palabra HELEN? La parte difícil de este problema es la E repetida.

Si no hubiera letras repetidas, entonces la respuesta sería $5! = 120$. Imagina por un momento que las dos E son letras diferentes. Escribamos una más grande que la otra: helEn. Escribimos las 120 formas diferentes de reorganizar las letras en helEn y obtenemos la siguiente tabla[2]:

Eehln	Eehnl	Eelhn	Eelnh	Eenhl	Eenlh
Eheln	Ehenl	Ehlen	Ehlne	Ehnel	Ehnle
Elehn	Elenh	Elhen	Elhne	Elneh	Elnhe
Enehl	Enelh	Enhel	Enhle	Enleh	Enlhe
eEhln	eEhnl	eElhn	eElnh	eEnhl	eEnlh
ehEln	ehEnl	ehlEn	ehlnE	ehnEl	ehnlE
elEhn	elEnh	elhEn	elhnE	elnEh	elnhE
enEhl	enElh	enhEl	enhlE	enlEh	enlhE
hEeln	hEenl	hElen	hElne	hEnel	hEnle
heEln	heEnl	helEn	helnE	henEl	henlE
hlEen	hlEne	hleEn	hlenE	hlnEe	hlneE
hnEel	hnEle	hneEl	hnelE	hnlEe	hnleE
lEehn	lEenh	lEhen	lEhne	lEneh	lEnhe
leEhn	leEnh	lehEn	lehnE	lenEh	lenhE
lhEen	lhEne	lheEn	lhenE	lhnEe	lhneE
lnEeh	lnEhe	lneEh	lnehE	lnhEe	lnheE
nEehl	nEelh	nEhel	nEhle	nElhe	nEleh
neEhl	neElh	nehEl	nehlE	nelEh	nelhE
nhEel	nhEle	nheEl	nhelE	nhlEe	nhleE
nlEeh	nlEhe	nleEh	nlehE	nlhEe	nlheE

Ahora identificamos la E grande con la e pequeña. Cuando lo hacemos, pensamos que helEn y hElen son la misma palabra, al igual que lenhE y lEnhe, etc. Para ver esta identificación coloreamos del mismo color los anagramas que no se distinguirían y lo presentamos en la siguiente tabla[2]:

Eehln	Eehnl	Eelhn	Eelnh	Eenhl	Eenlh
Eheln	Ehenl	Ehlen	Ehlne	Ehnel	Ehnle
Elehn	Elenh	Elhen	Elhne	Elneh	Elnhe
Enehl	Enelh	Enhel	Enhle	Enleh	Enlhe
eEhln	eEhnl	eElhn	eElnh	eEnhl	eEnlh
ehEln	ehEnl	ehlEn	ehlnE	ehnEl	ehnlE
elEhn	elEnh	elhEn	elhnE	elnEh	elnhE
enEhl	enElh	enhEl	enhlE	enlEh	enlhE
hEeln	hEenl	hElen	hElne	hEnel	hEnle
heEln	heEnl	helEn	helnE	henEl	henlE
hlEen	hlEne	hleEn	hlenE	hlnEe	hlneE
hnEel	hnEle	hneEl	hnelE	hnlEe	hnleE
lEehn	lEenh	lEhen	lEhne	lEneh	lEnhe
leEhn	leEnh	lehEn	lehnE	lenEh	lenhE
lhEen	lhEne	lheEn	lhenE	lhnEe	lhneE
lnEeh	lnEhe	lneEh	lnehE	lnhEe	lnheE
nEehl	nEelh	nEhel	nEhle	nElhe	nEleh
neEhl	neElh	nehEl	nehlE	nelEh	nelhE
nhEel	nhEle	nheEl	nhelE	nhlEe	nhleE
nlEeh	nlEhe	nleEh	nlehE	nlhEe	nlheE

En este punto, esperamos que esté claro que la respuesta al problema de conteo es 60: hay 120 entradas en la tabla (desde helEn hasta nlheE), y cada reorganización de HELEN aparece exactamente dos veces en la tabla.

Pensemos en esto usando relaciones de equivalencia y particiones.

Relación de Equivalencia en el conjunto de anagramas de helEn

El conjunto X es el conjunto de los 120 anagramas de helEn. Supongamos que x e y son elementos de X (anagramas de helEn). Definamos una relación $\mathcal{R}$ en X de la siguiente forma

$x \mathcal{R} y \iff$ x e y representan el mismo anagrama de helEn cuando identificamos la Egrande con una e pequeña.

Por ejemplo, nEelh $\mathcal{R}$ neElh.

¿Es $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia? Claramente $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva, y por lo tanto $\mathcal{R}$ es, en efecto, una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de $\mathcal{R}$ son todas las diferentes maneras de reorganizar helEn que lucen igual cuando identificamos la E grande con la e pequeña. Por ejemplo,

[HELEN] = {helEn, hElen} y [LEEHN] = {leEhn, lEehn}

ya que helEn y hElen dan HELEN cuando identificamos la E grande con la e pequeña, y de la misma forma, leEhn y lEehn dan LEEHN.

[2] Estas tablas fueron generadas utilizando *inteligencia artificial*, por lo tanto pueden contener errores.

Conclusión

El número de maneras de anagramas las letras en HELEN es exactamente el mismo que el número de clases de equivalencia de $\mathcal{R}$.

Hay 120 maneras diferentes de reorganizar las letras en HELEn (es decir, $|X| = 120$). La relación $\mathcal{R}$ divide al conjunto X en un cierto número de clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia tiene exactamente dos elementos. Por lo tanto, en total, hay $\frac{120}{2} = 60$ diferentes clases de equivalencia. Así que hay 60 maneras diferentes de reorganizar HELEN.

Anagramas de *AMARILLA*

Consideremos otro ejemplo. ¿Cuántos anagramas de la palabra AMARILLA existen? Esta palabra de ocho letras tiene dos L y tres A. Usemos dos estilos de L (digamos, L y L y tres estilos de A (por ejemplo, A, A y a, para que la palabra sea AMARILLa.

Sea X el conjunto de todos los anagramas de AMARILLa. Consideramos que dos anagramas son equivalentes si son las mismas cuando sus letras se restauran a su tamaño normal. Claramente, $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en X, y queremos contar el número de clases de equivalencia.

Nos preguntamos

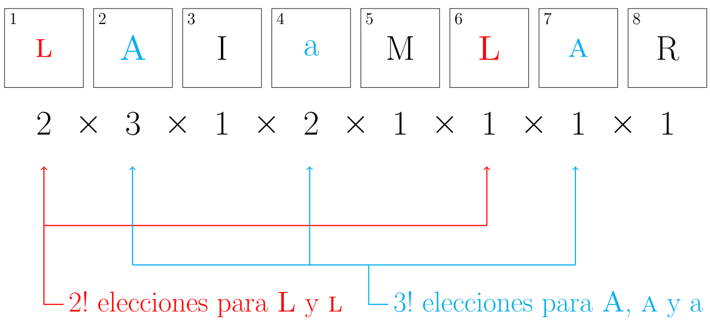
¿qué tan grandes son las clases de equivalencia?

Consideremos la clase de equivalencia [LAIaMLAR]. Estas son todas las reorganizaciones que se convierten en LAIAMLAR cuando sus letras son del mismo estilo. ¿Cuántas hay? Esto es un problema de conteo de listas.

Contamos el número de listas en las cuales las entradas en la lista satisfacen las siguientes restricciones:

- Los elementos 3, 5 y 8 de la lista deben ser I, M y R.
- Los elementos 1 y 6 deben ser uno de cada uno de dos estilos diferentes de L y L.
- Los elementos 2, 4 y 7 deben ser uno de cada uno de tres estilos diferentes de A, A y a.

Ver la figura:



En la imagen anterior hay una posible configuración de las letras L y A.

Ahora contemos de cuántas maneras podemos construir esta lista. Hay dos opciones para la primera posición (podemos usar cualquiera de las L. Hay tres opciones para la segunda posición (podemos usar cualquier A. Solo hay una opción para la posición 3 (debe ser I). Ahora, dadas las elecciones hasta ahora, solo hay dos opciones para la posición 4 (el primer A ya ha sido seleccionado, por lo que solo quedan dos opciones de A en este punto). Para cada una de las posiciones restantes, solo hay una opción (la M y la R están predeterminadas, y solo queda una opción para la A restante y la L restante).

Por lo tanto, el número de reorganizaciones de LAIAMLAR en [LAIaMLAR] es:

$$2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 3! \times 2! = 12.$$

Y ahora un comentario crítico: ¡todas las clases de equivalencia tienen el mismo tamaño! No importa cómo reorganicemos las letras en [LAIaMLAR], el análisis que acabamos de hacer permanece igual. Independientemente de dónde caigan las A, siempre habrá exactamente 3! formas de colocarlas, e independientemente de dónde estén las L, hay 2! formas de seleccionar sus estilos. Y solo hay una opción para cada uno de los estilos de I, M y R. Así que todas las clases de equivalencia tienen tamaño doce.

Por lo tanto, el número de reorganizaciones de LAIAMLAR es:

$$\frac{8!}{3!2!} = \frac{40320}{12} = 3360.$$

Vale la pena resumir la idea central de esta técnica de conteo en el siguiente teorema:

Teorema 4.4.2 ▷ Contando Clases de Equivalencia

Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en un conjunto finito X. Si todas las clases de equivalencia de $\mathcal{R}$ tienen el mismo tamaño m, entonces el número de clases de equivalencia es

$$\frac{|X|}{m}.$$

Demostración

No veremos la demostración en este curso. ■

Hipótesis central del teorema anterior

Las clases de equivalencia deben tener todas el mismo tamaño. Esto no siempre ocurre.

Ejemplo 4.4.3

Sea $X = 2^{\{1,2,3,4\}}$, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4\}$. Sea $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia basada en “tiene el mismo tamaño que”. Esta relación divide X en cinco partes (subconjuntos de tamaño 0 a 4). Los tamaños de estas clases de equivalencia no son todos iguales. Por ejemplo, $\{\emptyset\}$ contiene solo el conjunto vacío, por lo que esta clase tiene tamaño 1. Sin embargo, $\{[1]\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$, por lo que esta clase contiene cuatro elementos de X. Aquí tienes una tabla completa:

Clase de equivalencia	Tamaño de la clase
$[\emptyset]$	1
$[\{1\}]$	4
$[\{1, 2\}]$	6
$[\{1, 2, 3\}]$	4
$[\{1, 2, 3, 4\}]$	1

4.5. Coeficiente Binomial

La notación $\binom{n}{k}$ se pronuncia "n tomados de a k". Otra notación, aún en uso en algunas calculadoras, es nC_k. Ocasionalmente, la gente escribe $C(n, k)$. Una manera alternativa de expresar $\binom{n}{k}$ es como el número de "combinaciones" de n elementos tomados de k en k. La palabra combinatoria (un término que se refiere a los problemas de conteo en matemáticas discretas) proviene de "combinaciones". No es de mi agrado el término "combinaciones" y creo que es más claro decir que $\binom{n}{k}$ representa el número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos.

En estas notas el consideramos al 0 un número natural, es decir, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$.

Anteriormente contamos el número de clases de equivalencia de la relación "tiene el mismo tamaño" en el conjunto de subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4\}$. Encontramos cinco clases de equivalencia (correspondientes a los cinco tamaños de 0 a 4), y estas clases de equivalencia tienen varios tamaños: 1, 4, 6, 4, y 1. Estos números pueden resultarte familiares:

$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4.$$

Estos números son los coeficientes de $(x+y)^4$ una vez expandido. También puedes reconocer estos números como la cuarta fila del triángulo de Pascal (iremos a él más adelante). En esta sección, exploramos estos números en detalle.
El problema central que consideramos en esta sección es el siguiente: **¿Cuántos subconjuntos de tamaño k tiene un conjunto de n elementos?**
Hay una notación especial para la respuesta a esta pregunta: $\binom{n}{k}$.

Definición 4.5.1 ▷ Coeficiente Binomial

Sean $n, k \in \mathbb{N}$. El símbolo $\binom{n}{k}$ denota el número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos.

Llamamos al número $\binom{n}{k}$ un coeficiente binomial. El motivo de esta nomenclatura es que los números $\binom{n}{k}$ son los coeficientes del binomio $(x+y)^n$. Esto se explicará con mayor detalle a continuación.

Ejemplo 4.5.2

Evaluar $\binom{5}{0}$.

Solución Necesitamos contar el número de subconjuntos de un conjunto de cinco elementos que tienen cero elementos. El único subconjunto posible es $\emptyset$, por lo tanto, la respuesta es $\binom{5}{0} = 1$.

Claramente, no hay nada especial sobre el número 5 en este ejemplo. Podemos enunicar la siguiente proposición:

Proposición 4.5.3 ▷ Coeficiente Binomial

El número de subconjuntos de cero elementos de cualquier conjunto siempre es 1. Así que tenemos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{0} = 1.$$

Ejemplo 4.5.4

Evaluar $\binom{5}{1}$.

Solución El ejemplo nos pregunta por el número de subconjuntos unitarios de un conjunto de cinco elementos. Por ejemplo, consideremos el conjunto de cinco elementos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Los subconjuntos de un solo elemento son $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$, y $\{5\}$, por lo tanto $\binom{5}{1} = 5$.

En forma general

Proposición 4.5.5 ▷ Coeficiente Binomial

El número de subconjuntos de un solo elemento de un conjunto de n elementos es exactamente n. Así que tenemos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{1} = n.$$

Ejemplo 4.5.6 ▷ Evaluar $\binom{4}{2}$ con una estrategia

¿Cuántos subconjuntos de 2 elementos tiene el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$? En lugar de simplemente listarlos, vamos a contarlos de una manera organizada. La estrategia consiste en clasificar los subconjuntos según cuál es su **elemento más pequeño**.

- **Subconjuntos cuyo menor elemento es 1:** Para formar un par, necesitamos otro elemento mayor que 1. Las opciones son 2, 3 o 4.

  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}$. **Total: 3 subconjuntos.**

- **Subconjuntos cuyo menor elemento es 2:** El otro elemento debe ser mayor que 2. Las opciones son 3 o 4.

  $\{2, 3\}, \{2, 4\}$. **Total: 2 subconjuntos.**

- **Subconjuntos cuyo menor elemento es 3:** El otro elemento debe ser mayor que 3. La única opción es 4.

  $\{3, 4\}$. **Total: 1 subconjunto.**

Con esta estrategia, hemos contado todos los subconjuntos sin repetir ninguno. El total es

$$\binom{4}{2} = 3 + 2 + 1 = 6.$$

Esta estrategia de conteo parece prometedora.
Verifiquemos si el patrón se mantiene para $\binom{5}{2}$.

Ejemplo 4.5.7

Evaluar $\binom{5}{2}$.

Solución El símbolo $\binom{5}{2}$ denota el número de subconjuntos de dos elementos de un conjunto de cinco elementos, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Aplicando la misma estrategia de clasificar por el menor elemento:

- Subconjuntos con menor elemento 1: hay **4**. ({1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5})
- Subconjuntos con menor elemento 2: hay **3**. ({2,3}, {2,4}, {2,5})
- Subconjuntos con menor elemento 3: hay **2**. ({3,4}, {3,5})
- Subconjuntos con menor elemento 4: hay **1**. ({4,5})

Si organizamos estos subconjuntos en una tabla, vemos claramente el patrón que surge de nuestra estrategia:

$$\begin{array}{cccc} \{1,2\} & \{1,3\} & \{1,4\} & \{1,5\} \\ & \{2,3\} & \{2,4\} & \{2,5\} \\ & & \{3,4\} & \{3,5\} \\ & & & \{4,5\} \end{array}$$

Por lo tanto, hay 10 subconjuntos de dos elementos, y hemos confirmado que

$$\binom{5}{2} = 4 + 3 + 2 + 1 = 10.$$

El patrón que hemos descubierto en estos ejemplos es, de hecho, una regla general.

Proposición 4.5.8

Sea n un entero con $n \geq 2$. Entonces

$$\binom{n}{2} = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Demostración

Queremos contar el número de subconjuntos de 2 elementos de un conjunto de n elementos, que por definición es $\binom{n}{2}$. Usemos el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
Contaremos estos subconjuntos de forma organizada, clasificándolos según su **elemento menor**. Cualquier subconjunto de dos elementos $\{a, b\}$ con $a < b$ tendrá un único elemento menor.

1. **Subconjuntos con menor elemento 1:** Son de la forma $\{1, x\}$, donde x debe ser mayor que 1. Podemos elegir x del conjunto $\{2, 3, \ldots, n\}$. Hay $(n-1)$ de estos subconjuntos.

2. **Subconjuntos con menor elemento 2:** Son de la forma $\{2, x\}$, donde x debe ser mayor que 2. Podemos elegir x del conjunto $\{3, 4, \ldots, n\}$. Hay $(n-2)$ de estos subconjuntos.

3. **Subconjuntos con menor elemento 3:** Son de la forma $\{3, x\}$, donde x debe ser mayor que 3. Podemos elegir x del conjunto $\{4, 5 \ldots, n\}$. Hay $(n-3)$ de estos subconjuntos.

4. Continuamos de esta forma...

5. **Penúltimo caso:** El "casi" mayor "menor elemento" posible es $n-2$. El subconjunto es de la forma $\{n-2, x\}$ con $x > n-2$. Las únicas opciones son $x = n-1$ y $x = n$, formando el subconjunto $\{n-2, n-1\}$ y $\{n-2, n\}$. Hay **2** de estos subconjuntos (que corresponde a $n-(n-2) = 2$).

6. **Último caso:** El mayor "menor elemento" posible es $n-1$. El subconjunto es de la forma $\{n-1, x\}$ con $x > n-1$. La única opción es $x = n$, formando el subconjunto $\{n-1, n\}$. Hay **1** de estos subconjuntos (que corresponde a $n-(n-1) = 1$).

Como esta clasificación cubre todos los subconjuntos de 2 elementos y las clases son disjuntas (un subconjunto no puede tener dos elementos menores diferentes), el número total es la suma de las cantidades de cada clase:

$$\binom{n}{2} = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Esta suma es equivalente a $\sum_{k=1}^{n-1} k$, lo que completa la demostración. ■

Una Analogía para Entender $\binom{n}{2}$: El Problema del Saludo

En lugar de pensar en subconjuntos abstractos, podemos resolver un problema equivalente del mundo real que es mucho más intuitivo:

¿Si hay n personas en una habitación, cuántos apretones de manos únicos pueden darse?

Cada apretón de manos involucra a un par de personas, por lo que el número total de saludos es exactamente $\binom{n}{2}$. Podemos contarlos de forma organizada para no repetir:

- La **Persona 1** saluda a las otras $(n-1)$ personas.
- La **Persona 2** ya saludó a la Persona 1, así que solo necesita saludar a las $(n-2)$ personas restantes.
- La **Persona 3** tiene $(n-3)$ nuevos saludos que hacer.
- ...y así continuamos, hasta que la penúltima persona hace **1** último saludo con la última persona.

El número total de apretones de manos es la suma de los saludos nuevos en cada paso: $(n-1) + (n-2) + \cdots + 1$. Esta simple historia nos muestra por qué $\binom{n}{2}$ es igual a la suma de los primeros $n-1$ enteros.

Hasta ahora hemos evaluado $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, y $\binom{5}{2}$. Continuemos esta exploración.

Ejemplo 4.5.9

Evaluar $\binom{5}{3}$.

Solución Simplemente listamos los subconjuntos de tres elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$.

Hay diez de estos subconjuntos, así que $\binom{5}{3} = 10$.

Relación *biunívoca* hace referencia a una función biyectiva subyacente.

Observa que $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$. Esta igualdad no es una coincidencia. Veamos por qué estos números son iguales. La idea es encontrar una forma natural de emparejar los subconjuntos de dos elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ con los subconjuntos de tres elementos. Queremos una relación biunívoca entre estos dos tipos de conjuntos.
La idea es tomar el complemento de un subconjunto de dos elementos para formar un subconjunto de tres elementos, o viceversa.

A	$\overline{A}$	A	$\overline{A}$
$\{1,2\}$	$\{3,4,5\}$	$\{2,4\}$	$\{1,3,5\}$
$\{1,3\}$	$\{2,4,5\}$	$\{2,5\}$	$\{1,3,4\}$
$\{1,4\}$	$\{2,3,5\}$	$\{3,4\}$	$\{1,2,5\}$
$\{1,5\}$	$\{2,3,4\}$	$\{3,5\}$	$\{1,2,4\}$
$\{2,3\}$	$\{1,4,5\}$	$\{4,5\}$	$\{1,2,3\}$

Cada subconjunto de dos elementos A se empareja con $\{1, 2, 3, 4, 5\}\backslash A$ (lo que denotamos como $\overline{A}$, ya que $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ es el "universo" que estamos considerando en este momento).

Este emparejamiento, $A \longleftrightarrow \overline{A}$, es una relación biunívoca entre los subconjuntos de dos elementos y los subconjuntos de tres elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si A_1 y A_2 son dos subconjuntos diferentes de dos elementos, entonces $\overline{A_1}$ y $\overline{A_2}$ son dos subconjuntos diferentes de tres elementos. Cada subconjunto de dos elementos se empareja exactamente con un subconjunto de tres elementos, y no quedan conjuntos sin emparejar. Esto explica completamente por qué $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ y nos brinda una vía para la generalización.

Podríamos suponer que $\binom{n}{2} = \binom{n}{3}$, pero esto no es correcto. Apliquemos nuestro análisis del complemento para ver qué aprendemos. Sea A un subconjunto de dos elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. En este contexto, $\overline{A}$ significa $\{1, 2, \ldots, n\}\backslash A$. El emparejamiento $A \longleftrightarrow \overline{A}$ no empareja subconjuntos de dos elementos con subconjuntos de tres elementos. El complemento de un subconjunto de dos elementos sería un subconjunto de $(n-2)$ elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. ¡Eureka! Ahora tenemos el resultado correcto: $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$.

Podemos llevar este análisis más lejos. En lugar de formar el complemento de los subconjuntos de dos elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, podemos formar los complementos de subconjuntos de otro tamaño. ¿Cuáles son los complementos de los subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$? La siguiente proposición responde nuestra pregunta:

Proposición 4.5.10

Sea $n, k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$. Entonces

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Demostración

Los complementos de los subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ son precisamente los complementos de subconjuntos de $(n-k)$ elementos. Además, la relación $A \longleftrightarrow \overline{A}$ da un relación biunívoca entre los subconjuntos de k elementos y los subconjuntos de $(n-k)$ elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Esto implica que el número de subconjuntos de k elementos y subconjuntos de $(n-k)$ elementos de un conjunto de n elementos debe ser el mismo. ■

Una Analogía para Entender $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$: ¿Quién Recibe Chocolate?

A veces, un problema de conteo se puede ver desde dos perspectivas opuestas. Esta dualidad, una optimista y otra pesimista, es la clave para entender esta importante identidad.
Imaginemos una clase con n niños, y tenemos k barras de chocolate idénticas para repartir.

- **La Perspectiva Optimista (Elegir a los ganadores):** La pregunta es, ¿de cuántas formas podemos **elegir a los k niños afortunados** que recibirán un chocolate?
  Por definición, esto es un problema de selección de un subconjunto de k elementos de un conjunto de n, por lo que la respuesta es $\binom{n}{k}$.
- **La Perspectiva Pesimista (Elegir a los no ganadores):** Alternativamente, podríamos preguntar, ¿de cuántas formas podemos **elegir a los $n-k$ niños que NO recibirán** chocolate?
  Esta es una selección de un subconjunto de $n-k$ elementos de un conjunto de n, y la respuesta es $\binom{n}{n-k}$.

Elegir quién recibe chocolate define, inevitablemente, quién no lo recibe. Ambos enfoques están contando exactamente el mismo resultado final, solo que desde ángulos opuestos. Como ambos métodos deben dar la misma respuesta, concluimos que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Corolario 4.5.11

Sea n un entero positivo. Entonces

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{y} \quad \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n.$$

Hasta ahora hemos evaluado $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, y $\binom{5}{3}$. Continuemos. Podemos usar la proposición anterior para evaluar $\binom{5}{4}$; la Proposición 3.5 dice que

$$\binom{5}{4} = \binom{5}{5-4} = \binom{5}{1}$$

y ya sabemos que $\binom{5}{1} = 5$. Entonces $\binom{5}{4} = 5$.

El siguiente es $\binom{5}{5}$. Podemos usar la Proposición 3.5 y razonar que $\binom{5}{5} = \binom{5}{5-5} = \binom{5}{0} = 1$, o podemos darnos cuenta de que solo puede haber un subconjunto de cinco elementos de un conjunto de cinco elementos—¡a saber, ¡el conjunto completo!

El siguiente es $\binom{5}{6}$. Podemos intentar usar nuevamente la Proposición 3.5, pero nos encontramos con un problema. Escribimos

$$\binom{5}{6} = \binom{5}{5-6} = \binom{5}{-1}$$

pero no sabemos qué es $\binom{5}{-1}$. En realidad, la situación es peor: $\binom{5}{-1}$ no tiene sentido. No tiene sentido preguntar por el número de subconjuntos de un conjunto de cinco elementos que tienen -1 elementos; ¡no tiene sentido considerar conjuntos con un número negativo de elementos! (Por eso en la hipótesis de la Proposición 3.5 $0 \leq k \leq n$ en la declaración.)

Sin embargo, un conjunto *puede* tener seis elementos, por lo que $\binom{5}{6}$ no es absurdo; simplemente es cero. Un conjunto de cinco elementos no puede tener subconjuntos de seis elementos, por lo que $\binom{5}{6} = 0$. De manera similar, $\binom{5}{7} = \binom{5}{8} = \cdots = 0$.

Así tenemos que

Si n es un entero positivo y $k > n$, entonces

$$\binom{n}{k} = 0.$$

Resumiendo lo que sabemos hasta ahora:

- Hemos evaluado $\binom{5}{k}$ para todos los números naturales k. Los valores son $1, 5, 10, 10, 5, 1, 0, 0, \ldots$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$, respectivamente.
- Tenemos $\binom{n}{0} = 1$ y $\binom{n}{n} = 1$.
- Tenemos $\binom{n}{1} = n$.
- Tenemos $\binom{n}{2} = 1 + 2 + \ldots + (n - 1)$.
- Tenemos $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Si $k > n$, entonces $\binom{n}{k} = 0$.

Calculando $\binom{n}{k}$

Hasta ahora hemos calculado varios valores de $\binom{n}{k}$, pero nuestro trabajo ha sido *ad hoc*. No tenemos un método general para obtener estos valores. Encontramos que los valores no nulos de $\binom{5}{k}$ son:

$$1, 5, 10, 10, 5, 1.$$

Si expandimos $(x + y)^5$, obtenemos:

$$(x + y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5,$$

lo que sugiere una forma de calcular $\binom{n}{k}$: Expande $(x + y)^n$ y $\binom{n}{k}$ es el coeficiente de $x^{n-k}y^k$. ¡Esto es maravilloso!

Teorema 4.5.12 ▷ Teorema del Binomio

Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k.$$

Este resultado explica por qué $\binom{n}{k}$ se llama coeficiente binomial. Los números $\binom{n}{k}$ son los coeficientes que aparecen en la expansión de $(x + y)^n$.

Demostración

No veremos la demostración de este resultado. ■

La Idea Detrás del Teorema del Binomio: Contando Decisiones

La demostración formal del Teorema del Binomio puede ser abstracta, pero la idea central es sorprendentemente simple y se basa en contar decisiones.
Consideremos la expansión de $(x+y)^n$, que es simplemente el producto de n factores idénticos:

$$\underbrace{(x+y)}_{\text{Factor 1}}\underbrace{(x+y)}_{\text{Factor 2}}\cdots\underbrace{(x+y)}_{\text{Factor n}}.$$

Para formar un término en la expansión final (antes de agrupar), debemos tomar una decisión en cada factor: **elegimos la x o la y**.
Ahora, preguntémonos: ¿Cómo obtenemos un término específico como $x^{n-k}y^k$? La respuesta es que debemos haber elegido la y **de exactamente k de los n factores**, y por lo tanto, la x de los $(n-k)$ factores restantes.
El problema se ha transformado en uno de conteo que ya conocemos:

¿De cuántas maneras podemos elegir las k posiciones (o factores) de donde tomaremos la y?

Esta es, por definición, la cantidad de formas de elegir un subconjunto de k elementos de un conjunto de n elementos. La respuesta es $\binom{n}{k}$. Por eso, el término $x^{n-k}y^k$ aparece $\binom{n}{k}$ veces en la expansión, convirtiéndose en su coeficiente.

Ejemplo 4.5.13

Para la expansión de $(x+y)^5$, encontremos el coeficiente del término x^3y^2.

Solución El coeficiente de x^3y^2 es $\binom{5}{2}$, ya que para formar este término necesitamos elegir las 2 "posiciones" (de los 5 factores $(x+y)$) de donde tomaremos la letra y. Las 3 posiciones restantes serán automáticamente para la x.
Cada subconjunto de dos elementos de $\{1,2,3,4,5\}$ corresponde a una única forma de hacerlo, generando un término x^3y^2:

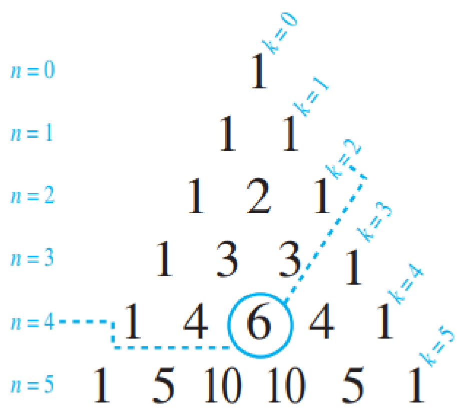
Subconjunto		Término
$\{1,2\}$	$\to$	$\mathbf{yy}xxx$
$\{1,3\}$	$\to$	$\mathbf{y}x\mathbf{y}xx$
$\{1,4\}$	$\to$	$\mathbf{y}xx\mathbf{y}x$
$\{1,5\}$	$\to$	$\mathbf{y}xxx\mathbf{y}$
$\{2,3\}$	$\to$	$x\mathbf{yy}xx$
$\{2,4\}$	$\to$	$x\mathbf{y}x\mathbf{y}x$
$\{2,5\}$	$\to$	$x\mathbf{y}xx\mathbf{y}$
$\{3,4\}$	$\to$	$xx\mathbf{yy}x$
$\{3,5\}$	$\to$	$xx\mathbf{y}x\mathbf{y}$
$\{4,5\}$	$\to$	$xxx\mathbf{yy}$

Hay $\binom{5}{2}=10$ maneras de elegir las posiciones para las y. Al agrupar estos 10 términos idénticos x^3y^2, obtenemos el término $10x^3y^2$ en la expansión final.

Ahora tenemos un procedimiento para calcular, digamos, $\binom{20}{10}$. Todo lo que tenemos que hacer es expandir $(x+y)^{20}$ y encontrar el coeficiente de $x^{10}y^{10}$. Para hacerlo, solo escribimos todos los términos de $xxx\ldots xx$ a $yyy\ldots yy$ y agrupamos términos semejantes. Hay solo $2^{20}=1,048,576$ términos. ¡Parece divertido! 🤪

¿Nos llevaría mucho tiempo no? Exacto, tienes razón, sería una tarea titánica. Esta no es una buena manera de encontrar $\binom{20}{10}$. No es mejor que escribir todos los subconjuntos posibles de diez elementos de $\{1, 2, \ldots, 20\}$. ¿Cuántos? No lo sabemos. ¡Eso es lo que estamos intentando descubrir! Necesitamos otro método.

Triángulo de Pascal



Recuerda de tus clase de secundaria (¿por qué no te lo enseñaron en la secundaria?) que los coeficientes de $(x + y)^n$ forman la fila n-ésima del triángulo de Pascal. La figura muestra el triángulo de Pascal. La entrada en la fila $n = 4$ y la diagonal $k = 2$ es $\binom{4}{2} = 6$, como se muestra (contamos las filas y diagonales desde el 0).

¿Cómo se genera el triángulo de Pascal? Aquí hay una descripción completa:

- La **fila cero** del triángulo de Pascal contiene solo el número 1.
- Cada **fila sucesiva** contiene un número más que su predecesora.
- El **primer y último número** en cada fila es 1.
- Un **número intermedio** en cualquier fila se forma sumando los dos números que se encuentran justo a su izquierda y a su derecha en la fila anterior. Por ejemplo, el primer 10 en la fila $n = 5$ (y diagonal $k = 2$) se forma sumando el 4 de su esquina superior izquierda (en $n = 4, k = 1$) y el 6 de su esquina superior derecha (en $n = 4, k = 2$, como se muestra circulado en la figura).

¿Cómo sabemos que el triángulo de Pascal genera los coeficientes binomiales? ¿Cómo sabemos que la entrada en la fila n y columna k es $\binom{n}{k}$?

Para ver por qué esto funciona, necesitamos demostrar que los coeficientes binomiales siguen las mismas cuatro reglas que acabamos de enumerar.

En otras palabras, formamos un triángulo que contiene $\binom{0}{0}$ en la fila cero; $\binom{1}{0}$, $\binom{1}{1}$ en la primera fila; $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{2}$ en la segunda fila, y así sucesivamente. Luego necesitamos probar que este triángulo de coeficientes binomiales se genera exactamente con las mismas cuatro reglas que el triángulo de Pascal. Esto es tres cuartas partes fácil y una cuarta parte complicada. Las tres primeras son sencillas:

- *La fila cero del triángulo de coeficientes binomiales contiene el único número 1.*
  Esto es fácil: La fila cero del triángulo de coeficientes binomiales es $\binom{0}{0} = 1$.
- *Cada fila sucesiva contiene un número más que su predecesora.*
  Esto es fácil: La fila n del triángulo de coeficientes binomiales contiene exactamente $n + 1$ números: $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\ldots$, $\binom{n}{n}$.

- *El primer y último número en cada fila es 1.*
  Esto es fácil: El primer y último número en la fila n del triángulo de coeficientes binomiales son $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

La última es más compleja:

- *El número intermedio en cualquier fila se forma sumando los dos números a su izquierda y derecha en la fila anterior.*

$$\begin{tikzcd} \binom{n-1}{k-1} \arrow[dr] & + & \binom{n-1}{k} \arrow[dl] \\ & \binom{n}{k} & \end{tikzcd}$$

Esto es complicado: ¡Lo primero que necesitamos es pensar esta afirmación en términos de coeficientes binomiales! Necesitamos un *número intermedio en cualquier fila*. Esto significa que no necesitamos preocuparnos por $\binom{n}{0}$ o $\binom{n}{n}$; ya sabemos que esos son 1. Un número intermedio en la fila n sería $\binom{n}{k}$ con $0 < k < n$.
¿Qué números están justo encima de $\binom{n}{k}$? Para encontrar el vecino superior izquierdo, subimos a la fila $n-1$ y a la diagonal $k-1$. Entonces, el número a la izquierda superior es $\binom{n-1}{k-1}$. Para encontrar el vecino superior derecho, subimos a la fila $n-1$ pero permanecemos en la diagonal k. Así que el número a la derecha superior es $\binom{n-1}{k}$.

Necesitamos probar lo siguiente:

Teorema 4.5.14 ▷ Identidad de Pascal

Sean n y k enteros con $0 < k < n$. Entonces

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

¿Cómo podemos probar esto? No tenemos una fórmula para $\binom{n}{k}$. La idea es usar una demostraciój combinatoria. Necesitamos formular una pregunta y luego demostrar que los lados izquierdo y derecho de la ecuación en el Teorema 3.17 dan respuestas correctas a esta pregunta. ¿Qué pregunta tiene estas respuestas? Hay una pregunta clara a la que el lado izquierdo da una respuesta. La pregunta es: ¿Cuántos subconjuntos de k elementos tiene un conjunto de n elementos?

Demostración

Para probar esta identidad, usaremos un **argumento combinatorio**. La estrategia consiste en contar el número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos de dos maneras distintas.
Sea $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ nuestro conjunto de n elementos. La pregunta que queremos responder es: *¿Cuántos subconjuntos de tamaño k se pueden formar a partir de S?*

Respuesta 1: Conteo Directo
Por la definición del coeficiente binomial, el número de subconjuntos de k elementos que se pueden elegir de un conjunto de n elementos es, precisamente, $\binom{n}{k}$.

Respuesta 2: Conteo por Casos (usando un elemento distinguido)
Ahora, contemos los mismos subconjuntos dividiéndolos en dos categorías, basándonos en si incluyen o no un elemento específico. Elijamos el elemento n como nuestro "elemento distinguido". Todo subconjunto de tamaño k de S pertenecerá a una y solo una de las siguientes dos categorías:

- **Caso 1: El subconjunto contiene al elemento n.**
  Si un subconjunto debe contener a n, entonces ya tenemos uno de los k elementos necesarios. La tarea restante es elegir los otros $k-1$ elementos. Estos deben ser seleccionados del conjunto restante $S \setminus \{n\} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, que tiene $n-1$ elementos. El número de maneras de hacer esto es $\binom{n-1}{k-1}$.

- **Caso 2: El subconjunto NO contiene al elemento n.**
  Si un subconjunto no debe contener a n, entonces debemos elegir los k elementos necesarios del conjunto $S \setminus \{n\} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$. El número de maneras de hacer esto es $\binom{n-1}{k}$.

Dado que estas dos categorías son disjuntas y cubren todas las posibilidades, el número total de subconjuntos es la suma de las cantidades de cada caso: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Conclusión
Ambas respuestas cuentan la misma cantidad, por lo que deben ser iguales. Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

■

Una Analogía para la Identidad de Pascal: El Comité de Ana

La prueba formal es elegante, pero esta analogía puede hacer que la idea sea mucho más intuitiva. Imagina que queremos formar un comité de k personas a partir de un grupo de n. Para simplificar el conteo, nos enfocamos en una persona específica, digamos, "Ana".
Todo comité posible o bien incluye a Ana, o bien no la incluye.

- **Opción 1: El comité SÍ incluye a Ana.**
  Si Ana debe estar, ya tenemos a 1 de los k miembros. Solo necesitamos elegir a los $k-1$ restantes del grupo de $n-1$ personas que no son Ana. Hay $\binom{n-1}{k-1}$ formas de hacerlo.

- **Opción 2: El comité NO incluye a Ana.**
  Si Ana no puede estar, debemos elegir a los k miembros del comité del grupo de $n-1$ personas restantes. Hay $\binom{n-1}{k}$ formas de hacerlo.

El número total de comités es la suma de estas dos opciones. Esta simple historia ilustra por qué $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Ejemplo 4.5.15

Demostremos que $\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2}$ listando todos los subconjuntos de dos elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Hay $\binom{5}{1} = 5$ subconjuntos de dos elementos que incluyen al "diferente" 6:

$$\{1, 6\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}.$$

y hay $\binom{5}{2} = 10$ subconjuntos de dos elementos que no incluyen a 6:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}.$$

Ahora queremos calcular $\binom{20}{10}$. La técnica que podríamos seguir es generar el triángulo de Pascal hasta la fila 20 y buscar la entrada en la diagonal 10. ¿Cuánto trabajo implicaría esto? La fila 20 del triángulo de Pascal contiene 21 números. La fila anterior contiene 20, y la anterior a esa tiene 19. Hay solo $1 + 2 + 3 + \cdots + 21 = 231$ números. La mayoría de ellos se obtienen por simple adición y necesitamos hacer unas 200 operaciones de suma adicionales.

(Podemos ser más eficientes). Si implementaras este procedimiento en una computadora, no necesitarías guardar los 210 números. Solo tendrías que guardar unos 40. Una vez que has calculado una fila del triángulo de Pascal, puedes descartar la fila anterior. Por lo tanto, en cualquier momento, solo mantendrías la fila anterior y la fila actual. Y si eres inteligente, puedes ahorrar aún más memoria.

En cualquier caso, si sigues este procedimiento, encontrarás que $\binom{20}{10} = 184,756$.

Una fórmula para $\binom{n}{k}$

La técnica de generar el triángulo de Pascal para calcular los coeficientes binomiales es una buena opción. Podemos calcular $\binom{20}{10}$ realizando aproximadamente 200 sumas en lugar de revisar millones de términos en un polinomio.

Hay algo un poco insatisfactorio acerca de esta respuesta. ¡Nos gustan las fórmulas! Queremos una buena forma de expresar $\binom{n}{k}$ en una expresión simple usando operaciones familiares. Tenemos una expresión para $\binom{n}{2}$: la Proposición 3.14 dice

$$\binom{n}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1).$$

Esto no está mal, pero sugiere que aún necesitamos hacer muchas sumas para obtener la respuesta. Sin embargo, hay un truco agradable para simplificar esta suma. Escribe los enteros 1 hasta $n - 1$ de adelante hacia atrás, y luego suma:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 & \binom{n}{2} = & 1 & + & 2 & + \cdots + & (n-2) & + & (n-1) \\
+ & \binom{n}{2} = & (n-1) & + & (n-2) & + \cdots + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & 2\binom{n}{2} = & n & + & n & + \cdots + & n & + & n
\end{array}$$

y por lo tanto

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Esta ecuación es un caso especial de un resultado más general. Aquí hay otra forma de contar subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos.

Comencemos contando todas las listas de k elementos, sin repetición, cuyos elementos se seleccionan de un conjunto de n elementos. Este es un problema que ya hemos resuelto (¡listas!) El número de tales listas es $(n)_k$.

Todas las entradas en una sola fila de esta tabla expresan el mismo subconjunto de tres elementos de seis maneras diferentes. Dado que esta tabla tiene 60 entradas, el número de subconjuntos de tres elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ es $\frac{60}{6} = 10$.

Por ejemplo, hay $(5)_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ listas de tres elementos sin repetición que podemos formar con los miembros de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

123	132	213	231	312	321
124	142	214	241	412	421
125	152	215	251	512	521
134	143	314	341	413	431
135	153	315	351	513	531
145	154	415	451	514	541
234	243	324	342	423	432
235	253	325	352	523	532
245	254	425	452	524	542
345	354	435	453	534	543

Observa cómo hemos organizado nuestra tabla. Todas las listas en la misma fila contienen exactamente los mismos elementos, solo que en diferentes órdenes. Definamos una relación $\mathcal{R}$ en estas listas. La relación es "tiene-los-mismos-elementos-que". Así, dos listas están relacionadas por $\mathcal{R}$ justo cuando sus elementos son los mismos (pero sus órdenes podrían ser diferentes). Claramente, $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Cada fila de la tabla da una clase de equivalencia. Queremos contar las clases de equivalencia. Hay 60 elementos en el conjunto (todas las listas de tres elementos). Cada clase de equivalencia contiene seis listas. Por lo tanto, el número de clases de equivalencia es $\frac{60}{6} = 10 = \binom{5}{3}$ por el Teorema 3.11.

Si repetimos este análisis para el problema general obtenemos el resultado desado:

La razón por la cual cada lista es equivalente a $(k)_k = k!$ listas también se sigue del Teorema 3.3; queremos saber cuántas listas de longitud k sin repetición podemos formar usando k elementos.

Teorema 4.5.16 ▷ Fórmula para $\binom{n}{k}$

Sean n y k enteros con $0 \le k \le n$. Entonces

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Demostración

Queremos contar el número de subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. En cambio, consideramos las listas de k elementos sin repetición que podemos formar a partir de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Declaramos que dos de estas listas son equivalentes si contienen los mismos miembros. Finalmente, calculamos el número de clases de equivalencia para calcular $\binom{n}{k}$.
El número de listas de k elementos sin repetición que podemos formar a partir de $\{1, 2, \ldots, n\}$ es un problema que ya hemos resuelto (Teorema 3.3); hay $(n)_k$ de tales listas.
Por lo tanto, el número de clases de equivalencia es $(n)_k/k! = \binom{n}{k}$. Podemos reescribir $(n)_k$ como $n!/(n-k)!$ (suponiendo $k \le n$), y el teorema queda demostrado. ■

Hemos encontrado una "fórmula" para $\binom{n}{k}$. ¿Estamos contentos? Tal vez. Si queremos calcular $\binom{20}{10}$, ¿qué nos pide hacer este teorema? Nos pide calcular

$$\binom{20}{10} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 2 \times 1 \times 10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 2 \times 1}.$$

Esto implica aproximadamente 40 multiplicaciones y 1 división. Además, los resultados intermedios (el numerador y el denominador) son muy grandes (más dígitos de los que la mayoría de las calculadoras pueden manejar).

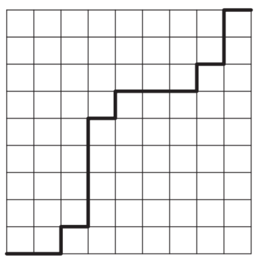
Por supuesto, podemos cancelar algunos términos entre el numerador y el denominador para acelerar las cosas. Los últimos diez términos del numerador son $10 \times \cdots \times 1$, y eso cancela uno de los 10! en el denominador. Entonces el problema se reduce a

$$\binom{20}{10} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times \cdots \times 11}{10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 1}.$$

Podemos buscar más cancelaciones, pero ahora esto requiere que pensemos en los números involucrados. La cancelación de un 10! en el denominador fue sencilla; podríamos construir eso fácilmente en un programa de computadora. Otras cancelaciones pueden ser difíciles de encontrar. Si estamos haciendo esto en una computadora, bien podríamos simplemente hacer las multiplicaciones restantes y la división final, lo que sería

$$\frac{670442572800}{3628800} = 184756.$$

∗ Contando Caminos en una Cuadrícula



Cerramos esta sección con una aplicación interesante de los coeficientes binomiales a un problema de conteo. Considera una cuadricula como la que se muestra en la figura. Queremos contar el número de caminos desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha, donde cada paso es una unidad a la derecha o una unidad hacia arriba.
La cuadricula en la figura consiste en 10 líneas verticales y 10 líneas horizontales. Por lo tanto, la restricción de que cada paso sea hacia la derecha o hacia arriba significa que el camino completo tiene 18 pasos. Además, el camino debe contener exactamente 9 pasos horizontales (de izquierda a derecha) y 9 pasos verticales para recorrer desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha.

Para contar estos caminos, creamos una notación simple. Escribimos una lista de 18 letras; cada letra es una R para un paso hacia la derecha (del inglés *right step*) o una U (inglés *upperward step*) para un paso hacia arriba. Para el camino en la figura, la notación sería así:

`RRU RUU UUR URR RUR UUR`

(Hemos insertado algunos espacios solo para que sea más fácil de leer). Observa que hay exactamente 9 letras R y 9 letras U. El problema de contar caminos se transforma en la siguiente pregunta: ¿Cuántas listas de 9 letras R y 9 letras U podemos formar?

Y podemos transformar esta pregunta en una cuestión de conteo de subconjuntos. En lugar de escribir toda la lista de 18 letras, simplemente especificamos qué 9 de las 18 posiciones están ocupadas por R (y luego sabemos que las posiciones restantes están ocupadas por U). Para la lista anterior, el conjunto sería $\{1, 2, 4, 9, 11, 12, 13, 15, 18\}$. Por lo tanto, el problema de contar caminos en una rejilla se ha transformado en una pregunta de conteo de subconjuntos: ¿Cuántos subconjuntos de 9 elementos podemos formar del conjunto $\{1, 2, \ldots, 18\}$? Y, por supuesto, la respuesta es $\binom{18}{9}$.

4.6. Contando Multiconjuntos

Hemos considerado dos tipos de problemas de conteo: listas y conjuntos. Los problemas de conteo de listas vienen en dos sabores: o bien permitimos o prohibimos la repetición de los miembros de las listas. El número de listas de longitud k cuyos miembros son seleccionados de un conjunto de n elementos es n^k (si se permite la repetición) o $(n)_k$ (si se prohíbe la repetición).

Conjuntos son listas no ordenadas.

Los conjuntos pueden considerarse como listas no ordenadas (es decir, listas de elementos donde el orden de los miembros no importa). Como vimos anteriormente, el número de listas no ordenadas de longitud k cuyos miembros son seleccionados sin repetición de un conjunto de n elementos es $\binom{n}{k}$. Este es un problema de conteo de conjuntos.

El objetivo de esta sección es contar el número de listas no ordenadas de longitud k cuyos elementos son seleccionados de un conjunto de n elementos con repetición permitida. Sin embargo, es difícil expresar esta idea en el lenguaje de los conjuntos. Necesitamos el concepto más general de multiconjunto.

Multiconjuntos

No existe una notación estándar para los multiconjuntos. Nuestra notación $\langle \cdots \rangle$ no es ampliamente utilizada. Los delimitadores $\langle$ y $\rangle$ se llaman corchetes angulares y no deben confundirse con los símbolos de menor que $<$ y mayor que $>$. Algunos matemáticos simplemente usan llaves $\{\cdots\}$ tanto para conjuntos como para multiconjuntos.

Un objeto dado o está o no está en un conjunto. Un elemento no puede estar en un conjunto "dos veces". Los siguientes conjuntos son todos idénticos:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 1, 2, 2, 3, 3\} = \{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 1\}.$$

Un multiconjunto es una generalización de un conjunto. Un multiconjunto es, al igual que un conjunto, una colección no ordenada de elementos. Sin embargo, en un multiconjunto, un objeto puede considerarse que está en el multiconjunto más de una vez.

Escribimos un multiconjunto de la siguiente manera: $\langle 1, 2, 3, 3\rangle$. Este multiconjunto contiene cuatro elementos: el elemento 1, el elemento 2, y el elemento 3 contado dos veces. Decimos que el elemento 3 tiene una *multiplicidad* igual a 2 en el multiconjunto $\langle 1, 2, 3, 3\rangle$. La multiplicidad de un elemento es el número de veces que es un miembro del multiconjunto.

Dos multiconjuntos son iguales siempre que contengan los mismos elementos con las mismas multiplicidades. Por ejemplo, $\langle 1, 2, 3, 3\rangle = \langle 3, 1, 3, 2\rangle$, pero $\langle 1, 2, 3\rangle \neq \langle 1, 2, 3, 3\rangle$.

La *cardinalidad* de un multiconjunto es la suma de las multiplicidades de sus elementos. En otras palabras, es el número de elementos en el multiconjunto donde tomamos en cuenta el número de veces que cada elemento está presente. La notación es la misma que para los conjuntos. Si M es un multiconjunto, entonces $|M|$ denota su cardinalidad. Por ejemplo, $|\langle 1, 2, 3, 3\rangle| = 4$.

El problema de conteo que consideramos es: ¿Cuántos multiconjuntos de k elementos podemos formar eligiendo elementos de un conjunto de n elementos? En otras palabras, ¿cuántas listas no ordenadas de longitud k podemos formar usando los elementos $\{1, 2, \ldots, n\}$ con repetición permitida?

Al igual que definimos $\binom{n}{k}$ para representar la respuesta a un problema de conteo de conjuntos, tenemos una notación especial para la respuesta a este problema de conteo de multiconjuntos.

La notación $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ se pronuncia "n tomados de a k con repetición". Los paréntesis dobles nos recuerdan que podemos incluir elementos más de una vez.

Definición 4.6.1

Sean $n, k \in \mathbb{N}$. El símbolo $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ denota el número de multiconjuntos con cardinalidad igual a k cuyos elementos pertenecen a un conjunto de n elementos, como $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ejemplo 4.6.2

Sea n un entero positivo. Evalúa $\left(\!\binom{n}{1}\!\right)$.

Solución Esto pregunta por el número de multiconjuntos de un elemento cuyos elementos son seleccionados de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Los multiconjuntos son

$$\langle 1\rangle,\ \langle 2\rangle,\ \ldots,\ \langle n\rangle$$

y por lo tanto $\left(\!\binom{n}{1}\!\right) = n$.

Ejemplo 4.6.3

Sea k un entero positivo. Evalúa $\left(\!\binom{1}{k}\!\right)$.

Solución Esto pregunta por el número de multiconjuntos de k elementos cuyos elementos son seleccionados de $\{1\}$. Como solo hay un miembro posible del multiconjunto, y el multiconjunto tiene cardinalidad k, la única posibilidad es

$$\underbrace{\langle 1, 1, \ldots, 1\rangle}_{k \text{ unos}}$$

y por lo tanto $\left(\!\binom{1}{k}\!\right) = 1$.

Ejemplo 4.6.4

Evalúa $\left(\!\binom{2}{2}\!\right)$.

Solución Necesitamos contar el número de multiconjuntos de dos elementos cuyos elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2\}$. Simplemente enumeramos todas las posibilidades. Son

$$\langle 1, 1\rangle,\ \langle 1, 2\rangle,\ \text{y}\ \langle 2, 2\rangle.$$

Por lo tanto, $\left(\!\binom{2}{2}\!\right) = 3$.

En general, considera $\left(\!\binom{2}{k}\!\right)$. Necesitamos formar un multiconjunto de k elementos usando solo los elementos 1 y 2. Podemos decidir cuántos unos hay en el multiconjunto (en cualquier lugar de 0 a k, dando $k+1$ posibilidades), y luego los elementos restantes del multiconjunto deben ser doses. Por lo tanto, $\left(\!\binom{2}{k}\!\right) = k + 1$.

Ejemplo 4.6.5

Evalúa $\left(\!\binom{3}{3}\!\right)$.

Solución Necesitamos contar el número de multiconjuntos de tres elementos cuyos elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, 3\}$. Enumeramos todas las posibilidades. Son

$$\langle 1,1,1\rangle,\ \langle 1,1,2\rangle,\ \langle 1,1,3\rangle,\ \langle 1,2,2\rangle,\ \langle 1,2,3\rangle,$$
$$\langle 1,3,3\rangle,\ \langle 2,2,2\rangle,\ \langle 2,2,3\rangle,\ \langle 2,3,3\rangle,\ \langle 3,3,3\rangle.$$

Por lo tanto, $\left(\!\binom{3}{3}\!\right) = 10$.

Fórmulas para $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$

En los ejemplos anteriores, calculamos $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ enumerando explícitamente todos los multiconjuntos posibles. Esto, por supuesto, no es práctico si queremos calcular $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ para valores grandes de n y k. Necesitamos una mejor manera de realizar este cálculo.

Para los coeficientes binomiales ordinarios, tenemos dos métodos para calcular $\binom{n}{k}$. Podemos generar el triángulo de Pascal usando la relación

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

o podemos usar la fórmula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Busquemos patrones en los valores de $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Aquí hay una tabla de valores de $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ para $0 \leq n, k \leq 6$

		k						
		0	1	2	3	4	5	6
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	3	4	5	6	7
n	3	1	3	6	10	15	21	28
	4	1	4	10	20	35	56	84
	5	1	5	15	35	70	126	210
	6	1	6	21	56	126	252	462

En el triángulo de Pascal, encontramos que el valor de $\binom{n}{k}$ puede calcularse sumando dos valores en la fila anterior. ¿Existe una relación similar aquí?

Observa el valor 56 en la fila $n = 6$ y columna $k = 3$. El número justo arriba de este 56 es 35. ¿Está el 21 junto al 35 para que podamos obtener 56 sumando 21 y 35? No hay un 21 en la fila 5, pero justo a la izquierda del 56 en la fila 6 hay un 21.

Examina otros números en esta tabla. Cada uno es la suma del número justo arriba y justo a la izquierda. El número a la izquierda de $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ es $\left(\!\binom{n}{k-1}\!\right)$ y el número arriba es $\left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)$.

Hemos observado lo siguiente:

Proposición 4.6.6

Sean n, k enteros positivos. Entonces

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right).$$

La demostración de este resultado es similar a la del Teorema 3.17. Te recomiendo que vuelvas a leer esa demostración ahora. La idea esencial de esa demostración y la que estamos a punto de presentar es considerar un elemento "diferente". Contamos [multi]conjuntos de tamaño k que incluyen o excluyen al "diferente".

Demostración

Usamos una prueba combinatoria para demostrar este resultado. Hacemos una pregunta que esperamos que sea respondida por ambos lados de la ecuación:
¿Cuántos multiconjuntos de tamaño k podemos formar usando los elementos $\{1, 2, \ldots, n\}$?
Una respuesta simple a esta pregunta es $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.
Para una segunda respuesta, analizamos los significados de $\left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)$ y $\left(\!\binom{n}{k-1}\!\right)$.
La primera tiene una interpretación fácil. El número $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ es el número de multiconjuntos de k elementos usando los miembros de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en los que nunca usamos el elemento n.
¿Cómo deberíamos interpretar $\left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right)$? Lo que queremos decir es que esto representa el número de multiconjuntos de k elementos usando los miembros de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en los que debemos usar el elemento n. Para ver por qué esto es cierto, supongamos que debemos usar el elemento n al formar un multiconjunto de k elementos. Entonces incluimos el elemento n en el multiconjunto. Ahora somos libres de completar este multiconjunto de la manera que deseemos. Necesitamos escoger $k-1$ elementos más de $\{1, 2, \ldots, n\}$; el número de formas de hacer eso es precisamente $\left(\!\binom{n}{k-1}\!\right)$.
Dado que el elemento n o está o no en el multiconjunto, tenemos que

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right).$$

■

Ejemplo 4.6.7

Ilustramos la demostración de la Proposición 3.19 considerando $\left(\!\binom{3}{4}\!\right) = \left(\!\binom{2}{4}\!\right) + \left(\!\binom{3}{3}\!\right)$.
Enumeramos todos los multiconjuntos de tamaño 4 que podemos formar usando los elementos $\{1, 2, 3\}$.
Primero, enumeramos todos los multiconjuntos de tamaño 4 que podemos formar a partir de los elementos en $\{1, 2, 3\}$ que no usan el elemento 3. En otras palabras, queremos todos los multiconjuntos de tamaño 4 que podemos formar usando solo los elementos $\{1, 2\}$. Hay $\left(\!\binom{2}{4}\!\right) = 5$ de ellos. Son

$$\langle 1,1,1,1\rangle \quad \langle 1,1,1,2\rangle \quad \langle 1,1,2,2\rangle \quad \langle 1,2,2,2\rangle \quad \langle 2,2,2,2\rangle$$

Segundo, enumeramos todos los multiconjuntos de tamaño 4 que incluyen el elemento 3 (al menos una vez). Son

$$\begin{array}{cccc} \langle 1,1,1,3\rangle & \langle 1,1,2,3\rangle & \langle 1,1,3,3\rangle & \langle 1,2,2,3\rangle \\ \langle 1,2,3,3\rangle & \langle 1,3,3,3\rangle & \langle 2,2,2,3\rangle & \langle 2,2,3,3\rangle \\ & \langle 2,3,3,3\rangle & \langle 3,3,3,3\rangle & \end{array}$$

Observa que si ignoramos el obligatorio 3 (en color), hemos enumerado todos los multiconjuntos de tres elementos que podemos formar a partir de los elementos en $\{1, 2, 3\}$. Hay $\left(\!\binom{3}{3}\!\right) = 10$ de ellos.

Este resultado, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right)$, y su demostración son bastante similares al Teorema 3.17, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. La tabla de valores $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ es similar al triángulo de Pascal de otra manera. Si leemos la tabla de valores $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ en diagonal desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha, leemos los valores

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

y esta es la quinta fila del triángulo de Pascal. Podemos escribir esto de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \left(\!\binom{6}{0}\!\right) & \left(\!\binom{5}{1}\!\right) & \left(\!\binom{4}{2}\!\right) & \left(\!\binom{3}{3}\!\right) & \left(\!\binom{2}{4}\!\right) & \left(\!\binom{1}{5}\!\right) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \end{array}$$

Observar que $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{?}{k}$. ¿Qué número deberíamos completar en lugar del signo de interrogación? Un poco de conjetura y vemos que $? = n + k - 1$ se ajusta al patrón que observamos. Por ejemplo, $\left(\!\binom{4}{2}\!\right) = \binom{5}{2} = \binom{4+2-1}{2}$.

Afirmamos lo siguiente:

Teorema 4.6.8

Sea $n, k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Demostración

No veremos la demostración de este resultado. ∎

Una Analogía para la Fórmula de Multiconjuntos: El Pedido de Helado (o Asteriscos y Barras)

La demostración formal con su codificación puede parecer un truco, pero la idea subyacente es una de las más elegantes y útiles de la combinatoria. Traduzcamos el problema a una situación más concreta.

Imaginemos que entramos a una heladería que tiene n sabores distintos. Queremos comprar un cucurucho con k bochas de helado. Podemos repetir sabores (por ejemplo, pedir dos bochas de chocolate). La pregunta es: *¿de cuántas maneras podemos hacer nuestro pedido?*

Este es exactamente el problema de contar multiconjuntos, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Ahora, transformemos el problema.

- Las k **bochas** que pedimos son nuestros "objetos". Representémoslas con **asteriscos** ($*$).
- Los n **sabores** de la heladería están en contenedores separados. Para separar n contenedores, necesitamos $n-1$ **separadores**. Representémoslos con **barras** ($|$).

Ahora, cualquier pedido se puede escribir como una secuencia de asteriscos y barras. Por ejemplo, si la heladería tiene $n = 4$ sabores (Chocolate, Vainilla, Fresa, Limón) y queremos pedir $k = 7$ bochas:

$$\langle C, C, C, V, V, F, L\rangle \longleftrightarrow * \quad * \quad * \quad | \quad * \quad * \quad | \quad * \quad | \quad *$$
$$\langle F, F, F, F, F, F, F\rangle \longleftrightarrow | \quad | \quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad |$$

Observa la clave: ¡cada pedido posible corresponde a una única secuencia de k asteriscos y $n-1$ barras, y viceversa!
El problema original y complejo de "elegir con repetición" se ha transformado en un problema mucho más simple:

¿De cuántas maneras podemos ordenar una lista que tiene k asteriscos y $n-1$ barras?

Tenemos un total de $k+n-1$ posiciones en nuestra lista. Para definir una secuencia, solo necesitamos decidir en cuáles de esas posiciones pondremos los k asteriscos (el resto, por obligación, serán barras).
Este es un problema de selección de subconjuntos que ya conocemos. El número de formas de elegir k posiciones de un total de $n+k-1$ es:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Como ambos métodos cuentan lo mismo, hemos encontrado la razón intuitiva por la cual $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$.

Otra Analogía para la Fórmula de Multiconjuntos: Colocando Libros (o Asteriscos y Barras)

La demostración formal con su codificación puede parecer un truco, pero la idea subyacente es una de las más elegantes y útiles de la combinatoria. Traduzcamos el problema a una situación más concreta.
Imaginemos que tenemos k libros idénticos y queremos colocarlos en n estantes diferentes. La pregunta es: *¿de cuántas maneras podemos distribuir los libros?*
Este es exactamente el problema de contar multiconjuntos, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$, donde cada libro que colocamos es una "elección" del estante donde va. Ahora, transformemos el problema.

- Los k **libros** idénticos son nuestros "objetos". Representémoslos con **asteriscos** $(*)$.
- Para separar los libros que van en los n **estantes** distintos, necesitamos $n-1$ **separadores**. Representémoslos con **barras** $(|)$.

Ahora, cualquier distribución de libros se puede escribir como una secuencia única de asteriscos y barras. Por ejemplo, si tenemos $n=5$ estantes y queremos colocar $k=3$ libros:

$$\text{Estante 1: } *, \text{ Estante 3: } *, \text{ Estante 4: } * \longleftrightarrow * \quad | \quad | \quad * \quad | \quad * \quad |$$
$$\text{Estante 2: tres libros } *** \longleftrightarrow | \quad * \quad * \quad * \quad | \quad | \quad |$$

Observa la clave: ¡cada distribución posible corresponde a una única secuencia de k asteriscos y $n-1$ barras, y viceversa!

El problema original y complejo de "elegir con repetición" se ha transformado en un problema mucho más simple:

¿De cuántas maneras podemos ordenar una lista que tiene k asteriscos y $n-1$ barras?

Tenemos un total de $k+n-1$ posiciones en nuestra lista. Para definir una secuencia, solo necesitamos decidir en cuáles de esas posiciones pondremos los k asteriscos (el resto, por obligación, serán barras).
Este es un problema de selección de subconjuntos que ya conocemos. El número de formas de elegir k posiciones de un total de $n+k-1$ es:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Como ambos métodos cuentan lo mismo, hemos encontrado la razón intuitiva por la cual $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$.

Ejemplo 4.6.9

En el Ejemplo 3.19, enumeramos explícitamente todos los posibles multiconjuntos de tamaño tres formados utilizando los enteros 1, 2, 4, y 5. Aquí los enumeramos con su notación de asteríscos y barras.

Multiconjuntos	Asteríscos y barras	Subconjuntos
$\langle 1,1,1\rangle$	* * * | |	$\{1,2,3\}$
$\langle 1,1,2\rangle$	* * | * |	$\{1,2,4\}$
$\langle 1,1,3\rangle$	* * | | *	$\{1,2,5\}$
$\langle 1,2,2\rangle$	* | * * |	$\{1,3,4\}$
$\langle 1,2,3\rangle$	* | * | *	$\{1,3,5\}$
$\langle 1,3,3\rangle$	* | | * *	$\{1,4,5\}$
$\langle 2,2,2\rangle$	| * * * |	$\{2,3,4\}$
$\langle 2,2,3\rangle$	| * * | *	$\{2,3,5\}$
$\langle 2,3,3\rangle$	| * | * *	$\{2,4,5\}$
$\langle 3,3,3\rangle$	| | * * *	$\{3,4,5\}$

La columna etiquetada como *Subconjuntos* muestra qué posiciones de las cinco en la codificación de asteríscos y barras están ocupadas por $*$. Nótese que los multiconjuntos $\left(\!\binom{3}{3}\!\right)$ corresponden a los subconjuntos $\binom{5}{3}$. Por lo tanto, $\left(\!\binom{3}{3}\!\right) = \binom{5}{3}$.

Ejemplo 4.6.10

quí enumeramos con notación de asteríscos y barras todos los multiconjuntos de tamaño 7 de un conjunto de 4 elementos.

Multiconjuntos	**Asteríscos y barras**	**Subconjuntos**
$\langle 1,1\rangle$	$*\ *\ \mid\ \mid\ \mid$	$\{1,2\}$
$\langle 1,2\rangle$	$*\ \mid\ *\ \mid\ \mid$	$\{1,3\}$
$\langle 1,3\rangle$	$*\ \mid\ \mid\ *\ \mid$	$\{1,4\}$
$\langle 1,4\rangle$	$*\ \mid\ \mid\ \mid\ *$	$\{1,5\}$
$\langle 2,2\rangle$	$\mid\ *\ *\ \mid\ \mid$	$\{2,3\}$
$\langle 2,3\rangle$	$\mid\ *\ \mid\ *\ \mid$	$\{2,4\}$
$\langle 2,4\rangle$	$\mid\ *\ \mid\ \mid\ *$	$\{2,5\}$
$\langle 3,3\rangle$	$\mid\ \mid\ *\ *\ \mid$	$\{3,4\}$
$\langle 3,4\rangle$	$\mid\ \mid\ *\ \mid\ *$	$\{3,5\}$
$\langle 4,4\rangle$	$\mid\ \mid\ \mid\ *\ *$	$\{4,5\}$

La columna etiquetada como *Subconjuntos* muestra qué posiciones (de las 5 totales) en la codificación de asteríscos y barras están ocupadas por un $*$. Nótese que los multiconjuntos $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ corresponden a los subconjuntos $\binom{n+k-1}{k}$. Para nuestro caso, con $n=4$ y $k=2$, los multiconjuntos $\left(\!\binom{4}{2}\!\right)$ corresponden a los subconjuntos $\binom{4+2-1}{2}=\binom{5}{2}$. Por lo tanto, $\left(\!\binom{4}{2}\!\right)=\binom{5}{2}=10$.

Extensión del Teorema Binomial a Potencias Negativas

El Teorema del Binomio puede expresarse en la siguiente forma suavemente alterada:

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k.$$

Puede parecer inusual escribir la suma con infinitos términos, pero como $\binom{n}{k}=0$ una vez que $k>n$, todos menos el primer puñado son iguales a cero. Por ejemplo,

$$(1+x)^5=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{5}{k}x^k=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+1x^5+0x^6+0x^7+\cdots.$$

¿Qué sucede cuando reemplazamos $\binom{n}{k}$ por $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$? ¡Algo maravilloso!

Para ser específicos, examinemos la suma

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\!\binom{n}{k}\!\right)x^k=\left(\!\binom{n}{0}\!\right)+\left(\!\binom{n}{1}\!\right)x+\left(\!\binom{n}{2}\!\right)x^2+\cdots.$$

Esta es realmente una suma infinita, ya que los coeficientes multi-escogidos $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ son diferentes de cero incluso para $k>n$. Así, para ser completamente rigurosos, estamos hablando de *series de potencias formales* y tal teoría se aleja de las intenciones de estas notas. No obstante, podemos proceder de una manera intuitiva y puramente algebraica para derivar una fórmula para $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\!\binom{n}{k}\!\right)x^k$.

Para comenzar, tomemos el caso $n = 1$. Observe que $\left(\!\binom{1}{k}\!\right) = 1$ para todos los enteros no negativos k porque el único multiconjunto de tamaño k que podemos formar utilizando los elementos de $\{1\}$ es $\{1, 1, 1, \ldots, 1\}$ con k unos (ver Ejemplo 3.17). Así

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{1}{k}\!\right) x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

y esta es una serie geométrica cuya suma es $\dfrac{1}{1-x}$.

Ahora demostramos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{2}{k}\!\right) x^k = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Observe que $\left(\!\binom{2}{k}\!\right) = k + 1$ (ver Ejercicio 6 del TP3B sección de Multiconjuntos). Por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{2}{k}\!\right) x^k = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots .$$

Ahora consideremos $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Expandiendo esto en dos series geométricas tenemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{1-x}\right]\left[\frac{1}{1-x}\right] = \left[1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right]\left[1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right]. \tag{4.4}$$

y nos preguntamos: ¿Cuál es el coeficiente de x^5 para la expresión a la derecha? Para multiplicar las dos series infinitas a la derecha, multiplicamos cada término en el primer factor por cada término en el segundo factor y luego recolectamos términos semejantes. Para encontrar el coeficiente de x^5, terminamos recolectando los siguientes términos:

$$1 \cdot x^5, x \cdot x^4, x^2 \cdot x^3, x^3 \cdot x^2, x^4 \cdot x, x^5 \cdot 1,$$

esto es, seis términos en total. Así, el coeficiente de x^5 es 6, y eso equivale a $\left(\!\binom{2}{5}\!\right)$.

En general, ¿cuál es el coeficiente de x^k en la ecuación (4.4)? Cuando los dos factores son multiplicados y se recolectan términos semejantes, los términos que contribuyen a x^k son estos:

$$1 \cdot x^k, x \cdot x^{k-1}, x^2 \cdot x^{k-2}, \ldots, x^{k-2} \cdot x^2, x^{k-1} \cdot x, x^k \cdot 1,$$

para un total de $k + 1$ términos. Por lo tanto

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{2}{k}\!\right) x^k.$$

Dado que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{1}{k}\!\right) = (1-x)^{-1}$ y $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{2}{k}\!\right) = (1-x)^{-2}$, no es una locura suponer que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{3}{k}\!\right) = (1-x)^{-3}$ y así sucesivamente.

Teorema 4.6.11 ▷ Teorema del Binomio: potencias enteras negativas

Sea n un entero no negativo. Entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{n}{k}\!\right) x^k = (1-x)^{-n} = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

La demostración de este resultado es una generalización del argumento que dimos para demostrar que $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{2}{k}\!\right) = (1-x)^{-2}$.

La idea central de la demostración es escribir $(1-x)^{-n}$ como un producto de n términos de la serie geométrica $1 + x + x^2 + \cdots$ y luego recolectar términos semejantes. Esto puede ser un poco confuso, por lo que ofrecemos el siguiente paso intermedio para mayor claridad.

Lema 4.6.12

Sea n un entero positivo y k un entero no negativo. La ecuación

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = k$$

tiene $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ soluciones en las que $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son enteros no negativos.

Por ejemplo, consideremos la ecuación $e_1 + e_2 + e_3 = 6$ y preguntemos por todas las soluciones en las cuales e_1, e_2, e_3 son enteros no negativos. Afirmamos que hay $\left(\!\binom{3}{6}\!\right) = 28$ soluciones. Son:

$0+0+6$	$0+1+5$	$0+2+4$	$0+3+3$	$0+4+2$	$0+5+1$	$0+6+0$
$1+0+5$	$1+1+4$	$1+2+3$	$1+3+2$	$1+4+1$	$1+5+0$	$2+0+4$
$2+1+3$	$2+2+2$	$2+3+1$	$2+4+0$	$3+0+3$	$3+1+2$	$3+2+1$
$3+3+0$	$4+0+2$	$4+1+1$	$4+2+0$	$5+0+1$	$5+1+0$	$6+0+0$

¿Cómo se relacionan las 28 soluciones de la ecuación $e_1+e_2+e_3 = 6$ con los 28 multiconjuntos de tamaño 6 formados por $\{1, 2, 3\}$? Podemos emparejar cada terna (e_1, e_2, e_3) con un multiconjunto con e_1 unos, e_2 doses y e_3 treses. Por ejemplo, $(2, 3, 1)$ corresponde al multiconjunto $\langle 1, 1, 2, 2, 2, 3\rangle$.

Demostramos el **Lema**

Demostración

Existe una relación biunívoca entre las soluciones a la ecuación $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = k$ y multiconjuntos de tamaño k (con elementos tomados de $\{1, 2, \ldots, n\}$); dados los números $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, hacemos un multiconjunto con e_1 unos, e_2 doses, y así sucesivamente; de manera similar, dado un multiconjunto de tamaño k, podemos crear una solución a $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = k$ donde e_i es el número de veces que i aparece en el conjunto. Esto puede representarse así:

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = k \quad \longleftrightarrow \quad \langle \underbrace{1, \ldots, 1}_{e_1 \text{ unos}}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{e_2 \text{ doses}}, \ldots, \underbrace{n, \ldots, n}_{e_n \text{ enes}} \rangle$$

Por lo tanto, el número de soluciones a la ecuación $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = k$ es $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. ■

Ahora podemos demostrar el **Teorema del Binomio: potencias enteras negativas**

Demostración

Para $n = 0$, la expresión $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{n}{k}\!\right) x^k$ solo tiene un término distinto de cero:

$$\left(\!\binom{0}{0}\!\right) x^0, \text{ que es igual a 1;}$$

todos los otros términos son cero $\left(\text{porque para } k > 0, \left(\!\binom{0}{k}\!\right) = 0\right)$. Así que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{0}{k}\!\right) x^k = 1 = (1-x)^0.$$

Para $n > 0$, escribimos $(1-x)^{-n}$ de la siguiente forma:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \left[1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right]^n.$$

Cuando expandimos el lado derecho de esta ecuación y recopilamos términos similares, todos los términos x^k son de la forma $x^{e_1} x^{e_2} \cdots x^{e_n}$ donde los exponentes suman k y x^{e_j} proviene del j-ésimo factor a la derecha. Dado que (por el Lema 4.6.12) el número de tales términos es $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$, eso es el coeficiente de x^k. Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{n}{k}\!\right) x^k = (1-x)^{-n}.$$

■

Observación 4.6.13

Consideramos el siguiente problema de conteo: ¿Cuántos multiconjuntos de tamaño k podemos formar cuyos elementos se seleccionan del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$? Denotamos la respuesta por $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Probamos varias propiedades de $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$, en particular, que

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

También mostramos cómo reemplazar $\binom{n}{k}$ con $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ en el Teorema Binomial para obtener, para $n \in \mathbb{N}$ las siguientes identidades:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k \quad \text{y} \quad (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{n}{k}\!\right) x^k.$$

Conteo de colecciones

	Repetición permitida	**Repetición prohibida**
Ordenado	n^k	$(n)_k$
Desordenado	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$

Tamaño de la colección: k

Tamaño del universo: n

4.7. Principio de Inclusión-Exclusión

Anteriormente aprendimos que para conjuntos finitos A y B, tenemos $|A| + |B|) = |A \cup B| + |A \cap B|$. Podemos reescribir esto como

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| .$$

La ecuación expresa el tamaño de una unión de dos conjuntos en términos de los tamaños de los conjuntos individuales y su intersección. La extensión de este resultado a tres conjuntos A, B y C (finitos) es:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| .$$

Nuevamente, el tamaño de la unión se expresa en términos de los tamaños de los conjuntos individuales y sus diversas intersecciones. Estas ecuaciones se denominan fórmulas de inclusión-exclusión.

En esta sección, probaremos una fórmula general de inclusión-exclusión.

Teorema 4.7.1 ▷ Principio de Inclusión-Exclusión

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Entonces,

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| &+ |A_2| + \cdots + |A_n| \\
&- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
&- \cdots \\
&+ \cdots \\
&\quad \vdots \\
&\pm |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| .
\end{aligned}$$

Para encontrar el tamaño de una unión, sumamos los tamaños de los conjuntos individuales (inclusión), restamos los tamaños de todas las intersecciones por pares (exclusión), sumamos los tamaños de todas las intersecciones de tres en tres (inclusión), y así sucesivamente.

La idea es que cuando sumamos todos los tamaños de los conjuntos individuales, hemos sumado demasiado porque algunos elementos pueden estar en más de un conjunto. Entonces restamos los tamaños de las intersecciones por pares para compensar, pero ahora puede que hayamos restado demasiado. Así que corregimos añadiendo los tamaños de las intersecciones triples, pero esto sobreestima, por lo que tenemos que restar, y así sucesivamente. Sorprendentemente, al final, todo está en perfecto equilibrio (probaremos esto próximamente).

El uso repetido de puntos suspensivos ($\cdots$) en la fórmula es desafortunado, pero es difícil expresar esta fórmula utilizando las notaciones que hemos desarrollado hasta ahora. Para cuatro conjuntos (A, B, C y D) la fórmula es:

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| = |A| &+ |B| + |C| + |D| \\
&- |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\
&+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\
&- |A \cap B \cap C \cap D| .
\end{aligned}$$

y para cinco conjuntos (A, B, C, , D y E) la fórmula es:

$$\begin{aligned}
|A\cup B\cup C\cup D\cup E| = {} & |A|+|B|+|C|+|D|+|E| \\
& -[|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|A\cap E|-|B\cap C| \\
& \qquad -|B\cap D|-|B\cap E|-|C\cap D|-|C\cap E|-|D\cap E|] \\
& +[|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap B\cap E|+|A\cap C\cap D| \\
& \qquad +|A\cap C\cap E|+|A\cap D\cap E|+|B\cap C\cap D| \\
& \qquad +|B\cap C\cap E|+|B\cap D\cap E|+|C\cap D\cap E|] \\
& -[|A\cap B\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap E|-|A\cap B\cap D\cap E| \\
& \qquad -|A\cap C\cap D\cap E|-|B\cap C\cap D\cap E|] \\
& +|A\cap B\cap C\cap D\cap E|\,.
\end{aligned}$$

Se puede observar lo complicado de la fórmula.

Ejemplo 4.7.2

En una academia de arte, hay 43 estudiantes tomando cerámica, 57 estudiantes tomando pintura, y 29 estudiantes tomando escultura. Hay 10 estudiantes en ambos cerámica y pintura, 5 en ambos pintura y escultura, 5 en ambos cerámica y escultura, y 2 tomando los tres cursos. ¿Cuántos estudiantes están tomando al menos un curso en la academia de arte?

Solución Sean C, P y S los conjuntos de estudiantes que toman cerámica, pintura y escultura, respectivamente. Queremos calcular $|C\cup P\cup S|$. Aplicamos inclusión-exclusión:

$$\begin{aligned}
|C\cup P\cup S| &= |C|+|P|+|S|-|C\cap P|-|C\cap S|-|P\cap S|+|C\cap P\cap S| \\
&= 43+57+29-10-5-5+2=111.
\end{aligned}$$

Demostración

No veremos la demostración en este curso. ■

Cómo usar la Inclusión-Exclusión

La inclusión-exclusión toma un problema de conteo (¿cuántos elementos hay en $A_1\cup\cdots\cup A_n$?) y lo reemplaza con 2^n-1 nuevos problemas de conteo (¿cuántos elementos hay en las diversas intersecciones?). A primera vista, parece que complicamos el problema, pero en muchos casos, calcular el tamaño de las intersecciones es mucho más sencillo que contar la unión directamente.

Aquí presentamos dos ejemplos. El primero, sobre divisibilidad, es un problema clásico de teoría de números. El segundo, sobre una encuesta de habilidades, muestra cómo se aplica el principio en un contexto no matemático.

Ejemplo 4.7.3 ▷ Contando Enteros con Propiedades de Divisibilidad

¿Cuántos números enteros del 1 al 100 son divisibles por 2, 3 o 5?

Solución Sea nuestro universo $U=\{1,2,\ldots,100\}$. Definimos los siguientes conjuntos:

- A_2: El conjunto de números en U divisibles por 2.
- A_3: El conjunto de números en U divisibles por 3.
- A_5: El conjunto de números en U divisibles por 5.

Queremos calcular $|A_2\cup A_3\cup A_5|$. Para ello, primero calculamos el tamaño de cada conjunto y sus intersecciones. El número de enteros hasta N divisibles por d es $\lfloor N/d\rfloor$ (función piso).

1. Cardinalidades individuales:

- $|A_2| = \lfloor 100/2 \rfloor = 50$
- $|A_3| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33$
- $|A_5| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20$

2. Intersecciones por pares: Un número es divisible por a y b (primos entre sí) si es divisible por $a \cdot b$.

- $|A_2 \cap A_3| = |A_6| = \lfloor 100/6 \rfloor = 16$
- $|A_2 \cap A_5| = |A_{10}| = \lfloor 100/10 \rfloor = 10$
- $|A_3 \cap A_5| = |A_{15}| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$

3. Intersección triple:

- $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = |A_{30}| = \lfloor 100/30 \rfloor = 3$

Finalmente, aplicamos el Principio de Inclusión-Exclusión:

$$\begin{aligned}|A_2 \cup A_3 \cup A_5| &= (|A_2| + |A_3| + |A_5|) - (|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_3 \cap A_5|) + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| \\ &= (50 + 33 + 20) - (16 + 10 + 6) + 3 \\ &= 103 - 32 + 3 = 74.\end{aligned}$$

Por lo tanto, hay 74 números entre 1 y 100 que son divisibles por 2, 3 o 5.

Ejemplo 4.7.4 ▷ Encuesta sobre Habilidades en una Empresa

Una empresa tecnológica realiza una encuesta a sus 200 desarrolladores para determinar qué habilidades clave poseen. Las habilidades de interés son: **Python**, **SQL**, **Cloud Computing** (AWS, Azure, etc.) y **Visualización de Datos** (Tableau, Power BI).
Los resultados de la encuesta son los siguientes:

- **Habilidades individuales:** 80 conocen Python, 95 SQL, 60 Cloud y 55 Visualización.
- **Pares de habilidades:** 45 conocen Python y SQL; 25 Python y Cloud; 20 Python y Visualización; 30 SQL y Cloud; 35 SQL y Visualización; 15 Cloud y Visualización.
- **Tríos de habilidades:** 12 conocen Python, SQL y Cloud; 15 Python, SQL y Visualización; 8 Python, Cloud y Visualización; 10 SQL, Cloud y Visualización.
- **Todas las habilidades:** 5 desarrolladores dominan las cuatro áreas.

¿Cuántos desarrolladores tienen *al menos una* de estas cuatro habilidades?

Solución Definimos los conjuntos de la siguiente manera:

- P: Desarrolladores que conocen Python.
- S: Desarrolladores que conocen SQL.
- C: Desarrolladores con habilidades en Cloud Computing.
- V: Desarrolladores con habilidades en Visualización de Datos.

Queremos calcular $|P \cup S \cup C \cup V|$. Aplicamos la fórmula de inclusión-exclusión para cuatro conjuntos:

$$\begin{aligned}|P \cup S \cup C \cup V| = &\text{(Suma de individuales)} \\ &\text{- (Suma de intersecciones por pares)} \\ &+ \text{(Suma de intersecciones triples)} \\ &\text{- (Intersección cuádruple)}\end{aligned}$$

Sustituimos los datos proporcionados:

Paso 1: Sumar las cardinalidades individuales.

$$|P| + |S| + |C| + |V| = 80 + 95 + 60 + 55 = 290$$

Paso 2: Restar las intersecciones por pares.

$$\begin{aligned}&|P \cap S| + |P \cap C| + |P \cap V| + |S \cap C| + |S \cap V| + |C \cap V| \\ &= 45 + 25 + 20 + 30 + 35 + 15 = 170\end{aligned}$$

Paso 3: Sumar las intersecciones triples.

$$|P \cap S \cap C| + |P \cap S \cap V| + |P \cap C \cap V| + |S \cap C \cap V| = 12 + 15 + 8 + 10 = 45$$

Paso 4: Restar la intersección cuádruple.

$$|P \cap S \cap C \cap V| = 5$$

Cálculo final:

$$|P \cup S \cup C \cup V| = 290 - 170 + 45 - 5 = 160.$$

Por lo tanto, 160 desarrolladores tienen al menos una de las cuatro habilidades clave. Esto también nos permite deducir que $200 - 160 = 40$ desarrolladores no poseen ninguna de estas habilidades específicas.

Esquema de una solución: Usando el Principío de Inclusión-Exclusión

Contando con inclusión-exclusión:

- Clasificar los objetos como "buenos" (los que quieres contar) o "malos" (los que no quieres contar).
- Decidir si quieres contar los objetos buenos directamente o contar los objetos malos y restarlos del total.
- Plantear el problema de conteo como el tamaño de una unión de conjuntos. Cada conjunto describe una forma en que los objetos pueden ser "buenos" o "malos".
- Usar el Principío de Inclusión-Ex clusión (Teorema 4.7.1).

Ejemplo 4.7.5 ▷ Repartiendo Dulces a Niños

Un padre tiene 5 dulces *diferentes* (un chocolate, un caramelo, una paleta, una gomita y un turrón) para repartir entre sus 3 hijos: Ana, Beto y Carla. ¿De cuántas maneras puede repartir los dulces de modo que cada hijo reciba **al menos un** dulce?

Solución Este problema es ideal para resolver con el esquema de "buenos" vs. "malos".

Paso 1: Clasificar los objetos. El universo U es el conjunto de todas las maneras posibles de repartir los 5 dulces. Para cada dulce, tenemos 3 opciones (dárselo a Ana, a Beto, o a Carla). Como los dulces son diferentes, el total de maneras de repartirlos es $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$.

- Los objetos "buenos" son los repartos en los que cada niño recibe al menos un dulce.
- Los objetos "malos" son los repartos en los que *al menos un* niño se queda sin dulces.

Paso 2: Decidir la estrategia de conteo. Contar directamente los repartos "buenos" es complejo. Es mucho más fácil contar los repartos "malos" y restarlos del total de 243.

$$\text{cantidad de repartos buenos} = 243 - \text{cantidad de repartos malos}$$

Paso 3: Plantear el problema como una unión de conjuntos. Un reparto es "malo" si Ana no recibe dulces, *o* si Beto no recibe dulces, *o* si Carla no recibe dulces. Definimos un conjunto para cada una de estas propiedades "malas":

- $S_A = \{$repartos en los que Ana no recibe ningún dulce$\}$
- $S_B = \{$repartos en los que Beto no recibe ningún dulce$\}$
- $S_C = \{$repartos en los que Carla no recibe ningún dulce$\}$

El conjunto de todos los repartos "malos" es la unión $\boldsymbol{S_A \cup S_B \cup S_C}$. Vamos a calcular su tamaño.

Paso 4: Usar el Principio de Inclusión-Exclusión. Calculamos el tamaño de cada conjunto y de sus intersecciones.

- **Conjuntos individuales:** Para calcular $|S_A|$, contamos los repartos donde Ana no recibe nada. Esto significa que cada uno de los 5 dulces debe ir a Beto o a Carla (2 opciones). Por lo tanto, $|S_A| = 2^5 = 32$. Por simetría, $|S_B| = 32$ y $|S_C| = 32$.
- **Intersecciones por pares:** Para calcular $|S_A \cap S_B|$, contamos los repartos donde ni Ana ni Beto reciben dulces. En este caso, los 5 dulces deben ir obligatoriamente a Carla (1 opción). Así, $|S_A \cap S_B| = 1^5 = 1$. Por simetría, $|S_A \cap S_C| = 1$ y $|S_B \cap S_C| = 1$.
- **Intersección triple:** La intersección $|S_A \cap S_B \cap S_C|$ corresponde a los repartos donde ningún niño recibe dulces. Como los 5 dulces deben ser repartidos, esto es imposible. Su tamaño es $0^5 = 0$.

Aplicando la fórmula de inclusión-exclusión para $|S_A \cup S_B \cup S_C|$, obtenemos el número de repartos "malos":

$$\begin{aligned}
|S_A \cup S_B \cup S_C| &= (|S_A| + |S_B| + |S_C|) - (|S_A \cap S_B| + |S_A \cap S_C| + |S_B \cap S_C|) + |S_A \cap S_B \cap S_C| \\
&= (32 + 32 + 32) - (1 + 1 + 1) + 0 \\
&= 3 \cdot 32 - 3 \cdot 1 + 0 \\
&= 96 - 3 = 93.
\end{aligned}$$

Hay 93 repartos "malos". Finalmente, calculamos el número de repartos "buenos":

$$\text{cantidad de repartos buenos} = 243 - 93 = 150.$$

Existen 150 maneras de repartir los 5 dulces asegurando que cada niño reciba al menos uno.

Desarreglos

Este problema es conocido como el *problema del sombrero*. La historia es que n personas van al teatro y dejan sus sombreros con un empleado desorganizado. El empleado devuelve los sombreros a los asistentes al azar. El problema es: ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los asistentes recupere su propio sombrero? La respuesta a esta pregunta de probabilidad es la respuesta al Ejemplo 3.24 dividida por $n!$.

Ejemplo 4.7.6 ▷ Conteo de desarreglos

Hay $n!$ formas de hacer listas de longitud n usando los elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sin repetición. Tal lista se llama un *desarreglo* si el número j no ocupa la posición j de la lista para cualquier $j = 1, 2, \ldots, n$. ¿Cuántos desarreglos hay?

Por ejemplo, si $n = 8$, las listas $(8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$ y $(6, 5, 7, 8, 1, 2, 3, 4)$ son desarreglos, pero $(3, 5, 1, 4, 8, 6, 7)$ y $(2, 1, 4, 3, 8, 6, 7, 5)$ no lo son.

Ejemplo 4.7.7

Los desarreglos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ son

21453	31254	41253	51234
21534	31452	41523	51423
23154	31524	41532	51432
23451	34152	43152	53124
23514	34251	43251	53214
24153	34512	43512	53412
24513	34521	43521	53421
24531	35124	45123	54123
25134	35214	45132	54132
25413	35412	45213	54213
25431	35421	45231	54231

Para entender como contar los desarreglos vamos a consideramos las permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. El número total de permutaciones (o listas) es $4! = 24$.

Las listas "buenas" son los desarreglos, es decir, aquellas en las que ningún elemento $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ aparece en la posición j. Las listas "malas" son aquellas en las que al menos un elemento está en su posición original.

Contaremos el número de listas malas y lo restaremos de 4! para obtener el número de listas buenas.

Para contar las listas malas, definimos los siguientes conjuntos:

$$B_1 = \{\text{listas con 1 en la posición 1}\}$$

$$B_2 = \{\text{listas con 2 en la posición 2}\}$$

$$B_3 = \{\text{listas con 3 en la posición 3}\}$$

$$B_4 = \{\text{listas con 4 en la posición 4}\}$$

Nuestro objetivo es contar $|B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4|$ usando el Principio de Inclusión-Exclusión.

Paso 1: Suma de los tamaños de los conjuntos individuales

Calculamos $|B_1|$. Este es el número de listas con el 1 en la posición 1. Los otros $4-1 = 3$ elementos pueden permutar libremente. Hay $(4-1)! = 3! = 6$ de estas listas. Por simetría:

$$|B_1| = |B_2| = |B_3| = |B_4| = 3! = 6$$

La suma de estos tamaños es el primer término de la fórmula. Hay $\binom{4}{1} = 4$ conjuntos de este tipo.

$$|B_1| + |B_2| + |B_3| + |B_4| = \binom{4}{1}(4-1)! = 4 \times 6 = 24.$$

Paso 2: Resta de las intersecciones de a pares

Consideramos $|B_1 \cap B_2|$. Estas son las listas donde el 1 está en la posición 1 y el 2 en la posición 2. Los $4-2 = 2$ elementos restantes pueden permutar libremente. Hay $(4-2)! = 2! = 2$ de tales listas.

Hay $\binom{4}{2} = 6$ intersecciones de a pares, y todas tienen el mismo tamaño $(4-2)!$.

$$|B_1 \cap B_2| + |B_1 \cap B_3| + |B_1 \cap B_4| + |B_2 \cap B_3| + |B_2 \cap B_4| + |B_3 \cap B_4| = \binom{4}{2}(4-2)! = 6 \times 2 = 12.$$

Paso 3: Suma de las intersecciones de a tres

El tamaño de $|B_1 \cap B_2 \cap B_3|$ corresponde a las listas donde 1, 2 y 3 están en sus posiciones respectivas. El elemento restante (4) debe ir en la posición 4. Hay $(4-3)! = 1! = 1$ de estas listas.

Hay $\binom{4}{3} = 4$ intersecciones de a tres, todas de tamaño $(4-3)!$.

$$|B_1 \cap B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_4| + |B_1 \cap B_3 \cap B_4| + |B_2 \cap B_3 \cap B_4| = \binom{4}{3}(4-3)! = 4 \times 1 = 4.$$

Paso 4: Resta de la intersección total

Finalmente, $|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4|$ es el conjunto de listas donde todos los elementos están en su posición correcta. Solo hay una lista de este tipo: $(1, 2, 3, 4)$. El tamaño es $(4-4)! = 0! = 1$.

Hay $\binom{4}{4} = 1$ de estas intersecciones.

$$|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4| = \binom{4}{4}(4-4)! = 1 \times 1 = 1.$$

Cálculo del Total de Listas "Malas"

Aplicando el Principio de Inclusión-Exclusión:

$$|B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4| = 24 - 12 + 4 - 1 = 15.$$

Conclusión: Número de Desarreglos

El número de desarreglos, D_4, es el total de listas menos las listas malas:

$$D_4 = 4! - 15 = 24 - 15 = 9.$$

Estos son:

Ejemplo 4.7.8

Los desarreglos de $\{1, 2, 3, 4\}$ son

2143	2341	2413
3142	3412	3421
4123	4312	4321

Fórmula General

No lo vemos en el curso pero se puede probar que la fórmula general es:

$$\text{cantidad de desarreglos de } \{1, 2, \dots, n\} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Una fórmula horrible (∗)

La fórmula de inclusión-exclusión es

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = {} & |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\
& - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
& + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
& - \cdots \\
& + \cdots \\
& \quad \vdots \\
& \pm |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| .
\end{aligned}$$

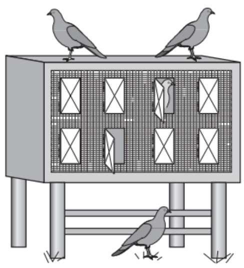
¿Se puede reescribir esto sin recurrir al uso de puntos suspensivos $(\cdots)$? Aquí reducimos la fórmula para que contenga solo una elipsis. Puedes decidir si esta nueva fórmula es mejor o solo empeoró las cosas...

$$\left| \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le a_1 < \cdots < a_k \le n} \left| \left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{a_j} \right) \right| .$$

¿Puedes inventar una notación que no requiera ni siquiera una elipsis?

4.8. El Principio de las Celdas de Dirichlet (Principio del Palomar)

El principio de las Celdas de Dirichlet es conocido popularmente como *El Principio del Palomar* ya que este es un nombre muy intuitivo y fácil de recordar pero que carece de formalidad.



Teorema 4.8.1 ▷ El principio de las Celdas de Dirichlet

Sean A y B conjuntos finitos y sea $f : A \to B$.
Si $\#(A) > \#(B)$, entonces f no es inyectiva.
Si $\#(A) < \#(B)$, entonces f no es sobreyectiva.

Contrarecíproco

Si $f : A \to B$ es inyectiva, entonces $\#(A) \leq \#(B)$.
Si $f : A \to B$ es sobreyectiva, entonces $\#(A) \geq \#(B)$.
Si f es biyectiva, entonces

$$\#(A) = \#(B).$$

La razón por la cual es conocido también *El Principio del Palomar* es clara: hay demasiados elementos en A. Podrías preguntarte: ¿qué tiene que ver este resultado con las palomas?

Imaginemos que tenemos una bandada de palomas y que las palomas viven en un palomar. El palomar está dividido en compartimentos separados llamados *agujeros*, donde las palomas se anidan.

Supongamos que tenemos p palomas y que nuestro palomar tiene h agujeros. Si $p \leq h$, entonces el palomar es lo suficientemente grande para que las palomas no tengan que compartir agujeros. Sin embargo, si $p > h$, entonces no hay suficientes agujeros para darle a cada paloma una habitación privada; algunas palomas tendrán que compartir.

Existen varios problemas matemáticos interesantes que pueden resolverse mediante el principio anterior. Aquí presentamos algunos ejemplos.

Proposición 4.8.2

Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces existen enteros positivos a y b, con $a \neq b$, tales que $n^a - n^b$ es divisible por 10.

Por ejemplo, si $n = 17$, entonces podemos restar

$$\begin{array}{rrcr} & 17^6 & = & 24.137.569 \\ - & & & \\ & 17^2 & = & 289 \\ \hline & & & 24.137.280 \end{array}$$

que es divisible por 10.

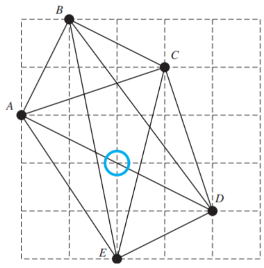
Para demostrar este resultado, usamos el hecho conocido de que un número natural es divisible por 10 si y solo si su último dígito es un cero.

Demostración

Consideremos los 11 números naturales

$$n^1,\ n^2,\ n^3,\ \ldots,\ n^{11}.$$

Los dígitos de las unidades de estos números toman valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Como solo hay diez posibles dígitos para las unidades y tenemos 11 números diferentes, dos de estos números (digamos n^a y n^b) deben tener el mismo dígito en las unidades. Por lo tanto, $n^a - n^b$ es divisible por 10. ■



Proposición 4.8.3

Dado cinco puntos distintos en un plano cuadriculado, al menos uno de los segmentos de línea determinados por estos puntos tiene un punto de la cuadrícula como su punto medio.

En otras palabras, supongamos que A, B, C, D y E son puntos plano cuadriculado distintos. Hay $\binom{5}{2} = 10$ segmentos de línea diferentes que podemos formar cuyos extremos están en el conjunto $\{A, B, C, D, E\}$. La proposición afirma que el punto medio de uno (o más) de estos segmentos de línea también debe ser un punto de la cuadrícula. Por ejemplo, considera los cinco puntos en la figura. El punto medio del segmento AD es un punto de la cuadrícula.

Para probar este resultado, recordamos la fórmula del punto medio de la geometría de coordenadas. Sean (a, b) y (c, d) dos puntos en el plano (no necesariamente puntos de la cuadrícula). El punto medio del segmento determinado por estos puntos se puede encontrar utilizando la siguiente fórmula:

$$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right).$$

Demostración

Nos dan cinco puntos de la cuadrícula distintos en el plano. Las diversas coordenadas son enteras y, por lo tanto, son pares o impares. Dadas las coordenadas de un punto de la cuadrícula, podemos clasificarlo en uno de los siguientes cuatro tipos:

- (par, par)
- (par, impar)
- (impar, par)
- (impar, impar)

dependiendo de la paridad de sus coordenadas. Observa que tenemos cinco puntos de la cuadrícula, pero solo cuatro categorías de paridad. Por lo tanto, (según El principio de las Celdas de Dirichlet) dos de estos puntos deben tener el mismo tipo de paridad. Supongamos que estos dos puntos tienen coordenadas (a, b) y (c, d). El punto medio de este segmento está en las coordenadas $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$. Dado que a y c tienen la misma paridad, $a + c$ es par, por lo tanto, $\frac{a+c}{2}$ es un entero. De igual manera, $\frac{b+d}{2}$ es un entero. Esto prueba que el punto medio es un punto de la cuadrícula. ■

El tercer ejemplo trata de sucesiones de números enteros. Una *sucesión* es simplemente una lista. Dada una sucesión de números enteros, una *subsucesión* es una lista formada eliminando elementos de la lista original y manteniendo los elementos restantes en el mismo orden en que aparecían originalmente.

Por ejemplo, la sucesión

$$1 \quad 9 \quad 10 \quad 8 \quad 3 \quad 7 \quad 5 \quad 2 \quad 6 \quad 4$$

contiene la subsucesión

$$9 \quad 8 \quad 6 \quad 4.$$

Observa que los cuatro números en la subsucesión están en orden decreciente, por lo que la llamamos una subsucesión *decreciente*. De manera similar, una subsucesión cuyos elementos están en orden creciente se llama una *subsucesión creciente*.

Afirmamos que toda sucesión de diez números enteros distintos debe contener una subsucesión de cuatro elementos que sea creciente o decreciente. La sucesión de arriba tiene una subsucesión decreciente de longitud cuatro y también una subsucesión creciente de longitud cuatro (¿dónde?). La sucesión

$$10 \quad 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 1 \quad 2$$

tiene varias subsucesiones decrecientes de longitud cuatro, pero ninguna subsucesión creciente de longitud cuatro.

Una sucesión que es creciente o decreciente se llama *monótona*. Nuestra afirmación es que toda sucesión de diez enteros distintos debe contener una subsucesión monótona de longitud cuatro. Esta afirmación es un caso especial de un resultado más general.

Teorema 4.8.4 ▷ Teorema de Erdős-Szekeres

Sea n un entero positivo. Toda sucesión de $n^2 + 1$ números enteros distintos debe contener una subsucesión monótona de longitud $n + 1$.

Nuestro ejemplo (sucesiones de longitud diez) es el caso $n = 3$ del Teorema de Erdős-Szekeres.

Demostración

Sea n un entero positivo. Supongamos, para obtener una contradicción, que existe una sucesión S de $n^2 + 1$ números enteros distintos que no contiene una subsucesión monótona de longitud $n + 1$. Es decir, todas las subsucesiones monótonas de S tienen longitud n o menos.

Sea x un elemento de la sucesión S. Etiquetamos a x con un par de enteros (u_x, d_x). El entero u_x (por "up" o hacia arriba) es la longitud de la subsucesión creciente más larga de S que comienza en x. De manera similar, d_x (por "down" o hacia abajo) es la longitud de la subsucesión decreciente más larga de S que comienza en x.

Por ejemplo, la sucesión

$$1 \quad 9 \quad 10 \quad 8 \quad 3 \quad 7 \quad 5 \quad 2 \quad 6 \quad 4$$

se etiquetaría como sigue:

1	9	10	8	3	7	5	2	6	4
$(4,1)$	$(2,5)$	$(1,5)$	$(1,4)$	$(3,2)$	$(3,2)$	$(2,2)$	$(2,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$

El elemento 4 es el último en la sucesión, por lo que recibe la etiqueta $(1,1)$ ya que las únicas sucesiones monotonas que comienzan en 4 tienen longitud uno. El elemento 9 tiene la etiqueta $(2,5)$ porque la longitud de la subsucesión creciente más larga que comienza en 9 es dos: $(9,10)$. La longitud de la subsucesión decreciente más larga que comienza en 9 es cinco: $(9,8,7,5,4)$.
Regresando a la demostración, hacemos las siguientes observaciones:

- Como no hay subsucesiones monótonas de longitud $n+1$ (o mayores), las etiquetas de la sucesión S solo usan los enteros del 1 al n.
- Afirmamos que dos elementos distintos de la sucesión no pueden tener la misma etiqueta. Para verlo, supongamos que x y y son elementos distintos de la sucesión con x apareciendo antes que y.

Sin embargo, estas dos observaciones llevan a una contradicción. Como S tiene n^2+1 elementos, por El principio de las Celdas de Dirichlet, dos de los elementos deben tener la misma etiqueta. Esto contradice la segunda observación de que no pueden tener la misma etiqueta. Por lo tanto, S debe tener una subsucesión monótona de longitud $n+1$.
■

Teorema de Cantor

El Principio del Casillero afirma que si $\#(A) > \#(B)$, no puede existir una función inyectiva $f : A \to B$. La otra cara de esta afirmación es que si $\#(A) < \#(B)$, no puede existir una función sobreyectiva $f : A \to B$. Por lo tanto, si $f : A \to B$ es una función biyectiva, entonces $\#(A) = \#(B)$.

Estas afirmaciones tienen sentido solo si A y B son conjuntos finitos. Sin embargo, es posible encontrar biyecciones entre conjuntos infinitos. Por ejemplo, aquí hay una biyección de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ definida como:

$$f(n) = \begin{cases} -n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ (n+1)/2 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Aunque es un poco incómodo ver que f es una biyección de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ solo mirando estas fórmulas, si calculamos algunos valores de f (para algunos valores pequeños de n), la imagen se aclara:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5

Claramente, f es una función uno a uno (cada entero aparece a lo sumo una vez en la fila inferior de la tabla) y es sobreyectiva (cada entero aparece en algún lugar de la fila inferior).

Dado que existe una biyección de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, tiene algo de sentido escribir $\#(\mathbb{N}) = \#(\mathbb{Z})$. Esto significa que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ "el mismo tamaño" a pesar de ser ambos infinitos. Esto puede parecer contraintuitivo porque $\mathbb{Z}$ podría parecer el "doble de infinito" que $\mathbb{N}$. Sin embargo, la biyección muestra que podemos emparejar los elementos de los dos conjuntos uno a uno.

Es razonable definir que dos conjuntos tienen el *mismo tamaño* si hay una biyección entre ellos. En este sentido, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ tienen el *mismo tamaño*. ¿Tienen todos los conjuntos infinitos el *mismo tamaño*? La respuesta sorprendente es no.

Demostraremos que $\mathbb{Z}$ y $2^{\mathbb{Z}}$ (el conjunto de los enteros y el conjunto de todos los subconjuntos de los enteros) no tienen el *mismo tamaño*. Aquí está el resultado general:

Teorema 4.8.5 ▷ Teorema de Cantor

Sea X un conjunto. Si $f : X \to 2^X$, entonces f no es sobreyectiva.

Dado que $f(x)$ es un conjunto, de hecho un subconjunto de X, la condición $x \notin f(x)$ tiene sentido.

Demostración

Sea X un conjunto y sea $f : X \to 2^X$. Para demostrar que f no es sobreyectiva, debemos encontrar un $A \in 2^X$ (es decir, $A \subset X$) tal que no existe $x \in X$ con $f(x) = A$. En otras palabras, A es un conjunto que f "no alcanza". Para este fin, definamos

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

Afirmamos que no existe $a \in X$ con $f(x) = A$. Supongamos, por contradicción, que existe un $x \in X$ tal que $f(x) = A$. Consideremos:

- Si $x \in A$, entonces, como $A = f(x)$, tenemos $x \in f(x)$. Por lo tanto, por definición de A, $a \notin f(x)$; esto es una contradicción.
- Si $x \notin A = f(x)$, entonces, por definición de A, $x \in A$. Esto también es una contradicción.

Ambos casos ($x \in A$ y $x \notin A$) conducen a contradicciones, por lo tanto, nuestra suposición [de que existe un $x \in X$ con $f(x) = A$] es falsa, y por lo tanto f no es sobreyectiva. ■

Ejemplo 4.8.6

Ilustramos la demostración del Teorema 3.28 con un ejemplo específico. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Sea $f : A \to 2^A$ definido como se muestra en la siguiente tabla.

x	$f(x)$	$x \in f(x)$?
1	$\{1, 2\}$	sí
2	$\{3\}$	no
3	$\emptyset$	no

Entonces, $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Como $1 \in f(1)$, pero $2 \notin f(2)$ y $3 \notin f(3)$, tenemos $X = \{2, 3\}$. Nota que no existe $x \in X$ tal que $f(x) = A$.

La letra $\aleph$, alef o aleph, es la primera letra del alfabeto hebreo. Que $\#(\mathbb{N}) = \aleph_0$ tiene sentido ya que George Cantor era de ascendencia judía.

La implicación del Teorema de Cantor es que $\#(\mathbb{Z}) \neq \#\left(2^{\mathbb{Z}}\right)$. En un sentido correcto, $2^{\mathbb{Z}}$ es *más infinito* que $\mathbb{Z}$. Cantor desarrolló estas nociones creando un nuevo conjunto de números *más allá* de los números naturales; llamó a estos números *cardinales transfinitos*. Los conjuntos infinitos más pequeños, probó Cantor, tienen el mismo tamaño que $\mathbb{N}$. El tamaño de $\mathbb{N}$ se denota por el número transfinito llamado $\aleph_0$ (aleph cero).

Observación 4.8.7

No puede existir una función uno a uno de un conjunto a un conjunto más pequeño; este hecho se conoce como El principio de las Celdas de Dirichlet. Ilustramos cómo este hecho puede ser usado en demostraciones y problemas de conteo. También sabemos que no puede existir una función sobreyectiva de un conjunto a un conjunto más grande. Demostramos que para cualquier conjunto X, el conjunto 2^X es más grande, incluso para conjuntos X *infinitos*.

Capítulo 5

Teoría de Grafos

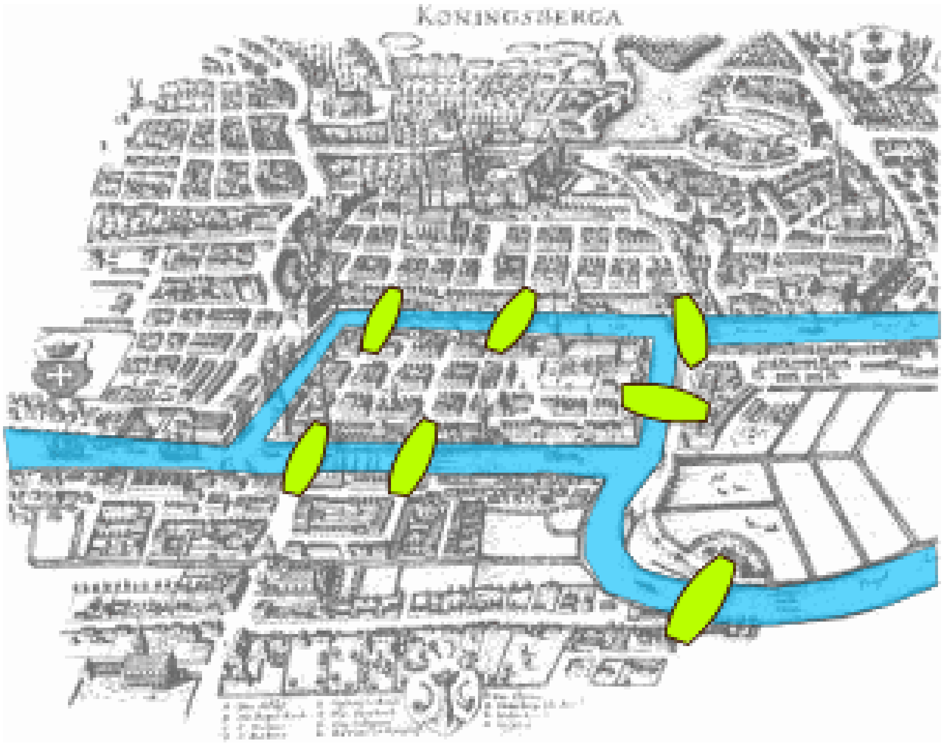
5.1. Conceptos Fundamentales de la Teoría de Grafos

La teoría de grafos ha existido como una rama de las matemáticas por poco tiempo; el primer libro sobre teoría de grafos fue publicado hace menos de 100 años. Si bien el primer problema relacionado con lo que ahora llamamos teoría de grafos data de 1735, ha sido el advenimiento de las computadoras lo que ha demostrado la verdadera utilidad de la materia. Es una disciplina con una belleza simple y una profundidad sorprendente. Muchas de las principales áreas de la teoría de grafos pueden ser entendidas casi sin prerrequisitos matemáticos; sin embargo, la nueva investigación en el tema genera cientos de artículos de investigación revisados por pares cada año.

En este capítulo, exploraremos solo algunas de las formas en que se pueden usar los grafos y sus propiedades para resolver problemas que aparecen en ciencias de la computación, matemáticas y casi cualquier otra ciencia aplicada.

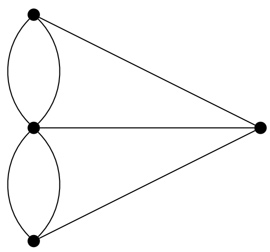
Motivación 5.1.1

En la época de Euler, en la ciudad de Königsberg en Prusia, había un río que contenía dos islas. Las islas estaban conectadas a las orillas del río por siete puentes (como se ve más abajo). Los puentes eran muy hermosos, y en sus días libres, la gente del pueblo pasaba el tiempo caminando sobre ellos. Con el paso del tiempo, surgió una pregunta: ¿Era posible planear una caminata de tal manera que se cruzara cada puente una y solo una vez? Euler fue capaz de responder a esta pregunta. ¿Y tú?



La Teoría de Grafos es un área relativamente nueva de las matemáticas, estudiada por primera vez por el súper famoso matemático Leonhard Euler en 1735. Desde entonces ha florecido en casi todas las ramas de la matemática y actualmente es un área activa de investigación.

El problema anterior, conocido como los *Siete Puentes de Königsberg*, es el problema que inspiró originalmente la teoría de grafos. Considera un problema "diferente": Abajo hay un dibujo de cuatro puntos conectados por algunas líneas. ¿Es posible trazar cada línea una y solo una vez (sin levantar el lápiz, comenzando y terminando en un punto)?

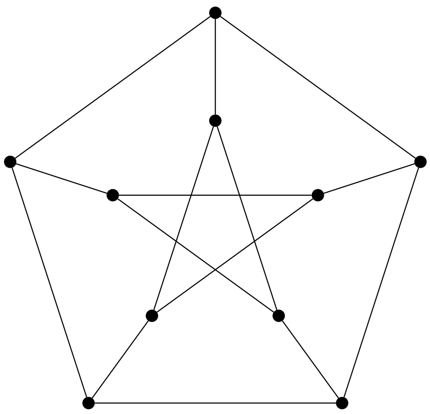


Existe una conexión obvia entre estos dos problemas. Cualquier camino en el dibujo de puntos y líneas corresponde exactamente a un camino sobre los puentes de Königsberg. Imágenes como este dibujo de puntos y líneas se llaman **grafos** (aunque técnicamente, el de arriba es un **multigrafo**). Un grafo está compuesto por una colección de puntos llamados **vértices** y líneas que conectan esos puntos llamadas **aristas**. Cuando dos vértices están conectados por una arista, decimos que son **adyacentes**.

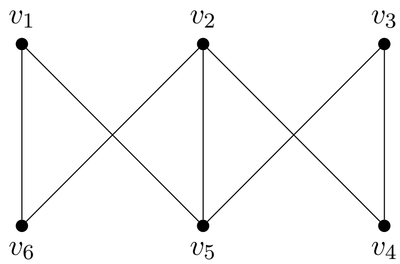
Actividad de Introducción

Para familiarizarnos con los grafos y los tipos de preguntas que queremos hacer sobre ellos, exploremos cuatro ejemplos de grafos.

G_1:



G_2:



G_3:

vértice	**adyacente a**
a	b, c
b	a, f
c	a, d, e
d	c, e, f
e	c, d
f	b, d

G_4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El grafo G_3 se presenta como una **lista de adyacencia** donde cada vértice tiene una lista de qué otros vértices son adyacentes a él. El grafo G_4 se presenta como una **matriz de adyacencia** donde las filas y columnas corresponden a los vértices y las entradas son 1 si los vértices son adyacentes y 0 en caso contrario. Antes de responder las preguntas siguientes, podría ser útil dibujar una representación más tradicional de estos grafos.

1. Primero, contemos el número de vértices y aristas en cada grafo.

2. Llamamos al número de aristas incidentes a un vértice particular (es decir, el número de aristas que "salen" del vértice) el **grado del vértice**. Una lista de los grados de todos los vértices en orden no creciente se llama una **secuencia de grados** del grafo. Encuentra la secuencia de grados para cada grafo.

3. A menudo nos interesan los caminos entre vértices en un grafo. Un grafo es **conexo** si existe un camino entre cada par de vértices. A veces hay un camino que empieza en un vértice y eventualmente regresa a él, lo cual se llama un **ciclo**.

   a) ¿Cuáles de los grafos son conexos?

   b) ¿Cuáles de los grafos contienen ciclos?

   c) Los grafos que son conexos y no contienen ciclos se llaman **árboles**. Para cada grafo, ¿cuántas aristas debes eliminar para convertirlo en un árbol? (Si ya es un árbol, la respuesta sería 0).

4. ¿Para cuáles de los grafos es posible dibujar el grafo de tal manera que no se crucen las aristas?

5. Supongamos que coloreamos cada vértice de un grafo de modo que los vértices adyacentes siempre tengan colores diferentes. El menor número de colores necesario para hacer esto se llama el **número cromático** del grafo. Encuentra el número cromático para cada grafo.

   Nota: Si los grafos representaran amistades entre personas, entonces el número cromático nos diría el número mínimo de grupos que necesitaríamos si quisiéramos dividir a todos en grupos de personas que aún no son amigas.

5.2. ¿Qué es un Grafo?

Antes de empezar a estudiar grafos, necesitamos acordar qué es un grafo. Aunque casi siempre pensamos en los grafos como imágenes (puntos conectados por líneas), esto es bastante ambiguo. ¿Las líneas tienen que ser rectas? ¿Importa cuán largas son las líneas o cuán grandes son los puntos? ¿Puede haber dos líneas conectando el mismo par de puntos? ¿Puede una línea conectar tres puntos?

La forma en que evitamos ambigüedades en matemáticas es proporcionar *definiciones* concretas y rigurosas. Elaborar buenas definiciones no es fácil, pero es increíblemente importante. La definición es el punto de partida acordado desde el cual proceden todas las verdades en matemáticas. ¿Existe un grafo sin aristas? Tenemos que mirar la definición para ver si esto es posible.

Definición 5.2.1 ▷ Grafo

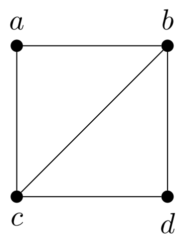
Un **grafo** es un par ordenado $G = (V, E)$ que consiste en un conjunto no vacío V (llamado los **vértices**) y un conjunto E (llamado las **aristas**) de subconjuntos de dos elementos de V.

Extraño. En ninguna parte de la definición se habla de puntos o líneas. A partir de la definición, un grafo podría ser

$$(\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}).$$

Aquí tenemos un grafo con cuatro vértices (las letras a, b, c, d) y cinco aristas.

Mirar conjuntos y subconjuntos de 2 elementos es difícil de procesar. Por eso solemos dibujar una representación de estos conjuntos. Ponemos un punto para cada vértice y conectamos dos puntos con una línea precisamente cuando esos dos vértices son uno de los subconjuntos de 2 elementos en nuestro conjunto de aristas. Así, una forma de dibujar el grafo descrito anteriormente es esta:



Sin embargo, también podríamos haber dibujado el grafo de manera diferente. Por ejemplo, cualquiera de estos:

Deberíamos tener cuidado con lo que significa que dos grafos sean “el mismo”. En realidad, dada nuestra definición, esto es fácil. ¿Son iguales los conjuntos de vértices? ¿Son iguales los conjuntos de aristas? Sabemos lo que significa que los conjuntos sean iguales, y los grafos no son más que un par de dos tipos especiales de conjuntos.

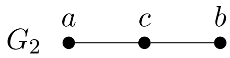
Ejemplo 5.2.2

¿Son iguales los grafos de abajo?

$$G_1 = (\{a, b, c\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}\}); \quad G_2 = (\{a, b, c\}, \{\{a, c\}, \{c, b\}\}).$$

Solución No. Aquí los conjuntos de vértices de cada grafo son iguales, lo cual es un buen comienzo. Además, ambos grafos tienen dos aristas. En el primer grafo, tenemos las aristas $\{a, b\}$ y $\{b, c\}$, mientras que en el segundo grafo tenemos las aristas $\{a, c\}$ y $\{c, b\}$. Ahora bien, el problema es que $\{b, c\} = \{c, b\}$, así que esa no es la cuestión. La cuestión es que $\{a, b\} \neq \{a, c\}$. Como los conjuntos de aristas de los dos grafos no son iguales (como conjuntos), los grafos no son iguales (como grafos).

Incluso si dos grafos no son *iguales*, pueden ser *básicamente* los mismos. Los grafos del ejemplo anterior podrían dibujarse así:



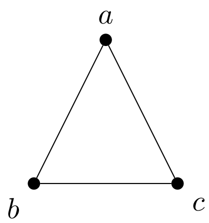
Los grafos que son básicamente los mismos (pero quizás no iguales) se llaman **isomorfos**.

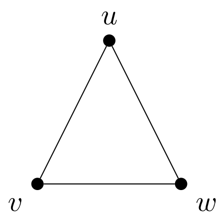
Daremos una definición precisa de este término tras un rápido ejemplo:

Ejemplo 5.2.3

Considera los grafos: $G_1 = (V_1, E_1)$ donde $V_1 = \{a, b, c\}$ y $E_1 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$; $G_2 = (V_2, E_2)$ donde $V_2 = \{u, v, w\}$ y $E_2 = \{\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}\}$. ¿Son estos grafos los mismos?

Solución Los dos grafos NO son iguales. Es suficiente notar que $V_1 \neq V_2$ ya que $a \in V_1$ pero $a \notin V_2$. Sin embargo, ambos grafos consisten en tres vértices con aristas que conectan cada par de vértices. Podemos dibujarlos de la siguiente manera:





Intuitivamente, los grafos son **isomorfos** si son básicamente los mismos, o mejor dicho, si son los mismos excepto por los nombres de los vértices. Para precisar el concepto de renombrar vértices, damos la siguiente definición:

Definición 5.2.4 ▷ Isomorfismo

Un **isomorfismo** entre dos grafos G_1 y G_2 es una biyección $f : V_1 \to V_2$ entre los vértices de los grafos tal que $\{a, b\}$ es una arista en G_1 si y solo si $\{f(a), f(b)\}$ es una arista en G_2.
Dos grafos son **isomorfos** si existe un isomorfismo entre ellos. En este caso escribimos $G_1 \cong G_2$.

Un isomorfismo es simplemente una función que renombra los vértices. Debe ser una biyección para que cada vértice obtenga un nuevo nombre. Estos vértices recién nombrados deben estar conectados por aristas precisamente cuando estaban conectados por aristas con sus nombres antiguos.

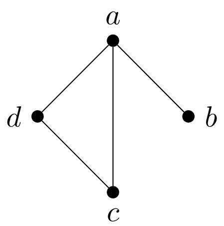
Ejemplo 5.2.5

Decide si los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son iguales o isomorfos.

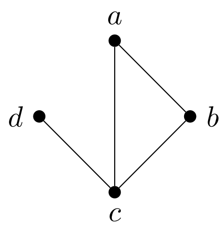
$$V_1 = \{a, b, c, d\}, \quad E_1 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}\}$$

$$V_2 = \{a, b, c, d\}, \quad E_2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$$

Solución Los grafos NO son iguales, ya que $\{a, d\} \in E_1$ pero $\{a, d\} \notin E_2$. Sin embargo, como ambos grafos contienen el mismo número de vértices y el mismo número de aristas, *podrían* ser isomorfos (esto no es suficiente en la mayoría de los casos, pero es un buen comienzo).
Podemos intentar construir un isomorfismo. ¿Qué tal si decimos $f(a) = a, f(b) = b, f(c) = c, f(d) = d$? Esto es definitivamente una biyección, pero para asegurarnos de que es un isomorfismo, debemos asegurarnos de que respeta la relación de aristas. El vértice a está conectado a b y c en G_2. En G_1, $f(a) = a$ está conectado a $f(b) = b$ y $f(c) = c$. Esto es definitivamente una biyección, pero debemos asegurarnos de que respete la relación de aristas. En G_1, los vértices a y b están conectados por una arista. En G_2, $f(a) = a$ y $f(b) = b$ están conectados por una arista. Hasta ahora todo bien, pero debemos verificar las otras tres aristas. La arista $\{a, c\}$ en G_1 corresponde a $\{f(a), f(c)\} = \{a, c\}$, pero aquí tenemos un problema. No hay arista entre b y d en G_2. Por lo tanto, f NO es un isomorfismo.
No toda la esperanza está perdida. Solo porque f no sea un isomorfismo no significa que no haya un isomorfismo. Podemos intentarlo de nuevo. En este punto, podría ser útil dibujar los grafos para ver cómo se corresponden.



G_1



G_2

Alternativamente, notemos que en G_1, el vértice a es adyacente a cualquier otro vértice. En G_2, también hay un vértice con esta propiedad: c. Entonces, construimos la biyección $g : V_1 \to V_2$ definiendo $g(a) = c$ para empezar. A continuación, ¿a dónde deberíamos enviar b? En G_1, el vértice b es solo adyacente al vértice a. Hay exactamente un vértice así en G_2, a saber, d. Por lo tanto, sea $g(b) = d$. En cuanto a los dos últimos, en este ejemplo, tenemos una elección libre: sea $g(c) = b$ y $g(d) = a$ (intercambiar estos también estaría bien).
Deberíamos verificar que esto es realmente un isomorfismo. Definitivamente es una biyección. Debemos asegurarnos de que las aristas se respeten. Las cuatro aristas en G_1 son:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}.$$

Bajo el isomorfismo propuesto, estas se convierten en:

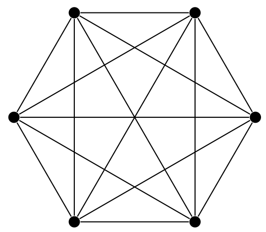
$$\{g(a), g(b)\}, \{g(a), g(c)\}, \{g(a), g(d)\}, \{g(c), g(d)\}$$

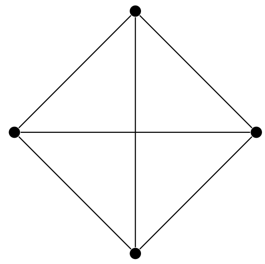
$$\{c, d\}, \{c, b\}, \{c, a\}, \{b, a\},$$

que son precisamente las aristas en G_2. Por lo tanto, g es un isomorfismo, así que $G_1 \cong G_2$.

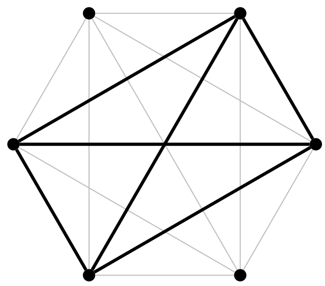
A veces hablaremos de un grafo con un nombre especial (como K_n o el *grafo de Petersen*) o quizás dibujaremos un grafo sin ninguna etiqueta. En este caso, nos estamos refiriendo realmente a *todos* los grafos isomorfos a cualquier copia de ese grafo particular. Una colección de grafos isomorfos a menudo se llama una **clase de isomorfismo**[1].

Existen otras relaciones entre grafos que nos importan, además de la igualdad y ser isomorfos. Por ejemplo, compara el siguiente par de grafos:





Estos definitivamente no son isomorfos, pero nota que el grafo de la derecha parece que podría ser parte del grafo de la izquierda, especialmente si lo dibujamos así:



Nos gustaría decir que el grafo más pequeño es un *subgrafo* del más grande. Deberíamos dar una definición cuidadosa de esto. De hecho, hay dos nociones razonables para lo que debería significar un subgrafo.

Si cada par de vértices está conectado por una arista. Dado que un grafo está determinado completamente por qué vértices son adyacentes a qué otros vértices, solo hay un grafo completo con un número dado de vértices. Les damos un nombre especial: K_n es el **grafo completo** con n vértices.

Cada vértice en K_n es adyacente a otros $n-1$ vértices. Llamamos al número de aristas que emanan de un vértice dado el **grado** de ese vértice. Así que cada vértice en K_n tiene grado $n-1$. ¿Cuántas aristas tiene K_n? Uno podría pensar que la respuesta debería ser $n(n-1)$, ya que contamos $n-1$ aristas n veces (una por cada vértice). Sin embargo, cada arista es incidente a 2 vértices, por lo que contamos cada arista exactamente dos veces. Por lo tanto, hay $n(n-1)/2$ aristas en K_n. Alternativamente, podemos decir que hay $\binom{n}{2}$ aristas, ya que para dibujar una arista debemos elegir 2 de los n vértices.

Definición 5.2.6 ▷ Subgrafos

Decimos que $G' = (V', E')$ es un **subgrafo** de $G = (V, E)$, y escribimos $G' \subset G$, siempre que $G' = (V', E')$ sea un grafo en si mismo, $V' \subset V$ y $E' \subset E$.
Decimos que $G' = (V', E')$ es un **subgrafo inducido** de $G = (V, E)$ siempre que $G' \subset G$ y cada arista en E cuyos vértices todavía están en V' es también una arista en E'.

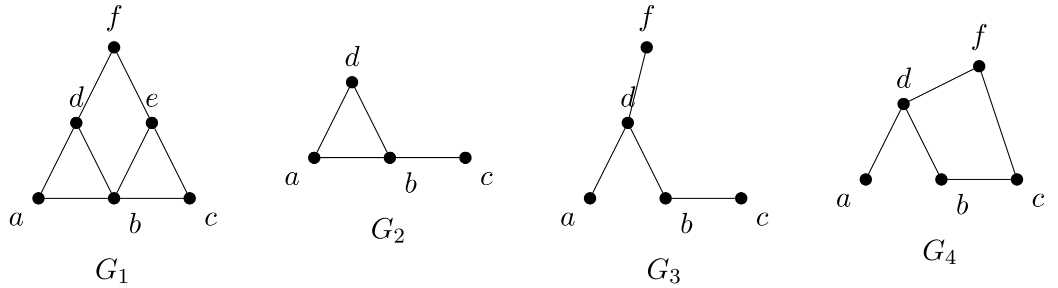
Nota que todo subgrafo inducido es también un subgrafo ordinario, pero no a la inversa. Piensa en un subgrafo como el resultado de eliminar algunos vértices y aristas del grafo más

[1]Esto no es diferente de la geometría, donde podríamos tener más de una copia de un triángulo particular. Allí, en lugar de *isomorfo* decimos *congruente*.

grande. Para que el subgrafo sea un subgrafo inducido, todavía podemos eliminar vértices, pero ahora solo eliminamos aquellas aristas que incluían los vértices eliminados.

Ejemplo 5.2.7

Considera los grafos:

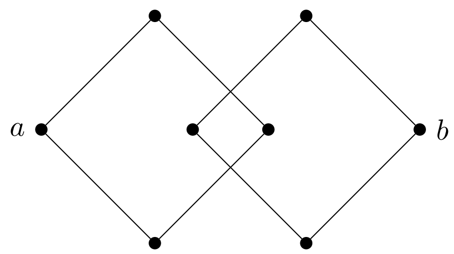


Aquí, G_2 y G_3 son subgrafos de G_1. Pero solo G_2 es un subgrafo **inducido**. Cada arista en G_1 que conecta vértices en G_2 es también una arista en G_2. En G_3, la arista $\{a, b\}$ está en E_1 pero no en E_3, aunque los vértices a y b están en V_3.
El grafo G_4 NO es un subgrafo de G_1, aunque parezca que todo lo que hicimos fue eliminar el vértice e. La razón es que en E_4 tenemos la arista $\{c, f\}$, pero esto no es un elemento de E_1, por lo que no tenemos la condición requerida $E_4 \subset E_1$.

Volvamos a algunas definiciones básicas de la teoría de grafos. Observa que todos los grafos que hemos dibujado hasta ahora tienen la propiedad de que ningún par de vértices está conectado más de una vez, y ningún vértice está conectado a sí mismo. A veces, a estos grafos se les llama **simples**, aunque nosotros simplemente los llamaremos **grafos**. Esto se debe a que nuestra definición de un grafo dice que las aristas forman un conjunto de subconjuntos de 2 elementos de los vértices. Recuerda que no tiene sentido decir que un conjunto contiene un elemento más de una vez. Por lo tanto, ningún par de vértices puede estar conectado por una arista más de una vez. Además, como cada arista debe ser un conjunto que contiene dos vértices, no podemos tener un solo vértice conectado a sí mismo por una arista.

Dicho esto, hay ocasiones en las que queremos considerar aristas dobles (o más) y bucles de una sola arista. Por ejemplo, el “grafo” que dibujamos para el problema de los Puentes de Königsberg tenía dos puentes que conectaban una isla particular con la orilla cercana. Llamaremos a estos objetos **multigrafos**. Esto es un buen nombre: un *multiconjunto* es un conjunto en el que se nos permite incluir un solo elemento varias veces.

Los grafos de arriba también son **conexos**: puedes llegar de cualquier vértice a cualquier otro vértice siguiendo algún camino de aristas. Un grafo que no es conexo puede ser pensado como dos grafos separados dibujados cerca uno del otro. Por ejemplo, el siguiente grafo NO es conexo porque no hay camino de a a b:



Los vértices en un grafo no siempre tienen aristas entre ellos. Si añadimos todas las aristas posibles, entonces el grafo resultante se llama **completo**. Es decir, un grafo es completo si cada par de vértices está conectado por una arista. Dado que un grafo está determinado completamente por qué vértices son adyacentes a qué otros vértices, solo hay un grafo completo con un número dado de vértices. Les damos un nombre especial: K_n es el **grafo completo** con n vértices.

Cada vértice en K_n es adyacente a otros $n-1$ vértices. Llamamos al número de aristas que *inciden* en un vértice dado el **grado** de ese vértice. Así que cada vértice en K_n tiene grado $n-1$. ¿Cuántas aristas tiene K_n? Uno podría pensar que la respuesta debería ser $n(n-1)$, ya que contamos $n-1$ aristas n veces (una por cada vértice). Sin embargo, cada arista es incidente a 2 vértices, por lo que contamos cada arista exactamente dos veces. Por lo tanto, hay $n(n-1)/2$ aristas en K_n. Alternativamente, podemos decir que hay $\binom{n}{2}$ aristas, ya que para dibujar una arista debemos elegir 2 de los n vértices.

En general, si conocemos los grados de todos los vértices en un grafo, podemos encontrar el número de aristas. La suma de los grados de todos los vértices siempre será el *doble* del número de aristas, ya que cada arista añade al grado de dos vértices. ¡Observa que esto significa que la suma de los grados de todos los vértices en cualquier grafo debe ser par!

Este es nuestro primer ejemplo de un resultado general sobre todos los grafos. Parece bastante inocente, pero lo usaremos para demostrar todo tipo de otros enunciados. Así que démosle un nombre y enunciémoslo formalmente.

Lema 5.2.8 ▷ Lema del Apretón de Manos

En cualquier grafo, la suma de los grados de los vértices en el grafo es siempre el doble del número de aristas.

El lema del apretón de manos[2] a veces se llama la *fórmula de la suma de grados*, y se puede escribir simbólicamente como

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2e.$$

Aquí estamos usando la notación $d(v)$ para el grado del vértice v.

Demostración

Consideremos la suma de los grados $S = \sum_{v \in V} d(v)$.
Realizaremos un argumento de conteo doble analizando la contribución de cada arista $e \in E$ a esta suma total S. Sea $e \in E$ una arista arbitraria. Distinguimos dos casos:

1. **Caso 1: e no es un lazo (loop).** La arista e conecta dos vértices distintos, digamos $u, v \in V$ (con $u \neq v$). Por definición de grado, esta arista e se cuenta exactamente una vez para el grado de u (contribuye 1 a $d(u)$) y exactamente una vez para el grado de v (contribuye 1 a $d(v)$). No contribuye al grado de ningún otro vértice. La contribución total de e a la suma S es $1 + 1 = 2$.

2. **Caso 2: e es un lazo.** La arista e conecta un vértice $v \in V$ consigo mismo ($e = \{v, v\}$). Por convención en teoría de grafos, un lazo en v contribuye con 2 unidades al grado de dicho vértice ($d(v)$). No contribuye al grado de ningún otro vértice. La contribución total de e a la suma S es 2.

En ambos casos, cada arista $e \in E$ contribuye exactamente con 2 a la suma total S.
Podemos entonces reescribir la suma S (que originalmente sumaba sobre los vértices) como una suma sobre las aristas, donde cada término de la suma es la contribución de dicha arista:

$$S = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{e \in E} (\text{contribución de } e \text{ a la suma de grados})$$

[2] Un *lema* es un enunciado matemático que es de importancia principalmente porque se utiliza para establecer otros resultados.

Dado que la contribución de cada arista es 2, tenemos:

$$S = \sum_{e \in E} 2 = 2 \cdot |E|$$

Con lo que queda demostrado el lema. ■

A partir de lema anterior nos planteamos la siguientes preguntas:

1. ¿Existe más de un grafo con cinco vértices y seis aristas? Explica qué significa esta pregunta e indica cómo la responderías.

2. Si un grafo tiene 10 vértices, cada uno con grado 4, ¿cuántas aristas tiene?

Un uso del lema es para encontrar el número de aristas en un grafo. Para hacer esto, se te debe dar la **secuencia de grados** del grafo (o ser capaz de encontrarla). Esta es una lista del grado de cada vértice en el grafo, generalmente escrita en orden no creciente.

Ejemplo 5.2.9

¿Cuántos vértices y aristas debe tener un grafo si su secuencia de grados es $(4, 4, 3, 3, 3, 2, 1)$?

Solución El número de vértices es fácil de encontrar: es el número de grados en la secuencia, que es 7. Para encontrar el número de aristas, calculamos la suma de los grados:

$$4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 = 20.$$

Según el lema del apretón de manos, la suma de los grados es $2e$. Así que $2e = 20$, lo que significa que el número de aristas es $e = 10$.

El lema del apretón de manos también nos dice lo que no es posible.

Ejemplo 5.2.10

En un seminario de matemáticas reciente, 9 matemáticos se saludaron dándose la mano. ¿Es posible que cada matemático le haya dado la mano exactamente a 7 personas en el seminario?

Solución Parece que esto debería ser posible. Cada matemático elige a una persona con la que no darle la mano. Pero esto no puede suceder. Estamos preguntando si existe un grafo con 9 vértices donde cada vértice tiene grado 7. Si tal grafo existiera, la suma de los grados de los vértices sería $9 \cdot 7 = 63$. Esto sería el doble del número de aristas (apretones de manos), resultando en 31.5 aristas. Eso es imposible. Por lo tanto, al menos uno (de hecho, un número impar) de los matemáticos debe haberle dado la mano a un número *par* de personas en el seminario.

Podemos generalizar el ejemplo anterior para obtener la siguiente proposición.[3]

Proposición 5.2.11

En cualquier grafo, el número de vértices con grado impar debe ser par.

[3]Una *proposición* es un enunciado general en matemáticas, similar a un teorema, aunque generalmente de menor importancia.

Demostración

Supongamos que hubiera un grafo con un número impar de vértices con grado impar. Entonces, la suma de los grados en el grafo sería impar, lo cual es imposible, por el lema del apretón de manos. ■

Grafos Notables

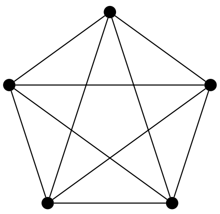
Algunos grafos se usan más que otros y reciben nombres especiales.

K_n El **grafo completo** con n vértices.

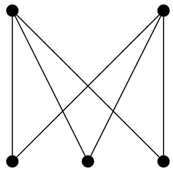
$K_{m,n}$ El **grafo bipartito completo** con conjuntos de m y n vértices.

C_n El **ciclo** con n vértices, solo un gran bucle.

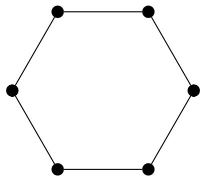
P_n El **camino** con $n+1$ vértices (por lo tanto, n aristas), solo un camino largo.



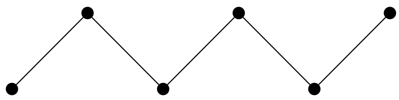
K_5



$K_{2,3}$



C_6



P_5

Definiciones de Teoría de Grafos

Hay muchas definiciones para seguir en teoría de grafos. Aquí hay un glosario de los términos que hemos usado y que pronto encontraremos.

Adyacente Dos vértices son **adyacentes** si están conectados por una arista. Dos aristas son **adyacentes** si comparten un vértice.

Árbol Un grafo conexo sin ciclos. Si eliminamos el requisito de que el grafo sea conexo, el grafo se llama **bosque**. Los vértices en un árbol con grado 1 se llaman **hojas**.

Camino Un **camino** es un recorrido que no repite vértices (o aristas), excepto quizás el primero y el último. Si un camino comienza y termina en el mismo vértice, se llama **ciclo**.

Ciclo Un camino que comienza y termina en el mismo vértice, pero no contiene otros vértices repetidos.

Circuito Euleriano Un recorrido euleriano que comienza y termina en el mismo vértice.

Coloración de Vértices Una asignación de colores a cada uno de los vértices de un grafo. Una coloración de vértices es **propia** si los vértices adyacentes siempre tienen colores diferentes.

Conexo Un grafo es **conexo** si hay un camino desde cualquier vértice a cualquier otro vértice.

Grado de un vértice El número de aristas incidentes a un vértice.

Grafo Una colección de **vértices**, algunos de los cuales están conectados por **aristas**. Más precis amente, un par de conjuntos V y E, donde V es un conjunto de vértices y E es un conjunto de subconjuntos de 2 elementos de V.

Grafo Bipartito Un grafo en el que es posible dividir los vértices en dos conjuntos disjuntos de tal manera que no haya aristas entre dos vértices del mismo conjunto.

Grafo Bipartito Completo Un grafo bipartito en el que cada vértice del primer conjunto es adyacente a cada vértice del segundo conjunto.

Grafo Completo Un grafo en el que cada par de vértices es adyacente.

Multigrafo Un multigrafo es como un grafo, pero puede contener múltiples aristas entre dos vértices, así como bucles de una sola arista (es decir, una arista de un vértice a sí mismo).

Número Cromático El número mínimo de colores necesarios en una coloración propia de un grafo.

Planar Un grafo que se puede dibujar (en el plano) sin que se crucen las aristas.

Recorrido (Walk) Una secuencia de vértices tal que los vértices consecutivos (en la secuencia) son adyacentes (en el grafo). Un recorrido en el que no se repite ninguna arista se llama **senda (trail)**, y una senda en la que no se repite ningún vértice (excepto posiblemente el primero y el último) se llama **camino (path)**.

Recorrido Euleriano Un recorrido que utiliza cada arista exactamente una vez.

Subgrafo Decimos que H es un **subgrafo** de G si cada vértice y arista de H es también un vértice o arista de G. Decimos que H es un **subgrafo inducido** de G si cada vértice de H es un vértice de G y cada par de vértices en H son adyacentes en H si y solo si son adyacentes en G.