



IEL – protokol k projektu

Andrej, Bližnák
xblizna00

14. prosince 2024

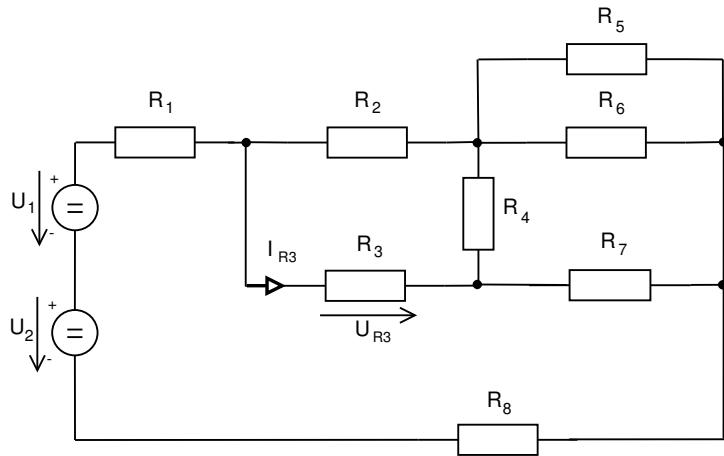
Obsah

1	Příklad 1	2
2	Příklad 2	5
3	Příklad 3	7
4	Příklad 4	10
5	Příklad 5	13
6	Shrnutí výsledků	15

Příklad 1

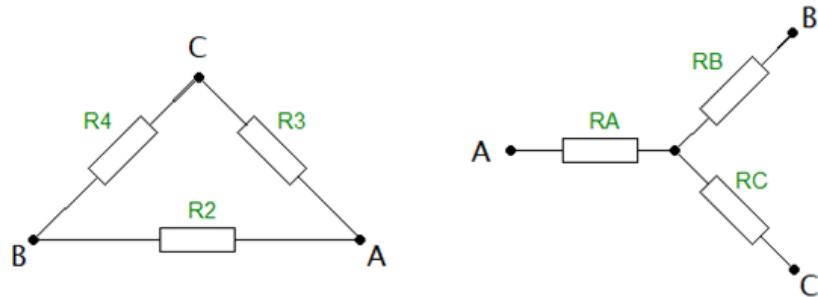
Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
E	115	55	485	660	100	340	575	815	255	225



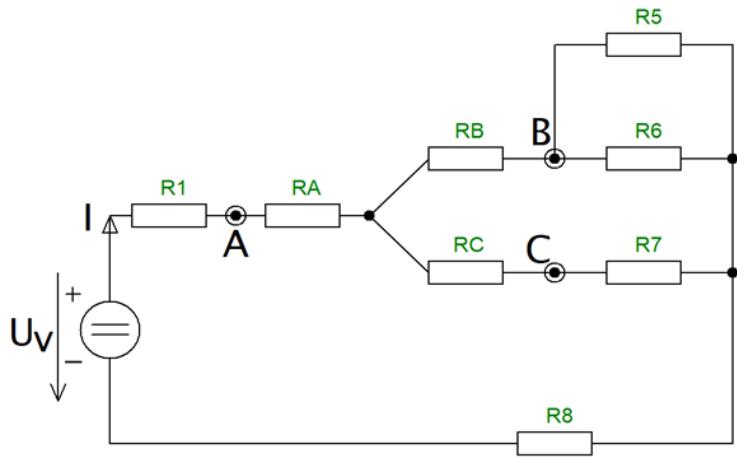
Upravíme pomocou trojuholníku...

$$R_A = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = 60 \Omega \quad R_B = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 204 \Omega \quad R_C = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 30,9091 \Omega$$



Zjednodušíme zdroje...

$$U_V = U_1 + U_2 = 170 [V]$$

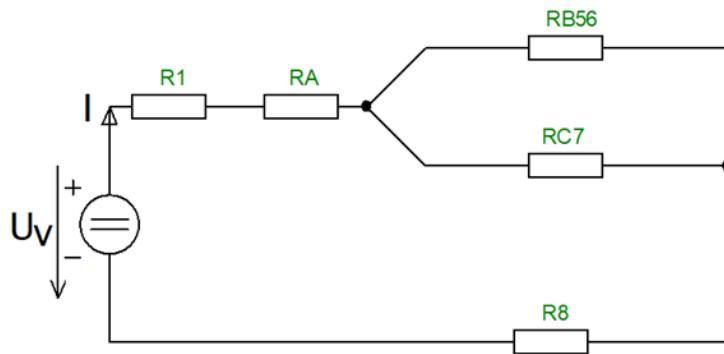


Zjednodušíme rezistory R_5, R_6, R_B a $R_C, R_7\dots$

$$R_{C7} = R_C + R_7 = 285.9091 \Omega$$

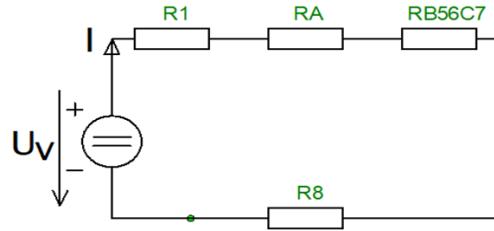
$$R_{56} = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} = 337.1403 \Omega$$

$$R_{B56} = R_{56} + R_B = 541.1403 \Omega$$

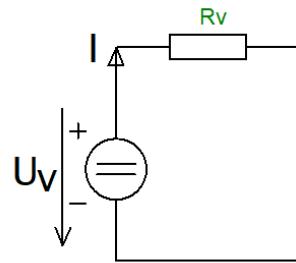


Zjednodušujeme až kým nedostaneme obvod s jedným rezistorom...

$$R_{B56C7} = \frac{R_{B56} \cdot R_{C7}}{R_{B56} + R_{C7}} = 187,0710 \Omega$$



$$R_V = R_1 + R_A + R_{B56C7} + R_8 = 957,0710 \Omega$$



Vypočítame celkový prúd obvodu...

$$I_V = \frac{U_V}{R_V} = \frac{170}{957,0710} = 0,1776 [A]$$

Prúd a napätie $R_3\dots$

$$U_{RA} = I_V \cdot R_A = 10,656 [V]$$

$$U_{R1} = I_V \cdot R_1 = 86,136 [V]$$

$$U_{RB56C7} = I_V \cdot R_{B56C7} = 33,2238 [V]$$

$$U_{R8} = I_V \cdot R_8 = 39,96 [V]$$

$$I_{RC7} = \frac{U_{RB56C7}}{R_{C7}} = 0,1162 [A]$$

$$U_{R7} = I_{RC7} \cdot R_7 = 29,631 [V]$$

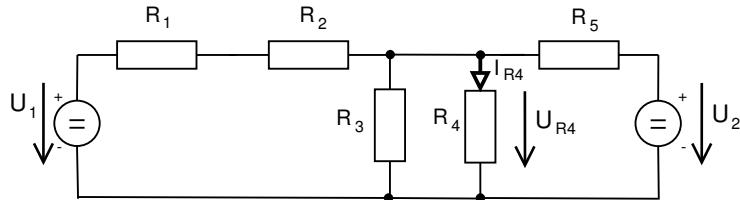
$$U_{R3} = U_V - U_{R1} - U_{R7} - U_{R8} = 14,273 [V]$$

$$I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R_3} = \frac{14,273}{100} = 0,14273 [A]$$

Příklad 2

Stanovte napětí U_{R4} a proud I_{R4} . Použijte metodu Théveninovy věty.

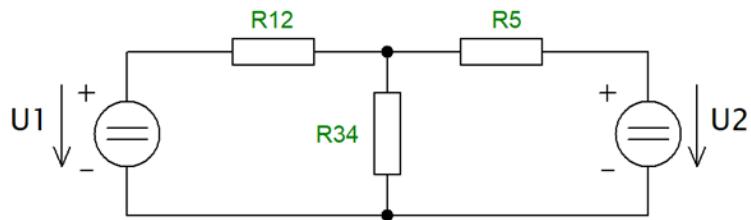
sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
E	250	150	335	625	245	600	300



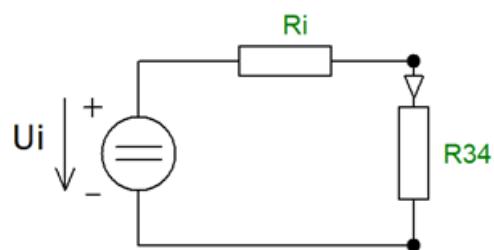
Sčítame odpory R_1 , R_2 a R_3 , R_4 ...

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 960 [\Omega]$$

$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = 173.9645 [\Omega]$$



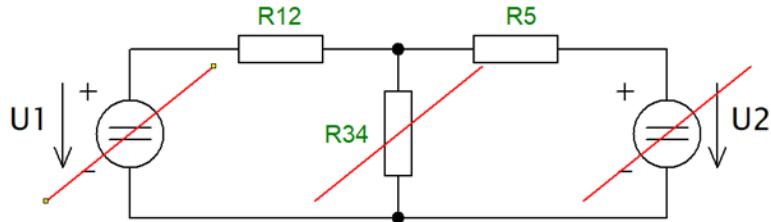
Vytvoríme náhradný obvod...



Výpočet prúdu...

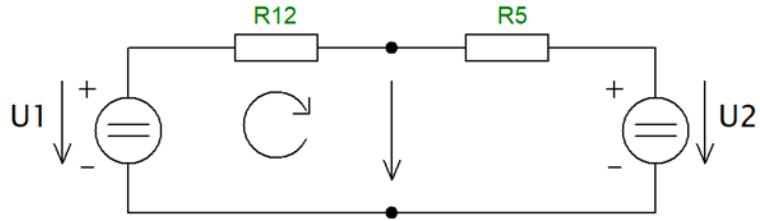
$$I_{R34} = \frac{U_i}{R_i + R_{34}}$$

Poznáme len R_{34} , preto R_i a U_i dopočítame...



$$R_i = \frac{R_{12} \cdot R_5}{R_{12} + R_5}$$

Volíme "smyčku" a zostavujeme rovnicu...



$$R_{12} \cdot I_x + R_5 \cdot I_x + U_2 - U_1 = 0$$

$$I_x = \frac{U_1 - U_2}{R_{12} + R_5} = 0,0764 [A]$$

$$U_i = U_1 - R_{12} \cdot I_x = 173,776 [V]$$

Vrátime sa späť ku...

$$I_{R34} = \frac{U_i}{R_i + R_{34}} = 0,4317 [A]$$

a dopočítame...

$$U_{R34} = R_{34} \cdot I_{R34} = 75,1005 [V]$$

Z toho vyplýva...

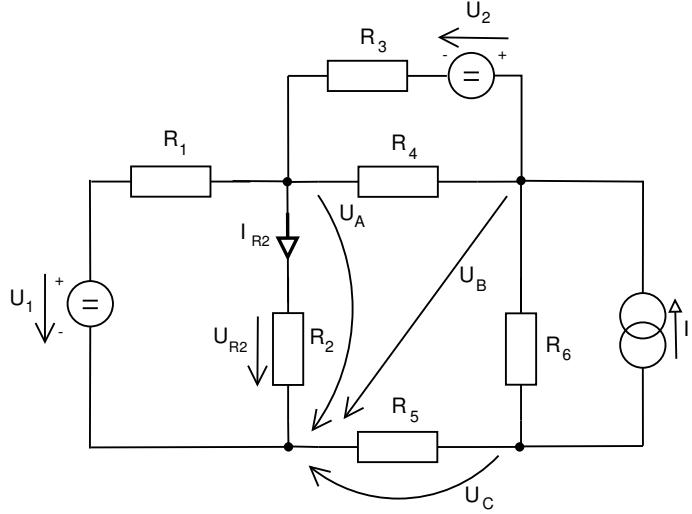
$$I_{R4} = \frac{U_{R34}}{R4} = \frac{75,1005}{600} = 0,1252 [A]$$

$$U_{R4} = I_{R4} \cdot R_4 = 0,1252 \cdot 600 = 75,12 [V]$$

Příklad 3

Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A , U_B , U_C).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	I [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]
A	120	50	0.7	53	49	65	39	32	48



Určíme smer prúdov (viz obrázok nižšie) podľa 1. Kirhofovho zákona a dosadíme do rovníc.

$$A: I_{R_1} + I_{R_4} - I_{R_3} - I_{R_2} = 0$$

$$B: I + I_{R_3} - I_{R_4} - I_{R_6} = 0$$

$$C: I_{R_6} - I_{R_5} - I = 0$$

Následne si vyjadríme každý prúd...

$$I_{R_1} = \frac{U_1 - U_A}{R_1}$$

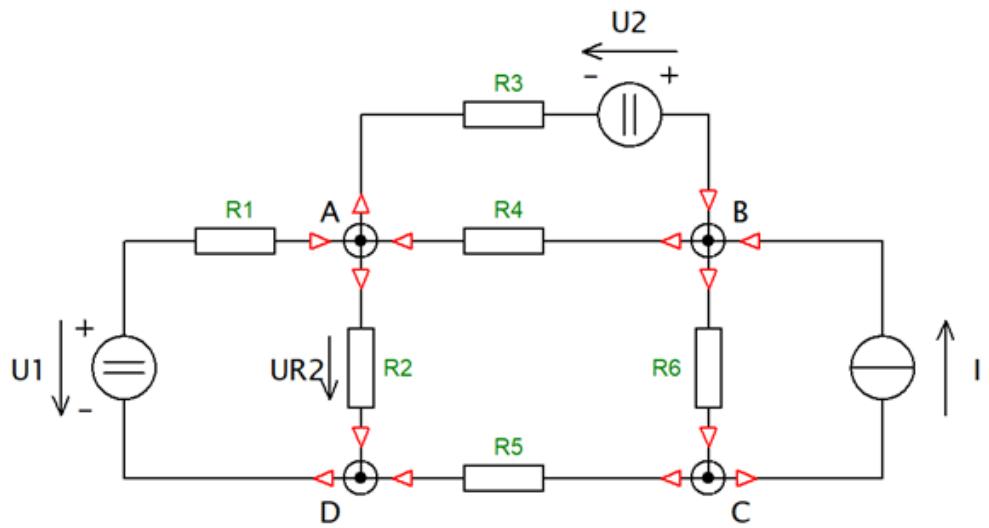
$$I_{R_2} = \frac{U_A}{R_2}$$

$$I_{R_3} = \frac{U_A + U_2 - U_B}{R_3}$$

$$I_{R_4} = \frac{U_B - U_A}{R_4}$$

$$I_{R_5} = \frac{U_C}{R_5}$$

$$I_{R_6} = \frac{U_B - U_C}{R_6}$$



("D" považujeme za náš referenčný uzol)

Dosadíme do rovníc A, B a C...

$$\begin{aligned}
 \text{A: } & \frac{U_1 - U_A}{R_1} + \frac{U_B - U_A}{R_4} - \frac{U_A + U_2 - U_B}{R_3} - \frac{U_A}{R_2} = 0 \\
 \text{B: } & I + \frac{U_A - U_2 - U_B}{R_3} - \frac{U_B - U_A}{R_4} - \frac{U_B - U_C}{R_6} = 0 \\
 \text{C: } & \frac{U_B - U_C}{R_6} - \frac{U_C}{R_5} - I = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{A: } & U_A \cdot \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) + U_B \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{U_2}{R_3} - \frac{U_1}{R_1} \\
 \text{B: } & U_A \cdot \left(-\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) + U_B \cdot \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} \right) + U_C \cdot \left(-\frac{1}{R_6} \right) = \frac{U_2}{R_3} + I \\
 \text{C: } & U_B \cdot \left(\frac{1}{R_6} \right) + U_C \cdot \left(-\frac{1}{R_6} - \frac{1}{R_5} \right) = I
 \end{aligned}$$

Pomocou "Cramerovho pravidla" vyrátame determinant...

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & 0 \\ -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_6} \\ 0 & \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_6} - \frac{1}{R_5} \end{vmatrix} =$$

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{1}{53} - \frac{1}{49} - \frac{1}{65} - \frac{1}{39} & \frac{1}{65} + \frac{1}{39} & 0 \\ -\frac{1}{65} - \frac{1}{39} & \frac{1}{48} + \frac{1}{39} + \frac{1}{65} & -\frac{1}{48} \\ 0 & \frac{1}{48} & -\frac{1}{48} - \frac{1}{32} \end{vmatrix} =$$

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{40666}{506415} & \frac{8}{195} & 0 \\ -\frac{8}{195} & \frac{193}{3120} & -\frac{1}{48} \\ 0 & \frac{1}{48} & -\frac{5}{96} \end{vmatrix} =$$

$$D = \frac{52973}{388926720}$$

Prvý stĺpec zameníme za pravé strany rovníc a vyrátame nový determinant...

$$X = \begin{vmatrix} \frac{U_2}{R_3} - \frac{U_1}{R_1} & \frac{8}{195} & 0 \\ \frac{U_2}{R_3} + I & \frac{193}{3120} & -\frac{1}{48} \\ I & \frac{1}{48} & -\frac{5}{96} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1030}{689} & \frac{8}{195} & 0 \\ \frac{191}{130} & \frac{193}{3120} & -\frac{1}{48} \\ \frac{7}{10} & \frac{1}{48} & -\frac{5}{96} \end{vmatrix} = \frac{88747}{13228800}$$

$$\frac{X}{D} = \frac{\frac{88747}{13228800}}{\frac{52973}{388926720}} = \frac{13045809}{264865} = 49,26456$$

a dopočítame...

$$U_{R_2} = 49,2646 [V]$$

$$I_{R_2} = \frac{U_{R_2}}{R_2} = \frac{49,2646}{49} = 1,005 [A]$$

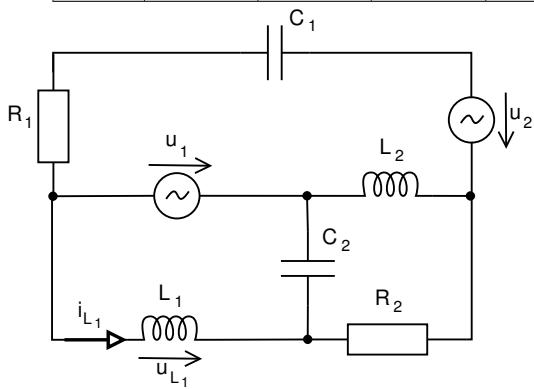
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L_1} = U_{L_1} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_1})$ určete $|U_{L_1}|$ a φ_{L_1} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μF]	C_2 [μF]	f [Hz]
E	5	3	14	13	130	60	100	65	90



Premeníme jednotky na základné...

$$L_1 = 130 \text{ [mH]} = 0,13 \text{ [H]}$$

$$L_2 = 60 \text{ [mH]} = 0,06 \text{ [H]}$$

$$C_1 = 100 \text{ [\mu F]} = 0,0001 \text{ [F]}$$

$$C_2 = 65 \text{ [\mu F]} = 0,000065 \text{ [F]}$$

Počítame impedanciu...

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$\omega = 2 \cdot 3,14 \cdot 90 \text{ [Hz]}$$

$$\omega = 180\pi$$

$$\omega = 565,4867$$

$$Z_L = j \cdot \omega \cdot L$$

$$Z_{L1} = j \cdot 180\pi \cdot 0,13$$

$$Z_{L2} = j \cdot 180\pi \cdot 0,06$$

$$Z_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

$$Z_{C1} = \frac{1}{j \cdot 180\pi \cdot 0,0001}$$

$$Z_{C2} = \frac{1}{j \cdot 180\pi \cdot 0,000065}$$

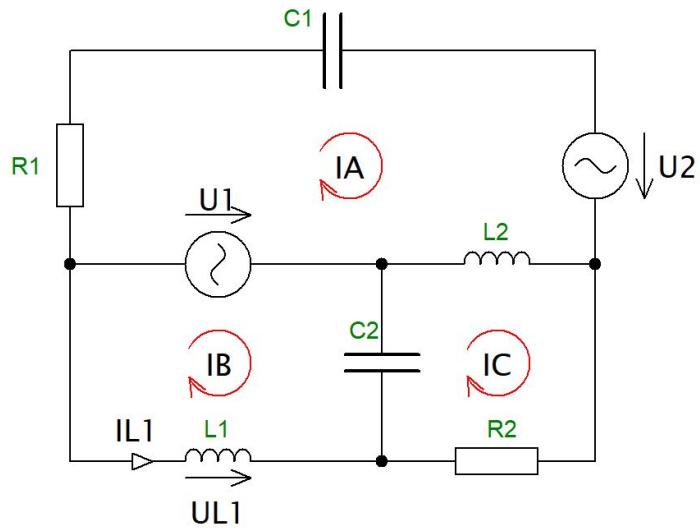
$$Z_{L1} = 73,513271j[\Omega]$$

$$Z_{L2} = 33,929202j[\Omega]$$

$$Z_{C1} = -17,68388j[\Omega]$$

$$Z_{C2} = -27,20597j[\Omega]$$

Volíme "smyčky"...



Zostavujeme maticu...

$$I_A = (R_1 + Z_{C1}) \cdot I_A + Z_{L2} \cdot (I_A - I_C) + U_2 - U_1$$

$$I_B = Z_{C2} \cdot (I_B - I_C) + Z_{L1} \cdot I_B + U_1$$

$$I_C = R_2 \cdot I_C + Z_{C2} \cdot (I_C - I_B) + Z_{L2} \cdot (I_C - I_A)$$

$$A = \begin{vmatrix} R_1 + Z_{C1} + Z_{L2} & 0 & -Z_{L2} \\ 0 & Z_{C2} + Z_{L1} & -Z_{C2} \\ -Z_{L2} & -Z_{C2} & R_2 + Z_{C2} + Z_{L2} \end{vmatrix}$$

$$U = \begin{vmatrix} U_1 - U_2 \\ -U_1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{vmatrix}$$

Dopočítame prúdy...

$$\begin{vmatrix} 14 + 16,2453j & 0 & -33,9292j \\ 0 & 46,3073j & 27.2060j \\ -33,9292j & 27.2060j & 13 + 6,7232j \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} I_A &= -0,0146 + 0,0536j \\ I_B &= -0,0089 + 0,0808j \\ I_C &= 0,0151 - 0,0273j \end{aligned}$$

Následne aj hľadané hodnoty...

Podľa "Ohmovho" zákona...

$$\begin{aligned} U_{L1} &= Z_{L1} \cdot (-I_B) \\ U_{L1} &= 5,9403 + 0,6536j [V] \end{aligned}$$

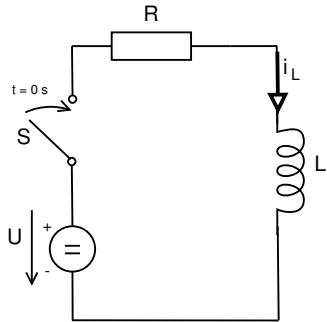
$$\begin{aligned} |U_{L1}| &= \sqrt{(Im(U_{L1}))^2 + (Re(U_{L1}))^2} \\ |U_{L1}| &= 5,9762 [V] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{L1} &= \arctan\left(\frac{Im(U_{L1})}{Re(U_{L1})}\right) \\ \varphi_{L1} &= 0,1096 [rad] \end{aligned}$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepně spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	L [H]	R [Ω]	$i_L(0)$ [A]
E	40	30	120	13



Vznik diferenciálnej rovnice...

$$i = \frac{u_R}{R}$$

$$U = u_R + u_L$$

$$i_L = \frac{u_L}{L}$$

Dosadíme jednotlivé rovnice medzi seba...

$$i = \frac{U - u_L}{R}$$

$$i \cdot R = U - u_L$$

$$u_L = U - i \cdot R$$

$$i_L = \frac{U - (i \cdot R)}{L}$$

$$U = i \cdot L + i \cdot R$$

Riešime charakteristickú rovnicu...

$$i_L(0) = i_{LP}$$

$$0 = L \cdot \lambda + R$$

$$\lambda = -\frac{R}{L}$$

Vytvárame predpoklad...

$$\begin{aligned}i(t) &= K(t) \cdot e^{-\lambda \cdot t} \\i(t) &= K(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\end{aligned}$$

Zderivujeme...

$$i'(t) = K'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + K(t) \cdot -\frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Dosadíme...

$$\frac{U}{L} = K'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} - \frac{K(t) \cdot R \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t}}{L} + \frac{R \cdot K(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}{L}$$

$$K'(t) = \frac{U}{L} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t}$$

Po integrácii dostávame "K"...

$$K = \frac{U}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} + k$$

Dosadíme ho do predpokladu...

$$\begin{aligned}i_L &= \frac{U}{R} + k \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \\k &= i_{Lp} - \frac{U}{R} \\i_L(t) &= \frac{U}{R} + (i_{Lp} - \frac{U}{R}) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\end{aligned}$$

Skúška...

$$i'(t) = (\frac{U}{L} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t}) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + (\frac{U}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} + (i_{Lp} - \frac{U}{R})) \cdot -\frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$X = i' \cdot L + i \cdot R$$

$$X = U - U + U$$

$$X = U$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky	
1	E	$U_{R3} = 14,273 \text{ [V]}$	$I_{R3} = 0,1427 \text{ [A]}$
2	E	$U_{R4} = 75,12 \text{ [V]}$	$I_{R4} = 0,1252 \text{ [A]}$
3	A	$U_{R2} = 49,2646 \text{ [V]}$	$I_{R2} = 1,005 \text{ [A]}$
4	E	$ U_{L1} = 5,9762 \text{ [V]}$	$\varphi_{L1} = 0,1096 \text{ [rad]}$
5	E	$i_L = \frac{1}{3} + (13 - \frac{1}{3}) \cdot e^{-4 \cdot t}$	