Hoofdstuk 9

Elementaire functies

9.1 Vier elementaire functies

9.2 Transformaties van de grafiek van $y = f(x)$

Oplossingen van de opdrachten

Opdracht 1 bladzijde 140

We kunnen de zijde z (in m) van een vierkant berekenen als de oppervlakte A $\left(\text{in m}^2\right)$ gekend is.

1 Vul de tabel in.

oppervlakte A $\left(\text{in m}^2\right)$	0,01	12	25	100	10^6
zijde z (in m)					

oppervlakte A $\left(\text{in m}^2\right)$	0,01	12	25	100	10^6
zijde z (in m)	0,1	$\sqrt{12}$ $\approx 3{,}46$	5	10	10^3

2 Druk z uit in functie van A.

$z = \sqrt{A}$

Opdracht 2 bladzijde 141

Een balletje rolt van een tafel van 80 cm hoog. De snelheid waarmee het balletje op de grond terecht komt, kun je benaderend berekenen met de formule $v = 4{,}43 \cdot \sqrt{h}$ met v de snelheid in meter per seconde en h de hoogte in meter.

1 Bereken de snelheid waarmee het balletje op de grond valt.

$v = 4{,}43 \cdot \sqrt{0{,}80} \approx 3{,}96$

Het balletje valt op de grond met een snelheid van $3{,}96$ m/s.

2 Een balletje valt van een kast en komt op de grond terecht met een snelheid van 6,86 m/s.
Hoe hoog is de kast?

$6{,}86 = 4{,}43 \cdot \sqrt{h} \;\Rightarrow\; h = \left(\dfrac{6{,}86}{4{,}43}\right)^2 \approx 2{,}40$

De kast is $2{,}40$ m hoog.

Opdracht 3 bladzijde 142

Gegeven is de functie $f(x) = x^3$.
De punten $A(2, 8)$ en $B(-2, -8)$ liggen op de grafiek van deze functie.

1 Door welke transformatie wordt het punt A afgebeeld op het punt B?

A wordt afgebeeld op B door een puntspiegeling (draaiing over $180°$) om de oorsprong.

2 Ga na of deze transformatie voor elk punt $P(a, a^3)$ van de grafiek van $y = x^3$ opnieuw een punt van deze grafiek oplevert.

$$P(a, a^3) \xrightarrow[s_O]{} P'(-a, -a^3)$$

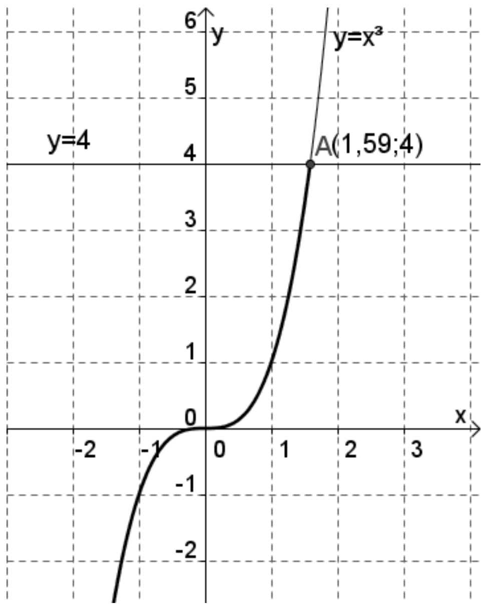
$f(x) = x^3$ dus $f(-a) = (-a)^3 = -a^3$

Het punt $P'(-a, -a^3)$ behoort dus steeds weer tot de grafiek van f.

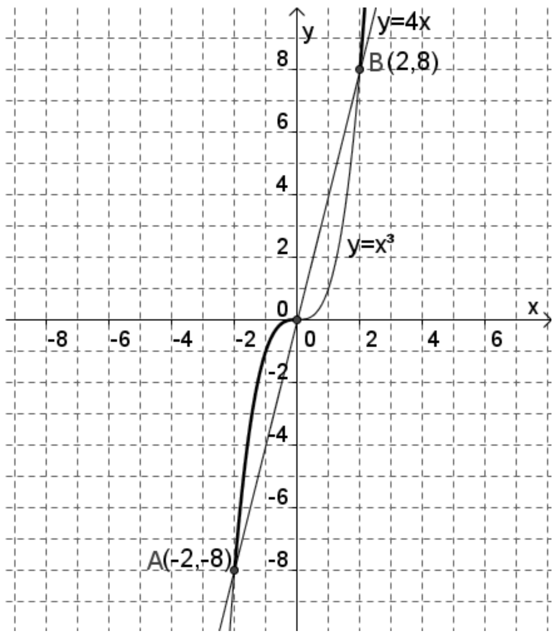
Opdracht 4 bladzijde 143

Maak gebruik van de grafiek van $y = x^3$ om de volgende ongelijkheden op te lossen.

1 $x^3 < 4$	2 $x^3 \geq 4x$



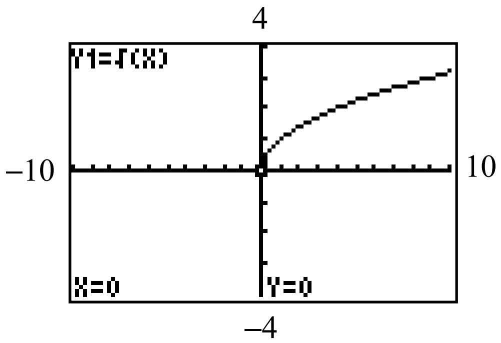
$x^3 < 4$ voor $x < \sqrt[3]{4} \approx 1{,}587$

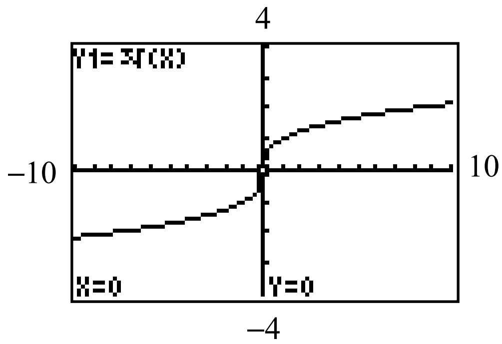


$x^3 \geq 4x$ voor $-2 \leq x \leq 0$ of $x \geq 2$

Opdracht 5 bladzijde 144

Gegeven de grafieken van $y = \sqrt{x}$ en $y = \sqrt[3]{x}$.





Waarom zie je bij de ene grafiek een deel links van de y-as en bij de andere niet?

Oplossing

Je kan van een negatief getal geen vierkantswortel nemen maar wel een derdemachtswortel, m.a.w. het domein van $y = \sqrt{x}$ is $\mathbb{R}^+$ en het domein van $y = \sqrt[3]{x}$ is $\mathbb{R}$.

Opdracht 6 bladzijde 145

Seppe vult een bolvormige ballon met helium. Het volume neemt gelijkmatig toe met 1 dm^3 per seconde.

Wat is de straal na 10 seconden? Je mag aannemen dat het volume gelijk is aan 0 op het tijdstip t = 0.

Oplossing

Na 10 seconden is het volume $10\ dm^3$.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\Downarrow$$
$$10 = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\Downarrow$$
$$r^3 = \frac{30}{4\pi}$$
$$\Downarrow$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}} \approx 1{,}34$$

De straal is na 10 seconden ongeveer 1,34 dm.

Opdracht 7 bladzijde 146

De oppervlakte van een rechthoek is 1 m^2. Noem x de breedte (in m) van zo'n rechthoek. De lengte y (in m) is dan een functie van x.

1 Druk de lengte y uit in functie van de breedte x.

$$x \cdot y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

2 Vul de tabel in.

breedte x (in m)	1	10	100	1000
lengte y (in m)				

breedte x (in m)	1	10	100	1000
lengte y (in m)	1	0,1	0,01	0,001

3 Wanneer we de breedte x steeds groter laten worden, hoe evolueert de lengte y dan? Kan y ooit nul worden?

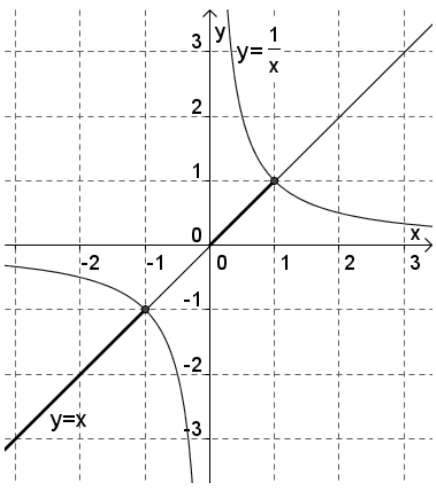
y nadert tot nul, maar wordt nooit nul.

Opdracht 8 bladzijde 149

1 Maak gebruik van de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ om te bepalen welke getallen kleiner zijn dan hun omgekeerde.

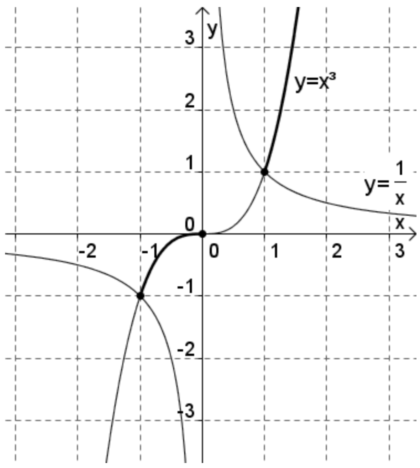
getal: x ; omgekeerde getal: $\frac{1}{x}$

$x < \frac{1}{x}$ voor $x < -1$ of $0 < x < 1$



2 Los de ongelijkheid $x^3 \geq \frac{1}{x}$ grafisch op.

$x^3 \geq \frac{1}{x}$ voor $-1 \leq x \leq 0$ of $x \geq 1$



2.1 **Opdracht 9 bladzijde 150**

1 Wat gebeurt er met de grafiek van de functie $y = x^2$ wanneer het voorschrift vermenigvuldigd wordt met een reëel getal k, verschillend van nul?

$k > 0$: verticale uitrekking met factor k

$k < 0$: spiegeling om de x-as en verticale uitrekking met factor $|k|$

2 Ga na of de grafiek van de elementaire functies $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$ en $y = \frac{1}{x}$ op dezelfde manier verandert wanneer we het functievoorschrift vermenigvuldigen met een reëel getal k, verschillend van nul.

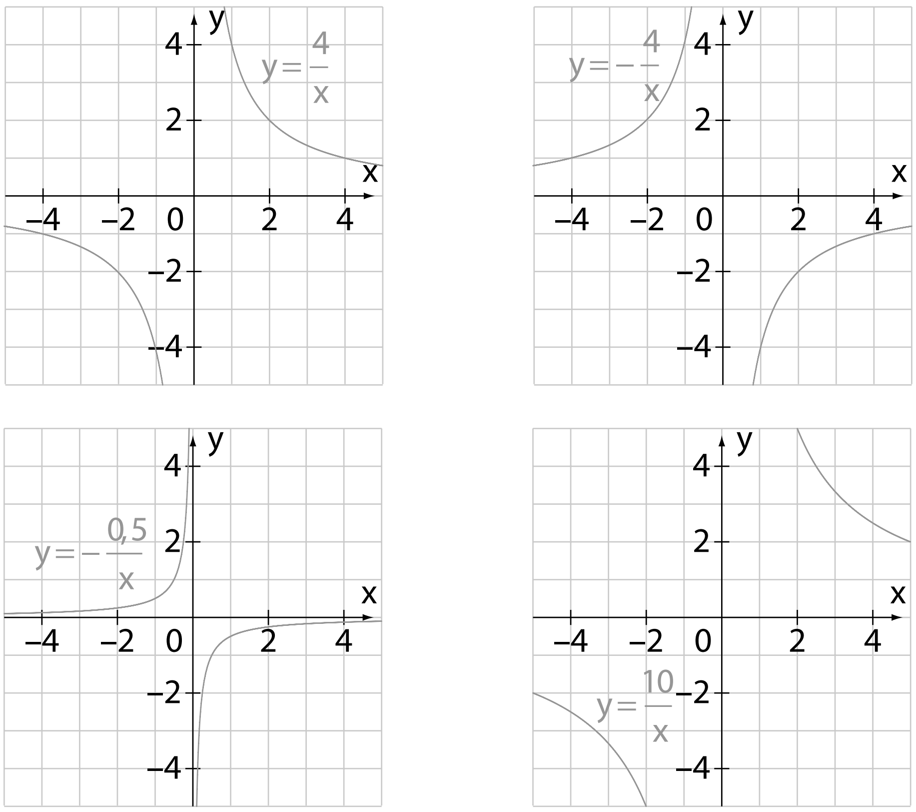
Deze grafieken veranderen op dezelfde manier.

Opdracht 10 bladzijde 150

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x}$.

We onderzoeken de familie functies $g(x) = k \cdot f(x)$ met k verschillend van 0.

Hieronder zie je enkele voorbeelden.



Zijn de volgende beweringen over een willekeurige functie g van deze vorm waar of niet waar?

1 De functie g heeft geen nulpunten, net zoals f.

De bewering is waar.

2 De functie g is dalend over $]-\infty, 0[$ en over $]0, +\infty[$, net zoals f.

De bewering is niet waar.

3 De grafiek van de functie g heeft dezelfde asymptoten als die van f.

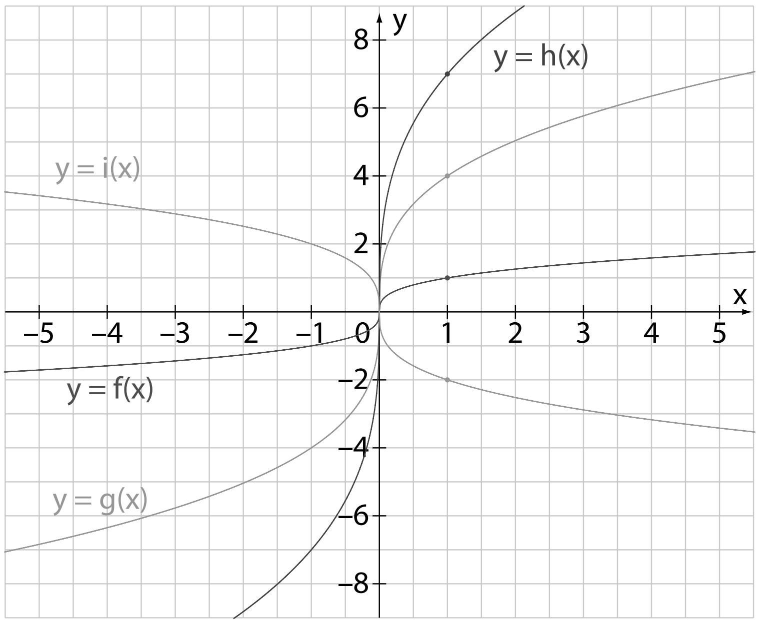
De bewering is waar.

4 De grafiek van de functie g heeft hetzelfde symmetriemiddelpunt als die van f.

De bewering is waar.

Opdracht 11 bladzijde 154

De onderstaande grafieken stellen een familie functies voor van de vorm $y = k \cdot \sqrt[3]{x}$.
Bepaal de waarden voor k.



- $y = k \cdot \sqrt[3]{x}$
  f bevat $(1, 1)$: $1 = k \cdot \sqrt[3]{1} \;\Rightarrow\; k = 1$
  dus $f(x) = \sqrt[3]{x}$
- $y = k \cdot \sqrt[3]{x}$
  h bevat $(1, 7)$: $7 = k \cdot \sqrt[3]{1} \;\Rightarrow\; k = 7$
  dus $h(x) = 7 \cdot \sqrt[3]{x}$
- $y = k \cdot \sqrt[3]{x}$
  g bevat $(1, 4)$: $4 = k \cdot \sqrt[3]{1} \;\Rightarrow\; k = 4$
  dus $g(x) = 4 \cdot \sqrt[3]{x}$
- $y = k \cdot \sqrt[3]{x}$
  i bevat $(1, -2)$: $-2 = k \cdot \sqrt[3]{1} \;\Rightarrow\; k = -2$
  dus $i(x) = -2 \cdot \sqrt[3]{x}$

Opdracht 12 bladzijde 154

1 Bepaal het domein, het bereik en de eventuele nulpunten van de volgende functies.

a $f(x)=3x^3$ d $f(x)=-\sqrt[3]{x}$

b $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x}$ e $f(x)=-2\sqrt{x}$

c $f(x)=\frac{5}{x}$ f $f(x)=-\frac{1}{4x}$

	dom f	ber f	nulpunten
a	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
b	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	0
c	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	/
d	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
e	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^-$	0
f	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	/

2 Veranderen het domein, het bereik en de eventuele nulpunten als we één van de elementaire functies $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $y=x^3$ en $y=\sqrt[3]{x}$ vermenigvuldigen met een factor k, verschillend van nul? Verklaar.

Enkel bij $y=k\cdot\sqrt{x}$ met $k<0$ verandert het bereik, het wordt $\mathbb{R}^-$.
Bij $k<0$ wordt de grafiek van de functie $y=\sqrt{x}$ immers om de x-as gespiegeld waardoor de functiewaarden negatief worden.

2.2.1 **Opdracht 13 bladzijde 155**

1 Hoe ontstaat de grafiek van $y=2x^2+2$ uit de grafiek van $y=2x^2$?

$y=2x^2$
$\downarrow \quad \vec{v}(0,2) \quad$ (verschuiving over 2 eenheden naar boven)
$y=2x^2+2$

2 a Hoe ontstaat de grafiek van $g(x)=\sqrt{x}-2$ uit de grafiek van $f(x)=\sqrt{x}$?
b Vergelijk het domein en het bereik van f en g.

a $f(x)=\sqrt{x}$
$\downarrow \quad \vec{v}(0,-2) \quad$ (verschuiving over 2 eenheden naar beneden)
$g(x)=\sqrt{x}-2$

b

	f	g
domein	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$
bereik	$\mathbb{R}^+$	$[-2, +\infty[$

Opdracht 14 bladzijde 157

Gegeven de functie $f(x) = \dfrac{1}{2x} - 3$.

1 Welke transformaties zetten de grafiek van $y = \dfrac{1}{x}$ om in de grafiek van f ?

$y = \dfrac{1}{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor $\dfrac{1}{2}$

$y = \dfrac{1}{2x}$

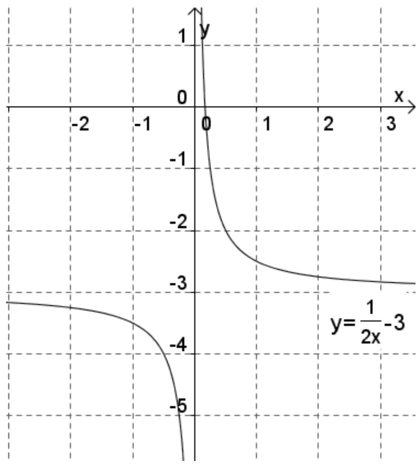
$\downarrow$ verschuiving over de vector $\vec{v}(0, -3)$

$y = \dfrac{1}{2x} - 3$

2 Bepaal het domein en het bereik van f.

dom f = $\mathbb{R}_0$ ber f = $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

3 Teken de grafiek van f.



4 Welke rechten zijn de asymptoten van de grafiek van f ?

$\text{VA}: x = 0$ en $\text{HA}: y = -3$

5 Welk punt is symmetriemiddelpunt van de grafiek van f ?

Het symmetriemiddelpunt is $(0, -3)$.

6 Voor welke x-waarden ligt de grafiek van f boven de x-as?

- Nulpunt van f : $\dfrac{1}{2x} - 3 = 0$

$$\frac{1}{2x} = 3$$

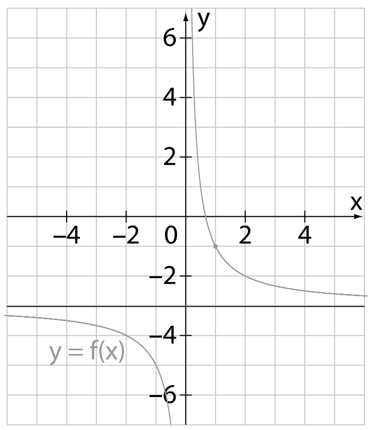
$$x = \frac{1}{6}$$

- De grafiek van f ligt boven de x-as voor $0 < x < \dfrac{1}{6}$.

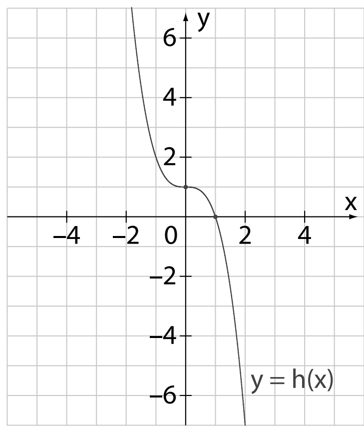
Opdracht 15 bladzijde 157

De onderstaande grafieken stellen functies voor van de vorm $y = \dfrac{k}{x} + b$, $y = k \cdot \sqrt{x} + b$, $y = k \cdot x^3 + b$, $y = k \cdot x^3 + b$ en $y = k \cdot \sqrt[3]{x} + b$. Bepaal telkens het functievoorschrift.

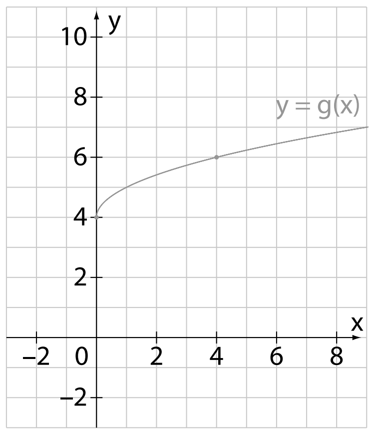
1



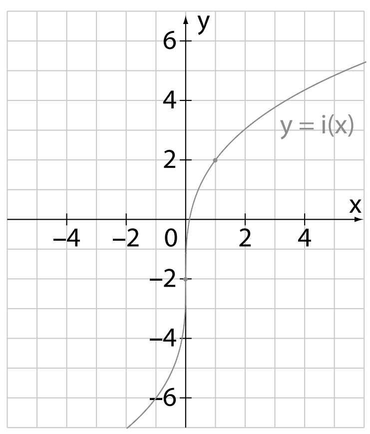
3



2



4



Oplossing van 1

Het voorschrift van f is van de vorm $y = \frac{k}{x} + b$.

HA : $y = -3$ dus $b = -3$

De grafiek van $y = \frac{k}{x} - 3$ bevat het punt $(1, -1) \Rightarrow -1 = \frac{k}{1} - 3 \Rightarrow k = 2$

dus $f(x) = \frac{2}{x} - 3$

Oplossing van 2

Het voorschrift van g is van de vorm $y = k \cdot \sqrt{x} + b$.

De grafiek van $y = k \cdot \sqrt{x} + b$ bevat het punt $(0, 4) \Rightarrow 4 = k \cdot \sqrt{0} + b \Rightarrow b = 4$

De grafiek van $y = k \cdot \sqrt{x} + 4$ bevat het punt $(4, 6) \Rightarrow 6 = k \cdot \sqrt{4} + 4 \Rightarrow k = 1$

dus $g(x) = \sqrt{x} + 4$

Oplossing van 3

Het voorschrift van h is van de vorm $y = k \cdot x^3 + b$.

De grafiek van $y = k \cdot x^3 + b$ bevat het punt $(0, 1) \Rightarrow 1 = k \cdot 0^3 + b \Rightarrow b = 1$

De grafiek van $y = k \cdot x^3 + 1$ bevat het punt $(1, 0) \Rightarrow 0 = k \cdot 1^3 + 1 \Rightarrow k = -1$

dus $h(x) = -x^3 + 1$

Oplossing van 4

Het voorschrift van i is van de vorm $y = k \cdot \sqrt[3]{x} + b$.

De grafiek van $y = k \cdot \sqrt[3]{x} + b$ bevat het punt $(0, -2) \Rightarrow -2 = k \cdot \sqrt[3]{0} + b \Rightarrow b = -2$

De grafiek van $y = k \cdot \sqrt[3]{x} - 2$ bevat het punt $(1, 2) \Rightarrow 2 = k \cdot \sqrt[3]{1} - 2 \Rightarrow k = 4$

dus $i(x) = 4 \cdot \sqrt[3]{x} - 2$

2.2.2 **Opdracht 16 bladzijde 158**

1 Vul de tabel aan.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)=\sqrt{x}$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$
$g(x)=\sqrt{x-2}$											
$h(x)=\sqrt{x+3}$											

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)=\sqrt{x}$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$
$g(x)=\sqrt{x-2}$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
$h(x)=\sqrt{x+3}$	$\vert$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	3

2 Welk verband is er tussen de grafiek van f en g? En tussen de grafiek van f en h?

- De grafiek van g ontstaat uit die van f door deze over 2 eenheden naar rechts te verschuiven, dus over $\vec{v}(2, 0)$.
- De grafiek van h ontstaat uit die van f door deze over 3 eenheden naar links te verschuiven, dus over $\vec{v}(-3, 0)$.

3 Bepaal het domein en het bereik van de functies f, g en h.

	f	g	h
domein	$\mathbb{R}^+$	$[2, +\infty[$	$[-3, +\infty[$
bereik	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$

4 Bepaal de nulpunten van de drie functies.

nulpunt van $f: 0$; nulpunt van $g: 2$; nulpunt van $h: -3$

Opdracht 17 bladzijde 159

1 Bepaal de asymptoten en het symmetriemiddelpunt van de grafiek van $y = \frac{2}{x+3}$.

HA : $y = 0$ VA : $x = -3$ symmetriemiddelpunt $(-3, 0)$

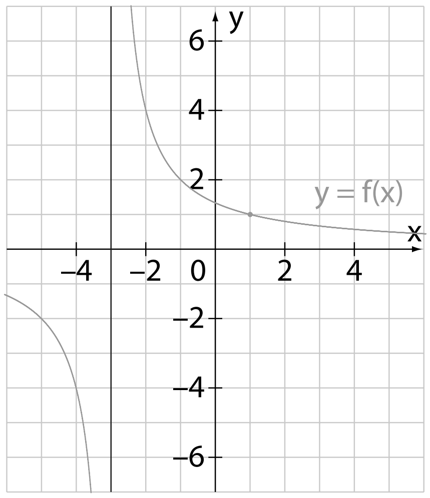
2 Bepaal de asymptoten en het symmetriemiddelpunt van de grafiek van $y = \frac{k}{x-a}$.

HA : $y = 0$ VA : $x = a$ symmetriemiddelpunt $(a, 0)$

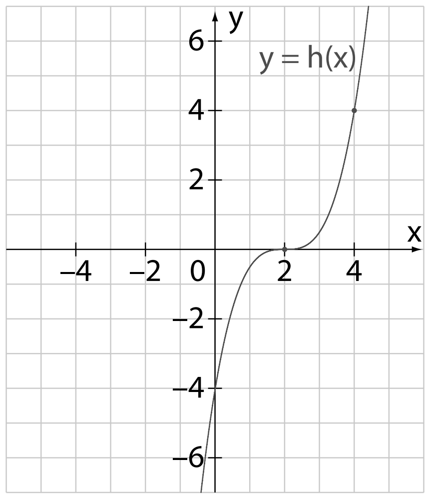
Opdracht 18 bladzijde 160

De onderstaande grafieken stellen functies voor met voorschrift $y = \frac{k}{x-a}$, $y = k \cdot \sqrt{x-a}$, $y = k \cdot (x-a)^3$ en $y = k \cdot \sqrt[3]{x-a}$. Bepaal telkens het functievoorschrift.

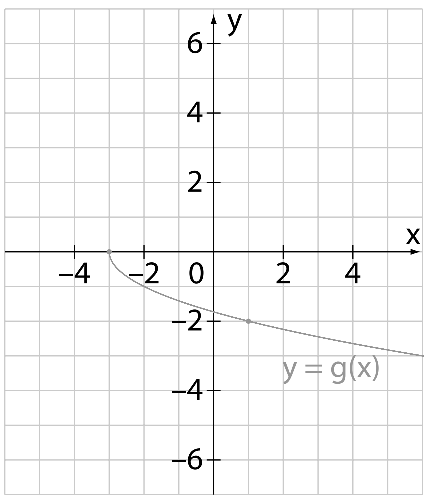
1



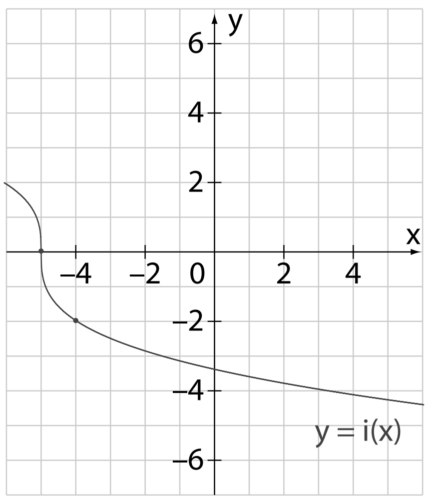
3



2



4



Oplossing van 1

Het voorschrift van f is van de vorm $y=\dfrac{k}{x-a}$.

$VA: x=-3$ dus $a=-3$

De grafiek van $y=\dfrac{k}{x+3}$ bevat het punt $(1,1) \Rightarrow 1=\dfrac{k}{1+3} \Rightarrow k=4$

dus $f(x)=\dfrac{4}{x+3}$

Oplossing van 2

Het voorschrift van g is van de vorm $y=k\cdot\sqrt{x-a}$.

De grafiek van $y=k\cdot\sqrt{x-a}$ bevat het punt $(-3,0) \Rightarrow 0=k\cdot\sqrt{-3-a} \Rightarrow a=-3$

De grafiek van $y=k\cdot\sqrt{x+3}$ bevat het punt $(1,-2) \Rightarrow -2=k\cdot\sqrt{1+3} \Rightarrow k=-1$

dus $g(x)=-\sqrt{x+3}$

Oplossing van 3

Het voorschrift van h is van de vorm $y=k\cdot(x-a)^3$.

De grafiek van $y=k\cdot(x-a)^3$ bevat het punt $(2,0) \Rightarrow 0=k\cdot(2-a)^3 \Rightarrow a=2$

De grafiek van $y=k\cdot(x-2)^3$ bevat het punt $(4,4) \Rightarrow 4=k\cdot(4-2)^3 \Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$

dus $h(x)=\dfrac{1}{2}(x-2)^3$

Oplossing van 4

Het voorschrift van i is van de vorm $y=k\cdot\sqrt[3]{x-a}$.

De grafiek van $y=k\cdot\sqrt[3]{x-a}$ bevat het punt $(-5,0) \Rightarrow 0=k\cdot\sqrt[3]{-5-a} \Rightarrow a=-5$

De grafiek van $y=k\cdot\sqrt[3]{x+5}$ bevat het punt $(-4,-2) \Rightarrow -2=k\cdot\sqrt[3]{-4+5} \Rightarrow k=-2$

dus $i(x)=-2\sqrt[3]{x+5}$

2.2.3 **Opdracht 19 bladzijde 161**

Door welke opeenvolgende transformaties kunnen we van de grafiek van $y = \sqrt{x}$ overgaan naar de grafiek van $y = -\sqrt{x+2} - 5$?

Oplossing

$$
\begin{array}{ll}
y = \sqrt{x} & \\
\downarrow & \text{spiegeling om de x-as} \\
y = -\sqrt{x} & \\
\downarrow & \text{verschuiving over de vector } \vec{v}(-2, -5) \\
y = -\sqrt{x+2} - 5 &
\end{array}
$$

Opdracht 20 bladzijde 161

Op de grafiek van $y = \sqrt[3]{x}$ voeren we achtereenvolgens de volgende transformaties uit.
Geef telkens het nieuwe voorschrift.

$$
\begin{array}{ll}
y = \sqrt[3]{x} & \\
\downarrow & \text{verticale uitrekking met factor 2} \\
y = ... & \\
\downarrow & \text{verschuiving naar rechts over 3 eenheden} \\
y = ... & \\
\downarrow & \text{verschuiving naar boven over 4 eenheden} \\
y = ... &
\end{array}
$$

Oplossing

$$
\begin{array}{ll}
y = \sqrt[3]{x} & \\
\downarrow & \text{verticale uitrekking met factor 2} \\
y = 2\sqrt[3]{x} & \\
\downarrow & \text{verschuiving naar rechts over 3 eenheden} \\
y = 2\sqrt[3]{x-3} & \\
\downarrow & \text{verschuiving naar boven over 4 eenheden} \\
y = 2\sqrt[3]{x-3} + 4 &
\end{array}
$$

Opdracht 21 bladzijde 163

Op de grafiek van de functie $y = \frac{1}{x}$ voert men achtereenvolgens de volgende transformaties uit.

- een spiegeling om de x-as
- een verticale uitrekking met factor 2
- een verschuiving over de vector $\vec{v}(-3, -4)$

Je verkrijgt zo de grafiek van een functie f.

1 Geef het voorschrift van f.

$y = \frac{1}{x}$

$\downarrow$ spiegeling om de x-as

$y = \frac{-1}{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2

$y = \frac{-2}{x}$

$\downarrow$ verschuiving over de vector $\vec{v}(-3, -4)$

$y = \frac{-2}{x+3} - 4$

2 Geef het symmetriemiddelpunt van de grafiek van $y = \frac{1}{x}$, van $y = \frac{2}{x}$ en van de functie f.

	$y = \frac{1}{x}$	$y = \frac{2}{x}$	$y = \frac{-2}{x+3} - 4$
symmetriemiddelpunt	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(-3, -4)$

3 Welke zijn de asymptoten van de grafiek van $y = \frac{2}{x}$?

Welke zijn dan de asymptoten van de grafiek van de functie f ?

	$y = \frac{2}{x}$	$f(x) == \frac{-2}{x+3} - 4$
asymptoten	HA : $y = 0$ VA : $x = 0$	HA : $y = -4$ VA : $x = -3$

Opdracht 22 bladzijde 164

Vervolledig het volgende schema.

$y = x^3$	$y = x^3$
$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2	$\downarrow$ verschuiving naar boven over 1 eenheid
$y = ...$	$y = ...$
$\downarrow$ verschuiving naar links over 4 eenheden	$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2
$y = ...$	$y = ...$
$\downarrow$ verschuiving naar boven over 1 eenheid	$\downarrow$ verschuiving naar links over 4 eenheden
$y = ...$	$y = ...$

Wat stel je vast?

Oplossing

$y = x^3$	$y = x^3$
$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2	$\downarrow$ verschuiving naar boven over 1 eenheid
$y = 2x^3$	$y = x^3 + 1$
$\downarrow$ verschuiving naar links over 4 eenheden	$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2
$y = 2(x+4)^3$	$y = 2(x^3+1) = 2x^3 + 2$
$\downarrow$ verschuiving naar boven over 1 eenheid	$\downarrow$ verschuiving naar links over 4 eenheden
$y = 2(x+4)^3 + 1$	$y = 2(x+4)^3 + 2$

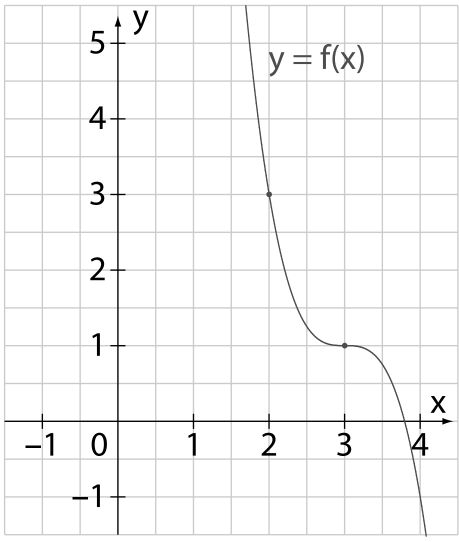
De volgorde van de transformaties mag niet zomaar omgewisseld worden.

Opdracht 23 bladzijde 165

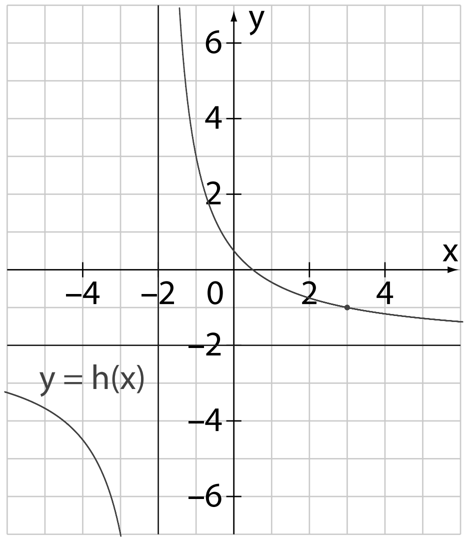
De onderstaande grafieken stellen functies voor met voorschrift $y = k \cdot \sqrt{x-a} + b$, $y = \dfrac{k}{x-a} + b$,

$y = k \cdot \sqrt[3]{x-a} + b$ en $y = k \cdot (x-a)^3 + b$. Bepaal telkens het voorschrift.

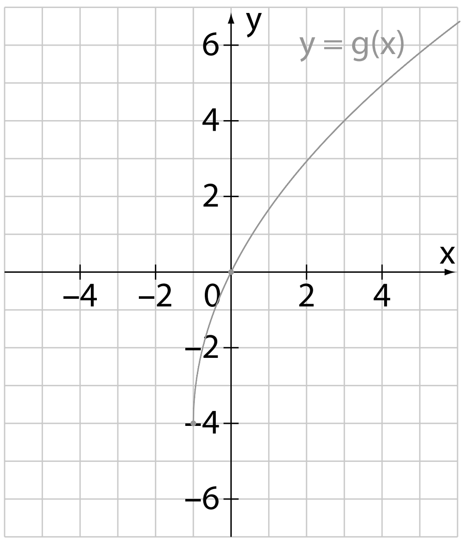
1



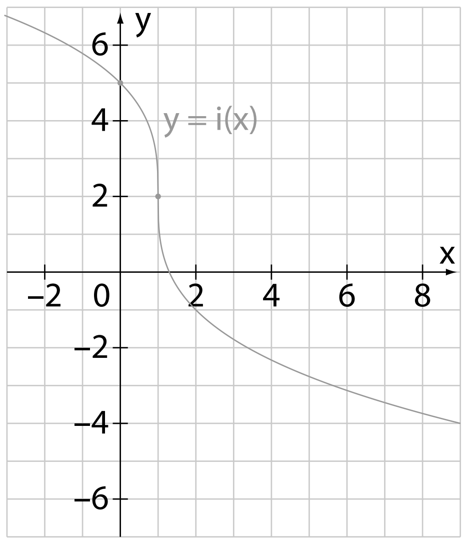
3



2



4



Oplossing van 1

Het voorschrift van f is van de vorm $y = k \cdot (x-a)^3 + b$.

Het symmetriemiddelpunt is $(3, 1)$ dus $a = 3$ en $b = 1$.

De grafiek van $y = k \cdot (x-3)^3 + 1$ bevat het punt $(2, 3)$ $\Rightarrow$ $3 = k \cdot (2-3)^3 + 1$ $\Rightarrow$ $k = -2$

dus $f(x) = -2(x-3)^3 + 1$

Oplossing van 2

Het voorschrift van g is van de vorm $y = k \cdot \sqrt{x-a} + b$.

dom $g = [-1, +\infty[$ en ber $g = [-4, +\infty[$ dus $a = -1$ en $b = -4$

De grafiek van $y = k \cdot \sqrt{x+1} - 4$ bevat het punt $(0, 0) \Rightarrow 0 = k \cdot \sqrt{0+1} - 4 \Rightarrow k = 4$

dus $g(x) = 4\sqrt{x+1} - 4$

Oplossing van 3

Het voorschrift van h is van de vorm $y = \dfrac{k}{x-a} + b$.

Het symmetriemiddelpunt is $(-2, -2)$ dus $a = -2$ en $b = -2$.

De grafiek van $y = \dfrac{k}{x+2} - 2$ bevat het punt $(3, -1) \Rightarrow -1 = \dfrac{k}{3+2} - 2 \Rightarrow k = 5$

dus $h(x) = \dfrac{5}{x+2} - 2$

Oplossing van 4

Het voorschrift van i is van de vorm $y = k \cdot \sqrt[3]{x-a} + b$.

Het symmetriemiddelpunt is $(1, 2)$ dus $a = 1$ en $b = 2$.

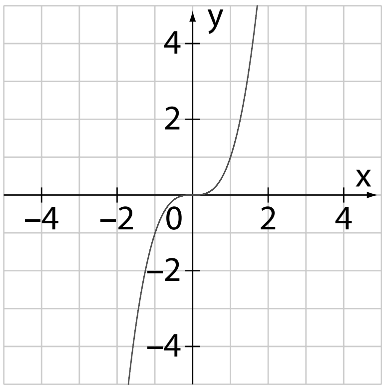
De grafiek van $y = k \cdot \sqrt[3]{x-1} + 2$ bevat het punt $(0, 5) \Rightarrow 5 = k \cdot \sqrt[3]{0-1} + 2 \Rightarrow k = -3$

dus $i(x) = -3\sqrt[3]{x-1} + 2$

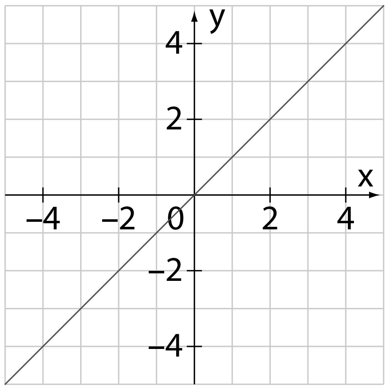
Opdracht 24 bladzijde 168

Welke grafiek hoort bij welk functievoorschrift? Los op zonder grafisch rekentoestel.

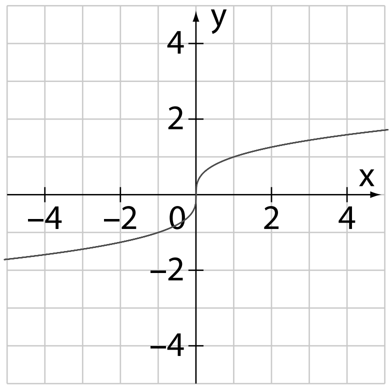
A



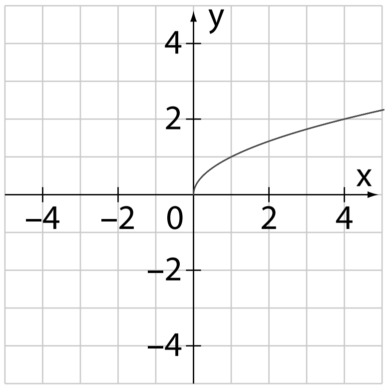
D



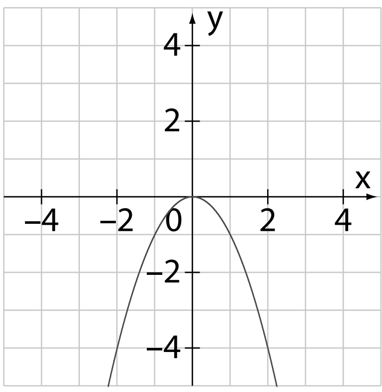
B



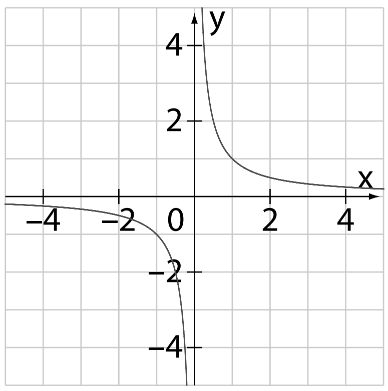
E



C



F



1 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 3 $f(x)=x$ 5 $f(x)=x^3$

2 $f(x)=\sqrt{x}$ 4 $f(x)=-x^2$ 6 $f(x)=\sqrt[3]{x}$

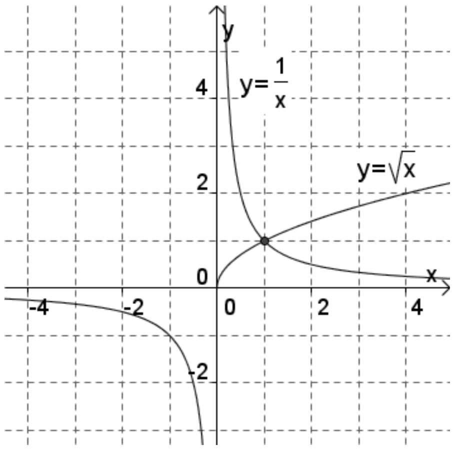
Oplossing

$A \leftrightarrow 5$ $B \leftrightarrow 6$ $C \leftrightarrow 4$ $D \leftrightarrow 3$ $E \leftrightarrow 2$ $F \leftrightarrow 1$

Opdracht 25 bladzijde 169

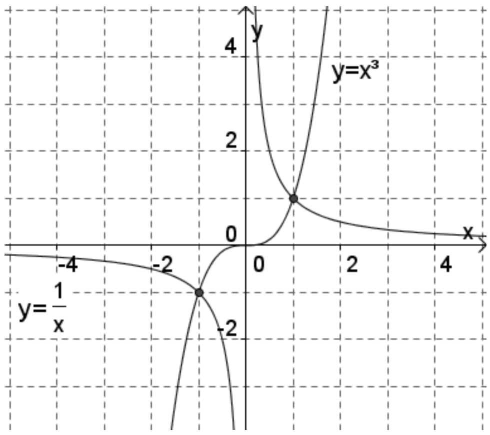
Maak gebruik van de grafieken van de elementaire functies om de volgende vergelijkingen op te lossen.

1 $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$



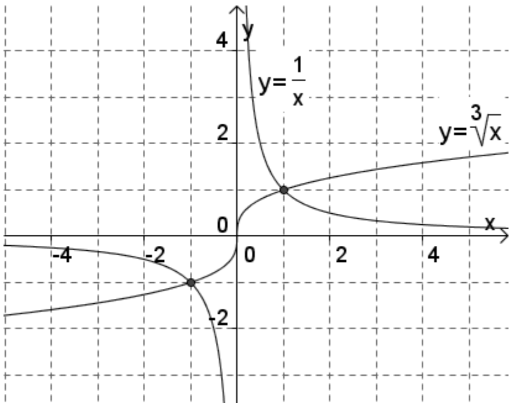
$\frac{1}{x} = \sqrt{x}$ voor $x = 1$

2 $\frac{1}{x} = x^3$



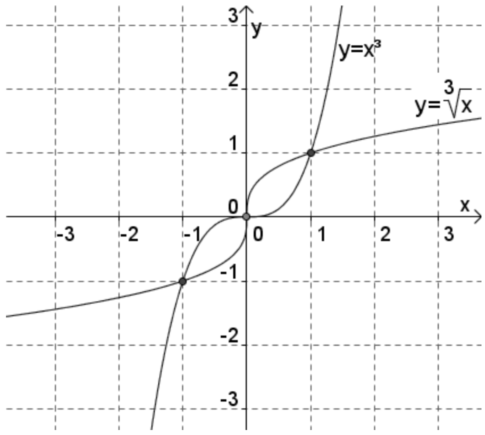
$\frac{1}{x} = x^3$ voor $x = 1$ of $x = -1$

3 $\frac{1}{x} = \sqrt[3]{x}$



$\frac{1}{x} = \sqrt[3]{x}$ voor $x = 1$ of $x = -1$

4 $x^3 = \sqrt[3]{x}$



$x^3 = \sqrt[3]{x}$ voor $x = 1$ of $x = -1$ of $x = 0$

Opdracht 26 bladzijde 169

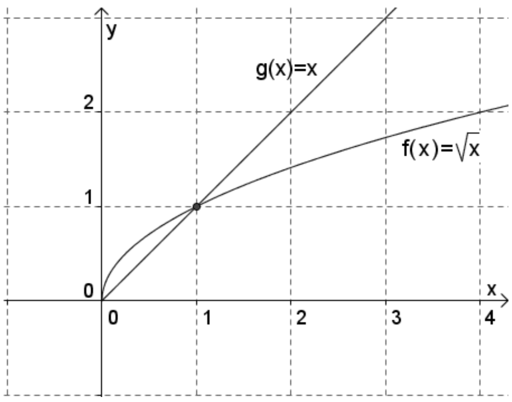
Beschouw de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = x$ met $x \geq 0$. Voor welke waarden van x geldt

1 $f(x) = g(x)$?

2 $f(x) > g(x)$?

3 $f(x) < g(x)$?

Oplossing



1 $f(x) = g(x)$ voor $x = 0$ of $x = 1$

2 $f(x) > g(x)$ voor $0 < x < 1$

3 $f(x) < g(x)$ voor $x > 1$

Opdracht 27 bladzijde 169

Welke kenmerken horen bij welk functievoorschrift? Soms zijn meerdere antwoorden mogelijk.

A dom $f = [0, +\infty[$

B

x	
f(x)	↗

C er is geen nulpunt

D de horizontale asymptoot is de x-as

E

x		0	
f(x)	−	0	+

F de functie is dalend over $\mathbb{R}$

G de oorsprong is symmetriemiddelpunt

H de grafiek bestaat uit twee afzonderlijke takken

1 $f(x) = \sqrt{x}$

2 $f(x) = x^3$

3 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

4 $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Oplossing

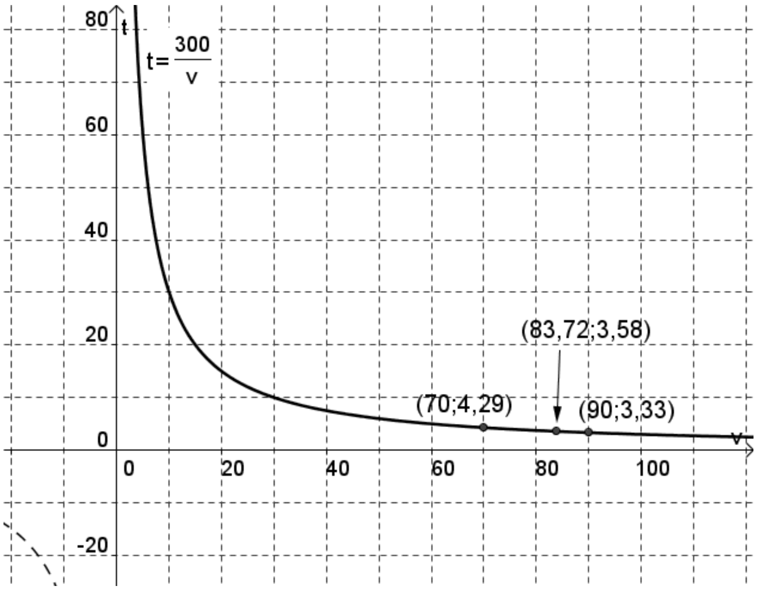
$1 \leftrightarrow$ A $\quad$ $2 \leftrightarrow$ B, E, G $\quad$ $3 \leftrightarrow$ B, E, G $\quad$ $4 \leftrightarrow$ C, D, G, H

Opdracht 28 bladzijde 169

Een auto rijdt met een constante snelheid v. De afstand s die de auto aflegt in functie van de tijd t kan je uitdrukken met de formule $s = v \cdot t$.

1	Teken een grafiek waarbij voor s = 300 km de tijd t (in uren) wordt uitgedrukt in functie van de snelheid v (in km/h).

$s = v \cdot t$ en $s = 300$ dus $t = \dfrac{300}{v}$ met $v > 0$



2	Hoeveel tijd zal een wagen met een constante snelheid van 70 km/h langer doen over dit traject dan een wagen met een constante snelheid van 90 km/h ?

$v = 70$ dus $t = \dfrac{300}{70} = 4,285... \to 4\,\text{h}\;17\,\text{min}\;8,571\,\text{s}$

$v = 90$ dus $t = \dfrac{300}{90} \approx 3,333... \to 3\,\text{h}\;20\,\text{min}$

Het duurt dus 57 min 9 s langer aan 70 km / h dan aan 90 km / h.

3	Aan welke constante snelheid moet een auto rijden om het traject af te leggen in 3 uur 35 minuten?

$3\,\text{h}\;35\,\text{minuten} \approx 3,583\,\text{h}$

$3,583 = \dfrac{300}{v} \Leftrightarrow v = \dfrac{300}{3,583} \approx 83,72$

De auto moet aan een constante snelheid van 83, 72 km / h rijden.

Opdracht 29 bladzijde 170

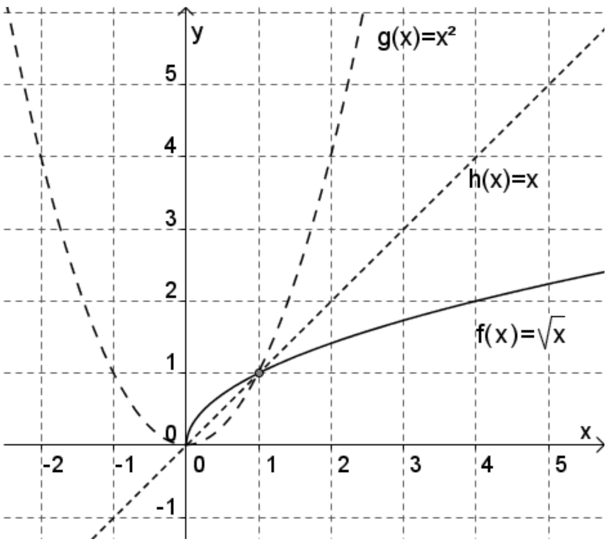
Beschouw de functies $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2$ en $h(x)=x$.

Voor welke waarden van x geldt

1 $f(x)<h(x)<g(x)$?

2 $f(x)>h(x)>g(x)$?

Oplossing



1 $f(x)<h(x)<g(x)$ voor $x>1$

2 $f(x)>h(x)>g(x)$ voor $0<x<1$

Opdracht 30 bladzijde 170

Van de gemiddelde afstand a (in A.E.: astronomische eenheden, 1 A.E. = $1{,}49598 \cdot 10^8$ km) van de planeten in ons zonnestelsel tot de zon en de omlooptijd P (in jaren) rond de zon zijn de volgende gegevens bekend:

planeet	gemiddelde afstand a in A.E.	omlooptijd P in jaren
Mercurius	0,387 099	0,240 85
Venus	0,723 332	0,615 21
Aarde	1,000 000	1,000 04
Mars	1,523 691	1,880 89
Jupiter	5,202 803	11,862 23
Saturnus	9,538 84	29,4577
Uranus	19,1819	84,0139
Neptunus	30,0578	164,793
Pluto	39,44	247,7

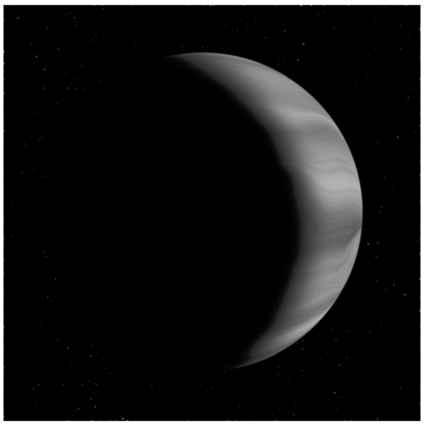
Volgens de derde wet van Kepler is het kwadraat van de omlooptijd P recht evenredig met de derde macht van de gemiddelde afstand a tot de zon.

Bepaal de evenredigheidsconstante.

Oplossing

$$P^2 = ka^3 \Rightarrow k = \frac{P^2}{a^3}$$

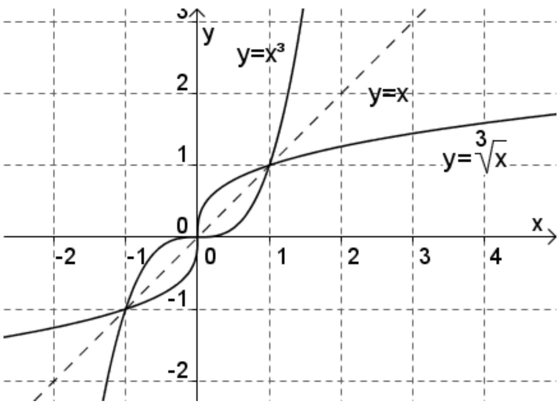
planeet	k
Mercurius	1,000062524
Venus	1,000077684
Aarde	1,000080002
Mars	1,000083099
Jupiter	0,9991266309
Saturnus	0,9997950387
Uranus	1,000063146
Neptunus	1,000013698
Pluto	1,000095088



De evenredigheidsconstante is dus ongeveer gelijk aan 1.

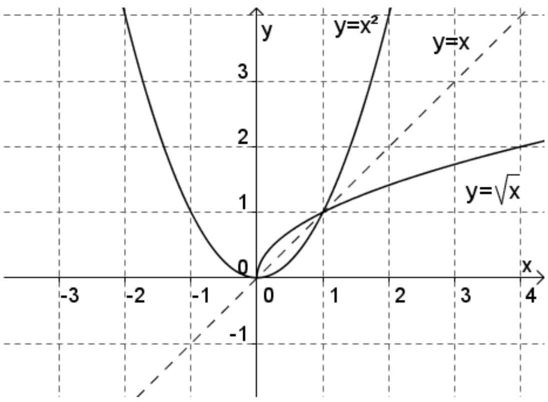
Opdracht 31 bladzijde 171

1 Teken de grafiek van $y = x^3$ en $y = \sqrt[3]{x}$ in één assenstelsel.
Wat is het verband tussen beide grafieken?



De ene grafiek ontstaat uit de andere door spiegeling om de eerste bissectrice $y = x$.

2 Teken de grafiek van $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$ in één assenstelsel.
a Wat is het verband tussen beide grafieken?
b Wat is het verschil met vraag 1? Verklaar dit.



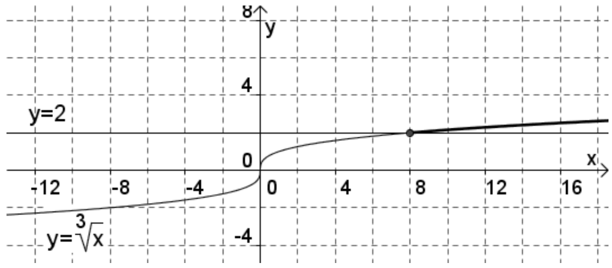
a Voor $x \geq 0$ ontstaat de ene grafiek opnieuw door spiegeling om de eerste bissectrice $y = x$.

b Wanneer we de hele parabool zouden spiegelen zou het resultaat niet de grafiek van een functie zijn.

Opdracht 32 bladzijde 171

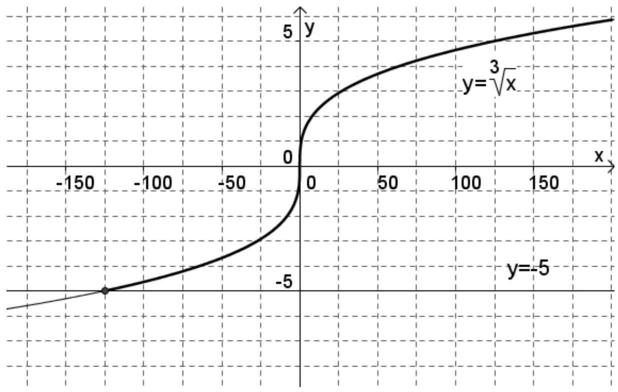
Maak gebruik van de grafiek van $y = \sqrt[3]{x}$ om de ongelijkheden op te lossen.

$\boxed{1 \quad \sqrt[3]{x} > 2}$



$\sqrt[3]{x} > 2$ voor $x > 8$

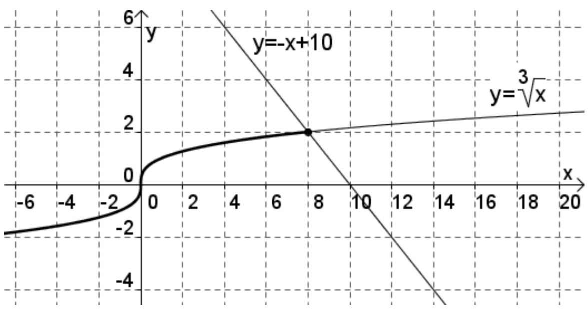
$\boxed{2 \quad \sqrt[3]{x} + 5 > 0}$



$\sqrt[3]{x} + 5 > 0 \iff \sqrt[3]{x} > -5$

$\sqrt[3]{x} > -5$ voor $x > -125$

$\boxed{3 \quad \sqrt[3]{x} + x - 10 < 0}$



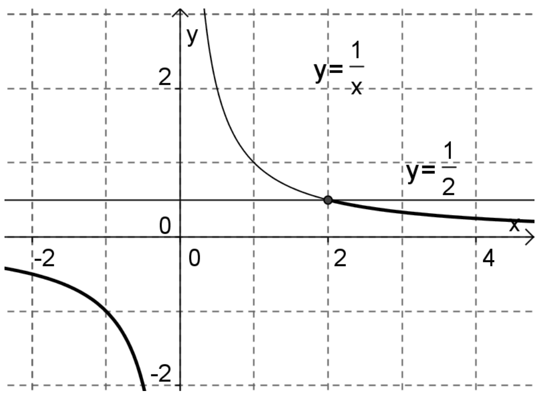
$\sqrt[3]{x} + x - 10 < 0 \iff \sqrt[3]{x} < -x + 10$

$\sqrt[3]{x} < -x + 10$ voor $x < 8$

Opdracht 33 bladzijde 171

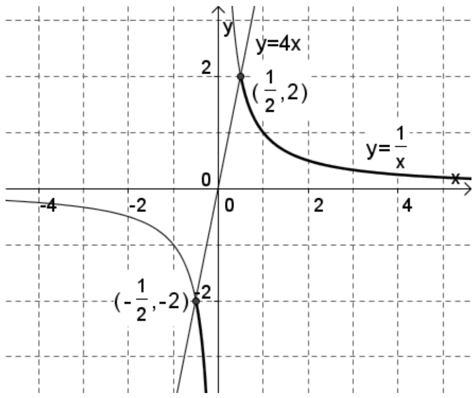
Maak gebruik van de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ om de ongelijkheden op te lossen.

$\boxed{1 \quad \frac{1}{x} < \frac{1}{2}}$



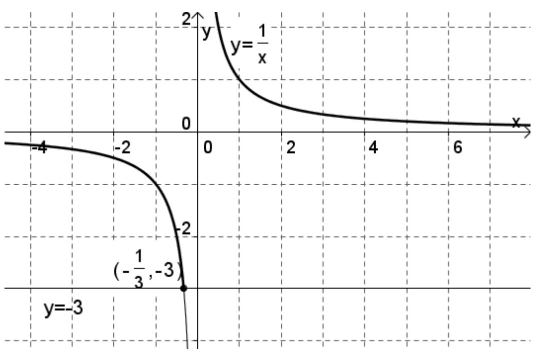
$\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ voor $x < 0$ of $x > 2$

$\boxed{3 \quad \frac{1}{x} \le 4x}$



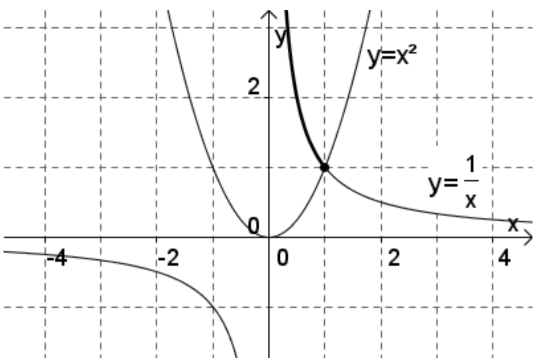
$\frac{1}{x} \le 4x$ voor $-\frac{1}{2} \le x < 0$ of $x \ge \frac{1}{2}$

$\boxed{2 \quad \frac{1}{x} > -3}$



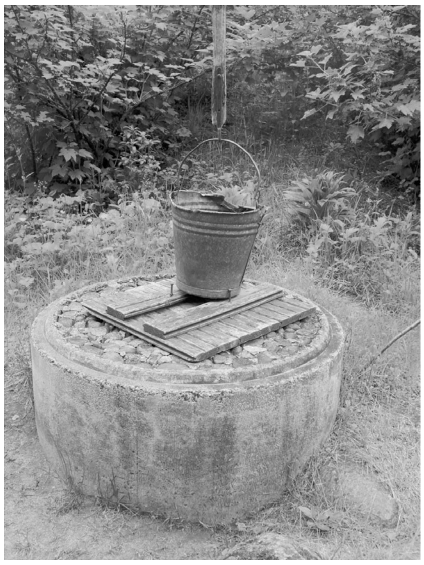
$\frac{1}{x} > -3$ voor $x < -\frac{1}{3}$ of $x > 0$

$\boxed{4 \quad \frac{1}{x} \ge x^2}$



$\frac{1}{x} \ge x^2$ voor $0 < x \le 1$

Opdracht 34 bladzijde 171



Een cilindervormige waterput heeft een inhoud van 500 liter.

1 Toon aan dat de zijdelingse oppervlakte van deze put (uitgedrukt in m^2) gelijk is aan het omgekeerde van de straal van het grondvlak van de put.

$$I_{\text{cilinder}} = \pi r^2 h = 0,5 \qquad \left(500\,\text{l} = 500\,\text{dm}^3 = 0,5\,\text{m}^3\right)$$

$$h = \frac{0,5}{\pi r^2}$$

$$\begin{aligned} Z.O._{\text{cilinder}} &= 2\pi r h \\ &= 2\pi r \cdot \frac{0,5}{\pi r^2} \\ &= \frac{1}{r} \end{aligned}$$

2 Tussen welke grenzen varieert de hoogte (in m) van de put als de zijdelingse oppervlakte minstens 2,6 m^2 en hoogstens 3,6 m^2 bedraagt?

$$2,6 \le Z.O._{\text{cilinder}} \le 3,6$$

$$\Updownarrow$$

$$2,6 \le \frac{1}{r} \le 3,6$$

$$\Downarrow \qquad y = x^2 \text{ is stijgend over } \mathbb{R}^+$$

$$(2,6)^2 \le \left(\frac{1}{r}\right)^2 \le (3,6)^2$$

$$\Downarrow \qquad \frac{0,5}{\pi} > 0$$

$$(2,6)^2 \cdot \frac{0,5}{\pi} \le \left(\frac{1}{r}\right)^2 \cdot \frac{0,5}{\pi} \le (3,6)^2 \cdot \frac{0,5}{\pi}$$

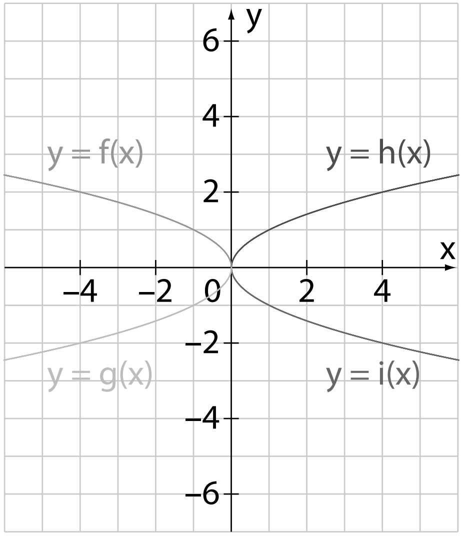
$$\Downarrow \qquad h = \frac{0,5}{\pi r^2}$$

$$1,076 \le h \le 2,063$$

De hoogte varieert tussen $1,076$ m en $2,063$ m.

Opdracht 35 bladzijde 172

Hieronder zijn de grafieken van f, g, h en i getekend.



1 Bepaal hun voorschrift als je weet dat $h(x)=\sqrt{x}$.

$f(x)=\sqrt{-x}$, $g(x)=-\sqrt{-x}$, $i(x)=-\sqrt{x}$

2 De grafieken van de functies f, g, h en i stellen samen een vlakke kromme voor waarvan de vergelijking $x^2-y^4=0$ is. Verklaar.

$$x^2-y^4=0$$

$$y^4=x^2$$

$$y^2=x \quad \text{of} \quad y^2=-x$$

$$\underbrace{y=\sqrt{x}}_{h} \quad \text{of} \quad \underbrace{y=-\sqrt{x}}_{i} \quad \text{of} \quad \underbrace{y=\sqrt{-x}}_{f} \quad \text{of} \quad \underbrace{y=-\sqrt{-x}}_{g}$$

Opdracht 36 bladzijde 173

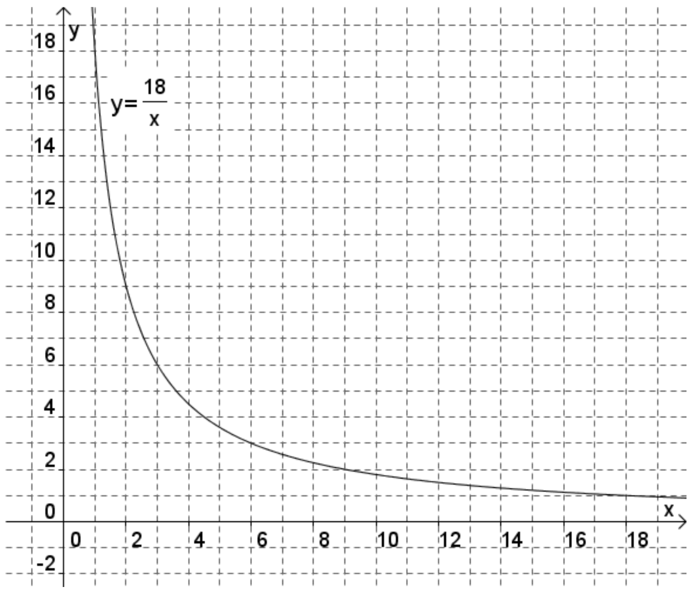
Noem x de breedte van een rechthoek met oppervlakte 18 cm².
De lengte y is dan een functie van x.

1 Bepaal het voorschrift van deze functie.

$$18 = x \cdot y \;\Rightarrow\; y = \frac{18}{x}$$

$$\text{dus } f(x) = \frac{18}{x} \text{ met } x > 0$$

2 Teken de grafiek van deze functie.



3 Wat is het zinvol domein?

Het zinvol domein is $]0, +\infty[$. Afmetingen moeten positief zijn.

4 Welk punt van de grafiek correspondeert met een vierkant van 18 cm^2 oppervlakte?

De rechthoek is een vierkant indien x = y.

$$x = \frac{18}{x} \;\Leftrightarrow\; x^2 = 18 \;\Leftrightarrow\; x = 3\sqrt{2} \quad \text{of} \quad x = -3\sqrt{2}$$

↳ vervalt want $x > 0$

Het punt $P\left(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$ op de grafiek van f correspondeert met een vierkant van 18 cm^2.

Opdracht 37 bladzijde 173

Sommige eigenschappen van functies veranderen door transformaties, andere niet.
Vink aan wat hetzelfde blijft.

	$y = x^3 \downarrow y = x^3 + b$	$y = \sqrt[3]{x} \downarrow y = \sqrt[3]{x} + b$	$y = \frac{1}{x} \downarrow y = \frac{1}{x} + b$	$y = \sqrt{x} \downarrow y = \sqrt{x} + b$
domein				
bereik				
nulpunt				
symmetriemiddelpunt				
stijgen/dalen				

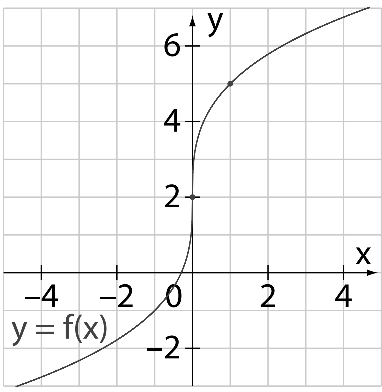
Oplossing

	$y = x^3 \downarrow y = x^3 + b$	$y = \sqrt[3]{x} \downarrow y = \sqrt[3]{x} + b$	$y = \frac{1}{x} \downarrow y = \frac{1}{x} + b$	$y = \sqrt{x} \downarrow y = \sqrt{x} + b$
domein	✓	✓	✓	✓
bereik	✓	✓		
nulpunt				
symmetriemiddelpunt				
stijgen/dalen	✓	✓	✓	✓

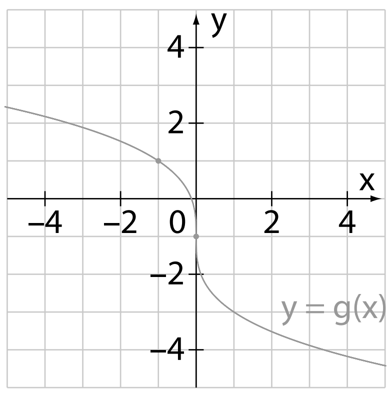
Opdracht 38 bladzijde 174

De onderstaande grafieken stellen functies voor met voorschrift $y = k \cdot \sqrt[3]{x} + b$.
Bepaal de waarden voor k en b.

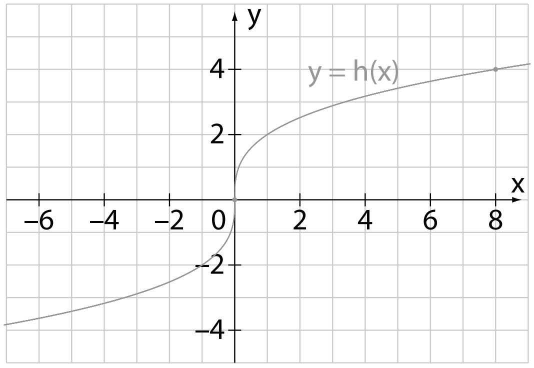
1



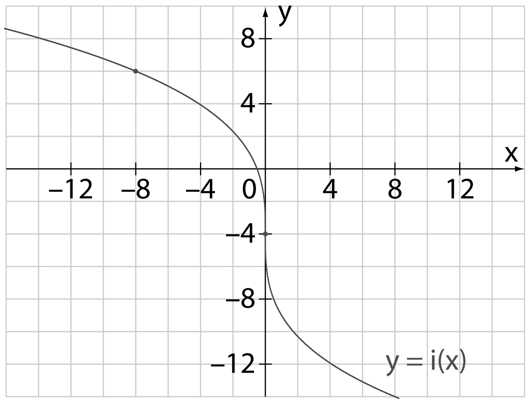
2



3



4



Oplossing van 1

Het symmetriemiddelpunt is $(0, 2)$ dus $b = 2$.

De grafiek van $y = k \cdot \sqrt[3]{x} + 2$ bevat het punt $(1, 5) \Rightarrow 5 = k \cdot \sqrt[3]{1} + 2 \Rightarrow k = 3$

dus $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + 2$

Oplossing van 2

Het symmetriemiddelpunt is $(0, -1)$ dus $b = -1$.

De grafiek van $y = k \cdot \sqrt[3]{x} - 1$ bevat het punt $(-1, 1) \Rightarrow 1 = k \cdot \sqrt[3]{-1} - 1 \Rightarrow k = -2$

dus $g(x) = -2\sqrt[3]{x} - 1$

Oplossing van 3

Het symmetriemiddelpunt is $(0, 0)$ dus $b = 0$.

De grafiek van $y = k \cdot \sqrt[3]{x}$ bevat het punt $(8, 4) \Rightarrow 4 = k \cdot \sqrt[3]{8} \Rightarrow k = 2$

dus $h(x) = 2\sqrt[3]{x}$

Oplossing van 4

Het symmetriemiddelpunt is $(0, -4)$ dus $b = -4$.

De grafiek van $y = k \cdot \sqrt[3]{x} - 4$ bevat het punt $(-8, 6) \Rightarrow 6 = k \cdot \sqrt[3]{-8} - 4 \Rightarrow k = -5$

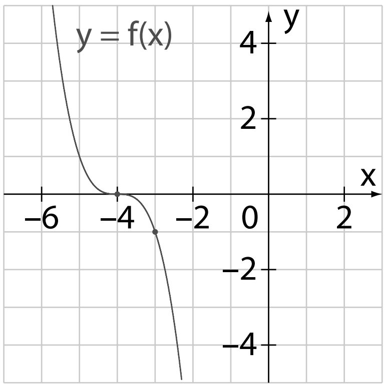
dus $i(x) = -5\sqrt[3]{x} - 4$

Opdracht 39 bladzijde 175

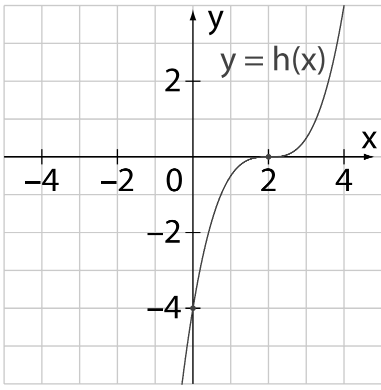
De onderstaande grafieken stellen functies voor met voorschrift $y = k \cdot (x - a)^3$.

Bepaal de waarden voor k en a.

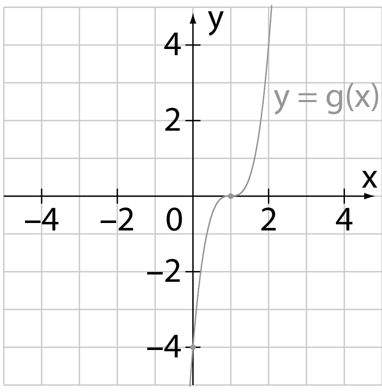
1



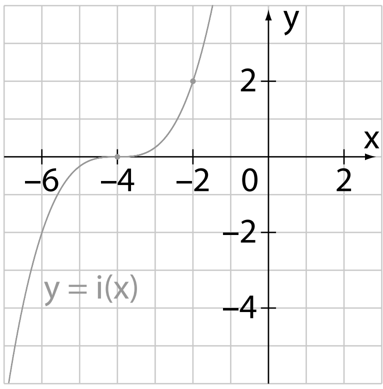
3



2



4



Oplossing van 1

Het symmetriemiddelpunt is $(-4, 0)$ dus $a = -4$.

De grafiek van $y = k \cdot (x + 4)^3$ bevat het punt $(-3, -1) \;\Rightarrow\; -1 = k \cdot (-3 + 4)^3 \;\Rightarrow\; k = -1$

dus $f(x) = -(x + 4)^3$

Oplossing van 2

Het symmetriemiddelpunt is $(1, 0)$ dus $a = 1$.

De grafiek van $y = k \cdot (x - 1)^3$ bevat het punt $(0, -4) \;\Rightarrow\; -4 = k \cdot (0 - 1)^3 \;\Rightarrow\; k = 4$

dus $g(x) = 4(x - 1)^3$

Oplossing van 3

Het symmetriemiddelpunt is $(2, 0)$ dus $a = 2$.

De grafiek van $y = k \cdot (x - 2)^3$ bevat het punt $(0, -4) \;\Rightarrow\; -4 = k \cdot (0 - 2)^3 \;\Rightarrow\; k = \dfrac{1}{2}$

dus $h(x) = \dfrac{1}{2}(x - 2)^3$

Oplossing van 4

Het symmetriemiddelpunt is $(-4, 0)$ dus $a = -4$.

De grafiek van $y = k \cdot (x+4)^3$ bevat het punt $(-2, 2)$ $\Rightarrow$ $2 = k \cdot (-2+4)^3$ $\Rightarrow$ $k = \frac{1}{4}$

dus $i(x) = \frac{1}{4}(x+4)^3$

Opdracht 40 bladzijde 175

Voor een kopieerapparaat bedraagt de maandelijkse huur € 200. Per kopie bedragen de materiaalkosten € 0,03. De totale maandelijkse kosten K (in €) worden bepaald door het aantal kopieën n.

1 Bepaal K in functie van n.

$K = 0,03n + 200$

2 De kosten per kopie stellen we voor door k. Bepaal k in functie van n.

$$k = \frac{K}{n} = \frac{0,03n + 200}{n} = \frac{200}{n} + 0,03$$

3 Hoeveel kopieën moeten er minstens per maand gemaakt worden opdat een prijs van € 0,05 per kopie kostendekkend zou zijn?

$$k \le 0,05$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{200}{n} + 0,03 \le 0,05$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{200}{n} \le 0,02$$
$$\Updownarrow \quad n > 0$$
$$\frac{200}{0,02} \le n$$
$$\Updownarrow$$
$$10000 \le n$$

Er moeten minstens 10000 kopieën gemaakt worden.

4 Tot welke prijs nadert de kostprijs per kopie als het aantal kopieën groter en groter wordt?

In $k = \frac{200}{n} + 0{,}03$ laten we n steeds groter worden.

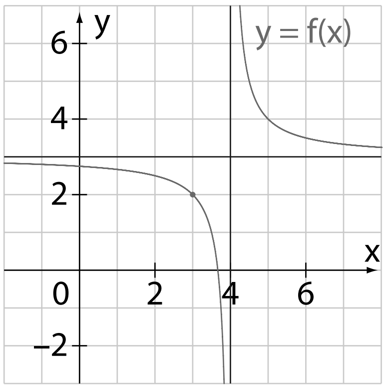
Hierdoor zal $\frac{200}{n}$ naderen naar 0, dus k zal naderen naar $0{,}03$.

Je kostprijs per kopie nadert tot € $0{,}03$ per kopie. Dit zijn de materiaalkosten.

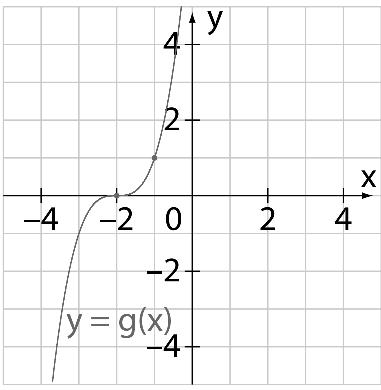
Opdracht 41 bladzijde 176

De gegeven grafieken zijn ontstaan door de grafieken van de functies $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ en $y = \frac{1}{x}$ horizontaal en/of verticaal te verschuiven. Geef voor elke grafiek het functievoorschrift.
Bepaal voor elke functie ook het domein en het bereik.

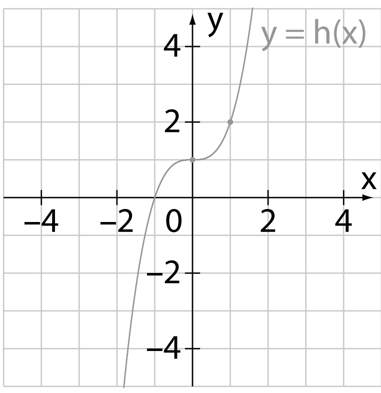
1



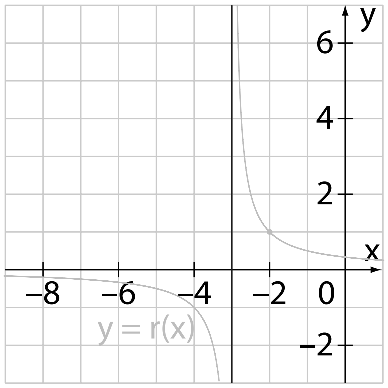
2



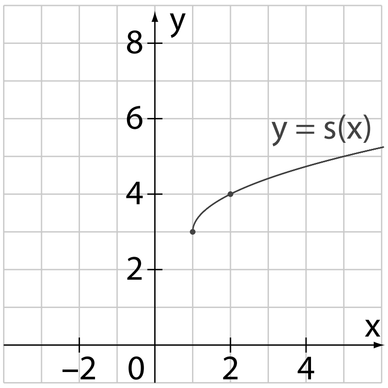
3



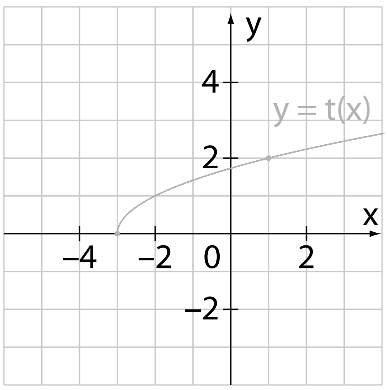
4



5



6



Oplossing van 1

Het voorschrift van f is van de vorm $y = \frac{1}{x-a} + b$.

Het symmetriemiddelpunt is $(4, 3)$ dus $a = 4$ en $b = 3$.

$f(x) = \frac{1}{x-4} + 3$

dom f = $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ ber f = $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

Controle: de grafiek van f bevat het punt $(3, 2)$: $f(3) = \frac{1}{3-4} + 3 \overset{!}{=} 2$

Oplossing van 2

Het voorschrift van g is van de vorm $y = (x-a)^3 + b$.

Het symmetriemiddelpunt is $(-2, 0)$ dus $a = -2$ en $b = 0$.

$g(x) = (x+2)^3$

dom g = $\mathbb{R}$ ber g = $\mathbb{R}$

Controle: de grafiek van g bevat het punt $(-1, 1)$: $g(-1) = (-1+2)^3 \overset{!}{=} 1$

Oplossing van 3

Het voorschrift van h is van de vorm $y = (x-a)^3 + b$.

Het symmetriemiddelpunt is $(0, 1)$ dus $a = 0$ en $b = 1$.

$h(x) = x^3 + 1$

dom h = $\mathbb{R}$ ber h = $\mathbb{R}$

Controle: de grafiek van h bevat het punt $(1, 2)$: $h(1) = 1^3 + 1 \overset{!}{=} 2$

Oplossing van 4

Het voorschrift van r is van de vorm $y = \frac{1}{x-a} + b$.

Het symmetriemiddelpunt is $(-3, 0)$ dus $a = -3$ en $b = 0$.

$r(x) = \frac{1}{x+3}$

dom r = $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ber f = $\mathbb{R}_0$

Controle: de grafiek van r bevat het punt $(-2, 1)$: $r(-2) = \frac{1}{-2+3} \overset{!}{=} 1$

Oplossing van 5

Het voorschrift van s is van de vorm $y = \sqrt{x-a} + b$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{dom } s = [1, +\infty[\text{ dus } a = 1 \\ \text{ber } s = [3, +\infty[\text{ dus } b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow s(x) = \sqrt{x-1} + 3$$

Controle: de grafiek van s bevat het punt $(2, 4)$: $s(2) = \sqrt{2-1} + 3 \stackrel{!}{=} 4$

Oplossing van 6

Het voorschrift van t is van de vorm $y = \sqrt{x-a} + b$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{dom } t = [-3, +\infty[\text{ dus } a = -3 \\ \text{ber } t = [0, +\infty[\text{ dus } b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t(x) = \sqrt{x+3}$$

Controle: de grafiek van t bevat het punt $(1, 2)$: $t(1) = \sqrt{1+3} \stackrel{!}{=} 2$

Opdracht 42 bladzijde 176

De functie g ontstaat uit de functie $f(x) = \sqrt{x}$ door een spiegeling om de x-as, een verticale uitrekking met factor 4 en een verschuiving over de vector $\vec{v}(-3, 2)$.

1 Geef het voorschrift van de functie g.

$f(x) = \sqrt{x}$

$\downarrow$ spiegeling om de x-as

$y = -\sqrt{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 4

$y = -4\sqrt{x}$

$\downarrow$ verschuiving over de vector $\vec{v}(-3, 2)$

$y = -4\sqrt{x+3} + 2$

dus $g(x) = -4\sqrt{x+3} + 2$

2 Bepaal het domein en het bereik van de functie g.

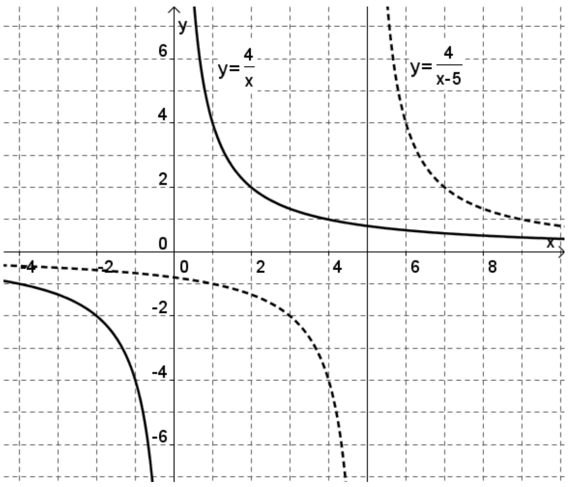
dom $g = [-3, +\infty[$ ber $g =]-\infty, 2]$

Opdracht 43 bladzijde 177

1 Bepaal het domein van de functies $f(x)=\dfrac{4}{x}$ en $g(x)=\dfrac{4}{x-5}$.

$\text{dom } f = \mathbb{R}_0$ $\qquad$ $\text{dom } g = \mathbb{R}\setminus\{5\}$

2 Teken in één assenstelsel de grafieken van beide functies.



3 Welke rechten zijn asymptoten van de grafiek van f, respectievelijk van de grafiek van g? Geef de coördinaat van het symmetriemiddelpunt van de grafiek van f en van g.

- De functie f
  $VA: x=0$ $\qquad$ $HA: y=0$ $\qquad$ symmetriemiddelpunt: $(0, 0)$
- De functie g
  $VA: x=5$ $\qquad$ $HA: y=0$ $\qquad$ symmetriemiddelpunt: $(5, 0)$

4 Leid uit de grafieken de tekenverandering en het stijgen en dalen af van f en g.

Tekentabel

x		0	
f(x)	–	|	+

x		5	
g(x)	–	|	+

Verloopschema

x		0	
f(x)	↘	|	↘

x		5	
g(x)	↘	|	↘

Opdracht 44 bladzijde 177

Gegeven is de functie f met voorschrift $y = \frac{1}{4}(x-2)^3 - 5$.

1 Welke transformaties zetten de grafiek van $y = x^3$ om in de grafiek van f ?

$y = x^3$

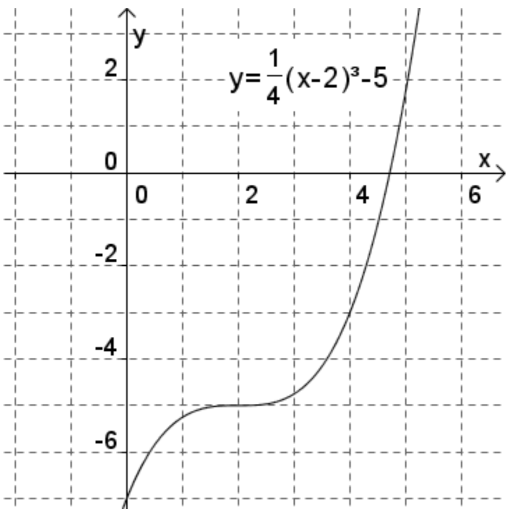
$\downarrow$ verticale uitrekking met factor $\frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4}x^3$

$\downarrow$ verschuiving over de vector $\vec{v}(2, -5)$

$y = \frac{1}{4}(x-2)^3 - 5$

2 Teken de grafiek van f.



3 Bereken het nulpunt van f.

$$\frac{1}{4}(x-2)^3 - 5 = 0$$

$$(x-2)^3 = 20$$

$$x - 2 = \sqrt[3]{20}$$

$$x = \sqrt[3]{20} + 2 \approx 4,71$$

4 Geef het tekenonderzoek en het verloopschema van f.

Tekentabel

x		$\sqrt[3]{20}+2$	
f(x)	–	0	+

Verloopschema

x	
f(x)	↗

Opdracht 45 bladzijde 177

Gegeven is de functie f met voorschrift $y = \frac{3}{4}\sqrt{x + \frac{19}{81}} - \frac{5}{6}$.

1 Welke transformaties zetten de grafiek van $y = \sqrt{x}$ om in de grafiek van f ?

$y = \sqrt{x}$

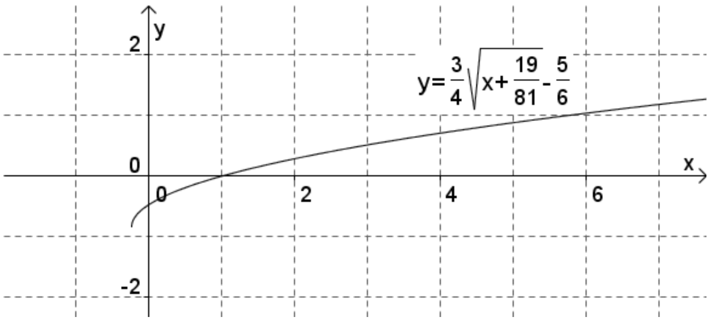
$\downarrow$ verticale uitrekking met factor $\frac{3}{4}$

$y = \frac{3}{4}\sqrt{x}$

$\downarrow$ verschuiving over de vector $\vec{v}\left(-\frac{19}{81}, -\frac{5}{6}\right)$

$y = \frac{3}{4}\sqrt{x + \frac{19}{81}} - \frac{5}{6}$

2 Teken de grafiek van f.



3 Geef het domein en het bereik van f.

dom f $= \left[-\frac{19}{81}, +\infty\right[$ ber f $= \left[-\frac{5}{6}, +\infty\right[$

4 Bereken het nulpunt van f.

$$\frac{3}{4}\sqrt{x + \frac{19}{81}} - \frac{5}{6} = 0$$

$$\sqrt{x + \frac{19}{81}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{3}$$

$$x + \frac{19}{81} = \left(\frac{10}{9}\right)^2$$

$$x = \frac{100}{81} - \frac{19}{81}$$

$$x = 1$$

5 Geef het tekenonderzoek en het verloopschema van f.

Tekentabel

x		$\frac{-19}{81}$		1	
f(x)		–	–	0	+

Verloopschema

x		$\frac{-19}{81}$	
f(x)		$\frac{-5}{6}$	↗

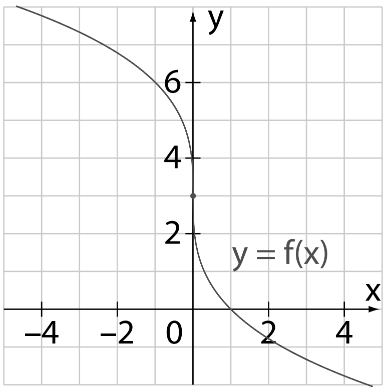
Opdracht 46 bladzijde 178

Gegeven :

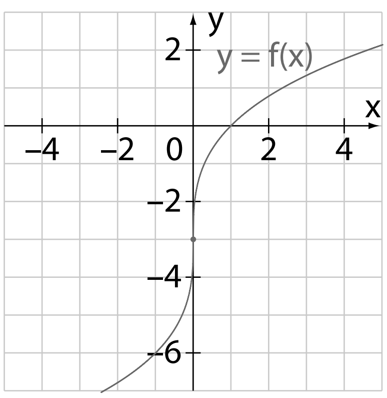
1	$f(x)=3(x-3)^3$	5	$f(x)=3\sqrt[3]{x-3}$
2	$f(x)=3(x+3)^3$	6	$f(x)=-3\sqrt[3]{x}+3$
3	$f(x)=-3(x-3)^3-3$	7	$f(x)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x+3}+3$
4	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3$	8	$f(x)=3\sqrt[3]{x}-3$

Plaats bij elke grafiek één van de bovenstaande voorschriften zonder gebruik te maken van je rekentoestel.

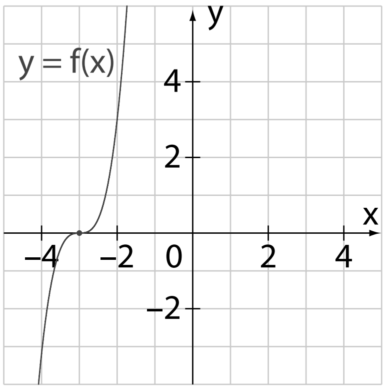
A



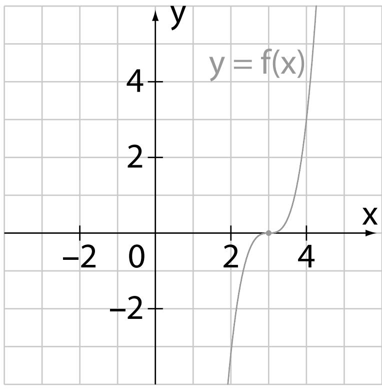
D



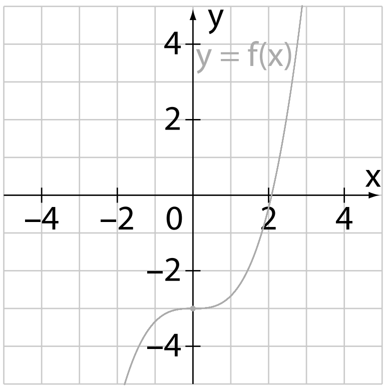
B



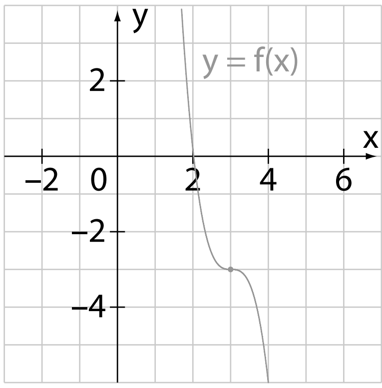
E



C



F



Oplossing van A

Het voorschrift van f is van de vorm $y = k \cdot \sqrt[3]{x-a} + b$ met $k < 0$.

Het symmetriemiddelpunt is $(0, 3)$ dus $a = 0$ en $b = 3$.

$y = k \cdot \sqrt[3]{x} + 3$

dus voorschrift 6: $f(x) = -3\sqrt[3]{x} + 3$

Oplossing van B

Het voorschrift van f is van de vorm $y = k \cdot (x-a)^3 + b$ met $k > 0$.

Het symmetriemiddelpunt is $(-3, 0)$ dus $a = -3$ en $b = 0$.

$y = k \cdot (x+3)^3$

dus voorschrift 2: $f(x) = 3(x+3)^3$

Oplossing van C

Het voorschrift van f is van de vorm $y = k \cdot (x-a)^3 + b$ met $k > 0$.

Het symmetriemiddelpunt is $(0, -3)$ dus $a = 0$ en $b = -3$.

$y = k \cdot x^3 - 3$

dus voorschrift 4: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3$

Oplossing van D

Het voorschrift van f is van de vorm $y = k \cdot \sqrt[3]{x-a} + b$ met $k > 0$.

Het symmetriemiddelpunt is $(0, -3)$ dus $a = 0$ en $b = -3$.

$y = k \cdot \sqrt[3]{x} - 3$

dus voorschrift 8: $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 3$

Oplossing van E

Het voorschrift van f is van de vorm $y = k \cdot (x-a)^3 + b$ met $k > 0$.

Het symmetriemiddelpunt is $(3, 0)$ dus $a = 3$ en $b = 0$.

$y = k \cdot (x-3)^3$

dus voorschrift 1: $f(x) = 3(x-3)^3$

Oplossing van F

Het voorschrift van f is van de vorm $y = k \cdot (x-a)^3 + b$ met $k < 0$.

Het symmetriemiddelpunt is $(3, -3)$ dus $a = 3$ en $b = -3$.

$y = k \cdot (x-3)^3 - 3$

dus voorschrift 3: $f(x) = -3(x-3)^3 - 3$

Opdracht 47 bladzijde 179

1 Welke rechten zijn de asymptoten van de grafiek van $y = \dfrac{k}{x}$?

$\text{VA}: x = 0 \qquad \text{HA}: y = 0$

2 Welke rechten zijn de asymptoten van de grafiek van $y = \dfrac{k}{x} + b$?

$\text{VA}: x = 0 \qquad \text{HA}: y = b$

3 Welke rechten zijn de asymptoten van de grafiek van $y = \dfrac{k}{x-a} + b$?

$\text{VA}: x = a \qquad \text{HA}: y = b$

Opdracht 48 bladzijde 179

Geef het domein, het bereik en het nulpunt van de gegeven functies.

1 $f(x) = 4\sqrt{x-3}$

$\text{dom } f = [3, +\infty[\qquad \text{ber } f = [0, +\infty[$

nulpunt: 3

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x-3} &= 0 \\ x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

2 $f(x) = -2\sqrt{x} + 1$

$\text{dom } f = [0, +\infty[\qquad \text{ber } f =]-\infty, 1]$

nulpunt : $\frac{1}{4}$

$$
\begin{aligned}
-2\sqrt{x}+1 &= 0 \\
\sqrt{x} &= \frac{1}{2} \\
x &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

3	$f(x)=2\sqrt{x+4}-2$

dom f $=[-4,+\infty[$ ber f $=[-2,+\infty[$

nulpunt : -3

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{x+4}-2 &= 0 \\
\sqrt{x+4} &= 1 \\
x+4 &= 1 \\
x &= -3
\end{aligned}
$$

Opdracht 49 bladzijde 179

Bepaal telkens een mogelijk voorschrift van een functie met de volgende kenmerken.

1	De grafiek is een hyperbool met symmetriemiddelpunt $S(5,-3)$.

$$y=\frac{1}{x-5}-3$$

2	De grafiek heeft als nulpunt -4 en het snijpunt met de y-as is $A(0,64)$. Het domein en het bereik is $\mathbb{R}$.

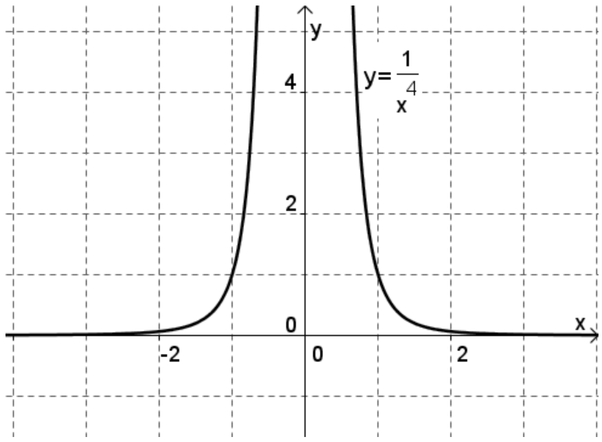
$$y=(x+4)^3$$

3	Het domein van de functie is $[4,+\infty[$, het bereik is $[2,+\infty[$. Het punt $A(8,4)$ ligt op de grafiek.

$$y=\sqrt{x-4}+2$$

Opdracht 50 bladzijde 179

1 Teken de grafiek van $y = \frac{1}{x^4}$.



2 De grafiek van deze functie wordt gespiegeld om de x-as, en daarna naar boven verschoven over 2 eenheden. Wat is het voorschrift van de nieuwe functie?

$$y = \frac{1}{x^4}$$

$\downarrow$ spiegeling om de x-as

$$y = -\frac{1}{x^4}$$

$\downarrow$ verschuiving over de vector $\vec{v}(0, 2)$

$$y = -\frac{1}{x^4} + 2$$

3 Verkrijg je dezelfde functie wanneer je de grafiek van $y = \frac{1}{x^4}$ eerst over 2 eenheden naar boven verschuift, en daarna spiegelt om de x-as?

$$y = \frac{1}{x^4}$$

$\downarrow$ verschuiving over de vector $\vec{v}(0, 2)$

$$y = \frac{1}{x^4} + 2$$

$\downarrow$ spiegeling om de x-as

$$y = -\left(\frac{1}{x^4} + 2\right) = -\frac{1}{x^4} - 2$$

Je verkrijgt niet dezelfde functie als in 2.

Opdracht 51 bladzijde 179

Bepaal, indien mogelijk, de nulpunten van de volgende functies.

$\boxed{1 \quad f(x) = \frac{1}{x} - 5}$

nulpunt: $\frac{1}{5}$

$$\frac{1}{x} - 5 = 0$$
$$\frac{1}{x} = 5$$
$$x = \frac{1}{5}$$

$\boxed{2 \quad f(x) = \sqrt{x} - 2}$

nulpunt: 4

$$\sqrt{x} - 2 = 0$$
$$\sqrt{x} = 2$$
$$x = 4$$

$\boxed{3 \quad f(x) = (x-3)^3}$

nulpunt: 3

$$(x-3)^3 = 0$$
$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

$\boxed{4 \quad f(x) = \sqrt{x+4}}$

nulpunt: -4

$$\sqrt{x+4} = 0$$
$$x + 4 = 0$$
$$x = -4$$

$\boxed{5 \quad f(x) = \frac{1}{x-4}}$

geen nulpunten

$\boxed{6 \quad f(x) = \sqrt[3]{x} - 2}$

nulpunt: 8

$$\sqrt[3]{x} - 2 = 0$$
$$\sqrt[3]{x} = 2$$
$$x = 8$$

$\boxed{7 \quad f(x) = \frac{3}{x} + 4}$

nulpunt: $-\frac{3}{4}$

$$\frac{3}{x} + 4 = 0$$
$$\frac{3}{x} = -4$$
$$x = -\frac{3}{4}$$

$\boxed{8 \quad f(x) = 2\sqrt{x-4} + 1}$

geen nulpunten

$$2\sqrt{x-4} + 1 = 0$$
$$\sqrt{x-4} = \frac{-1}{2} < 0$$

Opdracht 52 bladzijde 180

Gegeven is de functie f met voorschrift $y = \dfrac{-5x-7}{x+2}$.

1 Schrijf de functie f in de vorm $y = \dfrac{k}{x-a} + b$.

We delen $-5x-7$ door $x+2$.

$$\begin{array}{r|l} -5x-7 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{\pm 5x \pm 10} & -5 \\ 3 & \end{array}$$

Uit deze euclidische deling volgt : $-5x-7 = (x+2)\cdot(-5)+3$, of :

$$\frac{-5x-7}{x+2} = -5 + \frac{3}{x+2}$$

dus $y = \dfrac{3}{x+2} - 5$.

2 Welke transformaties zetten de grafiek van $y = \dfrac{1}{x}$ om in de grafiek van f ?

$y = \dfrac{1}{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 3

$y = \dfrac{3}{x}$

$\downarrow$ verschuiving over de vector $\vec{v}(-2, -5)$

$y = \dfrac{3}{x+2} - 5$

Opdracht 53 bladzijde 180

1 Door welke transformaties (verschuivingen, spiegelingen, uitrekkingen) kunnen we de grafiek van $g(x) = \dfrac{4x-7}{-2x+5}$ afleiden uit de grafiek van $f(x) = \dfrac{1}{x}$?

We delen $4x-7$ door $-2x+5$.

$$\begin{array}{r|l} 4x-7 & -2x+5 \\ \cline{2-2} \underline{\mp 4x \pm 10} & -2 \\ 3 & \end{array}$$

Uit deze euclidische deling volgt : $4x-7=(-2x+5)\cdot(-2)+3$, of :

$$\frac{4x-7}{-2x+5}=-2+\frac{3}{-2x+5}$$
$$=-2+\frac{\frac{3}{-2}}{x+\frac{5}{-2}}$$

dus $g(x)=\dfrac{\frac{-3}{2}}{x-\frac{5}{2}}-2.$

$y=\dfrac{1}{x}$

$\downarrow$ spiegeling om de x-as

$y=\dfrac{-1}{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor $\dfrac{3}{2}$

$y=\dfrac{\frac{-3}{2}}{x}$

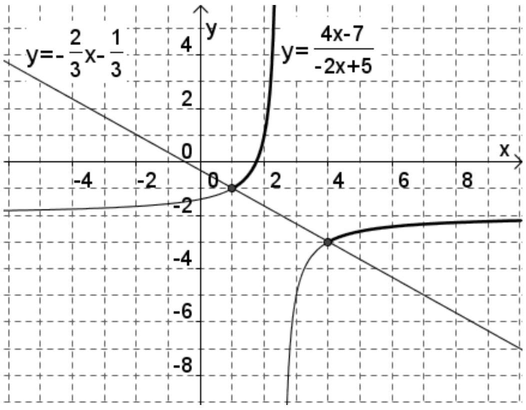
$\downarrow$ verschuiving over de vector $\vec{v}\left(\dfrac{5}{2},-2\right)$

$y=\dfrac{\frac{-3}{2}}{x-\frac{5}{2}}-2$

2 Bepaal de asymptoten en het symmetriemiddelpunt van de grafiek van g.

VA : $x=\dfrac{5}{2}$ HA : $y=-2$ symmetriemiddelpunt : $\left(\dfrac{5}{2},-2\right)$

3 Los grafisch op : $\dfrac{4x-7}{-2x+5} > -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$.



$\dfrac{4x-7}{-2x+5} > -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$ voor $1 < x < \dfrac{5}{2}$ of $x > 4$

Opdracht 54 bladzijde 180

Een kopje koffie wordt op een terrasje geserveerd. De temperatuur van de koffie kan beschreven worden met de formule $T = \dfrac{60}{t+1} + 20$, met T de temperatuur in °C en t de tijd na het serveren in minuten.

1 Welke temperatuur heeft de koffie bij het serveren?

$$T = \frac{60}{t+1} + 20$$

Bij het serveren is $t = 0$.
De koffie heeft dus een temperatuur van 80 °C.

2 Welke temperatuur heeft de koffie na een uur wachten?

Na een uur is $t = 60$.

$$T = \frac{60}{60+1} + 20 \approx 20{,}98$$

De koffie heeft dan een temperatuur van 20,98 °C.

3 Na verloop van tijd is de temperatuur van de koffie gelijk aan de temperatuur van het buitenterras. Wat is deze temperatuur?

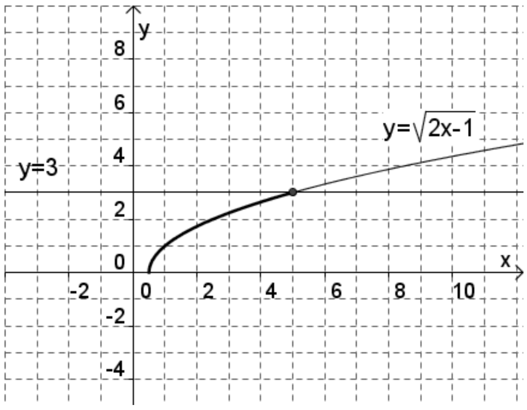
$t \to +\infty$ dus $\dfrac{60}{t+1} \to 0$.

De temperatuur op het terras is dus 20 °C.

Opdracht 55 bladzijde 180

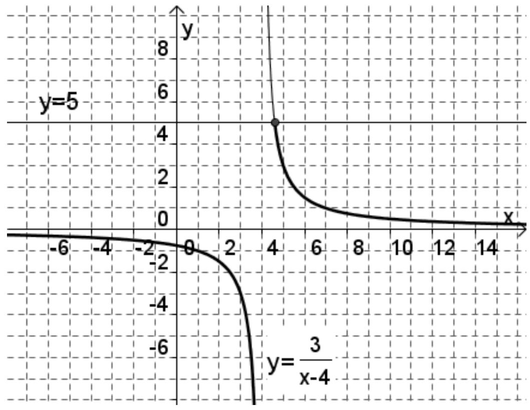
Los grafisch op.

$\boxed{1 \quad \sqrt{2x-1} \le 3}$



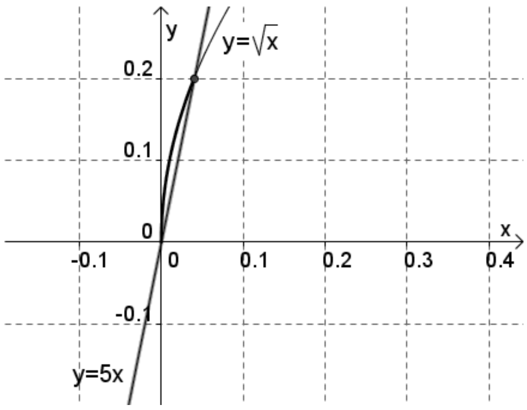
$\sqrt{2x-1} \le 3$ voor $\frac{1}{2} \le x \le 5$

$\boxed{3 \quad \frac{3}{x-4} < 5}$



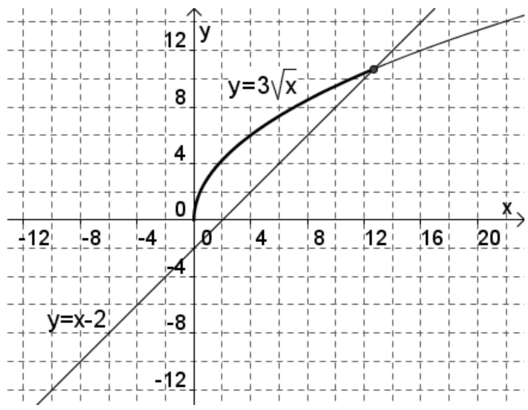
$\frac{3}{x-4} < 5$ voor $x < 4$ of $x > 4,6\left(=\frac{23}{5}\right)$

$\boxed{2 \quad \sqrt{x} \ge 5x}$



$\sqrt{x} \ge 5x$ voor $0 \le x \le 0,04\left(=\frac{1}{25}\right)$

$\boxed{4 \quad 3\sqrt{x} > x-2}$

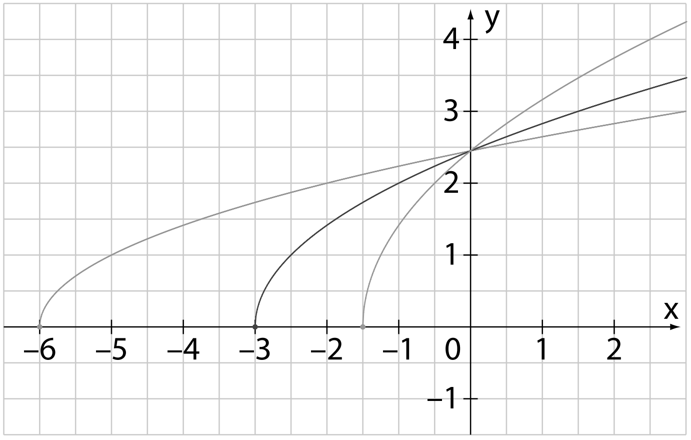


$3\sqrt{x} > x-2$ voor $0 \le x < 12,684658$

Opdracht 56 bladzijde 181

$f(x) = \sqrt{ax+6}$, met $a \neq 0$, stelt een familie van functies voor.

1 Voor welke waarden van a is hieronder de grafiek getekend?



oranje grafiek bevat het punt $(-1,5\,;0)$: $0 = \sqrt{a\cdot(-1,5)+6}$

$$-1,5a+6=0$$

$$a = \frac{-6}{-1,5} = 4$$

paarse grafiek bevat het punt $(-3, 0)$: $0 = \sqrt{a\cdot(-3)+6}$

$$-3a+6=0$$

$$a = \frac{-6}{-3} = 2$$

groene grafiek bevat het punt $(-6, 0)$: $0 = \sqrt{a\cdot(-6)+6}$

$$-6a+6=0$$

$$a = \frac{-6}{-6} = 1$$

2 Voor welke waarde van a gaat de grafiek van $f(x) = \sqrt{ax+6}$ door het punt $A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$?

De grafiek van f gaat door het punt $A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ indien $\frac{3}{2} = \sqrt{a\cdot\frac{3}{2}+6}$

$$\frac{9}{4} = \frac{3}{2}a+6$$

$$\frac{3}{2}a = \frac{-15}{4}$$

$$a = -\frac{5}{2}$$

Opdracht 57 bladzijde 181

Bepaal een mogelijk voorschrift van een functie die als grafiek een hyperbool heeft met asymptoten $a \leftrightarrow y = 3$ en $b \leftrightarrow x = 2$ en met nulpunt 1.

Oplossing

Het voorschrift van een functie die als grafiek een hyperbool heeft met asymptoten $a \leftrightarrow y = 3$ en $b \leftrightarrow x = 2$ is van de vorm $y = \dfrac{k}{x-2} + 3$.

Het nulpunt is 1 indien de grafiek van de functie het punt $(1, 0)$ bevat: $0 = \dfrac{k}{1-2} + 3 \Rightarrow k = 3$,

dus $y = \dfrac{3}{x-2} + 3$.

Opdracht 58 bladzijde 181

Wanneer we $y = f(x)$ vervangen door $y = -f(x)$, wordt de grafiek van de functie gespiegeld om de x-as.
Wat gebeurt er met de grafiek van de functie $y = f(x)$ wanneer we het voorschrift vervangen door $y = f(-x)$?

Oplossing

De x-waarden worden tegengesteld terwijl de functiewaarden gelijk blijven. De grafiek wordt dus gespiegeld om de y-as.

Opdracht 59 bladzijde 181

1 a Door welke opeenvolgende transformaties kun je overgaan van de grafiek van $y = \sqrt[3]{x}$ naar de grafiek van $y = 4 \cdot \sqrt[3]{x-2} - 1$?

$y = \sqrt[3]{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 4

$y = 4 \cdot \sqrt[3]{x}$

$\downarrow$ verschuiving over de vector $\vec{v}(2, -1)$

$y = 4 \cdot \sqrt[3]{x-2} - 1$

1 b	Door welke opeenvolgende transformaties kun je overgaan van de grafiek van $y = \sqrt[3]{x}$ naar de grafiek van $y = 4 \cdot \sqrt[3]{2-x} + 1$?

$y = 4 \cdot \sqrt[3]{2-x} + 1 = -4 \cdot \sqrt[3]{x-2} + 1$

$y = \sqrt[3]{x}$

$\downarrow$ spiegeling om de x-as

$y = -\sqrt[3]{x}$

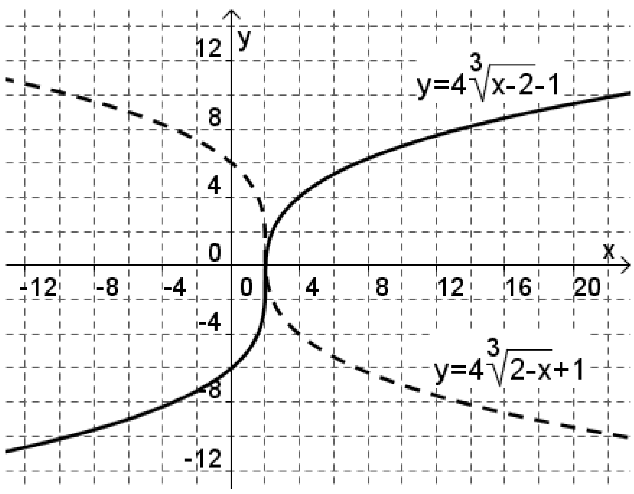
$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 4

$y = -4 \cdot \sqrt[3]{x}$

$\downarrow$ verschuiving over de vector $\vec{v}(2,1)$

$y = -4 \cdot \sqrt[3]{x-2} + 1$

2	Wat stel je vast in verband met beide grafieken?



Je stelt vast dat de grafiek van $y = 4 \cdot \sqrt[3]{2-x} + 1$ ontstaat door spiegeling om de x-as van de grafiek van $y = 4 \cdot \sqrt[3]{x-2} - 1$.

Verklaring: $y = 4 \cdot \sqrt[3]{2-x} + 1 = -4 \cdot \sqrt[3]{x-2} + 1 = -\left(4 \cdot \sqrt[3]{x-2} - 1\right)$

Opdracht 60 bladzijde 182

De grafiek van een willekeurige functie $y = f(x)$ wordt evenwijdig met de eerste bissectrice verschoven over een afstand $\sqrt{2}$ (zodanig dat de x- en de y-waarden van elk punt groter worden). Het voorschrift van de nieuwe functie is:

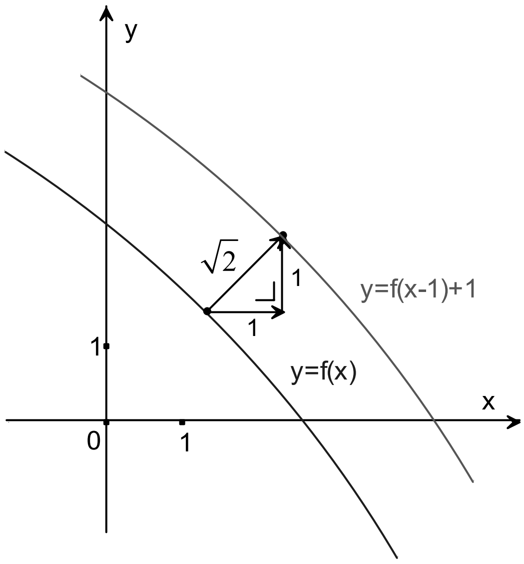
A $y = f(x+1)+1$ B $y = f(x-1)+1$ C $y = f(x)+\sqrt{2}$

D $y = f\left(x+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$ E $y = f\left(x-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$

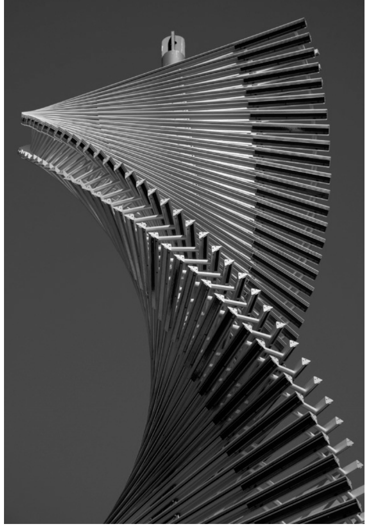
Oplossing

Antwoord B

Verklaring : wanneer de grafiek evenwijdig met de eerste bissectrice over een afstand $\sqrt{2}$ verschoven wordt zodat de x- en de y-coördinaat van elk punt groter worden, dan wordt de grafiek over 1 eenheid naar rechts en over 1 eenheid naar boven verschoven.
Het voorschrift wordt dus $y = f(x-1)+1$.



De diagonaal van een vierkant met zijde 1 is immers $\sqrt{2}$.



Herhalingsopdracht 61 bladzijde 183

De grafiek van de functie $f(x)=\sqrt{x}$ wordt verticaal uitgerekt met factor 2, daarna naar links verschoven over 1 eenheid en tenslotte naar onder verschoven over 4 eenheden.

1 Bepaal het voorschrift van de functie g die je verkrijgt na deze transformaties.

$y=\sqrt{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2

$y=2\sqrt{x}$

$\downarrow$ verschuiving naar links over 1 eenheid

$y=2\sqrt{x+1}$

$\downarrow$ verschuiving naar onder over 4 eenheden

$y=2\sqrt{x+1}-4$

dus $g(x)=2\sqrt{x+1}-4$

2 Bepaal het domein, het bereik en het nulpunt van g.

$\text{dom } g=[-1,+\infty[$ $\qquad$ $\text{ber } g=[-4,+\infty[$

nulpunt van g : 3

$$\begin{aligned}2\sqrt{x+1}-4&=0\\ \sqrt{x+1}&=2\\ x+1&=2^2\\ x&=3\end{aligned}$$

Herhalingsopdracht 62 bladzijde 183

1 Geef het voorschrift van de functie g die ontstaat uit de grafiek van $f(x)=\sqrt[3]{x}$ door een spiegeling om de x-as, een verticale uitrekking met factor 3 en een verschuiving over de vector $\vec{v}(2,6)$.

$y=\sqrt[3]{x}$

$\downarrow$ spiegeling om de x-as

$y=-\sqrt[3]{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 3

$y=-3\sqrt[3]{x}$

$\downarrow$ verschuiving over de vector $\vec{v}(2, 6)$

$y = -3\sqrt[3]{x-2} + 6$

dus $g(x) = -3\sqrt[3]{x-2} + 6$

2 Geef de tekentabel en het verloopschema van de functie g.

nulpunt van g : 10

$$\begin{aligned} -3\sqrt[3]{x-2} + 6 &= 0 \\ \sqrt[3]{x-2} &= 2 \\ x - 2 &= 8 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Tekentabel

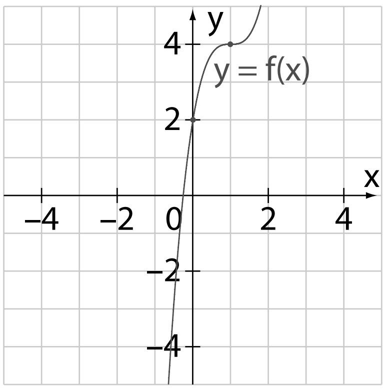
x		10	
g(x)	+	0	–

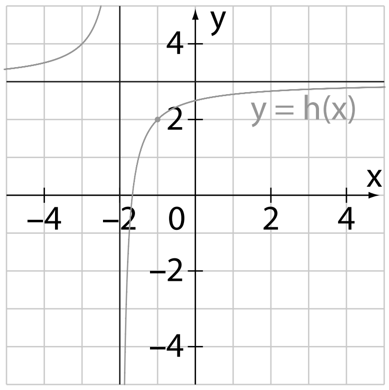
Verloopschema

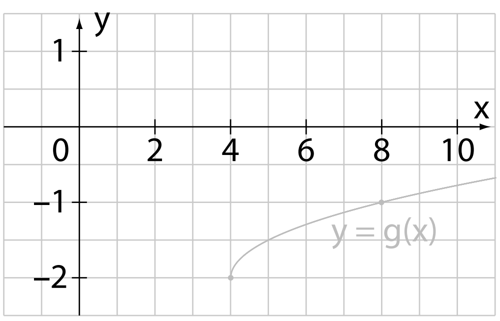
x	
g(x)	↘

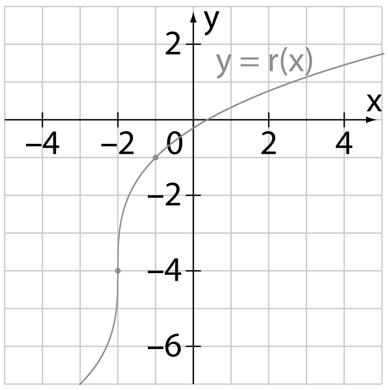
Herhalingsopdracht 63 bladzijde 183

De gegeven grafieken zijn ontstaan door transformaties van de grafieken van de functies $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$ en $y = \frac{1}{x}$. Bepaal telkens het voorschrift.

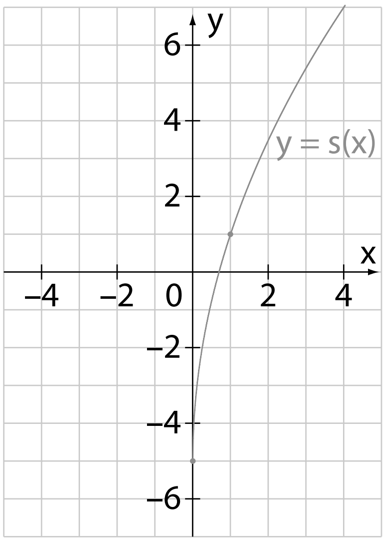
1


3


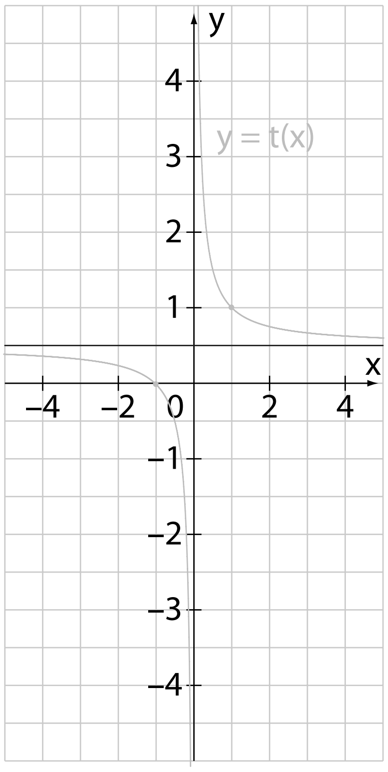
2


4


5



6



Oplossing van 1

Het voorschrift van f is van de vorm $y = k \cdot (x - a)^3 + b$.

Het symmetriemiddelpunt is $(1, 4)$ dus $a = 1$ en $b = 4$.

De grafiek van $y = k \cdot (x-1)^3 + 4$ bevat het punt $(0, 2) \Rightarrow 2 = k \cdot (0-1)^3 + 4 \Rightarrow k = 2$

dus $f(x) = 2(x-1)^3 + 4$

Oplossing van 2

Het voorschrift van g is van de vorm $y = k \cdot \sqrt{x-a} + b$.

dom $g = [4, +\infty[$ en ber $g = [-2, +\infty[$ dus $a = 4$ en $b = -2$

De grafiek van $y = k \cdot \sqrt{x-4} - 2$ bevat het punt $(8, -1) \Rightarrow -1 = k \cdot \sqrt{8-4} - 2 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

dus $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x-4} - 2$

Oplossing van 3

Het voorschrift van h is van de vorm $y = \dfrac{k}{x-a} + b$.

Het symmetriemiddelpunt is $(-2, 3)$ dus $a = -2$ en $b = 3$.

De grafiek van $y = \dfrac{k}{x+2} + 3$ bevat het punt $(-1, 2)$ $\Rightarrow$ $2 = \dfrac{k}{-1+2} + 3$ $\Rightarrow$ $k = -1$

dus $h(x) = \dfrac{-1}{x+2} + 3$

Oplossing van 4

Het voorschrift van r is van de vorm $y = k \cdot \sqrt[3]{x-a} + b$.

Het symmetriemiddelpunt is $(-2, -4)$ dus $a = -2$ en $b = -4$.

De grafiek van $y = k \cdot \sqrt[3]{x+2} - 4$ bevat het punt $(-1, -1)$ $\Rightarrow$ $-1 = k \cdot \sqrt[3]{-1+2} - 4$ $\Rightarrow$ $k = 3$

dus $r(x) = 3\sqrt[3]{x+2} - 4$

Oplossing van 5

Het voorschrift van s is van de vorm $y = k \cdot \sqrt{x-a} + b$.

dom $s = \mathbb{R}^+$ en ber $s = [-5, +\infty[$ dus $a = 0$ en $b = -5$

De grafiek van $y = k \cdot \sqrt{x} - 5$ bevat het punt $(1, 1)$ $\Rightarrow$ $1 = k \cdot \sqrt{1} - 5$ $\Rightarrow$ $k = 6$

dus $s(x) = 6\sqrt{x} - 5$

Oplossing van 6

Het voorschrift van t is van de vorm $y = \dfrac{k}{x-a} + b$.

Het symmetriemiddelpunt is $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ dus $a = 0$ en $b = \dfrac{1}{2}$.

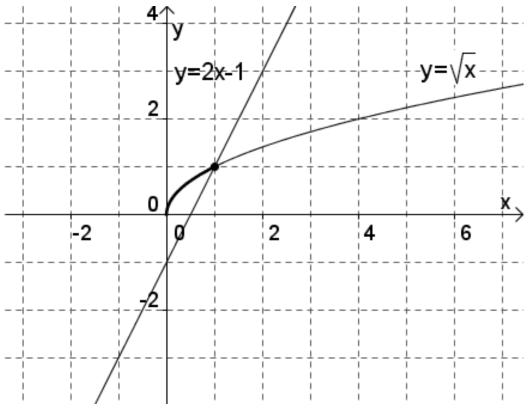
De grafiek van $y = \dfrac{k}{x} + \dfrac{1}{2}$ bevat het punt $(1, 1)$ $\Rightarrow$ $1 = \dfrac{k}{1} + \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $k = \dfrac{1}{2}$

dus $t(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2}$

Herhalingsopdracht 64 bladzijde 184

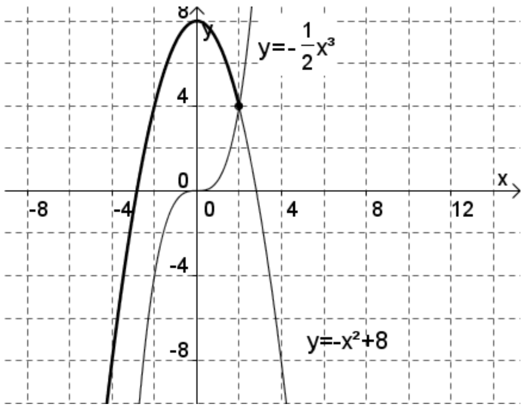
Los grafisch op.

$\boxed{1 \quad \sqrt{x} > 2x - 1}$



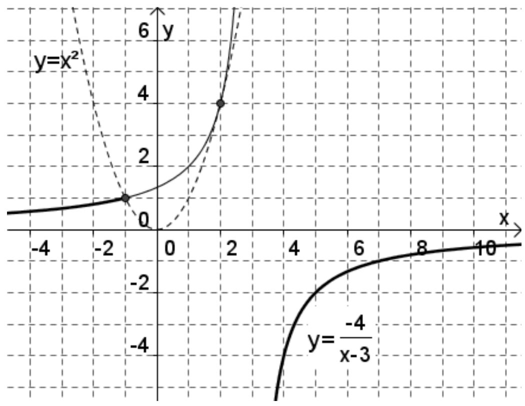
$\sqrt{x} > 2x - 1$ voor $0 \leq x < 1$

$\boxed{2 \quad -x^2 + 8 \geq \frac{1}{2}x^3}$



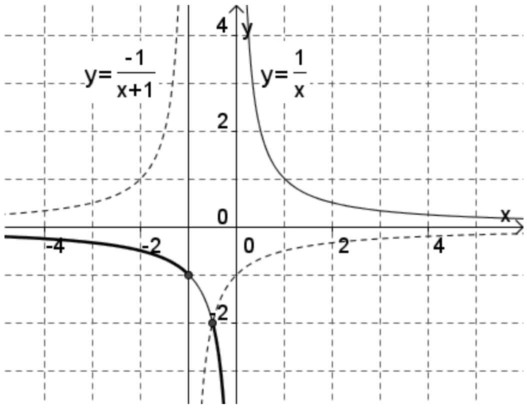
$-x^2 + 8 \geq \frac{1}{2}x^3$ voor $x \leq 2$

$\boxed{3 \quad \frac{-4}{x-3} \leq x^2}$



$\frac{-4}{x-3} \leq x^2$ voor $x \leq -1$ of $x = 2$ of $x > 3$

$\boxed{4 \quad \frac{1}{x} < \frac{-1}{x+1}}$



$\frac{1}{x} < \frac{-1}{x+1}$ voor $x < -1$ of $-\frac{1}{2} < x < 0$

Herhalingsopdracht 65 bladzijde 185

Als G_1 de grafiek is van $y = f(x)$, dan is G_2 de grafiek van

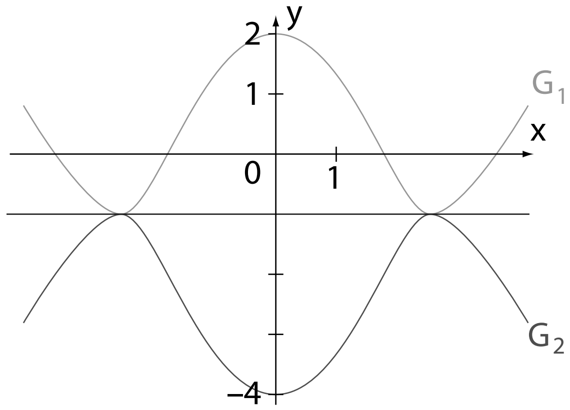
A $y = -f(x)$

B $y = f(-x)$

C $y = f(x) - 6$

D $y = -f(x) - 1$

E $y = -f(x) - 2$



Oplossing

Antwoord E

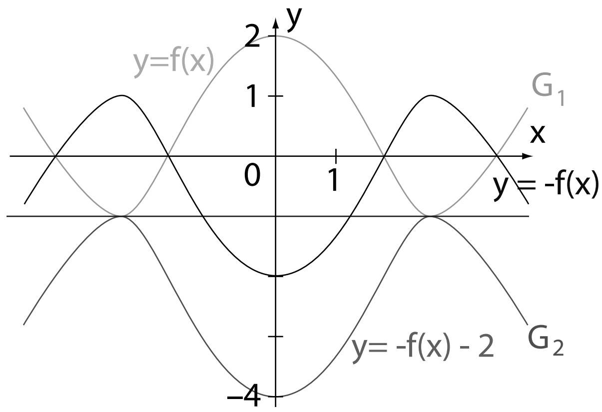
$y = f(x)$ (grafiek G_1)

$\downarrow$ spiegeling om de x-as

$y = -f(x)$

$\downarrow$ verschuiving over 2 eenheden naar beneden

$y = -f(x) - 2 \quad \to$ grafiek G_2



Herhalingsopdracht 66 bladzijde 185

Gegeven is de functie f met voorschrift $y = \dfrac{4x+1}{2x-1}$.

1 Schrijf het voorschrift f in de vorm $y = \dfrac{k}{x-a} + b.$

We delen $4x+1$ door $2x-1$.

$$\begin{array}{r|l} 4x+1 & 2x-1 \\ \hline \mp 4x \pm 2 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Uit deze euclidische deling volgt : $4x+1=(2x-1)\cdot 2+3$, of :

$$\frac{4x+1}{2x-1}=2+\frac{3}{2x-1}$$
$$=2+\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}$$

dus $f(x)=\dfrac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}+2.$

2 Welke transformaties zetten de grafiek van $y=\dfrac{1}{x}$ om in de grafiek van f ?

$y=\dfrac{1}{x}$

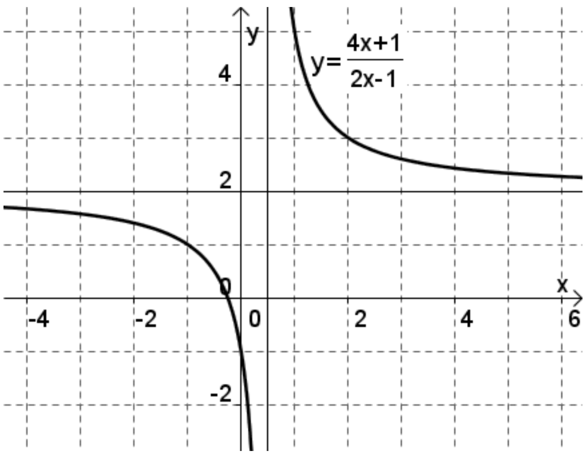
$\downarrow$ verticale uitrekking met factor $\dfrac{3}{2}$

$y=\dfrac{\frac{3}{2}}{x}$

$\downarrow$ verschuiving over de vector $\vec{v}\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$

$y=\dfrac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}+2$

3 Teken de grafiek van f.



4 Welke rechten zijn asymptoten van de grafiek van f ?

VA : $x=\dfrac{1}{2}$ HA : $y=2$

5 Wat is de coördinaat van het symmetriemiddelpunt van de grafiek van f ?

symmetriemiddelpunt $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

6 Bepaal het domein, het bereik en de nulpunten van f.

dom f $= \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ber f $= \mathbb{R} \setminus \{2\}$

nulpunt : $-\frac{1}{4}$

$$\frac{4x+1}{2x-1} = 0$$

$$4x+1=0 \text{ en } 2x-1 \neq 0$$

$$x = \frac{-1}{4} \text{ en } x \neq \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

7 Leid uit de grafiek van f de tekenverandering en het verloop van f af.

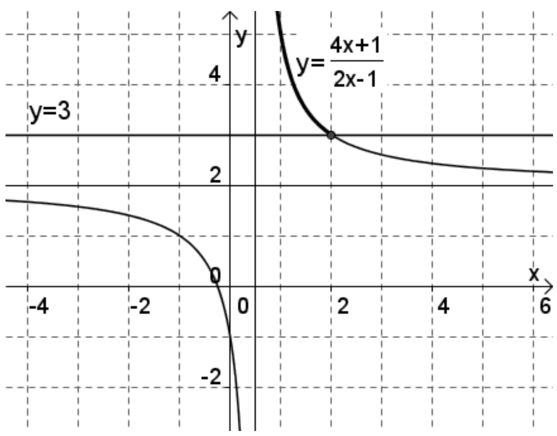
Tekentabel

x		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	
f(x)	+	0	–	|	+

Verloopschema

x		$\frac{1}{2}$	
f(x)	↘	|	↘

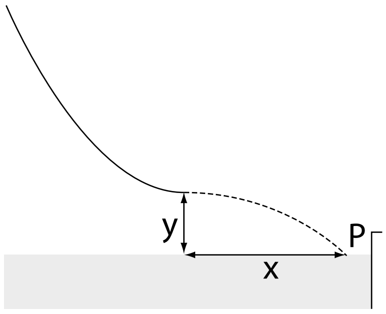
8 Los de ongelijkheid $f(x) > 3$ op met behulp van de grafiek van f.



$f(x) > 3$ voor $\frac{1}{2} < x < 2$

Herhalingsopdracht 67 bladzijde 186

In een zwembad bevindt zich een glijbaan die zeer steil begint en horizontaal uitloopt. Het einde van de glijbaan bevindt zich op y meter boven het water. Als je van deze glijbaan afglijdt, word je onderaan met een snelheid v (m/s) gelanceerd. Korte tijd later kom je op een afstand van x meter (in horizontale richting gemeten) van de glijbaan in het water terecht.



De gestippelde baan tussen de glijbaan en het water kan worden beschreven met de formule $x = 0,45\,v\sqrt{y}$.

1 Bereken x voor $y = 0,25$ m en $v = 6$ m/s.

$$\begin{aligned} x &= 0,45\,v\sqrt{y} \\ &= 0,45 \cdot 6 \cdot \sqrt{0,25} \\ &= 1,35 \end{aligned}$$

De afstand x is $1,35$ m.

2 De snelheid v waarmee je de glijbaan onderaan verlaat, hangt af van de manier waarop je naar beneden glijdt. Uit metingen is gebleken dat v in de praktijk nooit groter wordt dan 10 m/s.
De rand van het zwembad bevindt zich in horizontale richting op 4,5 m afstand van het uiteinde van de glijbaan. Volgens de veiligheidsvoorschriften moet de afstand van P tot de rand minstens 1,5 m zijn.
Bereken de maximale hoogte die het uiteinde van de glijbaan boven het water mag uitsteken.

$$\left.\begin{aligned} x &= 4,5 - 1,5 = 3 \\ v &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ 3 = 0,45 \cdot 10 \cdot \sqrt{y}\ \Rightarrow\ \sqrt{y} = \frac{2}{3}\ \Rightarrow\ y = \frac{4}{9}$$

De maximale hoogte is $\frac{4}{9}$ m.

3 Het uiteinde van de glijbaan bevindt zich op 0,3 m boven het water. Iemand verlaat de glijbaan met een snelheid van 8 m/s. Hoever van de kant komt hij in het water terecht?

$$\left.\begin{aligned} y &= 0,3 \\ v &= 8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ x = 0,45 \cdot 8 \cdot \sqrt{0,3} \approx 1,97 \qquad\qquad 4,5 - 1,97 = 2,53$$

De persoon komt op ongeveer $2,53$ m afstand van de rand in het water terecht.