Hoofdstuk 4

Kansrekenen

Oplossingen van de opdrachten

Opdracht 1 bladzijde 172

Jonas wierp 550 keer een dobbelsteen op. In de tabel vind je de absolute frequenties (A.F.) van deverschillende uitkomsten

Uitkomst	A.F.	R.F. (in %)
1	89	
2	97	
3	83	
4	97	
5	98	
6	86	
TOTAAL		

1 In hoeveel procent van de gevallen gooide hij een 1? Werk met één cijfer na de komma.

Uitkomst 1: $\frac{89}{550} \approx 16,2\,\%$

2 Vul op dezelfde manier de laatste kolom aan voor alle uitkomsten.
Ter herinnering: deze percentages worden de relatieve frequenties (R.F.) genoemd.

Op dezelfde manier als hierboven zijn hiernaast de andere relatieve frequenties berekend.

Uitkomst	A.F.	R.F. (in %)
1	89	16,2
2	97	17,6
3	83	15,1
4	97	17,6
5	98	17,8
6	86	15,6
TOTAAL	**550**	**99,9**

3 Hoeveel is de som van de absolute frequenties? En van de relatieve frequenties?

De som vindt u in de tabel hierboven. Door af te ronden tot op één cijfer na de komma, blijkt de som van de relatieve frequenties niet precies op 100,0 % uit te komen.
Afronden op twee cijfers na de komma kan dit ‘probleem’ oplossen. Ofwel kan een van de percentages naar boven afgerond worden i.p.v. naar beneden.

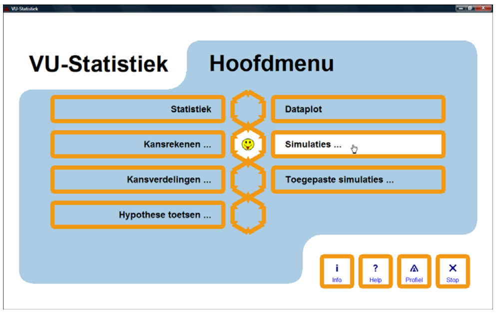
4 Hoeveel keer verwacht je dat iemand een 6 zal gooien op 550 worpen?

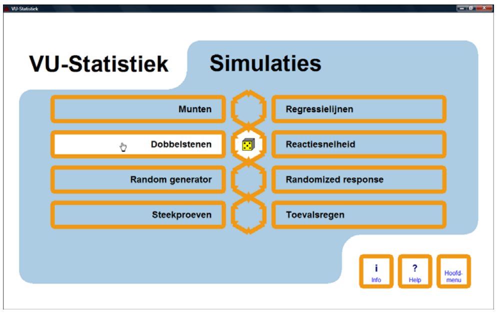
$\frac{550}{6} = 91,666...$ Dus kun je ongeveer 92 keer een 6 verwachten.

5 Lijkt het jou een eerlijke dobbelsteen te zijn? Waarom?

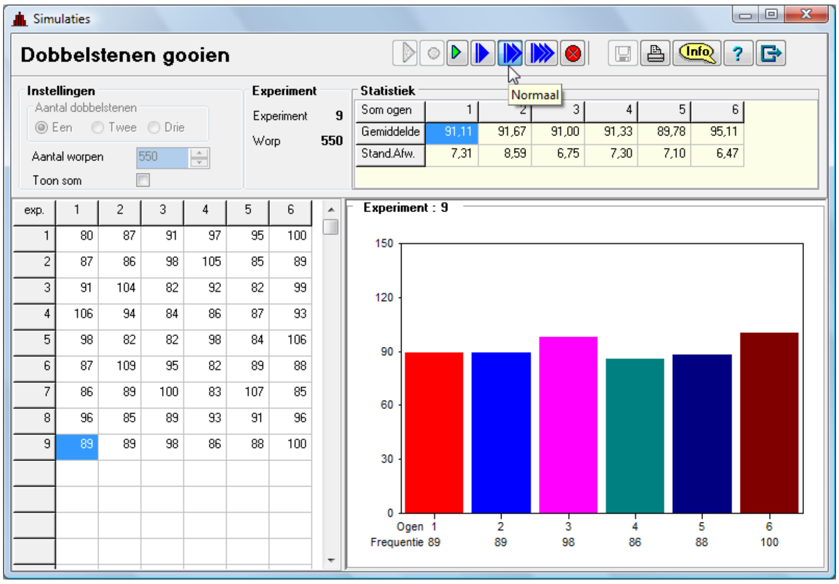
Aangezien alle absolute frequenties rond de 92 liggen, is het aannemelijk dat de dobbelsteen eerlijk is.
Dit kan gecontroleerd worden door de resultaten hierboven te vergelijken met die van een gegarandeerd eerlijke dobbelsteen, via de module *Dobbelstenen* in de rubriek *Simulaties* in VU-Statistiek.

Via de startgids komt u rechtstreeks in die module terecht. Werkt u zonder startgids, dan kiest u in het hoofdmenu van VU-Statistiek eerst de module *Simulaties* en vervolgens kiest u voor *Dobbelstenen*.





Links kunt u aangeven dat één dobbelsteen 550 keer gegooid moet worden. Bovenaan rechts kunt u de simulatie starten. Klikt u op de knop ‘Normaal’, dan wordt de dobbelsteen steeds opnieuw 550 keer gegooid. Links worden de absolute frequenties per experiment weergegeven, boven het staafdiagram worden de gemiddelde absolute frequenties berekend.



Uit de experimenten zal blijken dat de afwijkingen t.o.v. de verwachte waarden van 92 vaak nog groter zijn dan in de opdracht in het boek. Er is dus alle reden om aan te nemen dat het ook in het boek om een eerlijke dobbelsteen gaat. (De resultaten in de tabel zijn trouwens ook via een simulatie tot stand gekomen.)

Opdracht 2 bladzijde 172

De tabel geeft het aantal leerlingen in het voltijds onderwijs tijdens het schooljaar 2007-2008 in Vlaanderen.

Schoolbevolking voltijds onderwijs, schooljaar 2007-2008	
kleuteronderwijs	239480
lager onderwijs	411697
secundair onderwijs	456578
hogeschoolonderwijs	104174
universiteitsonderwijs	64372
TOTAAL	**1276301**

1 Wat was de relatieve frequentie van het aantal leerlingen in het secundair onderwijs t.o.v. de totale schoolbevolking?

$$\frac{456578}{1276301} = 0,358 = 35,8\ \%$$

2 Hoeveel procent van de mensen die verder studeerden na hun secundair onderwijs, zaten aan een hogeschool?

$$\frac{104174}{104174 + 64372} = 0,618 = 61,8\ \%$$

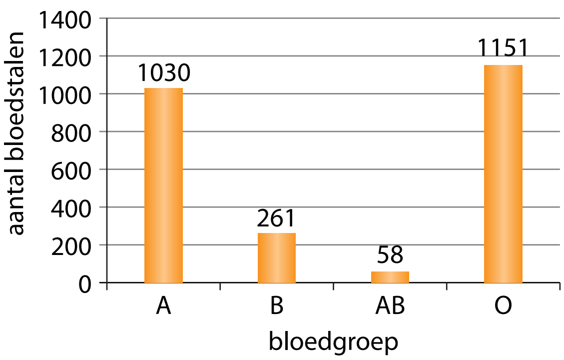
3 Op een zonnige dag zitten in een treinstel richting kust 75 Vlamingen van alle leeftijden. Hoeveel zullen er volgens jou schoolgaand zijn, als je weet dat Vlaanderen begin 2008 zo'n 6161600 inwoners telde?

$$\frac{1276301}{6161600} \cdot 75 = 15,53 \quad \rightarrow \text{ Men kan ongeveer 16 schoolgaande jongeren verwachten.}$$

Opdracht 3 bladzijde 173

Vóór de ontdekking van bloedgroepen was de kans op overleven na een bloedtransfusie klein. Het was Karl Landsteiner (°1868 - †1943) die vaststelde dat sommige mensen antistoffen van het type A hebben (zij behoren dan tot bloedgroep A), anderen antistoffen B (bloedgroep B), nog anderen beide (bloedgroep AB) en tenslotte sommigen geen (bloedgroep O). Bij een bloedtransfusie mag iemand met antistoffen B geen bloed ontvangen dat antistoffen A bevat, omdat anders een dodelijke afweerreactie ontstaat. Dat verklaart waarom bloedtransfusies vroeger zo gevaarlijk waren.

In het staafdiagram vind je de resultaten die een bloedtransfusiecentrum verzamelde, op basis van 2500 bloedstalen.



1 Bereken de relatieve frequenties van de vier bloedgroepen in procent tot op 1 cijfer na de komma.

Bloedgroep A: $\frac{1030}{2500} = 41{,}2\ \%$
Op dezelfde manier kunnen de percentages voor de andere bloedgroepen berekend worden: B: 10,4 %; AB: 2,3 %; O: 46,0 %.

2 Wat is de som van de relatieve frequenties?

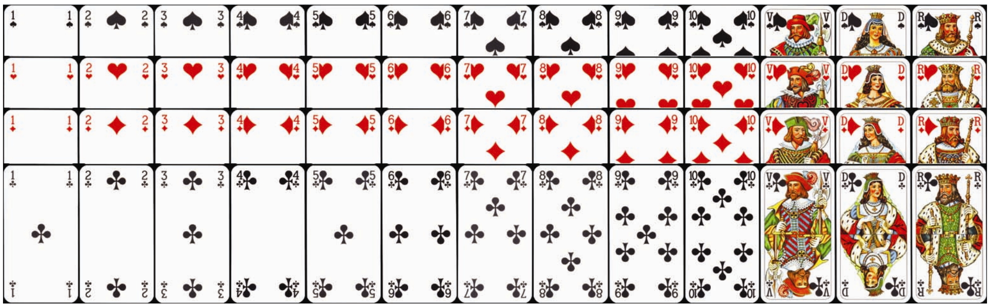
De som van de relatieve frequenties is 99,9 %.

3 Vergelijk deze gegevens met de bloedgroepen van de medeleerlingen uit jouw klas: zijn de relatieve frequenties vergelijkbaar met die uit het ziekenhuis? Verklaar de eventuele verschillen.

Er zijn vrij grote afwijkingen t.o.v. de percentages hierboven te verwachten, gezien het beperkte aantal leerlingen. Deze afwijkingen worden door het toeval bepaald.

Opdracht 4 bladzijde 174

Een kaartspel bevat 52 kaarten.



Je neemt een willekeurige kaart uit een goed geschud pak kaarten.

1 Hoe groot is de kans op een hartenkaart?

De kans op een hartenkaart is $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

2 Hoe groot is de kans op een prentjeskaart?

De kans op een prentjeskaart is $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.

3 Hoe groot is de kans op schoppenaas?

De kans op schoppenaas is $\frac{1}{52}$.

4 Hoe groot is de kans op een aas?

De kans op een aas is $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Opdracht 5 bladzijde 174

Hanne gooit 10 keer een muntstuk op.

1 Hoeveel keer kop verwacht je ?

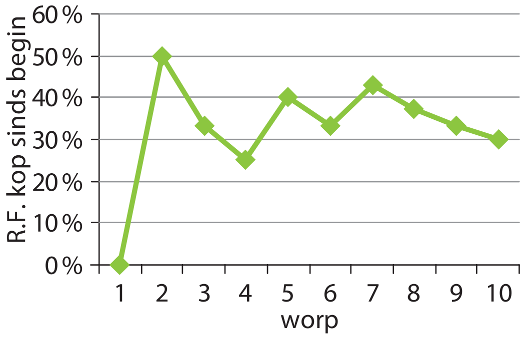
De verwachte waarde is 5 (de helft van 10).

2 In de tabel vind je de uitkomsten die ze noteerde.

Worp	Uitkomst (kop/munt)	A.F. kop sinds begin	R.F. kop sinds begin	R.F. (%) kop sinds begin
1	M	0	0/1	0,0 %
2	K	1	1/2	50,0 %
3	M	1	1/3	33,3 %
4	M	1	1/4	25,0 %
5	K	2	2/5	40,0 %
6	M	2	2/6	33,3 %
7	K	3	3/7	42,9 %
8	M	3	3/8	37,5 %
9	M	3	3/9	33,3 %
10	M	3	3/10	30,0 %

Kunnen we hieruit besluiten dat het muntstuk vervalst is en slechts een kans van 30 % op kop heeft ?
Zijn er andere mogelijke verklaringen voor dit resultaat ?

Het zou kunnen dat het muntstuk vervalst is, maar ook het toeval kan die afwijking verklaren.

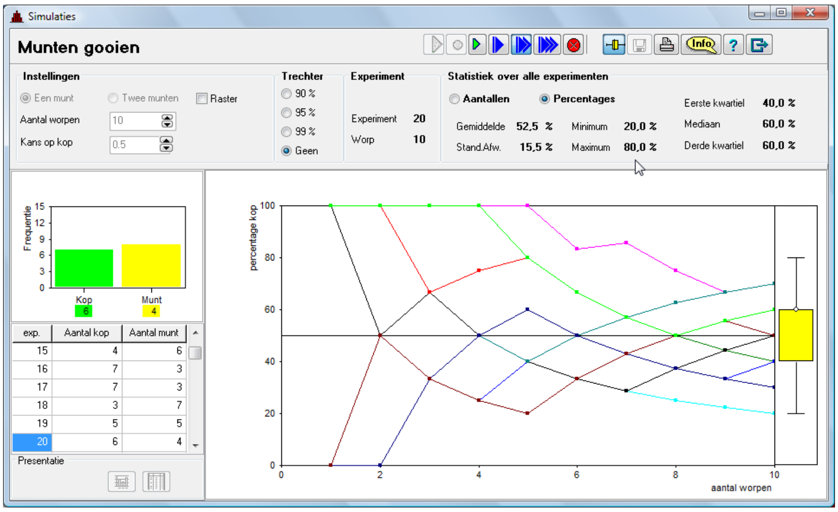


3 Gooi zelf 10 keer een muntstuk, tel het aantal keer kop en bereken de relatieve frequentie.

–

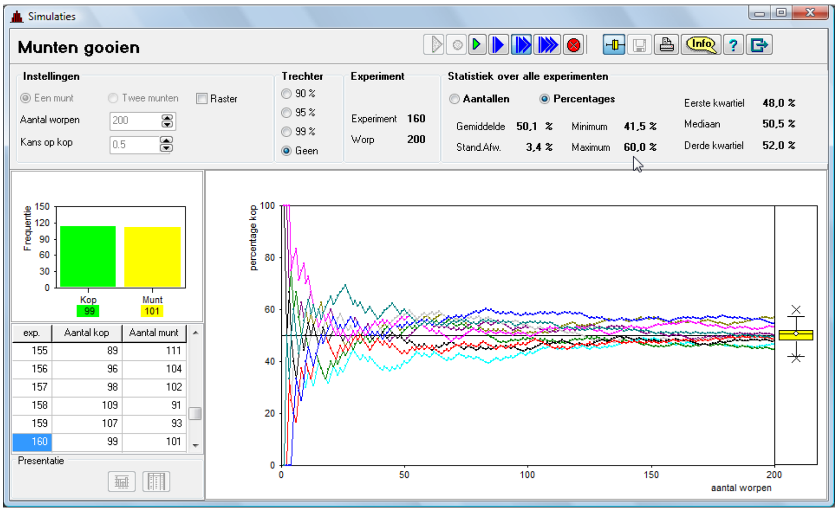
4 Vergelijk de relatieve frequenties van het aantal keer kop die de verschillende leerlingen in je klas berekenden: wat is de maximale en minimale waarde (in %) die voorkomt ?

De module *Munten* in de rubriek *Simulaties* laat toe om dit experiment snel en illustratief te simuleren. Hieronder werd 20 keer een onvervalst muntstuk 10 keer opgegooid. Rechtsboven in het scherm worden statistische gegevens bij de 20 herhalingen berekend, met o.a. het minimum en maximum.



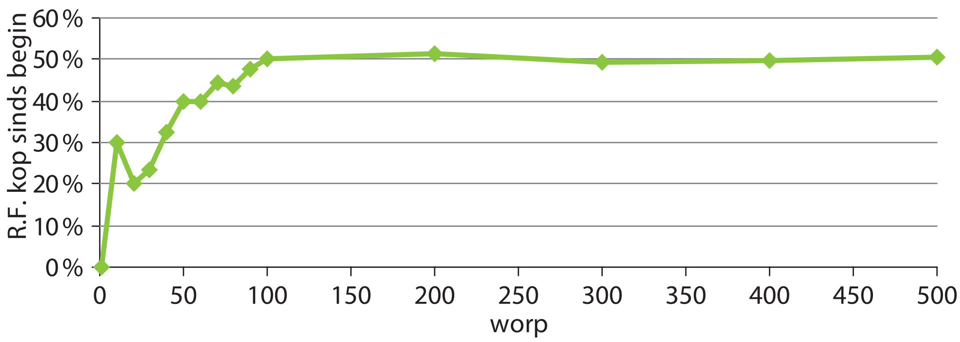
5	Combineer nu alle experimenten en tel het totaal aantal keer kop en het totaal aantal worpen in je klas. Bereken nu opnieuw de relatieve frequentie van die uitkomst.

Het gemiddelde van alle resultaten heeft nu een grotere kans om dicht bij de 50 % te liggen. Hieronder werd 160 keer een muntstuk 200 keer opgegooid. Uit de statistische gegevens blijkt dat de gevonden percentages kop in de helft van de gevallen tussen de 48 % en 52 % lagen (eerste en derde kwartiel).



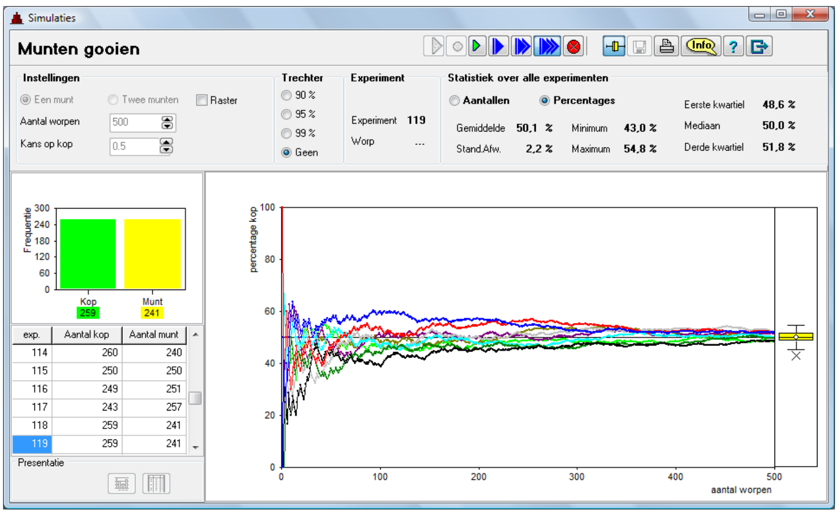
6 Hanne blijft met haar muntstuk verder gooien, tot ze 500 worpen heeft. De resultaten zijn verkort weergegeven in tabel- en grafiekvorm.

Worp	A.F. kop sinds begin	R.F. kop sinds begin	R.F. (%) kop sinds begin
10	3	3/10	30,0 %
20	4	4/20	20,0 %
30	7	7/30	23,3 %
40	13	13/40	32,5 %
50	20	20/50	40,0 %
60	24	24/60	40,0 %
70	31	31/70	44,3 %
80	35	35/80	43,8 %
90	43	43/90	47,8 %
100	50	50/100	50,0 %
200	103	103/200	51,5 %
300	148	148/300	49,3 %
400	199	199/400	49,8 %
500	253	253/500	50,6 %



Wat stel je vast over de relatieve frequentie van het aantal keer kop?

De relatieve frequentie 'stabiliseert' zich na een tijdje rond de 50 %.
Dit blijkt zich altijd voor te doen, zoals u hieronder kan zien.



Opdracht 6 bladzijde 178

In een stad van 45000 inwoners staat een school van 800 leerlingen. De klas van Yannick telt 24 leerlingen, waarvan er 3 linkshandig zijn.

1 Geef op basis van die gegevens een schatting van het aantal linkshandigen in de school.

$$\frac{3}{24}\cdot 800 = 100$$

2 Hoeveel schat je er voor de hele stad?

$$\frac{3}{24}\cdot 45000 = 5625$$

3 Na telling blijkt de hele school in werkelijkheid 75 linkshandigen te hebben.
Geef nu opnieuw een schatting van het aantal linkshandigen in de stad.

$$\frac{75}{800}\cdot 45000 \approx 4219$$

4 Is er een verschil in de betrouwbaarheid van beide uitkomsten? Verklaar.

Dit tweede resultaat is betrouwbaarder, aangezien de gebruikte relatieve frequentie gebaseerd is op een grotere steekproef. Wegens de wet van de grote aantallen ligt deze relatieve frequentie waarschijnlijk dichter bij de relatieve frequentie linkshandigen in de hele populatie.

Opdracht 7 bladzijde 178

De tabel geeft de resultaten van het 100, 500 en 2500 keer opwerpen van een eerlijk muntstuk.

Aantal worpen	A.F. 'kop'
100	46
500	261
2500	1223

1 Bereken de relatieve frequentie voor 'kop' in de drie situaties.

100 worpen: 46 %
500 worpen: 52,2 %
2500 worpen: 48,92 %

2 Vergelijk die drie resultaten met de werkelijke kans van 50 % op 'kop'.
Is dit in overeenstemming met de wet van de grote aantallen?

Ja: de relatieve frequenties wijken steeds minder af van 50 %.

3 Wanneer je voor de drie situaties de absolute frequentie van het aantal keer kop vergelijkt met wat je verwacht, dan blijkt het verschil tussen beide toe te nemen in plaats van kleiner te worden. Verklaar waarom dat niet in strijd is met de wet van de grote aantallen.

De wet van de grote aantallen doet enkel een uitspraak over de relatieve frequenties, niet de absolute frequenties.
In de cursus statistiek in de 3e graad leren de leerlingen dat de 'maximale' afwijking van de relatieve frequenties evenredig is met $\frac{1}{\sqrt{n}}$ met n het aantal herhalingen van het experiment, hier dus het aantal worpen.
Bijgevolg is de 'maximale' afwijking van de absolute frequenties evenredig met $\sqrt{n}$: de afwijking t.o.v. de verwachte waarde zal dus *toenemen* naarmate n toeneemt.

Opdracht 8 bladzijde 178

Je wil de kans schatten dat een gezin van drie kinderen twee meisjes telt. Hierbij wordt verondersteld dat de kans op de geboorte van een jongen en een meisje even groot is.

Je kunt deze situatie nabootsen door drie muntstukken op te gooien. Laat 'munt' overeenkomen met 'meisje' en hou bij elke worp van de drie muntstukken bij hoeveel keer je munt gooide.

1 Doe dit 20 keer en bereken jouw experimentele kans $P(2 \text{ meisjes})$.

2 Combineer vervolgens de resultaten voor heel je klas en bereken daarmee een meer betrouwbare experimentele kans.

Deze opdracht is opgenomen om duidelijk te maken dat *simuleren* niet altijd met een computer hoeft.

Opdracht 9 bladzijde 180

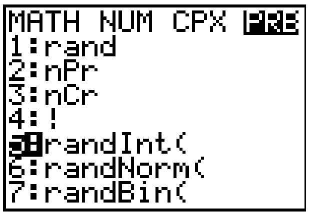
Simuleer met je grafisch rekentoestel het kansexperiment van Hanne: 500 keer een muntstuk opgooien. Laat 1 overeenkomen met ‘kop’.

1 Laat je rekentoestel berekenen hoe vaak 1 voorkomt in jouw simulatie.
Bereken daaruit de bijbehorende experimentele kans.

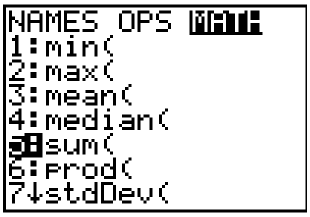
2 Vergelijk de experimentele kans die jij zopas berekende met deze die de anderen in je klas vonden. Wat is de grootste experimentele kans die iemand berekende? De kleinste?

Oplossing

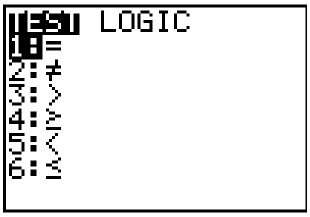
De simulatiecommando’s kan u vinden via de knop MATH, in het menu PRB.
De lijsten L_1 t.e.m. L_6 zijn rechtstreeks op het toetsenbord te vinden, bij de cijfertoetsen 1 tot 6.



Het commando **sum** is op te roepen via 2nd [LIST] (knop STAT), in het menu MATH.

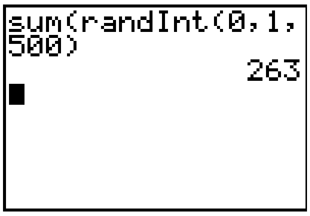


De logische tests vindt u onder 2nd [TEST] (knop MATH).



1 In het experiment hiernaast kwam kop 263 keer voor, wat overeenkomt met een relatieve frequentie van 52,6 %.

2 De schermafdruk bij vraag 6 bij opdracht 5 hierboven geeft u een idee van de afwijkingen die u in de klas kunt verkrijgen.



Opdracht 10 bladzijde 181

We onderzoeken de wet van de grote aantallen aan de hand van een eerlijke dobbelsteen. Voor een klein aantal worpen kun je met een echte dobbelsteen werken, maar bij een groot aantal schakel je best een grafisch rekentoestel of computer in.

In de tabel geeft *n* aan hoeveel worpen je met de dobbelsteen moet uitvoeren.
We zijn enkel geïnteresseerd in de uitkomst ‘6 ogen’.

Bepaal voor elke *n* de gevraagde frequenties en breng ze samen in een tabel zoals hieronder.

1 De absolute frequentie van het aantal keer 6 bij jouw kansexperiment.

2 De minimale absolute frequentie van die uitkomst in je klas.

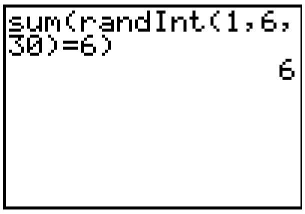
3 De maximale absolute frequentie van die uitkomst in je klas.

4 De relatieve frequentie bij de vorige drie absolute frequenties.

n	minimale A.F. van ‘6’	jouw A.F. van ‘6’	maximale A.F. van ‘6’	minimale R.F. van ‘6’	jouw R.F. van ‘6’	maximale R.F. van ‘6’
30						
180						
900						

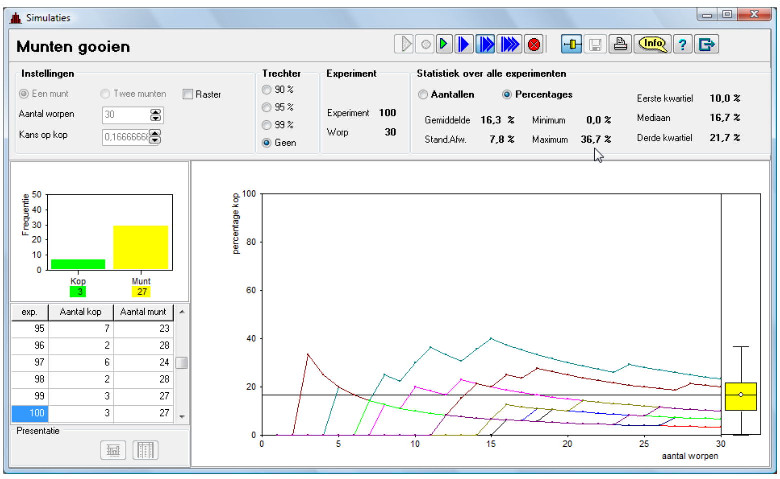
Oplossing

Het te gebruiken simulatiecommando ziet u hiernaast.

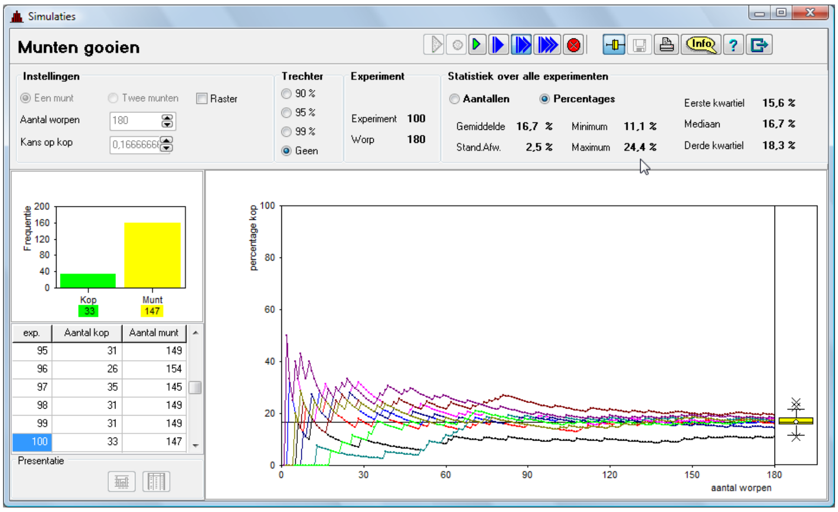


Om een idee te krijgen van de mogelijke resultaten, werd in de module *Munten* in de rubriek *Simuleren* van VU-Statistiek de kans op kop ingesteld op 1/6 = 0,1666… en werd elk experiment 100 keer uitgevoerd.

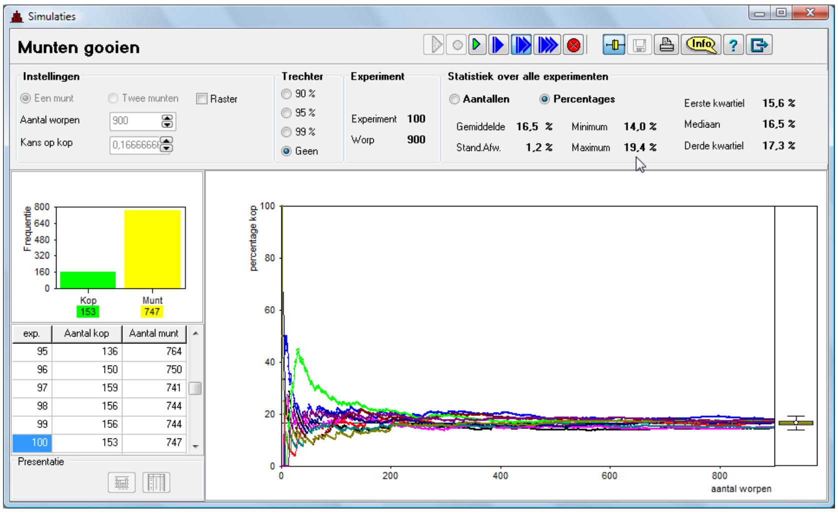
Bij 30 worpen zijn de afwijkingen in de relatieve frequentie bijzonder groot: in een experiment werd op 30 worpen geen enkele keer een 6 gegooid en in een ander 11 keer, meer dan twee keer de verwachtingswaarde van 5, wat overeenkomt met een relatieve frequentie van 36,7 %.



Bij 180 worpen treden dergelijke extreme resultaten niet meer op, al geeft de boxplot aan dat er enkele uitschieters waren, zodat het geafficheerde minimum en maximum geen betrouwbaar beeld geven van de spreiding van de relatieve frequenties.



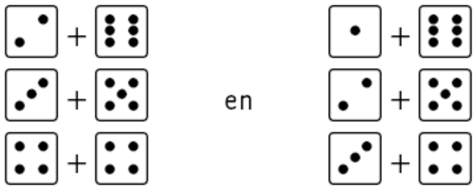
Bij 900 worpen zijn de afwijkingen van de relatieve frequenties t.o.v. de exacte kans nog kleiner.



Opdracht 11 bladzijde 182

Laurenz wil met jou een gokspelletje spelen. Het spel gaat als volgt. Er worden twee dobbelstenen gegooid: is de som van de ogen 8, dan win jij, is de som 7, dan wint hij; bij elke andere uitkomst wint niemand.

Hij beweert dat het een eerlijk spel betreft, m.a.w. dat jullie beiden evenveel kans hebben om te winnen. Immers, je kunt 8 op 3 manieren vormen, evenals 7:



Aangezien Laurenz aandringt om voor geld te spelen, word je wat wantrouwig en wil je de eerlijkheid van het spel eerst wel eens nagaan, door 500 spelletjes te simuleren. Op die manier kun je de kans schatten dat je zal winnen; bij een eerlijk spel moeten jullie kansen om te winnen gelijk zijn.

1 Het simuleren van het 500 keer gooien van twee dobbelstenen kan d.m.v. twee aparte lijsten met 500 lukrake getallen van 1 t.e.m. 6. Gebruik deze lijsten om een lijst met de som van de ogen te verkrijgen.

2 Wat is bij jouw simulatie de experimentele kans om als som van de ogen 8 uit te komen?

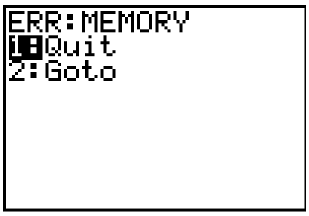
3 Indien de hele klas dit kansexperiment uitvoert en alle resultaten worden gecombineerd tot één frequentietabel, wat is dan de kans om 8 uit te komen?

4 Maak een zo goed mogelijke schatting van de kans om 7 te gooien, door de resultaten van heel je klas te combineren (zorg dat je minstens 2000 worpen gesimuleerd hebt).

5 Lijkt het jou een eerlijk spel te zijn, zoals Laurenz beweert?

Oplossing

Bij experimenten waarbij meerdere lijsten gecombineerd moeten worden, kunnen geheugenproblemen optreden. Om die te vermijden, kunnen leerlingen programma's en andere gegevens van het (beperkte) RAM-geheugen naar het (ruime) archiefgeheugen van hun toestel overbrengen.

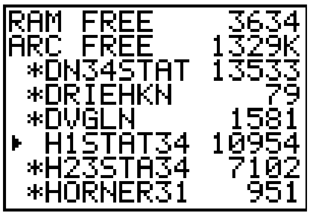


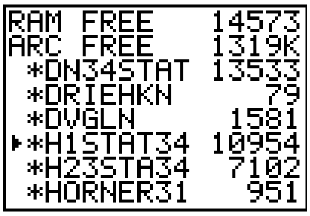
Kies 2nd [MEM] (via de + knop) en vervolgens **2:Mem Mgmt/Del…**

Bovenaan het scherm kunt u zien hoeveel RAM-geheugen vrij is. Dat zou tussen de 15000 en 20000 bytes moeten zijn. Kies de optie **1:All…** om een volledig overzicht te krijgen van wat in het geheugen zit.

Om een geselecteerd programma naar het archiefgeheugen over te brengen, volstaat het op ENTER te drukken. Een sterretje vóór de naam van een programma geeft aan dat het in het archiefgeheugen zit.

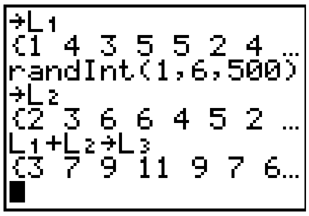
Om een geselecteerd programma, een geselecteerde lijst of variabele te wissen uit het geheugen, drukt u op DEL.



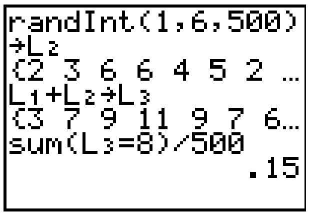


Het kan ook zinvol zijn om na een experiment het commando **ClrAllLists** uit te voeren. U vindt het als optie 4 bij 2nd [MEM] (zie schermafdruk hierboven).

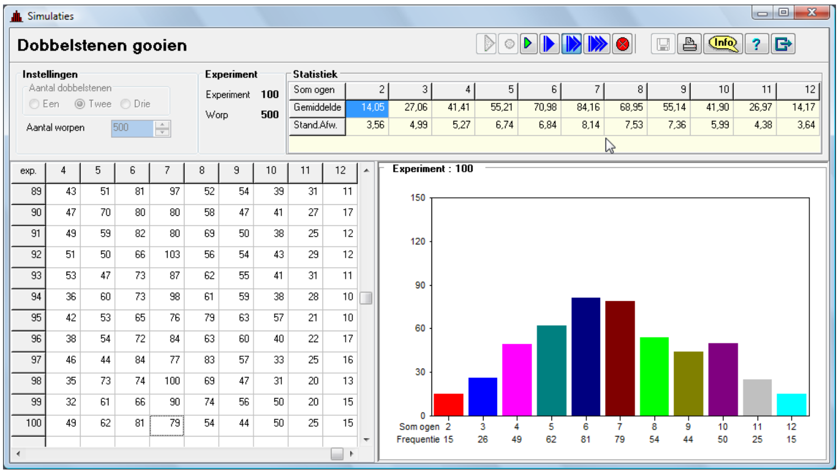
1 Hiernaast vindt u het commando voor de simulatie.



2 Deze simulatie leverde een experimentele kans van 15 % op.



3 De module *Dobbelstenen* in de categorie *Simuleren* laat ook toe om meerdere dobbelstenen te gooien. Hieronder werd het experiment uit de vorige deelvragen 100 keer uitgevoerd.



Uit de gemiddelde absolute frequenties bij de verschillende uitkomsten blijkt dat een som van 7 ogen beduidend vaker zal optreden dan een som van 8 ogen. Dit betekent echter niet dat in *elk* experiment de absolute frequentie bij 7 hoger is dan bij 8, zoals in de experimenten 95 en 97 hierboven te zien is.

4 Uit de bovenstaande simulaties blijkt dat de kans op 7 ogen ongeveer gelijk is aan $84{,}16/500 \approx 16{,}8\%$ en die op 8 ogen $68{,}95/500 \approx 13{,}8\%$.
In opdracht 17 worden de kansen exact berekend.

5 Het ziet er geen eerlijk spel uit.

Opdracht 12 bladzijde 183

Je wil de kans schatten dat een gezin van drie kinderen twee meisjes telt. Hierbij wordt verondersteld dat de kans op de geboorte van een jongen en een meisjeeven groot is.

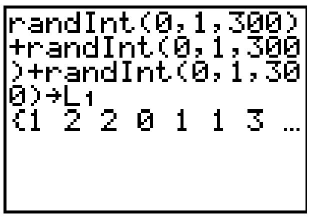
Volgens de wet van de grote aantallen kun je deze kans schatten door de situatie heel vaak te simuleren met je rekentoestel of een computer.

Genereer drie lijsten, die elk overeenkomen met één kind. Laat daarin ‘1’ overeenkomen met ‘meisje’. Tel vervolgens de lijsten element per element op om het aantal meisjes per gezin te bepalen.

	gezin 1	gezin 2	gezin 3	gezin 4		
L_1	{ 0,	0,	1,	0,	1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, … }	1e kind
L_2	{ 1,	1,	1,	1,	1, 0, 1, 0, 0 ,1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, … }	2e kind
L_3	{ 0,	1,	1,	0,	0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, … }	3e kind
$L_1 + L_2 + L_3$	{ 1,	2,	3,	1,	2, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 3, 1, 1, 1, … }	3 kinderen samen

1 Simuleer nu zelf 300 gezinnen met 3 kinderen.

De gezinnen kunnen in één keer gesimuleerd worden of in tussenstappen. Hiernaast vindt u de werkwijze in één stap.



2 Bereken de relatieve frequentie van de verschillende uitkomsten.

Aantal meisjes	R.F. (%)
0	
1	
2	
3	

De absolute frequenties kunnen via een staafdiagram m.b.v. *Trace* afgelezen worden, of ze kunnen berekend worden als **sum(L_1=i)** met i = 0, 1, 2, 3.
In opdracht 68 worden de kansen exact berekend.

Aantal meisjes	R.F. (%)
0	11,7
1	44,3
2	32,7
3	11,3

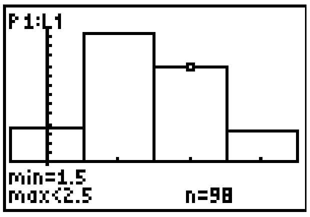
3 Welke experimentele kans vind je voor gezinnen met 2 meisjes?
Vergelijk met de andere resultaten in je klas.

–

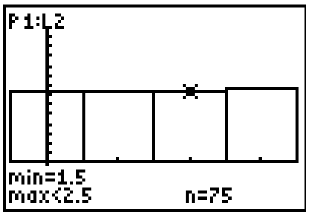
4 Een gezin met drie kinderen kan 0, 1, 2 of 3 meisjes tellen. Iemand beweert dat je het aantal meisjes in een dergelijk gezin daarom kunt simuleren via het commando **randInt(0, 3, 300)**, waarbij 300 gezinnen bestudeerd worden.
Vormt dit commando een goede simulatie? Verklaar.

Het commando vormt geen goede simulatie.
Deze redeneerfout komt geregeld voor. Leerlingen veronderstellen verkeerdelijk dat het volstaat een commando uit te voeren dat de vier mogelijke uitkomsten 0, 1, 2 en 3 genereert. Bij het commando **randInt(0,3,300)** zijn de vier uitkomsten even waarschijnlijk, maar dit is in de opgave nergens gegeven. Het enige wat we weten, is dat de kans op een meisje bij één kind precies 0,5 is. Het is die kans die in de simulatie verwerkt moet worden.

Een grafische voorstelling van beide kansverdelingen vormt wellicht het meest overtuigende argument.



simulatie zoals in het boek



randInt(0,3,300)

Opdracht 13 bladzijde 185

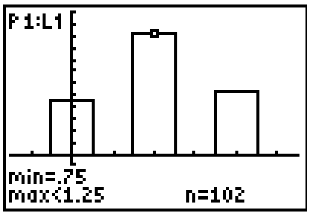
Je werpt twee eerlijke munten. De mogelijke uitkomsten kun je op twee manieren opsommen.

1 Je zou kunnen stellen dat er drie uitkomsten zijn:

2 keer kop – kop en munt – 2 keer munt

Gooi 200 keer (of meer) twee munten op en bereken de experimentele kans van elke uitkomst. Je kunt ook een simulatie uitvoeren. Zijn deze drie uitkomsten even waarschijnlijk ?

De drie uitkomsten zijn niet even waarschijnlijk, zoals uit de simulatie **randInt(0,1,200)+randInt(0,1,200)→L_1** blijkt. De uitkomst kop-en-munt blijkt twee keer zoveel voor te komen.



2 Je zou ook kunnen stellen dat er vier uitkomsten zijn. Dit kun je je best voorstellen door twee verschillende munten te nemen, bijvoorbeeld 1 euro en 5 cent.

Klopt de uitspraak dat elke uitkomst een kans van 1 op 4 heeft ?
Ga dat na door het kansexperiment zelf uit te voeren.

Die uitspraak klopt. Het verschillend maken van gelijke dingen is één van de strategieën om alle uitkomsten van een experiment even waarschijnlijk te maken.

3 Je kunt de vraag hierboven ook oplossen door te redeneren.
Beeld je even in dat iemand 100000 keer met de twee muntstukken uit vraag 2 gooit.

a Hoeveel keer (ongeveer) zal de kop-zijde van het stuk van één euro boven liggen ?

b Beschouw alle worpen waarvan de kop-zijde van het stuk van één euro boven ligt.
Hoeveel keer zal de kop-zijde van het stuk van 5 eurocent boven liggen? En de munt-zijde?

c Klopt de uitspraak dat elke uitkomst uit de vraag hierboven een kans van 1 op 4 heeft ?

Van de (ongeveer) 50000 keer dat de kop-zijde van het 1 euromuntstuk boven zal liggen, zal 25000 keer de kop-zijde van het 5 eurocentstuk bovenliggen. Op die manier blijkt dat de vier uitkomsten elk ongeveer 25000 keer zullen optreden, of m.a.w. een kans van één op vier hebben.

Opdracht 14 bladzijde 188

Zijn de onderstaande uitspraken juist of fout? Leg uit waarom.

1 Wanneer je een voetbalmatch speelt, zijn er drie mogelijkheden: jouw ploeg wint, de andere ploeg wint of je speelt gelijk. De kans dat je wint is dus 1 op 3.

De uitspraak is fout. Niet elke uitkomst is noodzakelijk even waarschijnlijk, afhankelijk van het niveau van beide ploegen.

2 Bij het gooien van een dobbelsteen zijn er zes mogelijke uitkomsten: 1, 2, 3, 4, 5 of 6. De kans op het gooien van een *even* aantal ogen is dus 3 op 6.

De uitspraak is juist. De formule van Laplace mag hier toegepast worden, aangezien elke uitkomst bij een eerlijke dobbelsteen even groot is.

3 Op een toets heb je twee mogelijke uitkomsten: je bent geslaagd of je bent niet geslaagd. De kans op slagen is dus 1 op 2.

De uitspraak is fout, omdat niet elke uitkomst even waarschijnlijk is.

Opdracht 15 bladzijde 188

Geef voor de onderstaande vragen eerst een uitkomstenverzameling waarbij elke uitkomst even waarschijnlijk is en de bijbehorende gebeurtenis. Bereken dan de gevraagde kans.

1 In je portefeuille zit een briefje van 20, een van 10 en een van 5 euro. Er vallen er twee uit. Wat is de kans dat het briefjes van 10 en 5 euro zijn?

U = {5 en 10, 5 en 20, 10 en 20}
G = {5 en 10}

$$P(G) = \frac{\#G}{\#U} = \frac{1}{3}$$

2 In je portefeuille zitten twee briefjes van 10 euro en eentje van 5 euro. Er vallen er twee uit. Wat is de kans dat het briefjes van 10 en 5 euro zijn?

U = {5 en 10a, 5 en 10b, 10a en 10b}
G = {5 en 10a, 5 en 10b}

$$P(G) = \frac{\#G}{\#U} = \frac{2}{3}$$

3 In de koelkast staan vier potjes yoghurt, waarvan er één vervallen is. Je neemt zonder te kijken twee van die potjes. Wat is de kans dat je er twee zal hebben die nog niet vervallen zijn?

Noem het vervallen potje V en de drie goede potjes G_1, G_2 en G_3.
U = {V en G_1, V en G_2, V en G_3, G_1 en G_2, G_1 en G_3, G_2 en G_3}
G = {G_1 en G_2, G_1 en G_3, G_2 en G_3}

$$P(G) = \frac{\#G}{\#U} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Opdracht 16 bladzijde 188

In een lade liggen drie blauwe en twee zwarte handschoenen. Je neemt er blindelings twee uit. Hoe groot is de kans dat je een blauwe en een zwarte handschoen hebt genomen?

Oplossing

U = {B_1 en B_2, B_1 en B_3, B_1 en Z_1, B_1 en Z_2, B_2 en B_3, B_2 en Z_1, B_2 en Z_2, B_3 en Z_1, B_3 en Z_2, Z_1 en Z_2}

G = {B_1 en Z_1, B_1 en Z_2, B_2 en Z_1, B_2 en Z_2, B_3 en Z_1, B_3 en Z_2}

$$P(\text{zwart en blauw}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Opdracht 17 bladzijde 188

We hernemen de situatie uit opdracht 11.
Laurenz wil een gokspelletje met jou spelen: gooi je met twee dobbelstenen een 8, dan win jij, gooi je een 7, dan wint hij; in de andere gevallen wint niemand.
Maak je beide dobbelstenen ongelijk, bijvoorbeeld door ze een verschillende kleur te geven, dan zie je dat er 36 mogelijke uitkomsten zijn, die alle even waarschijnlijk zijn. Deze worden soms voorgesteld zoals hiernaast: elke cel van de tabel komt overeen met een mogelijke combinatie van de eerste en de tweede dobbelsteen.

tweede dobbelsteen

eerste dobbelsteen	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀						
⚁						
⚂						
⚃						
⚄						
⚅						

1 Schrijf in elke cel de som van de ogen.

tweede dobbelsteen

eerste dobbelsteen	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

2 Ga na of Laurenz' spel een eerlijk spel is, door de theoretische kans op beide uitkomsten te berekenen.

Aangezien elke uitkomst in de tabel even waarschijnlijk is, kunnen we de formule van Laplace toepassen.

$$P(7\text{ ogen}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P(8\text{ ogen}) = \frac{5}{36}$$

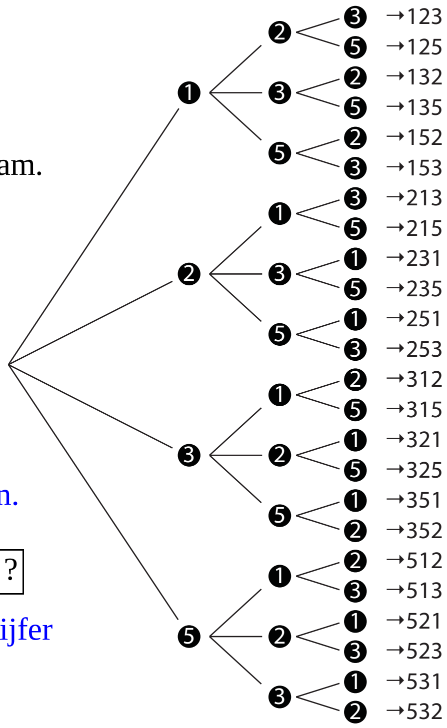
Het spel is niet eerlijk: de kans dat Laurenz wint, is groter.

3 Gebruik het schema om de volgende vraag te beantwoorden met 'juist' of 'fout': de kans om een dubbele 1 te gooien is even groot als de kans om een 3 en een 5 te gooien.

De uitspraak is fout:

$$P(1\text{ en }1) = \frac{1}{36} \quad \text{en} \quad P(3\text{ en }5) = P(3\text{-}5\text{ of }5\text{-}3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Opdracht 18 bladzijde 189



Het aantal getallen bestaande uit drie verschillende cijfers, die je met 1, 2, 3 en 5 kunt vormen, is het aantal eindknopen in het schema hiernaast.
De lijnstukjes naar de verschillende cijfers noemen we takken; het hele schema noemen we een boomdiagram.

1 Kun je dat aantal ook berekenen zonder de eindknopen te tellen?

4 mogelijkheden (takken) voor het eerste cijfer, per tak voor het eerste cijfer vervolgens 3 voor het tweede en per tak voor het eerste en tweede tenslotte 2 takken voor het derde.
Er zijn daarom 4 keer 3 keer 2 takken, dus 24 takken.

2 Hoeveel van deze getallen liggen tussen 200 en 400?

Zelfde redenering, maar nu zijn er voor het eerste cijfer maar 2 takken: $2 \times 3 \times 2 = 12$ takken.

3 Hoeveel van deze getallen zijn deelbaar door 5?

Er zijn verschillende mogelijkheden om dat aantal te bepalen.
Ofwel kan men gewoon tellen.
Of men kan bedenken dat elk van de vier cijfers in gelijke mate als laatste cijfer zullen optreden. Eén vierde van alle getallen zal dus eindigen op een vijf.
Of men zou de redenering met het product van de takken kunnen herhalen, maar nu van achter naar voor: voor het laatste cijfer is er maar één mogelijkheid; voor het middelste cijfer zijn er 3 en voor het eerste cijfer blijven er nog 2 over.
Men vindt telkens 6.

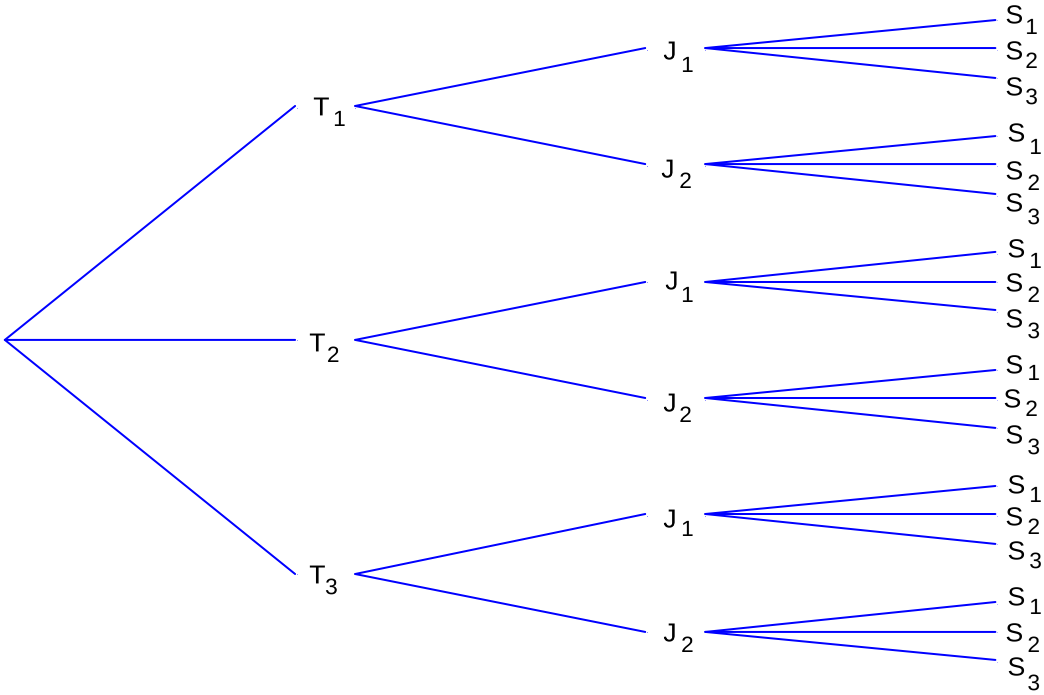
4 Hoeveel van deze getallen zijn oneven?

Drie van de vier cijfers zijn oneven, zodat driekwart van alle getallen oneven zal zijn.
Of, van achter naar voor redenerend met aantallen takken: $3 \times 3 \times 2 = 18$.

Opdracht 19 bladzijde 189

Sharmila gaat naar een feestje en is in haar kleerkast op zoek naar passende kledij. Ze kan maar niet beslissen. Vóór haar liggen drie T-shirts (we noemen ze T_1, T_2, T_3), twee jeans (J_1 en J_2) en drie paar schoenen (S_1, S_2 en S_3). Ze wil *alle* combinaties proberen vooraleer een definitieve keuze te maken.

1 Schrijf alle mogelijke combinaties T-shirt – jeans – schoenen op met een boomdiagram.



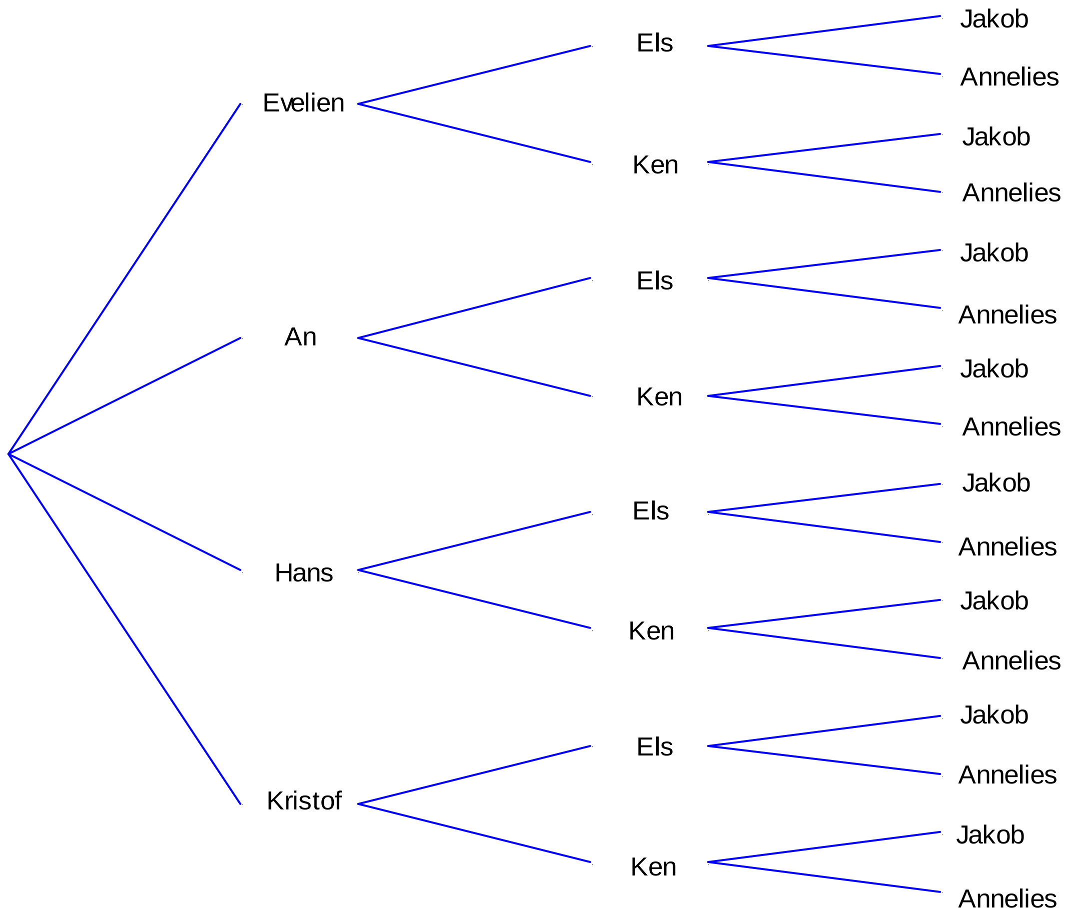
2 Hoe zou je het aantal combinaties kunnen berekenen zonder ze alle op te schrijven?

Aantal mogelijkheden per keuze vermenigvuldigen: $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$.

Opdracht 20 bladzijde 191

Voor het schooltoneel zijn drie rollen te verdelen. Er zijn vier kandidaten voor de rol van ruimtereiziger (Evelien, An, Hans en Kristof), twee voor de rol van robot (Els en Ken) en twee voor de rol van buitenaards wezen (Jakob en Annelies).

1 Op hoeveel manieren kan de regisseur de cast samenstellen? Stel een boomdiagram op dat een overzicht geeft van alle mogelijkheden.



In totaal zijn er $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ mogelijke samenstellingen voor de cast.

2 De regisseur wil niemand bevoordelen en laat het lot beslissen. Hoe groot is de kans dat An en Jakob samen deel uitmaken van de cast?

Er zijn $1 \cdot 2 \cdot 1$ gunstige uitkomsten. Aangezien de regisseur het lot laat beslissen, zijn alle uitkomsten even waarschijnlijk. De kans dat An en Jakob samen spelen is $\frac{2}{4 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$.

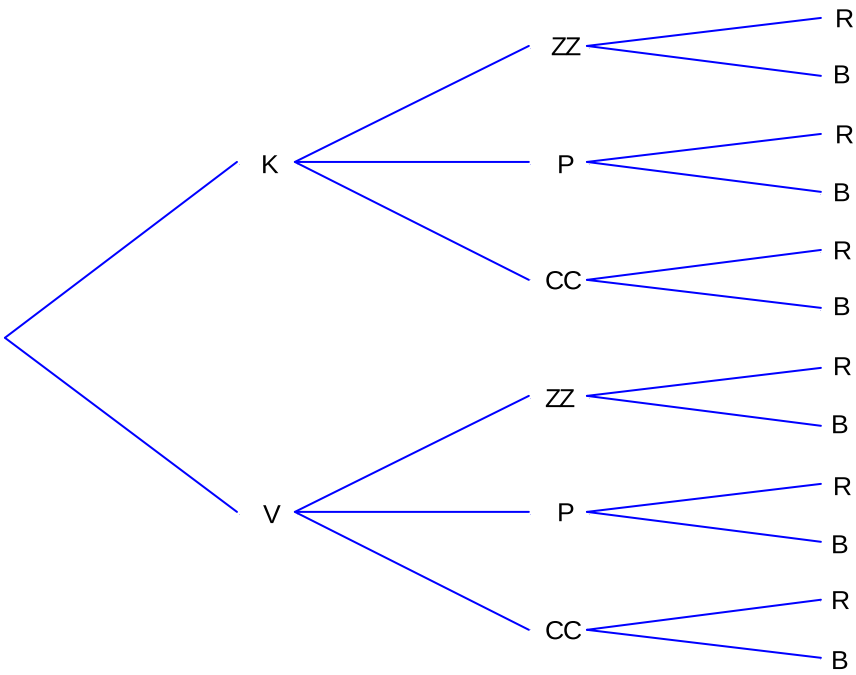
3 Els bedenkt zich. Ze trekt haar kandidatuur in voor de rol van robot en stelt zich beschikbaar voor de rol van ruimtereiziger. Wat is nu de kans dat An en Jakob samen kunnen spelen?

De kans is nu $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{5 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{1}{10}$.

Opdracht 21 bladzijde 192

In een Chinees restaurant mag je zelf je schotel samenstellen.
Wat het vlees betreft, kun je kiezen tussen kip en varkensvlees.
Verder zijn er drie sauzen (zoetzuur, pikant of met Chinese champignons), die alle bij de vleesgerechten passen.
Tot slot kun je kiezen tussen rijst of bami.

1 Stel een boomdiagram op waarin alle mogelijke schotels voorkomen.



2 Hoeveel verschillende schotels zijn er ?

$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ gerechten

3 Hoeveel schotels kun je maken indien je pikante saus kiest ?

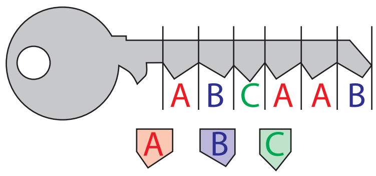
$2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ gerechten met pikante saus (dit is tevens één derde van alle gerechten, aangezien elke saus even vaak zal voorkomen en er drie sauzen zijn)

4 Stel dat er vier vleessoorten en zeven sauzen zijn. Bij elk gerecht moet je ook kiezen tussen bami of vier soorten rijst. Hoeveel schotels zijn er dan ?

Er zijn dan $4 \cdot 7 \cdot 5 = 140$ schotels mogelijk.

Opdracht 22 bladzijde 192

De baard van een cilindersleutel is verdeeld in zes zones.
In elke zone is één van de patronen A, B of C aangebracht.



1 Bereken het aantal mogelijke sleutels.

Per zone zijn er drie mogelijkheden, zodat er in totaal $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$ mogelijke sleutels zijn

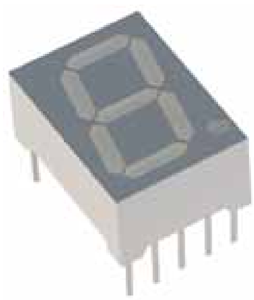
2 Hoeveel sleutels moet een inbreker bij zich hebben, wil hij een kans van minstens 1 op 2 hebben om de juiste mee te hebben?

Met 365 sleutels is de kans net iets groter dan 1 op 2 ($\frac{729}{2} = 364,5$).

Opdracht 23 bladzijde 192

Bepaalde LED-schermpjes bevatten zeven segmenten, die elk afzonderlijk kunnen branden of gedoofd zijn. Met zo'n LED kunnen onder andere alle cijfers van 0 tot 9 gevormd worden.

Hoeveel verschillende karakters kun je maximaal weergeven met zo'n LED? (Niet elk karakter hoeft betekenis te hebben.)



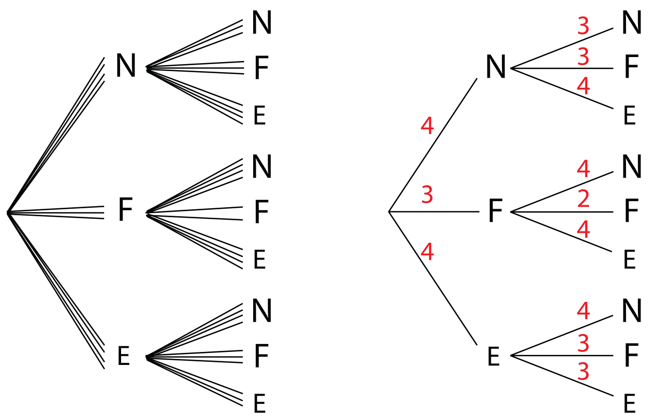
Oplossing

Er zijn $2^7 - 1 = 127$ verschillende manieren om één of meerdere segmenten te laten oplichten.

Opdracht 24 bladzijde 193

Op Nathans boekenplank staan vier Nederlandstalige romans (N), drie Franstalige (F) en vier Engelstalige (E). Hij neemt er lukraak twee uit.

Voer je volgorde in, dan kun je de mogelijke uitkomsten systematisch voorstellen in de onderstaande twee vereenvoudigde boomdiagrammen.



1 Op hoeveel manieren kan hij twee boeken in dezelfde taal nemen?

Hij kan op $4 \cdot 3$ manieren twee Nederlandse boeken kiezen, op $3 \cdot 2$ manieren twee Franse en op $4 \cdot 3$ manieren twee Engelse.
In totaal zijn er dus $4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 30$ mogelijkheden.

2 Wat is de kans dat hij twee boeken in dezelfde taal neemt?

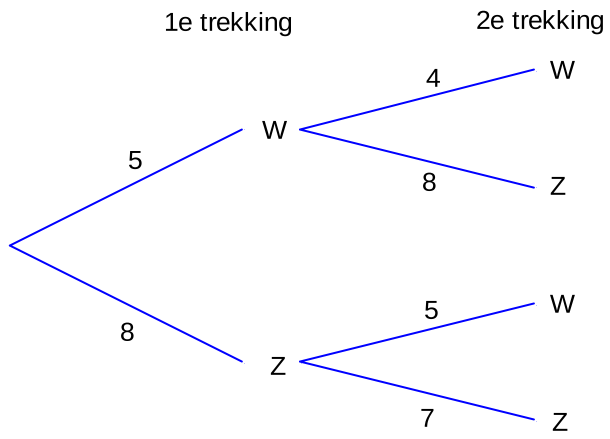
Het totaal aantal manieren om twee boeken te kiezen is $11 \cdot 10 = 110$.
Deze keuzes zijn alle even waarschijnlijk.

De kans op twee boeken in eenzelfde taal is daarom $\dfrac{30}{110} = \dfrac{3}{11}$.

Opdracht 25 bladzijde 195

In een urne zitten vijf witte en acht zwarte knikkers. Je haalt er achtereenvolgens twee knikkers uit; dit doe je zonder de eerste terug te leggen.

1 Stel een vereenvoudigd boomdiagram op bij dit kansexperiment.



2 Wat is de kans dat je twee zwarte knikkers trekt?

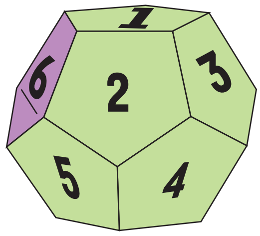
$$P(\text{twee zwarte knikkers}) = \frac{8 \cdot 7}{13 \cdot 12} = \frac{14}{39}$$

3 Wat is de kans dat je twee verschillend gekleurde knikkers trekt?

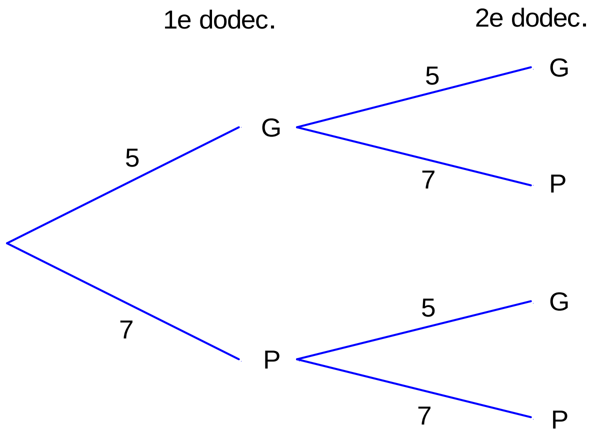
$$P(\text{verschillende kleur}) = \frac{5 \cdot 8 + 8 \cdot 5}{13 \cdot 12} = \frac{20}{39}$$

Opdracht 26 bladzijde 195

Je beschikt over twee identieke dodecaëders als dobbelstenen. Een dodecaëder bestaat uit twaalf zijvlakken, die alle regelmatige vijfhoeken zijn. De zijvlakken zijn genummerd van 1 tot 12. De zijvlakken met nummers 1 tot 5 zijn groen geschilderd, de overige zeven zijn purper. Je gooit beide dodecaëders.



1 Teken een vereenvoudigd boomdiagram dat de mogelijkheden voor de kleur van de bovenste zijvlakken weergeeft.



2 Wat is de kans dat er twee groene zijvlakken bovenaan liggen?

$$P(\text{beide groen}) = \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 12} = \frac{25}{144}$$

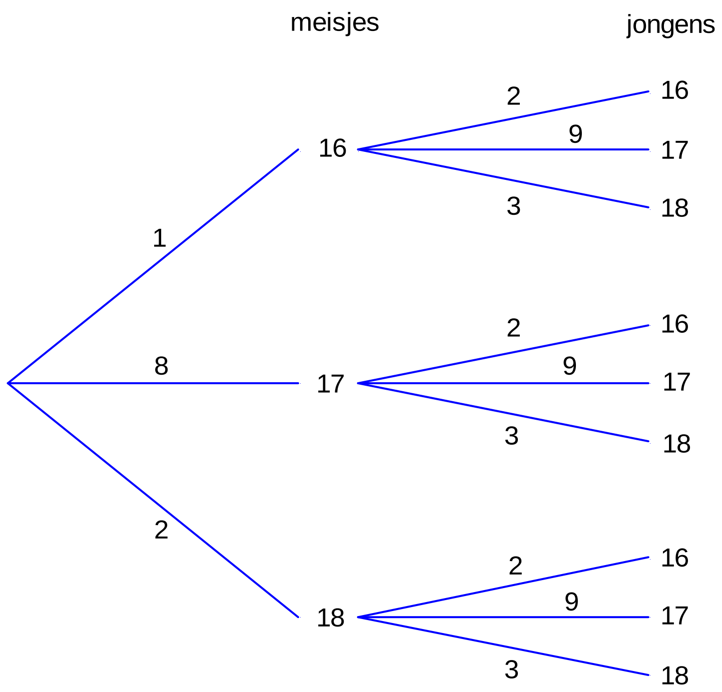
3 Wat is de kans dat de twee bovenste zijvlakken een verschillende kleur hebben?

$$P(\text{beide verschillende kleur}) = \frac{5 \cdot 7 + 7 \cdot 5}{12 \cdot 12} = \frac{35}{72}$$

Opdracht 27 bladzijde 195

In een klas van 25 leerlingen zitten 11 meisjes en 14 jongens. Eén meisje is 16 jaar, acht meisjes zijn 17 en twee zijn 18. Bij de jongens zijn er twee van 16, negen van 17 en drie van 18. Voor de leerlingenraad moeten van deze klas twee leerlingen als vertegenwoordigers aangeduid worden. Ze besluiten een meisje en een jongen door het lot te bepalen.

1 Bereken de theoretische kans dat beiden 17 jaar zijn.



$$P(\text{beiden 17 jaar}) = \frac{8 \cdot 9}{11 \cdot 14} = \frac{36}{77}$$

2 Bereken de theoretische kans dat beiden even oud zijn.

$$P(\text{beiden even oud}) = \frac{1 \cdot 2 + 8 \cdot 9 + 2 \cdot 3}{11 \cdot 14} = \frac{40}{77}$$

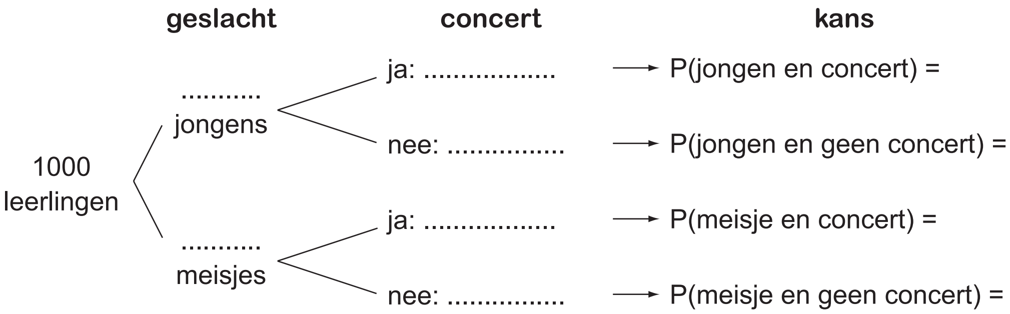
3 Bereken de theoretische kans dat minstens één ouder is dan 16.

Deze kans kan rechtstreeks berekend worden zoals in de vorige deelvraag.
Het aantal gunstige uitkomsten vindt u door de aantallen bij 8 van de 9 leeftijdscombinaties op te tellen.
Bijgevolg is er ook een onrechtstreekse manier: trek van het totaal aantal mogelijkheden ($14 \cdot 11 = 154$) het aantal mogelijkheden af waarbij beide leerlingen 16 zijn:

$$P(\text{niet beide 16}) = \frac{154 - 1 \cdot 2}{154} = \frac{152}{154} = \frac{76}{77}.$$

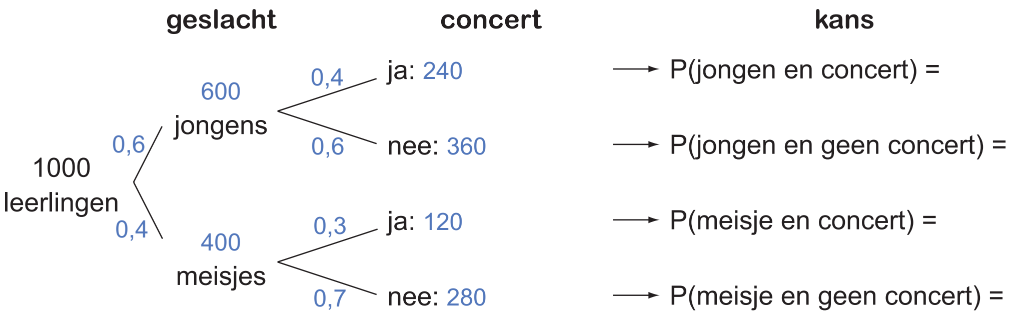
Opdracht 28 bladzijde 196

In een school van 1000 leerlingen is de verhouding jongens/meisjes precies 60 %/40 %.
Van de meisjes heeft 30 % ooit al een concert bijgewoond. Bij de jongens is dat 40 %.



1 Vul in het boomschema op de stippellijntjes de aantallen leerlingen in dat aan het betreffende kenmerk voldoet.

2 Schrijf bij elke tak de kans dat iemand aan het bijbehorende kenmerk zal voldoen.



3 Bereken de kans $P(\text{jongen en concert})$ op twee manieren:

a met behulp van de formule van Laplace;

b door enkel gebruik te maken van de kansen die op de bijbehorende takken staan, niet de aantallen.

a $P(\text{jongen en concert}) = \dfrac{240}{1000} = \dfrac{6}{25} = 0,24$

b $P(\text{jongen en concert}) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24$

4 Berekenen, op dezelfde twee manieren, de kans dat een willekeurige leerling al naar een concert is geweest.

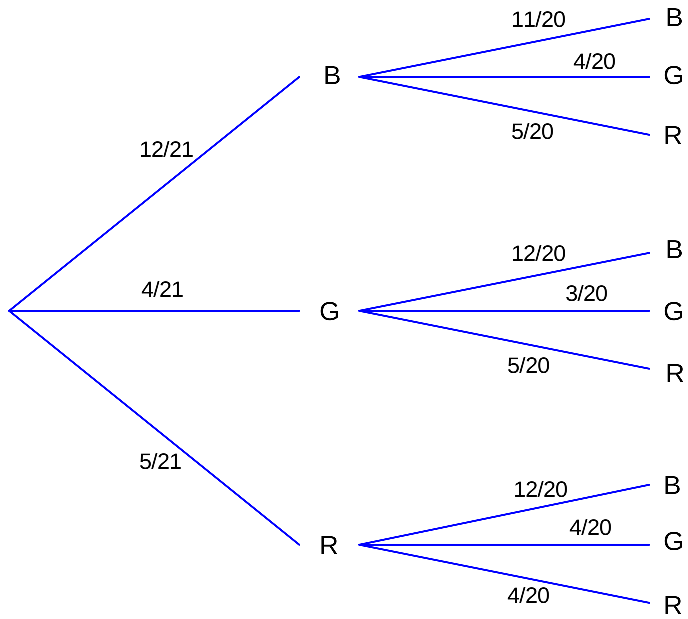
a $P(\text{concert}) = \dfrac{240+120}{1000} = \dfrac{9}{25} = 0,36$

b $P(\text{concert}) = 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,3 = 0,24 + 0,12 = 0,36$

Opdracht 29 bladzijde 198

Een vaas bevat 12 blauwe, 4 groene en 5 rode knikkers. Je trekt tegelijkertijd twee knikkers (dit kun je interpreteren als 'je trekt twee knikkers na elkaar, zonder de eerste terug te leggen').

1 Stel een kansboom op voor dit kansexperiment.



2 Wat is de kans om twee rode knikkers te trekken?

$$P(\text{twee rode}) = P(R - R) = \frac{5}{21} \cdot \frac{4}{20} = \frac{1}{21}$$

3 Wat is de kans om een groene en een blauwe knikker te trekken?

$$P(\text{blauw en groen}) = P(B - G \text{ of } G - B) = \frac{12}{21} \cdot \frac{4}{20} + \frac{4}{21} \cdot \frac{12}{20} = \frac{8}{35}$$

4 Wat is de kans op twee knikkers van een verschillende kleur?

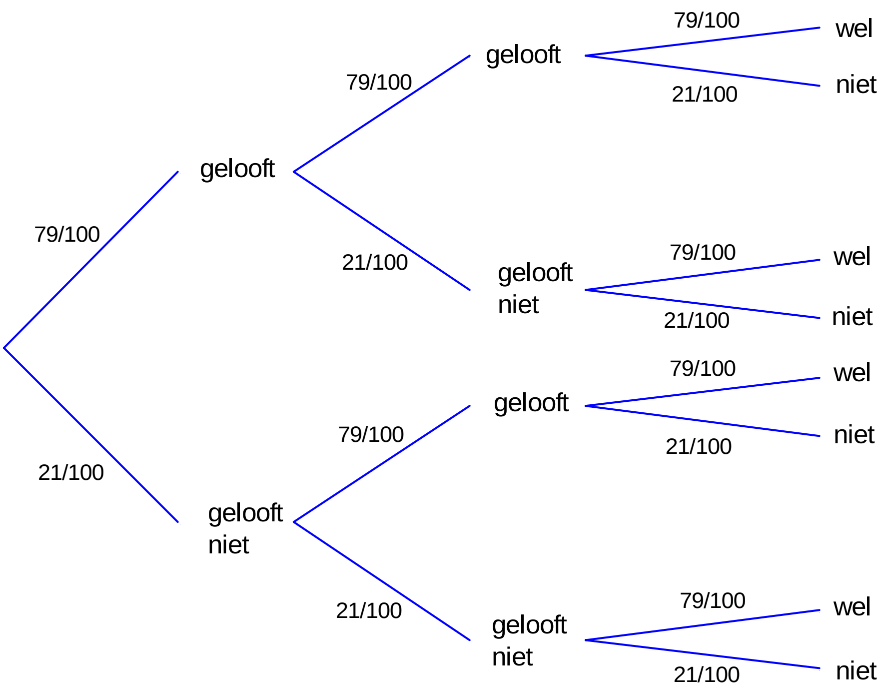
$$\begin{aligned} P(\text{verschillende kleur}) &= P(\text{B-G of B-R of G-B of G-R of R-B of R-G}) \\ &= \frac{12}{21} \cdot \frac{4}{20} + \frac{12}{21} \cdot \frac{5}{20} + \frac{4}{21} \cdot \frac{12}{20} + \frac{4}{21} \cdot \frac{5}{20} + \frac{5}{21} \cdot \frac{12}{20} + \frac{5}{21} \cdot \frac{4}{20} \\ &= \frac{64}{105} \end{aligned}$$

Bemerk dat deze kans met de complementregel sneller berekend kan worden.

Opdracht 30 bladzijde 198

Uit een enquête van 2004, uitgevoerd in de Verenigde Staten, bleek dat 79 % van de ondervraagden uit de leeftijdscategorie 18-34 jaar in het bestaan van de duivel gelooft. Je kiest drie willekeurige Amerikanen uit die leeftijdscategorie.

1 Stel deze situatie in een kansboom voor.



2 Bereken de kans dat ze alle drie in de duivel geloven.

$$P\left(\text{alle drie geloven in duivel}\right) = 0,79 \cdot 0,79 \cdot 0,79 = 0,493$$

3 Bereken de kans dat precies één van hen in de duivel gelooft.

$$\begin{aligned} P\left(\text{precies één gelooft in duivel}\right) &= P\left(\text{wel-niet-niet of niet-wel-niet of niet-niet-wel}\right) \\ &= 0,79 \cdot 0,21 \cdot 0,21 + 0,21 \cdot 0,79 \cdot 0,21 + 0,21 \cdot 0,21 \cdot 0,79 \\ &= 0,1045 \end{aligned}$$

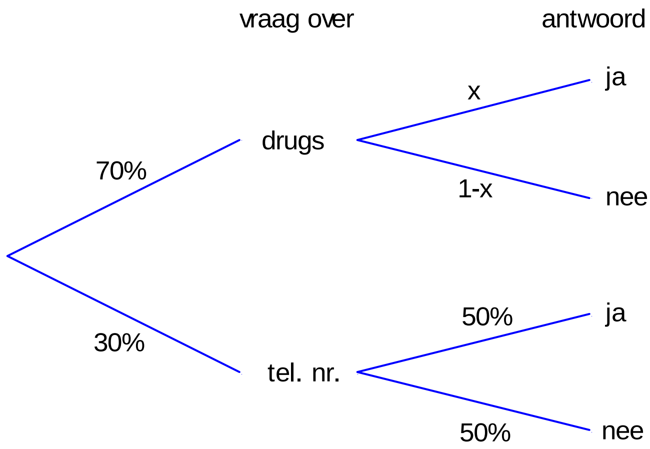
Opdracht 31 bladzijde 199 : Hoe een antwoord te krijgen, zonder een vraag te stellen

In het kader van haar drugsbeleid wil een school, in samenwerking met de leerlingenraad, een enquête houden onder al haar leerlingen. Daarmee wil ze achterhalen welk percentage van de leerlingen soms illegale drugs gebruikt; rond legale drugs liep immers al een actie. De leerlingenraad merkte echter op dat leerlingen niet graag antwoorden op dergelijke vragen en vaak bang zijn dat hun handschrift door de leerkrachten herkend zal worden.

Daarom werd de volgende procedure bedacht: men zou in een grote doos evenveel briefjes steken als er leerlingen zijn in de school. Op 70 % van de briefjes zou de vraag “Gebruik je soms illegale drugs?” staan, op de overige 30 % de vraag “Is het laatste cijfer van jullie telefoonnummer even?”. Elke leerling zou een briefje uit de doos nemen, de vraag lezen, en schriftelijk antwoorden op een blanco blaadje met ‘ja’ of ‘nee’, vooraleer de vraag te vernietigen. Op die manier zou de leerkracht niet kunnen weten op welke vraag de leerling nu eigenlijk antwoordde.

We nemen aan dat 50 % van de telefoonnummers op een even cijfer eindigen en dat alle leerlingen eerlijk antwoorden.

1 Teken een kansboom bij deze procedure en vul zo veel mogelijk gegevens nu reeds in.



2 Na afloop bleek dat 33 % van de leerlingen 'ja' had geantwoord. Vervolledig met dit gegeven de kansboom. Geef een schatting van het aantal gebruikers van illegale drugs (in %) in deze school.

Met x het percentage gebruikers van illegale drugs in de school, is gegeven:

$0,70 \cdot x + 0,30 \cdot 0,50 = 0,33 \Leftrightarrow 0,70 \cdot x = 0,18 \Leftrightarrow x = 0,2571$

Ongeveer een kwart van de leerlingen gebruikte dus ooit illegale drugs.

3 Hoeveel % zou 'ja' geantwoord hebben, mochten alle leerlingen drugs gebruiken?

$0,70 \cdot 1 + 0,30 \cdot 0,50 = 0,70 + 0,15 = 0,85$

Opdracht 32 bladzijde 200

De kans op een jongen of een meisje is in werkelijkheid niet 50 %. In België blijkt uit grootschalig onderzoek dat de relatieve frequentie van de mannelijke pasgeborenen 51,35 % is en dus is 48,65 % van de borelingen een meisje. Deze relatieve frequenties zijn zeer goede schattingen van de kans om als jongen of meisje geboren te worden.

De sterftetabel hiernaast geeft het aantal overlevenden in functie van de leeftijd, vertrekkende van 1000000 pasgeboren jongens en meisjes. Je kunt er bijvoorbeeld uit aflezen dat de relatieve frequentie van de pasgeboren mannelijke baby's die 60 worden, gelijk is aan 88,7681 %. We beschouwen dit als de kans dat een pasgeboren mannelijke baby 60 wordt.

Aantal overlevenden op leeftijd x		
x	Mannen	Vrouwen
0	1000000	1000000
5	994680	995494
10	994050	994992
15	993418	994504
20	991549	993415
25	987078	992313
30	982489	990604
35	977542	988196
40	970984	984973
45	962013	979830
50	946275	970674
55	923008	956053
60	887681	935794
65	833849	907223
70	761579	866820
75	658225	804520
80	510728	699674
85	328547	531100
90	153991	305359
95	41946	115099
100	6569	21473
105	762	1866

1 Je kiest lukraak een pasgeboren meisje. Bereken $P(\text{pasgeboren meisje zal 85 worden})$.

Deze kans kan rechtstreeks uit de tabel afgelezen worden.

$P(\text{pasgeboren meisje zal 85 worden}) = 0,5311$

2 Je kiest lukraak een pasgeborene. Bereken $P(\text{pasgeborene is jongen en zal 85 worden})$.

$P(\text{pasgeborene is jongen en zal 85 worden}) = 0,5135 \cdot 0,328547 = 0,1687$

3 Bereken de kans dat een meisje van 15 minstens 85 wordt.

$$P(\text{meisje van 15 zal 85 worden}) = \frac{531100}{994504} = 0,5340$$

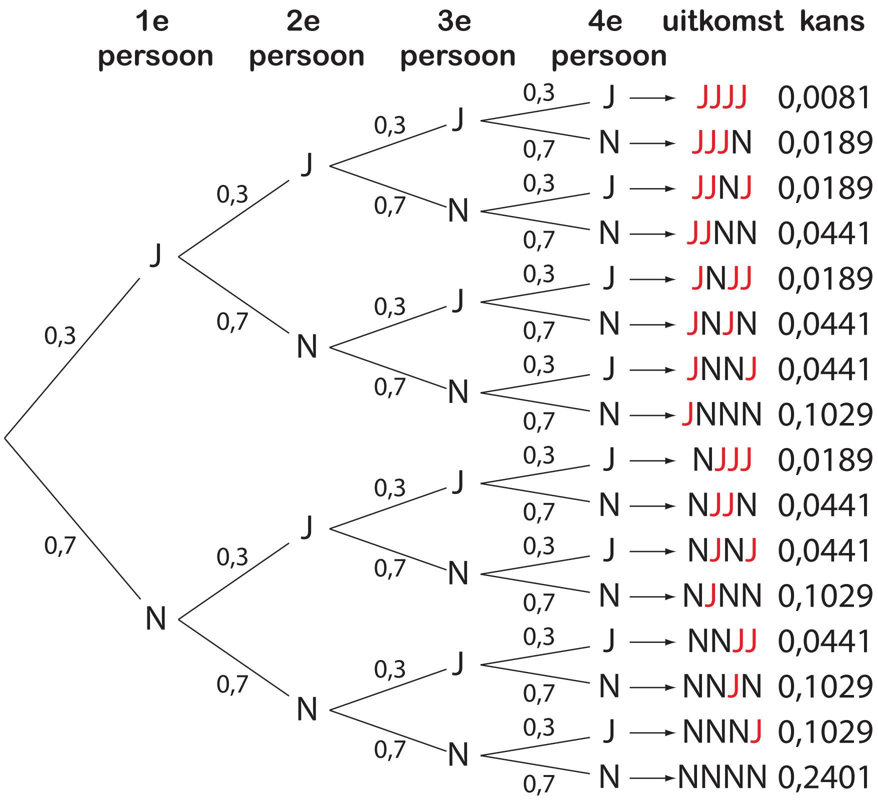
4 Seppe en Annelien zijn 25 en trouwen. Bereken de kans dat ze op hun 75e samen hun gouden bruiloft kunnen vieren, in de veronderstelling dat ze samen blijven.

Hier wordt tweemaal de redenering uit de vorige deelvraag toegepast.

$$P(\text{man van 25 wordt 75 en vrouw van 25 wordt 75}) = \frac{658225}{987078} \cdot \frac{804520}{992313}$$
$$= 0,5406$$

Opdracht 33 bladzijde 202

Eline voert telefonische enquêtes uit. Meer en meer mensen weigeren echter aan dergelijke onderzoeken deel te nemen en haken snel terug in. Stel dat de ervaring leert dat slechts 30 % van de opgebelden bereid is te antwoorden op de gestelde vragen. Ze belt vier verschillende nummers. Hieronder zie je een kansboom met de verschillende mogelijkheden.



1	Bereken de kans dat precies één persoon deelneemt aan de enquête.

$$
\begin{aligned}
P(\text{precies één persoon neemt deel}) &= P(\text{JNNN of NJNN of NNJN of NNNJ}) \\
&= 0{,}1029 + 0{,}1029 + 0{,}1029 + 0{,}1029 \\
&= 0{,}4116
\end{aligned}
$$

2	Bereken de kans dat minstens één persoon deelneemt, door zo weinig mogelijk berekeningen uit te voeren.

Deze gebeurtenis komt overeen met alle takken behalve één: deze waarbij geen enkele persoon deelneemt. Aangezien de som van de kansen op alle takken 1 is, vinden we:

$$
\begin{aligned}
P(\text{minstens één persoon neemt deel}) &= 1 - P(\text{geen enkele persoon neemt deel}) \\
&= 1 - 0{,}2401 \\
&= 0{,}7599
\end{aligned}
$$

Opdracht 34 bladzijde 203

Je gooit vier keer met een eerlijke dobbelsteen.

1 Wat is de kans dat je minstens één keer een 6 gooit?

$$\begin{aligned} P(\text{minstens één keer } 6) &= 1 - P(\text{geen enkele keer } 6) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\ &= \frac{671}{1296} \quad (\approx 0{,}5177) \end{aligned}$$

2 Wat is de kans dat je precies één keer een 6 gooit?

$$\begin{aligned} P(\text{precies één keer } 6) &= P(\text{1e keer 6 of 2e keer 6 of 3e keer 6 of 4e keer } 6) \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} \\ &= \frac{125}{324} \quad (\approx 0{,}3858) \end{aligned}$$

Opdracht 35 bladzijde 203

Je gooit vijf keer met een onvervalst muntstuk.
Wat is de kans dat je zowel kop als munt hebt gegooid?

Oplossing

$$\begin{aligned} P(\text{zowel kop als munt}) &= 1 - P(\text{geen enkele keer kop of geen enkele keer munt}) \\ &= 1 - P(\text{M-M-M-M-M of K-K-K-K-K}) \\ &= 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) \\ &= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

Opdracht 36 bladzijde 203

Je vult een meerkeuzetest lukraak in. Er zijn vier vragen en voor elke vraag is precies één van de vijf antwoordmogelijkheden correct.

1 Wat is de kans dat je precies één vraag correct hebt?

$$P(\text{precies één vraag correct}) = 4\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{256}{625} \quad (\approx 0{,}4096)$$

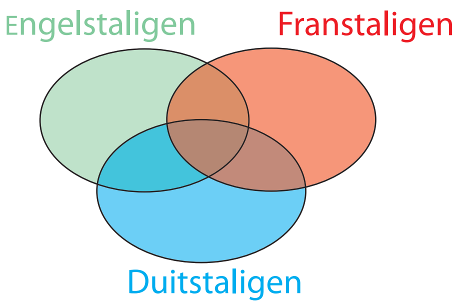
2 Wat is de kans dat je hoogstens twee vragen correct hebt?

$$P(\text{hoogstens twee vragen correct}) = P(0 \text{ of } 1 \text{ of } 2 \text{ correct})$$
$$= 1 - P(3 \text{ of } 4 \text{ correct})$$
$$= 1 - \left(4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \frac{4}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^4\right)$$
$$= \frac{608}{625} \quad (\approx 0{,}9728)$$

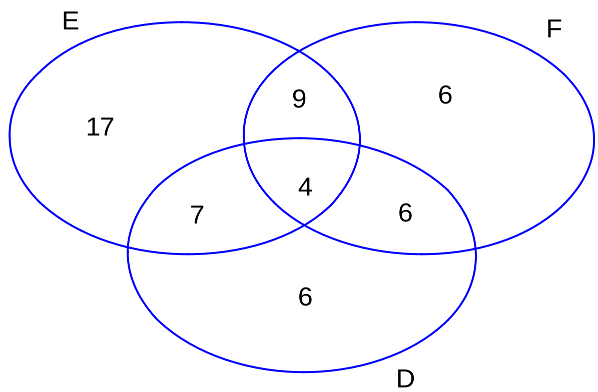
Opdracht 37 bladzijde 204

Op een feestje van Europarlementsleden zijn 55 personen aanwezig. Ze spreken allen minstens één van de talen Engels, Frans of Duits. 37 onder hen spreken Engels, 25 Frans en 23 Duits. Onder hen zijn er 13 die (minstens) Engels en Frans spreken, 10 die Frans en Duits beheersen. Er zijn er 4 die zelfs de drie talen spreken. Onder de Duitssprekenden zijn er 6 personen die geen van beide andere talen spreken.

Het nevenstaande schema is nuttig om systematisch het aantal personen te bepalen die een of meer welbepaalde talen spreken. Elke persoon spreekt de talen van de verzamelingen waarin hij zich bevindt.



1 Plaats een 4 in het gebied dat gemeenschappelijk is aan de drie verzamelingen. Dit zijn de vier personen die de drie talen spreken. Vul de andere gebieden aan op basis van de andere gegevens uit de opgave.



2 Hoeveel personen spreken Frans en Duits, maar geen Engels?

6 personen

3 In de opgave staat dat 25 personen Frans spreken en 23 Duits. Waarom is het aantal personen dat Frans of Duits spreekt niet gelijk aan $25+23=48$?

Door die aantallen op te tellen, worden de personen die Frans en Duits spreken twee keer geteld.

4 Wat is de kans dat een lukraak gekozen persoon Engels spreekt (minstens)?

$$P(\text{persoon spreekt minstens Engels}) = \frac{37}{55}$$

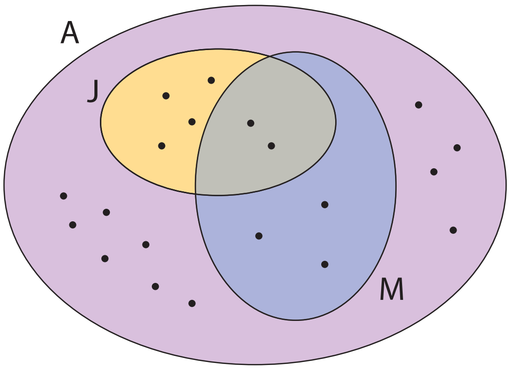
5 Wat is de kans dat een lukraak gekozen persoon hoogstens twee talen spreekt?

$$P(\text{persoon spreekt hoogstens 2 talen}) = \frac{55-4}{55} = \frac{51}{55}$$

Opdracht 38 bladzijde 206

In de grote verzameling A hiernaast stelt elk punt één van de twintig leerlingen van een klas voor. De verzameling J bevat alle leerlingen die lid zijn van een jeugdbeweging. De verzameling M bestaat uit die leerlingen die naar de muziekschool gaan.

Welke verzamelingen links komen met welke omschrijving rechts overeen?



a	$J \cap M$	1	de leerlingen die enkel naar de muziekschool gaan
b	$J \cup M$	2	de leerlingen die zowel naar de muziekschool als naar een jeugdbeweging gaan
c	$J \setminus M$	3	de leerlingen die noch naar de muziekschool, noch naar een jeugdbeweging gaan
d	$M \setminus J$	4	de leerlingen die naar de muziekschool gaan of in een jeugdbeweging zitten (of beide)
e	$A \setminus M$	5	de leerlingen van de jeugdbeweging die niet naar de muziekschool gaan
f	$A \setminus (J \cup M)$	6	de leerlingen die niet naar de muziekschool gaan

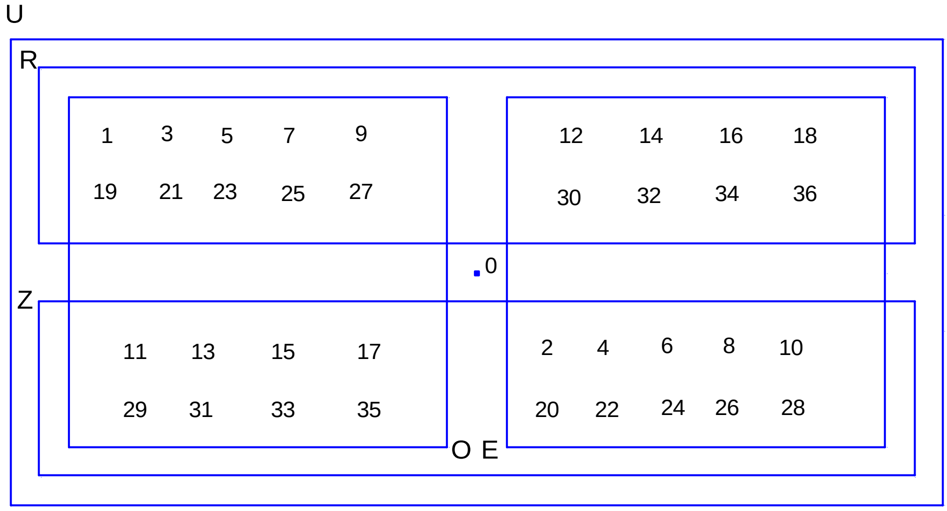
Oplossing

a-2; b-4; c-5; d-1; e-6; f-3

Opdracht 39 bladzijde 207

Op een Franse roulettetafel staan de nummers 0 tot en met 36. Deze vormen de uitkomstenverzameling U. De verzameling R stelt de rode nummers voor en Z de zwarte nummers. E bevat de even en O de oneven getallen.
De 0 wordt niet meegerekend, omdat bij die uitkomst op het roulettewiel alle inzet naar de bank gaat.

1 Stel deze verzamelingen voor in Venn-diagrammen.



2 Bepaal #U, #R, #Z, #E en #O.

#U = 37, #R = #Z = #E = #O = 18

3 Bepaal $\#(R \cap E)$ en $\#(R \cap O)$.

$\#(R \cap E) = 8$ en $\#(R \cap O) = 10$ (aflezen uit Venn-diagram)

4 Bereken $\#(R \cup E)$.

$\#(R \cup E) = \#R + \#E - \#(R \cap E) = 18 + 18 - 8 = 28$

5 Bereken $\#(R \setminus O)$.

$\#(R\setminus O) = \#R - \#(R \cap O) = 18 - 10 = 8$ (of aflezen uit Venn-diagram)

6 Het roulettewiel bevat dezelfde getallen en kleuren. Wat is de kans dat het balletje op een zwart oneven getal terecht komt?

$$P(\text{zwart oneven}) = \frac{\#(Z \cap O)}{\#U} = \frac{8}{37}$$

Opdracht 40 bladzijde 210

Een gokker wil de kans te weten komen dat de som van de ogen van twee geworpen dobbelstenen groter of gelijk is aan 10. Daartoe werpt hij 900 keer twee dobbelstenen.

Hiernaast vind je zijn bevindingen.

Som van de ogen	A.F.
2	23
3	49
4	68
5	98
6	138
7	143
8	120
9	105
10	82
11	48
12	26

1 Geef op basis van zijn kansexperiment een schatting voor de kans dat de som van de ogen van twee dobbelstenen gelijk is aan 10.

$$P(\text{som}=10)=\frac{82}{900}=9{,}11\,\%$$

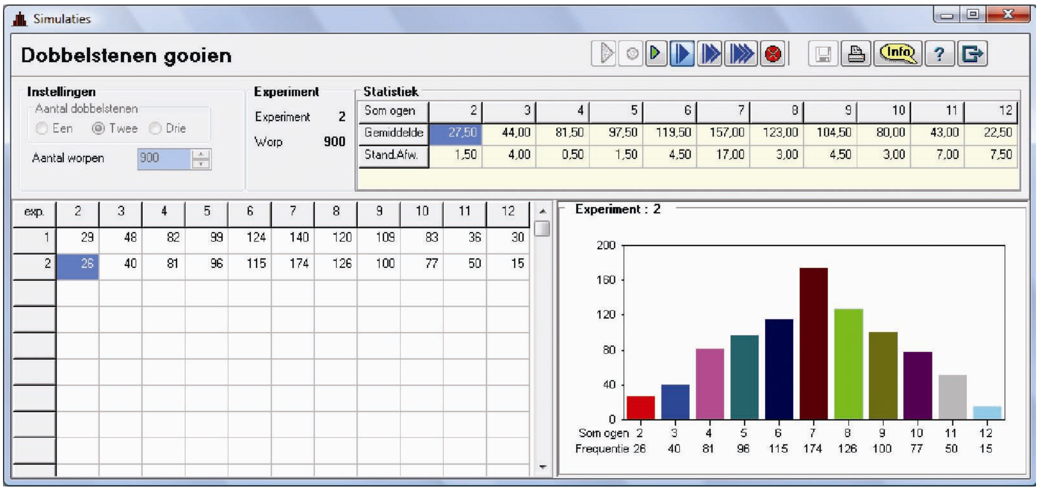
2 Wat vind je voor de kans dat die som groter of gelijk is aan 10?

$$P(\text{som}\geq 10)=\frac{82+48+26}{900}=17{,}33\,\%$$

Opdracht 41 bladzijde 210

Om na te gaan of de dobbelstenen uit de vorige opdracht eerlijk zijn, moeten we de verschillende experimentele kansen vergelijken met die van dobbelstenen waarvan de eerlijkheid gegarandeerd is.

Beschik je over een pc, dan kun je via VU-Statistiek het kansexperiment snel en vaak uitvoeren. De module *Dobbelstenen gooien* binnen de groep *Simulaties* laat je toe een bepaald kansexperiment, zoals 900 keer twee dobbelstenen gooien, meerdere keren uit te voeren. Hieronder gebeurde dit al twee keer.



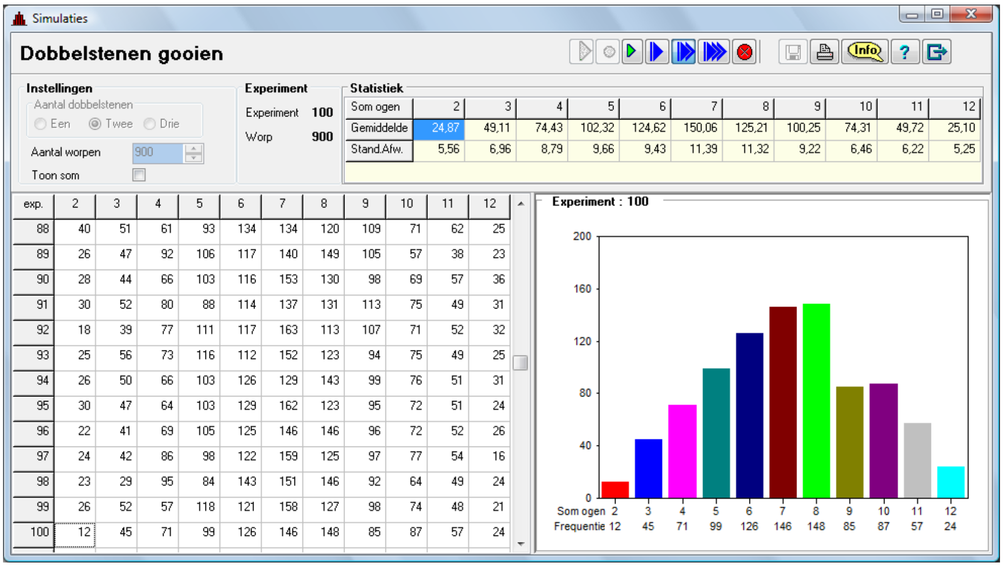
Linksonder zie je de absolute frequenties bij beide uitvoeringen. Het valt op dat de absolute frequenties bij eenzelfde uitkomst nogal kunnen verschillen.
Rechtsboven zie je per uitkomst het gemiddelde over de verschillende uitvoeringen van het kansexperiment.

1 Voer het kansexperiment een tiental keer uit.

2 Vergelijk de absolute frequenties uit de tien herhalingen met VU-Statistiek met die uit de tabel bij opdracht 40. Werd in die opdracht met een eerlijke dobbelsteen gegooid, denk je? Verklaar.

Oplossing

We simuleerden het 900 keer opgooien van twee dobbelstenen 100 keer.



De frequenties in de tabel van opdracht 40 komen mooi overeen met de gemiddelde absolute frequentie van de verschillende uitkomsten. De dobbelstenen die gebruikt werden, waren vermoedelijk niet vervalst.

(De statistiek laat toe dit vermoeden verder te onderzoeken en te kwantificeren, bijv. via een chi-kwadraattoets, maar dat is geen onderwerp voor het secundair onderwijs.)

Opdracht 42 bladzijde 211

Je wil een schatting maken van het aantal leerlingen van het vierde jaar dat zakgeld krijgt.

1 Ga na hoeveel personen in jouw klas zakgeld krijgen.

2 Je leerkracht weet vast hoeveel leerlingen er zijn in het vierde jaar. Gebruik de gegevens van jouw klas om te schatten hoeveel leerlingen zakgeld krijgen in het vierde jaar.

3 Uit een Belgische studie van eind 2007 bleek op basis van honderden jongeren van 15-16 jaar dat 75 % van hen zakgeld krijgen.
Waarom is deze relatieve frequentie betrouwbaarder dan het percentage in jouw klas?

4 Schat op basis van dat cijfer het aantal leerlingen van het vierde jaar in jouw school dat zakgeld krijgt.

Oplossing

1 –

2 –

3 De wet van de grote aantallen vertelt ons dat een relatieve frequentie bij een groot aantal herhalingen van een experiment (iemand bevragen) dichter bij de werkelijke relatieve frequentie ligt dan bij een klein aantal herhalingen.

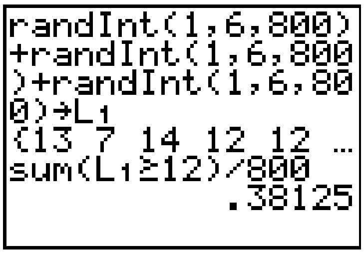
4 –

Opdracht 43 bladzijde 211

Je gooit drie dobbelstenen op. Je wil de kans op minstens 12 ogen bepalen met een simulatie.

1 Voer een simulatie van 300 worpen uit met je rekentoestel en leid hieruit een experimentele kans op minstens 12 ogen af.

Hiernaast wordt met één commando gewerkt, maar er kan ook opgesplitst worden, zoals in opdracht 12.
Indien leerlingen genoeg vrij geheugen hebben, kunnen ze meer dan 300 worpen kiezen.
Met 800 worpen zal de experimentele kans een betere schatting geven van de werkelijke kans.

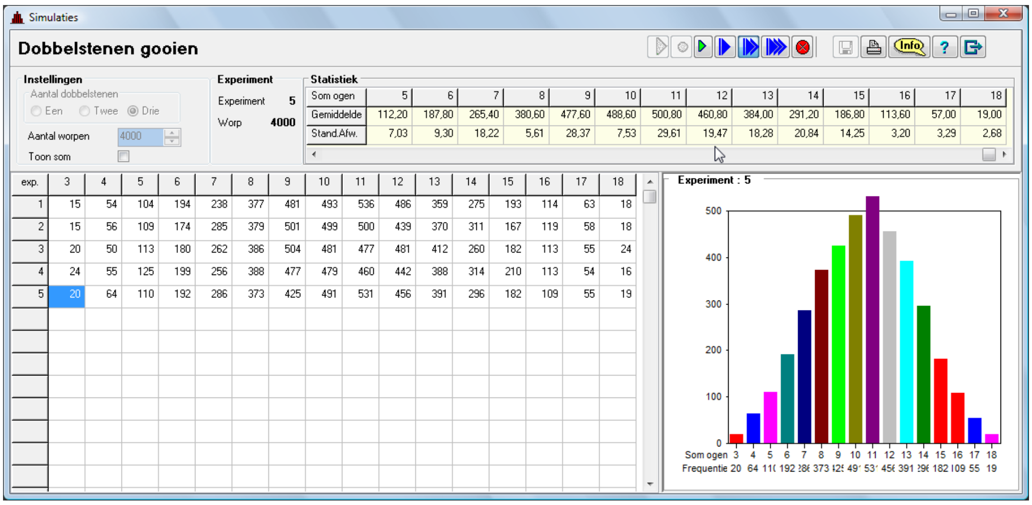


2 Combineer jouw resultaat met dat van alle anderen in je klas en bereken opnieuw een experimentele kans.

–

3 Gebruik de module *Dobbelstenen* van de rubriek *Simulaties* van VU-Statistiek om op basis van een simulatie van 20000 worpen van drie dobbelstenen de kans op minstens 12 ogen te schatten. (Per simulatie kun je maximaal 4000 herhalingen uitvoeren, zodat je vijf keer 4000 simulaties zal moeten combineren.)

Leerlingen kunnen ofwel alle absolute frequenties optellen, maar het is sneller om meteen met de gemiddeldes te werken.



Som ogen	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Gemiddelde	112,20	187,80	265,40	380,60	477,60	488,60	500,80	460,80	384,00	291,20	186,80	113,60	57,00	19,00
Stand.Afw.	7,03	9,30	18,22	5,61	28,37	7,53	29,61	19,47	18,28	20,84	14,25	3,20	3,29	2,68

exp.	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	15	54	104	194	238	377	481	493	536	486	359	275	193	114	63	18
2	15	56	109	174	285	379	501	499	500	439	370	311	167	119	58	18
3	20	50	113	180	262	386	504	481	477	481	412	260	182	113	55	24
4	24	55	125	199	256	388	477	479	460	442	388	314	210	113	54	16
5	20	64	110	192	286	373	425	491	531	456	391	296	182	109	55	19

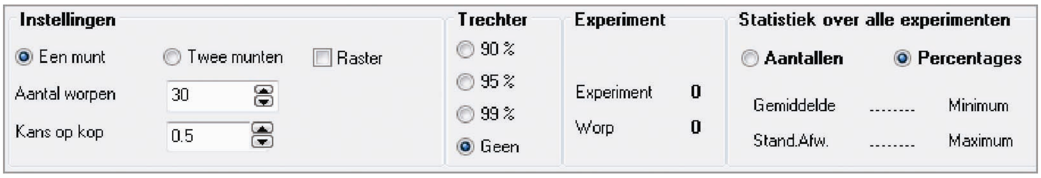
Met de gegevens uit de simulatie hierboven vinden we als experimentele kans:

$$\frac{460,8+384,0+291,2+186,8+113,6+57,0+19,0}{4000}=0,3781$$

Opdracht 44 bladzijde 212

De **wet van de kleine aantallen** is geen wiskundige wet, maar een verwijzing naar de foutieve overtuiging van veel mensen, zowel leken als wiskundigen en wetenschappers, dat zelfs een klein aantal herhalingen van een kansexperiment toch een betrouwbare relatieve frequentie kunnen opleveren.

1 Open de module *Munten* onder *Simulaties* in VU-Statistiek en simuleer 30 worpen van een muntstuk. Je kunt de onderstaande instellingen gebruiken: 30 worpen van één munt, geen 'raster' of 'trechter' nodig, statistisch overzicht van de percentages.

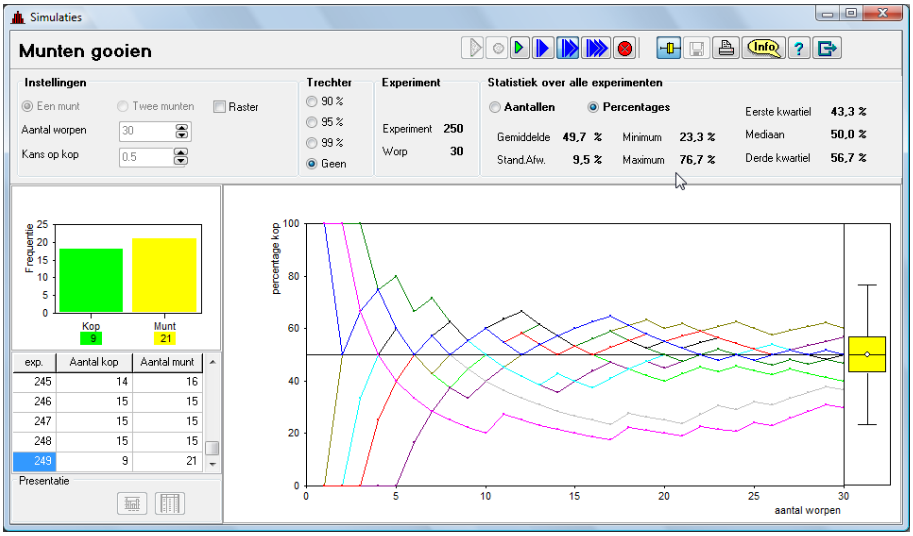


Wat is het percentage 'kop' in jouw simulatie ?

Deze opdracht kan ook met de TI8x uitgevoerd worden, of zelfs gewoon in de klas met echte muntstukken (zelfde geldwaarde en *zelfde jaar*).

2 Laat dit kansexperiment nu automatisch minstens een honderdtal keer uitvoeren. Wat vind je als minimum- en maximumpercentage voor 'kop'?

Na 250 uitvoeringen van het experiment, vonden we:



Op 30 worpen kan het percentage kop variëren tussen 25% en 75%!

3 Onderzoek op dezelfde manier hoeveel het minimum- en maximumpercentage nog afwijken van 50% wanneer je de munt 150 en 750 keer opgooit.

Analoog. De afwijking t.o.v. 50% zal afnemen naarmate het aantal worpen per experiment toeneemt.

We voegden deze opdracht toe omwille van zijn vormend karakter. Kansrekenen is geen gemakkelijk onderwerp, o.a. omdat we weinig op intuïtie kunnen terugvallen of omdat onze intuïties ons soms bedriegen. De ‘wet van de kleine aantallen’ is een bekende misvatting. In deze eerste kennismaking met kansrekenen kan ook ruimte gemaakt worden voor zulke ‘vormende’ opdrachten, vinden we.

Opdracht 45 bladzijde 212

1 In een doos zitten 100 balletjes, genummerd van 1 tot en met 100. Je neemt er lukraak één uit. Wat is de kans dat het nummer kleiner of gelijk is aan 27?

Die kans is uiteraard 27 %.

2 Uit een enquête uit 2008 bij een groot aantal Vlamingen ouder dan 18 bleek dat 59 % onder hen aan sport doet.
Verklaar waarom het commando $\mathbf{randInt}(\mathbf{1,100,300}) \leq \mathbf{59}$ een groep van 300 dergelijke Vlamingen simuleert, waarbij '1' staat voor 'doet aan sport'.

Het commando **randInt(1,100,300)** genereert 300 getallen lukraak gekozen tussen 1 en 100, grenzen inbegrepen. Vervolgens wordt elk getal vergeleken met 59: is het kleiner of gelijk aan 59, dan levert de test een 1 op. Dit zal zo zijn met een kans van 59 %. Dit experiment is daarom een vertaling van het experiment ‘300 Vlamingen kiezen, waarbij elk individu een kans van 59 % heeft om aan sport te doen’.

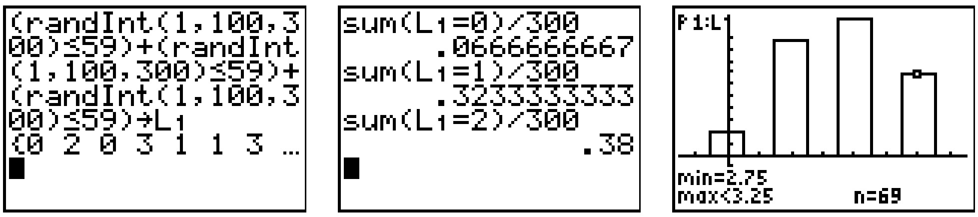
3 Simuleer 300 keer een groep van 3 Vlamingen. Genereer daartoe 3 getallenrijen met enen en nullen, waarbij '1' staat voor 'doet aan sport'. De kans op een '1' moet 59 % zijn.
Combineer de 3 getallenrijen tot één rij die het aantal sportievelingen weergeeft van elk van de 300 groepjes van 3 Vlamingen.
Bepaal een experimentele kans op 0, 1, 2 of 3 personen die aan sport doen.

Aantal	Kans
0	
1	
2	
3	

Het commando

(randInt(1,100,300)≤59) + (randInt(1,100,300)≤59) + (randInt(1,100,300)≤59)

creëert een lijst van 300 getallen van 0 tot 3, waarbij het getal staat voor het aantal sporters in een groep van 3 Vlamingen.



De experimentele kansen bij deze simulatie zijn: P(0) = 6,67 %, P(1) = 32,33 %, P(2) = 38 % en P(3) = 23 %. Om betrouwbaarder schattingen te krijgen, kan met langere lijsten gewerkt worden.
Het is een mooie herhalingsopdracht om die kansen exact te laten berekenen, eens leerlingen met kansbomen kunnen werken.

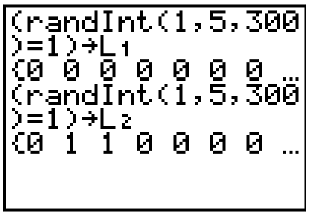
Opdracht 46 bladzijde 213

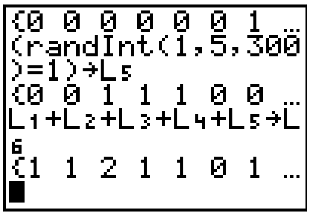
Uit een onderzoek bij meer dan 300 leerlingen uit het secundair onderwijs bleek dat ongeveer 20 % van de leerlingen beweerde zeer regelmatig te praten en daardoor niet op te letten.

Soms hoor je dan de volgende uitspraak: *“Op elk groepje van 5 leerlingen is er dus 1 die regelmatig praat en daardoor niet oplet”*. Natuurlijk kan het zijn dat je op een groepje botst waarin niemand voortdurend babbelt, of net iedereen. Zijn die kansen echter groot?

1 Simuleer 300 groepjes van 5 jongeren, door 5 getallenrijen met enen en nullen te genereren. Laat '1' overeenkomen met 'praat te veel en let daardoor niet op'. De kans op een '1' moet dus 20 % zijn. Maak daarbij eventueel gebruik van de technieken uit de vorige opdracht.

Deze opdracht is analoog aan de vorige. Ofwel kan met het commando **randInt(1,100,300)≤20** gewerkt worden, maar ook **randInt(1,5,300)=1** is mogelijk. Dit is het commando dat hieronder is gebruikt. Voor de afwisseling werken we met afzonderlijke lijsten.





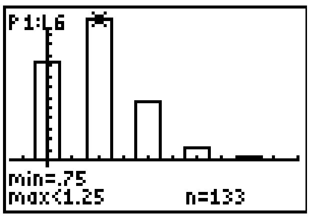
2 Geef je resultaten weer in een histogram. Leid daaruit het antwoord af op de volgende vragen.

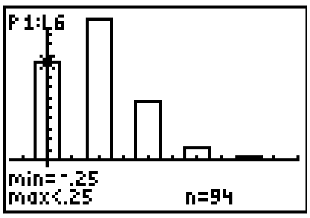
a Hoeveel groepjes met 1 veelprater zijn er ?
Klopt het dus dat er in elk groepje van 5 altijd 1 persoon is die te veel praat ?
Wat is jouw experimentele kans ?

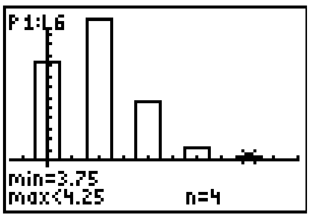
b Wat is jouw experimentele kans dat er niemand te veel praat in zo'n groep ?

c Wat is jouw experimentele kans dat het allemaal babbelaars zijn ?

Er zijn 133 groepjes met één veelprater; dat is iets minder dan de helft.
In 94 groepjes zit geen enkele babbelaar. De bijbehorende experimentele kans is dus 31,33 %. In 4 groepjes zitten vijf babbelaars: P(5) = 1,33 %.







Opdracht 47 bladzijde 214

Je gaat squashen. In je sporttas zitten twee balletjes met een rode stip en vier met een blauwe stip, die harder terugkaatsen.

1 Je neemt er lukraak twee uit. Wat is de kans dat ze beide een blauwe stip hebben?

$U = \{R_1 \text{ en } R_2, R_1 \text{ en } B_1, R_1 \text{ en } B_2, R_1 \text{ en } B_3, R_1 \text{ en } B_4, R_2 \text{ en } B_1, R_2 \text{ en } B_2, R_2 \text{ en } B_3, R_2 \text{ en } B_4,$
$B_1 \text{ en } B_2, B_1 \text{ en } B_3, B_1 \text{ en } B_4, B_2 \text{ en } B_3, B_2 \text{ en } B_4, B_3 \text{ en } B_4\}$

$G = \{B_1 \text{ en } B_2, B_1 \text{ en } B_3, B_1 \text{ en } B_4, B_2 \text{ en } B_3, B_2 \text{ en } B_4, B_3 \text{ en } B_4\}$

$P(\text{blauw en blauw}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

2 Wat is de kans dat ze beide een rode stip hebben?

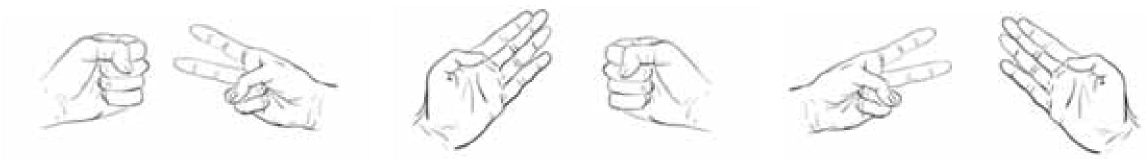
$G = \{R_1 \text{ en } R_2\}$

$P(\text{rood en rood}) = \frac{1}{15}$

Opdracht 48 bladzijde 214

Tim en zijn broer Daan maken ruzie over wie nu eerst op de computer mag werken. Ze besluiten het toeval te laten beslissen, maar vinden het opwerpen van een muntstuk te flauw. Daarom zoeken ze een ander kansexperiment. Geef bij elk kansexperiment de kans dat Tim op de computer mag werken en de kans dat Daan op de computer mag werken. Welke experimenten zijn eerlijk?

1 Ze spelen één rondje 'blad-steen-schaar'.
Bij het spelletje 'blad - steen - schaar' moeten de twee spelers gelijktijdig een van drie voorwerpen uitbeelden: een blad papier (platte hand), een steen (gebalde vuist), een schaar (gestrekte wijs - en middenvinger, schaar uitbeeldend). Kozen ze beide hetzelfde voorwerp, dan wint geen van beide. In de andere gevallen wordt de winnaar bepaald op basis van superioriteit:



Stenen verbrijzelen scharen.
Stenen winnen van schaar.

Bladen bedekken stenen.
Bladen winnen van stenen.

Scharen snijden papier.
Scharen winnen van papier.

Afkortingen: pa = papier, st = steen, sch = schaar. Bovendien vermelden we eerst de keuze van Tim, dan die van Daan.

U = {pa-pa, pa-st, pa-sch, st-pa, st-st, st-sch, sch-pa, sch-st, sch-sch}
G_1 = {pa-st, st-sch, sch-pa} → in deze gevallen wint Tim
G_2 = {st-pa, sch-st, pa-sch} → in deze gevallen wint Daan

$$P(\text{Tim wint}) = \frac{\#G_1}{\#U} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ en } P(\text{Daan wint}) = \frac{\#G_2}{\#U} = \frac{1}{3}.$$

Deze werkwijze is dus eerlijk.

Handiger dan het uitschrijven van uitkomstenverzamelingen, is het werken met een rooster, zoals in opdracht 17. In het 3×3-rooster komen drie combinaties overeen met winst voor Tim en drie met winst voor Daan.

2 Twee muntstukken opgooien. Tim wint indien er minstens één keer kop voorkomt, in het andere geval wint Daan.

De eerst vermelde uitkomst is die van Tim: U = {KK, KM, MK, MM}.
G_1 = {KK, KM, MK} → in deze gevallen wint Tim
G_2 = {MM} → in dit geval wint Daan

$P(\text{Tim wint}) = \frac{3}{4}$ en $P(\text{Daan wint}) = \frac{1}{4}$. Het spel is niet eerlijk.

3 Ze krijgen elk een doosje met daarin drie briefjes genummerd 1, 2 en 3.
Ze trekken elk blindelings een briefje: is de som van beide cijfers even, dan wint Tim, is het oneven, dan wint Daan.

I.p.v. met een opsomming, werken we hier ter afwisseling met een rooster. De gearceerde cellen komen overeen met die uitkomsten waarbij Tim wint.

		Daan		
		1	**2**	**3**
Tim	**1**	2	3	4
	2	3	4	5
	3	4	5	6

$P(\text{Tim wint}) = \frac{5}{9}$ en $P(\text{Daan wint}) = \frac{4}{9}$.

Deze werkwijze is niet eerlijk.
(Opdracht 49 sluit hier mooi bij aan.)

Opdracht 49 bladzijde 215

Pieter gooit twee dobbelstenen op en beweert: “Er zijn twee mogelijkheden: de som van de ogen is ofwel even, ofwel oneven. Dus is de kans op een even aantal ogen $\frac{1}{2}$.”

Corrigeer, indien nodig, zowel de kans als zijn redenering.

Oplossing

De kans is correct, maar de redenering klopt niet: Pieter gaat er zomaar van uit dat beide uitkomsten even waarschijnlijk zijn, maar dat moet hij controleren op basis van kansen waar hij wél zeker over kan zijn. Dit zijn de kansen op de verschillende uitkomsten per dobbelsteen.

In een rooster, zoals in opdracht 17, kan achteraf geteld worden dat er 18 uitkomsten overeenkomen met een even som en 18 met een oneven som. Daaruit volgt dat de kans op beide situaties 0,5 is.

Opdracht 48.3 maakt duidelijk dat dit niet altijd het geval hoeft te zijn.

Opdracht 50 bladzijde 215

Elke week speelt het gezin van Ines op de Lotto. Daarbij vult iedereen één rooster in door zes verschillende getallen tussen 1 en 42 aan te kruisen.

Ines kruist de vakjes 1, 2, 3, 4, 5 en 6 aan. Haar vader vindt dat heel dwaas en argumenteert dat ze de cijfers wat meer gespreid moet kiezen om een grotere kans op winnen te hebben.

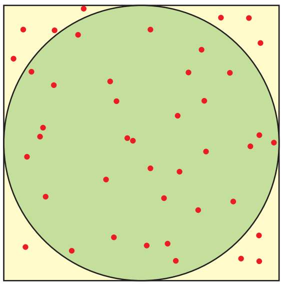
Bespreek.

Oplossing

Elke combinatie van 6 cijfers heeft een even grote kans om de hoofdprijs op te leveren, ongeacht hoe die cijfers verspreid zijn. Ines' keuze is dus niet dwaas.

(Bovendien: indien ze de 6 cijfers juist heeft, zal ze wellicht de enige zijn met deze uitzonderlijke combinatie en zal ze dus een groter bedrag winnen.)

Opdracht 51 bladzijde 215



Een computer genereert punten, lukraak verspreid in een vierkant met zijde 1. In het vierkant is een cirkel getekend die het vierkant in vier punten raakt.

Door de verhouding $\frac{\text{aantal punten in de cirkel}}{\text{totaal aantal punten}}$ te berekenen voor een zeer groot aantal punten, kun je een bekend getal tot op vele cijfers na de komma benaderen.

Welk getal is dat? Verklaar.

Oplossing

Indien de punten volledig willekeurig verdeeld over het vierkant gekozen worden, zal de gevraagde verhouding, wegens de wet van de grote aantallen, convergeren naar

$$\frac{\text{oppervlakte cirkel}}{\text{oppervlakte vierkant}} = \frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

Op die manier kan een schatting voor π verkregen worden.

Opdracht 52 bladzijde 215

Joeri heeft zijn indianenpak aangetrokken en is druk doende te leren schieten met pijl en boog. Tegen een boom vlakbij zijn wigwam, heeft hij een schietschijf geplaatst. Deze bestaat uit drie concentrische cirkels met stralen 10 cm, 20 cm en 30 cm. Hij kan het nog niet zo goed: zijn pijl treft de schietschijf altijd lukraak...

1 Bereken de kans dat hij, als hij de schietschijf raakt, in de middelste strook terechtkomt, d.i. tussen de cirkel met een straal van 10 cm en die van 20 cm.

Ook hier geeft de formule van Laplace aanleiding tot een verhouding van oppervlaktes i.p.v. een verhouding van aantallen uitkomsten.

De totale oppervlakte van de schijf is $\pi \cdot 30^2 = 900\pi$.

De 'gunstige oppervlakte' is $\pi \cdot 20^2 - \pi \cdot 10^2 = 300\pi$.

De kans dat de pijl in die middelste strook terecht komt, is dus $\frac{300\pi}{900\pi} = \frac{1}{3}$.

2 Wat is de kans dat hij in de buitenste strook schiet als hij de schietschijf raakt?

Sommige leerlingen zouden de (interessante) denkfout kunnen maken dat het 'logisch' is dat die kans één op drie is, aangezien er drie stroken zijn. Om duidelijk te maken dat niet elke strook even waarschijnlijk is, is deze tweede deelvraag zinvol. De kans dat de pijl in de buitenste ring terechtkomt is $\frac{\pi \cdot 30^2 - \pi \cdot 20^2}{900\pi} = \frac{5}{9}$.

Opdracht 53 bladzijde 216

Joachim toont je twee kaartjes. Het ene heeft twee witte zijden, het andere heeft een witte en een zwarte zijde. Hij stopt ze achter zijn rug en laat je vervolgens een zijde van één van de kaartjes zien: die is wit. Wat is de kans dat de achterzijde ook wit is?

1 Voer het kansexperiment daadwerkelijk uit, door zelf twee dergelijke kaartjes te maken. Een experimentele kans zal bij een groot aantal experimenten al een goede schatting opleveren.

Indien leerlingen het spel een aantal minuten spelen en de uitkomsten bijhouden, zullen ze na een tijdje merken dat de kans dat de achterzijde ook wit is, groter is dan 50%.

2 Bereken de kans m.b.v. de formule van Laplace. Kies daarbij een goede uitkomstenverzameling.

Spreken we af dat de eerstvermelde kant de getoonde kant is, dan is de uitkomstenverzameling die overeenkomt met het gegeven: $U = \{W\text{-}Z,\ W_1\text{-}W_2,\ W_2\text{-}W_1\}$.

De verzameling van de gunstige uitkomsten is $G = \{W_1\text{-}W_2,\ W_2\text{-}W_1\}$.

De gevraagde kans is, aangezien elke uitkomst even waarschijnlijk is, $\frac{2}{3}$.

Opdracht 54 bladzijde 216

Bij het beantwoorden van de volgende vraag mag je veronderstellen dat de kans op een jongen en op een meisje bij elke geboorte even groot is.

De familie Peeters heeft vier kinderen. Het oudste kind is een jongen en men weet dat minstens één van de overige kinderen ook een jongen is.

Hoe groot is de kans dat het jongste kind een meisje is?

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{1}{3}$ C $\frac{3}{7}$ D $\frac{1}{2}$ E $\frac{4}{7}$

Oplossing

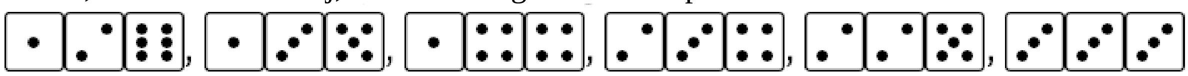
We hoeven geen rekening te houden met het oudste kind, want daarvan weten we dat het een jongen is. Voor de overige drie kinderen zijn er in principe acht mogelijkheden, waarvan 4 met een jongen als jongste kind en 4 met een meisje. Maar de combinatie M-M-M (3 meisjes) valt weg, aangezien er minstens één jongen is. Het totaal aantal mogelijkheden is daarom 7, waarvan slechts 3 met een meisje als jongste kind. Dit kan gemakkelijk in een boomschema gecontroleerd worden.

De gevraagde kans is dus $\frac{3}{7}$.

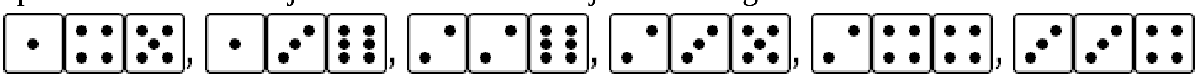
Opdracht 55 bladzijde 216

Rond 1615 gingen enkele Italiaanse gokkers bij Galileo Galilei (1564-1642) te rade omtrent een eerder raadselachtig fenomeen bij een gokspel. Dat bestond erin drie dobbelstenen te werpen. Volgens de theoretici van die tijd moest de kans om als som van de ogen 9 uit te komen even groot zijn als om 10 uit te komen (alsook 11 of 12).

Immers, zo redeneerden zij, 9 kan verkregen worden op 6 manieren:



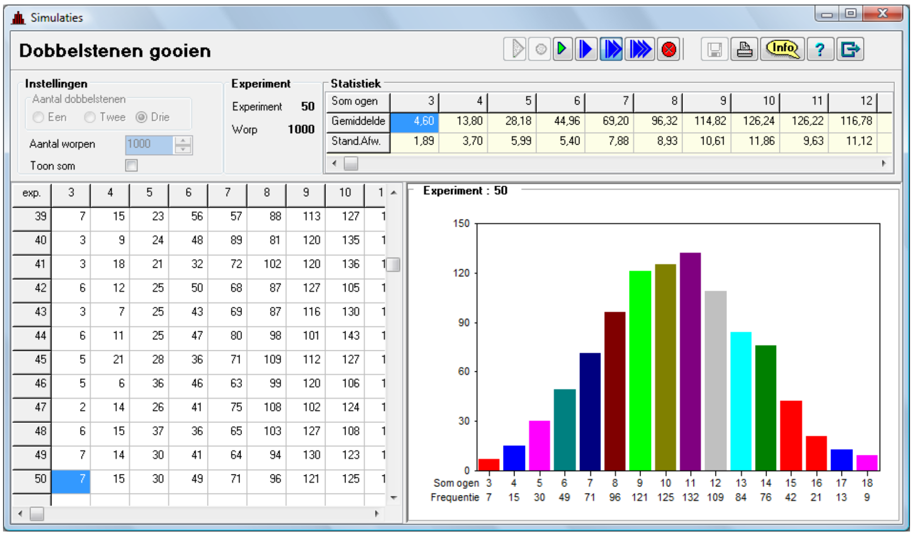
Op dezelfde manier blijken er 6 manieren te zijn om 10 te gooien:



De ervaring van die gokkers leek er echter op te wijzen dat 10 iets vaker voorkwam dan negen; dus vroegen ze Galileo of hij dit raadsel kon oplossen.

1 De simulatiemodule *Dobbelstenen gooien* van VU-Statistiek is uitermate geschikt om drie dobbelstenen heel vaak te gooien. Simuleer enkele duizenden worpen van drie dobbelstenen en onderzoek of het gooien van 10 ogen inderdaad een iets hogere kans heeft dan het gooien van 9 ogen.

Na 50000 simulaties blijkt de kans op 9 ogen inderdaad iets kleiner te zijn dan op 10: 11,482 % vs. 12,624 %.



2 Galileo loste het probleem op door de drie dobbelstenen een verschillende kleur te geven: daardoor kreeg elke uitkomst een gelijke kans.
Tel nu op hoeveel manieren je 9 resp. 10 kunt samenstellen, rekening houdend met die kleur en bereken daarmee de theoretische kans op 9 en 10.

Worpen die bestaan uit *drie verschillende* uitkomsten kunnen telkens op $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ manieren gevormd worden.

Vb.: 1-2-6, 1-6-2, 2-1-6, 2-6-1, 6-1-2 en 6-2-1.

Worpen met *twee verschillende* uitkomsten kunnen telkens op 3 manieren gegooid worden.

Vb.: 1-4-4, 4-1-4, 4-4-1.

Worpen met *één* uitkomst, bijvoorbeeld 3-3-3, kunnen maar op 1 manier gevormd worden.

Met deze algemene regels kan snel nagerekend worden dat een som van 9 ogen op $6+6+6+3+3+1=25$ manieren gevormd kan worden en een som van 10 ogen op $6+6+6+3+3+3=27$ manieren.

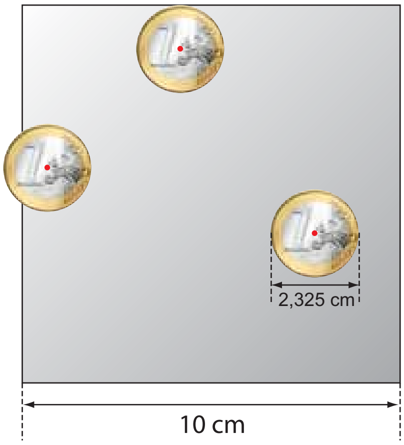
We vinden $P(9 \text{ ogen}) = \dfrac{25}{216} \approx 0{,}1157$ en $P(10 \text{ ogen}) = \dfrac{27}{216} = 0{,}125$.

Bemerk dat de simulaties deze kansen al zeer dicht benaderden.

Opdracht 56 bladzijde 217 : Le jeu du franc-carreau

In 1777 vermeldt graaf de Buffon het volgende spel: *"In een kamer met parketvloer of belegd met gelijke tegels, van willekeurige vorm, gooit men een écu in de lucht; één van de spelers wedt dat deze terecht zal komen op één tegel ("à franc-carreau" in het Frans van die tijd); de tweede wedt dat deze écu op minstens twee tegels terecht zal komen, d.w.z. dat hij op de rand tussen tegels zal liggen (...): men vraagt de kans dat deze spelers zullen winnen."*
(Essai d'arithmétique morale – 1777).

Opdat je het spel zelf zou kunnen uitvoeren, ter controle van je berekeningen, zullen wij met een euro gooien; deze heeft een diameter van exact 2,325 cm.



1 Beschouw een vierkante tegel met zijde 10 cm.
Toon aan dat de kans dat een muntstuk volledig binnen de tegel valt, gelijk is aan 0,589.
Dit is de kans dat speler 1 wint.

We werken opnieuw met een verhouding van oppervlakten, zoals in de opdrachten 51 en 52.

Speler 1 wint wanneer het middelpunt van het muntstuk minstens $\frac{2{,}325 \text{ cm}}{2} = 1{,}1625 \text{ cm}$ van de rand van de tegel verwijderd blijft. Het gunstige gebied voor het middelpunt van het muntstuk is bijgevolg een vierkant met zijde $(10 - 2{,}325)$ cm.

We vinden: $P(\text{speler 1 wint}) = \frac{(10-2{,}325)^2}{10^2} \approx 0{,}5891$.

2 Wat is de kans dat het muntstuk niet volledig binnen de tegel valt en dus speler 2 wint?

$P(\text{speler 2 wint}) = 1 - P(\text{speler 1 wint}) = 0{,}4109.$

3 Welke zijde moet het vierkant hebben opdat speler 1 en speler 2 evenveel kans zouden hebben om te winnen?

We zoeken de zijde z zo dat $\frac{(z-2{,}325)^2}{z^2} = \frac{1}{2}$. Deze gebroken vergelijking kan omgevormd worden tot $z^2 - 9{,}3z + 10{,}81125 = 0$ met oplossingen $z = 1{,}36$ en $z = 7{,}94$.
De eerste oplossing is onmogelijk, aangezien de tegel dan kleiner is dan het muntstuk.

4 Graaf de Buffon werkte echter algemener: hij redeneerde met een vierkante tegel met zijde z en een muntstuk met diameter d. Daarmee berekende hij wat de verhouding $\frac{z}{d}$ moest zijn, opdat beide spelers evenveel kans om te winnen zouden hebben en vond $\frac{z}{d} = 2 + \sqrt{2}$. Ga dit na.

De zijde z en diameter d moeten voldoen aan

$$\frac{(z-d)^2}{z^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z^2 - 4dz + 2d^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{d}\right)^2 - 4\frac{z}{d} + 2 = 0$$

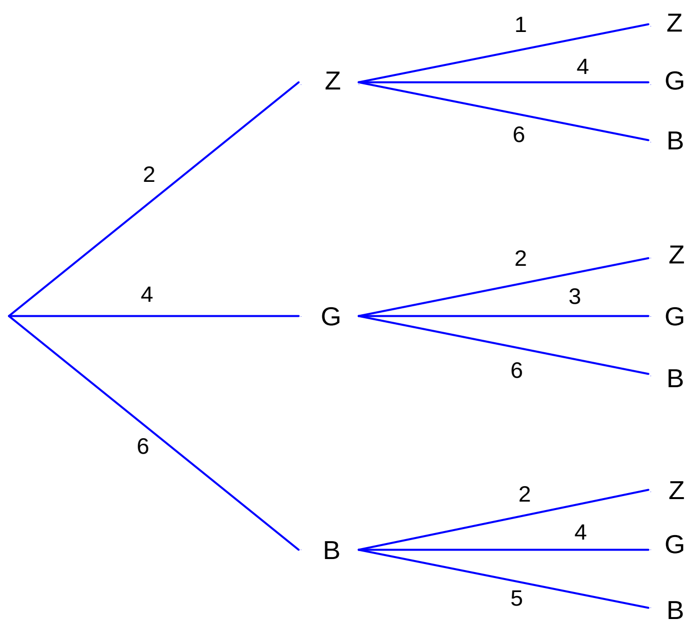
$$\Leftrightarrow \frac{z}{d} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Aangezien z groter moet zijn dan d, is de enige zinvolle oplossing $\frac{z}{d} = 2 + \sqrt{2}$.

Opdracht 57 bladzijde 218

Je bewaart je kousen (2 zwarte, 4 grijze en 6 blauwe) in een lade van je kleerkast. Aangezien je nogal slordig bent, liggen ze doorgaans stuk per stuk door elkaar. ’s Morgens vroeg grabbel je in het donker in de lade, haalt er op goed geluk twee uit en doet ze aan.

1 Stel een vereenvoudigd boomdiagram op dat een overzicht geeft van de mogelijkheden.



2 Wat is de theoretische kans dat je met twee verschillend gekleurde kousen rondloopt?

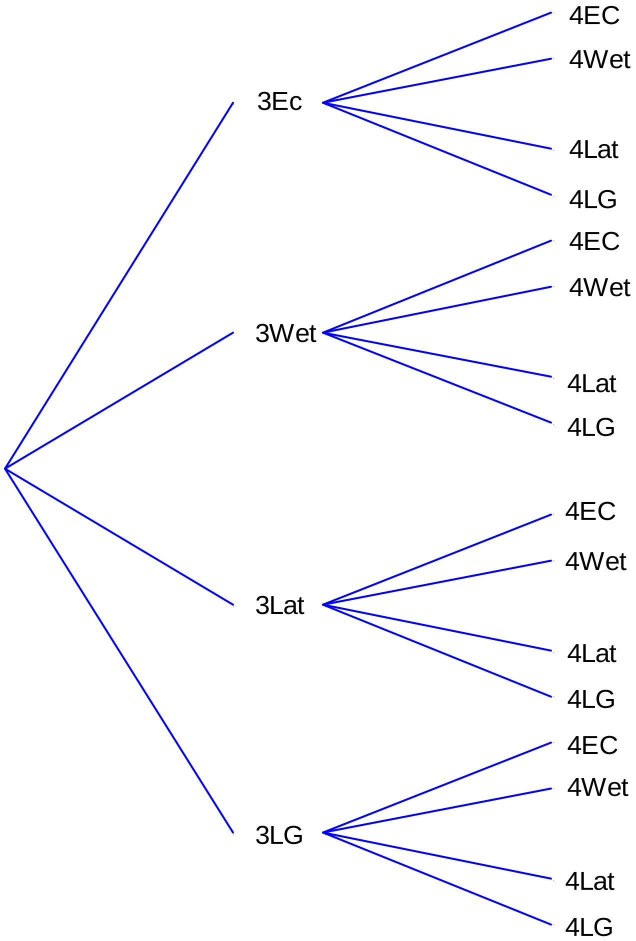
$$P(\text{verschillende kleur}) = \frac{2\cdot4 + 2\cdot6 + 4\cdot2 + 4\cdot6 + 6\cdot2 + 6\cdot4}{12\cdot11} = \frac{2}{3}$$

Deze kans kan iets sneller via de complementregel berekend worden.

Opdracht 58 bladzijde 218

In het kader van een solidariteitsactie organiseert een school een basketbaltornooi voor klassen van de tweede graad. Daarbij speelt een klas van het 3e jaar altijd tegen een klas van het 4e jaar. In die school bestaan de richtingen Economie, Wetenschappen, Latijn en Latijn-Grieks, met telkens 1 klas per richting.

1 Stel de mogelijke matchen voor in een boomdiagram.



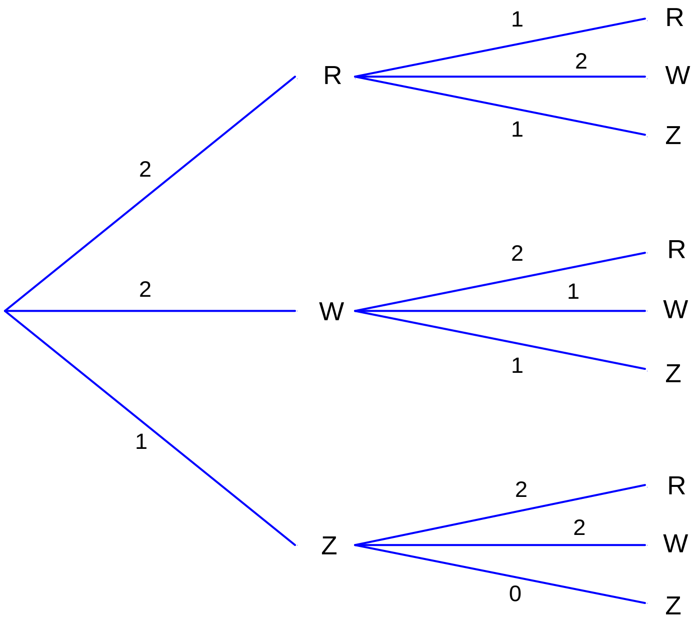
2 Hoeveel matchen moeten er in totaal gespeeld worden, als elke klas van het derde tegen elke klas van het vierde moet spelen?

Er zijn 16 matchen te spelen. Dit aantal kan men verkrijgen door te tellen in het boomdiagram of door de productregel toe te passen.

Opdracht 59 bladzijde 218

In een vaas zitten 5 knikkers: 2 rode, 2 witte en 1 zwarte. Je neemt er blindelings twee uit.

1 Stel een vereenvoudigd boomdiagram op dat een overzicht geeft van alle mogelijkheden.



2 Wat is de theoretische kans op twee rode knikkers?

$$\text{P}(\text{2 rode knikkers}) = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{1}{10}$$

3 Wat is de theoretische kans op een witte en een zwarte knikker?

$$\text{P}(\text{wit en zwart}) = \text{P}(\text{W-Z of Z-W}) = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{20} = \frac{1}{5}$$

Opdracht 60 bladzijde 218

Een cijferslot heeft drie ringen met 10 cijfers per ring.

1 Hoeveel cijfercodes zijn er indien per ring alle cijfers toegestaan zijn?

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

2 Hoeveel cijfercodes zijn er indien de drie cijfers verschillend moeten zijn?

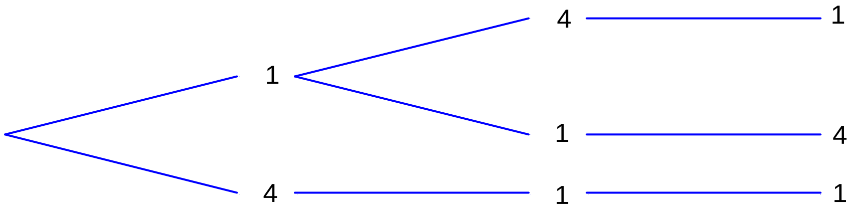
$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

3 Een wiskundeleerkracht weet nog dat de code van zijn cijferslot bestaat uit de cijfers 3, 1 en 4 (uiteraard de eerste drie cijfers van π), maar de volgorde is hij vergeten. Hoeveel mogelijke cijfercodes zijn er met die drie cijfers?

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

4 Emma heeft hetzelfde probleem, maar zij gebruikte de eerste drie cijfers van $\sqrt{2}$: 1, 4 en 1. Hoeveel cijfercodes zijn er nu mogelijk?

Er zijn drie mogelijke posities voor het cijfer 4, dus zijn er ook maar drie mogelijkheden voor het cijferslot.
Dit kan ook gemakkelijk uit een boomschema afgeleid worden.



Opdracht 61 bladzijde 219

Woorden of zinnen die van achteren naar voren gelezen juist hetzelfde woord of dezelfde zin opleveren, worden palindromen genoemd. Anna, negen, mmm, kjojk, meetsysteem, ... zijn palindromen.

1 Hoeveel verschillende palindromen van zes letters zijn er?

Aangezien je in een palindroom van zes letters enkel de drie eerste letters kunt kiezen, zijn er $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 26^3 = 17576$.

2 Hoeveel palindromen zijn er met zes letters waarvan er drie verschillend zijn?

$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 15600$

3 Hoeveel verschillende palindromen van zeven letters zijn er?

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 26^4 = 456976$

4 Hoeveel palindromen zijn er met zeven letters waarvan er vier verschillend zijn?

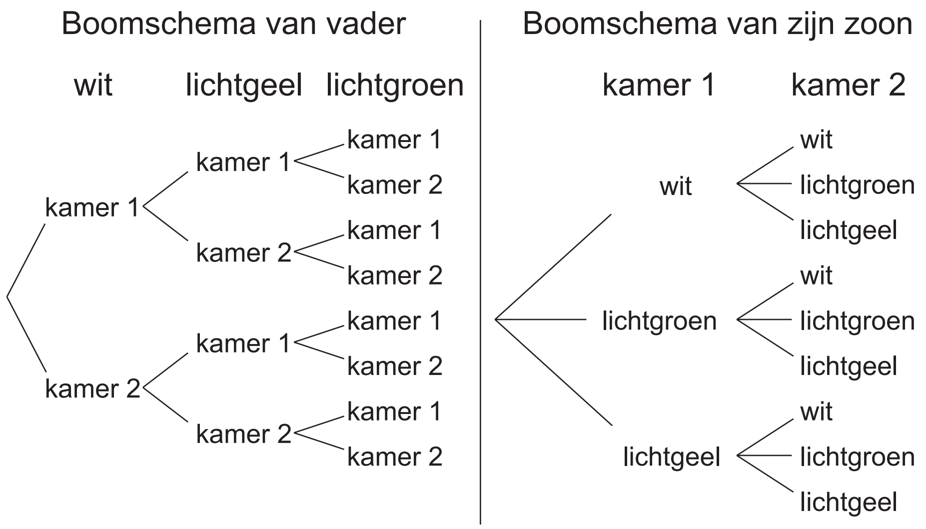
$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 358800$

Op de afbeelding staat een bijzonder palindroom dat al meer dan 20 eeuwen oud is. Op het internet vind je er meer over. Merkwaardig is dat je het zowel van linksboven naar rechtsonder horizontaal als verticaal kunt lezen en ook van rechtsonder naar linksboven.

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Opdracht 62 bladzijde 219

Vader gaat twee kamers herschilderen. Hij heeft drie kleuren verf: wit, lichtgeel en lichtgroen. Hij denkt dat hij dus 8 mogelijkheden heeft voor de keuze van de kleuren, maar zijn zoon beweert dat er 9 mogelijkheden zijn.



Wie van hen heeft het juiste schema gemaakt en welke redeneerfout maakte de ander?

Oplossing

De zoon heeft gelijk. Er zijn maar twee keuzes te maken: de kleur voor de eerste kamer en de kleur voor de tweede kamer. Er kunnen dus maar twee vertakkingen zijn en bij elke vertakking zijn er drie takken, aangezien er telkens drie kleuren gekozen kunnen worden.

Het boomschema van de vader houdt in dat elke kleur aan één kamer toegekend moet worden. Er zijn dan drie keuzes te maken, met telkens twee keuzemogelijkheden. Maar dan zal een van de kamers twee keer geschilderd worden. Dit stemt duidelijk niet overeen met het werkelijke keuzeproces.

Opdracht 63 bladzijde 219

Als men de cijfers 1, 2, 3, 4, 5 in willekeurige volgorde achter elkaar schrijft tot een getal van vijf cijfers, wat is dan de kans dat het getal deelbaar is door 6?

A $16,66...\%$ B $33,33...\%$ C 40% D 50% E 60%

Oplossing

Een getal is deelbaar door 6 als het deelbaar is door 2 en door 3. Een getal is deelbaar door 2 als het laatste cijfer even is; een getal is deelbaar door 3 als de som van de cijfers deelbaar is door 3.

Aan die laatste voorwaarde is altijd voldaan voor getallen die bestaan uit de cijfers 1, 2, 3, 4 en 5 (som van de cijfers: 15). Het volstaat dat we het aantal getallen vinden dat even is.

In totaal zijn er $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ getallen. Vormen we ze ‘van achter naar voor’, dan is het aantal even getallen gelijk aan $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ (voor de eenheden zijn er immers maar twee mogelijkheden, nl. 2 of 4 en voor de tientallen zijn er dan vier mogelijkheden, etc.

Een andere redenering is de volgende: als cijfer van de eenheden zijn er vijf mogelijkheden. Van de in totaal 120 getallen komt elk cijfer voor de eenheden even vaak voor; er is geen reden waarom één cijfer vaker zou optreden dan een ander. Eén vijfde van alle getallen eindigt dus op een 1, één vijfde op een 2, etc. Het aantal even getallen is dus twee vijfden van 120, of 48.

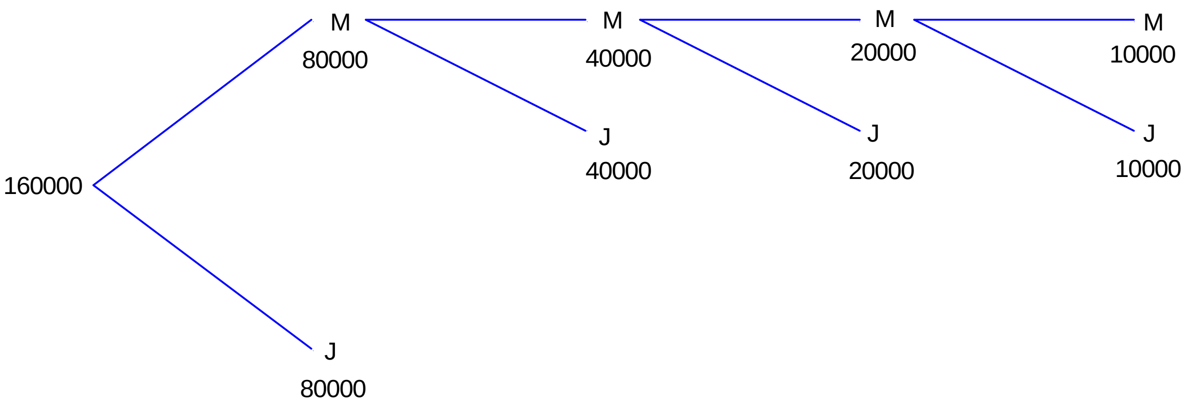
De gevraagde kans is $\frac{48}{120} = \frac{2}{5} = 40\,\%$. (Uiteraard vinden we de twee vijfden uit de tweede redenering als kans.)

Opdracht 64 bladzijde 220

Er gaat een verhaal over een monarch die de verhouding van het aantal mannen en vrouwen in zijn rijk wou veranderen, opdat elke man een grote harem zou kunnen hebben. Hij wilde dat echter op een ‘menswaardige’ manier, dus zonder bloedvergieten, realiseren en vaardigde daarom een wet uit, waarin vrouwen verplicht werden kinderen te krijgen zo lang het meisjes waren; na de eerste jongen moesten ze stoppen.
We nemen aan dat de kans op een jongen even groot is als de kans op een meisje, dus 50 %.
Voor de eenvoud van de berekeningen nemen we in de vier eerste vraagjes hieronder even aan dat, indien een vrouw na vier kinderen nog altijd geen jongen heeft gebaard, ze toch stopt; in vraag 5 hieronder wordt die beperking opgeheven.

1 Stel een boomdiagram op voor het aantal mogelijkheden. Haal hieruit het aantal gezinssamenstellingen.

2 Als er 160000 gezinnen zijn in dat land, hoe vaak komt elke gezinssamenstelling dan voor? Vermeld deze aantallen bij het boomdiagram.



Er zijn 5 gezinssamenstellingen mogelijk: J, M-J, M-M-J, M-M-M-J en M-M-M-M.
De aantallen zijn aangegeven in het boomschema.

3 Hoeveel jongens en meisjes zijn er dan geboren?

In totaal zijn er $80000+40000+20000+10000=150000$ jongens geboren (per gezin is er maar één jongen).
Het aantal meisjes is $40000\cdot 1+20000\cdot 2+10000\cdot 3+10000\cdot 4=150000$ (per gezin kunnen er immers meerdere meisjes zijn).

4 Is de maatregel van die monarch zinvol?

Die maatregel is duidelijk niet zinvol.

5 Is de maatregel zinvol als een gezin meer dan vier kinderen kan tellen?

Ook bij een andere regeling zal het aantal meisjes even groot blijven als het aantal jongens, aangezien bij elke geboorte de kans op een jongen of een meisje even groot blijft.

Opdracht 65 bladzijde 220

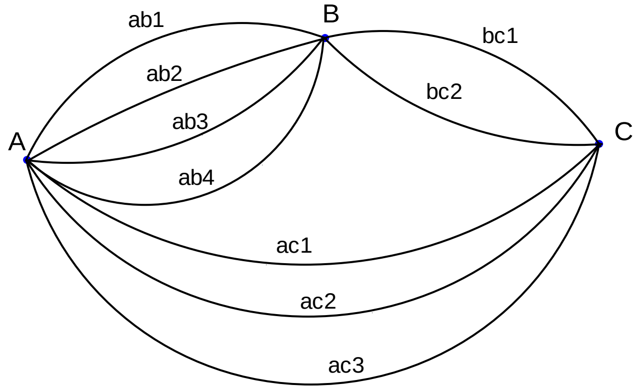
Er zijn vier verschillende wegen van stad A naar stad B, twee verschillende wegen van B naar C en drie verschillende wegen die rechtstreeks van A naar C gaan, zonder via B te passeren.

1 Op hoeveel manieren kun je van A naar C gaan?

2 Op hoeveel manieren kun je van A naar C en terug naar A gaan als je minstens één keer door B moet passeren?

Oplossing

Met een schematische voorstelling als hulpmiddel kan de productregel toegepast worden.



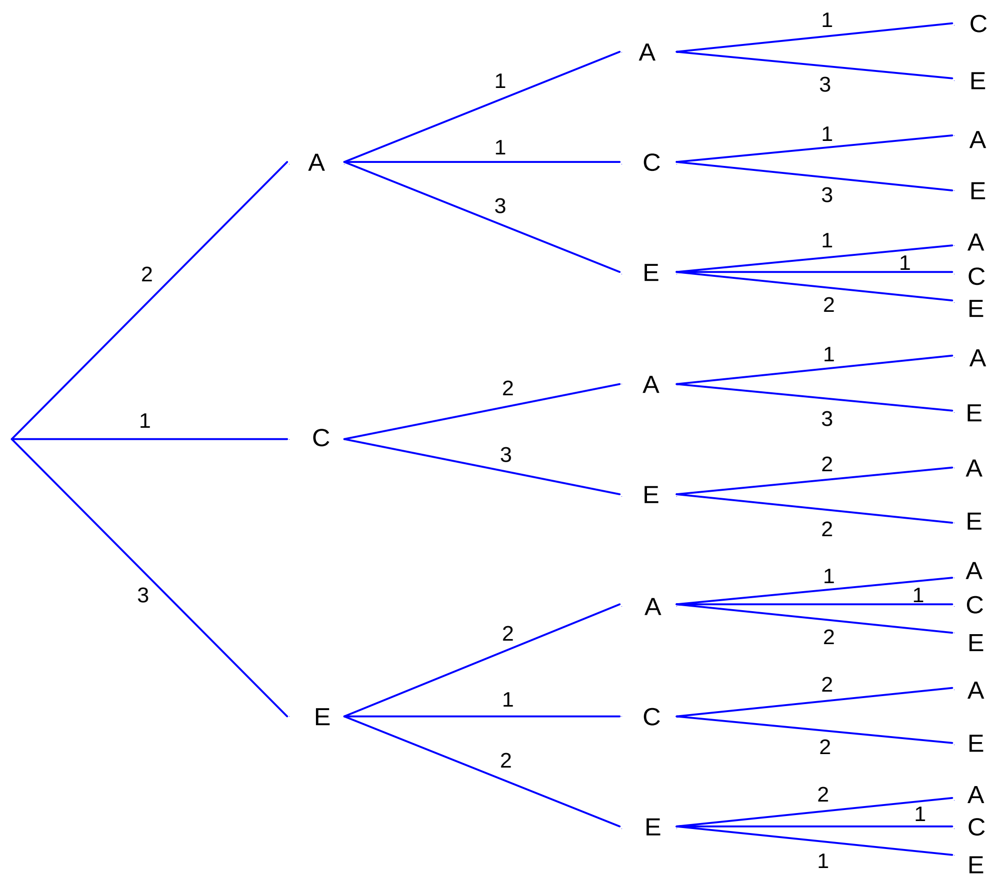
1 Van A naar C via B zijn er $4\cdot 2=8$ mogelijkheden. Bovendien zijn er 3 rechtstreekse verbindingen van A naar C.
In totaal zijn er dus 11 mogelijkheden ($A\to B\to C$ of $A\to C$).

2 De mogelijkheden zijn: $A\to B\to C\to A$ of $A\to B\to C\to B\to A$ of $A\to C\to B\to A$.
Het aantal manieren waarop deze trajecten gereden kunnen worden is:
$4\cdot 2\cdot 3+4\cdot 2\cdot 2\cdot 4+3\cdot 2\cdot 4=112.$

Opdracht 66 bladzijde 220

Tijdens een spelletje Scrabble zijn de volgende letterblokjes nog niet genomen:
A, A, C, E, E, E. Matthias mag drie letters nemen. Hij neemt ze één voor één en plaatst ze in die volgorde voor hem.

1 Stel een vereenvoudigd boomdiagram op voor deze drie trekkingen.



2 Wat is de kans dat hij drie E's zal nemen?

Maken we de drie E's verschillend, dan wordt duidelijk dat er $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ mogelijkheden zijn om drie E's te trekken. In totaal zijn er $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ mogelijke trekkingen.

Bijgevolg: $P(3\ \text{E's}) = \dfrac{6}{120} = \dfrac{1}{20}$

3 Wat is de kans op een A, een C en een E (in een willekeurige volgorde)?

Denken we alle blokjes verschillend en houden we rekening met de volgorde, dan vinden we voor het aantal manieren om een A, een C en een E te trekken:

ACE of AEC of CAE of CEA of EAC of ECA:

$$2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2$$
$$= 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$$
$$= 36 \text{ manieren}$$

De gevraagde kans is $P(\text{A, C en E}) = \dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10}$.

4 Hij zou het liefst twee A's en een E nemen. Wat is de kans dat hij die lettercombinatie trekt?

$$P(A,\ A \text{ en } E) = P(AAE \text{ of } AEA \text{ of } EAA) = \frac{2\cdot1\cdot3+2\cdot3\cdot1+3\cdot2\cdot1}{120} = \frac{3}{20}.$$

Opdracht 67 bladzijde 220

Vijf jongens en vier meisjes gaan naar de film. Ze nemen plaats op een rij met negen zitplaatsen. Op hoeveel manieren kunnen ze gaan zitten als er tussen elke twee jongens een meisje moet zitten?

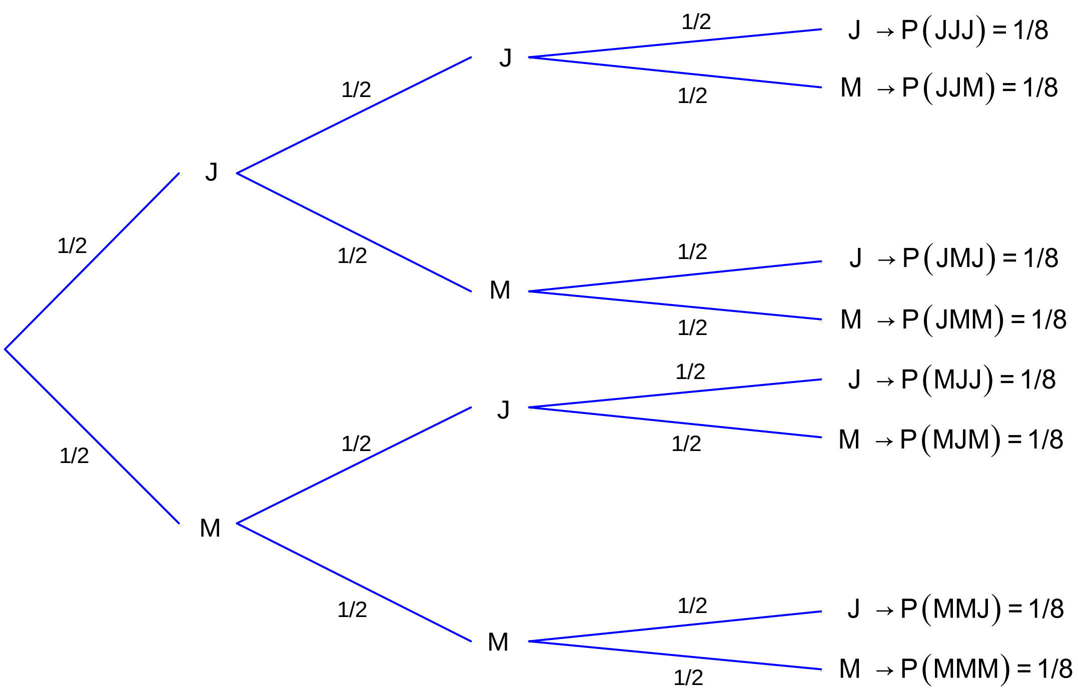
Oplossing

Het aantal mogelijkheden is $\underset{\substack{\downarrow\\ J}}{5}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ M}}{4}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ J}}{4}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ M}}{3}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ J}}{3}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ M}}{2}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ J}}{2}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ M}}{1}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ J}}{1} = 2880$.

Opdracht 68 bladzijde 221

Veronderstel dat de kans op de geboorte van een jongen en een meisje even groot is. Beschouw nu gezinnen met drie kinderen.

1 Stel een kansboom op met alle gezinssamenstellingen en de bijbehorende kansen.



2 Wat is de kans dat zo'n gezin twee meisjes heeft en één jongen?

$$P(M,\ M \text{ en } J) = P(MMJ \text{ of } MJM \text{ of } JMM) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

3 Vergelijk deze theoretische kans met de experimentele kans die je in opdracht 12 vond.

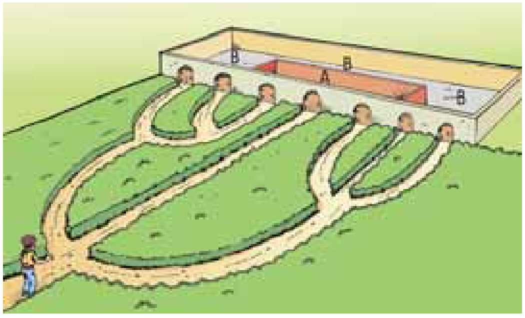
–

Opdracht 69 bladzijde 221 : De prinses en de tijger

Heel lang geleden was er een koning, die een beeldschone dochter had. Hij wou haar uithuwelijken aan een prins van een nabijgelegen koninkrijk. Enige tijd vóór de geplande huwelijksdatum ontmoette de prinses echter een knappe, intelligente, romantische jongeman, Reynaldo, die helaas maar een boerenzoon was.

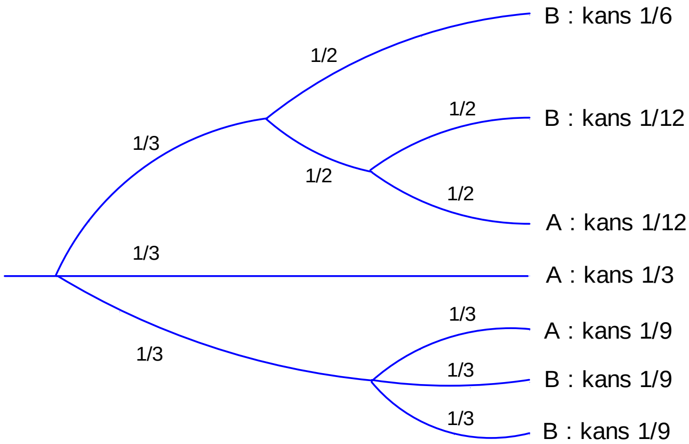
Toen de koning hun geheime liefdesrelatie ontdekte, liet hij Reynaldo gevangen zetten en gaf hij het bevel hem in een kooi vol tijgers te gooien. De prinses kon haar vader huilend overhalen tot een compromis: Reynaldo zal een hem onbekend netwerk van paden ingaan; bij elke splitsing zal hij lukraak moeten kiezen welk pad hij volgt. Uiteindelijk zal hij in één van twee kamers uitkomen: in de ene zullen tijgers zitten, in de andere de prinses. Komt hij in de laatstgenoemde kamer uit, dan mag hij met de prinses trouwen.

De koning tekende het netwerk (zie hiernaast) en toonde het aan de prinses; vervolgens liet hij haar kiezen in welke kamer ze plaats zou nemen. Merk op dat Reynaldo de kaart niet te zien kreeg en dus alleen maar kon gokken welk pad te volgen bij elke splitsing.



1 Wat zijn de kansen dat Reynaldo in kamer A en in kamer B aanbelandt ?

De verleiding bij de leerlingen blijft groot om te redeneren: er zijn 7 deurtjes, waarvan er 4 naar kamer B gaan, dus is de kans om in kamer B uit te komen $\frac{4}{7}$. Noteren we echter de kansen bij elk pad, dan blijkt dat deze redenering niet klopt. Niet elke deur is even waarschijnlijk, zodat de formule van Laplace hier niet toegepast mag worden.



$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{19}{36}$. Bijgevolg is $P(B)=\frac{17}{36}$.

2 In welke kamer zou jij de prinses aanraden te gaan zitten ?

De prinses gaat beter in kamer A zitten, aangezien de kans iets groter is dat het toeval Reynaldo naar die kamer brengt.

Opdracht 70 bladzijde 222

Uit een onderzoek bij 12- tot 18-jarige Vlaamse jongeren bleek 34,3 % van de ondervraagden ooit slachtoffer te zijn geweest van cyberpesten. Neem lukraak drie personen uit die leeftijdscategorie.

1 Bereken de kans dat geen van de drie ooit slachtoffer was van cyberpesten.

In een kansboom kan afgelezen worden:

$$P(\text{geen gepesten}) = 0,657 \cdot 0,657 \cdot 0,657 = 0,2836 = 28,36\,\%$$

2 Bereken de kans dat precies één persoon daar slachtoffer van was.

In een kansboom zijn er drie takken die overeenkomen met één gepeste.

Elke tak heeft een kans gelijk aan $0,343 \cdot 0,657 \cdot 0,657$, zodat we uiteindelijk vinden:

$$P(1\text{ gepeste}) = 3 \cdot (0,343 \cdot 0,657 \cdot 0,657) = 0,4442 = 44,42\,\%.$$

Opdracht 71 bladzijde 222

Je neemt willekeurig een kaart uit een goed geschud pak kaarten en stopt ze daarna terug.

1 Wat is de kans dat je na 100 keer geen enkele keer hartenaas trok?

$$P(\text{geen enkele hartenaas}) = \left(\frac{51}{52}\right)^{100} = 0,1434$$

2 Wat is de kans dat je na 20 keer minstens één keer een aas trok?

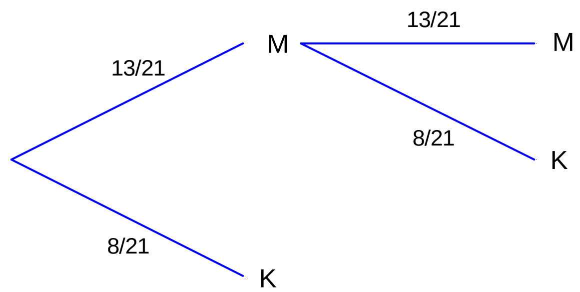
$$P(\text{minstens één aas}) = 1 - P(\text{geen aas}) = 1 - \left(\frac{48}{52}\right)^{20} = 0,7983$$

Opdracht 72 bladzijde 222

Voor een spelletje moet je een letter trekken uit een zakje. Er zitten 13 medeklinkers en 8 klinkers in (letters kunnen meerdere keren voorkomen). De spelregel is zo dat je twee keer mag proberen: indien je bij je eerste trekking niet tevreden bent met de letter die je nam, mag je hem opnieuw in het zakje doen en na schudden een tweede keer trekken.

Je wil een klinker trekken. Wat is de kans dat dit niet lukt in de twee voorziene pogingen?

Oplossing

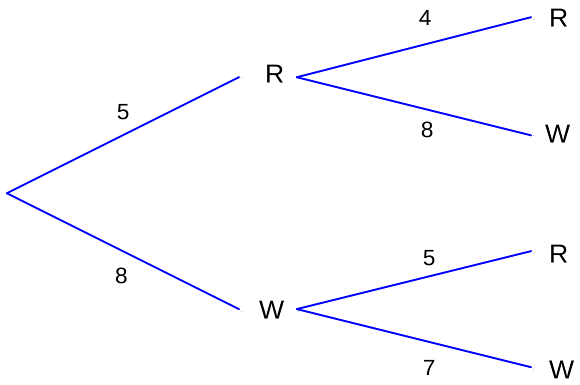


$$P(\text{geen klinker}) = P(MM) = \frac{13}{21} \cdot \frac{13}{21} = \frac{169}{441}$$

Opdracht 73 bladzijde 222

In een vaas zitten 5 rode en 8 witte ballen. Je trekt achtereenvolgens 2 ballen uit die vaas.

1 Stel een vereenvoudigd boomdiagram op van deze situatie.



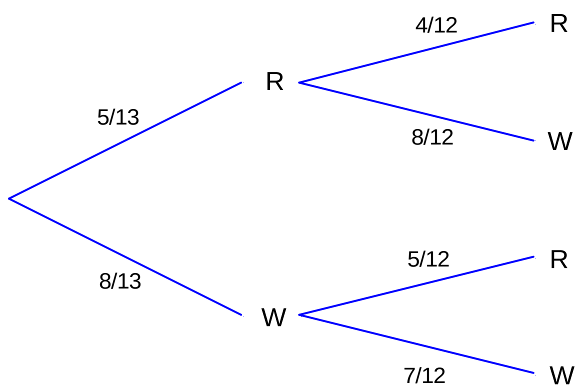
2 Bereken de theoretische kans om als eerste bal een rode bal te nemen.

$$P(\text{eerste bal is rood}) = \frac{5}{13}$$

3 Bereken de theoretische kans om als tweede bal een rode bal te nemen, als je weet dat de eerste al rood was.

$$P(\text{tweede bal is rood als eerste bal rood is}) = \frac{4}{12}$$

4 Schrijf nu naast alle takken van het vereenvoudigd boomdiagram de kans dat die tak zich voor zal doen.



$$\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}=\frac{5}{39}$$

$$\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}=\frac{10}{39}$$

$$\frac{8}{13}\cdot\frac{5}{12}=\frac{10}{39}$$

$$\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}=\frac{14}{39}$$

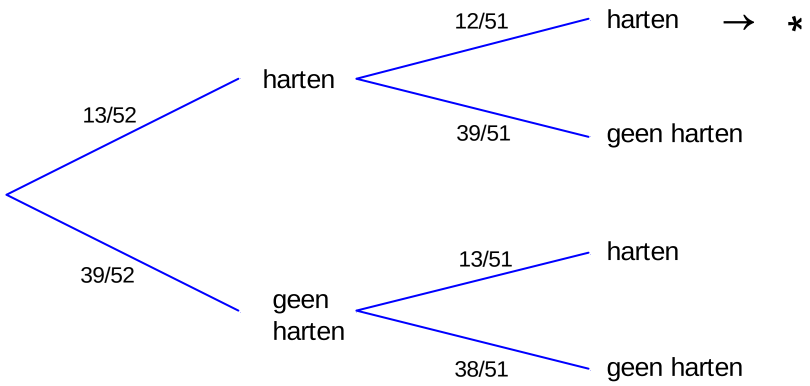
Opdracht 74 bladzijde 222

Neem een goed geschud pak kaarten. Je trekt er één kaart uit, stopt ze terug, schudt goed en trekt een tweede kaart.

We spreken af dat een boer 11 punten voorstelt, een dame 12 en een heer 13.
Van de overige kaarten komen de punten overeen met hun waarde.

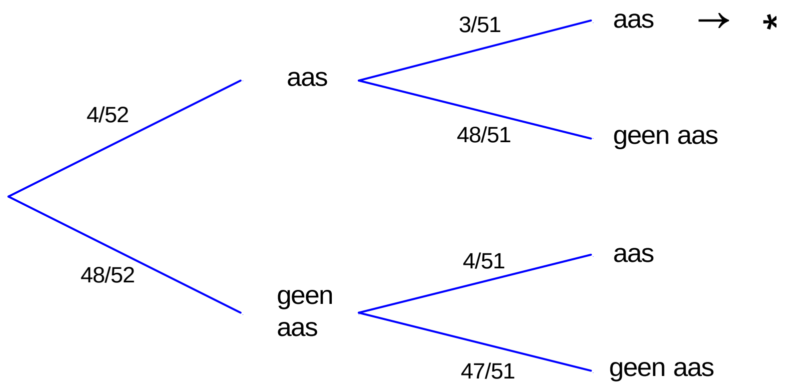
Teken voor elke vraag een passende kansboom, best met zo weinig mogelijk takken, en bereken de gevraagde kans.

1 Wat is de kans om twee hartenkaarten te trekken?



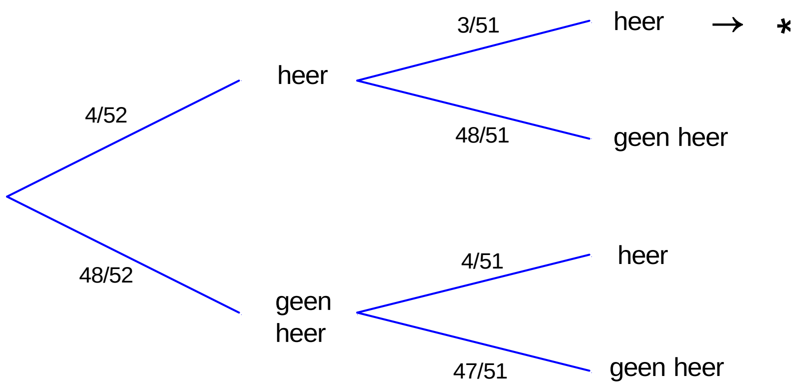
$$P(2 \text{ hartenkaarten}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17}$$

2 Wat is de kans op twee azen?



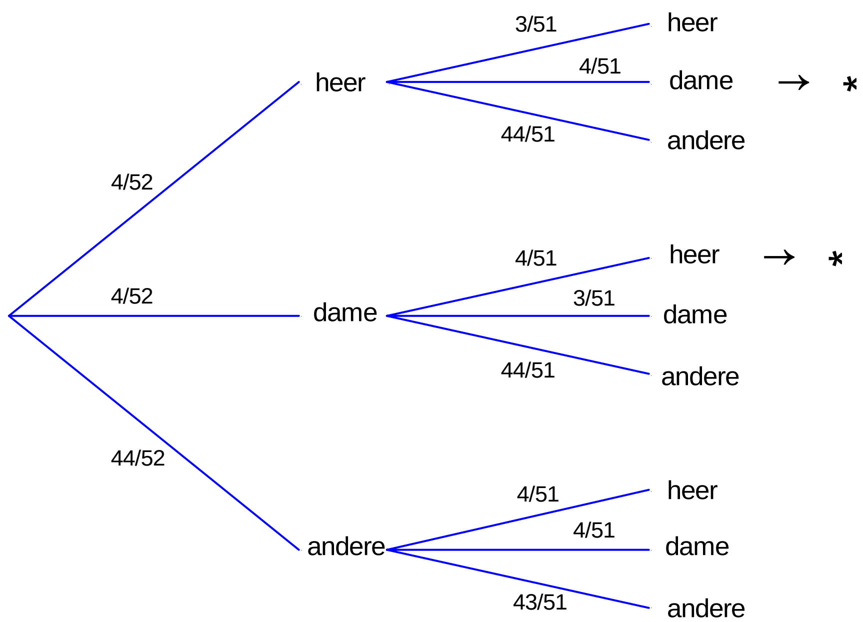
$$P(2 \text{ azen}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

3 Wat is de kans dat je met twee kaarten 26 punten zal verzamelen?



$$P(26 \text{ punten}) = P(2 \text{ heren}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

4 Wat is de kans dat je 25 punten verzamelt?



$$P(25 \text{ punten}) = P(\text{heer-dame of dame-heer})$$
$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} + \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51}$$
$$= \frac{8}{663}$$

Opdracht 75 bladzijde 223

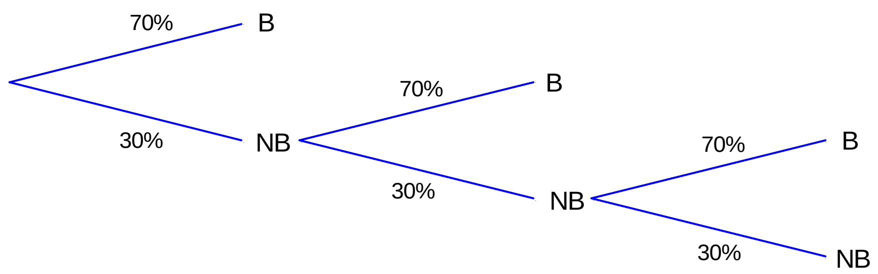
Kleine Toon heeft de mazelen. De kans dat een ander kindje besmet raakt door contact met Toon is 70 %. Er komen drie klasgenootjes op bezoek.

1 Wat is de kans dat het derde kindje dat in contact komt met Toon het eerste zal zijn dat besmet is?

2 Wat is de kans dat er precies één klasgenootje besmet zal worden?

3 Wat is de kans dat er minstens één kind besmet zal worden?

Oplossing



1 $P(\text{3e kind is eerste besmette kind}) = 0,30 \cdot 0,30 \cdot 0,70 = 0,063 = 6,3\%$

2 $P(\text{1 kind besmet}) = P(\text{B - NB - NB of NB - B - NB of NB - NB - B})$

$= 3 \cdot 0,70 \cdot 0,30 \cdot 0,30$

$= 0,189 = 18,9\%$

3 $P(\text{minstens 1 kind besmet}) = 1 - P(\text{geen kind besmet})$

$= 1 - 0,30^3$

$= 0,973 = 97,3\%$

Opdracht 76 bladzijde 223

In een dubieuze nachtwinkel hebben 30 van de 120 groenteconserven de houdbaarheidsdatum overschreden. Een inspecteur komt langs en bekijkt de datum op vier lukraak gekozen blikken.

1 Wat is de kans dat hij enkel goede blikken heeft bekeken en dus verkeerdelijk denkt dat alles in orde is?

$$P\left(\text{4 goede blikken}\right) = \frac{90}{120} \cdot \frac{89}{119} \cdot \frac{88}{118} \cdot \frac{87}{117} = \frac{28391}{91273} = 0,3111$$

2 Wat is de kans dat hij minstens één blik dat vervallen is, detecteert?

$P(\text{minstens 1 blik vervallen}) = 1 - P(\text{4 goede blikken}) = 0,6889$

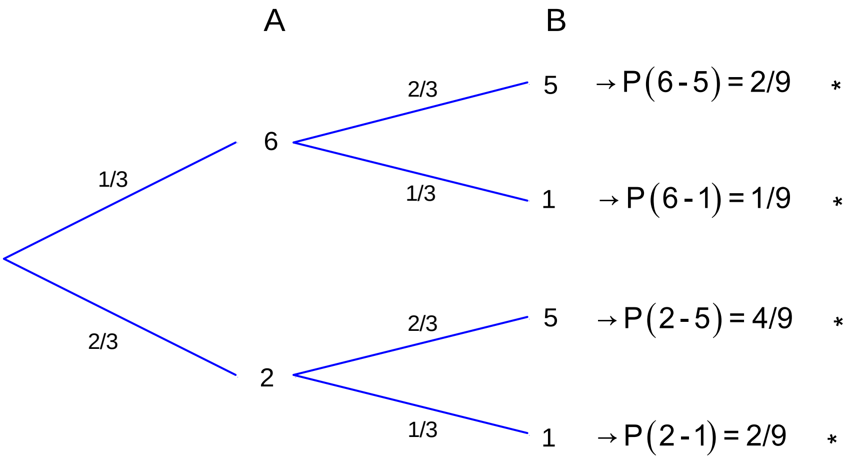
3 Wat is de kans dat hij precies één blik aantreft dat vervallen is?

$$P(\text{precies 1 blik vervallen})$$
$$= \frac{30}{120}\cdot\frac{90}{119}\cdot\frac{89}{118}\cdot\frac{88}{117}+\frac{90}{120}\cdot\frac{30}{119}\cdot\frac{89}{118}\cdot\frac{88}{117}+\frac{90}{120}\cdot\frac{89}{119}\cdot\frac{30}{118}\cdot\frac{88}{117}+\frac{90}{120}\cdot\frac{89}{119}\cdot\frac{88}{118}\cdot\frac{30}{117}$$
$$= 0,4290$$

Opdracht 77 bladzijde 223

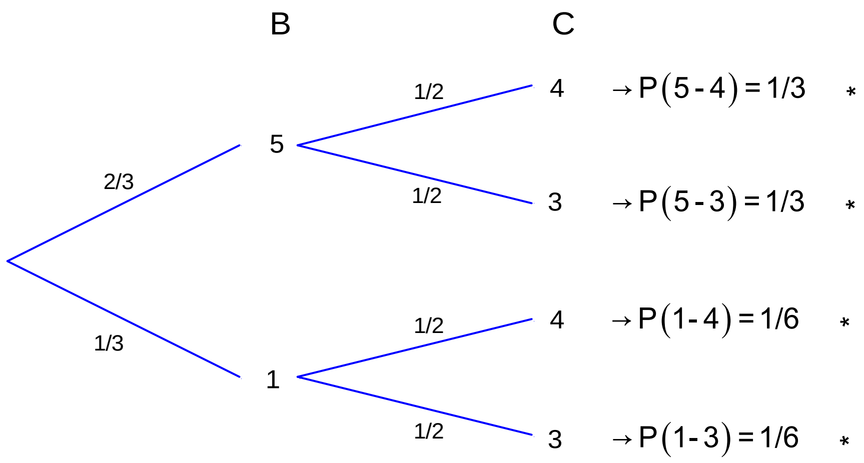
De volgende drie merkwaardige dobbelstenen hebben niet 1, 2, 3, 4, 5 en 6 ogen, maar:
– *dobbelsteen A*: 6, 6, 2, 2, 2 en 2
– *dobbelsteen B*: 5, 5, 5, 5, 1 en 1
– *dobbelsteen C*: 4, 4, 4, 3, 3 en 3

1 Je gooit de dobbelstenen A en B. Toon dan aan dat de kans dat A het hoogste aantal ogen gooit gelijk is aan $\frac{5}{9}$. A zal dus meestal winnen, aangezien de kans groter is dan $\frac{1}{2}$.



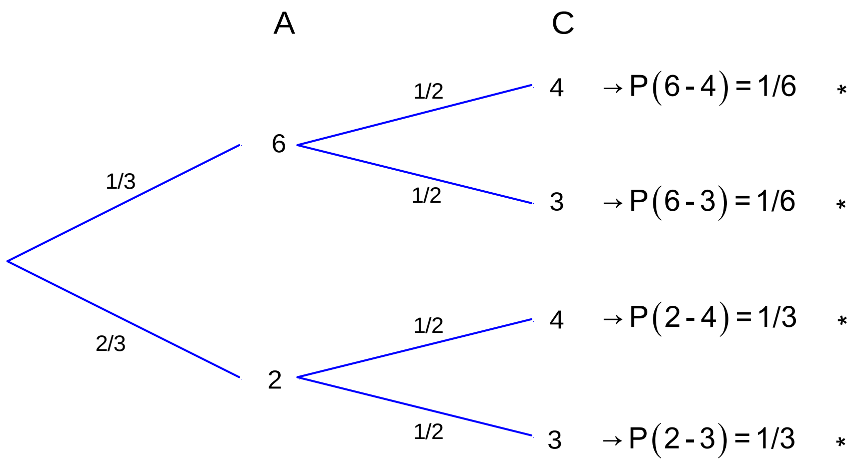
$$P(\text{A wint van B}) = P(6\text{-}5 \text{ of } 6\text{-}1 \text{ of } 2\text{-}1)$$
$$= \frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

2 Toon op dezelfde manier aan dat $P(\text{B wint van C}) = \frac{2}{3}$.



$$P(\text{B wint van C}) = P(5\text{-}4 \text{ of } 5\text{-}3)$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

3 *"A wint meestal van B en B wint meestal van C. Dus, als A tegen C speelt, zal A de grootste kans hebben om te winnen".*
Controleer dit vermoeden door de kans $P(\text{A wint van C})$ te berekenen.



$$P(\text{A wint van C}) = P(6\text{-}4 \text{ of } 6\text{-}3)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Het vermoeden (van de transitiviteit van de relatie '… wint meestal van …') blijkt niet correct: de kans dat A wint van C is kleiner dan 1/2.

Dit fenomeen is bekend als de *paradox van Condorcet* en doet zich bijv. ook voor bij verkiezingen, waarbij kandidaat A het misschien wel zou halen van B en B van C, maar A daarom nog niet van C.

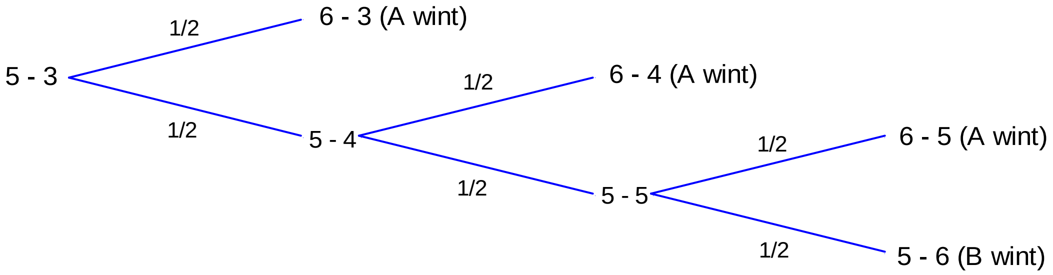
Opdracht 78 bladzijde 224 : De rechtvaardige verdeling

Chevalier de Méré (1607-1684), een vermaard gokker, klopte ooit bij Blaise Pascal (1623-1662) aan met het volgende probleem: *"Twee personen spelen een eerlijk spel, dat wil zeggen, ze hebben beide een kans van 50 % om een spelletje te winnen. De eerste die het spel 6 keer wint, wordt als winnaar beschouwd en kan de inzet van het spel incasseren. Het spel wordt echter onderbroken op het ogenblik dat speler A vijf rondjes heeft gewonnen en speler B drie. Hoe moet de inzet nu verdeeld worden?"*

Dergelijke situaties gaven aanleiding tot heel wat ruzies. Sommigen vonden dat de inzet verdeeld moest worden volgens het *aantal gewonnen rondjes*, d.w.z. 5/8 voor A en 3/8 voor B. Daarmee gingen spelers die reeds vijf rondjes gewonnen hadden niet akkoord, want ze vonden dat zij veel dichter bij een overwinning stonden dan hun tegenspeler en dus meer verdienden. Anderen vonden dat je moest kijken naar het *aantal winnende rondjes dat je nog tekort had*: A moet er maar eentje meer winnen en B nog drie, dus moest de inzet verdeeld worden in de verhouding 3 tegen 1 (3/4 voor A, 1/4 voor B).

Pascal stelde, samen met Pierre de Fermat (1607-1665), dat het hier een kansprobleem betrof en dat de inzet verdeeld moest worden in functie van de *kans op winnen* van beide personen. Dat bleek de meest rechtvaardige verdeling.

1 A heeft al 5 rondjes gewonnen, B al 3. Stel alle mogelijke spelverlopen vanaf deze spelpositie grafisch voor in een kansboom; schrijf bij elk eindpunt of A dan wel B wint.



2 Wat is de kans dat A zal winnen als A reeds 5 rondjes gewonnen heeft en B slechts 3? Wat is de kans dat B dan alsnog zal winnen?

$$P(\text{A wint}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{8}\text{; bijgevolg geldt: } P(\text{B wint}) = \frac{1}{8}$$

3 Stel dat ze elk 10 euro inzetten, hoe moet de inzet nu verdeeld worden?

De totale inzet van € 20 wordt in 8 gedeeld en A krijgt daar 7 delen van: $\frac{20}{8}\cdot 7 = 17{,}5.$

De netto-winst van A is € 7,5.

B krijgt maar € 2,5 terug en heeft dus een netto-verlies van € 7,5.

Opdracht 79 bladzijde 224

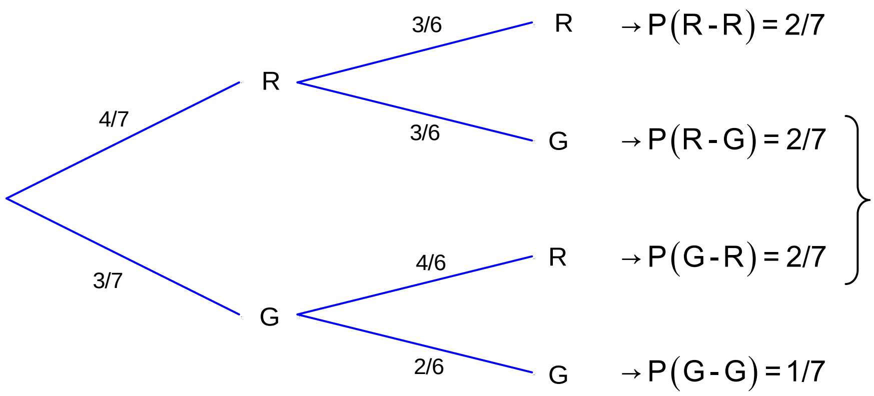
In de snoeptrommel van oma zitten 4 rode en 3 gele snoepjes. Kleine broer neemt er stiekem 2 uit. Grote broer ontdekt dit te laat: beide snoepjes zijn al verorberd. In de hoop zijn broertje in te dekken, gaat hij naar huis, neemt daar blindelings twee snoepjes uit een pot met 5 rode en 7 gele snoepjes en stopt die in de snoeptrommel van oma.

Wat is de kans dat oma opnieuw 4 rode en 3 gele snoepjes aantreft?

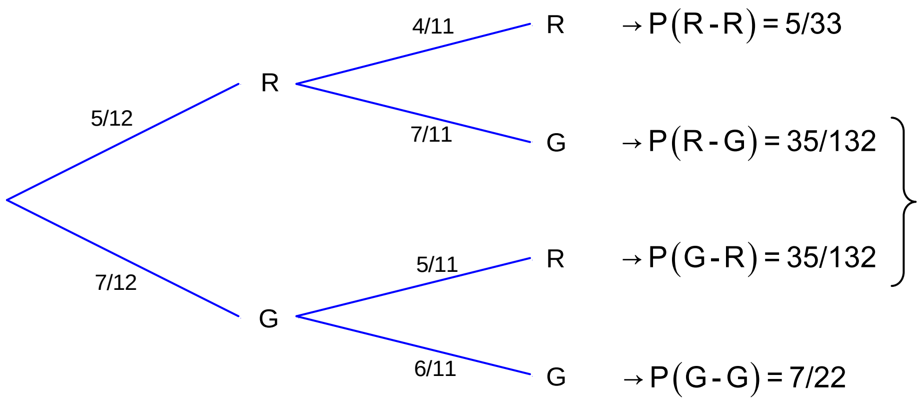
Oplossing

We stellen beide trekkingen voor in twee kansbomen.

Kleine broer



Grote broer



De afkorting ‘kb R&G’ hieronder staat voor ‘kleine broer neemt een rood en een geel snoepje’, waarbij ‘rood en geel’ betekent: ‘rood-geel of geel-rood’.

$$P(\text{oma treft opnieuw 4 rode en 2 gele snoepjes aan})$$

$$= P\big((\text{kb R\&R en gb R\&R}) \text{ of } (\text{kb R\&G en gb R\&G}) \text{ of } (\text{kb G\&G en gb G\&G})\big)$$

$$= \frac{2}{7}\cdot\frac{5}{33} + \frac{4}{7}\cdot\frac{70}{132} + \frac{1}{7}\cdot\frac{7}{22}$$

$$= \frac{181}{462}$$

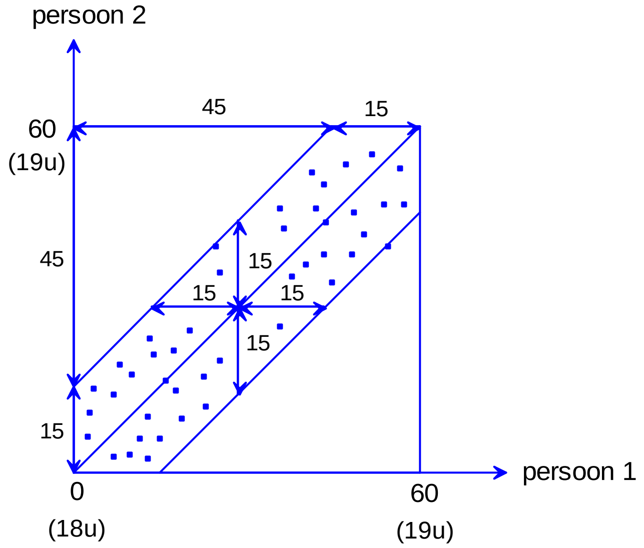
Opdracht 80 bladzijde 224

Twee verliefden proberen elkaar dagelijks te ontmoeten voor een innige omhelzing. Beiden komen lukraak aan tussen 18:00 en 19:00 uur op een afgesproken plaats. Afgesproken is ook om hoogstens 15 minuten te wachten op de ander. Hoe groot is de kans op een omhelzing?

A $\frac{3}{8}$ B $\frac{7}{16}$ C $\frac{1}{2}$ D $\frac{9}{16}$ E $\frac{5}{8}$

Oplossing

We kunnen het uur van aankomst van beide geliefden voorstellen door een punt in een vierkant met zijde 1 uur.



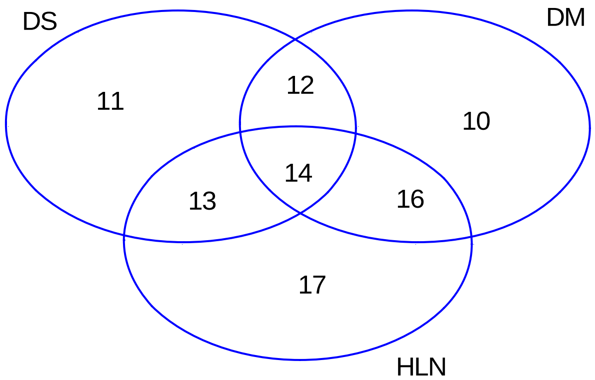
Stel dat persoon 1 om 18u37m aankomt. Dit komt overeen met de x-coördinaat 37.
Dan zijn alle punten met x-coördinaat 37 en y-coördinaat tussen $37-15$ en $37+15$ 'gunstig'.
Een zelfde redenering kan gevoerd worden voor elk aankomstuur van persoon 2.
De oppervlakte van een 'niet-gunstige driehoek' is $\frac{45\cdot 45}{2}=\frac{2025}{2}$. De oppervlakte van de 'gunstige strook' is bijgevolg $\left(60\cdot 60-2\cdot\frac{2025}{2}\right)=1575$ De kans op deze strook is $\frac{1575}{60\cdot 60}=\frac{7}{16}$. Dit is tevens de kans op een ontmoeting.

Opdracht 81 bladzijde 225

Uit een enquête bij 100 krantenadverteerders blijkt dat er
- 50 adverteren in De Standaard (DS)
- 52 adverteren in De Morgen (DM)
- 60 adverteren in Het Laatste Nieuws (HLN)
- 27 adverteren zowel in DS als in HLN
- 26 adverteren zowel in DS als in DM
- 30 adverteren zowel in HLN als in DM
- 14 adverteren in elk van deze kranten.

Hoeveel onder hen plaatsen hun aankondigingen uitsluitend in andere (dan de vermelde) kranten?

Oplossing



Uit de voorstelling hierboven blijkt dat er maar 93 adverteerders in de vermelde kranten adverteren. Er zijn er dus 7 die met andere kranten werken.

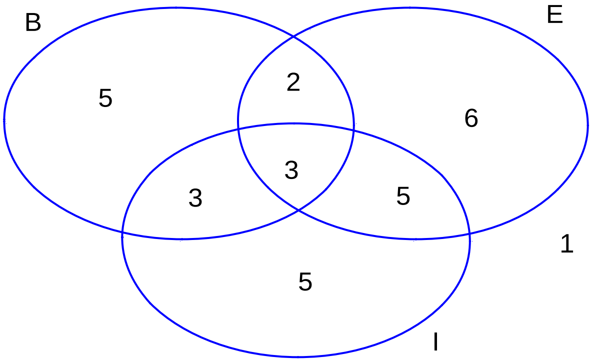
Opdracht 82 bladzijde 225

De 30 bedienden van een bedrijf krijgen de kans om zich bij te scholen in boekhouden, Engels of informatica. De bedrijfsleider doet navraag over de reactie van zijn personeel op het aanbod en krijgt het volgende te horen:
- 5 bedienden volgen enkel de cursus boekhouden;
- 5 volgen enkel informatica;
- 6 volgen zowel boekhouden als informatica;
- 14 volgen geen Engels en één van deze 14 volgt zelfs geen enkele bijscholing;
- 5 volgen Engels en boekhouden;
- 8 volgen Engels en informatica.

1 Hoeveel bedienden volgen alleen Engels?

2 Hoeveel bedienden volgen de drie cursussen?

Oplossing



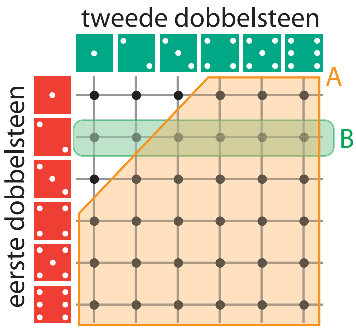
1 Aflezen: 6 personen volgen enkel Engels.

2 3 personen volgen alle cursussen.

Opdracht 83 bladzijde 225

Beschouw de verzameling van de 36 mogelijke uitkomsten bij het gooien van twee dobbelstenen.
Elke stip hoort bij één combinatie van de eerste en de tweede dobbelsteen.
Beschouw de gebeurtenissen:

– A: 'de som van de ogen is groter dan 4';
– B: 'de eerste dobbelsteen geeft 2 aan'.



1 Omschrijf de gebeurtenis $A \cup B$ in woorden en bereken de kans.

'De som van de ogen is groter dan 4 *of* de eerste dobbelsteen geeft 2 aan.'

$P(A \cup B) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$.

Via de rekenregels: $P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#U} = \frac{\#A + \#B - \#(A \cap B)}{\#U} = \frac{30+6-4}{36} = \frac{8}{9}$.

2 Omschrijf de gebeurtenis $A \cap B$ in woorden en bereken de kans.

'De som van de ogen is groter dan 4 *en* de eerste dobbelsteen geeft 2 aan.'

$P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

3 Omschrijf de gebeurtenis $B \setminus A$ in woorden en bereken de kans.

'De eerste dobbelsteen geeft 2 aan, maar de som van de ogen is niet groter dan 4'.

$P(B \setminus A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ (met formules: $\frac{\#(B \setminus A)}{\#U} = \frac{\#B - \#(A \cap B)}{\#U} = \frac{6-4}{36}$)

Opdracht 84 bladzijde 226

Je neemt alle kalenderbriefjes van een jaar dat geen schrikkeljaar is. Deze vormen de uitkomstenverzameling U.
De verzameling L staat voor alle lentedagen: dit zijn de briefjes van 21 maart tot en met 20 juni.
De verzameling J staat voor alle dagen van de maand juni.
Tot slot staat C voor de ‘cijferdagen’, dit zijn de eerste negen dagen van elke maand, met dagnummer 1 tot en met 9.

Omschrijf de onderstaande gebeurtenissen in woorden en bereken het aantal elementen waarmee ze overeenkomen.

1 $L \cap J$

‘Alle lentedagen van de maand juni.’ Zo zijn er precies 20: van 1 t.e.m. 20 juni.

2 $L \cap C$

‘Alle lentedagen met dagnummer 1 t.e.m. 9.’ Er zijn er 9 in april, 9 in mei en 9 in juni, dus in totaal 27.

3 $J \cap C$

‘Alle cijferdagen in juni’: dit zijn er 9.

4 $L \cup J$

‘Alle lentedagen of junidagen.’ Er zijn 92 lentedagen (11 + 30 + 31 + 20) en 30 junidagen. Rekening houdend met de ‘doorsnede’ van 20 dagen, zijn er dus $\#L + \#J - \#(L \cap J) = 92 + 30 - 20 = 102$ dagen die met deze gebeurtenis overeenstemmen.

5 $L \cup C$

‘Alle lentedagen of cijferdagen.’
$\#(L \cup C) = \#L + \#C - \#(L \cap C) = 92 + 12 \cdot 9 - 27 = 173$

6 $L \setminus C$

‘Alle lentedagen behalve de cijferdagen.’
$\#(L \setminus C) = \#L - \#(L \cap C) = 92 - 27 = 65$

7 $C \setminus L$

‘Alle cijferdagen behalve de lentedagen.’
$\#(C \setminus L) = \#C - \#(C \cap L) = 9 \cdot 12 - 27 = 81$

8 $C \setminus J$

‘Alle cijferdagen behalve de junidagen.’ Dit kan ook snel zonder formules: dit zijn de cijferdagen van de overige 11 maanden. Zo zijn er 99.

9 $U \setminus L$

‘Alle dagen behalve de lentedagen’: 365 – 92 = 273.

Opdracht 85 bladzijde 226

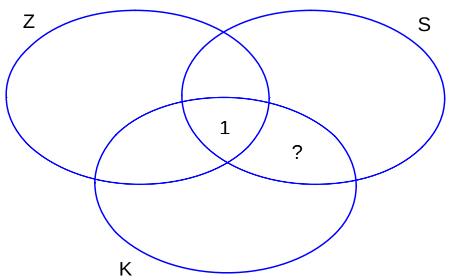
Uit onze klas van 24 leerlingen zijn er 21 leerlingen lid van de zwemclub, 18 leerlingen zijn lid van de schaakclub en 10 leerlingen zijn lid van het koor.
Eén enkele leerling is lid van de drie verenigingen.

Hoeveel schakers uit onze klas zingen in het koor?

A 2 B 3 C 4 D 5 E niet te bepalen

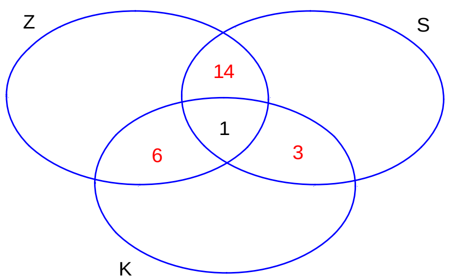
Oplossing

Bij deze vraag is enige ‘trial and error’ noodzakelijk.



Doordat er 21 leerlingen in de zwemclub zitten ($\#Z = 21$), zijn er in totaal maar 3 leerlingen buiten de verzameling met zwemmers. Op de plaats van het vraagteken kan dus hoogstens een 3 staan.

Er zal ook minstens een 1 staan, aangezien het laagste mogelijke aantal 2 is (antwoord A).



Vervang je het vraagteken door 1 of 2, dan blijkt het niet mogelijk de andere verzamelingen zo op te vullen dat aan de gegeven voorwaarden is voldaan. Vervang je het door 3, dan lukt het wel, zoals je hiernaast kunt zien.

In totaal zijn er dus 4 schakers die ook in het koor zingen.

Herhalingsopdracht 86 bladzijde 227

Met de letters L, A en P kun je een aantal ‘woorden’ van drie letters maken. Deze woorden hoeven geen correct Nederlands te zijn.

1 Stel dat je elke letter maar één keer mag gebruiken. Maak een boomdiagram dat alle mogelijke woorden weergeeft. Hoeveel eindknopen tel je?

In het boomschema kun je natellen dat er 6 mogelijke volgordes zijn.
Via de productregel vind je dit aantal ook: $3 \cdot 2 \cdot 1$.

2 Als elke letter meerdere keren mag gebruikt worden, hoeveel drieletterwoorden zijn er dan?

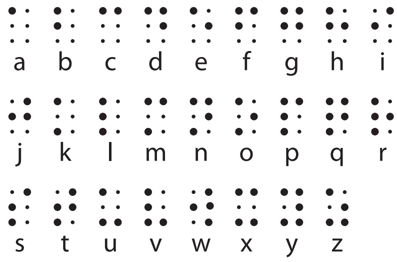
Nu zijn er $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ mogelijkheden.

Herhalingsopdracht 87 bladzijde 227

In het Brailleschrift worden letters en andere tekens voorgesteld door puntjes, die in papier worden gedrukt, waardoor een verhoging voelbaar is. Daardoor kunnen blinden met hun vingers lezen.

Een Brailleteken bestaat uit één of meerdere ingedrukte punten in een raster van drie puntjes hoog en twee puntjes breed.

Hoeveel verschillende Brailletekens zijn er maximaal mogelijk?



Oplossing

Er zijn 6 puntjes en per puntje zijn er twee mogelijkheden: ingedrukt of niet ingedrukt.
In totaal zijn er dus 2^6 mogelijkheden, maar daar trekken we het teken zonder ingedrukte puntjes van af. Er zijn dus $2^6 - 1 = 63$ mogelijke tekens te vormen met slechts één zo'n raster.

Herhalingsopdracht 88 bladzijde 227

Niet alle kansen kun je door redeneren bepalen. Bij welke kansen hieronder kan dat wel? Bereken die kans dan ook.

1 De kans om een cijferslot met drie ringen van tien cijfers bij toeval open te krijgen, wanneer je één keer een willekeurige cijfercombinatie kiest.

Dit lukt door redeneren.

De productregel geeft: $P(\text{slot open na één poging}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$.

2 De kans dat je op een volledig schooljaar minstens drie keer te laat komt.

Kan niet.

3 De kans dat het derde kind in een gezin een meisje is. Je mag ervan uitgaan dat de kans op een jongen en een meisje gelijk is.

Het geslacht van de vorige kinderen heeft geen invloed op dat van het derde kind. De kans dat het een meisje is, is dus 1/2.

4 De kans dat het vierde kind in een gezin een meisje is, als de twee eerste kinderen ook al meisjes waren. Ga er opnieuw van uit dat de kans op een jongen en een meisje gelijk is.

Zelfde redenering: de kans is opnieuw 1/2.

Herhalingsopdracht 89 bladzijde 227

Je gooit twee dobbelstenen en maakt het product van het aantal ogen dat geworpen wordt.
Wat is de kans dat dit product even is?

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{2}$ D $\frac{2}{3}$ E $\frac{3}{4}$

Oplossing

Omcirkel je in een rooster de combinaties waarbij het product van de ogen even is, dan vind je
$P(\text{product even}) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Herhalingsopdracht 90 bladzijde 228

Enzo heeft twee muntstukken in zijn hand, schudt, kijkt en zegt dat er kop bij zit.
Wat is de kans dat ook het tweede muntstuk kop is?

Oplossing

Het is zeer verleidelijk te beweren dat de kans 1/2 is, aangezien er twee mogelijkheden zijn: kop of munt. Het kan daarom zinvol zijn leerlingen eerst het experiment daadwerkelijk te laten uitvoeren met twee gewone munten.

Maken we beide munten verschillend, dan zijn er vier even waarschijnlijke uitkomsten: K-k, K-m, M-k en M-m.

De uitkomstenverzameling bij deze opgave bevat enkel die uitkomsten waarbij kop optreedt: U = {K-k, K-m, M-k}.

De gunstige uitkomsten zijn: G = {K-k}.

De formule van Laplace geeft: P(andere muntstuk kop) = $\frac{1}{3}$.

Herhalingsopdracht 91 bladzijde 228

Je speelt een spelletje Scrabble. Op een bepaald ogenblik moet je zonder kijken 3 letters trekken uit een zakje waarin 22 medeklinkers en 9 klinkers zitten (sommige letters komen dus meerdere keren voor).

1 Wat is de kans dat je enkel medeklinkers neemt?

$$P(\text{enkel medeklinkers}) = \frac{22}{31}\cdot\frac{21}{30}\cdot\frac{20}{29} = \frac{308}{899}$$

2 Wat is de kans dat je precies één klinker trekt?

In een kansboom zijn er drie takken die overeenkomen met precies één klinker. Het product van alle kansen langsheen elke tak is gelijk: de noemers zijn immers $31\cdot30\cdot29$ en in de tellers staat elke keer $22\cdot21\cdot9$, al is de volgorde van de factoren telkens anders.

$$P(\text{precies één klinker}) = 3\cdot\frac{22\cdot21\cdot9}{31\cdot30\cdot29} = \frac{2079}{4495}$$

Herhalingsopdracht 92 bladzijde 228

Janne gooit 10 keer met een eerlijke dobbelsteen.

1 Wat is de kans dat ze geen enkele keer 6 krijgt?

$$P(\text{geen enkele keer } 6) = P(10 \text{ keer geen } 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}1615.$$

2 Wat is de kans dat ze hoogstens één keer een 6 gooit?

$$\begin{aligned} P(\text{hoogstens één keer } 6) &= P(\text{geen enkele keer of één keer } 6) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 10\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{9} \approx 0{,}4845 \end{aligned}$$

Herhalingsopdracht 93 bladzijde 228

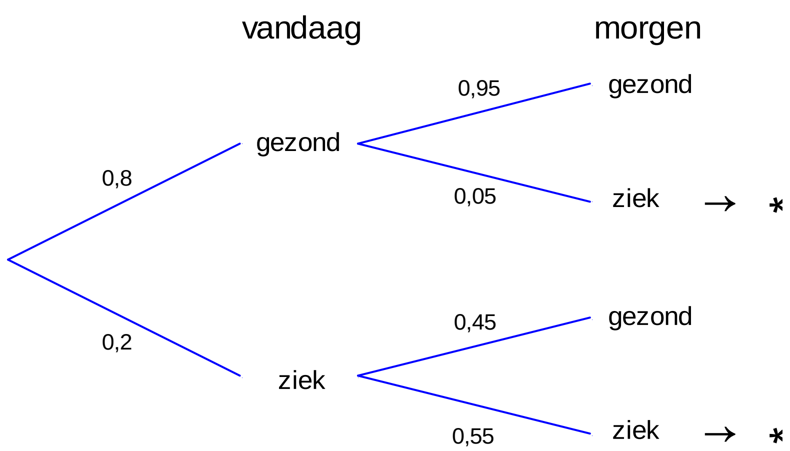
Een leerling is ofwel gezond, ofwel ziek. Onderstel dat als een leerling vandaag gezond is, er 95 % kans is dat hij morgen nog gezond is en, als een leerling vandaag ziek is, dat er 55 % kans is dat hij morgen nog ziek is.

Als vandaag 20 % van de leerlingen ziek is, hoeveel procent zieken verwachten we dan morgen?

A 11% B 15% C 50% D 55% E 60%

Oplossing

Het aantal zieken morgen bestaat uit de gezonden van vandaag die ziek zijn geworden plus de zieken van vandaag die ziek zijn gebleven.



Het percentage is bijgevolg: $0,80\cdot 0,05+0,20\cdot 0,55=0,04+0,11=0,15$.

Herhalingsopdracht 94 bladzijde 228

In een loterij met 10000 biljetten zijn er 250 prijzen.

1 Bereken de theoretische kans dat je met één biljet prijs hebt.

$$P(\text{één prijs met één biljet})=\frac{250}{10000}=0,0250$$

2 Bereken de theoretische kans dat je met twee biljetten twee prijzen hebt.

$$P(\text{twee prijzen met twee biljetten})=\frac{250}{10000}\cdot\frac{249}{9999}\approx 6,226\cdot 10^{-4}\approx 0,0006$$

3 Bereken de theoretische kans dat je met twee biljetten minstens één prijs hebt.

$$\begin{aligned}P(\text{minstens één prijs met twee biljetten}) &= 1-P(\text{geen prijs met twee biljetten})\\ &= 1-\frac{9750}{10000}\cdot\frac{9749}{9999}\\ &\approx 0,0494\end{aligned}$$

Herhalingsopdracht 95 bladzijde 228

Kies een willekeurig punt in een cirkel.
Bereken de kans dat het punt dichter bij het middelpunt van de cirkel ligt dan bij de rand.

Oplossing

Stel r de straal van de cirkel.

We vinden: $P = \dfrac{\pi \cdot \left(\dfrac{r}{2}\right)^2}{\pi \cdot r^2} = \dfrac{1}{4}$.

Herhalingsopdracht 96 bladzijde 228

Maarten gaat vijf jaar in het buitenland studeren. Hij brengt zijn overgrootmoeder een bezoek vooraleer te vertrekken. Hij is wat geëmotioneerd, want bij zijn terugkomst zou ze 95 zijn en de kans daartoe is maar een kleine 17 %. Mogelijk is dit zijn laatste bezoek.

Ze voelt wat er aan de hand is. "Voor mij is het waarschijnlijker om 95 te worden, dan het is geweest om 90 te worden", zegt ze.
Verklaar de uitspraak van Maartens overgrootmoeder.

Aantal overlevenden op leeftijd x		
x	Mannen	Vrouwen
0	1000000	1000000
…	…	…
14	993569	994708
15	993418	994504
16	993329	994395
17	993000	994207
…	…	…
25	987078	992313
…	…	…
65	833849	907223
70	761579	866820
75	658225	804520
80	510728	699674
85	328547	531100
90	153991	305359
95	41946	115099
100	6569	21473
105	762	1866

Oplossing

$$P(\text{pasgeboren meisje wordt } 90) = \frac{305359}{1000000} = 0{,}305359$$

$$P(\text{vrouw van 90 wordt } 95) = \frac{115099}{305359} \approx 0{,}3769$$

Herhalingsopdracht 97 bladzijde 229

Gebruik de tabel met overlevenden uit de vorige opdracht om de volgende vragen te beantwoorden.

1 Hoe groot is de kans dat jij 70 wordt?

Voor een jongen van 15, bijvoorbeeld, is die kans $\frac{761579}{993418} \approx 0,7666.$

2 Hoe groot is de kans dat alle leerlingen van je klas 70 worden?

Stel dat de klas bestaat uit 7 jongens van 15, 4 jongens van 16, 5 meisjes van 15 en 6 meisjes van 16, dan is de kans $\left(\frac{761579}{993418}\right)^7 \cdot \left(\frac{761579}{993329}\right)^4 \cdot \left(\frac{866820}{994504}\right)^5 \cdot \left(\frac{866820}{994395}\right)^6.$

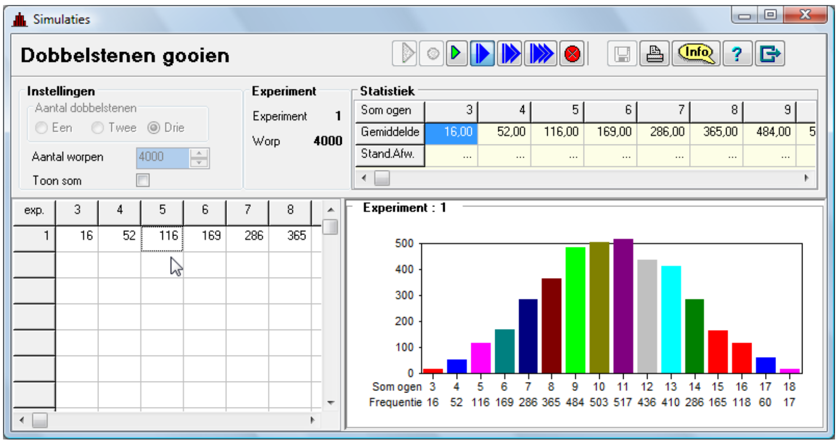
Herhalingsopdracht 98 bladzijde 229

1 Bereken een experimentele kans op het gooien van som 5 met drie dobbelstenen. Voer hiertoe 300 simulaties uit op je grm. Geef je werkwijze.

Met de TI-8x kan het zoals hiernaast aangegeven.

```
randInt(1,6,300)
+randInt(1,6,300
)+randInt(1,6,30
0)→L1
{12 11 16 12 6 …
sum(L1=5)/300
          .0333333333
```

Met VU-Statistiek vind je een betrouwbaarder schatting: $\frac{116}{4000} = 0,029$.



2 Bereken de theoretische kans op die gebeurtenis.

Een som van 5 ogen kans als volgt verkregen worden: 1+1+3 (dit kan op 3 manieren gegooid worden, zie opdracht 55) en 1+2+2 (3 manieren).

De theoretische kans is dus $P(5 \text{ ogen}) = \frac{6}{215} = \frac{1}{36} \approx 0,0278$

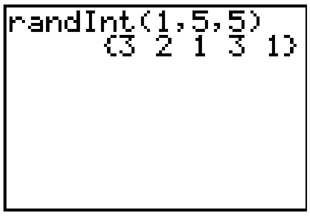
Herhalingsopdracht 99 bladzijde 230

Een producent van frisdrank besluit een nieuwe promotiecampagne te voeren, om meer winst te kunnen maken. Bij elk pak van zes flessen wordt een exclusieve foto van een bekende popgroep gestopt. In totaal zijn er vijf verschillende foto's; elk pak bevat echter maar één foto.

Michiel wil de vijf foto's bijeen krijgen en koopt daartoe elke week zo'n pak van zes flessen. Hij wil weten wat de kans is dat hij na vijf weken zijn vijf verschillende foto's al verzameld zal hebben.

1 Voer een simulatie uit bij het verhaal van Michiel. Simuleer hiertoe het verzamelen van vijf foto's, waarbij elke foto even waarschijnlijk is, maar waarbij eenzelfde foto helaas meerdere keren kan opduiken. Geef je werkwijze en vermeld je resultaat.

Laat de vijf foto's overeenkomen met de getallen 1 t.e.m. 5.
Met **randInt** kunnen vijf lukrake getallen van 1 tot 5 gegenereerd worden.



2 Voer het simulatiecommando uit de vorige vraag minstens een twintigtal keer uit, door herhaaldelijk op $\boxed{\text{ENTER}}$ te drukken, en noteer per simulatie of Michiel vijf verschillende foto's had of niet.
Wat vind je als experimentele kans op de vijf foto's?

De kans op vijf verschillende getallen blijkt bijzonder klein te zijn. Na 20 herhalingen zullen weinig leerlingen een experiment met 5 verschillende getallen aantreffen.
De experimentele kans zal dus bij velen 0 zijn.

3 Bereken nu een meer betrouwbare schatting van de gevraagde kans door de resultaten van je medeleerlingen mee te verrekenen.

–

4 Bereken de theoretische kans op vijf verschillende foto's na vijf weken.

Er zijn in totaal $5^5 = 3125$ mogelijke uitkomsten, aangezien één foto meerdere keren kan optreden.
Er zijn $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ gunstige uitkomsten.
Daaruit volgt: P(5 verschillende foto's in 5 weken) = $\dfrac{120}{3125} = 0,0384$.