Hoofdstuk 2

Tweedegraadsfuncties

2.1 De functies $f(x) = ax^2$

2.2 De functies $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

2.3 De functies $f(x) = ax^2 + bx + c$

2.4 Opstellen van functievoorschriften

2.5 Gemiddelde verandering

Oplossingen van de opdrachten

Opdracht 1 bladzijde 68

Jeroen en Mieke zijn fervente bergbeklimmers.
Hun volgende uitdaging is de Kilimanjaro in Tanzania, de hoogste berg in Afrika.
De Kilimanjaro is 5895 m hoog. Per kilometer die je stijgt, daalt de temperatuur met ongeveer 6°C.
Op zeeniveau is de gemiddelde temperatuur 25°C.

1 Vervolledig de tabel.

hoogte x (in km)	0	1	2	3	4	5
temperatuur y (in °C)						

hoogte x (in km)	0	1	2	3	4	5
temperatuur y (in °C)	**25**	**19**	**13**	**7**	**1**	**– 5**

2 Bepaal het voorschrift dat de temperatuur y uitdrukt in functie van de hoogte x.
Welke soort functie hoort bij dit voorschrift ?

$y = 25 - 6x$ (eerstegraadsfunctie)

3 Bepaal de gemiddelde temperatuur op de top van de Kilimanjaro.

$$\begin{aligned} y &= 25 - 6 \cdot 5{,}895 \\ &= -10{,}37°C \end{aligned}$$

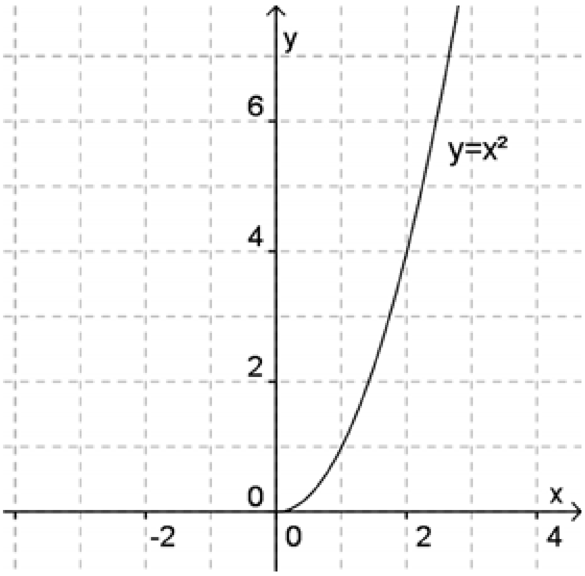
Opdracht 2 bladzijde 68

De oppervlakte y (in m^2) van een vierkant is een functie van de zijde x (in m).

1 Geef van deze functie het voorschrift, maak een tabel en teken de bijbehorende grafiek.

$y = x^2$

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	4	9	16	25



2 Hoe kun je zien aan het voorschrift, de tabel en de grafiek dat deze functie geen eerstegraadsfunctie is?

voorschrift: de exponent van x is 2

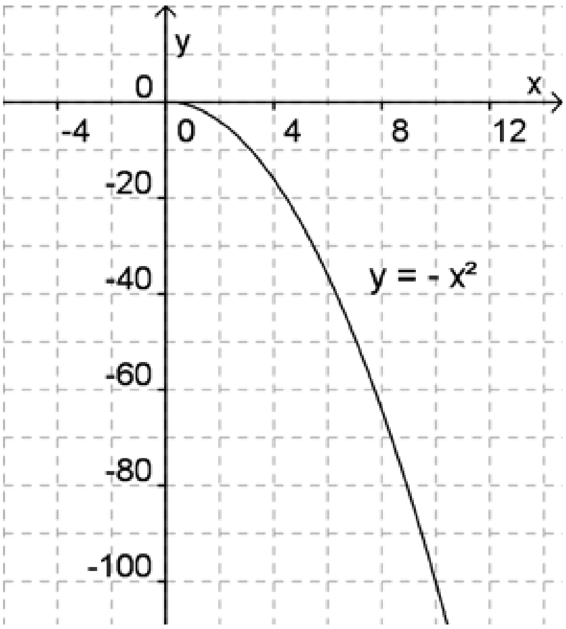
tabel: voor een constante toename van de x-waarde, is er geen constante toename van de y-waarde

grafiek: het is geen rechte

Opdracht 3 bladzijde 69

De 'plasstraal' van Manneken Pis volgt een baan met vergelijking $y = -x^2$.
Hierbij is x de horizontale afstand vanaf de 'bron' gerekend (in cm), en y de hoogte, die hier negatief is (in cm).

1 Teken de baan van het water.



2 Men zegt dat het Manneken in de middeleeuwen op feestdagen geen water, maar een soort bier plaste. Wanneer men dat bier in een glas wou opvangen op 100 cm onder de 'bron', hoe ver (horizontaal gemeten) van het Manneken moest men zijn glas dan houden ?

$y = -100$

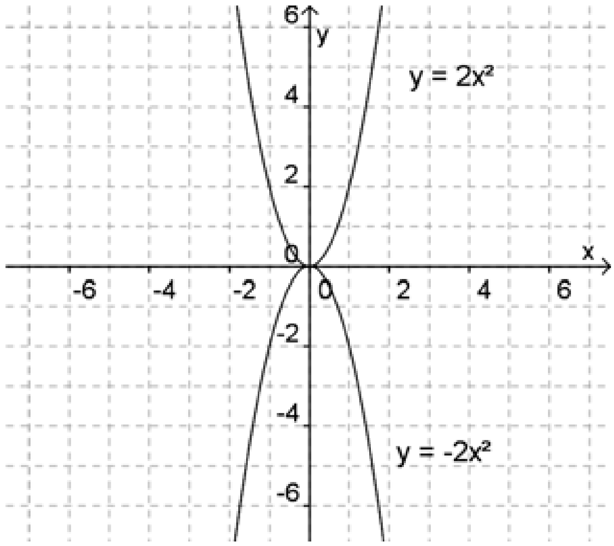
$x^2 = 100$

$x = 10$ (afmeting: positief)

Men moest het glas op 10 cm van het Manneken houden.

Opdracht 4 bladzijde 71

1 Maak een grafiek van de functies $f(x)=2x^2$ en $g(x)=-2x^2$ in één assenstelsel.



2 Wat is het verband tussen deze twee grafieken?

De grafiek van $g(x)=-2x^2$ ontstaat door spiegeling om de x-as van de grafiek van $f(x)=2x^2$.

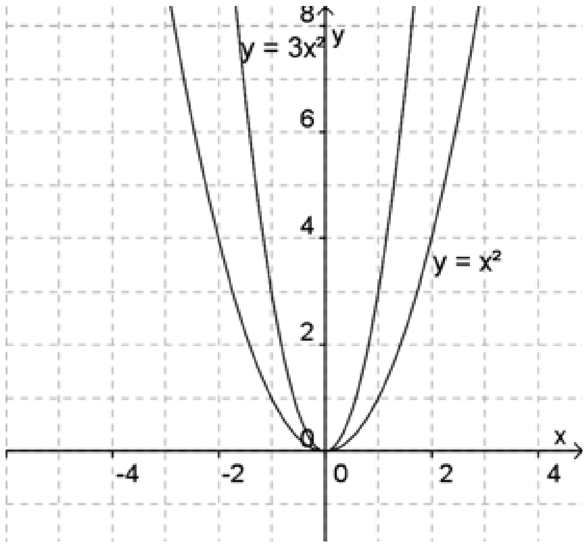
Opdracht 5 bladzijde 71

1 Maak een tabel van de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 3x^2$.
Welk verband is er tussen de functiewaarden van f en g?

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x) = 3x^2$	27	12	3	0	3	12	27

Als men de functiewaarden van f vermenigvuldigt met 3, dan verkrijgt men de overeenkomstige functiewaarden van g.

2 Teken in één assenstelsel de grafiek van beide functies.
Is de grafiek van g smaller of breder dan die van f ?



De grafiek van g is smaller dan de grafiek van f.

3 Geef een voorschrift van een functie h_1 met een bredere grafiek dan die van f en een voorschrift van een functie h_2 met een smallere grafiek dan die van f.

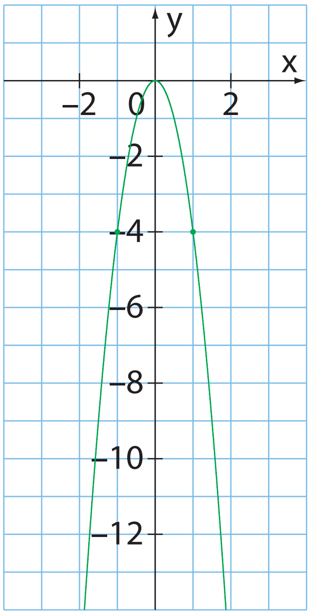
$$h_1(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$h_2(x) = 2x^2$$

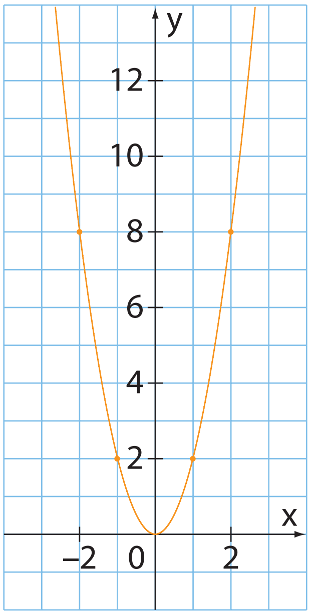
Opdracht 6 bladzijde 74

De onderstaande grafieken stellen tweedegraadsfuncties voor met voorschrift $y = ax^2$.
Bepaal dit voorschrift.

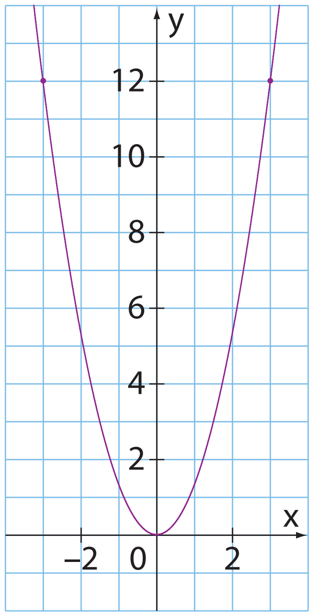
1



2



3



Oplossing

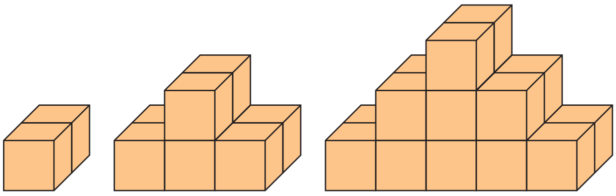
1 $\quad y = ax^2 \qquad -4 = a \cdot 1^2 \quad \Rightarrow \quad a = -4 \qquad y = -4x^2$

2 $\quad y = ax^2 \qquad 8 = a \cdot 2^2 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \qquad y = 2x^2$

3 $\quad y = ax^2 \qquad 12 = a \cdot 3^2 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3} \qquad y = \dfrac{4}{3}x^2$

Opdracht 7 bladzijde 74

Hieronder zie je drie torentjes. Het zijn de eerste drie van een hele rij, die op dezelfde manier verdergaat.



1 Vul de tabel aan.

x = hoogte	1	2	3	4	5	6	7
y = aantal blokjes							

x = hoogte	1	2	3	4	5	6	7
y = aantal blokjes	**2**	**8**	**18**	**32**	**50**	**72**	**98**

2 Schrijf y als functie van x.

$y = 2x^2$

Opdracht 8 bladzijde 74

De remweg van een auto is de afstand die hij aflegt vanaf het ogenblik waarop je het rempedaal indrukt tot het moment waarop de auto stilstaat. In normale omstandigheden kan voor de remweg de volgende tabel gehanteerd worden.

snelheid x (in km/h)	30	60	90	120	140
remweg y (in m)	5,4	21,6	48,6	86,4	117,6

1 Bepaal bij dit verband een voorschrift van de vorm $y = ax^2$.

$5,4 = a \cdot 30^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5,4}{900} = \frac{3}{500} \qquad y = \frac{3}{500}x^2$

2 Bepaal de remweg voor een snelheid van 72 km/h en van 150 km/h.

72 km/h $\qquad y = \frac{3}{500} \cdot 72^2 = 31,104$

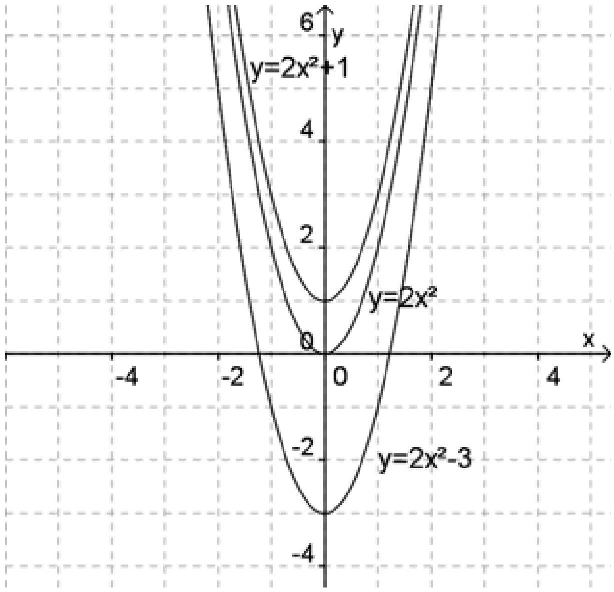
De remweg bedraagt 31,104 m bij een snelheid van 72 km/h.

150 km/h $\qquad y = \frac{3}{500} \cdot 150^2 = 135$

De remweg bedraagt 135 m bij een snelheid van 150 km/h.

Opdracht 9 bladzijde 75

1 Teken in één assenstelsel de grafiek van de functies $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 1$ en $y = 2x^2 - 3$.



2 Leg uit hoe we de grafiek van $y = 2x^2 + 1$ en van $y = 2x^2 - 3$ kunnen vinden vertrekkend van de grafiek van $y = 2x^2$.

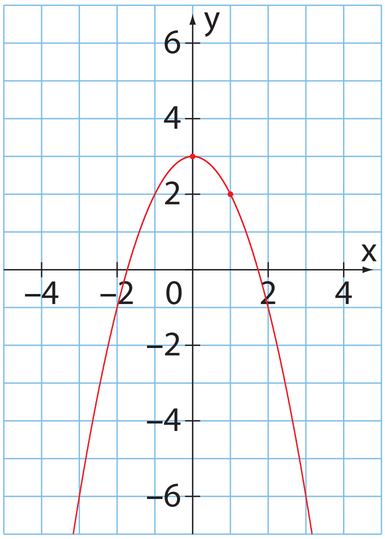
De grafiek van $y = 2x^2 + 1$ ontstaat uit de grafiek van $y = 2x^2$ door verschuiving over één eenheid naar boven (of over de vector $\vec{v}(0,1)$).

De grafiek van $y = 2x^2 - 3$ ontstaat uit de grafiek van $y = 2x^2$ door verschuiving over drie eenheden naar beneden (of over de vector $\vec{v}(0,-3)$).

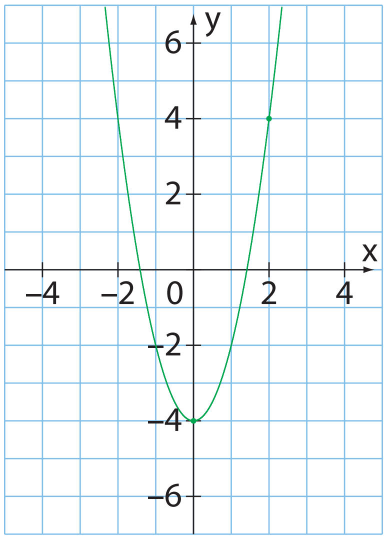
Opdracht 10 bladzijde 77

De onderstaande grafieken stellen tweedegraadsfuncties voor met voorschrift $y = ax^2 + \beta$.
Bepaal dit voorschrift.

1



2



Oplossing

1 $\quad y = ax^2 + \beta \qquad (0,3) \qquad 3 = 0 + \beta \;\Rightarrow\; \beta = 3$

$(1,2) \qquad 2 = a \cdot 1^2 + 3 \;\Rightarrow\; a = -1$

$y = -x^2 + 3$

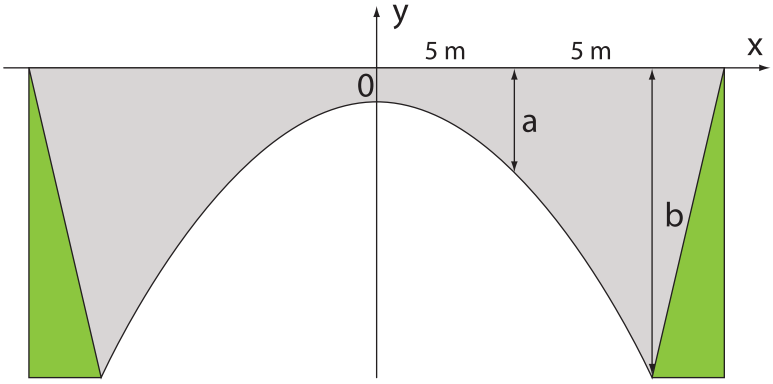
2 $\quad y = ax^2 + \beta \qquad (0,-4) \qquad -4 = 0 + \beta \;\Rightarrow\; \beta = -4$

$(2,4) \qquad 4 = a \cdot 2^2 - 4 \;\Rightarrow\; a = 2$

$y = 2x^2 - 4$

Opdracht 11 bladzijde 77

De boog onderaan een brug heeft de vorm van een parabool.
Het voorschrift van de bijbehorende tweedegraadsfunctie is
$y = -\frac{13}{75}x^2 - \frac{8}{3}$ (x en y in meter).
Bereken de afstanden a en b.



Oplossing

a vinden we door de functiewaarde voor $x = 5$ te berekenen:

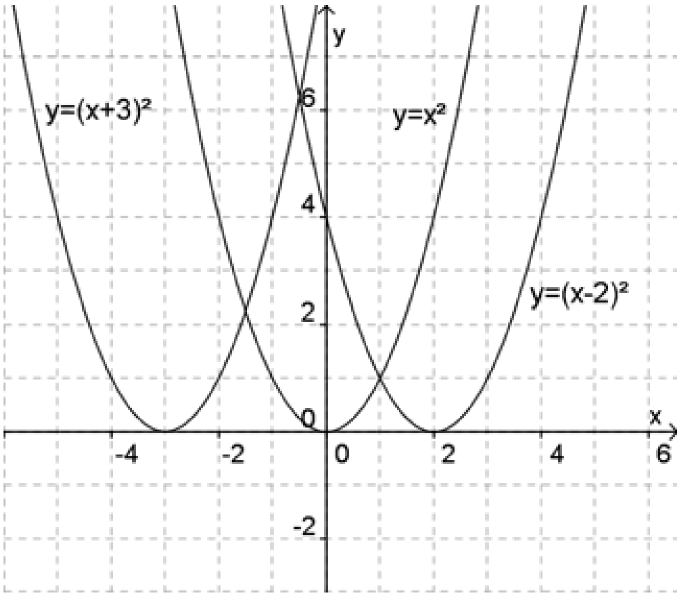
$$y = -\frac{13}{75}\cdot 25 - \frac{8}{3} = -7 \quad \Rightarrow \quad a = 7 \quad \text{(afstand)}$$

b vinden we door de functiewaarde voor $x = 10$ te berekenen:

$$y = -\frac{13}{75}\cdot 100 - \frac{8}{3} = -20 \quad \Rightarrow \quad b = 20$$

Opdracht 12 bladzijde 78

1 Teken in één assenstelsel de grafiek van de functies $y = x^2$, $y = (x-2)^2$ en $y = (x+3)^2$.



2 Leg uit hoe we de grafiek van $y = (x-2)^2$ en van $y = (x+3)^2$ kunnen vinden vertrekkend van de grafiek van $y = x^2$. Gebruik de tabel.

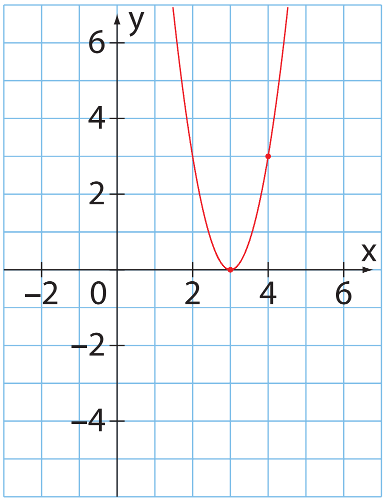
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
$y = (x-2)^2$	49	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9
$y = (x+3)^2$	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49	64

- De grafiek van $y = (x-2)^2$ ontstaat uit de grafiek van $y = x^2$ door verschuiving naar rechts over 2 eenheden (of over $\vec{v}(2,0)$).
- De grafiek van $y = (x+3)^2$ ontstaat uit de grafiek van $y = x^2$ door verschuiving naar links over 3 eenheden (of over $\vec{v}(-3,0)$).

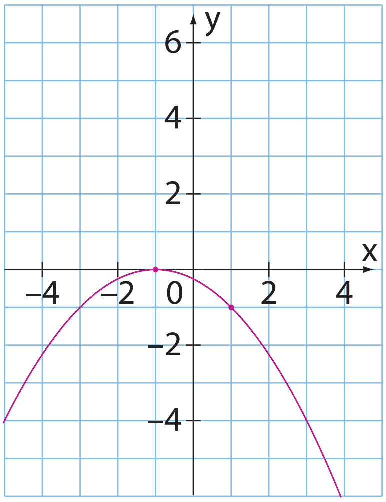
Opdracht 13 bladzijde 80

De onderstaande grafieken stellen tweedegraadsfuncties voor met voorschrift $y = a(x-\alpha)^2$.
Bepaal dit voorschrift.

1



2



Oplossing

1 $y = a(x-3)^2$ $(4,3)$ $3 = a(4-3)^2 \Rightarrow a = 3$

Het voorschrift is $y = 3(x-3)^2$.

2 $y = a(x+1)^2$ $(1,-1)$ $-1 = a(1+1)^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$

Het voorschrift is $y = -\frac{1}{4}(x+1)^2$.

Opdracht 14 bladzijde 80

Bepaal de symmetrieas en de top van de grafiek van de volgende functies. Controleer grafisch.

1 $f(x) = (x+4)^2$

$x = -4$ $T(-4,0)$

2 $f(x) = -2(x-1{,}5)^2$

$x = 1{,}5$ $T(1{,}5;0)$

3 $f(x) = \frac{1}{2}(x^2+6x+9)$

$y = \frac{1}{2}(x^2+6x+9) = \frac{1}{2}(x+3)^2$ $x = -3$ $T(-3,0)$

4 $f(x) = -x^2+2x-1$

$y = -x^2+2x-1 = -(x^2-2x+1) = -(x-1)^2$ $x = 1$ $T(1,0)$

Opdracht 15 bladzijde 80

1 We verschuiven de grafiek van $y = 2x^2$ drie eenheden naar rechts.
Van welke functie hebben we nu de grafiek?

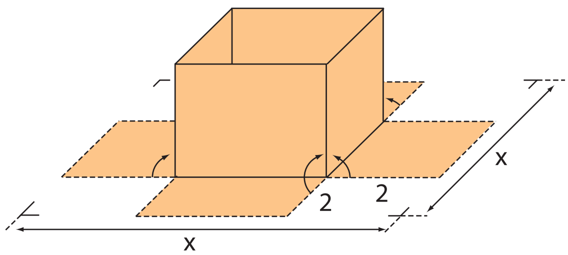
$y = 2(x-3)^2$

2 Zelfde vraag bij de verschuiving van de grafiek van $y = -3x^2$ naar links over vier eenheden.

$y = -3(x+4)^2$

Opdracht 16 bladzijde 80

In een kartonfabriek worden open dozen gemaakt uit vierkante stukken karton. Hiertoe worden aan de hoeken vierkanten van 2 dm weggesneden.



1 Schrijf de inhoud y van de doos (in dm^3) als functie van de zijde x van het oorspronkelijke vierkant (in dm).

$y = 2(x-4)^2$

2 Wat is de inhoud van de doos als het oorspronkelijke vierkant een zijde heeft van 60 cm?

$y = 2(6-4)^2 = 8$

De inhoud is 8 dm³.

3 Wat moet de zijde van het oorspronkelijke vierkant zijn als we een doos met een inhoud van 1 m^3 willen verkrijgen?

$2(x-4)^2 = 1000$

$x - 4 = \sqrt{500}$ of $x - 4 = -\sqrt{500}$

$x = 4 + \sqrt{500}$ of $\cancel{x = 4 - \sqrt{500}}$ (geen negatieve oplossing)

$= 26,36$

De zijde moet ongeveer 26,36 dm zijn.

Opdracht 17 bladzijde 81

1 Hoe kun je de grafiek van $y = (x-6)^2$ afleiden uit die van $y = x^2$?

De grafiek van $y = (x-6)^2$ ontstaat uit die van $y = x^2$ door verschuiving over 6 eenheden naar rechts.

2 Hoe kun je de grafiek van $y = x^2 - 6$ afleiden uit die van $y = x^2$?

De grafiek van $y = x^2 - 6$ ontstaat uit die van $y = x^2$ door verschuiving over 6 eenheden naar beneden.

3 Hoe kun je de grafiek van $y = (x-6)^2 - 6$ afleiden uit die van $y = x^2$?

De grafiek van $y = (x-6)^2 - 6$ ontstaat uit die van $y = x^2$ door verschuiving over 6 eenheden naar rechts gevolgd door een verschuiving over 6 eenheden naar beneden.

Opdracht 18 bladzijde 82

Bepaal zonder grafisch rekentoestel de symmetrieas en de top van de grafiek van de volgende tweedegraadsfuncties.

1 $f(x) = (x-6)^2 + 1$

$x = 6$ $\quad T(6,1)$

2 $f(x) = (x+4)^2 - 2$

$x = -4$ $\quad T(-4,-2)$

3 $f(x) = -5x^2 + 5$

$x = 0$ $\quad T(0,5)$

4 $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ $\quad T\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

5 $f(x) = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 2{,}5$

$x = 4$ $\quad T(4; 2{,}5)$

6 $f(x) = \frac{1}{3}(x-6)^2$

$x = 6$ $\quad T(6,0)$

Opdracht 19 bladzijde 82

Elk van de onderstaande functievoorschriften hoort bij één van de parabolen A tot J. Beantwoord zonder je grafisch rekentoestel te gebruiken: welke grafiek komt met welk voorschrift overeen? Motiveer je antwoord.

1 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$

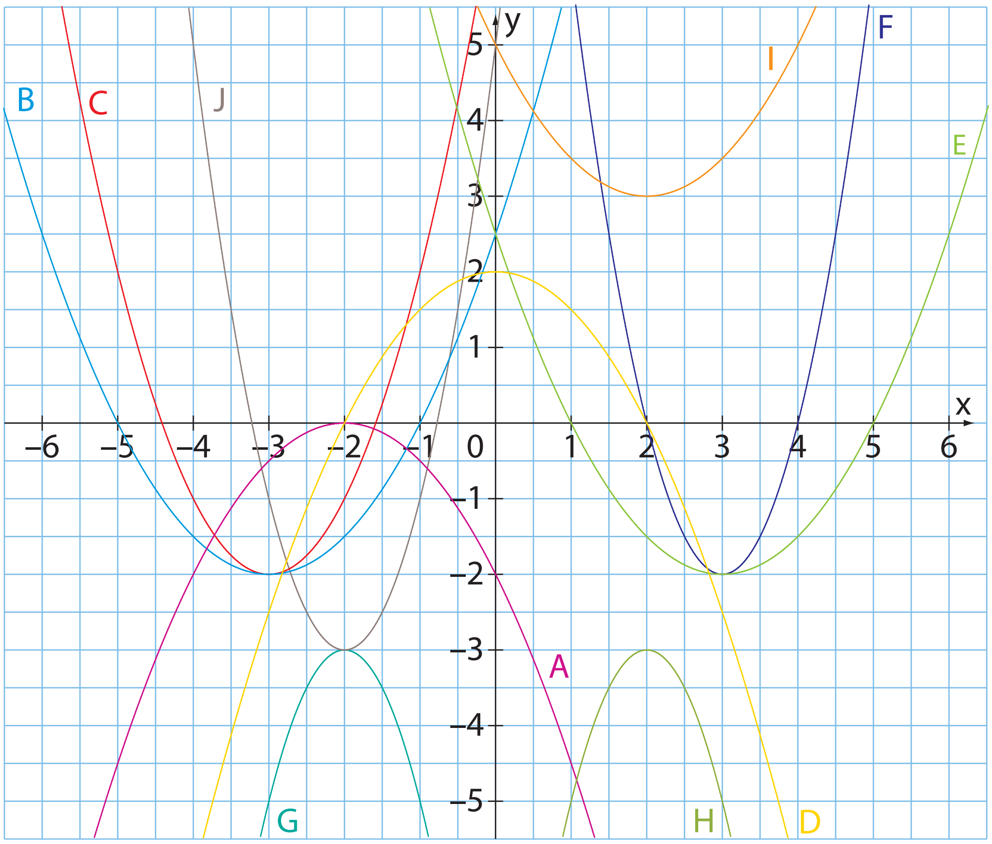
2 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$

3 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+3$

4 $y=-2(x+2)^2-3$

5 $y=(x+3)^2-2$

6 $y=2(x-3)^2-2$



Oplossing

1 bergparabool, 2 eenheden naar boven verschoven en breder dan $y=x^2$ $\rightarrow$ D

2 bergparabool, 2 eenheden naar links verschoven en breder dan $y=x^2$ $\rightarrow$ A

3 dalparabool, 2 eenheden naar rechts en 3 naar boven verschoven, breder dan $y=x^2$ $\rightarrow$ I

4 bergparabool, 2 eenheden naar links en 3 naar benden verschoven, smaller dan $y=x^2$ $\rightarrow$ G

5 dalparabool, 3 eenheden naar links en 2 naar beneden verschoven $\rightarrow$ C

6 dalparabool, 3 eenheden naar rechts en 2 naar beneden verschoven, smaller dan $y=x^2$ $\rightarrow$ F

Opdracht 20 bladzijde 83

Schrijf de volgende functies in de vorm $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
Geef een vergelijking van de symmetrieas en de coördinaat van de top van de bijbehorende parabool. Controleer grafisch.

$\boxed{1 \quad y = x^2 + 4x + 4}$

$y = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \qquad x = -2 \qquad T(-2, 0)$

$\boxed{2 \quad y = x^2 + 4x + 5}$

$y = x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \qquad x = -2 \qquad T(-2, 1)$

$\boxed{3 \quad y = 2x^2 + 8x + 4}$

$$y = 2x^2 + 8x + 4 = 2(x^2 + 4x + 2) = 2(\underbrace{x^2 + 4x + 4} - 4 + 2)$$
$$= 2\left[(x+2)^2 - 2\right] = 2(x+2)^2 - 4$$

$x = -2 \qquad T(-2, -4)$

$\boxed{4 \quad y = -3x^2 + 6x - 1}$

$$y = -3x^2 + 6x - 1 = -3\left(x^2 - 2x + \frac{1}{3}\right) = -3\left(\underbrace{x^2 - 2x + 1} - 1 + \frac{1}{3}\right)$$
$$= -3\left[(x-1)^2 - \frac{2}{3}\right] = -3(x-1)^2 + 2$$

$x = 1 \qquad T(1, 2)$

Opdracht 21 bladzijde 86

Bepaal de top en de symmetrieas van de grafiek van de volgende functies.
Geef ook het bereik.

$\boxed{1 \quad f(x) = x^2 - 6x + 8}$

$x_T = \dfrac{6}{2} = 3$ $\qquad$ $x = 3$

$y_T = f(3) = 9 - 18 + 8 = -1$ $\qquad$ $T(3, -1)$

$\text{ber } f = [-1, +\infty[$

$\boxed{2 \quad f(x) = -x^2 + 2x + 3}$

$x_T = \dfrac{-2}{-2} = 1$ $\qquad$ $x = 1$

$y_T = f(1) = -1 + 2 + 3 = 4$ $\qquad$ $T(1, 4)$

$\text{ber } f =]-\infty, 4]$

$\boxed{3 \quad f(x) = x - 2x^2 + 3}$

$x_T = \dfrac{-1}{-4} = \dfrac{1}{4}$ $\qquad$ $x = \dfrac{1}{4}$

$y_T = f\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{2}{8} + \dfrac{24}{8} = \dfrac{25}{8}$ $\qquad$ $T\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{25}{8}\right)$

$\text{ber } f = \left]-\infty, \dfrac{25}{8}\right]$

$\boxed{4 \quad f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x + \dfrac{1}{2}}$

$x_T = \dfrac{1}{2 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)} = 2$ $\qquad$ $x = 2$

$y_T = f(2) = \dfrac{1}{4} \cdot 4 - 2 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $T\left(2, -\dfrac{1}{2}\right)$

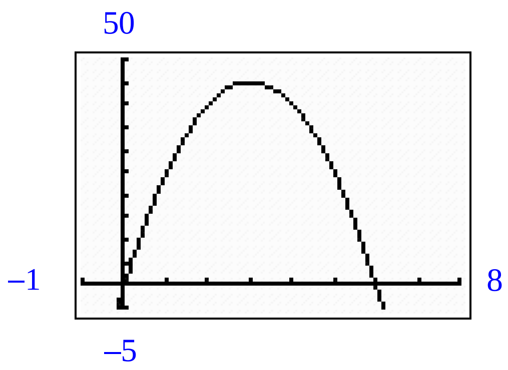
$\text{ber } f = \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

Opdracht 22 bladzijde 86

Een projectiel wordt verticaal afgeschoten. Na t seconden is de hoogte (in meter) boven het vertrekpunt $h = 30t - 5t^2$.

1 Maak een tabel en teken een grafiek van deze functie.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
h	0	25	40	45	40	25	0	– 35



2 Wat is het zinvolle domein van deze functie?

Het zinvolle domein is $[0,6]$, want de hoogte van de pijl is positief en de tijd is ook positief.

3 Hoeveel tijd heeft het projectiel nodig om zijn maximale hoogte te bereiken? Wat is deze maximale hoogte?

$x_T = \dfrac{-30}{-10} = 3 \quad \rightarrow$ De pijl heeft 3 seconden nodig om de maximale hoogte te bereiken.

$y_T = f(3) = 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 45 \quad \rightarrow$ De maximale hoogte is 45 m.

4 Na hoeveel tijd is het projectiel terug op de grond?

na 6 seconden (h = 0)

Opdracht 23 bladzijde 86

Els gooit haar potje Tipp-Ex naar Marlies. Het beschrijft bij zijn vlucht door het klaslokaal een parabolische baan. De vergelijking van de baan is $y = -0,625x^2 + 2x + 1$.
Hierbij stelt y de hoogte voor van (het laagste punt van) het potje t.o.v. de grond (in meter), en x de afstand t.o.v. Els (ook in meter).
Het potje valt op de bank van Marlies, net vóór haar. Haar bank bevindt zich op een hoogte van 1 m.

1 Hoe ver zit Marlies van Els?

$$x_T = \frac{2}{2 \cdot 0,625} = 1,6$$

Wegens de symmetrie bevindt Marlies zich op 2 keer de afstand van Els tot de top; dus Marlies zit $2 \cdot 1,6 = 3,2$ m van Els.

2 Het plafond van het lokaal is 2,75 m hoog.
Hoe ver is het potje, op zijn hoogste punt, nog van het plafond verwijderd?

$$y_T = f(1,6) = -0,625 \cdot 1,6 + 2 \cdot 1,6 + 1 = 2,6$$

Het potje bevindt zich op zijn hoogste punt op 2,6 m hoogte; dus nog 15 cm van het plafond verwijderd.

3 Op het moment van deze worp staat de leraar wiskunde tussen Els en Marlies, op een afstand van 50 cm van Els. De leraar is 1,83 m lang (schoenen inbegrepen).
Krijgt hij het potje tegen zijn hoofd? Verklaar.

$$f(0,5) = -0,625 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 0,5 + 1 = 1,843\,75$$

Het potje gaat juist boven het hoofd van de leraar, er is 1,375 cm over.

Opdracht 24 bladzijde 86

1 Geef de top en de symmetrieas van de grafiek van de functie $f(x) = x^2 + 6x + 5$.
Over welk interval is de functie stijgend? En dalend?

$x_T = \frac{-6}{2} = -3$ $\quad$ $T(-3, -4)$ $\quad$ $x = -3$ (dalparabool)

$y_T = 9 - 18 + 5 = -4$

f is stijgend over $[-3, +\infty[$ en dalend over $]-\infty, -3]$.

2 Over welk interval is de functie $f(x) = -x^2 + 4x + 4$ stijgend? En dalend?

$x_T = \frac{-4}{-2} = 2$ $\quad$ $T(2, 8)$ $\quad$ $x = 2$ (bergparabool)

$y_T = -4 + 8 + 4 = 8$

f is stijgend over $]-\infty, 2]$ en dalend over $[2, +\infty[$.

Opdracht 25 bladzijde 88

Bepaal het verloopschema van de gegeven functies.

1 $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$

x		-1	
y	↘	4 min	↗

$x_T = \frac{-4}{4} = -1$

$y_T = f(-1) = 2 - 4 + 6 = 4$

2 $f(x) = -5x^2 + 10x + 5$

x		1	
y	↗	10 max	↘

$x_T = \frac{-10}{-10} = 1$

$y_T = f(1) = -5 + 10 + 5 = 10$

3 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}$

x		0	
y	↘	$\frac{1}{2}$ min	↗

$x_T = 0$
$y_T = \frac{1}{2}$

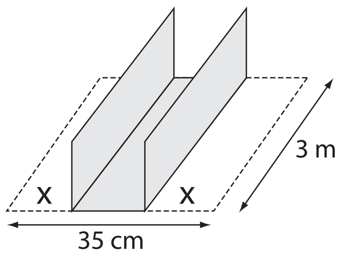
4 $f(x)=-x^2+9x$

x		4,5	
y	↗	20,25 max	↘

$x_T = \frac{-9}{-2} = 4,5$
$y_T = -4,5^2 + 9\cdot 4,5 = 20,25$

Opdracht 26 bladzijde 88

Een goot wordt gemaakt door de randen van een aluminium plaat van 35 cm breed en 3 m lang naar boven te plooien tot de randen loodrecht staan op het horizontaal stuk.



1 Bepaal de inhoud van de goot als x gelijk is aan 2 cm, 4 cm, ..., 16 cm.

x	2	4	6	8	10	12	14	16
I	18 600	32 400	41 400	45 600	45 000	39 600	29 400	14 400

2 Bij welke van deze waarden is de inhoud het grootst?

De inhoud is het grootst als x = 8 cm; nl. 45 600 cm³ of 45,6 liter.

Opdracht 27 bladzijde 89

Een rechthoek heeft als lengte 20 cm en als breedte 5 cm. We verkorten de lengte met x cm en verlengen de breedte met x cm.
Voor welke waarde van x is de oppervlakte van de rechthoek maximaal?
Welke vorm heeft de rechthoek dan?

Oplossing

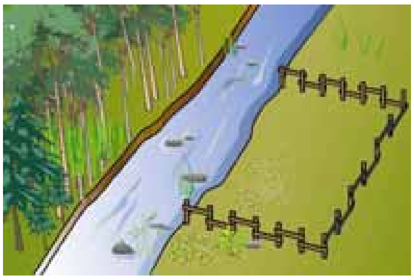
$$l = 20 - x$$
$$b = 5 + x$$
$$\begin{aligned} A &= (20 - x)(5 + x) \\ &= -x^2 + 15x + 100 \end{aligned}$$
$$x_T = \frac{-15}{-2} = 7{,}5$$

De lengte is $(20 - 7{,}5)\,\text{cm} = 12{,}5\,\text{cm}$ en de breedte is $(5 + 7{,}5)\,\text{cm} = 12{,}5\,\text{cm}$.

Het is een vierkant.

Opdracht 28 bladzijde 90

Lars krijgt 17 m draad en moet hiermee een rechthoekig campingplaatsje afspannen, waarbij één zijde langs een rivier ligt (hier is geen afspanning nodig).



1 Bij welke afmetingen verkrijgt hij de grootst mogelijke oppervlakte?

$A = l \cdot b$ (te maximaliseren)

$17 = 2b + l$ stel b = x
$l = 17 - 2x$

$$\begin{aligned} A &= x(17 - 2x) \\ &= -2x^2 + 17x \end{aligned}$$
$$x_T = \frac{-17}{-4} = 4{,}25$$

De breedte moet 4,25 m zijn; de lengte $(17 - 2 \cdot 4{,}25)\,\text{m} = 8{,}5$ m.

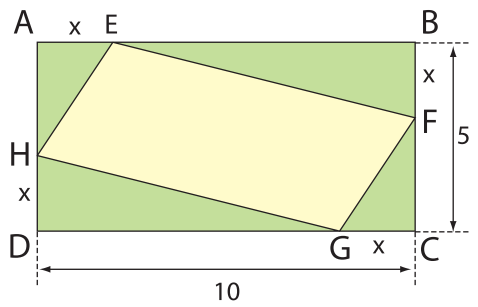
2 Hoe groot is die oppervlakte dan?

De maximale oppervlakte is dan $4,25\text{ m}\cdot 8,5\text{ m} = 36,125\text{ m}^2$.

(of: $A(4,25) = -2\cdot 4,25^2 + 17\cdot 4,25 = 36,125$)

Opdracht 29 bladzijde 90

Gegeven is de rechthoek ABCD met $|AB| = 10$ cm en $|BC| = 5$ cm. Op elk van de zijden passen we een lijnstuk af met een lengte van x cm.
Zo vinden we het parallellogram EFGH.
Voor welke waarde van x is de oppervlakte van dit parallellogram minimaal?



Oplossing

$$\begin{aligned} A_{\text{parallellogram}} &= A_{\square ABCD} - 2\cdot A_{\triangle AHE} - 2\cdot A_{\triangle EBF} \quad (\text{wegens congruentie}) \\ &= 10\cdot 5 - 2\cdot\frac{x(5-x)}{2} - 2\cdot\frac{x(10-x)}{2} \\ &= 50 - 5x + x^2 - 10x + x^2 \\ &= 2x^2 - 15x + 50 \end{aligned}$$

$$x_T = \frac{15}{4} = 3,75$$

Als $x = 3,75$ cm is de oppervlakte van het parallellogram minimaal.

Opdracht 30 bladzijde 90

Een bioscoop heeft bij een inkomprijs van € 8 gemiddeld 240 bezoekers.
Wordt de inkomprijs met € 0,25, € 0,50, ... verhoogd, dan loopt het bezoekersaantal terug met 10, 20, ... mensen.

1 Bij welke inkomprijs zijn de inkomsten maximaal?

x = het aantal keer dat de toegangsprijs verhoogd wordt.

inkomprijs = $8+0,25\cdot x$

aantal bezoekers = $240-10x$

inkomsten $=f(x)=(8+0,25x)(240-10x)$

$$=1920-80x+60x-2,5x^2$$
$$=-2,5x^2-20x+1920$$

$x_T=\dfrac{20}{-5}=-4 \quad\Rightarrow\quad$ inkomprijs = € $(8-4\cdot 0,25)$ = € 7

2 Hoeveel bedragen die dan?

$y_T=-2,5\cdot(-4)^2-20\cdot(-4)+1920=1960$

De inkomsten bedragen € 1960.

Opdracht 31 bladzijde 91

De boog van de onderstaande brug heeft de vorm van een parabool. Het wegdek is 80 meter lang en het hoogste punt ligt 20 meter boven dit wegdek.
Geef een voorschrift van de bijbehorende tweedegraadsfunctie in het getekende assenstelsel.

Oplossing

eerste oplossingsmethode

$y = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$T(40,20) \quad \Rightarrow \quad y = a(x-40)^2 + 20$

$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = a(0-40)^2 + 20$

$\Rightarrow \quad a = -\dfrac{20}{1600} = -0,0125$

$y = -0,0125(x-40)^2 + 20 = -0,0125x^2 + x$

tweede oplossingsmethode

$y = ax^2 + bx + c$

$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

$x_T = 40 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{-b}{2a} = 40 \quad \Rightarrow \quad b = -80a$

$y_T = 20 \qquad f(40) = 20 \quad \Rightarrow \quad 40^2 a + 40 \cdot (-80a) = 20$

$a = -0,0125$

$b = -80 \cdot (-0,0125) = 1$

$y = -0,0125x^2 + x$

Opdracht 32 bladzijde 93

Bepaal het voorschrift van de volgende tweedegraadsfuncties.

1 De grafiek gaat door de oorsprong en de top is $T(4,3)$.

$T(4,3)$ $\quad y = a(x-4)^2 + 3$

$O(0,0)$ $\quad 0 = a(-4)^2 + 3$

$$a = \frac{-3}{16}$$

$$y = -\frac{3}{16}(x-4)^2 + 3$$

$$y = -\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{2}x$$

2 De grafiek heeft als top $T(-4,0)$ en als snijpunt met de y-as $A(0,-2)$.

$T(-4,0)$ $\quad y = a(x+4)^2$

$A(0,-2)$ $\quad -2 = a \cdot 16$

$$a = \frac{-1}{8}$$

$$y = -\frac{1}{8}(x+4)^2$$

$$y = -\frac{1}{8}x^2 - x - 2$$

3 De grafiek gaat door $A(5,2)$ en de top is $T(3,4)$.

$T(3,4)$ $\quad y = a(x-3)^2 + 4$

$A(5,2)$ $\quad 2 = a(5-3)^2 + 4$

$$2 = a \cdot 4 + 4$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

4 De grafiek gaat door $A(-3,0)$, $B(5,0)$ en $C(0,4)$.

$C(0,4)$ $\quad 4 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$

$$c = 4$$

Wegens de symmetrie is $x_T = 1$.

$$\frac{-b}{2a} = 1 \quad \Rightarrow \quad b = -2a \quad (1)$$

$B(5,0)$ $\quad 0 = a \cdot 25 - 2a \cdot 5 + 4$

$$a = \frac{-4}{15}$$

Uit (1) volgt $b = \frac{8}{15}$.

$$y = -\frac{4}{15}x^2 + \frac{8}{15}x + 4$$

5 De grafiek gaat door $A(0,3)$, $B(3,0)$ en $C(6,3)$.

$A(0,3)$ $\quad c=3$

Wegens symmetrie is $B(3,0)$ de top.

$$\frac{-b}{2a}=3 \quad \Rightarrow \quad b=-6a \quad (1)$$

$$0=9a-6a\cdot 3+3$$

$$a=\frac{1}{3}$$

Uit (1) volgt $b=-2$.

$$y=\frac{1}{3}x^2-2x+3$$

6 De grafiek gaat door $A(2,2)$, $B(6,2)$ en $C(8,3)$.

Wegens symmetrie is $x_T=4$.

$$\frac{-b}{2a}=4 \quad \Rightarrow \quad b=-8a \quad (1)$$

$A(2,2)$ $\quad 2=4a-8a\cdot 2+c$

$$2=-12a+c \quad (2)$$

$C(8,3)$ $\quad 3=64a-8a\cdot 8+c$

$$3=c$$

Uit (2) volgt dan $2=-12a+3$.

$$a=\frac{1}{12}$$

En uit (1) volgt $b=-\frac{8}{12}=\frac{-2}{3}$.

$$y=\frac{1}{12}x^2-\frac{2}{3}x+3$$

Opdracht 33 bladzijde 93

De volgende tabellen horen bij een eerste- of een tweedegraadsfunctie.
Bepaal telkens het voorschrift.

1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-6	-8	-6	0	10	24	42

x		-2	
$f(x)$	$\searrow$	-8	$\nearrow$

We vermoeden dat f een tweedegraadsfunctie is die een minimum -8 bereikt voor $x = -2$.

Stel $f(x) = ax^2 + bx + c$, dan geldt $-\dfrac{b}{2a} = -2$ of $b = 4a$.

Verder geldt $f(0) = 0$, dus $c = 0$.

Het voorschrift is dus van de vorm $y = ax^2 + 4ax$.

$f(1) = 10$, dus $10 = a + 4a$ of $5a = 10$ of $a = 2$.

Het voorschrift is dus $y = 2x^2 + 8x$.

Bij controle blijkt dat $f(-3) = -6, f(-2) = -8, f(-1) = 6, f(2) = 24$ en $f(3) = 42$.

2

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$-1{,}5$	1	$2{,}5$	3	$2{,}5$	1	$-1{,}5$

x		0	
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

We vermoeden dat f een tweedegraadsfunctie is die een maximum 3 bereikt voor $x = 0$.

Stel $f(x) = ax^2 + bx + c$, dan geldt $b = 0$.

Verder geldt $f(0) = 3$, dus $c = 3$.

Het voorschrift is dus van de vorm $y = ax^2 + 3$.

$f(1) = 2{,}5$; dus $2{,}5 = a + 3$ of $a = -0{,}5$.

Het voorschrift is dus $y = -0{,}5x^2 + 3$.

Bij controle blijkt dat $f(-3) = -1{,}5; f(-2) = 1, f(-1) = 2{,}5; f(2) = 1$ en $f(3) = -1{,}5$.

3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	15	11	7	3	-1	-5	-9

Telkens x met 1 toeneemt, neemt $f(x)$ af met 4.

f is dus een eerstegraadsfunctie met richtingscoëfficiënt -4.

Het voorschrift is dus van de vorm $y=-4x+b$.

$f(0)=3$, dus $b=3$

Het voorschrift is dus $y=-4x+3$.

4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	18	11	6	3	2	3	6

x		1	
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

We vermoeden dat f een tweedegraadsfunctie is die een minimum 2 bereikt voor $x=1$.

Stel $f(x)=ax^2+bx+c$, dan geldt $-\dfrac{b}{2a}=1$ of $b=-2a$.

Verder geldt $f(0)=3$, dus $c=3$.

Het voorschrift is dus van de vorm $y=ax^2-2ax+3$.

$f(1)=2$, dus $2=a-2a+3$ of $a=1$.

Het voorschrift is dus $y=x^2-2x+3$.

Bij controle blijkt dat $f(-3)=19$, $f(-2)=11$, $f(-1)=6$, $f(2)=3$ en $f(3)=6$.

Opdracht 34 bladzijde 94

Bepaal telkens p en q zodat de functie $y = x^2 + px + q$

1 voor x = 2 een minimum heeft met -3 als functiewaarde

$T(2,-3)$ $\qquad y = (x-2)^2 - 3$

$$y = x^2 - 4x + 1$$

Antwoord: $p = -4$ en $q = 1$

2 voor $x = 4$ en $x = 2$ als functiewaarde 0 heeft

$f(4) = f(2) = 0$ Wegens symmetrie is $x_T = 3$

$$-\frac{b}{2a} = 3 \quad \Rightarrow \quad b = -6 = p \quad (a = 1)$$

$$y = x^2 - 6x + q$$

$f(2) = 0$ $\qquad 0 = 4 - 12 + q \quad \Rightarrow \quad q = 8$

Antwoord: $p = -6$ en $q = 8$

3 voor $x = \frac{1}{2}$ een minimum heeft en voor $x = 1$ als functiewaarde 0 heeft

$$x_T = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b = -1 = p$$

$$y = x^2 - x + q$$

$f(1) = 0$ $\qquad 0 = 1 - 1 + q$

Antwoord: $p = -1$ en $q = 0$

4 de y-as als symmetrieas heeft en de grafiek het punt $A(2,-3)$ bevat

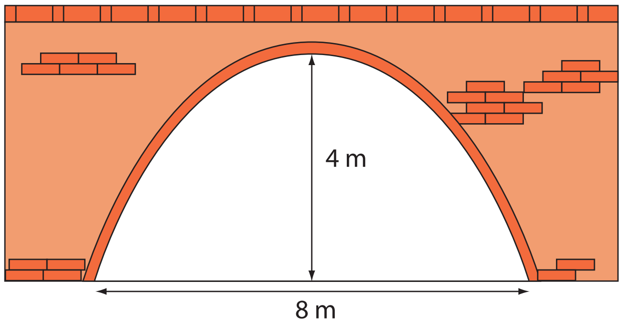
$$x_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-b}{2a} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 = p$$

$A(2,-3)$ $\qquad -3 = 4 + q \quad \Rightarrow \quad q = -7$

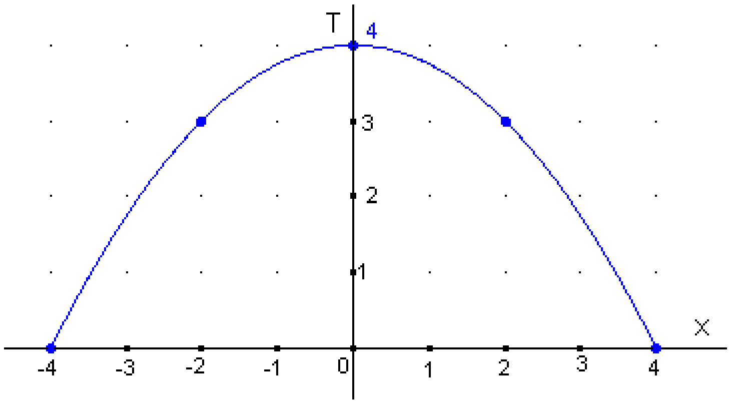
Antwoord: $p = 0$ en $q = -7$

Opdracht 35 bladzijde 94

Over een weg loopt een spoorwegbrug met onderaan een boog die parabolisch van vorm is. De doorgang voor het wegverkeer is 4 m hoog en op de weg 8 m breed.



Om het voorschrift van de tweedegraadsfunctie te bepalen, voeren we eerst een assenstelsel in.



De parabool heeft dan als top T(0,4) en gaat door de punten $(-4,0)$ en $(4,0)$.

Het voorschrift is van de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

- De symmetrieas is de x-as, dus b = 0.
- $f(0) = 4$, dus c = 4

Het voorschrift is dus van de vorm $y = ax^2 + 4$.

- De grafiek gaat door het punt (4,0), dus $0 = 16a + 4$, dus $a = -\frac{1}{4}$.

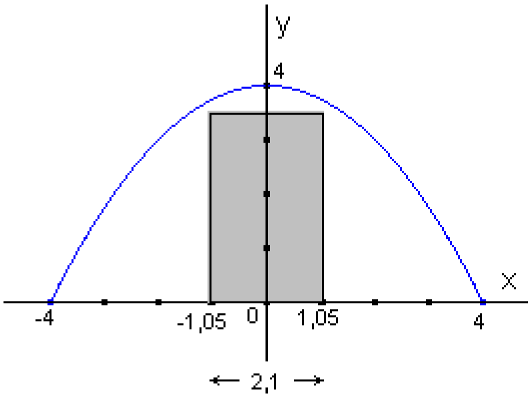
Het voorschrift is $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

1 Kan een vrachtwagen met een hoogte van 3,5 m en een breedte van 2,1 m passeren?

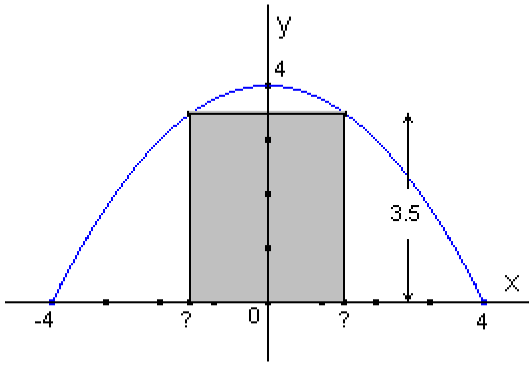
We berekenen y als $x = \frac{2,1}{2} = 1,05$.

$$y = -\frac{1,05^2}{4} + 4 = -\frac{1,1025}{4} + 4 = 3,724\,375.$$

Vermits $3,5 < 3,724\,375$ kan de vrachtwagen passeren.



2 Hoe breed mag een vrachtwagen met een hoogte van 3,5 m maximaal zijn?



We berekenen x als $y = 3{,}5$.

$$3{,}5 = -\frac{x^2}{4} + 4$$
$$\frac{x^2}{4} = 0{,}5$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41$$

De vrachtwagen mag maximum 2,82 m breed zijn.

3 Kan de vrachtwagen uit vraag 1 tegelijkertijd passeren met een bestelwagen die 2 m hoog is en 1,8 m breed? Er moet minstens 30 cm tussen beide voertuigen zijn.

Uit de berekeningen van nr. 1 blijkt dat de hoogte van de vrachtwagen kleiner moet zijn dan 3,724 375 m.

Uit de berekeningen van nr. 2 weten we dat de hoogte 3,5 m bereikt wordt voor $x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41$.

We berekenen nog voor welke x-waarde de hoogte 2 bereikt wordt.

$$2 = -\frac{x^2}{4} + 4$$
$$\frac{x^2}{4} = 2$$
$$x^2 = 8$$
$$x = \pm 2\sqrt{2} \approx \pm 2{,}82$$

Tussen $x = \sqrt{2}$ en $x = 2\sqrt{2}$ ligt dus een breedte gelijk aan $3\sqrt{2} \approx 4{,}24$.

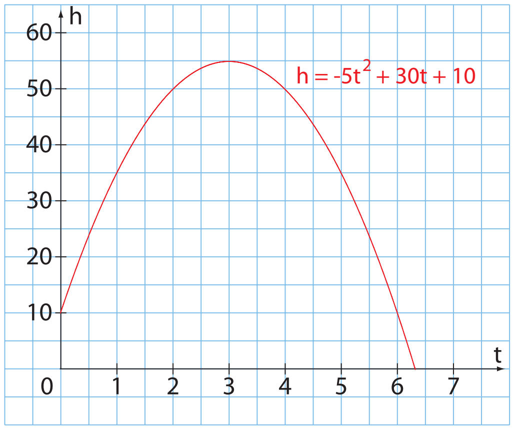
De beide wagens nemen samen $\left(2{,}1^2 + 1{,}86\right)\text{ m} = 3{,}90\text{ m}$ in beslag.

Er is dus nog ongeveer 0,34 m tussenruimte. Dit is meer dan 0,30 m die nodig is.

Ze kunnen dus terzelfdertijd passeren.

Opdracht 36 bladzijde 95

Vanaf een toren van 10 m hoog wordt een pijl recht omhoog geschoten. Je kunt de hoogte h (in m) na t seconden uitdrukken met het voorschrift $h = -5t^2 + 30t + 10$.



1 Na hoeveel seconden bereikt de pijl zijn maximale hoogte? Wat is deze maximale hoogte?

grafisch: na 3 seconden

algebraïsch: $x_T = \dfrac{-30}{-10} = 3 \quad \rightarrow$ na 3 seconden

maximale hoogte: grafisch: 55 m

algebraïsch: $h(3) = (-5 \cdot 9 + 30 \cdot 3 + 10)\,m = 55\,m$

2 Welke verticale afstand heeft de pijl dan afgelegd?

verticale afstand = $(55 - 10)\,m = 45\,m$

3 Bereken hieruit de gemiddelde snelheid in dit tijdsinterval.

gemiddelde snelheid in tijdsinterval $[0,3] = \dfrac{45}{3}\,m/s = 15\,m/s$

4 Wat is de gemiddelde snelheid gedurende de eerste seconde?

gemiddelde snelheid gedurende de eerste seconde $= f(1) - f(0) = (35 - 10)\,m/s = 25\,m/s$

5 Wat is de gemiddelde snelheid gedurende de tweede seconde?

gemiddelde snelheid gedurende de tweede seconde

$= f(2) - f(1) = (50 - 35)\,m/s = 15\,m/s$

Opdracht 37 bladzijde 98

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$.

Bereken de gemiddelde helling over de intervallen $[-1, 1], [1, 3], [3, 5]$ en $[5, 7]$.

Oplossing

		+2		+2		+2		+2	
x	-1		1		3		5		7
y	-4,5		3,5		7,5		7,5		3,5
		+8		+4		+0		-4	

in $[-1,1]$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{2} = 4$

in $[1,3]$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$

in $[3,5]$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{2} = 0$

in $[5,7]$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{2} = -2$

Opdracht 38 bladzijde 98

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ en $h(x) = 3x^2$.

Bereken voor elke functie de gemiddelde verandering over het interval $[2, 3]$. Wat stel je vast?

Oplossing

		+1	
x	2		3
$f(x)$	4		9
		+5	
$g(x) = \frac{1}{2}f(x)$	2		$\frac{9}{2}$
		+2,5	
$h(x) = 3f(x)$	12		27
		+15	

Voor f geldt in [1,4] $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 5$

Voor g geldt in [1,4] $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5$

Voor h geldt in [1,4] $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 15 = 3 \cdot 5$

De differentiequotiënten worden met dezelfde factoren vermenigvuldigd als de functiewaarden.

Opdracht 39 bladzijde 100

Welke transformaties moeten we uitvoeren om de grafiek van $y = x^2$ om te zetten in de grafiek van de volgende functies?

1 $f(x) = 2x^2$

verticale uitrekking met factor 2

2 $f(x) = 3(x+8)^2$

verticale uitrekking met factor 3, verschuiving naar links over 8 eenheden (verschuiving over $\vec{v}(-8,0)$)

3 $f(x) = (x-4)^2 + 1$

verschuiving naar rechts over 4 eenheden en naar boven over 1 eenheid (verschuiving over $\vec{v}(4,1)$)

4 $f(x) = -(x+2)^2 - 7$

spiegeling om de x-as, verschuiving naar links over 2 eenheden en naar beneden over 7 eenheden (verschuiving over $\vec{v}(-2,-7)$)

Opdracht 40 bladzijde 100

Geef het functievoorschrift van de grafiek die ontstaat uit de grafiek van $y = x^2$ door de volgende transformaties.

1 Een verschuiving over de vector $\vec{v}(0,-3)$

$y = x^2 - 3$

2 Een verticale uitrekking met factor 3 en een verschuiving over de vector $\vec{v}(2,0)$

$y = 3(x-2)^2$

3 Een verschuiving over de vector $\vec{v}(-1,4)$

$y = (x+1)^2 + 4$

4 Een spiegeling om de x-as, daarna een verschuiving over 3 eenheden naar rechts en 2 eenheden naar beneden.

$y = -(x-3)^2 - 2$

5 Een verschuiving over 1 eenheid naar boven en 5 eenheden naar links, daarna een spiegeling om de x-as.

$y = -\left[(x+5)^2 + 1\right] = -(x+5)^2 - 1$

Opdracht 41 bladzijde 100

Bepaal de afstand tussen de toppen van de parabolen met voorschrift $y = x^2$ en $y = -(x-4)^2 + 3$.

Oplossing

$y = x^2$ top $T_1(0,0)$

$y = -(x-4)^2 + 3$ top $T_2(4,3)$

$$\begin{aligned} d(T_1, T_2) &= \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Opdracht 42 bladzijde 100

Een parabool met voorschrift $y = x^2$ wordt gesneden door de verticale rechten met vergelijking $x = -2$ en $x = 4$, respectievelijk in de punten A en B.
Wat is de richtingscoëfficiënt van de rechte AB?

Oplossing

$y = x^2$

A?	$x = -2$	$f(-2) = 4$	$A(-2,4)$
B?	$x = 4$	$f(4) = 16$	$B(4,16)$

richtingscoëfficiënt van $AB = \dfrac{16-4}{4+2} = \dfrac{12}{6} = 2$

Opdracht 43 bladzijde 100

Welke transformaties moeten we telkens uitvoeren om de grafiek van $y = x^2$ om te zetten in de grafiek van de volgende functies?

$\boxed{1 \quad f(x) = x^2 + 2x + 1}$

$y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

verschuiving over 1 eenheid naar links $\left(\vec{v}(-1,0)\right)$

$\boxed{2 \quad f(x) = -x^2 + 4x - 4}$

$y = -x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x-2)^2$

spiegeling om de x-as, verschuiving over 2 eenheden naar rechts $\left(\vec{v}(2,0)\right)$

$\boxed{3 \quad f(x) = x^2 + 6x + 10}$

$y = x^2 + 6x + 10 = x^2 + 6x + 9 + 1 = (x+3)^2 + 1$

verschuiving over 3 eenheden naar links en 1 eenheid naar boven $\left(\vec{v}(-3,1)\right)$

$\boxed{4 \quad f(x) = -x^2 - 4x + 1}$

$y = -x^2 - 4x + 1 = -(x^2 + 4x - 1) = -(x^2 + 4x + 4 - 4 - 1) = -(x+2)^2 + 5$

spiegeling om de x-as, verschuiving over 2 eenheden naar links en over 5 eenheden naar boven $\left(\vec{v}(-2,5)\right)$

Opdracht 44 bladzijde 101

Wanneer de grafiek van de kwadratische functie g 4 eenheden naar links wordt verschoven, daarna verticaal wordt uitgerekt met factor 3, en dan 2 eenheden naar boven wordt verschoven, dan vinden we de grafiek van $f(x) = x^2$.
Geef het voorschrift van de functie g.

Oplossing

De grafiek van $f(x)$ wordt dus over 4 eenheden naar rechts verschoven, over 2 eenheden naar beneden, en verticaal uitgerekt met factor $\frac{1}{3}$ om de grafiek van $g(x)$ te verkrijgen;

m.a.w. $g(x) = \frac{1}{3}(x-4)^2 - 2$

Opdracht 45 bladzijde 101

Als $f(x) = x^2 + 3$ en $-2 \le x < 3$, dan is

A $3 \le f(x) < 12$ B $3 < f(x) < 12$ C $-1 < f(x) < 12$ D $7 < f(x) < 12$ E $7 \le f(x) < 12$

Oplossing

$f(x) = x^2 + 3$ $\quad f(-2) = 7$ $\quad f(3) = 12$

De grafiek van f is een dalparabool. We bepalen de top (de grafiek bereikt een minimum):

$x_T = 0$

$y_T = f(0) = 3$ $\quad T(0,3)$

m.a.w. $3 \le f(x) < 12$

Antwoord A is het juiste antwoord.

Opdracht 46 bladzijde 101

De parabool met voorschrift $y = (2-x)^2 - 4$ heeft slechts punten in drie kwadranten.
In welk kwadrant niet? Los op zonder grafisch rekentoestel.

Oplossing

$y = (2-x)^2 - 4 = (x-2)^2 - 4$

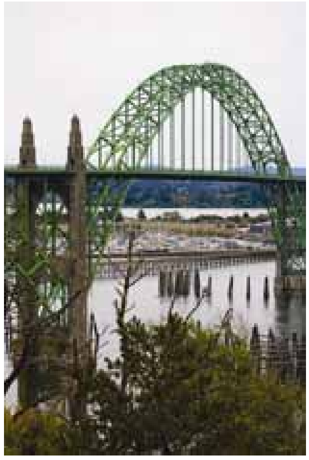
$T(2,-4)$ $\rightarrow$ de top ligt in het vierde kwadrant

De grafiek is een dalparabool; er bevinden zich dus zeker punten in het eerste en het tweede kwadrant.

We bepalen het snijpunt met de y-as: $f(0) = (0-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

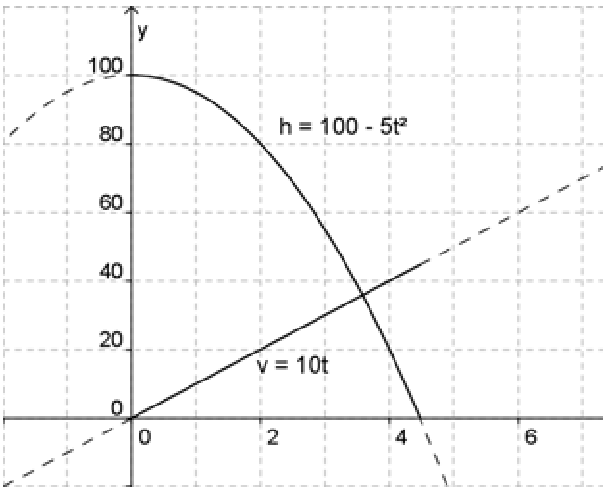
De grafiek snijdt de y-as in de oorsprong; er bevinden zich dus geen punten in het derde kwadrant.

Opdracht 47 bladzijde 101



Een steen valt van een brug van 100 m hoog.
De hoogte h (in m) boven de waterspiegel is na t seconden gelijk aan $h = 100 - 5t^2$.
De snelheid v (in m/s) van de steen is op hetzelfde moment gelijk aan v = 10t.

1 Maak een grafiek van beide functies in één venster.
Hou rekening met het zinvolle domein.



2 Bepaal grafisch en algebraïsch hoe lang het duurt vooraleer de steen in het water valt en wat de snelheid is op dat moment.

grafisch: nulpunt bepalen van $h = 100 - 5t^2$

$t = 4,47$ s

snelheid op dat moment is $44,68$ m/s $\approx 160,85$ km/h

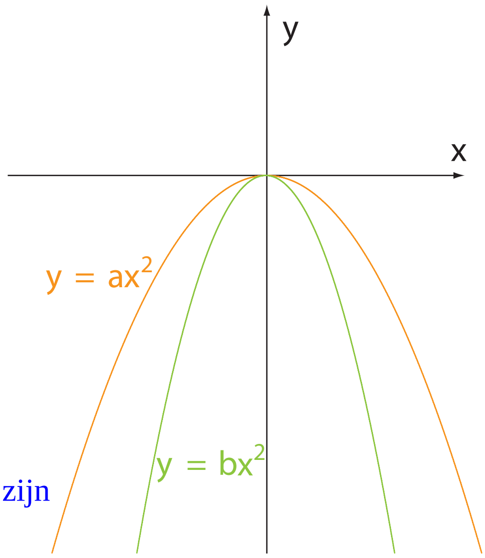
algebraïsch:

$$100 - 5t^2 = 0$$
$$5t^2 = 100$$
$$t^2 = 20$$
$$t = \sqrt{20} \text{ of } \cancel{-\sqrt{20}} \quad \text{(geen negatieve tijd)}$$
$$\simeq 4,47$$

$$v = 10t = 10 \cdot 4,47 = 44,7$$

Na 4,47 s valt de steen in het water met een snelheid van 44,7 m/s

Opdracht 48 bladzijde 101



Welke uitspraak hoort bij de volgende figuur?

A $a \cdot b \leq 0$

B $0 < b < a$

C $0 < a < b$

D $b < a < 0$

E $a < b < 0$

Oplossing

Beide grafieken zijn bergparabolen $\rightarrow$ A, B en C zijn dus onmogelijk.

De coëfficiënt van x^2 bij de smalste grafiek is het grootst in absolute waarde(dus b).

Antwoord D is het juiste antwoord.

Opdracht 49 bladzijde 102

Een functie f bereikt een minimum (maximum) voor $x = \alpha$ als voor elke x geldt:
$f(x) \geq f(\alpha)$ $(f(x) \leq f(\alpha))$. Dit minimum (maximum) is $f(\alpha)$.
Bewijs met behulp van de eigenschappen van ongelijkheden dat de functie
$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ een minimum heeft voor $x = \alpha$ als $a > 0$ en een maximum heeft voor $x = \alpha$ als $a < 0$. Dit minimum (maximum) is β.

a) Gegeven: $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
$a > 0$

Te bewijzen: $f(x) \geq f(\alpha)$ voor alle x en $f(\alpha) = \beta$

Bewijs

$$(x-\alpha)^2 \geq (\alpha-\alpha)^2 \ (=0) \quad (\text{kwadraat is altijd } \geq 0)$$
$$\Downarrow$$
$$a(x-\alpha)^2 \geq a(\alpha-\alpha)^2 \quad (a > 0 \Rightarrow \text{ zin ongelijkheid blijft behouden})$$
$$\Downarrow$$
$$a(x-\alpha)^2 + \beta \geq a(\alpha-\alpha)^2 + \beta = \beta$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) \geq f(\alpha) = \beta$$

b) Gegeven: $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
$a < 0$

Te bewijzen: $f(x) \leq f(\alpha)$ voor alle x en $f(\alpha) = \beta$

Bewijs

$$(x-\alpha)^2 \geq (\alpha-\alpha)^2 (=0)$$
$$\Downarrow$$
$$a(x-\alpha)^2 \leq a(\alpha-\alpha)^2 \qquad (a<0 \Rightarrow \text{ zin van de ongelijkheid keert om})$$
$$\Downarrow$$
$$a(x-\alpha)^2 + \beta \leq a(\alpha-\alpha)^2 + \beta = \beta$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) \leq f(\alpha) = \beta$$

Opdracht 50 bladzijde 102

Een functie is stijgend (dalend) over een interval I als en slechts als voor alle x_1 en x_2 in I geldt : $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)\; \left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.
Bewijs met behulp van de eigenschappen van ongelijkheden dat de functie $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ stijgend is over het interval $[\alpha, +\infty[$ en dalend over het interval $]-\infty, \alpha]$ als $a > 0$.

Oplossing

Gegeven: $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ en $a > 0$

Te bewijzen: f is stijgend over $[\alpha, +\infty[$ en dalend over $]-\infty, \alpha]$

Bewijs

- Neem x_1, x_2 in $[\alpha, +\infty[$ waarbij $x_1 < x_2$

  Dan moeten we bewijzen dat $f(x_1) < f(x_2)$

$$x_1 < x_2$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \qquad (\alpha \leq x_1 < x_2 \text{ dus } x_2 - \alpha > 0 \text{ en } x_1 - \alpha \geq 0)$$
$$\Downarrow$$
$$(x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Bij het kwadrateren van positieve getallen}\\ \text{blijft de zin van de ongelijkheid behouden.}\end{array}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$a(x_1-\alpha)^2 < a(x_2-\alpha)^2 \qquad (a > 0 \;\Rightarrow\; \text{zin ongelijkheid blijft behouden})$$
$$\Downarrow$$
$$a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta$$
$$\Downarrow$$
$$f(x_1) < f(x_2)$$

- Neem x_1, x_2 in $]-\infty, \alpha]$ waarbij $x_1 < x_2$

  Dan moeten we bewijzen dat $f(x_1) > f(x_2)$

$$x_1 < x_2$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \qquad (x_1 < x_2 \leq \alpha \text{ dus } x_1 - \alpha < 0 \text{ en } x_2 - \alpha \leq 0)$$
$$\Downarrow$$
$$(x_1 - \alpha)^2 > (x_2 - \alpha)^2 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Bij het kwadrateren van negatieve getallen} \\ \text{keert de zin van de ongelijkheid om.}\end{array}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$a(x_1 - \alpha)^2 > a(x_2 - \alpha)^2 \qquad (a > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{zin ongelijkheid blijft behouden})$$
$$\Downarrow$$
$$a(x_1 - \alpha)^2 + \beta > a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$$
$$\Downarrow$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

Opdracht 51 bladzijde 103

Bepaal de symmetrieas en de top van de grafiek van de volgende functies.

$\boxed{1 \quad f(x) = x^2 + 4x + 10}$

$$x_T = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad x = -2 \qquad T(-2, 6)$$
$$y_T = f(-2) = 4 - 8 + 10 = 6$$

$\boxed{2 \quad f(x) = -2x^2 + 4}$

$$x_T = \frac{-b}{2a} = 0 \qquad x = 0 \qquad T(0, 4)$$
$$y_T = f(0) = 4$$

$\boxed{3 \quad f(x) = -x^2 + x}$

$$x_T = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \qquad x = \frac{1}{2} \qquad T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$
$$y_T = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$\boxed{4 \quad f(x) = 0,4x^2 + 4x - 8}$

$$x_T = \frac{-4}{2 \cdot (0,4)} = -5 \qquad x = -5 \qquad T(-5, -18)$$
$$y_T = f(-5) = -18$$

Opdracht 52 bladzijde 103

Geef het verloopschema van de volgende functies.

1 $f(x) = x^2 - 6x + 20$

$x_T = 3$ $y_T = 11$

x		3	
y	↘	11	↗

2 $f(x) = 3x^2 + 9$

$x_T = 0$ $y_T = 9$

x		0	
y	↘	9	↗

3 $f(x) = 10x^2 + 40x$

$x_T = -2$ $y_T = -40$

x		-2	
y	↘	-40	↗

4 $f(x) = -x^2 + 16x - 8$

$x_T = 8$ $y_T = 56$

x		8	
y	↗	56	↘

Opdracht 53 bladzijde 103

De rechte met vergelijking $x = 4$ is de symmetrieas van $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Vul de onderstaande tabel aan.

x	-2	2	3	4	5	6	…
$f(x)$	233	…	128	125	…	137	233

Oplossing

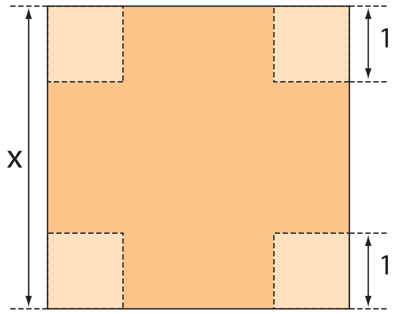
top T

x	-2	2	3	4	5	6	**10**
$f(x)$	233	**137**	128	125	**128**	137	233

(wegens symmetrie)

Opdracht 54 bladzijde 103

Uit een vierkant met zijde x worden aan de hoeken vierkanten met zijde 1 uitgesneden. Er blijft een gebied over met oppervlakte A.



1 Schrijf A als functie van x.

$A = x^2 - 4$

2 Maak een tabel bij deze functie. Laat x veranderen van 0 tot 10 met stappen van 2.

x	0	2	4	6	8	10
$f(x) = A$	-4	0	12	32	60	96

3 Wat is het zinvolle domein van deze functie?

$]2, +\infty[$

Opdracht 55 bladzijde 104

In de Oostenrijkse Alpen moet een ravijn van 120 m overbrugd worden met behulp van een viaduct. Deze bevat een stalen boog in de vorm van een parabool. Het wegdek wordt om de 10 m via een steunbalk met de boog verbonden. Het ingenieursbureau stelt voor de boog te construeren volgens de formule $y = -0,01x^2 + 1,2x - 20$. Hierbij stelt x de afstand voor vanaf de linkerpijler van de brug en y de hoogte van de boog t.o.v. het wegdek, beide in m.

1 Hoe hoog moet de steunbalk zijn op 30 m afstand vanaf de linkerpijler?

Als $x = 30$, dan $y = -0,01 \cdot 900 + 1,2 \cdot 30 - 20$

$= -9 + 36 - 20$

$= 7$

De steunbalk is 7 m hoog.

2 Op welke afstand moet een even lange steunbalk komen?

De symmetrieas is de rechte $x = -\dfrac{1,2}{-0,02} = 60$.

Er komt dus een even lange steunbalk op 90 m van de linker pijler.

3 Op welke afstand komt de middelste steunbalk en hoe hoog is die?

De middenste steunbalk komt op 60 m van de linker pijler.

Als $x = 60$, dan $y = -0,01 \cdot 3600 + 1,2 \cdot 60 - 20$

$= -36 + 72 - 20$

$= 16$

De steunbalk is 16 m hoog.

4 Hoeveel meter onder het wegdek zal de boog vastgeankerd worden in de rotswand?

Als $x = 0$, dan $y = -20$

De boog wordt 20 m onder het brugdek vastgeankerd.

Opdracht 56 bladzijde 104

De parametervergelijking $y = x^2 + (m+1)x + m$ stelt een familie parabolen voor.

1 Bepaal m zodat de y-as de symmetrieas is. Controleer met een grafiek.

Als de y-as de symmetrieas is, dan is $x_T = \frac{-b}{2a} = 0$, waaruit volgt dat $b = m+1 = 0$,

dus $m = -1$.

$y = x^2 - 1$

2 Bepaal m zodat de parabool door de oorsprong gaat. Controleer met een grafiek.

De parabool gaat door de oorsprong, dus $f(0) = 0$.

$f(0) = 0 + (m+1) \cdot 0 + m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$

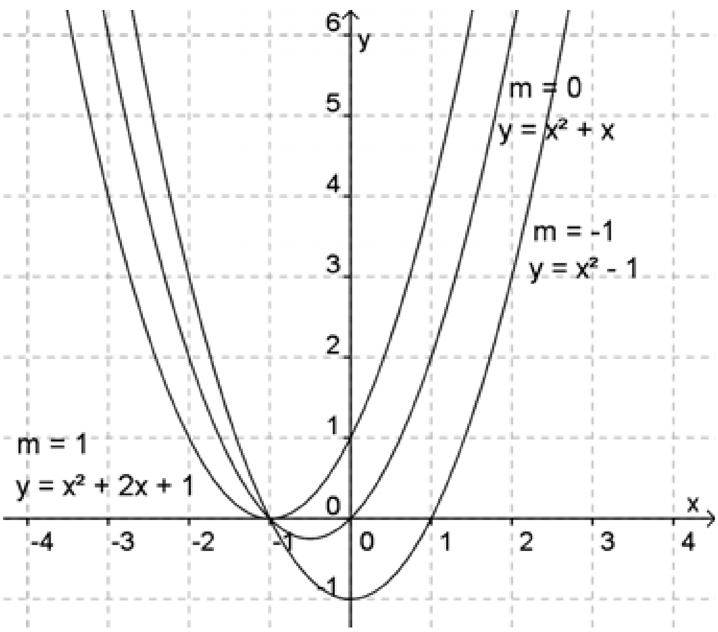
$y = x^2 + x$

3 Bepaal m zodat de parabool door het punt $(-1, 0)$ gaat. Controleer met een grafiek.

De parabool gaat door $(-1,0)$, dus $f(-1) = 0$.

$$f(-1) = 1 + (m+1) \cdot (-1) + m = 0$$
$$1 - m - 1 + m = 0$$

Dit geldt voor elke reële waarde van m.



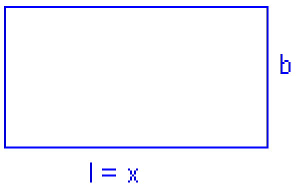
Opdracht 57 bladzijde 104

Een huis met rechthoekig grondvlak moet een omtrek hebben van 40 m.

1 Welke vorm zal het grondvlak waarschijnlijk hebben als de oppervlakte zo groot mogelijk moet zijn?

een vierkant

2 Toon je vermoeden aan met berekeningen.



De omtrek van een rechthoek is $2(l+b)$.

We noemen de lengte x; dan geldt: $2(x+b)=40$.

$b = 20 - x$

De te maximaliseren functie is de oppervlakte van een rechthoek:

$A = l \cdot b = x(20-x) = -x^2 + 20x$. Dit is een bergparabool, de functie bereikt dus een maximum.

$x_T = \dfrac{-20}{-2} = 10$ $\qquad y_T = f(10) = -100 + 200 = 100$.

De lengte van het grondplan is 10 m, de breedte $b = (20-10)\,m = 10\,m$.

De oppervlakte is dan 100 m².

Opdracht 58 bladzijde 105

Lisander gooit een steen in een meer. De steen volgt een parabolische baan die voldoet aan de vergelijking $h = -\dfrac{1}{6}x^2 + 2x + 1$. Hierbij is h de hoogte van de steen in meter en x de horizontale afstand van de steen tot Lisander in meter.

1 Wat is de horizontale afstand van de steen tot Lisander als de steen zijn hoogste punt bereikt?

$h = -\dfrac{1}{6}x^2 + 2x + 1$ Dit is een bergparabool, deze functie bereikt dus een maximum.

De steen bereikt zijn hoogste punt in de top. De horizontale afstand van Lisander tot de steen is dan $x_T = \dfrac{-2}{2 \cdot \left(\dfrac{-1}{6}\right)}\,m = 6\,m$.

2 Op welke hoogte bevindt de steen zich dan?

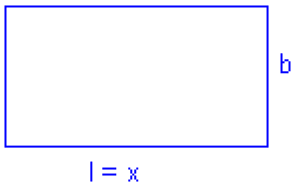
$y_T = h(6) = -\dfrac{1}{6} \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 1 = 7$

De maximale hoogte van de steen is 7 m.

Opdracht 59 bladzijde 105

Een boer heeft 300 m draad en wil hiermee een rechthoekige weide omheinen. Wat is de oppervlakte van de grootst mogelijke weide die met deze 300 m draad kan worden omheind?

Oplossing



De omtrek van een rechthoek is $2(l+b)$. We noemen de lengte x; dan geldt: $2(x+b)=300$.

$b=150-x$

De te maximaliseren functie is de oppervlakte van een rechthoek:

$A=l\cdot b=x(150-x)=-x^2+150x$. Dit is een bergparabool. Deze functie bereikt dus een maximum.

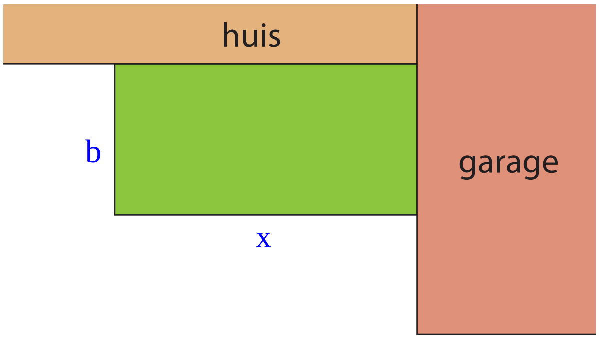
$$x_T=\frac{-150}{2\cdot(-1)}=75$$

$$y_T=f(75)=-75^2+150\cdot 75=5625$$

De oppervlakte van de grootst mogelijke weide is 5625 m².

Opdracht 60 bladzijde 105

Dries wil met 13 meter kippengaas een rechthoekige plaats voor zijn konijnen afrasteren. Hij gebruikt daarvoor de zijwanden van de garage en het huis.



1 Hoe lang moet hij de lengte en de breedte maken opdat de oppervlakte van het hok maximaal zou zijn?

Met de 13 m gaas moeten maar 2 zijden van het hok afgespannen worden.

We noemen de lengte x, dan geldt $x + b = 13$ of $b = 13 - x$.

De te maximaliseren functie is de oppervlakte van een rechthoek:

$A = l \cdot b = x(13 - x) = -x^2 + 13x$.

Dit is een bergparabool, de functie bereikt dus een maximum.

$x_T = \frac{-13}{-2} = 6,5$

De lengte van het hok is 6,5 m, de breedte is dan $(13 - 6,5)\,m = 6,5\,m$.

Het hok is dus een vierkant.

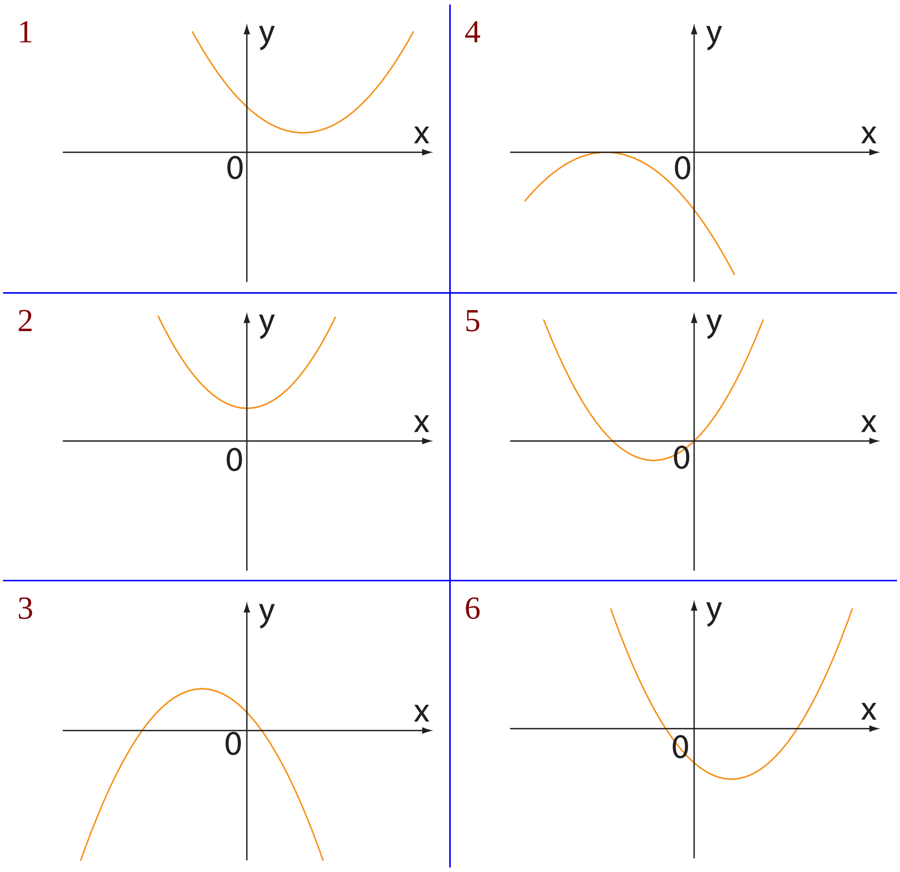
2 Hoe groot is die oppervlakte dan?

$y_T = f(6,5) = -6,5^2 + 13 \cdot 6,5 = 42,25$

De oppervlakte van het konijnenhok is 42,25 m².

Opdracht 61 bladzijde 106

Hieronder staan een aantal grafieken van tweedegraadsfuncties met voorschrift $y = ax^2 + bx + c$.
Bepaal telkens het teken van a, b en c.



Oplossing

1 $a > 0$: dalparabool

$c > 0$: de grafiek snijdt de y-as boven de oorsprong.

$b < 0$: de top ligt rechts van de y-as, dus $\frac{-b}{2a} > 0$ waaruit volgt dat $\frac{b}{2a} < 0$, maar $a > 0$, dus $b < 0$.

2 $a > 0$: dalparabool

$c > 0$: de grafiek snijdt de y-as boven de oorsprong.

$b = 0$: de symmetrieas is de y-as, dus $\frac{-b}{2a} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$.

3 $a < 0$: bergparabool

$c > 0$: de grafiek snijdt de y-as boven de oorsprong.

$b < 0$: de top ligt links van de y-as, dus $\frac{-b}{2a} < 0 \quad \Rightarrow \frac{b}{2a} > 0$ maar $a < 0$, dus $b < 0$.

4 $a < 0$: bergparabool

$c < 0$: de grafiek snijdt de y-as onder de oorsprong.

$b < 0$: de top ligt links van de y-as, dus $\frac{-b}{2a} < 0 \quad \Rightarrow \frac{b}{2a} > 0$ maar $a < 0$, dus $b < 0$.

5 $a > 0$: dalparabool

$c = 0$: de grafiek snijdt de y-as in de oorsprong.

$b > 0$: de top ligt links van de y-as, dus $\frac{-b}{2a} < 0 \quad \Rightarrow \frac{b}{2a} > 0$ maar $a > 0$, dus $b > 0$.

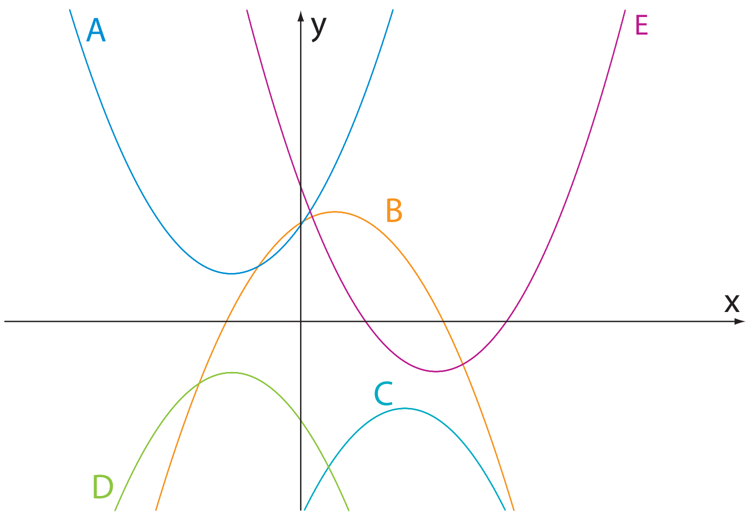
6 $a > 0$: dalparabool

$c < 0$: de grafiek snijdt de y-as onder de oorsprong.

$b < 0$: de top ligt rechts van de y-as, dus $\frac{-b}{2a} > 0 \quad \Rightarrow \frac{b}{2a} < 0$ maar $a > 0$, dus $b < 0$.

Opdracht 62 bladzijde 106

Bij welke van de getekende parabolen met voorschrift $y = ax^2 + bx + c$ zijn b en c strikt negatief ?



Oplossing

$c < 0$: het snijpunt van de grafiek met de y-as moet onder de oorsprong liggen, enkel grafiek C en D voldoen hieraan.

C en D zijn beide bergparabolen dus $a < 0$. Als $b < 0$ is, dan moet $\frac{b}{2a} > 0$ en dus $\frac{-b}{2a} < 0$.

De top ligt dus links van de y-as. Enkel grafiek D voldoet hieraan.

Opdracht 63 bladzijde 107

Bepaal m zodat de kwadratische functie $y = mx^2 - 3mx + 3$ een minimum heeft gelijk aan 2.

Oplossing

$$x_T = \frac{-b}{2a} = \frac{3m}{2m} = \frac{3}{2}$$

$$y_T = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \qquad (\text{het minimum is gelijk aan } 2)$$

$$m \cdot \frac{9}{4} - 3m \cdot \frac{3}{2} + 3 = 2$$

$$-\frac{9}{4}m = -1$$

$$m = \frac{4}{9} > 0: \text{ de grafiek is een dalparabool}$$

De functie bereikt wel degelijk een minimum.

Opdracht 64 bladzijde 107

Voor welke waarde van m raakt de functie $y = x^2 - 2x + 3m - 1$ de x-as?

Oplossing

Wanneer de grafiek de x-as raakt moet $y_T = 0$.

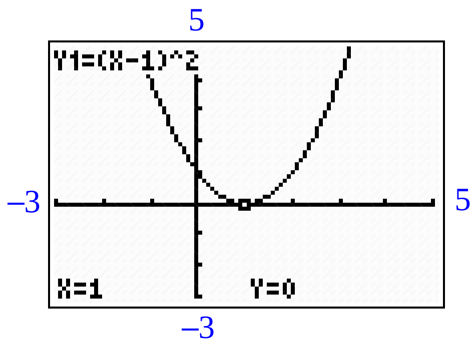
We berekenen $x_T = \frac{2}{2} = 1$

$$y_T = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$1 - 2 + 3m - 1 = 0$$

$$m = \frac{2}{3}$$



Het voorschrift is dus $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. De grafiek van deze functie raakt inderdaad de x-as.

Opdracht 65 bladzijde 107

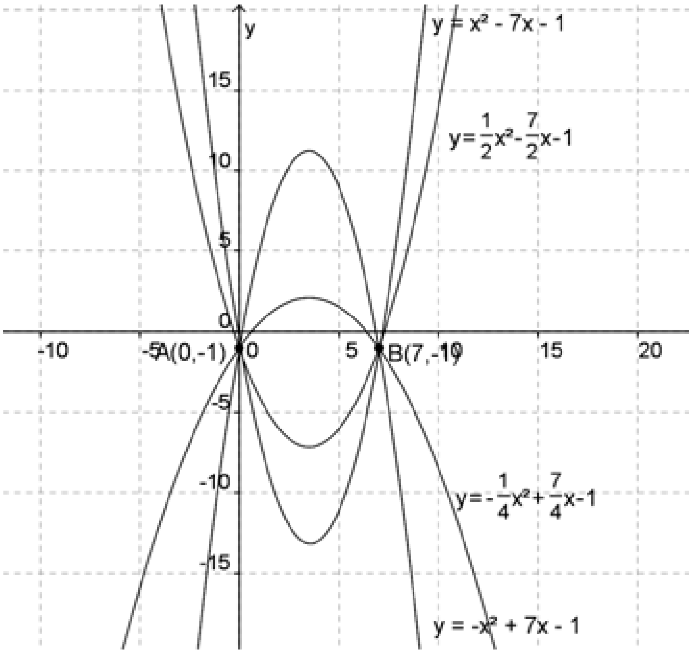
Beschouw de familie parabolen met vergelijking $y = mx^2 - 7mx - 1$.

1 Verklaar waarom deze parabolen allemaal dezelfde symmetrieas hebben.
Bepaal een vergelijking van deze symmetrieas.

Een vergelijking van de symmetrieas is

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{+7m}{2m} = 3,5.$$

De symmetrieas is dus onafhankelijk van m.



2 Toon aan dat al deze parabolen door eenzelfde punt gaan.

In het voorschrift is $c = -1$.

Dit is niet afhankelijk van m.

Het snijpunt met de y-as is dus voor al deze parabolen $A(0,-1)$.

Wegens de symmetrie ligt het punt $B(7,-1)$ ook op alle parabolen.

Opdracht 66 bladzijde 107

Voor welke waarden van m ligt de top van de parabool $y = x^2 - 2mx + m^2 - m + 2$ links van de y-as en onder de x-as?

Oplossing

- De top ligt links van de y-as, dus $x_T < 0$.

  $\frac{2m}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad m < 0$

- De top ligt onder van de y-as, dus $y_T < 0$.

  $f(m) < 0$

  $m^2 - 2m \cdot m + m^2 - m + 2 < 0$

  $m > 2$

Er zijn dus geen waarden mogelijk voor m.

Opdracht 67 bladzijde 107

Een veranderlijke rechthoek heeft een deel van de x-as als basis. De twee andere hoekpunten liggen op de parabool $y = 4 - x^2$.Hoe groot moeten de afmetingen van deze rechthoek zijn opdat de omtrek maximaal zou worden?

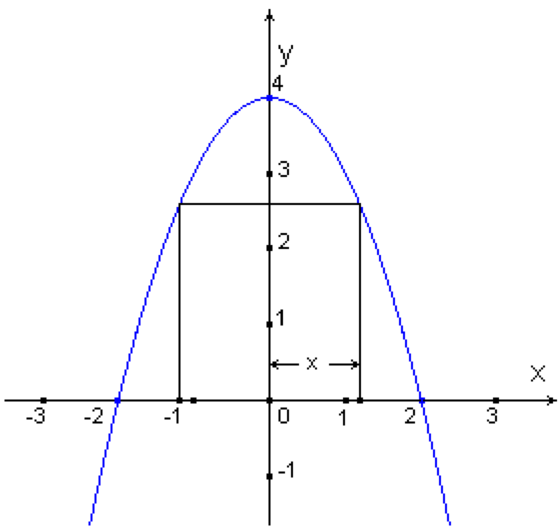
Oplossing

We stellen de halve lengte van de rechthoek gelijk aan x.

De lengte is dan 2x en de breedte $4 - x^2$.

De omtrek is dus

$$f(x) = 2 \cdot 2x + 2 \cdot (4 - x^2)$$
$$= -2x^2 + 4x + 8$$
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-4} = 1$$
$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -2 + 4 + 8 = 10$$

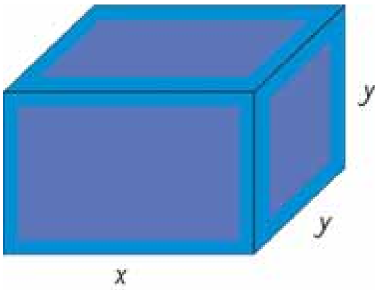


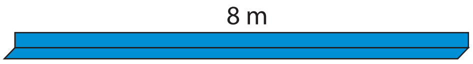
x		1	
f(x)	↗	10	↘

De omtrek is maximaal als $x = 1$, dus als de lengte gelijk is aan 2 en de breedte gelijk aan 3.

Opdracht 68 bladzijde 107

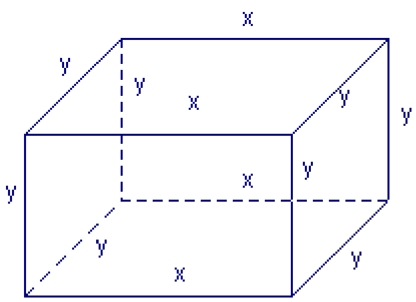
Pieter wil uit een hoekijzer met een lengte van 8 m het geraamte van een aquarium bouwen met lengte x (in m) en breedte en hoogte y (in m).
Voor welke waarde van x is de oppervlakte van het grondvlak van dit aquarium maximaal?





Oplossing

De oppervlakte A van het grondvlak is $x \cdot y$.



Nu geldt $4x + 8y = 8$ of $x + 2y = 2$ of $y = \frac{2-x}{2}$

Dus $A = f(x) = x \cdot \frac{2-x}{2} = -\frac{x^2}{2} + x$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{-1} = 1$

$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

x		1	
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

Het grondvlak is maximaal als $x = 1$.

Opdracht 69 bladzijde 108

Rond zijn Spaanse hacienda heeft Pablo een grote sinaasappelboomgaard.
Er staan 20 bomen per hectare en hij heeft een gemiddelde opbrengst van 300 sinaasappels per boom. Pablo wil meer bomen planten, maar zijn vrouw Angelina rekende uit dat, per bijkomende boom per hectare, het rendement per boom vermindert met 10 sinaasappels.

Hoeveel bomen moet Pablo bijplanten per hectare? Hij wil uiteraard een maximale opbrengst.

Oplossing

We stellen x gelijk aan het aantal bij te planten bomen per hectare.

We moeten de opbrengst maximaliseren:

Opbrengst = aantal bomen per hectare vermenigvuldigd met de opbrengst per boom

aantal bomen per hectare = $20 + x$

opbrengst per boom $= 300 - 10x$

Dus krijgen we: $f(x) = (20 + x)(300 - 10x)$

$$= -10x^2 + 100x + 6000$$

Dit is een bergparabool, de functie bereikt dus een maximum: $x_T = \dfrac{-100}{-20} = 5$.

Pablo moet 5 bomen per hectare bijplanten voor een maximale opbrengst per hectare van $y_T = f(5) = 6250$ sinaasappels.

Opdracht 70 bladzijde 108

Tom verkoopt tijdens de scoutsfuif hotdogs. Het aantal hotdogs dat hij verkoopt, hangt af van de prijs die hij vraagt. Op de vorige fuif verkocht hij 300 hotdogs aan € 1,5 per stuk. De fuif daarvoor vroeg hij € 1,3 en verkocht er 400. De kostprijs per hotdog is € 0,8.

1 Als je aanneemt dat het verband tussen de verkochte hoeveelheid en de prijs van de eerste graad is, bepaal dan het voorschrift dat het verkochte aantal y uitdrukt in functie van de prijs x.

x = prijs per stuk	1,5	1,3
y = aantal verkochte hotdogs	300	400

Het verband tussen x en y is van de eerste graad, we gebruiken de formule:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y - 300 = \frac{400 - 300}{1,3 - 1,5}(x - 1,5)$$
$$y - 300 = -500x + 750$$
$$y = -500x + 1050$$

2 Bij welke prijs is de omzet (de totale inkomsten) maximaal?

Omzet = aantal verkochte hotdogs vermenigvuldigd met de prijs per stuk

$$= y \cdot x$$
$$= (-500x + 1050)x$$
$$O = -500x^2 + 1050x$$

Dit is een bergparabool, de functie bereikt een maximum.

$$x_T = \frac{-1050}{2 \cdot (-500)} = 1,05$$

De omzet is maximaal als de verkoopprijs € 1,05 is.

3 Bij welke prijs is de winst maximaal? Bepaal ook deze winst.

Winst = omzet – kostprijs

$$= \text{omzet} - 0,8 \cdot \text{aantal verkochte hotdogs}$$
$$= -500x^2 + 1050x - 0,8 \cdot (-500x + 1050)$$
$$W = -500x^2 + 1450x - 840$$

Dit is een bergparabool, de functie bereikt een maximum.

$$x_T = \frac{-1450}{-1000} = 1,45$$

$$W(1,45) = -500 \cdot 1,45^2 + 1450 \cdot 1,45 - 840$$
$$= 211,25$$

De maximale winst is € 211,25 als Tom de hotdogs verkoopt aan € 1,45 per stuk.

Opdracht 71 bladzijde 108

In de school 'De Lindeboom' wil men gezondere dranken lanceren. Men vindt een producent die ongezoet fruitsap verkoopt aan € 0,40 per flesje. Uit een marktonderzoek blijkt dat het aantal verkochte flesjes per week als volgt afhangt van de verkoopprijs.

x = verkoopprijs (in €)	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
y = aantal verkochte flesjes per week	160	140	120	100	80

1 Schrijf de winst als functie van de verkoopprijs.

x = verkoopprijs (in €)	0,45 $\xrightarrow{+0,05}$	0,50	0,55	0,60	0,65
y = aantal verkochte flesjes per week	160 $\xrightarrow{-20}$	140	120	100	80
z = winst	8	14	18	20	20

Het verband tussen x en y is lineair.

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{-20}{0,05} = -400$$

$$140 = -400 \cdot 0 \cdot 5 + b \quad \Rightarrow \quad b = 340$$

Dus $y = -400x + 340$

$$\text{Winst} = \text{omzet} - \text{kosten}$$

$$\begin{aligned} z &= yx - 0,40y \\ &= y(x - 0,4) \\ &= (-400x + 340)(x - 0,4) \\ &= -400x^2 + 500x - 136 \end{aligned}$$

2 Bij welke verkoopprijs is de winst maximaal?

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-500}{-800} = 0,625$$

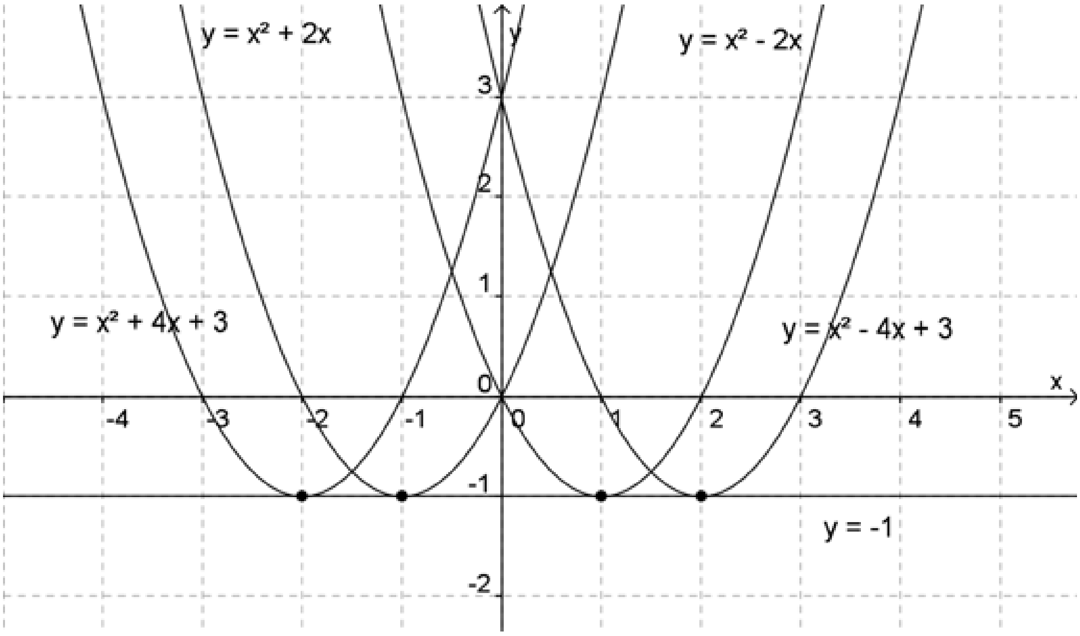
$$f(0,625) = 20,25$$

De winst is maximaal als de verkoopprijs € 0,625 bedraagt.

Opdracht 72 bladzijde 108

Beschouw de familie parabolen met vergelijking $y = x^2 - 2mx + m^2 - 1$.
Toon aan dat de toppen van deze parabolen op een rechte liggen en bepaal een vergelijking van deze rechte.

Oplossing



We bepalen de toppen van de familie parabolen in functie van m.

$$x_T = \frac{2m}{2} = m \qquad T(m,-1)$$

$$y_T = m^2 - 2m \cdot m + m^2 - 1 = -1$$

De y-coördinaat is onafhankelijk van m. De toppen liggen dus allemaal op de rechte $y = -1$.

Opdracht 73 bladzijde 109

Bepaal de voorwaarden voor a, b en c in $y = ax^2 + bx + c$ opdat

1 de y-as de symmetrieas is

Als de y-as symmetrieas is, is $x_T = \frac{-b}{2a} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$.

Voor a en c zijn er geen bijzondere voorwaarden, zodat $a \in \mathbb{R}_0$ en $c \in \mathbb{R}$.

2 de y-as de symmetrieas is en de top boven de oorsprong ligt

De y-as is symmetrieas, dus $b = 0$ en de top ligt op de y-as.

De top ligt ook boven de oorsprong, dus $c > 0$.

$a \in \mathbb{R}_0$.

3 de top links van de y-as ligt

De top ligt links van de y-as: $x_T = \frac{-b}{2a} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{2a} > 0$.

a en b moeten hetzelfde teken hebben, dus $a \cdot b > 0$.

$c \in \mathbb{R}$.

4 de grafiek een dalparabool is en het snijpunt met de y-as $(0, -7)$ is

dalparabool: $a > 0$

Het snijpunt met de y-as is $(0, -7) \quad \Rightarrow \quad c = -7$

$b \in \mathbb{R}$

Opdracht 74 bladzijde 109

Bepaal m en n zodat de functie $y = (m-n)x^2 + (n-1)x - 2m + n$ voor $x = 1$ een maximum gelijk aan 3 heeft.

Oplossing

$$x_T = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-(n-1)}{2(m-n)} = 1 \quad \Rightarrow \quad -n + 1 = 2m - 2n \quad \Rightarrow \quad n = -1 + 2m \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f(1) = 3 = y_T \quad &\Rightarrow \quad (m-n)\cdot 1^2 + (n-1)\cdot 1 - 2m + n = 3 \\ &\Rightarrow \quad -m + n = 4 \\ &\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad -m - 1 + 2m = 4 \\ &\Rightarrow \quad m = 5 \end{aligned}$$

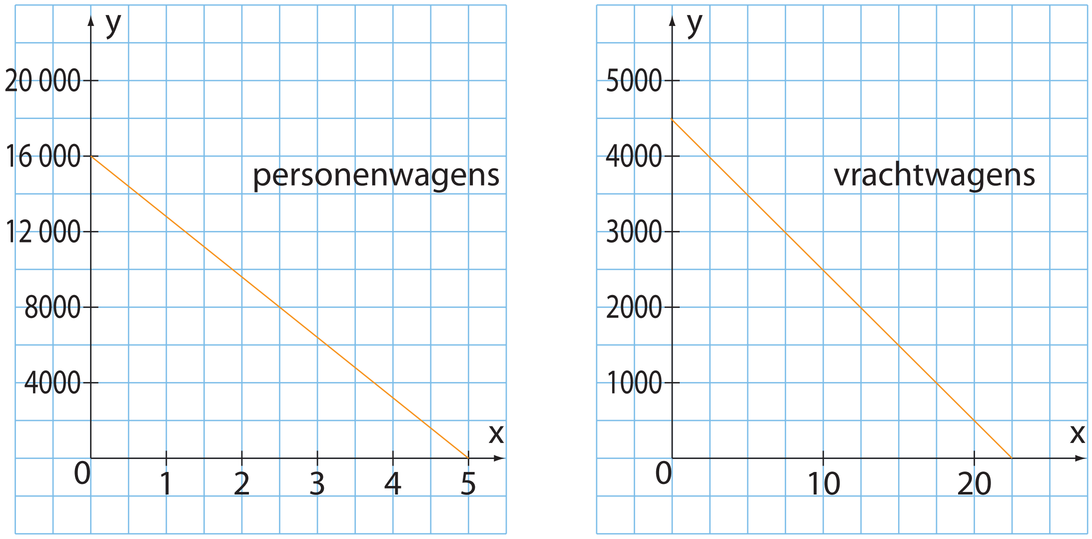
Uit (1) volgt dan $n = -1 + 2 \cdot 5 = 9$.

Het voorschrift wordt dan $y = -4x^2 + 8x - 1$.

Na controle vinden we als top inderdaad $T(1,3)$. We hebben een bergparabool, dus de functie bereikt een maximum.

Opdracht 75 bladzijde 109

Ten noorden van Antwerpen heeft men de Liefkenshoektunnel gebouwd. Voor het gebruik van de tunnel moet men tol betalen. Hoe hoger de gebruikersprijs x (in €), hoe minder gebruikers y er zijn per dag. Voor de bouw van de tunnel maakte men een prognose voor de vraagfunctie, d.i. y als functie van x. Je vindt hieronder een grafiek van deze functie voor personenwagens en voor vrachtwagens.



1 Schrijf een voorschrift van de vraagfunctie voor personenwagens en voor vrachtwagens.

De vraagfunctie is een lineaire functie, dus het voorschrift is van de vorm $f(x) = ax + b$.

Voor **personenwagens**

Wanneer de prijs € 1 stijgt, dan daalt het aantal gebruikers met $\frac{16000}{5} = 3200$.

Dus $a = -3200$.

Verder is $f(0) = 16000$, dus $b = 16000$.

Het voorschrift is dus $f(x) = -3200x + 16000$.

Voor **vrachtwagens**

Wanneer de prijs € 1 stijgt, dan daalt het aantal gebruikers met $\frac{4500}{22,5} = 200$.

Dus $a = -200$.

Verder is $f(0) = 4500$, dus $b = 4500$.

Het voorschrift is dus $f(x) = -200x + 4500$

2 De omzet z (de totale inkomsten) per dag is $x \cdot y$. Dit is eveneens een functie van x. Schrijf een voorschrift van deze functie voor personenwagens en voor vrachtwagens.

We stellen de omzet voor door z of $g(x)$.

Voor **personenwagens**

$g(x) = f(x) \cdot x = -3200x^2 + 16000x.$

Voor **vrachtwagens**

$g(x) = f(x) \cdot x = -200x^2 + 4500x.$

3 Bepaal de prijs zodat de omzet per dag maximaal is.
Doe dit voor personenwagens en voor vrachtwagens.

Voor **personenwagens**

$g(x)$ is maximaal als $x = -\dfrac{16000}{-6400} = \dfrac{160}{64} = 2{,}5$

De omzet is maximaal als de prijs € 2,5 is.

Voor **vrachtwagens**

$g(x)$ is maximaal als $x = -\dfrac{4500}{-400} = \dfrac{45}{4} = 11{,}25$

De omzet is maximaal als de prijs € 11,25 is.

4 Wat is de maximale jaarlijkse omzet voor alle voertuigen samen?

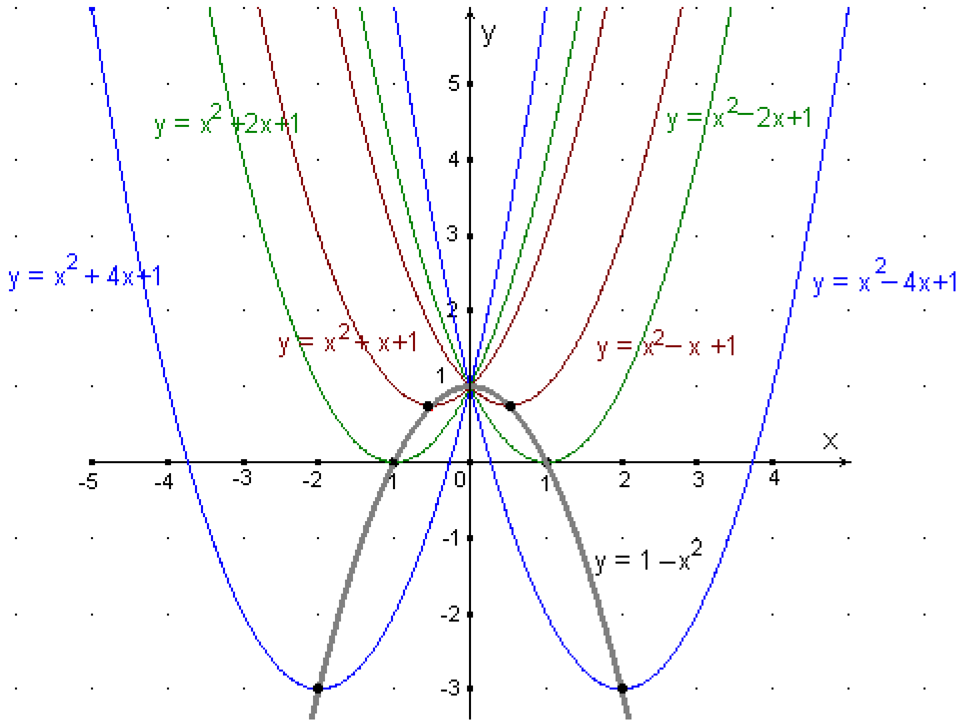
De totale omzet per jaar is gelijk aan

$€\ 365 \cdot \left(-3200 \cdot 2{,}5^2 + 16000 \cdot 2{,}5 - 200 \cdot 11{,}25^2 + 4500 \cdot 11{,}25\right) = €\ 16\,539\,062{,}5$

Opdracht 76 bladzijde 110

De betekenis van a en c in $y = ax^2 + bx + c$ kennen we al.
We willen nu ook de rol van b onderzoeken.

1 Teken de grafiek van $y = x^2 + bx + 1$ voor een aantal verschillende waarden van b in eenzelfde scherm.



2 Teken in hetzelfde scherm de grafiek van $y = 1 - x^2$. Wat merk je op?

De toppen van de parabolen $y = x^2 + bx + 1$ liggen op de parabool $y = 1 - x^2$.

3 Toon algebraïsch aan dat de toppen van de familie parabolen met vergelijking $y = x^2 + bx + 1$ op de parabool met vergelijking $y = 1 - x^2$ liggen.

We bepalen de coördinaat van de top van de parabolen $y = x^2 + bx + 1$:

$$x_T = \frac{-b}{2}$$

$$y_T = f\left(\frac{-b}{2}\right) = \frac{b^2}{4} + b \cdot \left(\frac{-b}{2}\right) + 1 = \frac{-b^2}{4} + 1 = -\left(\frac{-b}{2}\right)^2 + 1 = -\left(x_T\right)^2 + 1 = 1 - x_T^2$$

De toppen liggen op de parabool $y = 1 - x^2$.

4 Toon algemeen aan dat als je b verandert in $y = ax^2 + bx + c$, de top van de parabool verschuift over de parabool met vergelijking $y = c - ax^2$.

$y = ax^2 + bx + c$

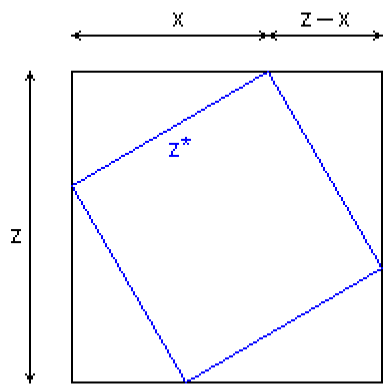
We moeten bewijzen dat de top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ op de parabool $y = c - ax^2$ ligt.

$x_T = \dfrac{-b}{2a}$

$y_T = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = c - \dfrac{b^2}{4a} = c - a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 = c - a \cdot x_T^2$

De top ligt op de parabool met vergelijking $y = c - ax^2$.

Opdracht 77 bladzijde 110



Bepaal de minimale oppervlakte van een vierkant beschreven in een gegeven vierkant met zijde z.

Oplossing

De driehoekjes van het gegeven vierkant die afgesneden worden door het kleinere vierkant, zijn congruent. Met de gegevens van de figuur en de stelling van Pythagoras vinden we de zijde z^* van het kleine vierkant in functie van z en x.

$z^* = \sqrt{x^2 + (z - x)^2}$

De te minimaliseren functie is de oppervlakte van het kleine vierkant:

$$\begin{aligned} A^* &= \left(z^*\right)^2 \\ &= x^2 + (z - x)^2 \\ &= 2x^2 - 2zx + z^2 \end{aligned}$$

Dit is een dalparabool, de functie bereikt dus een minimum.

$x_T = \dfrac{2z}{4} = \dfrac{z}{2}$

$y_T = 2 \cdot \dfrac{z^2}{4} - 2z \cdot \dfrac{z}{2} + z^2 = \dfrac{z^2}{2}$

De minimale oppervlakte van het kleine vierkant is $\dfrac{z^2}{2}$. Hiervoor moeten de middens van de zijden van het grote vierkant met elkaar verbonden worden.

Opdracht 78 bladzijde 111

Bepaal het voorschrift van de volgende tweedegraadsfuncties.

1 De grafiek heeft als top het punt $T(0,0)$ en gaat door het punt $A(-1,4)$.

$y = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$T(0,0): \quad y = ax^2$

$A(-1,4): \quad 4 = a$

$a = 4$

$y = 4x^2$

2 De grafiek heeft als top het punt $A(-1,4)$ en gaat door de oorsprong.

top $\quad A(-1,4): \quad y = a(x+1)^2 + 4$

$O(0,0): \quad 0 = a + 4$

$a = -4$

$y = -4(x+1)^2 + 4$

$y = -4x^2 - 8x$

3 De grafiek heeft de rechte $x = -3$ als symmetrieas, snijdt de y-as in $B(0,5)$ en is congruent met de parabool met vergelijking $y = x^2$.

congruent met $y = x^2$: $\quad a = 1 \quad (1)$

snijpunt met de y-as $\quad B(0,5): \quad c = 5$

$x = -3$ is symmetrieas $\dfrac{-b}{2a} = -3 \overset{(1)}{\Rightarrow} b = 6$

$y = x^2 + 6x + 5$

4 De grafiek heeft de rechte met vergelijking $x = 2$ als symmetrieas en bevat de punten $P(0,5)$ en $Q(5,2)$.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \quad \text{symmetrieas} \quad \dfrac{-b}{2a} = 2 \quad \Rightarrow \quad b = -4a \\ P(0,5): \quad c = 5 \end{array}\right\} \quad y = ax^2 - 4ax + 5$$

$Q(5,2): \quad 2 = a \cdot 5^2 - 4a \cdot 5 + 5$

$a = -\dfrac{3}{5}$, waaruit $b = \dfrac{12}{5}$

$$y = \frac{-3}{5}x^2 + \frac{12}{5}x + 5$$

5 De parabool bevat de punten $A(-1,5)$, $B(3,5)$ en $C(2,4)$.

Aangezien $y_A = y_B$ is $x_T = \frac{x_A + x_B}{2} = 1$ (symmetrie).

$\frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$ $\qquad y = ax^2 - 2ax + c$

$C(2,4)$: $4 = 4a - 2a \cdot 2 + c \Rightarrow c = 4$ $\qquad y = ax^2 - 2ax + 4$

$B(3,5)$: $5 = 9a - 2a \cdot 3 + 4 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

en dus $b = -\frac{2}{3}$ $\qquad y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 4$

6 De parabool bevat de punten $P(0,0)$, $Q(-1,1)$ en $R(3,3)$.

$P(0,0)$: $c = 0$ $\qquad y = ax^2 + bx$

$Q(-1,1)$: $1 = a - b \qquad (1)$

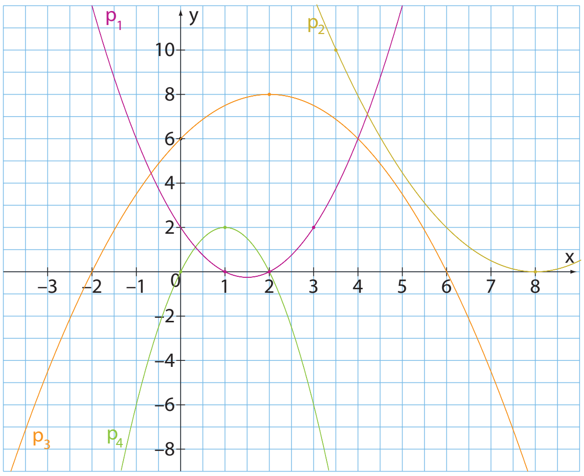
$R(3,3)$: $3 = 9a + 3b \Rightarrow 1 = 3a + b \qquad (2)$

$(1)+(2)$: $2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Uit (1): $b = -\frac{1}{2}$ $\qquad y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

Opdracht 79 bladzijde 111

Bepaal bij elk van de onderstaande parabolen het voorschrift van de bijbehorende tweedegraadsfunctie.



Oplossing

1 $c = 2$

$x_T = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad b = -3a \quad (1)$

$f(1) = 0 \;:\; 0 = a + (-3a) + 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

Uit (1) volgt dan $b = -3 \cdot 1 = -3$ $\qquad p_1 \leftrightarrow y = x^2 - 3x + 2$

2 $T(8,0) \;:\; y = a(x-8)^2$

$f(6) = 2 : 2 = a(6-8)^2 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{1}{2}$ $\qquad p_2 \leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}(x-8)^2$

$p_2 \leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x^2 - 8x + 32$

3 $T(2,8) \;:\; y = a(x-2)^2 + 8$

$f(-2) = 0 : 0 = a(-2-2)^2 + 8 \quad \Rightarrow \quad a = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad p_3 \leftrightarrow y = \dfrac{-1}{2}(x-2)^2 + 8$

$p_3 \leftrightarrow y = \dfrac{-1}{2}x^2 + 2x + 6$

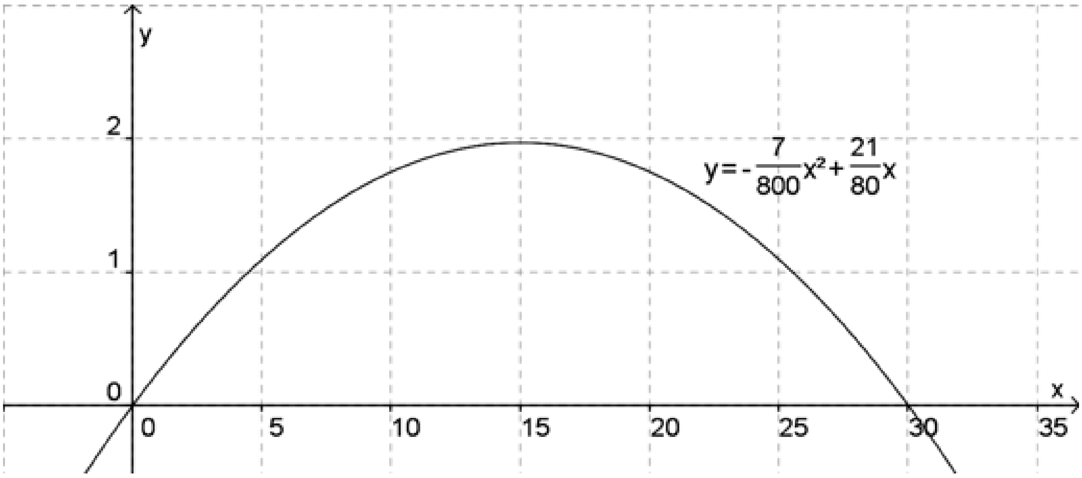
4 $T(1,2) \;:\; y = a(x-1)^2 + 2$

$f(0) = 0 : 0 = a(0-1)^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad a = -2$ $\qquad p_4 \leftrightarrow y = -2(x-1)^2 + 2$

$p_4 \leftrightarrow y = -2x^2 + 4x$

Opdracht 80 bladzijde 112

Luka is keeper in een lokale voetbalploeg. Tijdens een match schopt hij de bal vanop de grond uit het doel, waarna deze 30 meter verder weer de grond raakt. Hierbij scheert de bal in een parabolische baan rakelings over het hoofd van de scheidsrechter, die op 10 meter van Luka staat.
De scheidsrechter is 1,75 m groot.



1 Stel een vergelijking op van de baan van de bal.

$$\left.\begin{array}{l}(0,0):\ c=0\\(30,0)\end{array}\right\}\quad x_T=15=\frac{-b}{2a}\quad\Rightarrow\quad b=-30a\quad(1)$$

$$y=ax^2-30ax$$

$$(10;1,75):\ 1,75=100a-30a\cdot 10$$

$$\Rightarrow\quad a=\frac{-7}{800}$$

$$\text{Uit }(1)\text{ volgt }b=-30\cdot\left(\frac{-7}{800}\right)=\frac{21}{80}\qquad y=\frac{-7}{800}x^2+\frac{21}{80}x$$

2 Wat is de maximale hoogte die de bal bereikt?

$$x_T=\frac{\frac{-21}{80}}{2\cdot\left(\frac{-7}{800}\right)}=15\qquad\text{(Dit hadden we ook al bij 1 gevonden.)}$$

$$y_T=\frac{-7}{800}\cdot 15^2+\frac{21}{80}\cdot 15\approx 1,97$$

De bal gaat ongeveer 1,97 m hoog.

Opdracht 81 bladzijde 112

Flore en Kaatje spelen met het springtouw op de speelplaats.
Ze staan op 2 m van elkaar en houden het springtouw beiden vast op 0,75 m hoogte. Linne staat in het midden tussen hen en springt in het touw.

1 Wanneer het touw onder Linne doorgaat, moet zij minstens 10 cm hoog springen om het touw niet te raken.
Bepaal een vergelijking van de parabool die de vorm van het touw op dat moment benadert.

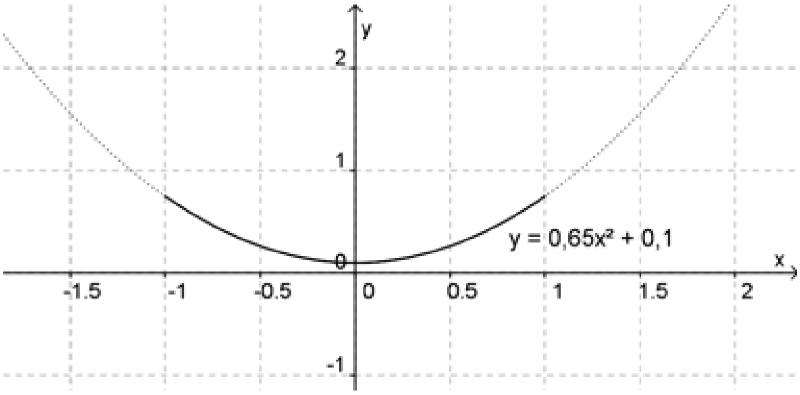
$T(0;0,1):\ y = a(x-0)^2 + 0,1$

$y = ax^2 + 0,1$

$T(1;0,75):\ 0,75 = a + 0,1$

$a = 0,65$

$y = 0,65x^2 + 0,1$



2 Bepaal een vergelijking van de parabool die de vorm van het touw benadert op het moment dat het zich recht boven het hoofd van Linne bevindt.

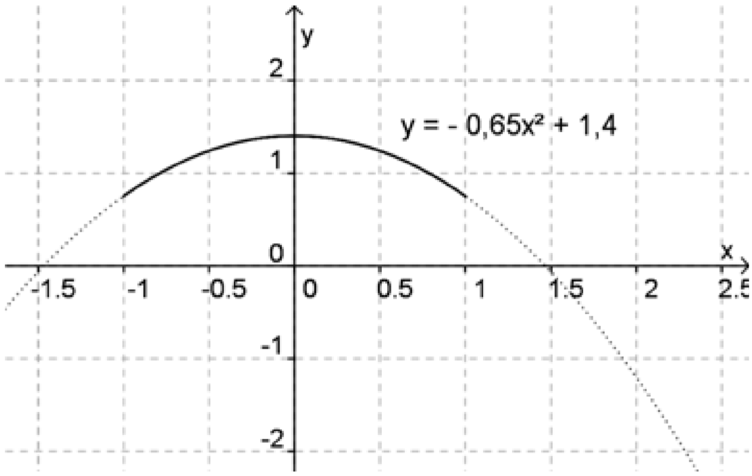
$a = -0,65$

$x_T = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$

$F(1;0,75):\ 0,75 = -0,65 \cdot 1^2 + c$

$\Rightarrow \quad c = 1,4$

$y = -0,65x^2 + 1,4$



3 Hoe groot mag Linne maximaal zijn opdat het touw op het hoogste punt haar hoofd niet zou raken?

Linne mag maximaal 1,4 m groot zijn.

Opdracht 82 bladzijde 112

Bepaal telkens een mogelijk voorschrift van een tweedegraadsfunctie die voldoet aan de onderstaande voorwaarden.

1 De parabool heeft als top $T(2, 3)$ en heeft geen enkel punt gemeen met de x-as.

$T(2,3)$: $y = a(x-2)^2 + 3$

De parabool heeft geen enkel punt gemeen met de x-as en de top is boven de x-as gelegen; dan moet het een dalparabool zijn: $a > 0$.

We nemen voor a bijvoorbeeld 1, dan krijgen we $y = (x-2)^2 + 3 = x^2 - 4x + 7$.

2 De parabool snijdt de y-as in $A(0, 2)$ en heeft als symmetrieas $s \leftrightarrow x = 3$.

$A(0,2)$: $c = 2$

$x_T = \dfrac{-b}{2a} = 3 \quad \Rightarrow \quad b = -6a$

We nemen voor a bijvoorbeeld 1, dan krijgen we $y = x^2 - 6x + 2$

3 De parabool is breder dan $y = 2x^2$.

Breder dan $y = 2x^2$; dan moet $a < 2$.

We nemen voor a bijvoorbeeld 1, dan krijgen we x^2.

4 De parabool heeft de y-as als symmetrieas en gaat door het punt $A(-1, 4)$.

y-as is symmetrieas : $b = 0$

$A(-1,4)$: $4 = a + c \quad \Rightarrow \quad c = 4 - a$

We nemen voor a bijvoorbeeld 1, dan krijgen we $y = x^2 + 3$.

5 De parabool is een bergparabool en de top ligt links van de y-as.

bergparabool : $a < 0$

top links van de y-as : $\dfrac{-b}{2a} < 0 \quad \Rightarrow \quad b < 0$

$c \in \mathbb{R}$

We nemen voor a bijvoorbeeld -1, voor b bijvoorbeeld -2 en voor c bijvoorbeeld 5. We krijgen dan $y = -x^2 - 2x + 5$.

6 De parabool is een dalparabool waarvan de top in het tweede kwadrant ligt.

top ligt in het tweede kwadrant, dus links van de y-as en boven de x-as

$$\text{links van de y-as} : \frac{-b}{2a} < 0 \underset{a>0}{\Rightarrow} b > 0$$

$$\text{boven de x-as} : f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a} > 0$$

$$4ac - b^2 > 0 \qquad (a > 0)$$

$$4ac > b^2$$

$$c > \frac{b^2}{4a}$$

Stel bijvoorbeeld $a = b = 1$, dan moet $c > \frac{1}{4}$.

Een mogelijk voorschrift is dus $y = x^2 + x + 2$.

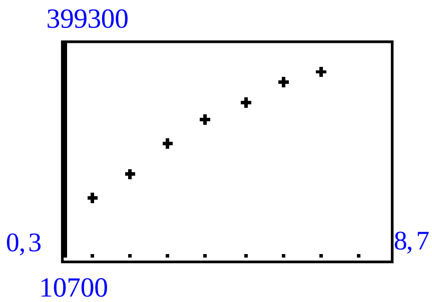
Opdracht 83 bladzijde 113

Een bedrijf boekte tussen 2001 en 2008 de volgende winsten.

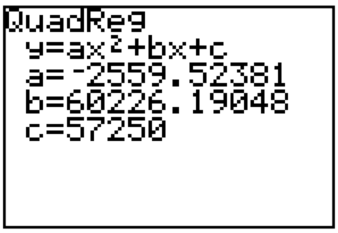
jaar	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
winst (in €)	60000	115000	160000	216000	260000	295000	330000	350000

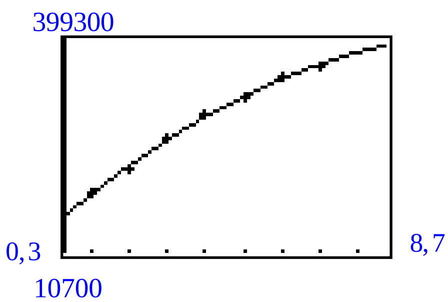
1 Voer de gegevens in in twee lijsten en plot de grafiek van de punten.
Wat merk je op in verband met de ligging van de punten ?

De punten liggen niet op een rechte, ze zouden kunnen op een parabool liggen.



2 In je grafisch rekentoestel zit een functie die de best passende parabool bepaalt door een set gegeven punten. Bepaal het voorschrift van de best passende tweedegraadsfunctie die de winsten uitdrukt in functie van de tijd. Plot ook de grafiek van deze functie.





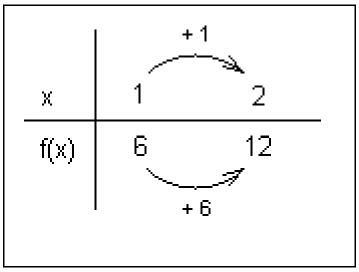
Het voorschrift is $y = -2559{,}52x^2 + 60226{,}19x + 57250$.

Opdracht 84 bladzijde 114

Gegeven is de functie $y = x^2 + 3x + 2$.

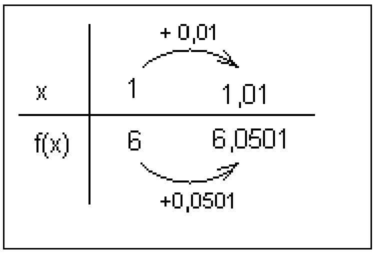
1 Bepaal de gemiddelde verandering over de intervallen $[1, 2]$, $[1;1{,}1]$, $[1;1{,}01]$ en $[1;1{,}001]$.

in $[1,2]$



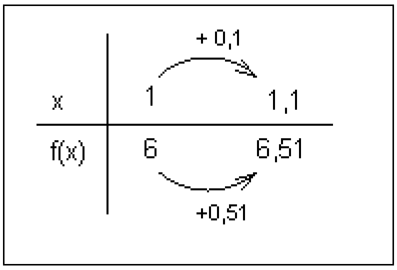
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{1} = 6$$

in $[1;1{,}01]$



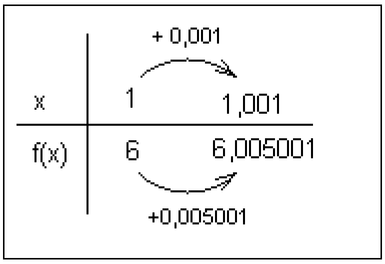
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}0501}{0{,}01} = 5{,}01$$

in $[1;1{,}1]$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}51}{0{,}1} = 5{,}1$$

in $[1;1{,}001]$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}005001}{0{,}001} = 5{,}001$$

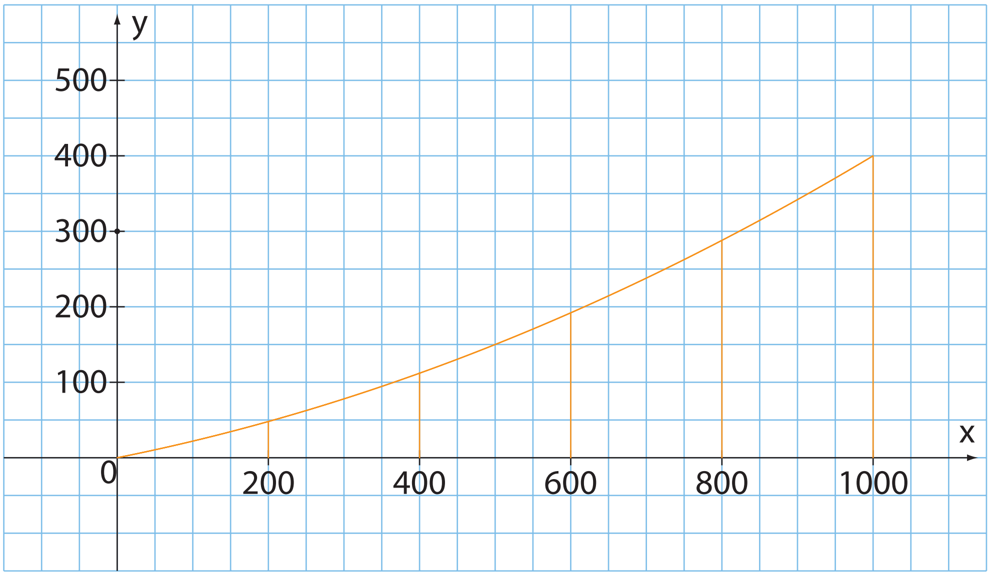
2 Wat is de vermoedelijke helling van de grafiek voor $x = 1$?

De vermoedelijke helling voor $x = 1$ is 5.

Opdracht 85 bladzijde 114

Hieronder zie je een kabelbaan afgebeeld. Horizontaal wordt een afstand van 1000 m overbrugd. Het hoogteverschil is 400 m. De hoogte y, gemeten vanaf O in meter, is een functie van de horizontale afstand x eveneens gemeten vanaf O in meter.

Het voorschrift van deze functie is $y = 0,0002x^2 + 0,2x$.



1 Maak een tabel van deze functie, waarbij je x laat veranderen met stappen van 200.

		+ 200	+ 200	+ 200	+ 200	+ 200
x	0	200	400	600	800	1000
y	0	48	112	192	288	400
		+ 48	+ 64	+ 80	+ 96	+ 112

2 D.m.v. deze tabel heb je het domein verdeeld in 5 intervallen. Bereken in elk interval de gemiddelde verandering. Welk stuk is het steilst? Welk stuk is het minst steil?

interval	$[0, 200]$	$[200, 400]$	$[400, 600]$	$[600, 800]$	$[800, 1000]$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	0,24	0,32	0,4	0,48	0,56

Het quotiënt is veranderlijk van interval tot interval. Het laatste stuk is het meest steile, het eerste stuk is het minst steile.

Opdracht 86 bladzijde 114

Een pijl wordt loodrecht omhoog geschoten. De hoogte in meter na x seconden is $h = 40x - 5x^2$.

1 Bereken het differentiequotiënt over de intervallen $[0, 2], [2, 4], [4, 6]$ en $[6, 8]$.
Wat is de fysische betekenis van dit differentiequotiënt?

		+2	+2	+2	+2
x	0	2	4	6	8
y	0	60	80	60	0
		+60	+20	−20	−60
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$		30	10	−10	−30

Het differentiequotiënt drukt de gemiddelde snelheid uit in dat interval.

2 Wat is de betekenis van een positief en een negatief differentiequotiënt?

positief: de eindhoogte is groter dan de beginhoogte

negatief: de eindhoogte is lager dan de beginhoogte

3 Bereken de gemiddelde snelheid in de intervallen $[2, 3], [2; 2{,}1]$ en $[2; 2{,}01]$.

$[2,3]$

		+1
x	2	3
y	60	75
		+15

De gemiddelde snelheid is 15 m/s.

$[2; 2{,}1]$

		+0,1
x	2	2,1
y	60	61,95
		+1,95

De gemiddelde snelheid is $\frac{1{,}95}{0{,}1}$ m/s $= 19{,}5$ m/s.

$[2; 2{,}01]$

		+0,01
x	2	2,01
y	60	60,1995
		+0,1995

De gemiddelde snelheid is $\frac{0{,}1995}{0{,}01}$ m/s $= 19{,}95$ m/s.

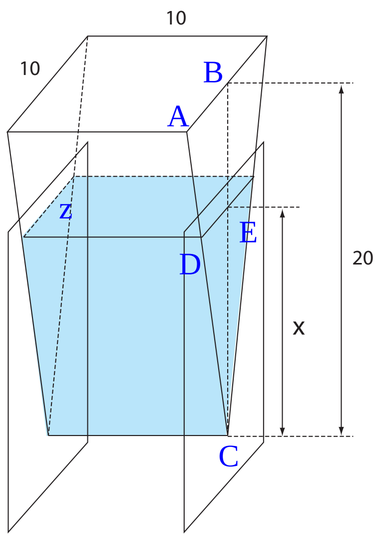
4 Wat zal vermoedelijk de exacte snelheid zijn na 2 seconden?

De exacte snelheid na 2 seconden is vermoedelijk 20 m/s.

Opdracht 87 bladzijde 115

Een vaas heeft de vorm van een driezijdig prisma. Gieten we water in de vaas tot op een hoogte x (in cm), dan is het volume gelijk aan y (in cm^3).

1 Schrijf y in functie van x.



$\Delta ABC \sim \Delta DEC$ $\quad$ $\hat{C}$ gemeenschappelijk, $\hat{B} = \hat{E} = 90°$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EC|}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{5}{\frac{z}{2}} = \frac{20}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$5x = 10z$$

$$\Downarrow$$

$$z = \frac{x}{2}$$

Het volume water (y) is gelijk aan $\frac{z \cdot x}{2} \cdot 10 = 5zx = 5 \cdot \frac{x}{2} \cdot x = \frac{5}{2}x^2$

2 Bereken de gemiddelde toename van het volume in cm^3/cm als het water stijgt van 0 cm naar 5 cm, van 5 cm naar 10 cm, van 10 cm naar 15 cm en van 15 cm naar 20 cm.

	+5	+5	+5	+5	
x	0	5	10	15	20
y	0	62,5	250	562,5	1000
	+62,5	+187,5	+312,5	+437,5	

van 0 cm naar 5 cm: $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{62,5}{5}\ \text{cm}^3/\text{cm} = 12,5\ \text{cm}^3/\text{cm}$

van 5 cm naar 10 cm: $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{187,5}{5}\ \text{cm}^3/\text{cm} = 37,5\ \text{cm}^3/\text{cm}$

van 10 cm naar 15 cm: $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{312,5}{5}\ \text{cm}^3/\text{cm} = 62,5\ \text{cm}^3/\text{cm}$

van 15 cm naar 20 cm: $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{437,5}{5}\ \text{cm}^3/\text{cm} = 87,5\ \text{cm}^3/\text{cm}$

Herhalingsopdracht 88 bladzijde 116

Welke parabool heeft de y-as niet als symmetrieas?
Beantwoord deze vraag zonder je grafisch rekentoestel te gebruiken.

A $y = x^2$ B $y = x^2 + x$ C $y = x^2 - 3$ D $y = -3x^2 + 3$ E $y = -\frac{1}{3}x^2$

Oplossing

De y-as is de symmetrieas als $b = 0$ in $y = ax^2 + bx + c$.

Dit is niet het geval bij B $y = x^2 + x$

Antwoord B is het juiste antwoord.

Herhalingsopdracht 89 bladzijde 116

Als je de parabool met vergelijking $y = (x-1)^2 + 2$ spiegelt om de oorsprong, dan krijg je een nieuwe parabool met vergelijking

A $y = -x^2 + 2x - 3$ B $y = -x^2 + 2x + 3$ C $y = -x^2 - 2x - 3$
D $y = x^2 + 2x - 1$ E $y = x^2 - 2x - 3$

Oplossing

$y = (x-1)^2 + 2$ $T(1,2)$

Wanneer je de parabool spiegelt om de oorsprong, wordt de top $T(-1,-2)$ en $a = -1$.

Het nieuwe voorschrift is dus $y = -(x+1)^2 - 2$

$$= -(x^2 + 2x + 1) - 2$$
$$= -x^2 - 2x - 3$$

Antwoord C is het juiste antwoord.

Herhalingsopdracht 90 bladzijde 116

De Golden Gate Bridge in San Francisco wordt gedragen door twee enorme kabels die tussen de twee pijlers aan elke kant van de brug opgehangen zijn.
De functie $f(x) = 0,0003914x^2 - 0,50106x + 160,36$ benadert de hoogte van de kabels boven de autoweg op een horizontale afstand van x meter van één van de pijlers.
De kabels raken de weg halverwege tussen de pijlers.
Hoe ver staan de pijlers van elkaar?

Oplossing

De y-as valt samen met één van de pijlers. De afstand tot de andere pijler is het dubbele van de afstand tot aan de top.

$$x_T = \frac{0,501\,06}{2 \cdot 0,000\,391\,4} = 640,086\,867\,7$$

De afstand tussen de twee pijlers is dan ongeveer 1280,17 m.

Herhalingsopdracht 91 bladzijde 116

De parabool $y = x^2 + 5x + c$ heeft slechts één punt gemeen met de x-as.
Bepaal de waarde van c.

Oplossing

Wanneer een parabool slechts één punt gemeen heeft met de x-as, is dat punt de top. We weten dan ook dat de y-coördinaat van dit punt 0 is.

$$x_T = \frac{-5}{2} = -2,5$$

$$y_T = f(-2,5) = (-2,5)^2 + 5 \cdot (-2,5) + c = 0$$

$$c = 6,25$$

Herhalingsopdracht 92 bladzijde 116

De grafiek van een kwadratische functie f snijdt de y-as in $A(0,-16)$ en de x-as in $B(2,0)$ en $C(8,0)$.

1 Bepaal het voorschrift van deze functie.

$$x_T = \frac{-b}{2a} = 5 \quad \Rightarrow \quad b = -10a \quad (1)$$

$A(0,-16)$: $c = -16$ $\qquad y = ax^2 - 10ax - 16$

$B(2,0)$: $0 = a \cdot 4 - 10a \cdot 2 - 16$

$a = -1$

$$y = -x^2 + 10x - 16$$

2 Geef de grootste waarde die deze functie bereikt.

De grafiek is een bergparabool en bereikt dus een maximum.

$$x_T = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$y_T = f(5) = 9$$

De grootste waarde die de functie bereikt is 9.

Herhalingsopdracht 93 bladzijde 117

Beschouw de familie parabolen met vergelijking $y = -x^2 + (3-2m)x + m$.

1 Bepaal m zodat $x = 2$ de symmetrieas van de parabool is.

$$x_T = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3+2m}{2\cdot(-1)} = \frac{3}{2} - m = 2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{-1}{2}$$

2 Toon aan dat alle parabolen uit deze familie door een zelfde punt gaan.
Bepaal de coördinaat van dit punt.

Wanneer we de grafiek plotten voor $m = 0$ en $m = 1$, dan krijgen we als snijpunt van de beide grafieken het punt $(0{,}5;1{,}25)$.

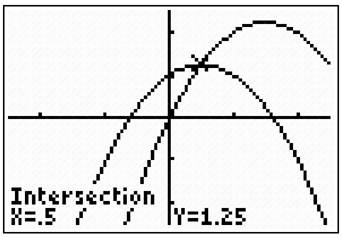
Nu moeten we nagaan of dit punt op alle parabolen van de familie $y = -x^2 + (3-2m)x + m$ ligt:

$$y = -(0{,}5)^2 + (3-2m)\cdot(0{,}5) + m$$
$$= -0{,}25 + 1{,}5 - m + m$$
$$= 1{,}25 \qquad \text{Dit klopt!}$$

Alle parabolen gaan dus door $(0{,}5;1{,}25)$.

2,5

−2,5



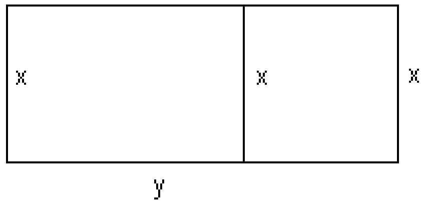
2,5

−2,5

Herhalingsopdracht 94 bladzijde 117

Een tuinman wil 40 meter afrasterdraad gebruiken om een rechthoekige tuin te omheinen en in twee delen te verdelen zoals op de figuur

Wat is de grootst mogelijke oppervlakte voor zo'n tuin?



Oplossing

We noemen de korte zijde x en de lange zijde y.

Dan is het verband tussen x en y: $40 = 3x + 2y$.

We schrijven y in functie van x : $y = 20 - \frac{3}{2}x$.

De te maximaliseren functie is de oppervlakte van een rechthoek:

$$A = l \cdot b = \left(20 - \frac{3}{2}x\right) \cdot x$$

$$= 20x - \frac{3}{2}x^2$$

Dit is een bergparabool, de functie bereikt dus een maximum:

$$x_T = \frac{-20}{-3} = \frac{20}{3}$$

$$y_T = f\left(\frac{20}{3}\right) = 20 \cdot \frac{20}{3} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{200}{3} \approx 66,67$$

De grootst mogelijke oppervlakte van de tuin is 66,67 m².

Herhalingsopdracht 95 bladzijde 117

Een wijnhandelaar heeft 300 flessen wijn gekocht tegen € 7 per fles. Wanneer hij de wijn nu verkoopt, krijgt hij dezelfde prijs. Als hij de wijn bewaart, stijgt de prijs elk jaar met een halve euro per fles. De wijnhandelaar besluit de voorraad op te slaan. Ieder jaar haalt hij 10 flessen uit de voorraad voor eigen gebruik.

Wanneer moet hij de wijn verkopen om een zo groot mogelijke winst te hebben?

Oplossing

x = aantal jaren wachten om de wijn te verkopen.

$$\underbrace{f(x)}_{\text{winst}} = \underbrace{(300-10x)}_{\text{aantal flessen}}\underbrace{(7+0,5x)}_{\text{prijs per fles}} - \underbrace{300\cdot 7}_{\text{aankoopprijs na x jaar}}$$

$$= 2100+150x-70x+5x^2-2100$$

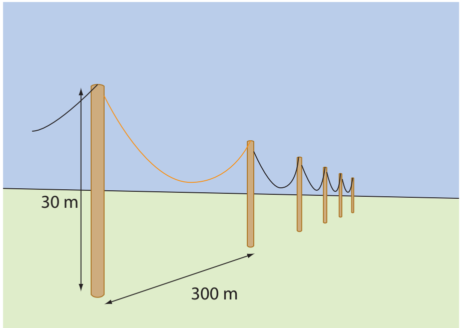
$$= -5x^2+80x$$

$$x_T = \frac{-80}{-10} = 8$$

De wijnhandelaar moet 8 jaar wachten.

Herhalingsopdracht 96 bladzijde 118

Een elektriciteitskabel wordt opgehangen tussen palen die 30 m hoog zijn en 300 m van elkaar staan. Een technisch tekenaar wil met een computer een tekening maken van de hangende kabel. Daarbij neemt hij aan dat de vorm waarin de kabel tussen twee opeenvolgende palen hangt, een parabool is.



De tekenaar kiest voor een assenstelsel waarbij de oorsprong op de grond midden tussen twee palen ligt en waarbij de *x*-as horizontaal is.

De vergelijking van de parabool is dan van de vorm: $y = a\left(\frac{x}{100}\right)^2 + c$ voor $-150 \le x \le 150$;

hierbij zijn x en y gemeten in meter.

1 Toon aan dat voor a en c geldt: $9a + 4c = 120$.

$$f(150) = 30 = f(-150) \quad \Rightarrow \quad 30 = a\left(\frac{150}{100}\right)^2 + c$$
$$30 = 2,25a + c$$
$$120 = 9a + 4c$$

2 Voor het ophangen van elektriciteitskabels bestaan een aantal voorschriften. Zo moet het laagste punt van de kabel minstens 10 m boven de grond hangen, maar niet meer dan 20 m boven de grond. Bereken welke waarden voor a zijn toegestaan.

$$\left.\begin{array}{l} c = 10 \quad \Rightarrow \quad 9a + 4\cdot 10 = 120 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{80}{9} \\ c = 20 \quad \Rightarrow \quad 9a + 4\cdot 20 = 120 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{40}{9} \end{array}\right\} \quad \frac{40}{9} \le a \le \frac{80}{9}$$