Hoofdstuk 8

Analytische meetkunde

8.1 Loodrechte stand

8.2 Afstand van een punt tot een rechte

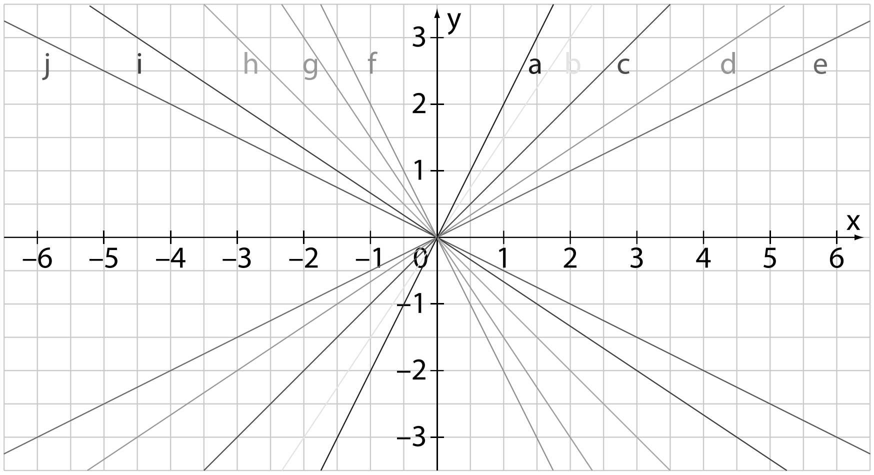
8.3 De cirkel

8.4 Scalair product van twee vectoren

Oplossingen van de opdrachten

Opdracht 1 bladzijde 90

Op de onderstaande figuur staan tien rechten afgebeeld.



1	Onderzoek met een geodriehoek welke rechtenparen loodrecht op elkaar staan.

$a \perp j$, $b \perp i$, $c \perp h$, $d \perp g$, $e \perp f$

2	Welk verband merk je op tussen de richtingscoëfficiënten van deze rechtenparen ?

rico $a = 2$, rico $j = -\frac{1}{2}$

rico $b = \frac{3}{2}$, rico $i = -\frac{2}{3}$

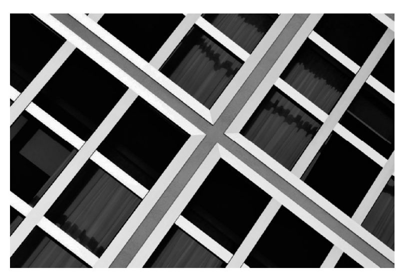
rico $c = 1$, rico $h = -1$

rico $d = \frac{2}{3}$, rico $g = -\frac{3}{2}$

rico $e = \frac{1}{2}$, rico $f = -2$

Het product van de richtingscoëfficiënten is telkens gelijk aan -1.

3	Kun je ditzelfde verband terugvinden voor twee van de bovenstaande rechten die niet loodrecht op elkaar staan ?



Neen

Opdracht 2 bladzijde 92

Onderzoek welke van de volgende rechten evenwijdig zijn en welke loodrecht op elkaar staan.

$a \leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$

$b \leftrightarrow 4x - 2y + 3 = 0$

$c \leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$

$d \leftrightarrow y = 1$

$e \leftrightarrow x - 2 = 0$

$f \leftrightarrow x - 2y = 0$

$g \leftrightarrow 3x + 7 = 0$

$h \leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1$

Oplossing

rechte	a	b	c	d	e	f	g	h
rico	-2	2	$\frac{1}{2}$	0	/	$\frac{1}{2}$	/	$-\frac{1}{2}$

$c \parallel f$, $e \parallel g$

$a \perp c$, $a \perp f$, $b \perp h$, $d \perp e$, $d \perp g$

Opdracht 3 bladzijde 93

Bepaal, indien mogelijk, de richtingscoëfficiënt van een rechte l die loodrecht staat op de gegeven rechte.

$\boxed{1 \quad a \leftrightarrow 3x - y - 4 = 0}$

$$\text{rico } a = 3 \Rightarrow \text{rico } l = -\frac{1}{3}$$

$\boxed{2 \quad b \leftrightarrow 7x + 3y - 1 = 0}$

$$\text{rico } b = \frac{-7}{3} \Rightarrow \text{rico } l = \frac{3}{7}$$

$\boxed{3 \quad c \leftrightarrow 3x - 4 = 0}$

c is een verticale rechte $\Rightarrow$ rico $l = 0$

$\boxed{4 \quad d \leftrightarrow y = -2}$

rico $d = 0 \Rightarrow$ rico l bestaat niet $\left(\text{d is een horizontale rechte} \Rightarrow l \text{ is een verticale rechte}\right)$

Opdracht 4 bladzijde 93

Het plezierjacht van een filmster vaart volgens de lijn $OA \leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x$.

Het wordt benaderd door een vaartuig dat bemand wordt door perslui van een sensatieblad.
Deze paparazzi varen volgens een lijn van $B(1, -11)$ naar $C(5, -5)$.
Controleer algebraïsch of de koers van de paparazzi loodrecht staat op de koers van de filmster.

Oplossing

$\text{rico } OA = -\frac{2}{3}$

$\text{rico } BC = \frac{-5+11}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\text{rico } OA \cdot \text{rico } BC = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow OA \perp BC$

Besluit
De koers van de paparazzi staat loodrecht op de koers van de filmster.

Opdracht 5 bladzijde 93

Stel een vergelijking op van de loodlijn *l* uit het punt $P(3, -2)$ op de gegeven rechten.

$\boxed{1 \quad a \leftrightarrow -2x + 5y - 7 = 0}$

$\text{rico } a = \frac{2}{5} \Rightarrow \text{rico } l = -\frac{5}{2}$

$l \leftrightarrow y + 2 = -\frac{5}{2}(x - 3)$

$l \leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{15}{2} - 2$

$l \leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$

$\boxed{2 \quad b \leftrightarrow 2x - 7 = 0}$

b is een verticale rechte $\Rightarrow$ *l* is een horizontale rechte
$l \leftrightarrow y = -2$

$\boxed{3 \quad c \leftrightarrow y = 2}$

c is een horizontale rechte $\Rightarrow$ *l* is een verticale rechte
$l \leftrightarrow x = 3$

Opdracht 6 bladzijde 95

Stel een vergelijking op van de loodlijn *l* uit het punt P en op de rechte r.

$\boxed{1 \quad P(-3, 4) \text{ en } r \leftrightarrow -x+5y+2=0}$

$\text{rico } r = \frac{1}{5} \;\Rightarrow\; \text{rico } l = -5$

$l \leftrightarrow y-4=-5(x+3)$

$l \leftrightarrow y=-5x-15+4$

$l \leftrightarrow y=-5x-11$

$\boxed{2 \quad P(2, -5) \text{ en } r \leftrightarrow y+2=0}$

r is een horizontale rechte $\Rightarrow$ *l* is een verticale rechte

$l \leftrightarrow x=2$

$\boxed{3 \quad P(1, -1) \text{ en } r = AB \text{ met } A(5, -3) \text{ en } B(3, 5)}$

$\text{rico } r = \frac{5+3}{3-5} = \frac{8}{-2} = -4 \;\Rightarrow\; \text{rico } l = \frac{1}{4}$

$l \leftrightarrow y+1=\frac{1}{4}(x-1)$

$l \leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}-1$

$l \leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

$\boxed{4 \quad P(-2, 1) \text{ en } r = AB \text{ met } A(5, -3) \text{ en } B(5, 5)}$

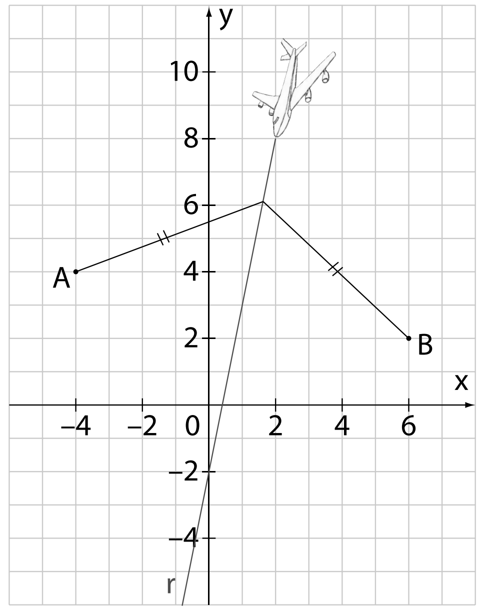
r is een verticale rechte $\Rightarrow$ *l* is een horizontale rechte

$l \leftrightarrow y=1$

Opdracht 7 bladzijde 95

De landingsroute r van een vliegtuig is zodanig dat het vliegtuig op elk punt van zijn baan even ver verwijderd blijft van twee landingslichten $A(-4, 4)$ en $B(6, 2)$.

Bepaal een vergelijking van deze route.



Oplossing

De route r is de middelloodlijn van $[AB]$.

$M(1, 3)$ is het midden van $[AB]$.

$\text{rico AB} = \dfrac{2-4}{6+4} = \dfrac{-2}{10} = \dfrac{-1}{5} \Rightarrow \text{rico r} = 5$

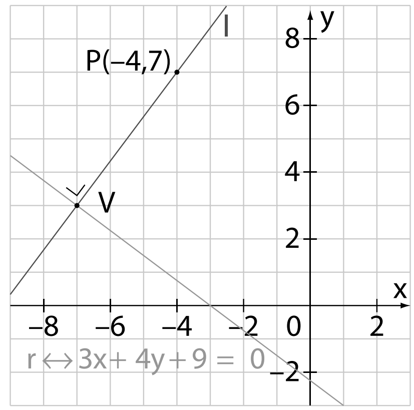
$r \leftrightarrow y - 3 = 5(x-1)$

$r \leftrightarrow y = 5x - 5 + 3$

$r \leftrightarrow y = 5x - 2$

Opdracht 8 bladzijde 96

Gegeven zijn het punt $P(-4, 7)$ en de rechte $r \leftrightarrow 3x + 4y + 9 = 0$.



1 Stel een vergelijking op van de loodlijn l uit P op r.

$$\text{rico } r = \frac{-3}{4} \Rightarrow \text{rico } l = \frac{4}{3}$$

$$l \leftrightarrow y - 7 = \frac{4}{3}(x + 4)$$

$$l \leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} + 7$$

$$l \leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{37}{3}$$

2 Bepaal de coördinaat van het snijpunt V van r en l.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 9 = 0 & (1) \\ y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{37}{3} & (2) \end{cases}$$

Substitutie van (2) in (1) geeft :

$$3x + 4\left(\frac{4}{3}x + \frac{37}{3}\right) + 9 = 0$$

$$9x + 16x + 148 + 27 = 0$$

$$25x = -175$$

$$x = -7$$

Invullen in (2) geeft :

$$y = \frac{4}{3} \cdot (-7) + \frac{37}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

De coördinaat van het snijpunt V van r en l is $(-7, 3)$.

3 Bereken $d(P, r)$, dit is de afstand van het punt P tot de rechte r.

$$d(P, r) = |PV| = \sqrt{(-7+4)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Opdracht 9 bladzijde 99

Gegeven zijn het punt P en de rechte r. Bepaal d(P, r).

1 $P(-3,1)$ en $r \leftrightarrow 2x+3y-6=0$

$$d(P,r)=\frac{|2\cdot(-3)+3\cdot 1-6|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{9}{\sqrt{13}}$$

2 $P(2,5)$ en $r \leftrightarrow 2y-7=0$

$$d(P,r)=\left|5-\frac{7}{2}\right|=\frac{3}{2} \text{ want } r \leftrightarrow y=\frac{7}{2}$$

3 $P(-1,0)$ en $r \leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$

$$d(P,r)=\left|-1+\frac{5}{2}\right|=\frac{3}{2}$$

4 $P(0,-1)$ en $r \leftrightarrow y=\frac{3}{4}x-5$

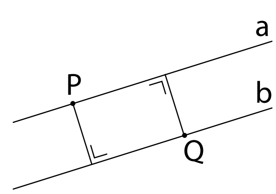
$r \leftrightarrow 4y=3x-20$
$r \leftrightarrow 3x-4y-20=0$

$$d(P,r)=\frac{|3\cdot 0-4\cdot(-1)-20|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-16|}{\sqrt{25}}=\frac{16}{5}$$

Opdracht 10 bladzijde 99

De **afstand tussen twee evenwijdige rechten** a en b, genoteerd als $d(a,b)$, is de afstand van een willekeurig punt van de ene rechte tot de andere rechte.

$d(a,b)=d(P,b)$ met P een willekeurig punt van a
$\quad\;\; =d(Q,a)$ met Q een willekeurig punt van b



Gegeven zijn de rechten $a \leftrightarrow 2x+y+3=0$ en $b \leftrightarrow 2x+y-2=0$.

1 Toon aan dat a en b evenwijdig zijn.

rico a $=-2$ en rico b $=-2 \;\Rightarrow\; a \parallel b$

$\boxed{2 \quad \text{Bereken } d(a,b).}$

$P(0,-3)$ ligt op a.

$$d(a,b)=d(P,b)=\frac{|2\cdot 0+(-3)-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

Opdracht 11 bladzijde 99

Gegeven is de driehoek ABC met $A(-2,1)$, $B(5,4)$ en $C(2,-3)$.
Bereken de oppervlakte van deze driehoek.

Oplossing

$$\text{opp } \Delta ABC=\frac{|AB|\cdot d(C,AB)}{2}$$

$$|AB|=\sqrt{(5+2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$$

$$AB\leftrightarrow y-1=\frac{3}{7}(x+2)$$

$$AB\leftrightarrow 7y-7=3x+6$$

$$AB\leftrightarrow 3x-7y+13=0$$

$$d(C,AB)=\frac{|3\cdot 2-7\cdot(-3)+13|}{\sqrt{3^2+(-7)^2}}=\frac{40}{\sqrt{58}}$$

zodat $\text{opp } \Delta ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{58}\cdot\frac{40}{\sqrt{58}}=20$

Er geldt ook : $\text{opp } \Delta ABC=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot d(B,AC)$

$\text{opp } \Delta ABC=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot d(A,BC)$

Opdracht 12 bladzijde 99

Gegeven zijn de rechte $a \leftrightarrow 3x - 4y + k = 0$ en het punt $P(1,2)$.
Bepaal k zodat $d(P, a) = 4$.

Oplossing

$$d(P,a) = 4$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + k|}{\sqrt{9+16}} = 4$$
$$\Updownarrow$$
$$|-5+k| = 20$$
$$\Updownarrow$$
$$k - 5 = 20 \quad \text{of} \quad k - 5 = -20$$
$$\Updownarrow$$
$$k = 25 \quad \text{of} \quad k = -15$$

Opdracht 13 bladzijde 101

Bepaal vergelijkingen van de bissectrices van de volgende rechtenparen.

$\boxed{1 \quad p \leftrightarrow 2x - 3y + 4 = 0 \ \text{ en } \ q \leftrightarrow 3x - 2y = 0}$

$$\frac{|2x - 3y + 4|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|3x - 2y|}{\sqrt{9+4}}$$
$$\Updownarrow$$
$$|2x - 3y + 4| = |3x - 2y|$$
$$\Updownarrow$$
$$2x - 3y + 4 = 3x - 2y \quad \text{of} \quad 2x - 3y + 4 = -3x + 2y$$
$$\Updownarrow$$
$$x + y - 4 = 0 \quad \text{of} \quad 5x - 5y + 4 = 0$$

$\boxed{2 \quad p \leftrightarrow 3x - 4y + 7 = 0 \ \text{ en } \ q \leftrightarrow 12x + 5y - 6 = 0}$

$$\frac{|3x - 4y + 7|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|12x + 5y - 6|}{\sqrt{144+25}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{|3x - 4y + 7|}{5} = \frac{|12x + 5y - 6|}{13}$$

$$\Updownarrow$$

$$|39x - 52y + 91| = |60x + 25y - 30|$$

$$\Updownarrow$$

$$39x - 52y + 91 = 60x + 25y - 30 \quad \text{of} \quad 39x - 52y + 91 = -60x - 25y + 30$$

$$\Updownarrow$$

$$21x + 77y - 121 = 0 \quad \text{of} \quad 99x - 27y + 61 = 0$$

$\boxed{3 \quad p \leftrightarrow x = 0 \ \text{ en } \ q \leftrightarrow y = 0}$

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+0}} = \frac{|y|}{\sqrt{0+1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$|x| = |y|$$

$$\Updownarrow$$

$$x = y \quad \text{of} \quad x = -y$$

$$\Updownarrow$$

$$x - y = 0 \quad \text{of} \quad x + y = 0$$

Opdracht 14 bladzijde 102

Toon aan dat de vier punten $A(-1,4)$, $B(7,4)$, $C(7,-2)$ en $D(0,-3)$ op een cirkel liggen met middelpunt $M(3,1)$. Wat is de straal van deze cirkel?

Oplossing

$$|AM| = \sqrt{(3+1)^2+(1-4)^2} = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$
$$|BM| = \sqrt{16+9} = 5$$
$$|CM| = \sqrt{16+9} = 5$$
$$|DM| = \sqrt{9+16} = 5$$
$$|AM| = |BM| = |CM| = |DM| = 5 = \text{straal van de cirkel}$$

Opdracht 15 bladzijde 102

De cirkel met middelpunt M en straal r is de verzameling van alle punten P die op een afstand r van het punt M liggen.
Stel een voorwaarde op waaraan de coördinaat (x, y) van een punt P moet voldoen opdat P op de cirkel met middelpunt $M(3,4)$ en straal 6 zou liggen.
Schrijf deze voorwaarde zonder vierkantswortel.

Oplossing

$$|PM| = 6$$
$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = 6$$
$$(x-3)^2+(y-4)^2 = 36$$

Opdracht 16 bladzijde 103

1	Bepaal een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(-4,1)$ en straal 3.

$$(x+4)^2+(y-1)^2 = 9$$

2	Behoren de punten $A(-1,1)$, $B(0,-2)$ en $C(-2,1+\sqrt{5})$ tot deze cirkel?

$A(-1,1)$: $(-1+4)^2+(1-1)^2 = 9+0 = 9 \quad \rightarrow$ Ja

$B(0,-2)$: $(0+4)^2+(-2-1)^2 = 16+9 = 25 \quad \rightarrow$ Neen

$C(-2,1+\sqrt{5})$: $(-2+4)^2+(1+\sqrt{5}-1)^2 = 4+5 = 9 \quad \rightarrow$ Ja

3 Bepaal de coördinaten van de snijpunten van de cirkel met de x-as.

x-as $\leftrightarrow$ $y = 0$

dus: $(x+4)^2 + (0-1)^2 = 9$

$$(x+4)^2 = 9 - 1 = 8$$

$$x + 4 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ of } x + 4 = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

$$x = -4 + 2\sqrt{2} \text{ of } x = -4 - 2\sqrt{2}$$

zodat $\left(-4-2\sqrt{2}, 0\right)$ en $\left(-4+2\sqrt{2}, 0\right)$ de snijpunten zijn van de cirkel met de x-as.

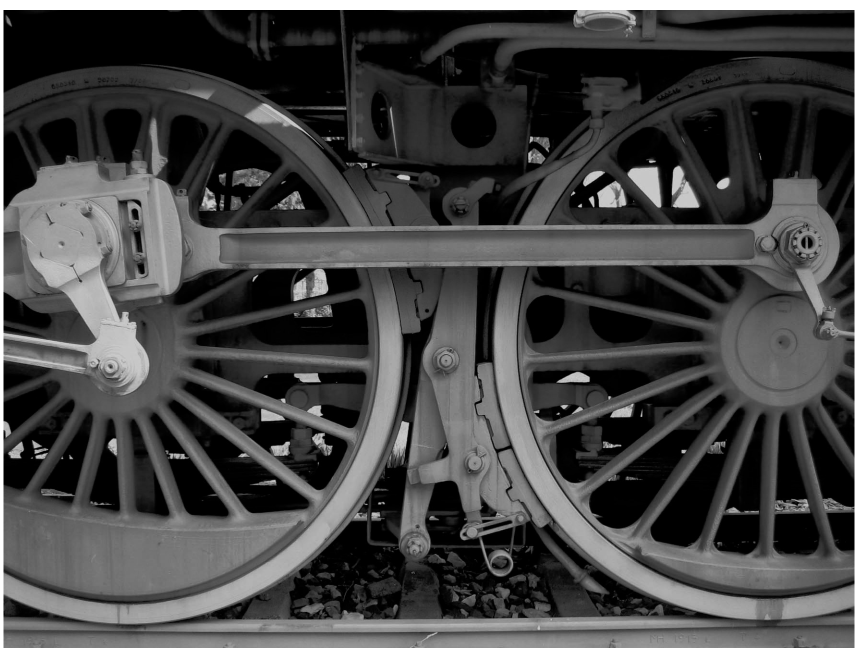
4 Heeft de cirkel snijpunten met de y-as? Verklaar.

y-as $\leftrightarrow$ $x = 0$

dus: $(0+4)^2 + (y-1)^2 = 9$

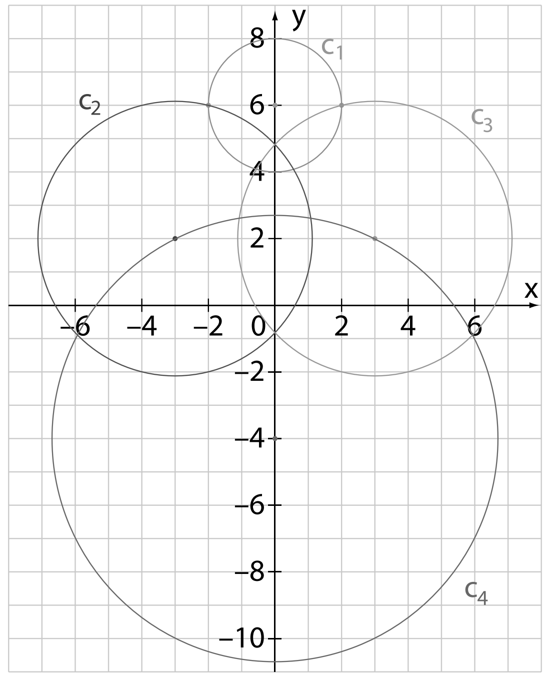
$$(y-1)^2 = 9 - 16 = -7 \quad (*)$$

Omdat een kwadraat nooit negatief kan zijn, heeft de vergelijking $(*)$ geen oplossingen.
De cirkel heeft geen snijpunten met de y-as.



Opdracht 17 bladzijde 104

Bepaal een vergelijking van elke cirkel uit de figuur.

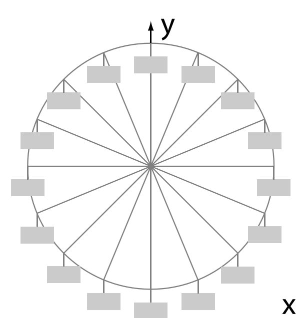


Oplossing

cirkel	middelpunt	extra punt	straal	vergelijking
c_1	$(0, 6)$	$(2, 6)$	2	$x^2+(y-6)^2=4$
c_2	$(-3, 2)$	$(-2, 6)$	$\sqrt{17}$	$(x+3)^2+(y-2)^2=17$
c_3	$(3, 2)$	$(2, 6)$	$\sqrt{17}$	$(x-3)^2+(y-2)^2=17$
c_4	$(0, -4)$	$(3, 2)$	$\sqrt{45}$	$x^2+(y+4)^2=45$

Opdracht 18 bladzijde 104

Om de overgang naar het jaar 2000 te vieren, stond op de Markt van Lokeren gedurende drie weken een reuzenrad. Het middelpunt van het rad bevond zich 12 m boven de grond. Het laagste punt van het rad lag 1,5 m boven de grond.



$\boxed{\text{1 Stel een vergelijking op van het reuzenrad.}}$

middelpunt $M(0, 12)$ en straal $r = 10,5$

$x^2+(y-12)^2=110,25$

2	Wat was de hoogte van het hoogste punt van dit rad?

$12+10,5=22,5 \quad$ dus $22,5$ m

Ofwel:

snijpunt met y-as $\leftrightarrow x=0$:

$$(y-12)^2=110,25$$

$y-12=10,5$ of $y-12=-10,5$

$y=22,5$ of $\cancel{y=1,5}$

$\downarrow \qquad \hookrightarrow$ hoogte van laagste punt

hoogte van hoogste punt is $22,5$ m

Opdracht 19 bladzijde 104

1	Toon aan dat een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(4,-1)$ en straal 3 kan geschreven worden in de vorm $x^2+y^2-8x+2y+8=0$.

$(x-4)^2+(y+1)^2=9$

$x^2-8x+16+y^2+2y+1=9$

$x^2+y^2-8x+2y+8=0$

2	De vergelijking $x^2+y^2+8x-2y+7=0$ stelt ook een cirkel voor. Bepaal de straal en de coördinaat van het middelpunt van deze cirkel.

$x^2+y^2+8x-2y+7=0$

$x^2+8x+y^2-2y=-7$

$x^2+2\cdot 4x+4^2-4^2+y^2-2\cdot 1y+1^2-1^2=-7$

$\left(x^2+2\cdot 4x+4^2\right)+\left(y^2-2\cdot 1y+1^2\right)=-7+16+1$

$(x+4)^2+(y-1)^2=10$

$\downarrow$

cirkel met straal $\sqrt{10}$ en middelpunt $(-4,1)$

3	Verklaar waarom de vergelijking $x^2+y^2+8x-2y+20=0$ *geen* cirkel voorstelt.

$x^2+y^2+8x-2y+20=0$

$x^2+8x+y^2-2y=-20$

$\left(x^2+2\cdot 4x+4^2\right)+\left(y^2-2\cdot 1y+1^2\right)=-20+16+1$

$(x+4)^2+(y-1)^2=-3$

$\downarrow$

Een som van kwadraten kan nooit negatief zijn.

Opdracht 20 bladzijde 106

Stellen de volgende vergelijkingen cirkels voor? Zo ja, geef de straal en de coördinaat van het middelpunt.

$\boxed{1 \quad x^2+y^2-6x+2y+5=0}$

$$x^2+y^2-6x+2y+5=0$$
$$x^2-6x+y^2+2y=-5$$
$$x^2-6x+9-9+y^2+2y+1-1=-5$$
$$(x-3)^2+(y+1)^2=-5+9+1$$
$$(x-3)^2+(y+1)^2=5$$
$$\downarrow$$

cirkel met straal $\sqrt{5}$ en middelpunt $M(3,-1)$

$\boxed{2 \quad x^2+y^2-x+4=0}$

$$x^2+y^2-x+4=0$$
$$x^2-x+y^2=-4$$
$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2=-4$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=-4+\frac{1}{4}$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=-\frac{15}{4}$$
$$\downarrow$$

valse vergelijking

De oorspronkelijke vergelijking stelt geen cirkel voor.

$\boxed{3 \quad x^2+y^2+x-y=0}$

$$x^2+y^2+x-y=0$$
$$x^2+x+y^2-y=0$$
$$x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$
$$\downarrow$$

cirkel met straal $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ en middelpunt $M\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$\boxed{4 \quad x^2+y^2+2xy=0}$

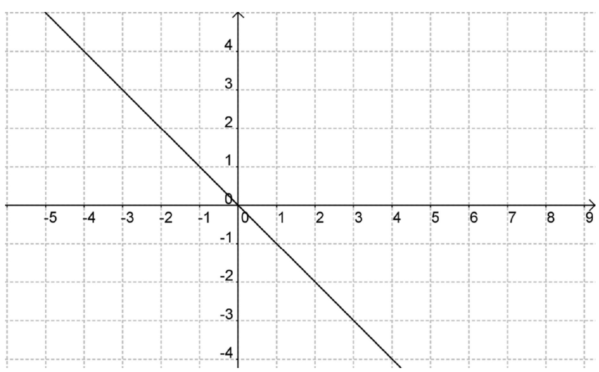
$$x^2+y^2+\underline{2xy}=0$$
$$\downarrow$$

Deze vergelijking stelt geen cirkel voor (de term in xy mag niet voorkomen).

Merk op : deze vergelijking stelt een rechte voor, want :

$$x^2+y^2+2xy=0$$
$$(x+y)^2=0 \quad (*)$$
$$x+y=0$$
$$y=-x$$

Als je $(*)$ ingeeft bij Geogebra zie je deze rechte.



$\boxed{5 \quad 3x^2+3y^2-3x+9y-5=0}$

$$3x^2+3y^2-3x+9y-5=0$$
$$x^2+y^2-x+3y-\frac{5}{3}=0$$
$$x^2-x+y^2+3y=\frac{5}{3}$$
$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+3y+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}=\frac{5}{3}$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{3}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{20+3+27}{12}=\frac{50}{12}=\frac{25}{6}$$

$$\downarrow$$

cirkel met straal $\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$ en middelpunt $M\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$

$\boxed{6 \quad 9x^2+4y^2-36=0}$

$$9x^2+4y^2-36=0$$

$$\downarrow$$

Deze vergelijking stelt geen cirkel voor (de coëfficiënten van x^2 en y^2 zijn verschillend).

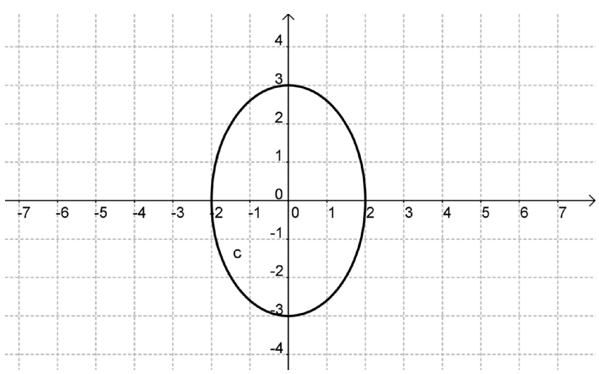
Merk op: deze vergelijking stelt een ellips voor, want:

$$9x^2+4y^2-36=0 \quad (*)$$

$$9x^2+4y^2=36$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

Als je $(*)$ ingeeft bij Geogebra zie je deze ellips.



Opdracht 21 bladzijde 106

De vergelijking $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$

A stelt geen cirkel voor.

B stelt een cirkel voor met straal 3.

C stelt een cirkel voor met straal 5.

D stelt een cirkel voor met straal 9.

Oplossing

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$$
$$x^2 - 10x + y^2 - 6y = -9$$
$$x^2 - 10x + 25 - 25 + y^2 - 6y + 9 - 9 = -9$$
$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = -9 + 25 + 9$$
$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$$
$$\downarrow$$

cirkel met straal 5

Antwoord C is juist.

Opdracht 22 bladzijde 106

Gegeven de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$.

Bepaal een vergelijking van de cirkel c' die hetzelfde middelpunt heeft als c en die door het punt $P(1, -1)$ gaat.

Oplossing

- $c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$
  $$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 5$$
  $$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 = 5$$
  $$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5 + 4 + 9$$
  $$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 18$$
  $$\downarrow$$
  c is een cirkel met straal $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ en middelpunt $M(2, -3)$
- straal r van $c' = |MP| = \sqrt{(1-2)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
- $c' \leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$

  $\left(\text{of } c' \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0\right)$

Opdracht 23 bladzijde 107

Gegeven is de cirkel c met middelpunt $M(-2, 3)$ en straal 5.

1 Toon aan dat $P(2, 6)$ op de cirkel c ligt.

$|PM| = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Omdat $|PM|$ gelijk is aan de straal van de cirkel ligt P op de cirkel.

2 Stel een vergelijking op van de raaklijn t in P aan c.

$\text{rico } MP = \frac{3-6}{-2-2} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{rico } t = -\frac{4}{3}$

$t \leftrightarrow y - 6 = -\frac{4}{3}(x-2)$

$t \leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} + 6$

$t \leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{26}{3}$

Opdracht 24 bladzijde 108

Bepaal een vergelijking van de raaklijn t aan de cirkel c in het punt P van c.

1 $c \leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$ en $P(3, 4)$

$M(0, 0), P(3, 4)$

$\text{rico } MP = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{rico } t = -\frac{3}{4}$

$t \leftrightarrow y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3)$

$t \leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} + 4$

$t \leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

2 $c \leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 50$ en $P(-2, 1)$

$M(3, -4), P(-2, 1)$

$\text{rico } MP = \frac{5}{-5} = -1 \Rightarrow \text{rico } t = 1$

$t \leftrightarrow y-1=1(x+2)$
$t \leftrightarrow y=x+2+1$
$t \leftrightarrow y=x+3$

Opdracht 25 bladzijde 108

Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan de cirkel $c \leftrightarrow (x-4)^2+(y-1)^2=10$ in de snijpunten met de x-as. Controleer grafisch.

Oplossing

$$\text{x-as} \leftrightarrow y=0 \text{ dus } (x-4)^2+(0-1)^2=10$$
$$(x-4)^2+1=10$$
$$(x-4)^2=9$$
$$x-4=3 \text{ of } x-4=-3$$
$$x=7 \text{ of } x=1$$

$S_1(1,0), S_2(7,0)$
$M(4,1)$

$\text{rico } MS_1=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \text{rico } t_1=-3$

$t_1 \leftrightarrow y-0=-3(x-1)$
$t_1 \leftrightarrow y=-3x+3$

$\text{rico } MS_2=\dfrac{1}{-3} \Rightarrow \text{rico } t_2=3$

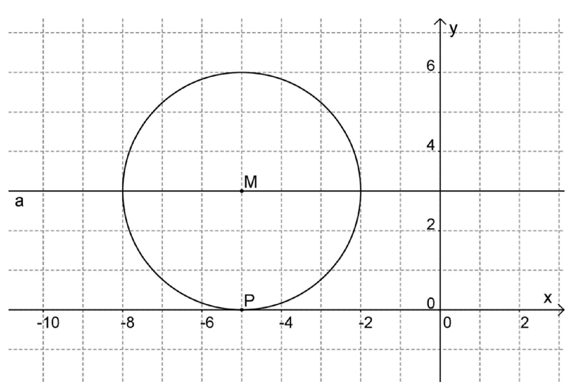
$t_2 \leftrightarrow y-0=3(x-7)$
$t_2 \leftrightarrow y=3x-21$

Opdracht 26 bladzijde 108

Bepaal een vergelijking van de cirkel c die raakt aan de x-as in $P(-5,0)$ en waarvan het middelpunt M op de rechte $a \leftrightarrow y=3$ ligt.

Oplossing

$M(-5,3)$ en $r=3$
$c \leftrightarrow (x+5)^2+(y-3)^2=9$



knoop punt

Opdracht 27 bladzijde 109

Gegeven zijn de cirkel $c \leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ en de rechten $k \leftrightarrow 3x + 4y = 0$,
$l \leftrightarrow 3x + 4y - 35 = 0$ en $m \leftrightarrow 3x + 4y + 20 = 0$

1 Geef het middelpunt M en de straal r van cirkel c.

$M(2,1)$ en $r = 5$

2 Bereken $d(M,k)$, $d(M,l)$ en $d(M,m)$.

$$d(M,k) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$d(M,l) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 35|}{\sqrt{9+16}} = \frac{25}{5} = 5$$

$$d(M,m) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 20|}{\sqrt{9+16}} = \frac{30}{5} = 6$$

3 Welke rechte heeft met de cirkel twee punten gemeenschappelijk, welke één punt en welke geen enkel punt? Controleer grafisch.

$d(M,k) = 2 < 5 \Rightarrow$ k heeft twee punten gemeenschappelijk met c

$d(M,l) = 5 \Rightarrow$ l heeft één punt gemeenschappelijk met c

$d(M,m) = 6 > 5 \Rightarrow$ m heeft geen enkel punt gemeenschappelijk met c

Opdracht 28 bladzijde 110

1 Toon aan dat er een cirkel c bestaat met middelpunt $M(0,-1)$ die raakt aan de rechten $a \leftrightarrow 8x + y - 6 = 0$ en $b \leftrightarrow 7x + 4y - 3 = 0$.

$$d(M,a) = \frac{|8 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) - 6|}{\sqrt{64+1}} = \frac{7}{\sqrt{65}} \qquad d(M,b) = \frac{|7 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) - 3|}{\sqrt{49+16}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

De cirkel met middelpunt $M(0,-1)$ en straal $\frac{7}{\sqrt{65}}$ raakt aan de rechten a en b.

2 Stel een vergelijking op van deze cirkel c.

$$c \leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = \frac{49}{65}$$

Opdracht 29 bladzijde 110

Bepaal a zodat de rechte $t \leftrightarrow y = ax + 3$ een raaklijn is aan de cirkel met middelpunt $M(1,1)$ en straal 1.

Oplossing

$t \leftrightarrow ax - y + 3 = 0$

t is een raaklijn aan de cirkel $c(M,1)$

$$\Updownarrow$$

$$d(M,t) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{|a \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$|a + 2| = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\Updownarrow$$

$$(a + 2)^2 = a^2 + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$a^2 + 4a + 4 = a^2 + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$a = \frac{-3}{4}$$

Opdracht 30 bladzijde 112

Bepaal vergelijkingen van de raaklijnen uit P aan de cirkel c. Controleer grafisch.

$\boxed{1 \quad P(3,1) \text{ en } c \leftrightarrow (x-2)^2+(y-8)^2=25}$

$M(2,8)$ en $r=5$

$|PM|=\sqrt{(2-3)^2+(8-1)^2}=\sqrt{1+49}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}>5$, dus er zijn twee raaklijnen

$t \leftrightarrow y-1=a(x-3)$

$t \leftrightarrow ax-y-3a+1=0$

$$\begin{gathered} t \text{ raakt aan } c(M,5) \\ \Updownarrow \\ d(M,t)=5 \\ \Updownarrow \\ \frac{|a\cdot 2-1\cdot 8-3a+1|}{\sqrt{a^2+1}}=5 \\ \Updownarrow \\ |-a-7|=5\cdot\sqrt{a^2+1} \\ \Updownarrow \\ a^2+14a+49=25(a^2+1) \\ \Updownarrow \\ 24a^2-14a-24=0 \\ \Updownarrow \\ a=\frac{4}{3} \quad \text{of} \quad a=-\frac{3}{4} \end{gathered}$$

zodat $t_1 \leftrightarrow \frac{4}{3}x-y-3=0$ en $t_2 \leftrightarrow -\frac{3}{4}x-y+\frac{13}{4}=0$

$t_1 \leftrightarrow y=\frac{4}{3}x-3$ en $t_2 \leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$

$\boxed{2 \quad P(-3,5) \text{ en } c \leftrightarrow x^2+y^2=9}$

$M(0,0)$ en $r=3$

$|PM|=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}>3$, dus er zijn twee raaklijnen

$t \leftrightarrow y-5=a(x+3)$

$t \leftrightarrow ax-y+3a+5=0$

$$\begin{gathered} t \text{ raakt aan } c(M,3) \\ \Updownarrow \\ d(M,t)=3 \end{gathered}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{|a\cdot 0-1\cdot 0+3a+5|}{\sqrt{a^2+1}}=3$$

$$\Updownarrow$$

$$|3a+5|=3\cdot\sqrt{a^2+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$9a^2+30a+25=9\left(a^2+1\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$30a=-16$$

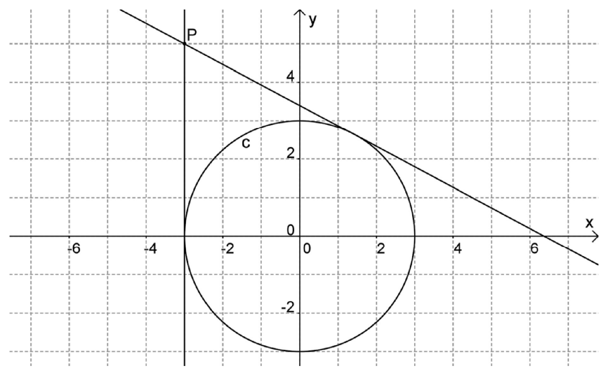
$$\Updownarrow$$

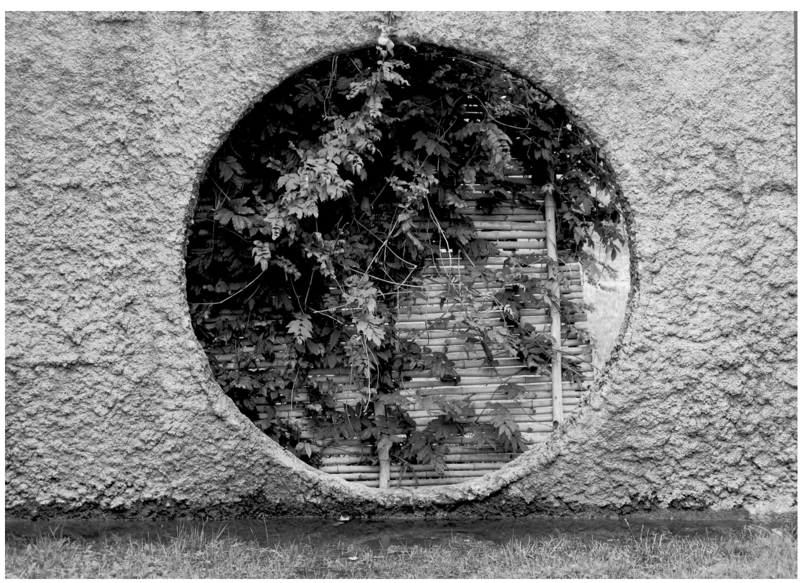
$$a=-\frac{8}{15}$$

zodat $t_1 \leftrightarrow -\frac{8}{15}x-y+\frac{17}{5}=0$

$t_1 \leftrightarrow y=-\frac{8}{15}x+\frac{17}{5}$

We vinden maar één waarde voor a, toch zijn er twee raaklijnen.
Raaklijn t_2 is een verticale rechte:
$t_2 \leftrightarrow x=-3$





Opdracht 31 bladzijde 114

Bepaal de coördinaten van de mogelijke snijpunten van de cirkel c met de gegeven rechte a. Controleer grafisch.

1 $c \leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4$ en $a \leftrightarrow x - 2y - 2 = 0$

$$\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

Uit (1) volgt: $x = 2y + 2 \quad (3)$

Substitutie van (3) in (2) geeft:

$$(2y+2)^2 + (y-2)^2 = 4$$
$$4y^2 + 8y + 4 + y^2 - 4y + 4 = 4$$
$$5y^2 + 4y + 4 = 0$$
$$D < 0$$

Er zijn geen snijpunten.

2 $c \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ en $a \leftrightarrow y = 2$

$$\begin{cases} y = 2 & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Substitutie van (1) in (2) geeft:

$$x^2 + 4 + 2x - 4 - 2 = 0$$
$$x^2 + 2x - 2 = 0$$
$$x = -1 - \sqrt{3} \quad \text{of} \quad x = -1 + \sqrt{3}$$

De gevraagde snijpunten zijn $S_1\left(-1-\sqrt{3}, 2\right)$ en $S_2\left(-1+\sqrt{3}, 2\right)$.

3 $c \leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$ en $a \leftrightarrow 4x - 3y + 32 = 0$

$$\begin{cases} 4x - 3y + 32 = 0 & (1) \\ (x-2)^2 + (y-5)^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

Uit (1) volgt: $y = \dfrac{4x+32}{3} \quad (3)$

Substitutie van (3) in (2) geeft:

$$(x-2)^2 + \left(\frac{4x+32}{3} - 5\right)^2 = 25$$

$$(x-2)^2+\left(\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}\right)^2=25$$

$$x^2-4x+4+\frac{16}{9}x^2+\frac{136}{9}x+\frac{289}{9}=25$$

$$9x^2-36x+36+16x^2+136x+289=225$$

$$25x^2+100x+100=0$$

$$x^2+4x+4=0$$

$$(x+2)^2=0$$

$$x=-2$$

Invullen in (3) geeft :

$$y=\frac{4\cdot(-2)+32}{3}=8$$

Er is maar één snijpunt $S(-2,8)$.

Opdracht 32 bladzijde 114

De plaatsen $A(0,0)$ en $B(6,6)$ zijn verbonden door een rechte weg in een bosrijk gebied. Een GSM-zendmast met een actieradius van 3 km bevindt zich in $C(5,1)$.
Over welke afstand kan men telefoneren langs de baan AB via deze zendmast?

Oplossing

$AB \leftrightarrow y=x$

$c \leftrightarrow (x-5)^2+(y-1)^2=9$

$$\begin{cases} y=x & (1) \\ (x-5)^2+(y-1)^2=9 & (2) \end{cases}$$

Substitutie van (1) in (2) geeft :

$$(x-5)^2+(x-1)^2=9$$

$$x^2-10x+25+x^2-2x+1=9$$

$$2x^2-12x+17=0$$

$$x=3-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{of} \quad x=3+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Er zijn twee snijpunten $S_1\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2},3-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en $S_2\left(3+\frac{\sqrt{2}}{2},3+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
\text{De gevraagde afstand} &= |S_1S_2| \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{2+2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Opdracht 33 bladzijde 116

Bepaal de coördinaten van de mogelijke snijpunten van de gegeven cirkels. Controleer grafisch.

$\boxed{1 \quad c_1 \leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25 \;\text{ en }\; c_2 \leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 40}$

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25 & \\ (x-4)^2 + y^2 = 40 & (1) \end{cases}$$

$$\text{of } \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 - 25 = 0 & (2) \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 - 40 = 0 & (3) \end{cases}$$

$(2) - (3)$ geeft:

$$\begin{aligned}
12x - 6y + 12 &= 0 \\
2x - y + 2 &= 0 \\
y &= 2x + 2 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Substitutie van (4) in (1) geeft:

$$\begin{aligned}
(x-4)^2 + (2x+2)^2 &= 40 \\
x^2 - 8x + 16 + 4x^2 + 8x + 4 - 40 &= 0 \\
5x^2 - 20 &= 0 \\
x^2 &= 4 \\
x = 2 \quad &\text{of} \quad x = -2
\end{aligned}$$

Invullen in (4) geeft:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$

De gevraagde snijpunten zijn $S_1(2, 6)$ en $S_2(-2, -2)$.

2 $c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y = 0$ en $c_2 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x + 10y = 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 10x + 10y = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$ geeft :

$$\frac{25}{2}x - \frac{25}{2}y = 0$$

$$y = x \qquad (3)$$

Substitutie van (3) in (2) geeft :

$$x^2 + x^2 - 10x + 10x = 0$$

$$2x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Invullen in (3) geeft :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Er is maar één snijpunt, namelijk $S(0, 0)$.

3 $c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$ en $c_2 \leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 22y - 7 = 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 8x - 22y - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$ geeft :

$$-18x + 24y + 24 = 0$$

$$-3x + 4y + 4 = 0$$

$$4y = 3x - 4$$

$$y = \frac{3}{4}x - 1 \qquad (3)$$

Substitutie van (3) in (1) geeft :

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x - 1\right)^2 - 10x + 2\left(\frac{3}{4}x - 1\right) + 17 = 0$$

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 - 10x + \frac{3}{2}x - 2 + 17 = 0$$

$$16x^2 + 9x^2 - 24x + 16 - 160x + 24x - 32 + 272 = 0$$

$$25x^2 - 160x + 256 = 0$$

$$(5x - 16)^2 = 0$$

$$x = \frac{16}{5}$$

Invullen in (3) geeft :

$$\begin{cases} x = \dfrac{16}{5} \\ y = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{16}{5} - 1 = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

Er is maar één snijpunt, namelijk $S\left(\frac{16}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

4 $c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$ en $c_2 \leftrightarrow (x-5)^2 + (y+1)^2 = 4$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0 \\ (x-5)^2 + (y+1)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\text{of} \begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2)$ geeft :

$-5 = 0 \rightarrow$ valse vergelijking

De cirkels snijden elkaar niet.

Je kan dit besluit ook op een andere manier vinden.

$$\begin{aligned} c_1 \leftrightarrow\ & x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0 \\ & x^2 - 10x + y^2 + 2y = -17 \\ & x^2 - 10x + 25 - 25 + y^2 + 2y + 1 - 1 = -17 \\ & (x-5)^2 + (y+1)^2 = -17 + 25 + 1 \\ & (x-5)^2 + (y+1)^2 = 9 \\ & \qquad\qquad \downarrow \end{aligned}$$

c_1 is een cirkel met straal 3 en middelpunt $M_1(5, -1)$

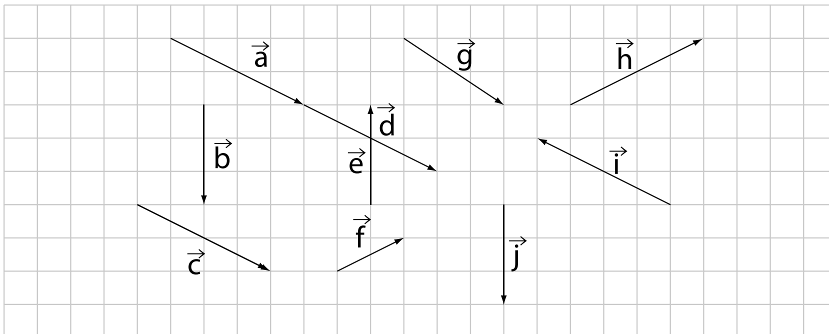
$$c_2 \leftrightarrow (x-5)^2 + (y+1)^2 = 4$$
$$\downarrow$$

c_2 is een cirkel met straal 2 en middelpunt $M_2(5, -1)$

c_1 en c_2 hebben bijgevolg geen snijpunten.

Opdracht 34 bladzijde 117

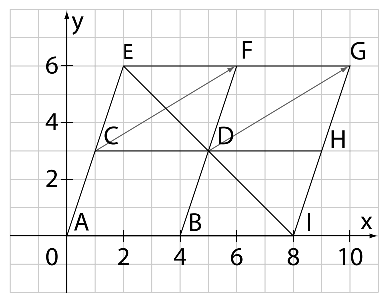
Welke vectoren zijn gelijk?



Oplossing

$\vec{a} = \vec{c} = \vec{d}, \vec{b} = \vec{j}$

Opdracht 35 bladzijde 117



1	De vector $\overrightarrow{CF}$ bepaalt een verschuiving, die je kunt voorstellen met de transformatieformule $(x, y) \to (x+a, y+b)$. Bepaal a en b.

$a = 5$ en $b = 3$

2	Hoe kun je a en b berekenen uit de coördinaten van C en F?

$C(1, 3)$ en $F(6, 6)$
$a = 5 = 6 - 1$ dus $a = x_F - x_C$
$b = 3 = 6 - 3$ dus $b = y_F - y_C$

3	Welke waarden voor a en b vind je voor de verschuiving bepaald door $\overrightarrow{DG}$?

$a = 5$ en $b = 3$, want $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DG}$

Opdracht 36 bladzijde 118

Gegeven zijn de punten $A(1, 0)$, $B(-1, 2)$ en $C(2, -2)$.
Bereken de coördinaat en de lengte van de volgende vectoren.

$\boxed{1 \quad \overrightarrow{AB}}$

$$\text{co}\left(\overrightarrow{AB}\right) = (-2, 2)$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |AB| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$\boxed{2 \quad \overrightarrow{BA}}$

$$\text{co}\left(\overrightarrow{BA}\right) = (2, -2)$$

$$\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = |BA| = 2\sqrt{2}$$

$\boxed{3 \quad \overrightarrow{AC}}$

$$\text{co}\left(\overrightarrow{AC}\right) = (1, -2)$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = |AC| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$\boxed{4 \quad \overrightarrow{BC}}$

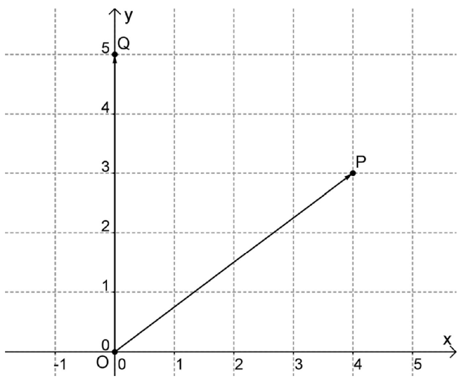
$$\text{co}\left(\overrightarrow{BC}\right) = (3, -4)$$

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = |BC| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Opdracht 37 bladzijde 118

Gegeven zijn de vectoren $\vec{u}(4, 3)$ en $\vec{v}(0, 5)$.

1 Teken $\overrightarrow{OP}$ en $\overrightarrow{OQ}$ zó dat $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$ en $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}$.



2 Gebruik de cosinusregel om de hoek $P\hat{O}Q$ te berekenen in ΔPOQ.

- $O(0, 0)$, $P(4, 3)$ en $Q(0, 5)$
- $|OP| = \sqrt{16+9} = 5$
  $|OQ| = 5$
  $|PQ| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
- $|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2\cdot|OP|\cdot|OQ|\cdot\cos P\hat{O}Q$
  $20 = 25 + 25 - 2\cdot 5\cdot 5\cdot\cos P\hat{O}Q$
  $\cos P\hat{O}Q = \dfrac{50-20}{50} = \dfrac{3}{5}$
  Hieruit volgt $P\hat{O}Q = 53°7'48''$.

Opdracht 38 bladzijde 120

Bereken de hoek α tussen de vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$.

1 $\vec{u}(2, -3)$ en $\vec{v}(5, 7)$

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot 5 + (-3)\cdot 7}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{5^2+7^2}} = \frac{-11}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{74}}$$

zodat $\alpha = 110°46'20''$

$\boxed{2 \quad \vec{u}(4,9) \text{ en } \vec{v}(-3,5)}$

$$\cos\alpha = \frac{4\cdot(-3)+9\cdot 5}{\sqrt{16+81}\cdot\sqrt{9+25}} = \frac{33}{\sqrt{97}\cdot\sqrt{34}}$$

zodat $\alpha = 54°55'34''$

$\boxed{3 \quad \vec{u}(-1,1) \text{ en } \vec{v}(6,1)}$

$$\cos\alpha = \frac{(-1)\cdot 6+1\cdot 1}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{36+1}} = \frac{-5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{37}}$$

zodat $\alpha = 125°32'16''$

$\boxed{4 \quad \vec{u}(-1,1) \text{ en } \vec{v}(-2,2)}$

$$\cos\alpha = \frac{(-1)\cdot(-2)+1\cdot 2}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{4+4}} = \frac{4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}} = 1$$

zodat $\alpha = 0°$

Opdracht 39 bladzijde 120

Bereken de hoek α tussen de vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$.
Wat kun je besluiten over de onderlinge ligging van $\vec{u}$ en $\vec{v}$?

$\boxed{1 \quad \vec{u}(2,-4) \text{ en } \vec{v}(2,1)}$

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot 2+(-4)\cdot 1}{\sqrt{4+16}\cdot\sqrt{4+1}} = \frac{0}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}} = 0$$

zodat $\alpha = 90°$

$\vec{u} \perp \vec{v}$

$\boxed{2 \quad \vec{u}(2,-3) \text{ en } \vec{v}(6,4)}$

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot 6+(-3)\cdot 4}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{36+16}} = \frac{0}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}} = 0$$

zodat $\alpha = 90°$

$\vec{u} \perp \vec{v}$

Opdracht 40 bladzijde 122

Vervolledig de tabel.

	$\lVert\vec{u}\rVert$	$\lVert\vec{v}\rVert$	de hoek α tussen $\vec{u}$ en $\vec{v}$	$\vec{u}\cdot\vec{v}$
1	9	12	120°	…
2	…	10	45°	$15\sqrt{2}$
3	7	…	180°	–35
4	6	5	…	15
5	8	$5\sqrt{3}$	…	–60

Oplossing van 1

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 9\cdot 12\cdot\cos 120°$$
$$= 108\cdot\frac{-1}{2}$$
$$= -54$$

Oplossing van 2

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert\cdot\lVert\vec{v}\rVert\cdot\cos\alpha$$
$$15\sqrt{2} = \lVert\vec{u}\rVert\cdot 10\cdot\cos 45°$$
$$\lVert\vec{u}\rVert = \frac{15\sqrt{2}}{10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3$$

Oplossing van 3

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert\cdot\lVert\vec{v}\rVert\cdot\cos\alpha$$
$$-35 = 7\cdot\lVert\vec{v}\rVert\cdot\cos 180°$$
$$\lVert\vec{v}\rVert = \frac{-35}{7\cdot(-1)} = 5$$

Oplossing van 4

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert\cdot\lVert\vec{v}\rVert\cdot\cos\alpha$$
$$15 = 6\cdot 5\cdot\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$
$$\alpha = 60°$$

Oplossing van 5

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert\cdot\lVert\vec{v}\rVert\cdot\cos\alpha$$
$$-60 = 8\cdot 5\sqrt{3}\cdot\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{-60}{40\sqrt{3}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\alpha = 150°$$

De vervolledigde tabel wordt:

	$\lVert\vec{u}\rVert$	$\lVert\vec{v}\rVert$	de hoek α tussen $\vec{u}$ en $\vec{v}$	$\vec{u}\cdot\vec{v}$
1	9	12	120°	–54
2	3	10	45°	$15\sqrt{2}$
3	7	5	180°	–35
4	6	5	60°	15
5	8	$5\sqrt{3}$	150°	–60

Opdracht 41 bladzijde 122

Bereken het scalair product $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$\boxed{1 \quad \vec{u}(2,-3) \text{ en } \vec{v}(5,7)}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 7 = 10 - 21 = -11$

$\boxed{2 \quad \vec{u}(2,-4) \text{ en } \vec{v}(2,1)}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 = 4 - 4 = 0$

$\boxed{3 \quad \vec{u}(4,9) \text{ en } \vec{v}(-3,5)}$

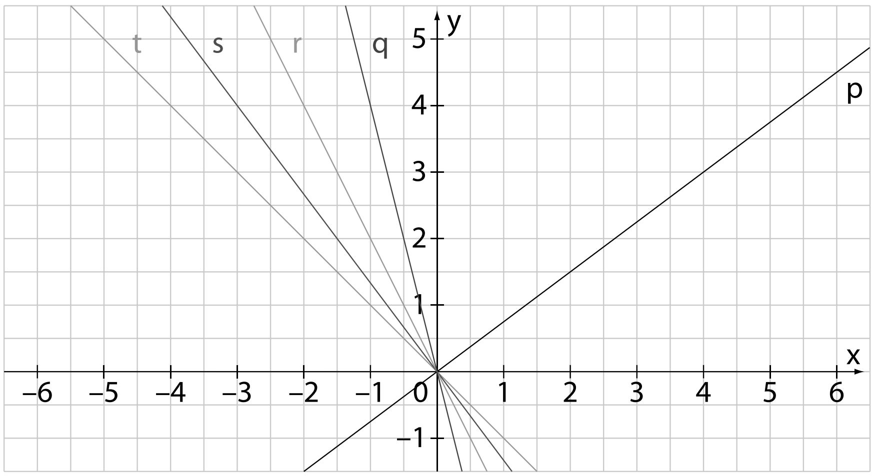
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot (-3) + 9 \cdot 5 = -12 + 45 = 33$

$\boxed{4 \quad \vec{u}(-1,1) \text{ en } \vec{v}(6,1)}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot 6 + 1 \cdot 1 = -6 + 1 = -5$

Opdracht 42 bladzijde 126

Welke van de volgende rechten staat loodrecht op de rechte p? Waarom?



Oplossing

$$\left.\begin{array}{l}\text{rico p} = \dfrac{3}{4}\\[2ex] \text{rico s} = \dfrac{4}{-3}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{rico p} \cdot \text{rico s} = -1$$

Bijgevolg $s \perp p$

Opdracht 43 bladzijde 126

Bepaal, indien mogelijk, de richtingscoëfficiënt van een rechte *l* die loodrecht staat op de rechte r.

$\boxed{1 \quad \text{rico r} = 3}$

$\text{rico } l = -\dfrac{1}{3}$

$\boxed{2 \quad \text{rico r} = -\dfrac{1}{2}}$

$\text{rico } l = 2$

$\boxed{3 \quad \text{rico r} = 0}$

rico *l* bestaat niet

$\boxed{4 \quad r \leftrightarrow y = x}$

$\text{rico r} = 1 \Rightarrow \text{rico } l = -1$

$\boxed{5 \quad r \leftrightarrow -4x - 7y + 3 = 0}$

$\text{rico r} = \dfrac{4}{-7} \Rightarrow \text{rico } l = \dfrac{7}{4}$

$\boxed{6 \quad r \leftrightarrow x = -1}$

r is een verticale rechte $\Rightarrow$ *l* is een horizontale rechte
dus rico $l = 0$

Opdracht 44 bladzijde 126

Staan de rechten a en b loodrecht op elkaar? Verklaar.

$\boxed{1 \quad a \leftrightarrow 2x - 5y + 1 = 0 \text{ en } b \leftrightarrow 2x + 5y - 1 = 0}$

$\text{rico a} = \frac{2}{5}, \text{rico b} = -\frac{2}{5}$

$a \not\perp b$ want rico a $\cdot$ rico b $\neq -1$

$\boxed{2 \quad a \leftrightarrow x - 2y = 5 \text{ en } b \leftrightarrow 4x + 2y - 8 = 0}$

$\text{rico a} = \frac{1}{2}, \text{rico b} = -2$

$a \perp b$ want rico a $\cdot$ rico b $= -1$

Opdracht 45 bladzijde 126

Gegeven de driehoek ABC met $A(2, 2)$, $B(5, 6)$ en $C(-6, 8)$.
Toon aan dat driehoek ABC rechthoekig is en vermeld welke hoek 90° is.

Oplossing

$\text{rico AB} = \frac{4}{3}, \text{rico AC} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}, \text{rico BC} = \frac{2}{-11}$

$AB \perp AC$ want rico AB $\cdot$ rico AC $= -1$

Driehoek ABC is rechthoekig met $\widehat{A} = 90°$.

Opdracht 46 bladzijde 126

Stel telkens een vergelijking op van de loodlijn *l* uit het gegeven punt P op de gegeven rechte r.

$\boxed{1 \quad P(1, 2) \text{ en } r \leftrightarrow -2x + 5y - 7 = 0}$

$\text{rico r} = \frac{2}{5} \Rightarrow \text{rico } l = -\frac{5}{2}$

$l \leftrightarrow y - 2 = -\frac{5}{2}(x - 1)$

$l \leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2} + 2$

$l \leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$

2 $P(3,-5)$ en $r \leftrightarrow y = 4$

r is een horizontale rechte $\Rightarrow$ l is een verticale rechte

$l \leftrightarrow x = 3$

3 $P(-1,-2)$ en $r \leftrightarrow x = -3$

r is een verticale rechte $\Rightarrow$ l is een horizontale rechte

$l \leftrightarrow y = -2$

4 $P(2,4)$ en $r = AB$ met $A(5,2)$ en $B(-1,3)$

$\text{rico } r = \frac{1}{-6} \Rightarrow \text{rico } l = 6$

$l \leftrightarrow y - 4 = 6(x-2)$

$l \leftrightarrow y = 6x - 12 + 4$

$l \leftrightarrow y = 6x - 8$

Opdracht 47 bladzijde 127

Bepaal een vergelijking van de middelloodlijn m van [PQ].

1 $P(6,4)$ en $Q(-2,8)$

$M(2,6)$ is het midden van $[PQ]$.

$\text{rico } PQ = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{rico } m = 2$

$m \leftrightarrow y - 6 = 2(x-2)$

$m \leftrightarrow y = 2x - 4 + 6$

$m \leftrightarrow y = 2x + 2$

2 $P(4,-3)$ en $Q(-4,-3)$

$M(0,-3)$ is het midden van $[PQ]$.

rico PQ = 0, dus PQ is een horizontale rechte, zodat m een verticale rechte is.

$m \leftrightarrow x = 0$

3 $P(2,3)$ en $Q(-2,-3)$

$M(0,0)$ is het midden van $[PQ]$.

$\text{rico } PQ = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{rico } m = -\frac{2}{3}$

$m \leftrightarrow y - 0 = -\frac{2}{3}(x-0)$

$m \leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x$

Opdracht 48 bladzijde 127

Gegeven de rechten $a \leftrightarrow x - 3y + 5 = 0$ en $b \leftrightarrow mx + 2y + 1 = 0$.
Bepaal m zodat a en b loodrecht op elkaar staan.

Oplossing

$$\text{rico } a = \frac{1}{3}, \text{ rico } b = \frac{-m}{2}$$

$$a \perp b \iff \text{rico } a \cdot \text{rico } b = -1 \iff \frac{1}{3} \cdot \frac{-m}{2} = -1 \iff m = 6$$

Opdracht 49 bladzijde 127

Voetbalploeg F.C. De Kampioenen gaat in op een uitnodiging van de Koninklijke Belgische Voetbalbond om een wedstrijd voor het goede doel te spelen tegen een selectie van old-stars.

De doelpalen P en Q van de old-stars hebben coördinaten (0, 3) en (0, 10).
Markske bevindt zich in A(57, 43) en trapt de bal naar Carmen die zich in B(34, 29) bevindt. Deze geeft de bal door aan Xavier, die de bal opvangt in C(30, 5). Xavier draait onmiddellijk over 90° en schiet op doel. De doelman van de old-stars en één van de verdedigers, door panische angst verlamd, blijven perplex staan in respectievelijk D(1, 5) en E (7, 9).

Zal Xavier Waterslagers scoren of niet?

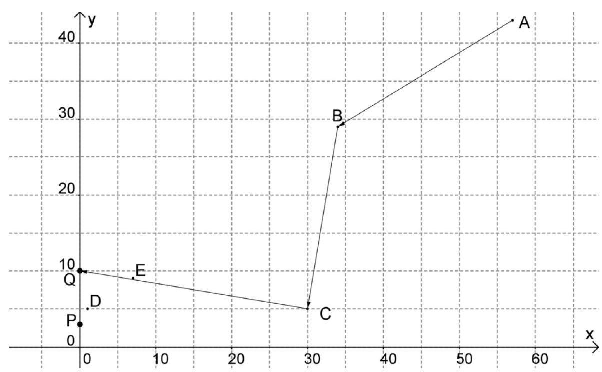
Oplossing

$$\text{rico } BC = \frac{-24}{-4} = 6$$

$$\text{Xavier's baan}: \; y - 5 = -\frac{1}{6}(x - 30)$$

$$y = -\frac{1}{6}x + 5 + 5$$

$$y = -\frac{1}{6}x + 10$$



De doelman $D(1, 5)$ bevindt zich niet op deze baan, want $-\frac{1}{6} \cdot 1 + 10 \neq 5$.

Ook de verdediger $E(7, 9)$ stopt de bal niet, want $-\frac{1}{6} \cdot 7 + 10 \neq 9$.

Xavier schiet echter recht op de doelpaal $Q(0, 10)$, want $-\frac{1}{6} \cdot 0 + 10 = 10$.

Hij scoort dus niet.

Opdracht 50 bladzijde 127

1 Gegeven de driehoek ABC met $A(1,3)$, $B(4,5)$ en $C(1,-2)$.

a Stel een vergelijking op van de hoogtelijnen h_A en h_B.

h_A is de rechte uit A, loodrecht op BC

$\text{rico BC} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3} \Rightarrow \text{rico } h_A = -\frac{3}{7}$

$h_A \leftrightarrow y-3 = -\frac{3}{7}(x-1)$

$h_A \leftrightarrow y = -\frac{3}{7}x + \frac{3}{7} + 3$

$h_A \leftrightarrow y = -\frac{3}{7}x + \frac{24}{7}$

h_B is de rechte uit B, loodrecht op AC

AC is een verticale rechte $\Rightarrow$ h_B is een horizontale rechte

$h_B \leftrightarrow y = 5$

b Bepaal de coördinaat van het snijpunt H van h_A en h_B.

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{7}x + \frac{24}{7} & (1) \\ y = 5 & (2) \end{cases}$$

Substitutie van (2) in (1) geeft $5 = -\frac{3}{7}x + \frac{24}{7} \Leftrightarrow -3x + 24 = 35 \Leftrightarrow x = \frac{11}{-3}$

$H\left(-\frac{11}{3}, 5\right)$

c Stel een vergelijking op van de hoogtelijn h_C.

h_C is de rechte uit C, loodrecht op AB

$\text{rico AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{rico } h_C = -\frac{3}{2}$

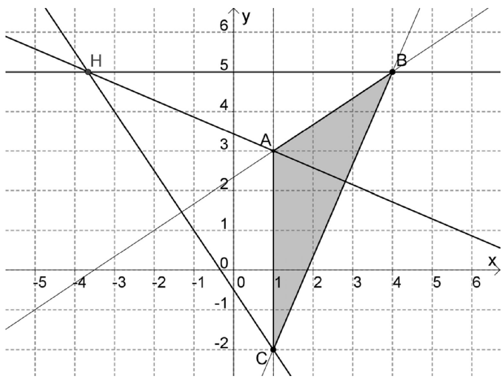
$h_C \leftrightarrow y+2 = -\frac{3}{2}(x-1)$

$h_C \leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - 2$

$h_C \leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

d Controleer of H op h_C ligt.

$$-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{11}{3}\right)-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}=5\text{, dus H ligt op } h_C.$$



2 De hoogtelijnen h_A, h_B en h_C van een driehoek ABC zijn concurrent.
Controleer deze eigenschap met een tekenprogramma.
Het snijpunt van de hoogtelijnen noemen we het **hoogtepunt** van de driehoek.

Opdracht 51 bladzijde 128

Gegeven de punten A(5, –2) en B(–2, 3) en de rechte $c \leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$.
Bepaal de punten C op de rechte c zodat de driehoek ABC rechthoekig is in C.
Controleer grafisch.

Oplossing

$$c \leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$$
$$c \leftrightarrow y = 2x - 4$$
$$C(x, 2x-4)$$

$$\text{rico CA} = \frac{2x-4+2}{x-5} = \frac{2x-2}{x-5}$$

$$\text{rico CB} = \frac{2x-4-3}{x+2} = \frac{2x-7}{x+2}$$

$$\Delta ABC \text{ is rechthoekig in C}$$
$$\Updownarrow$$
$$CA \perp CB$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2x-2}{x-5}\cdot\frac{2x-7}{x+2} = -1$$

$$\Updownarrow$$
$$(2x-2)(2x-7) = -(x-5)(x+2)$$
$$\Updownarrow$$
$$4x^2 - 18x + 14 = -x^2 + 3x + 10$$
$$\Updownarrow$$
$$5x^2 - 21x + 4 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \frac{1}{5} \quad \text{of} \quad x = 4$$

De gevraagde punten zijn $C_1\left(\frac{1}{5}, -\frac{18}{5}\right)$ en $C_2(4,4)$.

Opdracht 52 bladzijde 128

Gegeven zijn de rechten $l_1 \leftrightarrow a_1x + b_1y + c_1 = 0$ en $l_2 \leftrightarrow a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
Bewijs de volgende eigenschap : $l_1 \perp l_2 \iff a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$.

Oplossing

$$l_1 \perp l_2$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{rico } l_1 \cdot \text{rico } l_2 = -1$$
$$\Updownarrow \qquad (\text{stel } b_1 \neq 0 \neq b_2 \text{ en } a_1 \neq 0 \neq a_2)$$
$$\left(\frac{-a_1}{b_1}\right) \cdot \left(\frac{-a_2}{b_2}\right) = -1$$
$$\Updownarrow$$
$$a_1 \cdot a_2 = -b_1 \cdot b_2$$
$$\Updownarrow$$
$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$$

Andere gevallen :

- $a_1 = 0$

  dan is l_1 een horizontale rechte, zodat : $l_1 \perp l_2$
  $$\Downarrow$$
  $$l_2 \text{ is een verticale rechte}$$
  $$\Downarrow$$
  $$b_2 = 0$$
  $$\Downarrow$$
  $$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Omgekeerd: } a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 &= 0 \\
&\Downarrow \quad (a_1 = 0 \ \ (*)) \\
b_1 \cdot b_2 &= 0 \\
&\Downarrow \quad \begin{pmatrix} b_1 = 0 \text{ is onmogelijk in combinatie met } (*), \\ \text{want } c_1 = 0 \text{ stelt geen rechte voor.} \end{pmatrix} \\
b_2 &= 0 \\
&\Downarrow \\
l_2 \text{ is een verticale rechte} & \\
&\Downarrow \\
l_1 &\perp l_2
\end{aligned}$$

- $b_1 = 0$, $a_2 = 0$ en $b_2 = 0$ kunnen op een analoge manier behandeld worden.

Opdracht 53 bladzijde 128

1	Toon analytisch aan dat de drie hoogtelijnen van een driehoek concurrent zijn. Kies hiertoe het assenstelsel zó dat de hoekpunten van de driehoek op de x- en y-as gelegen zijn.

$A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$

rico $AB = 0$, rico $AC = \dfrac{-c}{a}$, rico $BC = \dfrac{-c}{b}$

- $h_A \leftrightarrow y - 0 = \dfrac{b}{c}(x - a)$

  $h_A \leftrightarrow y = \dfrac{b}{c}x - \dfrac{ab}{c}$

- $h_B \leftrightarrow y - 0 = \dfrac{a}{c}(x - b)$

  $h_B \leftrightarrow y = \dfrac{a}{c}x - \dfrac{ab}{c}$

- $h_C \leftrightarrow x = 0$

- snijpunt H van h_A en h_C : $H\left(0, \dfrac{-ab}{c}\right)$

- H ligt ook op h_B, want $\dfrac{a}{c} \cdot 0 - \dfrac{ab}{c} = \dfrac{-ab}{c}$.

- De drie hoogtelijnen van een driehoek zijn concurrent.

2 Toon analytisch aan dat de drie middelloodlijnen van een driehoek concurrent zijn.

m_{AB} is de middelloodlijn van $[AB]$.
m_{AC} is de middelloodlijn van $[AC]$.
m_{BC} is de middelloodlijn van $[BC]$.

- $m_{AB} \leftrightarrow x = \dfrac{a+b}{2}$ (m_{AB} is een verticale rechte, omdat AB een horizontale rechte (x-as) is.)
- $m_{AC} \leftrightarrow y - \dfrac{c}{2} = \dfrac{a}{c}\left(x - \dfrac{a}{2}\right)$

  $m_{AC} \leftrightarrow y = \dfrac{a}{c}x - \dfrac{a^2}{2c} + \dfrac{c}{2}$

  $m_{AC} \leftrightarrow y = \dfrac{a}{c}x + \dfrac{c^2 - a^2}{2c}$
- $m_{BC} \leftrightarrow y - \dfrac{c}{2} = \dfrac{b}{c}\left(x - \dfrac{b}{2}\right)$

  $m_{BC} \leftrightarrow y = \dfrac{b}{c}x - \dfrac{b^2}{2c} + \dfrac{c}{2}$

  $m_{BC} \leftrightarrow y = \dfrac{b}{c}x + \dfrac{c^2 - b^2}{2c}$
- snijpunt M van m_{AB} en m_{AC} : $x = \dfrac{a+b}{2}$

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{c} \cdot \frac{a+b}{2} + \frac{c^2 - a^2}{2c} \\ &= \frac{a^2 + ab}{2c} + \frac{c^2 - a^2}{2c} \\ &= \frac{c^2 + ab}{2c} \end{aligned}$$

$$M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c^2+ab}{2c}\right)$$

- M ligt ook op m_{BC}, want $\dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{c^2 - b^2}{2c} = \dfrac{ab + b^2}{2c} + \dfrac{c^2 - b^2}{2c} = \dfrac{c^2 + ab}{2c}$.
- De drie middelloodlijnen van een driehoek zijn concurrent.

3 Toon analytisch aan dat de drie zwaartelijnen van een driehoek concurrent zijn.

z_A is de zwaartelijn uit A. Dit is de rechte door A en het midden M_{BC} van $[BC]$.
z_B is de zwaartelijn uit B. Dit is de rechte door B en het midden M_{AC} van $[AC]$.
z_C is de zwaartelijn uit C. Dit is de rechte door C en het midden M_{AB} van $[AB]$.

- $A(a, 0), M_{BC}\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, dus rico $z_A = \dfrac{\frac{c}{2}-0}{\frac{b}{2}-a} = \dfrac{\frac{c}{2}}{\frac{b-2a}{2}} = \dfrac{c}{b-2a}$

$$z_A \leftrightarrow y-0 = \frac{c}{b-2a}(x-a)$$
$$z_A \leftrightarrow y = \frac{c}{b-2a}x - \frac{ac}{b-2a}$$

- $B(b, 0), M_{AC}\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$, dus rico $z_C = \dfrac{\frac{c}{2}-0}{\frac{a}{2}-b} = \dfrac{\frac{c}{2}}{\frac{a-2b}{2}} = \dfrac{c}{a-2b}$

$$z_B \leftrightarrow y-0 = \frac{c}{a-2b}(x-b)$$
$$z_B \leftrightarrow y = \frac{c}{a-2b}x - \frac{bc}{a-2b}$$

- $C(0, c), M_{AB}\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$, dus rico $z_C = \dfrac{0-c}{\frac{a+b}{2}-0} = \dfrac{-c}{\frac{a+b}{2}} = \dfrac{-2c}{a+b}$

$$z_C \leftrightarrow y-c = \frac{-2c}{a+b}(x-0)$$
$$z_C \leftrightarrow y = \frac{-2c}{a+b}x + c$$

- snijpunt Z van z_A en z_B :

$$\begin{cases} y = \dfrac{c}{b-2a}x - \dfrac{ac}{b-2a} & (1) \\ y = \dfrac{c}{a-2b}x - \dfrac{bc}{a-2b} & (2) \end{cases}$$

(1) invullen in (2) geeft :

$$\frac{c}{b-2a}x - \frac{ac}{b-2a} = \frac{c}{a-2b}x - \frac{bc}{a-2b}$$
$$\frac{c(x-a)}{b-2a} = \frac{c(x-b)}{a-2b}$$
$$\frac{x-a}{b-2a} = \frac{x-b}{a-2b}$$
$$(x-a)(a-2b) = (x-b)(b-2a)$$
$$ax-2bx-a^2 \cancel{+2ab} = bx-2ax-b^2 \cancel{+2ab}$$
$$ax-2bx-bx+2ax = a^2-b^2$$

$3ax - 3bx = a^2 - b^2$

$3(a-b)x = a^2 - b^2$

$x = \dfrac{a^2 - b^2}{3(a-b)} = \dfrac{(a-b)(a+b)}{3(a-b)} = \dfrac{a+b}{3}$

Invullen in (1) geeft : $y = \dfrac{c}{b-2a} \cdot \dfrac{a+b}{3} - \dfrac{ac}{b-2a}$

$$= \frac{ac + bc - 3ac}{3(b-2a)}$$

$$= \frac{bc - 2ac}{3(b-2a)}$$

$$= \frac{c(b-2a)}{3(b-2a)}$$

$$= \frac{c}{3}$$

$Z\left(\dfrac{a+b}{3}, \dfrac{c}{3}\right)$

- Z ligt ook op Z_C, want $\dfrac{-2c}{a+b} \cdot \dfrac{a+b}{3} + c = \dfrac{-2c}{3} + c = \dfrac{c}{3}$.
- De drie zwaartelijnen van een driehoek zijn concurrent.

4 In een willekeurige driehoek ABC noemen we het snijpunt van de hoogtelijnen H (hoogtepunt), het snijpunt van de middelloodlijnen M (middelpunt) en het snijpunt van de zwaartelijnen Z (zwaartepunt).

a Toon analytisch aan dat deze drie punten H, M en Z op één rechte liggen.
Deze rechte wordt de **rechte van Euler** genoemd.

b Toon aan dat $|HZ| = 2|ZM|$.

a
- $H\left(0, \dfrac{-ab}{c}\right), M\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{c^2+ab}{2c}\right), Z\left(\dfrac{a+b}{3}, \dfrac{c}{3}\right)$
- rico $HZ = \dfrac{\dfrac{c}{3} + \dfrac{ab}{c}}{\dfrac{a+b}{3} - 0} = \dfrac{\dfrac{c^2+3ab}{3c}}{\dfrac{a+b}{3}} = \dfrac{c^2+3ab}{3c} \cdot \dfrac{3}{a+b} = \dfrac{c^2+3ab}{c(a+b)}$

  $HZ \leftrightarrow y + \dfrac{ab}{c} = \dfrac{c^2+3ab}{c(a+b)}(x-0)$

  $HZ \leftrightarrow y = \dfrac{c^2+3ab}{c(a+b)}x - \dfrac{ab}{c}$

- M ligt op HZ, want $\dfrac{c^2+3ab}{c(a+b)}\cdot\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{ab}{c}=\dfrac{c^2+3ab}{2c}-\dfrac{ab}{c}=\dfrac{c^2+3ab-2ab}{2c}=\dfrac{c^2+ab}{2c}$.
- H, M en Z liggen op één rechte.

b • $|HZ|^2=\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2+\left(\dfrac{c}{3}+\dfrac{ab}{c}\right)^2$

$$\begin{aligned}4|ZM|^2&=4\left(\frac{a+b}{3}-\frac{a+b}{2}\right)^2+4\left(\frac{c}{3}-\frac{c^2+ab}{2c}\right)^2\\&=4\left(\frac{2a+2b-3a-3b}{6}\right)^2+4\left(\frac{2c-3c^2-3ab}{6c}\right)^2\\&=4\left(\frac{-a-b}{6}\right)^2+4\left(\frac{-c^2-3ab}{6c}\right)^2\\&=\left(\frac{-a-b}{3}\right)^2+\left(\frac{-c^2-3ab}{3c}\right)^2\\&=\left(\frac{a+b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}+\frac{ab}{c}\right)^2\end{aligned}$$

zodat $|HZ|^2=4|ZM|^2$
en dus ook $|HZ|=2|ZM|$

Opdracht 54 bladzijde 128

Gegeven het punt P en de rechte r. Bepaal d(P, r).

$\boxed{1\quad P(-1,-4) \text{ en } r\leftrightarrow 3x-4y+7=0}$

$$d(P,r)=\frac{|3\cdot(-1)-4\cdot(-4)+7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{\sqrt{25}}=4$$

$\boxed{2\quad P(2,-3) \text{ en } r\leftrightarrow 3x-6=0}$

$d(P,r)=|2-2|=0$ want $r\leftrightarrow x=2$
Merk op dat P op r ligt.

$\boxed{3\quad P(1,5) \text{ en } r\leftrightarrow y=-7}$

$d(P,r)=|5-(-7)|=12$ want $r\leftrightarrow y=-7$

$\boxed{4 \quad P(0,3) \text{ en } r \leftrightarrow y = \frac{6}{7}x + 2}$

$r \leftrightarrow 7y = 6x + 14$

$r \leftrightarrow 6x - 7y + 14 = 0$

$$d(P, r) = \frac{|6 \cdot 0 - 7 \cdot 3 + 14|}{\sqrt{36+49}} = \frac{|-7|}{\sqrt{85}} = \frac{7}{\sqrt{85}}$$

Opdracht 55 bladzijde 128

De rechte $a \leftrightarrow 7x + 3y - 8 = 0$ gaat door $A(2, -2)$ en ligt even ver van de punten $B(-2, 4)$ en $C(1, -3)$. Toon dit aan.

Oplossing

A ligt op a, want $7 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) - 8 = 14 - 6 - 8 = 0$

$$d(B, a) = \frac{|7 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 - 8|}{\sqrt{49+9}} = \frac{|-10|}{\sqrt{58}} = \frac{10}{\sqrt{58}}$$

$$d(C, a) = \frac{|7 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) - 8|}{\sqrt{49+9}} = \frac{|-10|}{\sqrt{58}} = \frac{10}{\sqrt{58}}$$

De rechte a ligt even ver van de punten B en C.

Opdracht 56 bladzijde 129

Bereken de afstand tussen de evenwijdige rechten $p \leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0$ en $q \leftrightarrow 2x + 3y + 4 = 0$.

Oplossing

$P(3, 0)$ ligt op de rechte p.

$$d(p, q) = d(P, q) = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 4|}{\sqrt{4+9}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$$

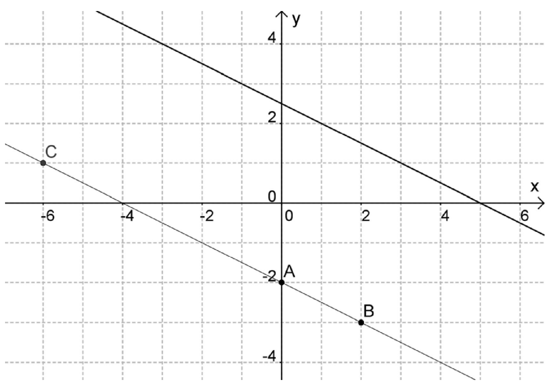
Opdracht 57 bladzijde 129

Gegeven de punten $A(0,-2)$, $B(2,-3)$, $C(-6,1)$ en de rechte $r \leftrightarrow x+2y-5=0$.

1 Bereken $d(A,r)$, $d(B,r)$ en $d(C,r)$.

$$d(A,r)=\frac{|1\cdot 0+2\cdot(-2)-5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|-9|}{\sqrt{5}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$$
$$d(B,r)=\frac{|1\cdot 2+2\cdot(-3)-5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|-9|}{\sqrt{5}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$$
$$d(C,r)=\frac{|1\cdot(-6)+2\cdot 1-5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|-9|}{\sqrt{5}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$$

2 Onderzoek de onderlinge ligging van A, B en C grafisch.



Opdracht 58 bladzijde 129

Bepaal vergelijkingen van de bissectrices van de volgende rechtenparen.

1 $p \leftrightarrow x-y=0$ en $q \leftrightarrow x+y-5=0$

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|x+y-5|}{\sqrt{1+1}}$$
$$\Updownarrow$$
$$|x-y|=|x+y-5|$$
$$\Updownarrow$$
$$x-y=x+y-5 \quad \text{of} \quad x-y=-x-y+5$$
$$\Updownarrow$$
$$y=\frac{5}{2} \quad \text{of} \quad x=\frac{5}{2}$$

$\boxed{2 \quad p \leftrightarrow -3x+4y=0 \text{ en } q \leftrightarrow 8x+15y=0}$

$$\frac{|-3x+4y|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|8x+15y|}{\sqrt{64+225}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{|-3x+4y|}{5}=\frac{|8x+15y|}{17}$$
$$\Updownarrow$$
$$|-51x+68y|=|40x+75y|$$
$$\Updownarrow$$
$$-51x+68y=40x+75y \quad \text{of} \quad -51x+68y=-40x-75y$$
$$\Updownarrow$$
$$91x+7y=0 \quad \text{of} \quad 11x-143y=0$$
$$\Updownarrow$$
$$13x+y=0 \quad \text{of} \quad x-13y=0$$

$\boxed{3 \quad p \leftrightarrow x-3=0 \text{ en } q \leftrightarrow y+1=0}$

$$\frac{|x-3|}{\sqrt{1+0}}=\frac{|y+1|}{\sqrt{0+1}}$$
$$\Updownarrow$$
$$|x-3|=|y+1|$$
$$\Updownarrow$$
$$x-3=y+1 \quad \text{of} \quad x-3=-y-1$$
$$\Updownarrow$$
$$x-y-4=0 \quad \text{of} \quad x+y-2=0$$

Opdracht 59 bladzijde 129

Gegeven het punt $A(2,1)$ en de rechte $r \leftrightarrow -5x+12y+3=0$.

Bepaal vergelijkingen van de rechten die evenwijdig zijn met r en die op een afstand 1 van A liggen.

Oplossing

$s \leftrightarrow -5x+12y+k=0$

$$\begin{aligned} d(A,s)=1 &\Leftrightarrow \frac{|-5\cdot 2+12\cdot 1+k|}{\sqrt{25+144}}=1 \\ &\Leftrightarrow \frac{|2+k|}{13}=1 \\ &\Leftrightarrow |2+k|=13 \\ &\Leftrightarrow 2+k=13 \quad \text{of} \quad 2+k=-13 \\ &\Leftrightarrow k=11 \quad \text{of} \quad k=-15 \end{aligned}$$

De rechten $s_1 \leftrightarrow -5x+12y+11=0$ en $s_2 \leftrightarrow -5x+12y-15=0$ zijn evenwijdig met r en liggen op een afstand 1 van A.

Opdracht 60 bladzijde 129

Gegeven de punten $A(2, m)$, $B(3, 1)$ en de rechte $r \leftrightarrow y=-2x+2$.

Bepaal m zodat het punt A even ver ligt van het punt B als van de rechte r.

Oplossing

$r \leftrightarrow 2x+y-2=0$

$$d(A,B)=d(A,r)$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{(3-2)^2+(1-m)^2}=\frac{|2\cdot 2+1\cdot m-2|}{\sqrt{4+1}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{1+1-2m+m^2}\cdot\sqrt{5}=|2+m|$$
$$\Updownarrow$$
$$(m^2-2m+2)\cdot 5=(m+2)^2$$
$$\Updownarrow$$
$$5m^2-10m+10=m^2+4m+4$$
$$\Updownarrow$$
$$4m^2-14m+6=0$$
$$\Updownarrow$$
$$2m^2-7m+3=0$$
$$\Updownarrow$$
$$m=\frac{1}{2} \quad \text{of} \quad m=3$$

Opdracht 61 bladzijde 129

Gegeven de rechten $a \leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$ en $b \leftrightarrow 2x - y + 2 = 0$.

1 Bepaal de onderlinge ligging van a en b.

rico a = 2 = rico b, dus a || b

2 Bepaal de afstand tussen a en b.

$A(2, 0)$ ligt op de rechte a.

$$d(a, b) = d(A, b) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

3 De rechten a en b snijden de x-as in de punten P en Q. Ze snijden de y-as in de punten R en S. Stel een vergelijking op van de rechte m die de middens van [PQ] en [RS] verbindt.

$P(2, 0), Q(-1, 0)$ $\qquad$ $R(0, -4), S(0, 2)$

$M_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ is het midden van $[PQ]$ $\qquad$ $M_2(0, -1)$ is het midden van $[RS]$

$$\text{rico } M_1M_2 = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$m = M_1M_2 \leftrightarrow y - 0 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$m \leftrightarrow y = 2x - 1$$

4 Neem een willekeurig punt T op m en bereken $d(T, a)$ en $d(T, b)$. Wat stel je vast? De rechte m noemen we de **middenparallel** van de rechten a en b.

Een willekeurig punt T van m is van de vorm $(x, 2x - 1)$.

$$d(T, a) = \frac{|2x - 1(2x-1) - 4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$d(T, b) = \frac{|2x - 1(2x-1) + 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|3|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

We stellen vast dat voor elk punt T op m geldt: $d(T, a) = d(T, b)$.

De rechte m is evenwijdig met a en b en ligt midden tussen deze twee rechten.

Opdracht 62 bladzijde 130

Bepaal vergelijkingen van de rechten door A(2, 3) die op een afstand 3 van de oorsprong liggen.

Oplossing

$r \leftrightarrow y-3=a(x-2)$

$r \leftrightarrow ax-y-2a+3=0$

$$d(O,r)=3$$
$$\Updownarrow \qquad O(0,0)$$
$$\frac{|a\cdot 0-1\cdot 0-2a+3|}{\sqrt{a^2+1}}=3$$
$$\Updownarrow$$
$$|-2a+3|=3\cdot\sqrt{a^2+1}$$
$$\Updownarrow$$
$$(-2a+3)^2=9(a^2+1)$$
$$\Updownarrow$$
$$4a^2-12a+9=9a^2+9$$
$$\Updownarrow$$
$$5a^2+12a=0$$
$$\Updownarrow$$
$$a(5a+12)=0$$
$$\Updownarrow$$
$$a=0 \quad \text{of} \quad a=-\frac{12}{5}$$

$r_1 \leftrightarrow -y+3=0$ en $r_2 \leftrightarrow -\frac{12}{5}x-y+\frac{24}{5}+3=0$, of nog,

$r_1 \leftrightarrow y=3$ en $r_2 \leftrightarrow 12x+5y-39=0$

Opdracht 63 bladzijde 130

Bepaal vergelijkingen van de rechten die door A(2, –2) gaan en even ver liggen van B(–2, 4) als van C(1, –3).

Oplossing

$$r \leftrightarrow y + 2 = a(x-2)$$
$$r \leftrightarrow ax - y - 2a - 2 = 0$$

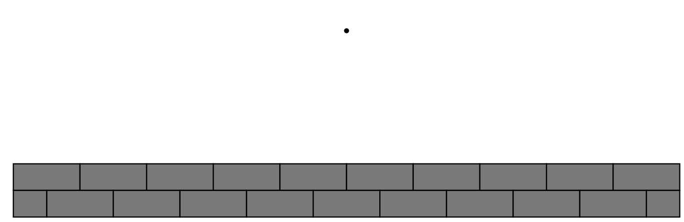
$$d(B, r) = d(C, r)$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{|a\cdot(-2) - 1\cdot 4 - 2a - 2|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|a\cdot 1 - 1\cdot(-3) - 2a - 2|}{\sqrt{a^2+1}}$$
$$\Updownarrow$$
$$|-4a-6| = |-a+1|$$
$$\Updownarrow$$
$$-4a - 6 = -a + 1 \quad \text{of} \quad -4a - 6 = a - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$-3a = 7 \quad \text{of} \quad -5a = 5$$
$$\Updownarrow$$
$$a = -\frac{7}{3} \quad \text{of} \quad a = -1$$

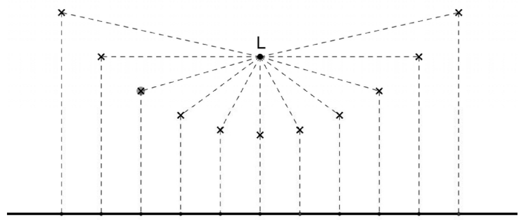
$r_1 \leftrightarrow -\frac{7}{3}x - y + \frac{14}{3} - 2 = 0$ en $r_2 \leftrightarrow -x - y + 2 - 2 = 0$, of nog,
$r_1 \leftrightarrow 7x + 3y - 8 = 0$ en $r_2 \leftrightarrow x + y = 0$

Opdracht 64 bladzijde 130

Alle leerlingen van een klas staan naast elkaar tegen een lange muur met hun leerkracht in het midden. De leerkracht zet enkele passen vooruit en verwijdert zich daarbij van de muur.
Nu moet elke leerling een positie zoeken waardoor hij (zij) even ver van de muur verwijderd is als van de leerkracht.

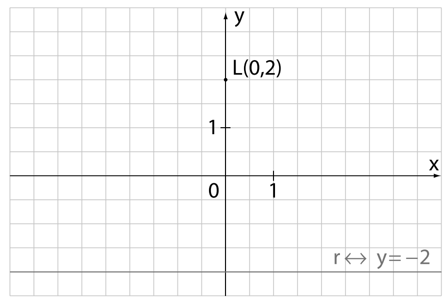
1	De leerkracht wordt voorgesteld door een punt. Zet kruisjes waar de leerlingen kunnen staan. Waarop lijkt je getekende kromme?





De getekende kromme lijkt op een parabool.

2 We lossen dit probleem nu analytisch op. Stel de muur voor als een rechte $r \leftrightarrow y = -2$. De leerkracht stellen we voor door het punt $L(0, 2)$ en de leerlingen door de punten $P(x, y)$. Bepaal een vergelijking van de kromme k waarop de punten $P(x, y)$ liggen die voldoen aan de voorwaarde $|PL| = d(P, r)$.



$$|PL| = d(P, r)$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \frac{|y+2|}{\sqrt{0+1}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y+2|$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 + (y-2)^2 = (y+2)^2$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 + \cancel{y^2} - 4y + \cancel{4} = \cancel{y^2} + 4y + \cancel{4}$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 - 8y = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$y = \frac{1}{8}x^2$$

De punten $P(x, y)$ die voldoen aan de voorwaarde $|PL| = d(P, r)$ liggen op een parabool.

Opdracht 65 bladzijde 131

Het punt $P(-1,1)$ behoort tot de cirkel c met middelpunt $M\left(-\frac{5}{2},-1\right)$.
Bepaal een vergelijking van c.

Oplossing

$$r=|PM|=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}+1\right)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$c \leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{25}{4}$$

Ofwel:

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y+1)^2=r^2$$

$$P(-1,1) \text{ invullen: } \left(-1+\frac{5}{2}\right)^2+(1+1)^2=r^2$$

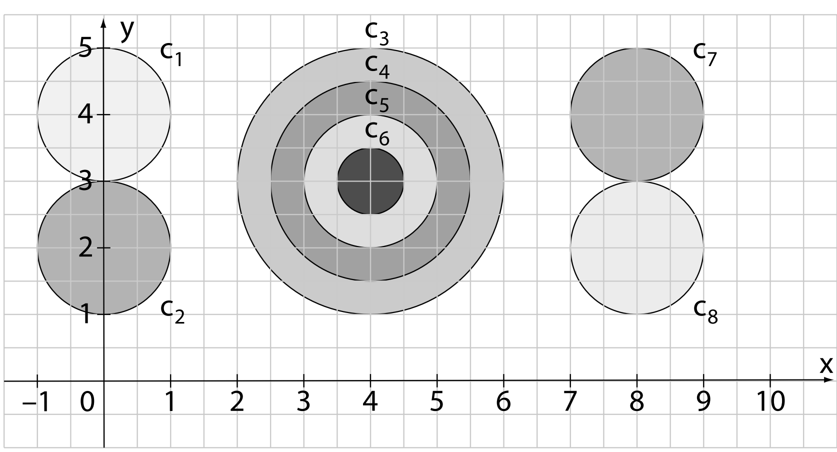
$$\frac{9}{4}+4=r^2$$

$$\frac{25}{4}=r^2$$

$$c \leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{25}{4}$$

Opdracht 66 bladzijde 131

Bepaal vergelijkingen van de cirkels op de volgende figuur.



Oplossing

$c_1 \leftrightarrow x^2 + (y-4)^2 = 1$

$c_2 \leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 1$

$c_3 \leftrightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$

$c_4 \leftrightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 = \frac{9}{4}$

$c_5 \leftrightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$

$c_6 \leftrightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 = \frac{1}{4}$

$c_7 \leftrightarrow (x-8)^2 + (y-4)^2 = 1$

$c_8 \leftrightarrow (x-8)^2 + (y-2)^2 = 1$

Opdracht 67 bladzijde 131

Gegeven de punten $P(-2, 5)$ en $Q(2, -1)$.
Stel een vergelijking op van de cirkel c met middellijn $[PQ]$.

Oplossing

- middelpunt M = midden van $[PQ]$
  $= (0, 2)$
- straal $r = |MP|$
  $= \sqrt{(-2-0)^2 + (5-2)^2}$
  $= \sqrt{4+9}$
  $= \sqrt{13}$
- $c \leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 13$

Opdracht 68 bladzijde 131

1	Stel een vergelijking op van de cirkel c die $M(2, 4)$ als middelpunt heeft en raakt aan de x-as.

$r = 4$ dus $c \leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$

2	Stel een vergelijking op van de cirkel c die $M(2, 4)$ als middelpunt heeft en raakt aan de y-as.

$r = 2$ dus $c \leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$

Opdracht 69 bladzijde 131

Stellen de volgende vergelijkingen cirkels voor? Zo ja, geef de straal en de coördinaat van het middelpunt.

$\boxed{1 \quad (x+2)^2+(y-2)^2=25}$

$(x+2)^2+(y-2)^2=25$

$\downarrow$

cirkel met straal 5 en middelpunt $M(-2, 2)$

$\boxed{2 \quad (x-2)^2+(y-3)^2+25=0}$

$(x-2)^2+(y-3)^2+25=0$

$(x-2)^2+(y-3)^2=-25$

$\downarrow$

valse vergelijking

De oorspronkelijke vergelijking stelt geen cirkel voor.

$\boxed{3 \quad x^2+y^2+6x-3y+5=0}$

$$x^2+y^2+6x-3y+5=0$$

$$x^2+6x+y^2-3y=-5$$

$$x^2+6x+9-9+y^2-3y+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}=-5$$

$$(x+3)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=-5+9+\frac{9}{4}$$

$$(x+3)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

$\downarrow$

cirkel met straal $\frac{5}{2}$ en middelpunt $M\left(-3, \frac{3}{2}\right)$

$\boxed{4 \quad x^2+y^2+5=0}$

$x^2+y^2+5=0$

$x^2+y^2=-5$

$\downarrow$

valse vergelijking

De oorspronkelijke vergelijking stelt geen cirkel voor.

$\boxed{5 \quad x^2+y^2-4x+2y+5=0}$

$$
\begin{aligned}
&x^2+y^2-4x+2y+5=0\\
&x^2-4x+y^2+2y=-5\\
&x^2-4x+4-4+y^2+2y+1-1=-5\\
&(x-2)^2+(y+1)^2=-5+4+1\\
&(x-2)^2+(y+1)^2=0
\end{aligned}
$$

$\downarrow$

cirkel met straal 0 en middelpunt $M(2,-1)$

Een cirkel met straal 0 wordt ook wel **puntcirkel** genoemd.

$\boxed{6 \quad 4x^2-9y^2-36=0}$

$4x^2-9y^2-36=0$

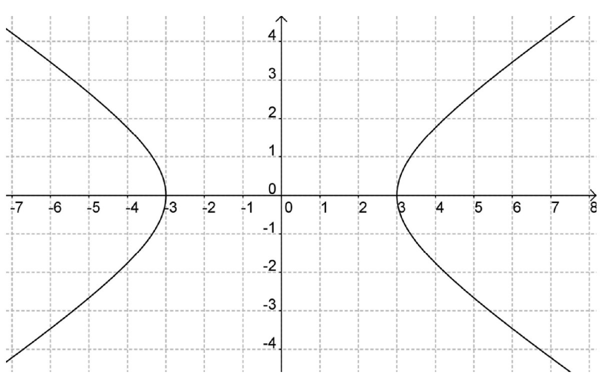
$\downarrow$

Deze vergelijking stelt geen cirkel voor (de coëfficiënten van x^2 en y^2 zijn verschillend).

Merk op : deze vergelijking stelt een hyperbool voor, want :

$$
\begin{aligned}
&4x^2-9y^2-36=0 \quad (*)\\
&4x^2-9y^2=36\\
&\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1
\end{aligned}
$$

Als je $(*)$ ingeeft bij Geogebra zie je deze hyperbool.



$\boxed{7 \quad x^2+y^2+3xy+5=0}$

$x^2+y^2+\underline{3xy}+5=0$

$\downarrow$

Deze vergelijking stelt geen cirkel voor (de term in xy mag niet voorkomen).

$\boxed{8 \quad 5x^2 + 5y^2 - 30y - 35 = 0}$

$5x^2 + 5y^2 - 30y - 35 = 0$

$x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$

$x^2 + y^2 - 6y = 7$

$x^2 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 7$

$x^2 + (y-3)^2 = 7 + 9$

$x^2 + (y-3)^2 = 16$

$\downarrow$

cirkel met straal 4 en middelpunt $M(0,3)$

$\boxed{9 \quad x^2 + y^2 + 12x - 5y + 45 = 0}$

$x^2 + y^2 + 12x - 5y + 45 = 0$

$x^2 + 12x + y^2 - 5y = -45$

$x^2 + 12x + 36 - 36 + y^2 - 5y + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} = -45$

$(x+6)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = -45 + 36 + \frac{25}{4}$

$(x+6)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{11}{4}$

$\downarrow$

valse vergelijking

De oorspronkelijke vergelijking stelt geen cirkel voor.

$\boxed{10 \quad x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2y - 4 = 0}$

$x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2y - 4 = 0$

$x^2 - 2\sqrt{2}\,x + y^2 + 2y = 4$

$x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2 - 2 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 4$

$\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + (y+1)^2 = 4 + 2 + 1$

$\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + (y+1)^2 = 7$

$\downarrow$

cirkel met straal $\sqrt{7}$ en middelpunt $M\left(\sqrt{2}, -1\right)$

Opdracht 70 bladzijde 132

De cirkel met vergelijking $4x^2+4y^2-16x+20y-283=0$ heeft als straal

A $\sqrt{283}$ B 81 C 9 D geen van linksstaande antwoorden is juist

Oplossing

$$4x^2+4y^2-16x+20y-283=0$$
$$x^2+y^2-4x+5y-\frac{283}{4}=0$$
$$x^2-4x+y^2+5y=\frac{283}{4}$$
$$x^2-4x+4-4+y^2+5y+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}=\frac{283}{4}$$
$$(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{283}{4}+4+\frac{25}{4}$$
$$(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{324}{4}=81$$
$$\downarrow$$

cirkel met straal 9

Antwoord C is juist.

Opdracht 71 bladzijde 132

Is de rechte $r \leftrightarrow x-3y+1=0$ een middellijn van de cirkel $c \leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y+4=0$? Verklaar.

Oplossing

$$x^2+y^2-4x-2y+4=0$$
$$x^2-4x+y^2-2y=-4$$
$$x^2-4x+4-4+y^2-2y+1-1=-4$$
$$(x-2)^2+(y-1)^2=-4+4+1$$
$$(x-2)^2+(y-1)^2=1$$
$$\downarrow$$

cirkel met straal 1 en middelpunt $M(2,1)$

$M(2,1)$ ligt op de rechte r, want $2-3\cdot 1+1=0$.

De rechte r is een middellijn van de cirkel c.

Opdracht 72 bladzijde 132

Gegeven de cirkel $c \leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 169$.

1 Bepaal de snijpunten P en Q van de cirkel c met de rechte $a \leftrightarrow x = 6$.

$$\begin{aligned}(6-1)^2 + (y-2)^2 &= 169\\ 25 + (y-2)^2 &= 169\\ (y-2)^2 &= 144\\ y-2 = 12 \quad &\text{of} \quad y-2=-12\\ y = 14 \quad &\text{of} \quad y=-10\end{aligned}$$

$P(6,14), Q(6,-10)$

2 Stel vergelijkingen op van de raaklijnen t_P en t_Q aan de cirkel c in de punten P en Q.

- $M(1,2), P(6,14)$

  $\text{rico PM} = \dfrac{12}{5} \Rightarrow \text{rico } t_P = -\dfrac{5}{12}$

- $t_P \leftrightarrow y - 14 = -\dfrac{5}{12}(x-6)$

  $t_P \leftrightarrow y = -\dfrac{5}{12}x + \dfrac{5}{2} + 14$

  $t_P \leftrightarrow y = -\dfrac{5}{12}x + \dfrac{33}{2}$

- $M(1,2), Q(6,-10)$

  $\text{rico QM} = \dfrac{-12}{5} \Rightarrow \text{rico } t_Q = \dfrac{5}{12}$

- $t_Q \leftrightarrow y + 10 = \dfrac{5}{12}(x-6)$

  $t_Q \leftrightarrow y = \dfrac{5}{12}x - \dfrac{5}{2} - 10$

  $t_Q \leftrightarrow y = \dfrac{5}{12}x - \dfrac{25}{2}$

3 Bepaal de coördinaat van het snijpunt S van beide raaklijnen.

$$\begin{aligned}-\frac{5}{12}x + \frac{33}{2} &= \frac{5}{12}x - \frac{25}{2}\\ \frac{10}{12}x &= 29\\ x &= \frac{174}{5} \Rightarrow y = \frac{5}{12}\cdot\frac{174}{5} - \frac{25}{2} = 2\end{aligned}$$

$S\left(\dfrac{174}{5}, 2\right)$

4 Toon aan dat $\lvert SP\rvert = \lvert SQ\rvert$.

$$\left.\begin{aligned}|SP|^2 &= \left(\frac{174}{5}-6\right)^2 + (2-14)^2 = \left(\frac{144}{5}\right)^2 + 144\\ |SQ|^2 &= \left(\frac{174}{5}-6\right)^2 + (2+10)^2 = \left(\frac{144}{5}\right)^2 + 144\end{aligned}\right\} \Rightarrow |SP|^2 = |SQ|^2 \Rightarrow |SP| = |SQ|$$

Opdracht 73 bladzijde 132

Gegeven de driehoek ABC met $A(2, 2)$, $B(5, 6)$ en $C(-6, 8)$.

1 Toon aan dat driehoek ABC rechthoekig is.

$$|AB| = \sqrt{(5-2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$
$$|AC| = \sqrt{64+36} = 10$$
$$|BC| = \sqrt{121+4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2 \text{ want } 5^2 + 10^2 = 125 = \left(5\sqrt{5}\right)^2$$

dus $\widehat{A} = 90°$

2 Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.

- $[BC]$ is een middellijn, dus het middelpunt M van de cirkel = midden van $[BC]$

  M heeft dus als coördinaat $\left(-\dfrac{1}{2}, 7\right)$.
- straal $r = \dfrac{1}{2} \cdot |BC| = \dfrac{5}{2}\sqrt{5}$
- $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + (y-7)^2 = \dfrac{125}{4}$

Opdracht 74 bladzijde 132

Gegeven de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x - 5y - 4 = 0$.
Bepaal telkens de lengte van de koorde die door de volgende rechten wordt afgesneden op de cirkel c.

1 de x-as

x-as $\leftrightarrow y = 0$

dus : $x^2 + 3x - 4 = 0 \qquad D = 25$

$x = 1$ of $x = -4$

De snijpunten zijn $(-4, 0)$ en $(1, 0)$.

De lengte van de afgesneden koorde is $1 + 4 = 5$.

$\boxed{2 \quad \text{de y-as}}$

$$\text{y-as} \leftrightarrow x = 0$$

$$\text{dus: } y^2 - 5y - 4 = 0 \qquad D = 41$$

$$y = \frac{5-\sqrt{41}}{2} \text{ of } y = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$$

De snijpunten zijn $\left(0, \frac{5-\sqrt{41}}{2}\right)$ en $\left(0, \frac{5+\sqrt{41}}{2}\right)$.

De lengte van de afgesneden koorde is $\frac{5+\sqrt{41}}{2} - \frac{5-\sqrt{41}}{2} = \sqrt{41}$.

$\boxed{3 \quad \text{de rechte a} \leftrightarrow x = -1}$

$$a \leftrightarrow x = -1$$

$$\text{dus: } 1 + y^2 - 3 - 5y - 4 = 0$$

$$y^2 - 5y - 6 = 0 \qquad D = 49$$

$$y = -1 \text{ of } y = 6$$

De snijpunten zijn $(-1, -1)$ en $(-1, 6)$.

De lengte van de afgesneden koorde is $6 + 1 = 7$.

$\boxed{4 \quad \text{de rechte b} \leftrightarrow y = x + 1}$

$$b \leftrightarrow y = x + 1$$

$$\text{dus: } x^2 + (x+1)^2 + 3x - 5(x+1) - 4 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + 3x - 5x - 5 - 4 = 0$$

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ of } x = -2$$

De snijpunten zijn $(2, 3)$ en $(-2, -1)$.

De lengte van de afgesneden koorde is $\sqrt{(-2-2)^2 + (-1-3)^2}$

$$= \sqrt{16+16}$$

$$= \sqrt{32}$$

$$= 4\sqrt{2}$$

Opdracht 75 bladzijde 133

Gegeven de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 16y + 16 = 0$. Bepaal een vergelijking van de cirkel c' die hetzelfde middelpunt heeft als c en door het punt $P(1, 3)$ gaat.

Oplossing 1

$c \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 16y + 16 = 0$
$c \leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 16y = -16$
$c \leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 16y + 64 - 64 = -16$
$c \leftrightarrow (x+1)^2 + (y-8)^2 = -16 + 1 + 64$
$c \leftrightarrow (x+1)^2 + (y-8)^2 = 49$
$\downarrow$
cirkel c heeft straal 7 en middelpunt $M(-1, 8)$

$c' \leftrightarrow (x+1)^2 + (y-8)^2 = r^2$
$P(1, 3)$ ligt op c',
dus: $(1+1)^2 + (3-8)^2 = r^2$
$4 + 25 = r^2$
$r^2 = 29$

$c' \leftrightarrow (x+1)^2 + (y-8)^2 = 29$
$c' \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 16y + 36 = 0$

Oplossing 2

$c' \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 16y + m = 0$
$P(1, 3)$ ligt op c',
dus: $1^2 + 3^2 + 2\cdot 1 - 16\cdot 3 + m = 0$
$1 + 9 + 2 - 48 + m = 0$
$m = 36$
$c' \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 16y + 36 = 0$

Opdracht 76 bladzijde 133

Voor welke waarden van m stelt de vergelijking $x^2 + y^2 - 2x + 8y + m = 0$ een cirkel voor?

Oplossing

$x^2 + y^2 - 2x + 8y + m = 0$
$x^2 - 2x + y^2 + 8y = -m$
$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 8y + 16 - 16 = -m$
$(x-1)^2 + (y+4)^2 = -m + 1 + 16$
$(x-1)^2 + (y+4)^2 = -m + 17$
De gegeven vergelijking stelt een cirkel voor als $-m + 17 \geq 0$ dus als $m \leq 17$.

Opdracht 77 bladzijde 133

Bepaal een vergelijking van de cirkel c die door het punt $P(-2, 1)$ gaat en raakt aan de rechte $t \leftrightarrow 3x - 2y - 6 = 0$ in het punt $Q(4, 3)$.

Oplossing

- Het middelpunt M van de cirkel c ligt op de loodlijn *l* op t door Q.

$$\text{rico } t = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{ rico } l = -\frac{2}{3}$$

$$l \leftrightarrow y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 4)$$

$$l \leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} + 3$$

$$l \leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$$

- Het middelpunt M ligt ook op de middelloodlijn m van $[PQ]$.

$M'(1, 2)$ is het midden van $[PQ]$

$$\text{rico } PQ = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{ rico } m = -3$$

$$m \leftrightarrow y - 2 = -3(x - 1)$$

$$m \leftrightarrow y = -3x + 3 + 2$$

$$m \leftrightarrow y = -3x + 5$$

- We berekenen het snijpunt M van *l* en m

$$-\frac{2}{3}x + \frac{17}{3} = -3x + 5$$

$$-2x + 17 = -9x + 15$$

$$7x = -2$$

$$x = -\frac{2}{7} \Rightarrow y = -3 \cdot \left(\frac{-2}{7}\right) + 5 = \frac{41}{7}$$

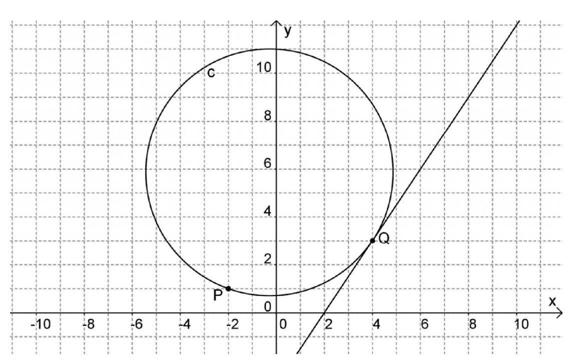
$$\text{dus } M\left(-\frac{2}{7}, \frac{41}{7}\right)$$

- We berekenen de straal r van de cirkel c

$$r = |MP| = \sqrt{\left(-\frac{2}{7} + 2\right)^2 + \left(\frac{41}{7} - 1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{12}{7}\right)^2 + \left(\frac{34}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{1300}{49}}$$

- $c \leftrightarrow \left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{41}{7}\right)^2 = \frac{1300}{49}$



Opdracht 78 bladzijde 133

Gegeven de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 14 = 0$.

1 Bepaal het middelpunt en de straal van de cirkel c.

$c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 14 = 0$

$c \leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y = 14$

$c \leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 14$

$c \leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 14 + 1 + 1$

$c \leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$

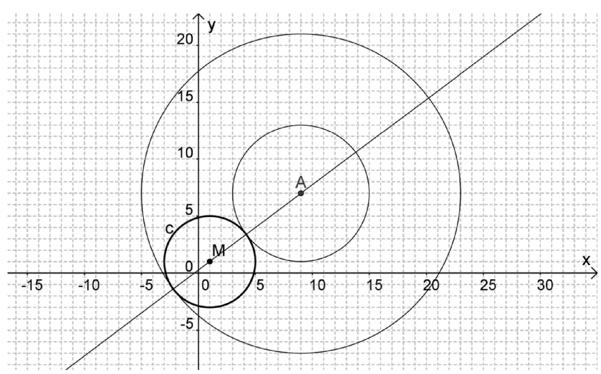
$\downarrow$

cirkel met straal 4 en middelpunt $M(1,1)$

2 Bepaal vergelijkingen van de cirkels met middelpunt $A(9,7)$ die raken aan c.

$|AM| = \sqrt{(9-1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$

De gevraagde cirkels c_1 en c_2 hebben dan als straal 6, respectievelijk 14.



$c_1 \leftrightarrow (x-9)^2 + (y-7)^2 = 36$

$c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 18x - 14y + 94 = 0$

$c_2 \leftrightarrow (x-9)^2 + (y-7)^2 = 196$

$c_2 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 18x - 14y - 66 = 0$

Opdracht 79 bladzijde 133

1 Het middelpunt van een cirkel die raakt aan beide assen ligt op de rechte $a \leftrightarrow y = x$ of $b \leftrightarrow y = -x$. Verklaar.

$c \leftrightarrow (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$ is de cirkel met middelpunt $M(x_1, y_1)$ en straal r.

$$\begin{gathered} \text{c raakt aan beide assen} \\ \Updownarrow \\ d(M, x) = d(M, y) \\ \Updownarrow \\ |y_1| = |x_1| \\ \Updownarrow \\ y_1 = x_1 \quad \text{of} \quad y_1 = -x_1 \\ \Updownarrow \end{gathered}$$

M ligt op $a \leftrightarrow y = x$ of M ligt op $b \leftrightarrow y = -x$.

2 Stel vergelijkingen op van de cirkels die raken aan beide assen en die door het punt $P(8,1)$ gaan.

$c \leftrightarrow (x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$

$P(8, 1)$ ligt op c,

dus $(8 - a)^2 + (1 - a)^2 = a^2$

$64 - 16a + a^2 + 1 - 2a + a^2 = a^2$

$a^2 - 18a + 65 = 0$

$a = 5$ of $a = 13$

of

$c \leftrightarrow (x - a)^2 + (y + a)^2 = a^2$

$P(8, 1)$ ligt op c,

dus $(8 - a)^2 + (1 + a)^2 = a^2$

$64 - 16a + a^2 + 1 + 2a + a^2 = a^2$

$a^2 - 14a + 65 = 0$

De vergelijking heeft geen oplossingen.

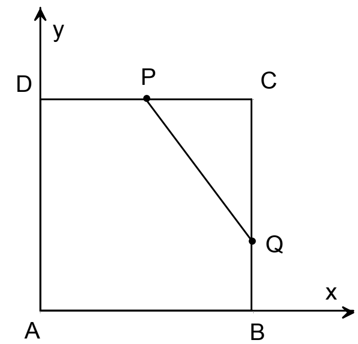
$c_1 \leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$

$c_2 \leftrightarrow (x - 13)^2 + (y - 13)^2 = 169$

Opdracht 80 bladzijde 133

ABCD is een vierkant met $|AB| = 60$. Het punt P ligt op $[CD]$ en $|DP| = 30$.
Het punt Q ligt op $[BC]$ en $|BQ| = 20$.
Toon aan dat de rechte PQ een raaklijn is aan de cirkel c met middelpunt A en straal 60.

Oplossing



- Kies een assenstelsel zó dat de x-as = AB, de y-as = AD en $|AB| = 60$.
  Dan is $A(0, 0)$, $B(60, 0)$, $C(60, 60)$, $D(0, 60)$ $P(30, 60)$ en $Q(60, 20)$.
- $PQ \leftrightarrow y - 60 = \frac{-40}{30}(x - 30)$
  $PQ \leftrightarrow y - 60 = \frac{-4}{3}(x - 30)$
  $PQ \leftrightarrow 3y - 180 = -4x + 120$
  $PQ \leftrightarrow 4x + 3y - 300 = 0$
- $d(A, PQ) = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 300|}{\sqrt{16+9}} = \frac{300}{5} = 60$
  Bijgevolg is PQ een raaklijn aan de cirkel c met middelpunt $A(0, 0)$ en straal 60.

Opdracht 81 bladzijde 133

Gegeven de cirkels $c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 8y - 3 = 0$ en $c_2 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x + 16y + 9 = 0$.

1 Bepaal de coördinaat van het middelpunt en de straal van beide cirkels.

$c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 8y - 3 = 0$
$c_1 \leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 8y - 3 = 0$
$c_1 \leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 8y + 16 - 16 = 3$
$c_1 \leftrightarrow (x+1)^2 + (y-4)^2 = 3 + 1 + 16$
$c_1 \leftrightarrow (x+1)^2 + (y-4)^2 = 20$
$\downarrow$
cirkel c_1 heeft straal $r_1 = 2\sqrt{5}$ en middelpunt $M_1(-1, 4)$

$c_2 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x + 16y + 9 = 0$
$c_2 \leftrightarrow x^2 - 10x + y^2 + 16y + 9 = 0$
$c_2 \leftrightarrow x^2 - 10x + 25 - 25 + y^2 + 16y + 64 - 64 = -9$
$c_2 \leftrightarrow (x-5)^2 + (y+8)^2 = -9 + 25 + 64$
$c_2 \leftrightarrow (x-5)^2 + (y+8)^2 = 80$
$\downarrow$
cirkel c_2 heeft straal $r_2 = 4\sqrt{5}$ en en middelpunt $M_2(5, -8)$

2 Toon aan dat deze cirkels elkaar uitwendig raken.

$|M_1M_2| = \sqrt{(5+1)^2 + (-8-4)^2} = \sqrt{36+144} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ en $6\sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = r_1 + r_2$

De cirkels c_1 en c_2 raken elkaar uitwendig.

3 Bepaal een vergelijking van de gemeenschappelijke raaklijn t.

- $M_1M_2 \leftrightarrow y - 4 = \frac{-12}{6}(x+1)$

  $M_1M_2 \leftrightarrow y = -2x - 2 + 4$

  $M_1M_2 \leftrightarrow y = -2x + 2$

  rico $M_1M_2 = -2 \Rightarrow$ rico $t = \frac{1}{2}$

- Snijpunt S van c_1 en c_2

  $$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 8y - 3 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 10x + 16y + 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

  $(1)-(2)$ geeft: $12x - 24y - 12 = 0$

  $x - 2y - 1 = 0$

  $x = 2y + 1 \qquad (3)$

  Substitutie van (3) in (1) geeft: $(2y+1)^2 + y^2 + 2(2y+1) - 8y - 3 = 0$

  $4y^2 + 4y + 1 + y^2 + 4y + 2 - 8y - 3 = 0$

  $5y^2 = 0$

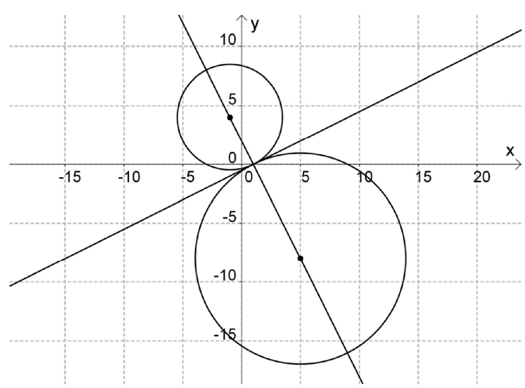
  $y = 0$

  Invullen in (3) geeft: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

  $S(1, 0)$

- $t \leftrightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x-1)$

  $t \leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$



Opdracht 82 bladzijde 133

Bepaal een vergelijking van de cirkel c die door de punten $A(3, 3)$ en $B(5, 7)$ gaat en waarvan het middelpunt op de rechte $a \leftrightarrow y = x - 5$ ligt.

Oplossing

- $|MA|^2 = |MB|^2$ met $M(x, y)$ het middelpunt van de cirkel c.
  $(x-3)^2 + (y-3)^2 = (x-5)^2 + (y-7)^2$
  $\cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} - 6y + 9 = \cancel{x^2} - 10x + 25 + \cancel{y^2} - 14y + 49$
  $4x + 8y - 56 = 0$
  $x + 2y - 14 = 0$
  $2y = -x + 14$
  $y = -\frac{1}{2}x + 7 \quad (1)$
- Er is gegeven dat het middelpunt $M(x, y)$ op de rechte a ligt, met $a \leftrightarrow y = x - 5. \quad (2)$
- $M(x, y)$ moet dus voldoen aan (1) en (2),
  zodat $-\frac{1}{2}x + 7 = x - 5$
  $-\frac{3}{2}x = -12$
  $x = 8$
  en bijgevolg $y = 8 - 5 = -\frac{1}{2} \cdot 8 + 7 = 3$,
  dus $M(8, 3)$.
- $r^2 = |MA|^2 = (8-3)^2 + (3-3)^2 = 25$
- $c \leftrightarrow (x-8)^2 + (y-3)^2 = 25$

Opdracht 83 bladzijde 133

Bepaal vergelijkingen van de cirkels die door $A(0,1)$ en $B(1,2)$ gaan en die raken aan de x-as.

Oplossing

- middelpunt M ligt op de middelloodlijn m van $[AB]$

  $M'\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ is het midden van $[AB]$

  rico $AB = 1 \Rightarrow$ rico $m = -1$

  $m \leftrightarrow y - \frac{3}{2} = -1\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)$

  $m \leftrightarrow y = -x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$

  $m \leftrightarrow y = -x + 2$

  zodat $M(a, 2-a)$

- $c \leftrightarrow (x-a)^2 + (y-2+a)^2 = r^2$

- $A(0,1)$ ligt op c, dus: $(0-a)^2 + (1-2+a)^2 = r^2$

  $a^2 + (a-1)^2 = r^2$

  $a^2 + a^2 - 2a + 1 = r^2$

  $2a^2 - 2a + 1 = r^2 \qquad (*)$

- c raakt aan de x-as, dus c heeft juist één snijpunt (raakpunt) met de x-as:

  $(x-a)^2 + (-2+a)^2 = r^2$ heeft juist één oplossing

  $x^2 - 2ax + a^2 + 4 - 4a + a^2 = r^2$ heeft juist één oplossing

  $x^2 - 2ax + a^2 + 4 - 4a + a^2 = 2a^2 - 2a + 1$ heeft juist één oplossing zie $(*)$

  $x^2 - 2ax - 2a + 3 = 0$ heeft juist één oplossing

  dus $D = 4a^2 - 4\cdot 1\cdot(-2a+3) = 0$

  $4a^2 + 8a - 12 = 0$

  $a = 1 \quad \text{of} \quad a = -3$

- $M_1(1,1)$ en $r^2 = 2 - 2 + 1 = 1$

  $M_2(-3,5)$ en $r^2 = 18 + 6 + 1 = 25$

- $c_1 \leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

  $c_2 \leftrightarrow (x+3)^2 + (y-5)^2 = 25$

Opdracht 84 bladzijde 133

Gegeven zijn de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x + 15 = 0$ en de rechte $r \leftrightarrow 3x - y - 8 = 0$.
Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan c die evenwijdig zijn met r.

Oplossing

- $c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x + 15 = 0$
  $c \leftrightarrow x^2 - 10x + y^2 + 15 = 0$
  $c \leftrightarrow x^2 - 10x + 25 - 25 + y^2 = -15$
  $c \leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = -15 + 25$
  $c \leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 10$
  $\downarrow$
  cirkel met straal $\sqrt{10}$ en middelpunt $M(5, 0)$
- $t \leftrightarrow 3x - y + m = 0$
- t is een raaklijn aan $c\left(M, \sqrt{10}\right)$

$$\Updownarrow$$
$$d(M, t) = \sqrt{10}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{|3 \cdot 5 - 1 \cdot 0 + m|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10}$$
$$\Updownarrow$$
$$|15 + m| = 10$$
$$\Updownarrow$$
$$15 + m = 10 \quad \text{of} \quad 15 + m = -10$$
$$\Updownarrow$$
$$m = -5 \quad \text{of} \quad m = -25$$

- $t_1 \leftrightarrow 3x - y - 5 = 0$
  $t_2 \leftrightarrow 3x - y - 25 = 0$

U **Opdracht 85 bladzijde 133**

Bepaal vergelijkingen van de raaklijnen uit $P(5,-2)$ aan de cirkel met middelpunt $M(8,-1)$ en straal $\sqrt{2}$.

Oplossing

$|PM| = \sqrt{(8-5)^2+(-1+2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} > \sqrt{2}$, dus er zijn twee raaklijnen

$t \leftrightarrow y+2 = a(x-5)$

$t \leftrightarrow ax - y - 5a - 2 = 0$

$$
\begin{aligned}
&\text{t raakt aan } c\left(M,\sqrt{2}\right)\\
&\Updownarrow\\
&d(M,t) = \sqrt{2}\\
&\Updownarrow\\
&\frac{|a\cdot 8 - 1\cdot(-1) - 5a - 2|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{2}\\
&\Updownarrow\\
&|3a-1| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+1}\\
&\Updownarrow\\
&(3a-1)^2 = 2\left(a^2+1\right)\\
&\Updownarrow\\
&9a^2 - 6a + 1 = 2a^2 + 2\\
&\Updownarrow\\
&7a^2 - 6a - 1 = 0\\
&\Updownarrow\\
&a = -\frac{1}{7} \quad \text{of} \quad a = 1
\end{aligned}
$$

zodat $t_1 \leftrightarrow -\frac{1}{7}x - y + \frac{5}{7} - 2 = 0$ en $t_2 \leftrightarrow x - y - 5 - 2 = 0$

$t_1 \leftrightarrow x + 7y + 9 = 0$ en $t_2 \leftrightarrow x - y - 7 = 0$

Opdracht 86 bladzijde 134

Hoeveel cirkels met straal 7 raken aan de rechten $a \leftrightarrow 3x-4y=0$ en $b \leftrightarrow 4x-3y=0$?
Bepaal een vergelijking van één van deze cirkels.

Oplossing

- a en b zijn raaklijnen aan $c\left(M(x,y),7\right)$

$$\Updownarrow$$

$$d(M,a)=7=d(M,b)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{|3x-4y|}{\sqrt{9+16}}=7=\frac{|4x-3y|}{\sqrt{16+9}}$$

$$\Updownarrow$$

$$|3x-4y|=35=|4x-3y|$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}3x-4y=35\\4x-3y=35\end{cases} \text{ of } \begin{cases}3x-4y=35\\4x-3y=-35\end{cases} \text{ of } \begin{cases}3x-4y=-35\\4x-3y=35\end{cases} \text{ of } \begin{cases}3x-4y=-35\\4x-3y=-35\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}x+y=0\\3x-4y=35\end{cases} \text{ of } \begin{cases}7x-7y=0\\3x-4y=35\end{cases} \text{ of } \begin{cases}7x-7y=0\\3x-4y=-35\end{cases} \text{ of } \begin{cases}x+y=0\\3x-4y=-35\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

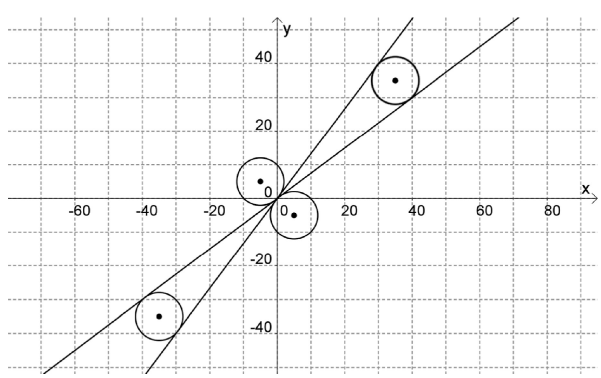
$$\begin{cases}y=-x\\7x=35\end{cases} \text{ of } \begin{cases}y=x\\-x=35\end{cases} \text{ of } \begin{cases}y=x\\-x=-35\end{cases} \text{ of } \begin{cases}y=-x\\7x=-35\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}y=-5\\x=5\end{cases} \text{ of } \begin{cases}y=-35\\x=-35\end{cases} \text{ of } \begin{cases}y=35\\x=35\end{cases} \text{ of } \begin{cases}y=5\\x=-5\end{cases}$$

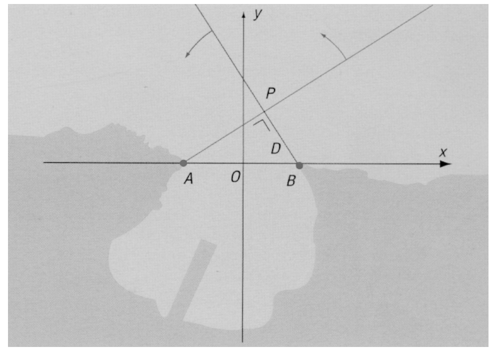
- Er zijn vier cirkels die aan deze voorwaarden voldoen met middelpunten $(5,-5)$, $(-5,5)$ $(35,35)$ en $(-35,-35)$.

- Vergelijkingen van deze cirkels:
  $(x-5)^2+(y+5)^2=49$
  $(x+5)^2+(y-5)^2=49$
  $(x-35)^2+(y-35)^2=49$
  $(x+35)^2+(y+35)^2=49$



Opdracht 87 bladzijde 134

De ingang van een haven is aangegeven door twee vuurtorens A en B die een smalle lichtbundel uitzenden, de ene rood, de andere groen.
De afstand tussen A en B is 300 meter.
De lichtbundels draaien in tegenwijzerzin, zo dat de lichtbundel uit A altijd 90° achterligt op die uit B.



Bepaal een voorwaarde waaraan de coördinaatgetallen x en y moeten voldoen van de punten P waar men het rode en het groene licht tegelijk ziet.

Wat stelt deze vergelijking voor?

Oplossing

$A(-150,0), B(150,0), P(x,y)$

$$PA \perp PB$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{rico } PA \cdot \text{rico } PB = -1$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{y-0}{x+150} \cdot \frac{y-0}{x-150} = -1$$
$$\Updownarrow$$
$$y^2 = -(x+150)(x-150)$$
$$\Updownarrow$$
$$y^2 = -(x^2 - 150^2)$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 + y^2 = 150^2$$
$$\downarrow$$

vergelijking van een cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 150

Opdracht 88 bladzijde 134

1 Gegeven de driehoek ABC met $A(1,10)$, $B(17,-20)$ en $C(-11,1)$.

a Stel een vergelijking op van de zijden AB en AC.

$AB \leftrightarrow y-10 = \frac{-30}{16}(x-1)$

$AB \leftrightarrow y-10 = -\frac{15}{8}x + \frac{15}{8}$

$AB \leftrightarrow 15x + 8y - 95 = 0$

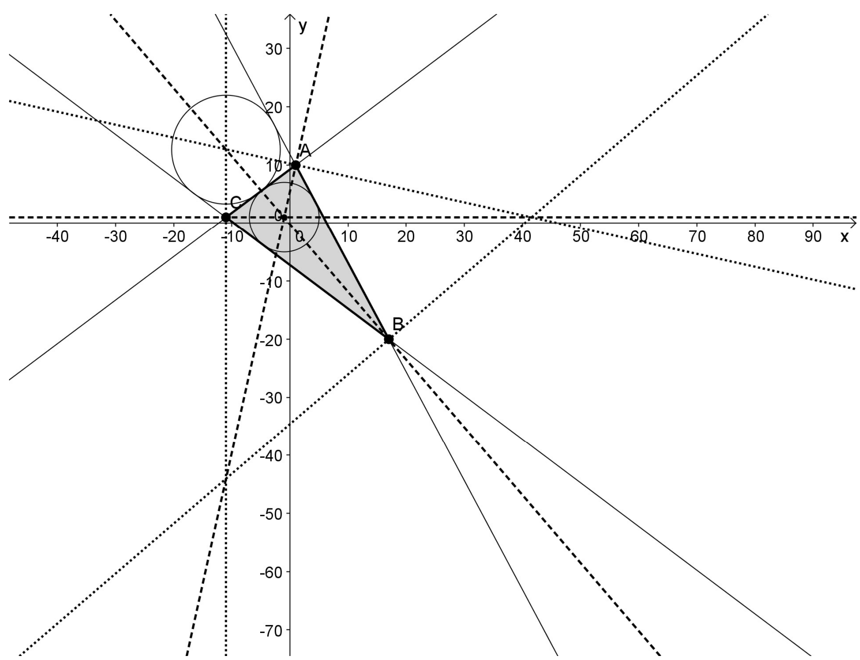
$AC \leftrightarrow y-10 = \frac{-9}{-12}(x-1)$

$AC \leftrightarrow y-10 = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

$AC \leftrightarrow 3x - 4y + 37 = 0$

b Stel een vergelijking op van de bissectrices b_A en b'_A van het rechtenpaar AB en AC.
Controleer grafisch welke van deze bissectrices de bissectrice b_A van de hoek $\widehat{A}$ in de driehoek ABC is.
De bissectrice b_A wordt een **binnenbissectrice** van de driehoek genoemd, de andere bissectrice b'_A noemt men een **buitenbissectrice**.

$$\frac{|15x+8y-95|}{\sqrt{289}}=\frac{|3x-4y+37|}{\sqrt{25}}$$
$$\Updownarrow$$
$$|75x+40y-475|=|51x-68y+629|$$
$$\Updownarrow$$
$$75x+40y-475=51x-68y+629 \quad \text{of} \quad 75x+40y-475=-51x+68y-629$$
$$\Updownarrow$$
$$24x+108y-1104=0 \quad \text{of} \quad 126x-28y+154=0$$
$$\Updownarrow$$
$$2x+9y-92=0 \quad \text{of} \quad 9x-2y+11=0$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$
b'_A $\qquad$ b_A, want dit is een stijgende rechte



c Stel een vergelijking op van de bissectrice b_B van de hoek $\hat{B}$ in de driehoek ABC.

$BC \leftrightarrow y-1=\frac{21}{-28}(x+11)$

$BC \leftrightarrow y-1=-\frac{3}{4}x-\frac{33}{4}$

$BC \leftrightarrow 3x+4y+29=0$

$$\frac{|15x+8y-95|}{\sqrt{289}}=\frac{|3x+4y+29|}{\sqrt{25}}$$
$$\Updownarrow$$
$$|75x+40y-475|=|51x+68y+493|$$
$$\Updownarrow$$
$$75x+40y-475=51x+68y+493 \quad \text{of} \quad 75x+40y-475=-51x-68y-493$$
$$\Updownarrow$$
$$24x-28y-968=0 \quad \text{of} \quad 126x+108y+18=0$$
$$\Updownarrow$$
$$6x-7y-242=0 \quad \text{of} \quad 7x+6y+1=0$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$b_B' \qquad\qquad b_B\text{, want dit is een dalende rechte}$$

d Bepaal de coördinaat van het snijpunt S van b_A en b_B.

$b_A \leftrightarrow 9x-2y+11=0$

$b_A \leftrightarrow y=\frac{9}{2}x+\frac{11}{2}$

$b_B \leftrightarrow 7x+6y+1=0$

$b_B \leftrightarrow y=-\frac{7}{6}x-\frac{1}{6}$

$\frac{9}{2}x+\frac{11}{2}=-\frac{7}{6}x-\frac{1}{6}$

$27x+33=-7x-1$

$34x=-34$

$x=-1 \Rightarrow y=\frac{9}{2}\cdot(-1)+\frac{11}{2}=1$

$S(-1,1)$

e Stel een vergelijking op van de bissectrice b_C van de hoek $\hat{C}$ in de driehoek ABC.

$$\frac{|3x-4y+37|}{\sqrt{25}}=\frac{|3x+4y+29|}{\sqrt{25}}$$
$$\Updownarrow$$
$$3x-4y+37=3x+4y+29 \quad \text{of} \quad 3x-4y+37=-3x-4y-29$$
$$\Updownarrow$$
$$-8y=-8 \quad \text{of} \quad 6x=-66$$
$$\Updownarrow$$
$$y=1 \quad \text{of} \quad x=-11$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$b_C \qquad\qquad b'_C$$

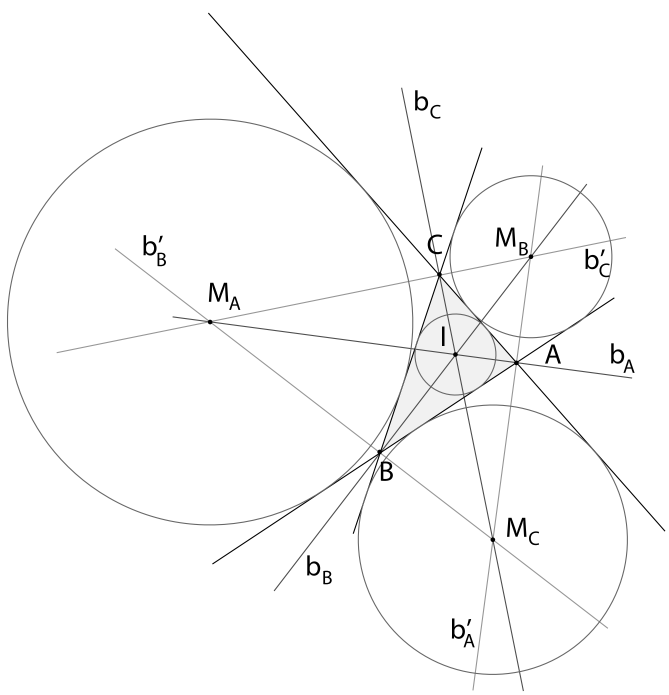
$b_C \leftrightarrow y=1$

f Controleer of S op b_C ligt.

S ligt op b_C want $S(-1,1)$ en $b_C \leftrightarrow y=1$

2 De binnenbissectrices b_A, b_B en b_C van een driehoek ABC gaan door één punt. Controleer deze eigenschap met een tekenprogramma.

3 Het snijpunt van de binnenbissectrices van een driehoek is het middelpunt I van de **ingeschreven cirkel** van deze driehoek.



a Bereken de straal van de ingeschreven cirkel c van de driehoek ABC.

$$r = d(S, BC) = \frac{|3\cdot(-1)+4\cdot 1+29|}{\sqrt{9+16}} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\left(\text{of ook}: \ r = d(S, AB) = d(S, AC)\right)$$

b Bepaal een vergelijking van deze ingeschreven cirkel.

$$c \leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 36$$

4 Toon aan dat de twee buitenbissectrices b'_A en b'_C en de binnenbissectrice b_B elkaar snijden in een punt M_B. Geef de coördinaat van M_B.

$b'_A \leftrightarrow 2x+9y-92=0$

$b'_C \leftrightarrow x=-11$

$b_B \leftrightarrow 7x+6y+1=0$

snijpunt M_B van b'_A en b'_C : $\begin{cases} 2x+9y-92=0 & (1) \\ x=-11 & (2) \end{cases}$

Substitutie van (2) in (1) geeft $2\cdot(-11)+9y-92=0 \Leftrightarrow 9y=114 \Leftrightarrow y=\frac{114}{9}=\frac{38}{3}$

dus $M_B\left(-11, \frac{38}{3}\right)$

M_B ligt op b_B, want $7\cdot(-11)+6\cdot\frac{38}{3}+1=-77+76+1=0$

5 De buitenbissectrices van twee hoeken van een driehoek en de binnenbissectrice van de derde hoek gaan door één punt. Controleer deze eigenschap met een tekenprogramma.

6 Het snijpunt van twee buitenbissectrices van een driehoek is het middelpunt van een **aangeschreven cirkel** van deze driehoek.
(Een aangeschreven cirkel aan een driehoek is een cirkel die raakt aan één zijde van de driehoek en aan de verlengden van de andere zijden.)

a Bereken de straal van de aangeschreven cirkel c' met middelpunt M_B.

$$r' = d(M_B, AC) = \frac{\left|3\cdot(-11)-4\cdot\frac{38}{3}+37\right|}{\sqrt{9+16}} = \frac{\left|-\frac{140}{3}\right|}{5} = \frac{28}{3}$$

b Bepaal een vergelijking van deze aangeschreven cirkel.

$$c' \leftrightarrow (x+11)^2 + \left(y-\frac{38}{3}\right)^2 = \frac{784}{9}$$

U **Opdracht 89 bladzijde 135**

In hoofdstuk 1 heb je geleerd hoe je de raaklijnen uit een punt P aan een cirkel kan construeren. We maken nu gebruik van de analytische vertolking van deze constructie om vergelijkingen van deze raaklijnen op te stellen.

Gegeven de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$ met middelpunt M en het punt $P(-3, 5)$.

1 Stel een vergelijking op van de (hulp-)cirkel c' met $[MP]$ als middellijn.

$M(0, 0)$ is het middelpunt van c.

$M'\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ is het midden van $[MP]$ en dus het middelpunt van c'.

$$r' = |M'M| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$c' \leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$$

2 Bepaal de coördinaten van de snijpunten S_1 en S_2 van de cirkels c en c'.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (1) \\ \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 + 3x - 5y = 0 & (3) \end{cases}$$

$(3) - (2)$ geeft: $3x - 5y + 9 = 0$

$$x = \frac{5}{3}y - 3 \qquad (4)$$

Substitutie van (4) in (1) geeft: $\left(\frac{5}{3}y - 3\right)^2 + y^2 = 9$

$$\frac{25}{9}y^2 - 10y + \cancel{9} + y^2 = \cancel{9}$$

$$25y^2 - 90y + 9y^2 = 0$$

$$34y^2 - 90y = 0$$

$$y(34y - 90) = 0$$

$$y = 0 \text{ of } y = \frac{90}{34} = \frac{45}{17}$$

Invullen in (4) geeft: $\begin{cases} y = 0 \\ x = -3 \end{cases}$ of $\begin{cases} y = \frac{45}{17} \\ x = \frac{5}{3} \cdot \frac{45}{17} - 3 = \frac{75}{17} - \frac{51}{17} = \frac{24}{17} \end{cases}$

$S_1(-3, 0)$ en $S_2\left(\frac{24}{17}, \frac{45}{17}\right)$

3 Toon aan dat PS_1 en PS_2 raaklijnen zijn aan de cirkel. Bepaal vergelijkingen van beide rechten.

- $PS_1 \leftrightarrow x = -3$

$$PS_2 \leftrightarrow y - 5 = \frac{-\frac{40}{17}}{\frac{75}{17}}(x+3)$$

$$PS_2 \leftrightarrow y = -\frac{8}{15}x - \frac{8}{5} + 5$$

$$PS_2 \leftrightarrow y = -\frac{8}{15}x + \frac{17}{5}$$

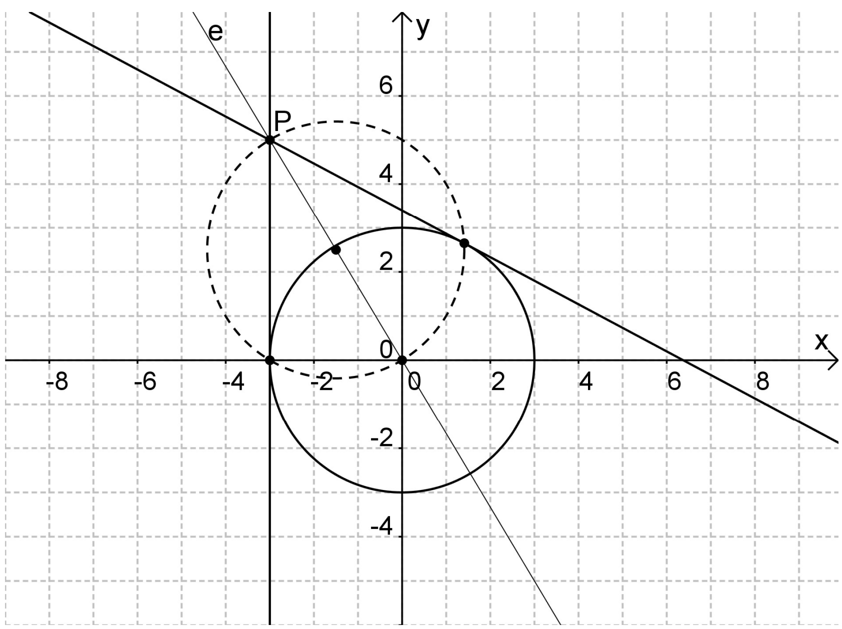
- rico $MS_1 = 0$ en $PS_1 \leftrightarrow x = -3$, dus $MS_1 \perp PS_1$.

  PS_1 is een raaklijn aan de cirkel (S_1 is raakpunt).

  rico $MS_2 = \dfrac{\frac{45}{17}}{\frac{24}{17}} = \dfrac{45}{24} = \dfrac{15}{8}$ en rico $PS_2 = -\dfrac{8}{15}$, zodat rico $MS_2 \cdot$ rico $PS_2 = -1$, dus $MS_2 \perp PS_2$.

  PS_2 is een raaklijn aan de cirkel (S_2 is raakpunt).

4 Controleer grafisch.



Opdracht 90 bladzijde 136

Bereken $\|\vec{v}\|$.

$\boxed{1 \quad \vec{v}(1,2)}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

$\boxed{2 \quad \vec{v}(3,-4)}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$\boxed{3 \quad \vec{v}(0,0)}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2+0^2} = 0$$

$\boxed{4 \quad \vec{v}\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{16}{5}+\frac{9}{5}} = \sqrt{5}$$

Opdracht 91 bladzijde 136

Vervolledig de tabel.

	$\|\vec{u}\|$	$\|\vec{v}\|$	De hoek α tussen $\vec{u}$ en $\vec{v}$	$\vec{u}\cdot\vec{v}$
1	2	3	60°	…
2	…	2	30°	3
3	6	…	135°	$-3\sqrt{2}$
4	1	10	…	–5

Oplossing van 1

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\alpha \\ &= 2\cdot 3\cdot\cos 60^\circ \\ &= 6\cdot\frac{1}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

Oplossing van 2

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\alpha \\ 3 &= \|\vec{u}\|\cdot 2\cdot\cos 30^\circ \\ \|\vec{u}\| &= \frac{3}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

Oplossing van 3

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\alpha \\ -3\sqrt{2} &= 6\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos 135^\circ \\ \|\vec{v}\| &= \frac{-3\sqrt{2}}{6\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 1\end{aligned}$$

Oplossing van 4

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\alpha \\ -5 &= 1\cdot 10\cdot\cos\alpha \\ \cos\alpha &= \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2} \\ \alpha &= 120^\circ\end{aligned}$$

De vervolledigde tabel wordt:

	$\|\vec{u}\|$	$\|\vec{v}\|$	De hoek α tussen $\vec{u}$ en $\vec{v}$	$\vec{u}\cdot\vec{v}$
1	2	3	60°	3
2	$\sqrt{3}$	2	30°	3
3	6	1	135°	$-3\sqrt{2}$
4	1	10	120°	-5

Opdracht 92 bladzijde 136

1 Bereken de hoek α tussen de vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$.

2 Bereken het scalair product $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

a $\vec{u}(1,2)$ en $\vec{v}(-2,-1)$

- $\cos\alpha = \dfrac{-2-2}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{4+1}} = \dfrac{-4}{5}$

  zodat $\alpha = 143°7'48''$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2-2 = -4$

b $\vec{u}(1,2)$ en $\vec{v}(-2,1)$

- $\cos\alpha = \dfrac{-2+2}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{4+1}} = 0$

  zodat $\alpha = 90°$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2+2 = 0$

c $\vec{u}(4,-1)$ en $\vec{v}(3,5)$

- $\cos\alpha = \dfrac{12-5}{\sqrt{16+1}\cdot\sqrt{9+25}} = \dfrac{7}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{34}}$

  zodat $\alpha = 73°4'21''$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 12-5 = 7$

d $\vec{u}(-1,1)$ en $\vec{v}(6,11)$

- $\cos\alpha = \dfrac{-6+11}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{36+121}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{157}}$

  zodat $\alpha = 73°36'38''$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = -6+11 = 5$

Opdracht 93 bladzijde 136

Gegeven zijn de punten $A(1,3)$, $B(2,1)$, $C(4,2)$ en $D(6,3)$.

1 Bereken rico AB en rico CD. Toon hiermee aan dat $AB \perp CD$.

$$\text{rico AB} = \frac{-2}{1} = -2,\ \text{rico CD} = \frac{1}{2}$$

$$\text{rico AB} \cdot \text{rico CD} = (-2) \cdot \frac{1}{2} = -1 \ \Rightarrow \ AB \perp CD$$

2 Geef de coördinaten van de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{AB}(1,-2),\ \overrightarrow{CD}(2,1)$$

3 Bereken $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
Wat kun je hieruit besluiten over de onderlinge ligging van $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$?

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$$

Herhalingsopdracht 94 bladzijde 137

Gegeven de punten $A(-2,1)$, $B(1,-2)$ en $C(4,3)$.
Bepaal een vergelijking van de loodlijn l uit A op BC.

Oplossing

$$\text{rico BC} = \frac{5}{3} \ \Rightarrow \ \text{rico } l = -\frac{3}{5}$$

$$l \leftrightarrow y - 1 = -\frac{3}{5}(x+2)$$

$$l \leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x - \frac{6}{5} + 1$$

$$l \leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$$

Herhalingsopdracht 95 bladzijde 137

Gegeven de rechten $a \leftrightarrow 3x - y - 1 = 0$ en $b \leftrightarrow 6x - 2y + 1 = 0$.

$\boxed{\text{1 Wat is de onderlinge ligging van a en b?}}$

rico a = 3 = rico b
dus a || b

$\boxed{\text{2 Bereken de afstand tussen a en b.}}$

$A(0, -1)$ ligt op a.

$$d(a, b) = d(A, b) = \frac{|6 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{36 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{40}} = \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

Herhalingsopdracht 96 bladzijde 137

Gegeven de rechten $a \leftrightarrow x - y + 4 = 0$ en $b \leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$.
Bepaal de punten P op a waarvoor $d(P, b) = \sqrt{5}$.

Oplossing

$a \leftrightarrow x - y + 4 = 0$
$a \leftrightarrow y = x + 4$
$P(m, m + 4)$

$$d(P, b) = \sqrt{5}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{|2 \cdot m - 1 \cdot (m + 4) + 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5}$$
$$\Updownarrow$$
$$|m - 1| = 5$$
$$\Updownarrow$$
$$m - 1 = 5 \quad \text{of} \quad m - 1 = -5$$
$$\Updownarrow$$
$$m = 6 \quad \text{of} \quad m = -4$$

$P_1(6, 10)$ en $P_2(-4, 0)$

Herhalingsopdracht 97 bladzijde 137

Gegeven de evenwijdige rechten $a \leftrightarrow 2x+3y+1=0$ en $b \leftrightarrow 2x+3y-5=0$.
Bepaal de straal van de grootst mogelijke cirkel die tussen de rechten a en b getekend kan worden.

Oplossing

$A(1,-1)$ ligt op a.

$$d(a,b)=d(A,b)=\frac{|2\cdot 1+3\cdot(-1)-5|}{\sqrt{4+9}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$$

De gevraagde straal is $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Herhalingsopdracht 98 bladzijde 137

Gegeven de cirkel $c \leftrightarrow x^2+y^2-6x-10y+9=0$.

1 Bepaal het middelpunt en de straal van c.

$$\begin{aligned}
c &\leftrightarrow x^2+y^2-6x-10y+9=0\\
c &\leftrightarrow x^2-6x+y^2-10y=-9\\
c &\leftrightarrow x^2-6x+9-9+y^2-10y+25-25=-9\\
c &\leftrightarrow (x-3)^2+(y-5)^2=-9+9+25\\
c &\leftrightarrow (x-3)^2+(y-5)^2=25\\
&\qquad\qquad\downarrow
\end{aligned}$$

cirkel met straal 5 en middelpunt $M(3,5)$

2 Bepaal de lengte van de koorde die door c wordt afgesneden op de y-as.

y-as $\leftrightarrow x=0$

$$\begin{aligned}
(0-3)^2+(y-5)^2&=25\\
(y-5)^2&=25-9=16\\
y-5=4 \quad &\text{of} \quad y-5=-4\\
y=9 \quad &\text{of} \quad y=1
\end{aligned}$$

dus $(0,1)$ en $(0,9)$ zijn de snijpunten van de cirkel c en de y-as.
De lengte van de afgesneden koorde is 8.

Herhalingsopdracht 99 bladzijde 137

Gegeven de driehoek ABC met $A(0,4)$, $B(-2,0)$ en $C(6,0)$.

1 Bepaal de coördinaat van het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek ABC.

- Het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC is het snijpunt van de middelloodlijnen.
- middelloodlijn m_{BC}
  $M_1(2,0)$ is het midden van $[BC]$.
  $m_{BC} \leftrightarrow x = 2$
- middelloodlijn m_{AC}
  $M_2(3,2)$ is het midden van $[AC]$.
  $\text{rico } AC = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \;\Rightarrow\; \text{rico } m_{AC} = \frac{3}{2}$
  $m_{AC} \leftrightarrow y - 2 = \frac{3}{2}(x-3)$
  $m_{AC} \leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} + 2$
  $m_{AC} \leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$
- middelpunt M
  $$\begin{cases} x = 2 & (1) \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} & (2) \end{cases}$$
  Substitutie van (1) in (2) geeft $y = \frac{3}{2}\cdot 2 - \frac{5}{2} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{2}$
  dus $M\left(2, \frac{1}{2}\right)$

2 Bepaal een vergelijking van de omgeschreven cirkel van de driehoek ABC.

- $M\left(2, \frac{1}{2}\right)$
  straal $r = |MA| = \sqrt{(0-2)^2 + \left(4 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{16+49}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$
- $c \leftrightarrow (x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$

Herhalingsopdracht 100 bladzijde 137

Gegeven de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 3y - \frac{7}{4} = 0$.

Bepaal een vergelijking van de cirkel c' die hetzelfde middelpunt heeft als c en een straal die dubbel zo groot is als de straal bij c. Geef deze vergelijking in de algemene vorm.

Oplossing

$$c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 3y - \frac{7}{4} = 0$$

$$c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 3y = \frac{7}{4}$$

$$c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$$

$$c \leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} + \frac{9}{4}$$

$$c \leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{16}{4} = 4$$

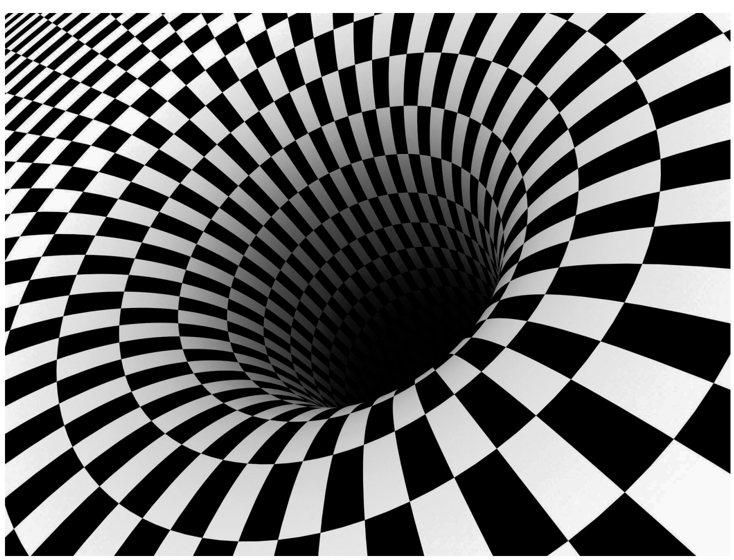
$$\downarrow$$

c is een cirkel met straal 2 en middelpunt $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$

$$c' \leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 16$$

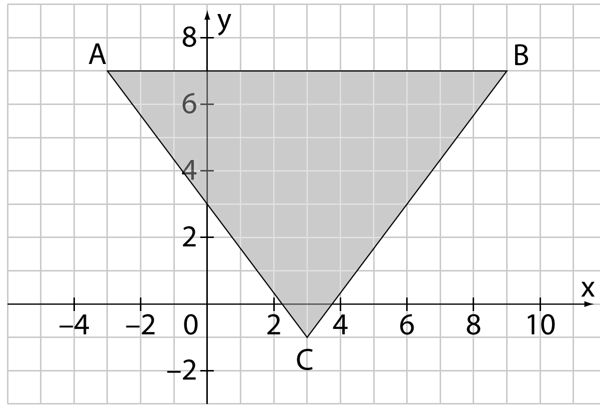
$$c' \leftrightarrow x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} - 16 = 0$$

$$c' \leftrightarrow x^2 + y^2 - 3y - \frac{55}{4} = 0$$



Herhalingsopdracht 101 bladzijde 138

De driehoek ABC heeft als zijden AB $\leftrightarrow y = 7$, AC $\leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + 3$ en BC $\leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - 5$.



1 Bepaal een vergelijking van de binnenbissectrice van $\hat{B}$.

BA $\leftrightarrow y - 7 = 0$

BC $\leftrightarrow 4x - 3y - 15 = 0$

$$\frac{|y-7|}{\sqrt{0+1}} = \frac{|4x-3y-15|}{\sqrt{16+9}}$$

$$\Updownarrow$$

$$|5y-35| = |4x-3y-15|$$

$$\Updownarrow$$

$$5y - 35 = 4x - 3y - 15 \quad \text{of} \quad 5y - 35 = -4x + 3y + 15$$

$$\Updownarrow$$

$$4x - 8y + 20 = 0 \quad \text{of} \quad 4x + 2y - 50 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x - 2y + 5 = 0 \quad \text{of} \quad 2x + y - 25 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad \text{of} \quad y = -2x + 25$$

$\downarrow$

b_B want dit is een stijgende rechte

2 Bepaal een vergelijking van de binnenbissectrice van $\hat{C}$.

CA $\leftrightarrow 4x + 3y - 9 = 0$

CB $\leftrightarrow 4x - 3y - 15 = 0$

$$\frac{|4x+3y-9|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|4x-3y-15|}{\sqrt{16+9}}$$
$$\Updownarrow$$
$$|4x+3y-9|=|4x-3y-15|$$
$$\Updownarrow$$
$$4x+3y-9=4x-3y-15 \quad \text{of} \quad 4x+3y-9=-4x+3y+15$$
$$\Updownarrow$$
$$6y=-6 \quad \text{of} \quad 8x=24$$
$$\Updownarrow$$
$$y=-1 \quad \text{of} \quad x=3$$
$$\downarrow$$

b_C want dit is een verticale rechte

Deze vergelijking voor b_C kon je rechtstreeks afleiden uit de figuur.

3 Bepaal het middelpunt en de straal van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC.

- Het middelpunt M van de ingeschreven cirkel van ΔABC is het snijpunt van b_B en b_C.

  $$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} & (1) \\ x=3 & (2) \end{cases}$$

  Substitutie van (2) in (1) geeft $y=\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{5}{2} \Leftrightarrow y=4$

  $M(3, 4)$

- De straal $r=d(M, AB)=|7-4|=3$

Herhalingsopdracht 102 bladzijde 138

Bepaal vergelijkingen van de cirkels die door de punten $A(1,1)$ en $B(3,-1)$ gaan en $\sqrt{20}$ als straal hebben.

Oplossing

- Het middelpunt $M(x, y)$ ligt op de middelloodlijn m van $[AB]$.

  $M'(2, 0)$ is het midden van $[AB]$

  $\text{rico } AB=\frac{-2}{2}=-1 \Rightarrow \text{rico } m=1$

  $m \leftrightarrow y-0=1(x-2)$

  $m \leftrightarrow y=x-2$

  zodat $M(x, x-2)$

- straal $r = \sqrt{20} \quad (\text{gegeven})$

  dus
  $$\begin{aligned}
  |MA| &= \sqrt{20} \\
  |MA|^2 &= 20 \\
  (x-1)^2 + (x-2-1)^2 &= 20 \\
  (x-1)^2 + (x-3)^2 &= 20 \\
  x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 &= 20 \\
  2x^2 - 8x - 10 &= 0 \\
  x^2 - 4x - 5 &= 0 \\
  x = 5 \quad \text{of} \quad x &= -1
  \end{aligned}$$

  dus $M_1(5, 3)$, $M_2(-1, -3)$

- $c_1 \leftrightarrow (x-5)^2 + (y-3)^2 = 20$

  $c_2 \leftrightarrow (x+1)^2 + (y+3)^2 = 20$

Herhalingsopdracht 103 bladzijde 138

Is de rechte $t \leftrightarrow 4x - 3y - 9 = 0$ een raaklijn aan de cirkel c met middelpunt $M(2, 8)$ en straal 5?

Oplossing

t is een raaklijn aan $c(M, 5)$

$$\Updownarrow$$

$$d(M, t) = 5$$

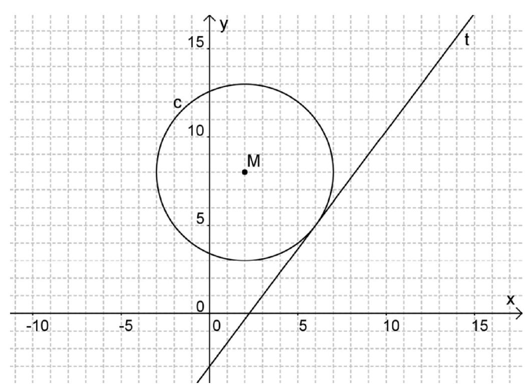
$$\Updownarrow$$

$$\frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 8 - 9|}{\sqrt{16+9}} = 5$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{|-25|}{5} = 5$$

t is dus inderdaad een raaklijn aan $c(M, 5)$



Herhalingsopdracht 104 bladzijde 138

Bepaal een vergelijking van de cirkel c die de x-as raakt in het punt $A(3, 0)$ en die door het punt $B(5, 1)$ gaat.

Oplossing

- Stel $M(x, y)$ is het middelpunt van de cirkel c.
  $|MA| = |MB|$
  dus ook $|MA|^2 = |MB|^2$
  $$(x-3)^2 + y^2 = (x-5)^2 + (y-1)^2$$
  $$\cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} - 10x + 25 + \cancel{y^2} - 2y + 1$$
  $$4x + 2y - 17 = 0$$
  $$2y = -4x + 17$$
  $$y = -2x + \frac{17}{2} \quad (1)$$
- De x-as is een raaklijn aan de cirkel in het punt $A(3, 0)$. Omdat een raaklijn loodrecht staat op de middellijn door het raakpunt, zal de rechte $x = 3$ (2) het middelpunt bevatten.
  (2) invullen in (1): $y = (-2)\cdot 3 + \frac{17}{2} = \frac{-12}{2} + \frac{17}{2} = \frac{5}{2}$
  zodat $M\left(3, \frac{5}{2}\right)$
- $r^2 = |MA|^2 = (3-3)^2 + \left(\frac{5}{2} - 0\right)^2 = \frac{25}{4}$
- $c \leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

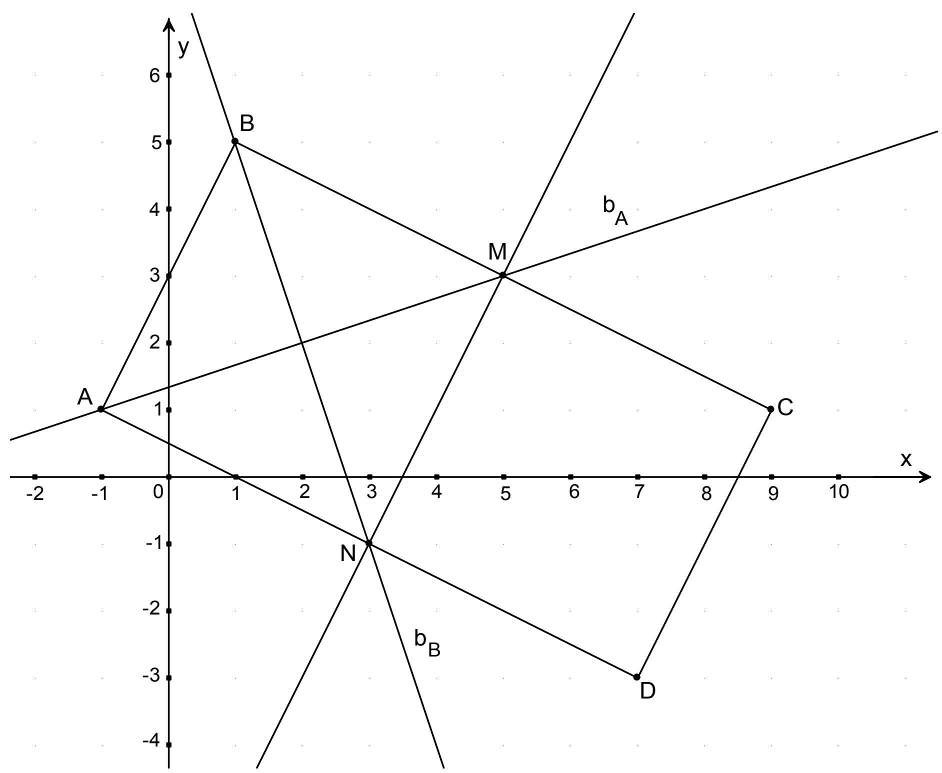
Herhalingsopdracht 105 bladzijde 138

Gegeven het parallellogram ABCD met $A(-1,1)$, $B(1,5)$, $C(9,1)$ en $D(7,-3)$.

1 De binnenbissectrice b_A in A is de bissectrice van de rechten $AB \leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$ en $AD \leftrightarrow x + 2y - 1 = 0$ die binnen het parallellogram ligt. Toon aan dat de binnenbissectrice b_A in A als vergelijking $x - 3y + 4 = 0$ heeft.

$$\frac{|2x - y + 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{1+4}}$$
$$\Updownarrow$$
$$|2x - y + 3| = |x + 2y - 1|$$
$$\Updownarrow$$
$$2x - y + 3 = x + 2y - 1 \quad \text{of} \quad 2x - y + 3 = -x - 2y + 1$$
$$\Updownarrow$$
$$x - 3y + 4 = 0 \quad \text{of} \quad 3x + y + 2 = 0$$
$$\downarrow$$

b_A, want dit is een stijgende rechte



2 Bepaal het snijpunt M van b_A met BC.

$b_A \leftrightarrow x-3y+4=0 \qquad (1)$

$BC \leftrightarrow y-5=\frac{-4}{8}(x-1)$

$BC \leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+5$

$BC \leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2} \qquad (2)$

Substitutie van (2) in (1) geeft: $x-3\left(-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}\right)+4=0$

$2x+3x-33+8=0$

$5x=25$

$x=5 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\cdot 5+\frac{11}{2}=3$

$M(5,3)$

3 Bepaal een vergelijking van de binnenbissectrice b_B in B en bepaal het snijpunt N van b_B met AD.

- $BA \leftrightarrow 2x-y+3=0$

  $BC \leftrightarrow x+2y-11=0$

  $$\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|x+2y-11|}{\sqrt{1+4}}$$

  $$|2x-y+3|=|x+2y-11|$$

  $2x-y+3=x+2y-11$ of $2x-y+3=-x-2y+11$

  $x-3y+14=0$ of $3x+y-8=0$

  $\downarrow$

  b_B, want dit is een dalende rechte

- $AD \leftrightarrow y-1=\frac{-4}{8}(x+1)$

  $AD \leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+1$

  $AD \leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \qquad (*)$

  Substitutie van $(*)$ in de vergelijking van b_B geeft: $3x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-8=0$

  $6x-x+1-16=0$

  $5x=15$

  $x=3 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}=-1$

  $N(3,-1)$

4 Wat vermoed je over de ligging van MN? Bewijs deze vaststelling analytisch.

We vermoeden dat MN || AB en MN $\perp$ AD.

We tonen dit analytisch aan.

$$\left.\begin{array}{l}\text{rico MN} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\ \text{rico AB} = \dfrac{4}{2} = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ MN} \parallel \text{AB}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{rico MN} = 2 \\ \text{rico AD} = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ rico MN} \cdot \text{rico AD} = -1 \Rightarrow \text{ MN} \perp \text{AD}$$