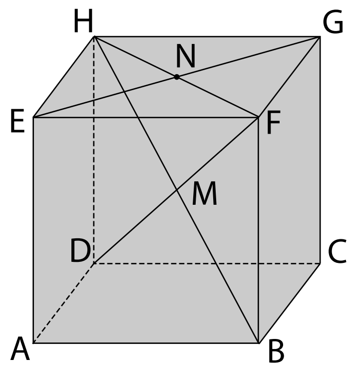
Hoofdstuk 10

Ruimtemeetkunde

Oplossingen van de opdrachten

Opdracht 1 bladzijde 188



In de getekende kubus is M het snijpunt van de lichaamsdiagonalen [DF] en [HB] en N is het snijpunt van de zijvlaksdiagonalen [EG] en [HF].
In werkelijkheid gelden de volgende eigenschappen.

Welke van deze eigenschappen blijven behouden op de tekening?

1 Een kubus heeft drie groepen evenwijdige ribben.

Deze eigenschap blijft behouden op de tekening.

2 Alle ribben van een kubus zijn even lang.

Deze eigenschap blijft niet behouden op de tekening.

3 Alle zijvlakken van een kubus zijn vierkanten.

Deze eigenschap blijft niet behouden op de tekening.

4 Alle zijvlaksdiagonalen zijn even lang.

Deze eigenschap blijft niet behouden op de tekening.

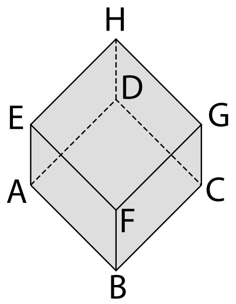
5 Twee lichaamsdiagonalen snijden elkaar middendoor.

Deze eigenschap blijft behouden op de tekening.

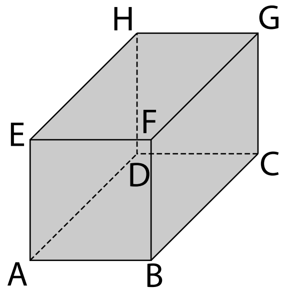
Opdracht 2 bladzijde 191

In de drie figuren is telkens een kubus in parallelperspectief getekend.

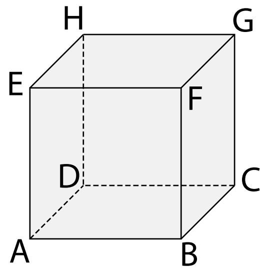
figuur 1



figuur 2



figuur 3



1	Noem telkens het zichtbare zijvlak dat in ware grootte is getekend.

In figuur 1: het bovenvlak EFGH

In figuur 2: het voorvlak ABFE

In figuur 3: het voorvlak ABFE

2	Noem in de drie gevallen één van de ribben die niet in ware grootte is weergegeven en bepaal van deze ribben de verkortingsfactor.

In figuur 1: ribbe $[AE]$ met verkortingsfactor 0,5

In figuur 2: ribbe $[BC]$ met verkortingsfactor 1,25

In figuur 3: ribbe $[BC]$ met verkortingsfactor 0,5

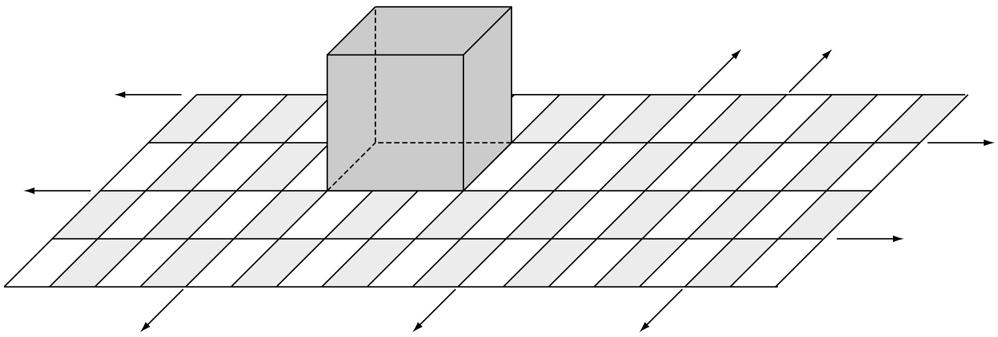
3	Welke van deze figuren vind je de minst geschikte tekening van een kubus ? Verklaar.

Figuur 2 is het minst geschikt.

Aangezien de verkortingsfactor groter is dan 1,25, lijkt dit meer op een balk dan op een kubus.

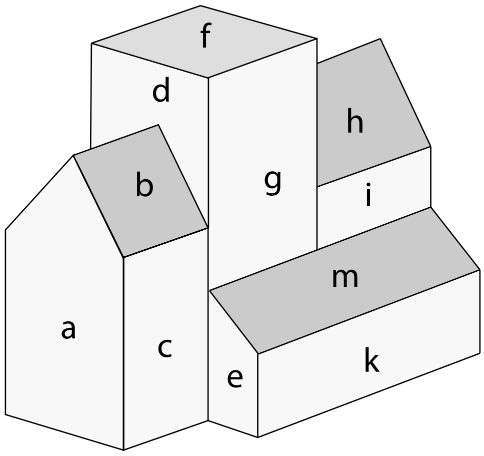
Opdracht 3 bladzijde 192

Als we een kubus op de vloer van een lokaal zetten, dan is het grondvlak van de kubus een deel van de vloer. Die is op zijn beurt een deel van het vlak dat ontstaat door de vloer in alle richtingen oneindig ver te laten doorlopen.



In de figuur zie je een maquette van een gebouw.
De zichtbare delen zijn aangeduid met een letter.

Welke muren en daken behoren tot eenzelfde vlak?



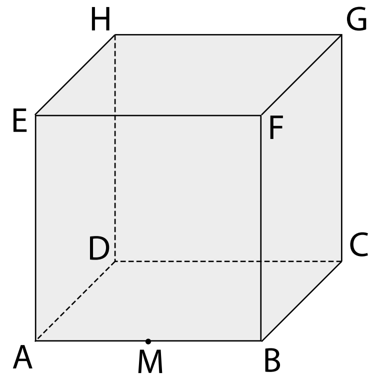
Oplossing

d en e,

b en h,

c, g en i behoren tot eenzelfde vlak.

Opdracht 4 bladzijde 192



1	a Welke zijvlakken van de kubus gaan door de punten A en E? b Hoeveel andere vlakken zijn er die ook door A en E gaan?

a Het voorvlak en het linkerzijvlak gaan door A en E.

b Oneindig veel vlakken gaan door A en E.

2	a Welk zijvlak van de kubus gaat door de punten A, E en F? b Hoeveel andere vlakken zijn er die ook door A, E en F gaan?

a Het voorvlak gaat door A, E en F.

b Geen enkel ander vlak gaat door A, E en F.

3	a Welke zijvlakken van de kubus gaan door de punten A, B en M? b Hoeveel andere vlakken zijn er die ook door A, B en M gaan?

a Het voorvlak en het grondvlak gaat door A, B en M.

b Oneindig veel vlakken gaan door A, B en M.

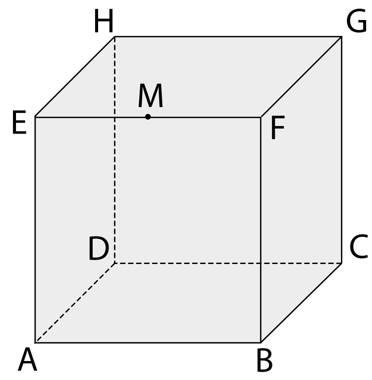
4	a Noem vier hoekpunten van de kubus die in eenzelfde vlak liggen. b Noem vier hoekpunten van de kubus die niet in eenzelfde vlak liggen.

a De punten A, B, C en D liggen in eenzelfde vlak.

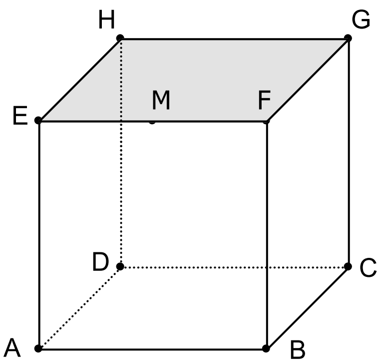
b De punten A, B, C en G liggen in niet in eenzelfde vlak.

Opdracht 5 bladzijde 194

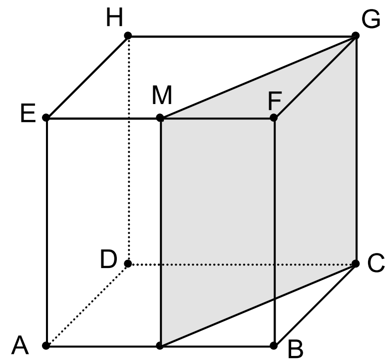
Kleur de vierhoeken in de kubus waardoor de volgende vlakken voorgesteld kunnen worden.



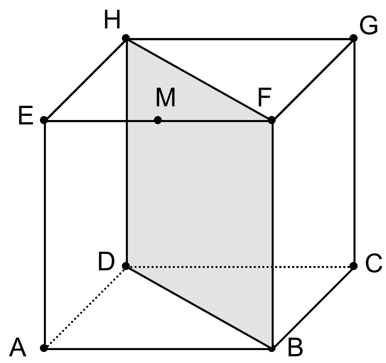
1 $\mathrm{vl}(E, M, G)$



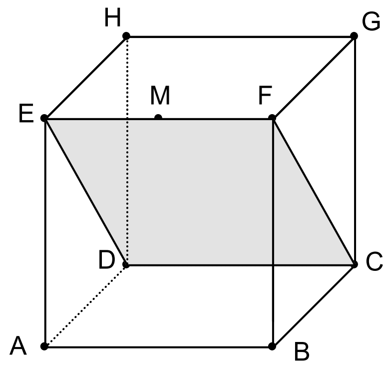
3 $\mathrm{vl}(M, G, C)$



2 $\mathrm{vl}(B, D, F)$

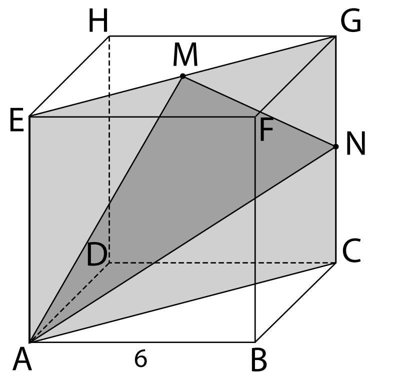


4 $\mathrm{vl}(M, F, D)$

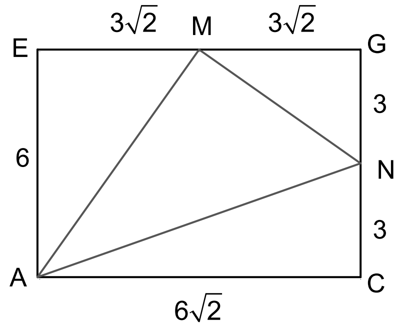


Opdracht 6 bladzijde 195

In de kubus met ribbe 6 is M het midden van [EG] en N het midden van [CG].
Bereken de zijden en de hoeken van de driehoek AMN.



Oplossing



In ΔANC: $\quad |AN| = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 + 3^2} = 9$

In ΔGMN: $\quad |MN| = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

In ΔAME: $\quad |AM| = \sqrt{6^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

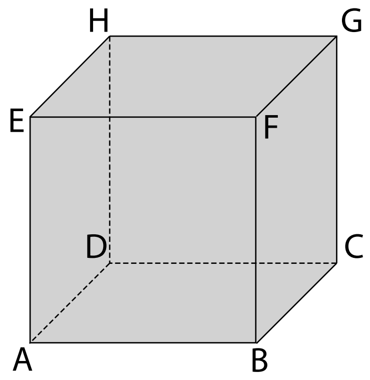
Uit de drie zijden volgen de hoeken (ZZZ):

$\widehat{A} = 35°15'52''$

$\widehat{M} = 90°$

$\widehat{N} = 54°44'8''$

Opdracht 7 bladzijde 195



1 Geef drie rechten, die door twee hoekpunten van de kubus gaan en die a evenwijdig zijn met AB, b AB snijden, c niet evenwijdig en niet snijdend zijn met AB.

a DC, EF en HG

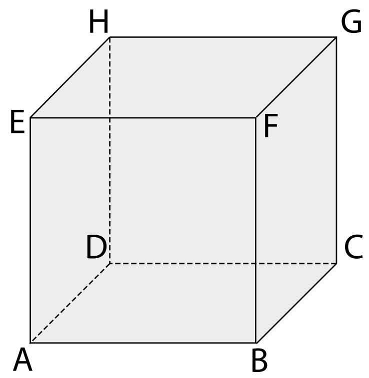
b AD, BC en AC

c EH, DF en HD

2 Welke van de rechtenparen (AB, HG), (AB, AC) en (AB, FG) liggen niet in één vlak?

Het rechtenpaar (AB, FG) ligt niet in één vlak.

Opdracht 8 bladzijde 196



1 a In welk vlak liggen de evenwijdige rechten AE en CG? b Is dit vlak het enige dat deze evenwijdigen omvat?

a AE en CG liggen in het diagonaalvlak ACGE.

b Ja, door de drie niet-collineaire punten A, C en G gaat juist één vlak. E ligt in dit unieke vlak.

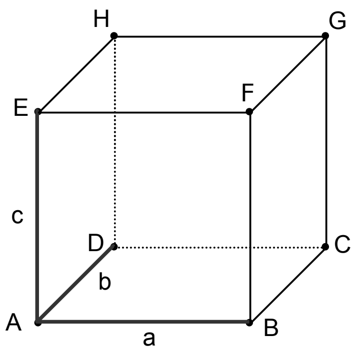
2 a In welk vlak liggen de snijdende rechten BG en CF? b Is dit vlak het enige dat deze snijdende rechten omvat?

a BG en CF liggen in het rechterzijvlak BCGF.

b Ja, door de drie niet-collineaire punten B, C en G gaat juist één vlak. F ligt in dit unieke vlak.

Opdracht 9 bladzijde 196

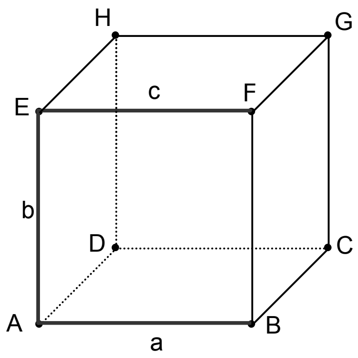
1 De rechte a snijdt de rechte b en b snijdt de rechte c. Onderzoek de onderlinge ligging van a en c. Kies a, b en c op de ribben van een kubus.



a snijdt b en b snijdt c

en

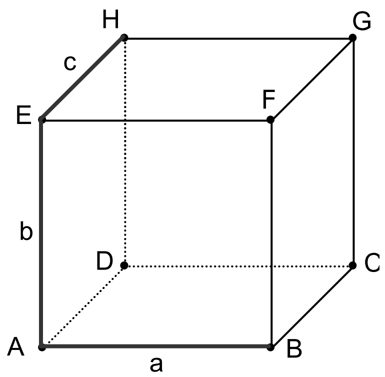
a snijdt c



a snijdt b en b snijdt c

en

a // c

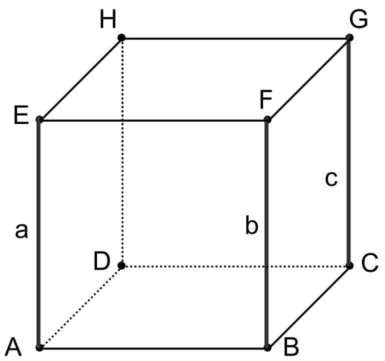


a snijdt b en b snijdt c

en

a is evenwijdig noch snijdend met c

2 De rechte a is evenwijdig met de rechte b en b is evenwijdig met de rechte c. Onderzoek de onderlinge ligging van a en c. Kies a, b en c op de ribben van een kubus.



a is evenwijdig met b

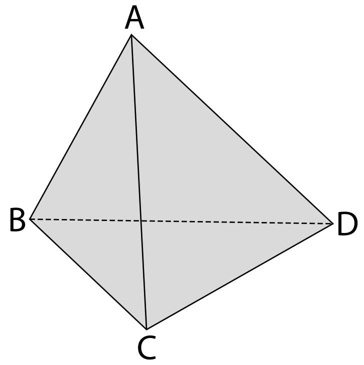
en b is evenwijdig met c

en

a is evenwijdig met c

Opdracht 10 bladzijde 199

Vier niet-coplanaire punten vormen een viervlak.
Beschouw de rechten die twee hoekpunten van een viervlak ABCD verbinden.



Noem hiervan alle paren kruisende rechten.

Oplossing

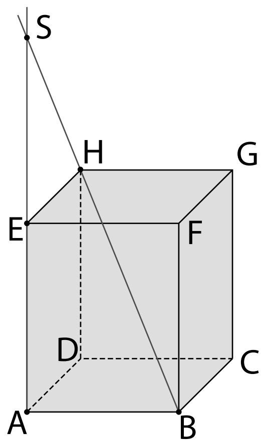
AB en CD
AC en BD
AD en BC zijn alle paren kruisende rechten.

Opdracht 11 bladzijde 199

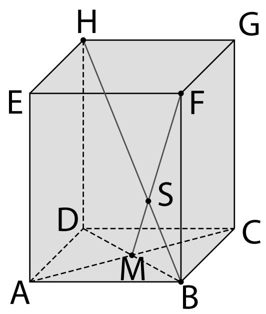
Wat je op een tekening in parallelperspectief ziet, is niet altijd een weergave van de werkelijkheid. Zo kunnen we op een tekening een snijpunt van twee rechten zien dat in werkelijkheid niet bestaat.

Is S in de figuren een echt snijpunt? Verklaar je antwoord.

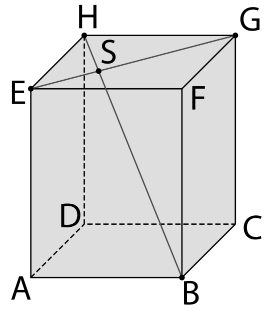
Oplossing



1 S is geen echt snijpunt, want
- er is maar één vlak dat de niet-collineaire punten A, B en E bevat, namelijk het voorvlak ABFE.
- H behoort niet tot het voorvlak zodat A, B, E en H niet-coplanair zijn.
  De rechten AE en HB zijn bijgevolg kruisend en hebben dus geen snijpunt.



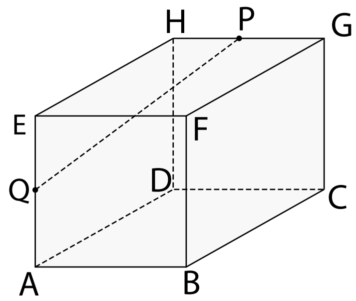
2 S is een echt snijpunt, want
- HB en FM liggen in het diagonaalvlak DBFH en zijn dus coplanair;
- Als HB en FM evenwijdig zouden zijn, dan zouden ze evenwijdig getekend zijn.
  Aangezien dit niet het geval is, zijn HB en FM snijdende rechten met snijpunt S.



3 S is geen echt snijpunt, want

- er is maar één vlak dat E, H en G bevat, namelijk het bovenvlak EFGH.
- B behoort niet tot het bovenvlak zodat HB en EG niet-coplanair, dus kruisend zijn.
  HB en EG hebben dus geen snijpunt.

Opdracht 12 bladzijde 199

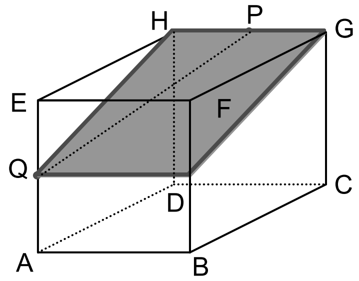


In de getekende balk ligt P op [HG] en Q op [AE].

1 Verklaar waarom HG en PQ een vlak bepalen.

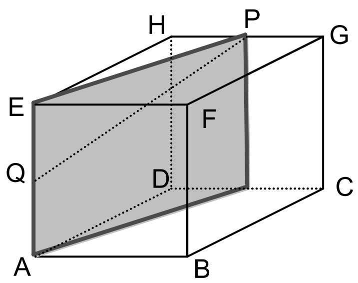
HG en PQ zijn snijdende rechten met snijpunt P en bepalen dus $\text{vl}(HG, PQ)$.

2 Kleur $\text{vl}(HG, PQ)$ in de balk.

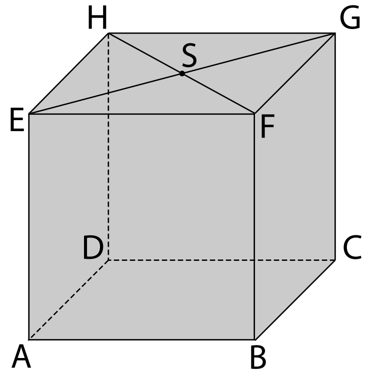


3 Er is nog een tweede vlak dat door PQ en door een ribbe van de balk gaat. Welk vlak is dit? Kleur dit vlak.

Door PQ gaat er nog een tweede vlak, namelijk $\text{vl}(AE, PQ)$.



Opdracht 13 bladzijde 200



1	Welke van de zes zijvlakken van de kubus zijn evenwijdig?

- Het voorvlak ABFE en het achtervlak DCGH.
- het linkerzijvlak ADHE en het rechterzijvlak BCGF.
- het grondvlak ABCD en het bovenvlak EFGH

  zijn evenwijdig.

2 Het grondvlak ABCD en het voorvlak ABFE hebben de rechte AB gemeen. Het zijn snijdende vlakken met AB als snijlijn.
Welke andere zijvlakken hebben met het grondvlak ABCD ook een rechte gemeen? Geef ook telkens deze snijlijn.

- Het linkerzijvlak ADHE heeft met het grondvlak ABCD de rechte AD gemeen.
- Het rechterzijvlak BCGF heeft met het grondvlak ABCD de rechte BC gemeen.
- Het achtervlak DCGH heeft met het grondvlak ABCD de rechte DC gemeen.

3 Zijn er twee zijvlakken van de kubus die slechts één punt gemeen hebben?

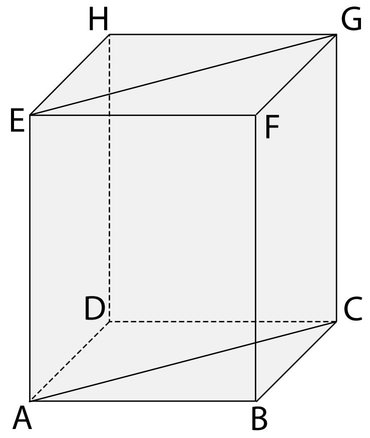
Neen

4 Hebben $\text{vl}(B, D, S)$ en het bovenvlak EFGH naast S nog andere punten gemeen? Zo ja, welke?

Alle punten van de rechte HF zijn gemeenschappelijke punten.

Opdracht 14 bladzijde 200

Gegeven de balk met grondvlak ABCD en bovenvlak EFGH.



Vul de tabel in.

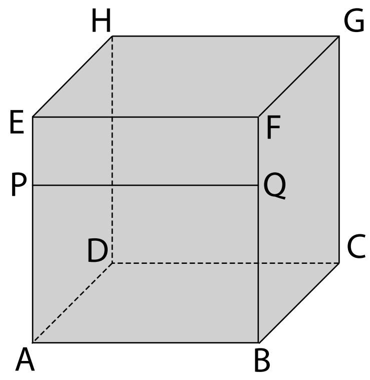
snijvlak	snijlijn met het bovenvlak EFGH	snijlijn met het grondvlak ABCD	onderlinge ligging van de snijlijnen
linkerzijvlak ADHE			
voorvlak ABFE			
diagonaalvlak ACGE			

Oplossing

snijvlak	snijlijn met het bovenvlak EFGH	snijlijn met het grondvlak ABCD	onderlinge ligging van de snijlijnen
linkerzijvlak ADHE	EH	AD	//
voorvlak ABFE	EF	AB	//
diagonaalvlak ACGE	EG	AC	//

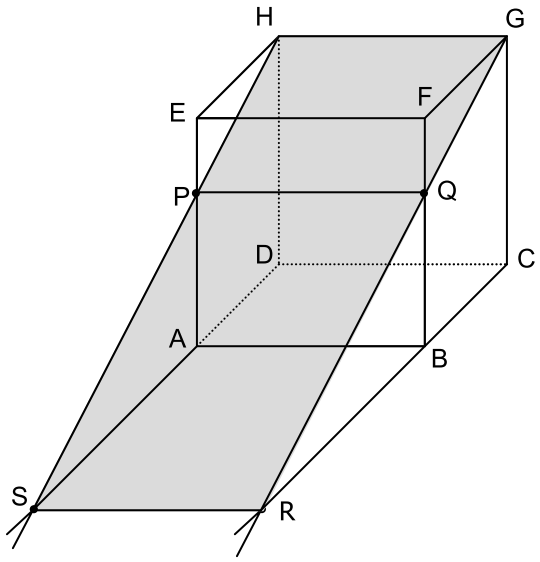
Opdracht 15 bladzijde 203

De evenwijdige rechten HG en PQ bepalen een vlak.
Bepaal de snijlijn van $\text{vl}(HG, PQ)$ met elk zijvlak van de kubus.

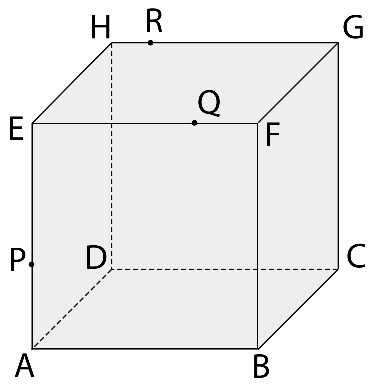


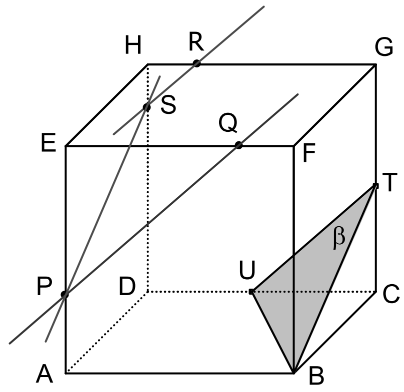
Oplossing

snijvlak	snijlijn met $\text{vl}(HG, PQ)$
EFGH	HG
ADHE	PH
BCGF	QG
ABFE	PQ
CDHG	HG
ABCD	SR



Opdracht 16 bladzijde 204





1 Teken de snijlijn van $\text{vl}(P, Q, R)$ en het voorvlak van de kubus.

De snijlijn van $\text{vl}(P, Q, R)$ en het voorvlak van de kubus is de rechte PQ.

2 Teken de snijlijn van $\text{vl}(P, Q, R)$ en het achtervlak van de kubus.

De snijlijn van $\text{vl}(P, Q, R)$ en het achtervlak van de kubus is de rechte RS.

RS // PQ met S op DH.

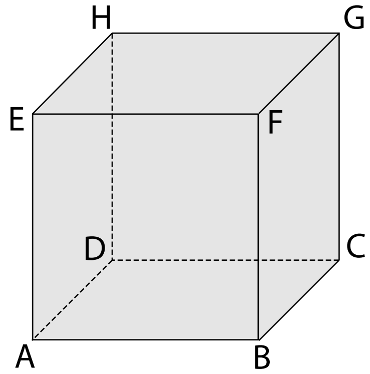
3 Teken de snijlijn van $\text{vl}(P, Q, R)$ en het linkerzijvlak van de kubus.

De snijlijn van $\text{vl}(P, Q, R)$ en het linkerzijvlak van de kubus is de rechte PS.

4 Teken het vlak β dat door het punt B gaat en evenwijdig is met $\text{vl}(P, Q, R)$.

$\beta = \text{vl}(B, T, U)$ met T op GC, U op DC, BT // PS en UT // PQ

Opdracht 17 bladzijde 204



1 Welke rechten, die door twee hoekpunten van de kubus gaan, hebben met het grondvlak ABCD geen enkel punt gemeen?

De rechten EF, EG, EH, FG, FH en HG hebben met het grondvlak ABCD geen enkel punt gemeen.

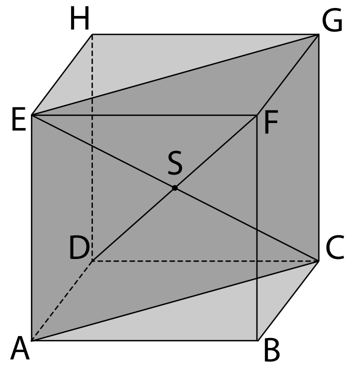
2 Welke rechten, die door twee hoekpunten van de kubus gaan, hebben met het grondvlak ABCD enkel het punt B gemeen?

De rechten BF, EB, GB en HB hebben met het grondvlak ABCD enkel het punt B gemeen.

3 Welke rechten, die door twee hoekpunten van de kubus gaan, hebben met het grondvlak ABCD meer dan één punt gemeen? Hoe liggen deze rechten ten opzichte van het grondvlak?

De rechten AB, BC, CD, DA, AC en DB hebben met het grondvlak ABCD meer dan één punt gemeen.
Deze rechten liggen in het grondvlak ABCD.

Opdracht 18 bladzijde 204



1 Verklaar waarom de rechten DF en EC in de kubus snijdend zijn.

DF en EC liggen in het diagonaalvlak DCFE, dus zijn ze coplanair.
Bovendien zijn DF en EC niet evenwijdig getekend, dus zijn ze niet evenwijdig.
Bijgevolg zijn DF en EC snijdend.

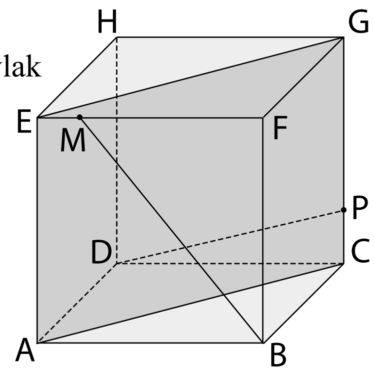
2 Noem S het snijpunt van DF en EC. Verklaar waarom S het snijpunt is van DF en het diagonaalvlak ACGE van de kubus.

S ligt op EC, dus in het vlak ACGE en S ligt op DF zodat S het snijpunt is van het vlak ACGE en de rechte DF.

Opdracht 19 bladzijde 204

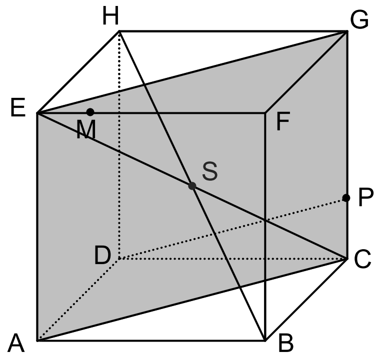
Bepaal de stand van de volgende rechten en het diagonaalvlak ACGE van de kubus.

Als de rechte het vlak snijdt, bepaal dan ook het snijpunt.



| 1 AE |

AE ligt in ACGE.



| 2 BH |

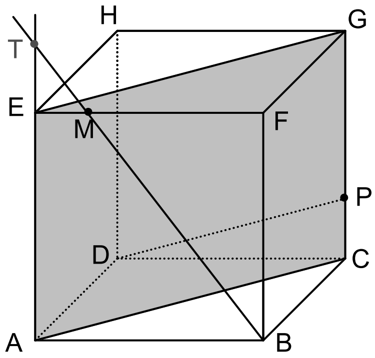
BH snijdt ACGE in S.

| 3 EC |

EC ligt in ACGE.

| 4 BM |

BM snijdt ACGE in T.



| 5 BF |

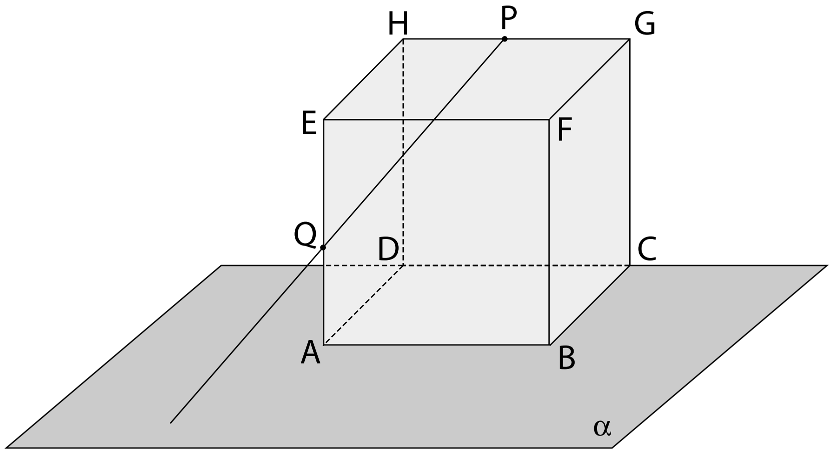
BF is evenwijdig met AE, dus ook met ACGE.

| 6 DP |

DP snijdt ACGE in P.

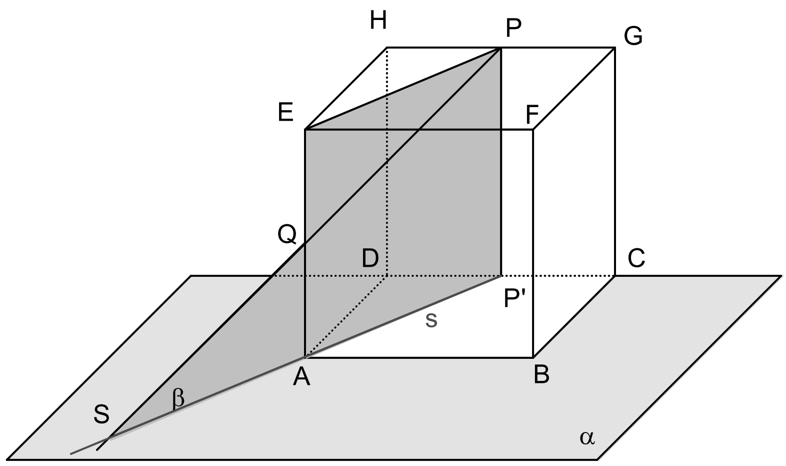
Opdracht 20 bladzijde 205

Om het snijpunt S van PQ en $\alpha = \text{vl}(A, B, C)$ te bepalen, kun je als volgt te werk gaan.



1 Kleur het vlak $\beta = \text{vl}(AQ, P)$.

2 Bepaal de snijlijn s van α en β.



3 Verklaar waarom het snijpunt van PQ en s het gevraagde snijpunt S is.

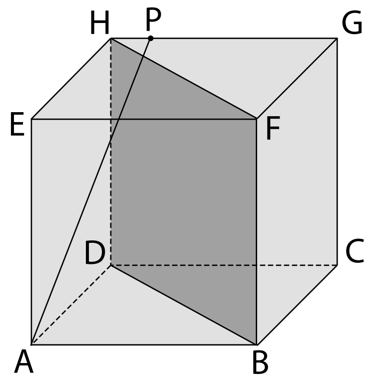
S ligt op PQ.

S ligt op AP’, dus S ligt in α.

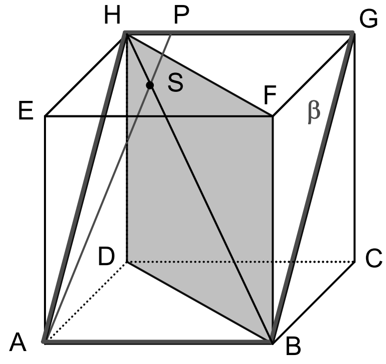
Hieruit volgt dat S het snijpunt is van PQ en α.

Opdracht 21 bladzijde 209

Het punt P ligt op de ribbe [HG] van de kubus.
Construeer het snijpunt S van AP en het diagonaalvlak DBFH.



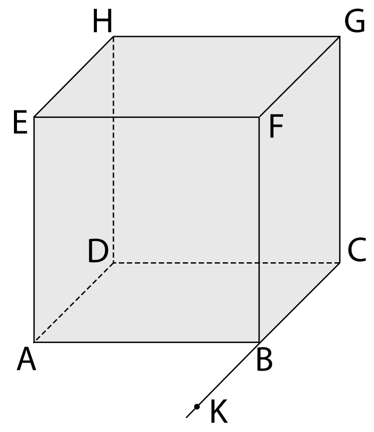
Oplossing



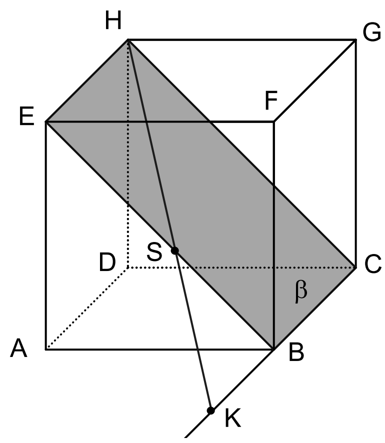
- Het hulpvlak $\beta = \text{vl}(AB, HG)$ omvat de rechte AP.
- $\text{vl}(DB, HF)$ snijdt β volgens de snijlijn HB.
- HB en AP hebben het gevraagd punt S als snijpunt.

Opdracht 22 bladzijde 209

Het punt K ligt op het verlengde van de ribbe [BC] van de kubus.
Construeer het snijpunt S van HK en $\text{vl}(A, B, F)$.



Oplossing

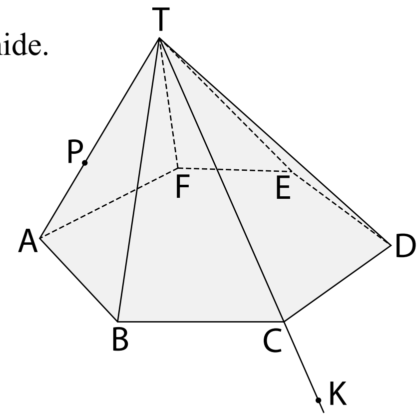


- Het hulpvlak $\beta = \text{vl}(BC, EH)$ omvat de rechte HK.
- BE is de snijlijn van β en $\text{vl}(A, B, F)$.
- Het snijpunt S van HK en BE is het gevraagde punt.

Opdracht 23 bladzijde 209

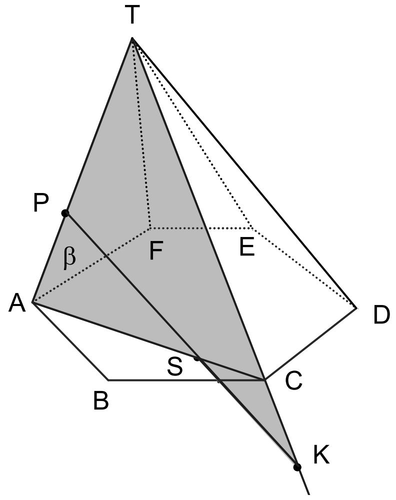
Het punt K ligt op het verlengde van de ribbe [TC] van de piramide.

Construeer het snijpunt S van de rechte PK en $\text{vl}(A,B,C)$.



Oplossing

- Het hulpvlak $\beta = \text{vl}(T,A,C)$ omvat de rechte PK.
- β en $\text{vl}(A,B,C)$ hebben AC als snijlijn.
- PK en AC snijden elkaar in S, het gevraagde snijpunt.



Opdracht 24 bladzijde 209

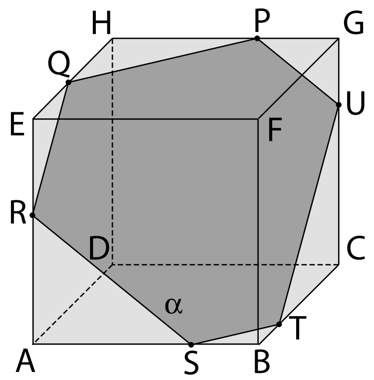
Onderzoek welke veelhoeken mogelijk zijn als doorsnede van een kubus en een vlak.

Oplossing

Een driehoek, vierhoek, vijfhoek en zeshoek zijn mogelijk als doorsnede van een kubus en een vlak.

Opdracht 25 bladzijde 211

PQRSTU is de doorsnede van de kubus en het vlak α.



1 Hoe liggen de zijden van de doorsnede die in twee evenwijdige zijvlakken van de kubus liggen ten opzichte van elkaar? Verklaar.

RS //PU

RQ // TU

ST // QP

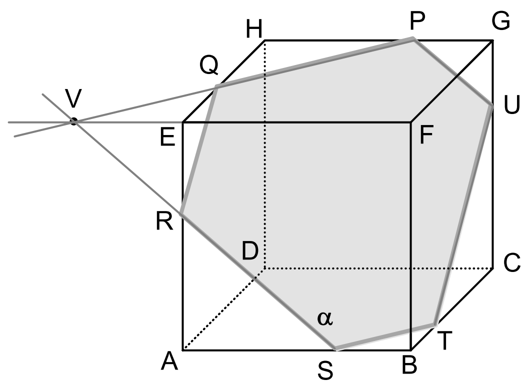
Twee evenwijdige vlakken worden gesneden door een derde vlak volgens evenwijdige snijlijnen.

2 PQ en RS zijn snijdende rechten in het vlak α. Teken het snijpunt V. Op welke rechte ligt V? Verklaar.

PQ ligt in het bovenvlak EFGH,

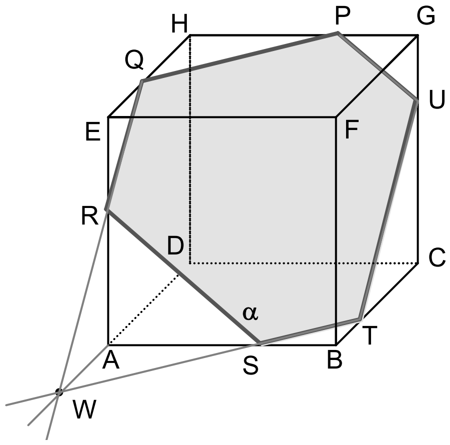
RS ligt in het voorvlak ABFE.

Het snijpunt V van PQ en RS ligt dus op de snijlijn EF van deze vlakken.



3 QR en ST zijn snijdende rechten in het vlak α. Teken het snijpunt W.
Op welke rechte ligt W ? Verklaar.

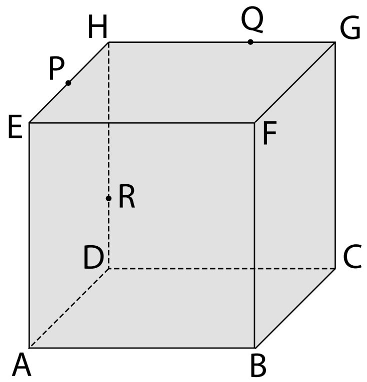
QR ligt in het linkerzijvlak ADHE,
ST ligt in het grondvlak ABCD.
Het snijpunt W van QR en ST ligt dus op
de snijlijn AD van deze vlakken.

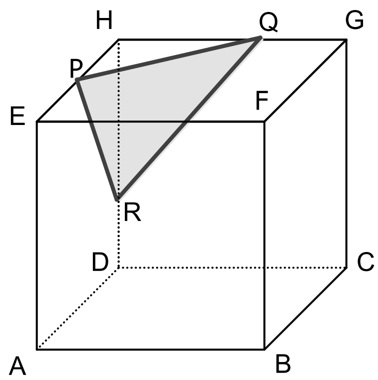


Opdracht 26 bladzijde 211

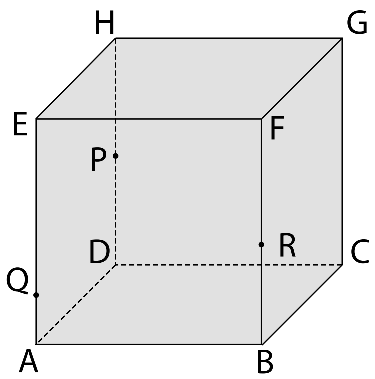
Construeer de doorsnede van de kubus met $\text{vl}(P, Q, R)$.

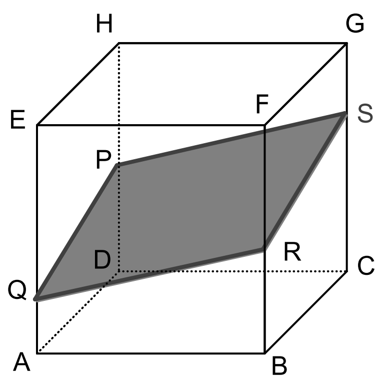
1



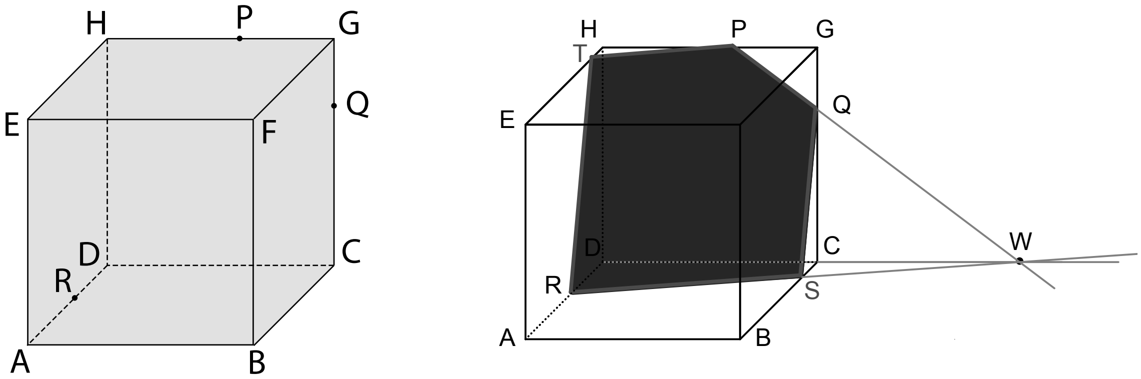


2

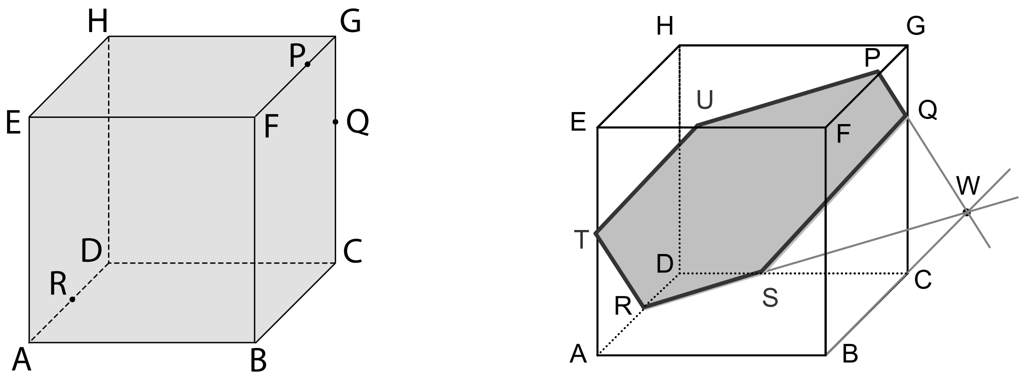




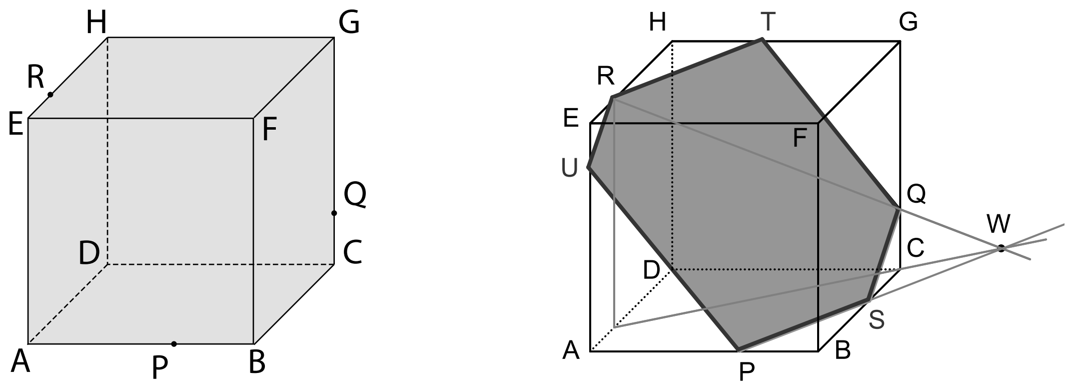
3


H
P
G
E
F
Q
D
C
R
A
B
H
P
G
T
E
Q
D
C
W
R
S
A
B

4


H
G
P
E
F
Q
D
C
R
A
B
H
G
P
U
Q
E
F
W
T
D
S
C
R
A
B

5


H
G
R
E
F
Q
D
C
A
P
B
H
T
G
R
E
F
U
Q
W
C
D
S
A
B
P

Opdracht 27 bladzijde 216

1 De doorsnede van een kubus met een vlak kan nooit een zevenhoek zijn. Verklaar.

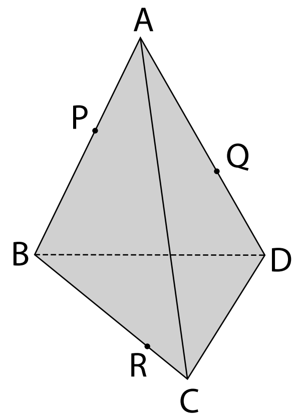
Elke zijde van de doorsnedeveelhoek ligt in een zijvlak van de kubus. Aangezien een kubus maar zes zijvlakken heeft, is de doorsnede nooit een zevenhoek.

2 De doorsnede van een kubus met een vlak kan nooit een regelmatige vijfhoek zijn. Verklaar.

Een regelmatige vijfhoek kan nooit twee evenwijdige zijden hebben. Als de doorsnede van een kubus met een vlak een vijfhoek is, dan zijn twee paar zijden van de doorsnede evenwijdig omdat ze in evenwijdige zijvlakken liggen. Die doorsnede kan dus geen regelmatige vijfhoek zijn.

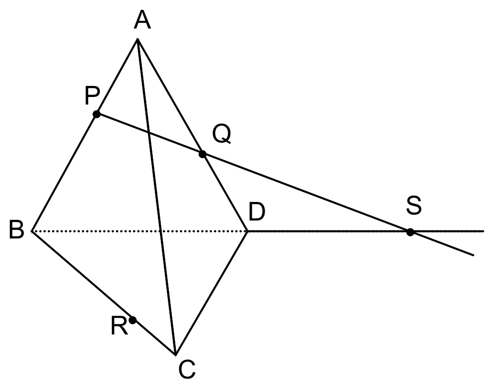
Opdracht 28 bladzijde 216

1 Construeer het snijpunt S van PQ met $\text{vl}(B, C, D)$.



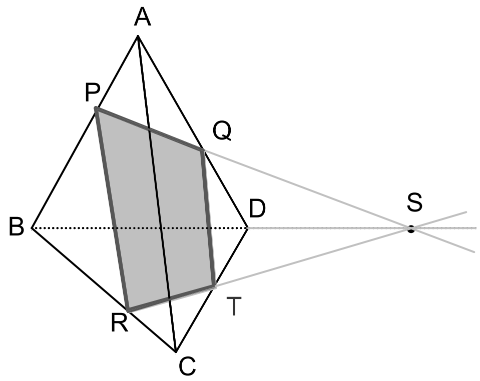
PQ ligt in $\text{vl}(A, B, D)$.

S ligt op BD, de snijlijn van $\text{vl}(B, C, D)$ en $\text{vl}(A, B, D)$.



2 Construeer nu de doorsnede van het viervlak ABCD met $\mathrm{vl}(P,Q,R)$.

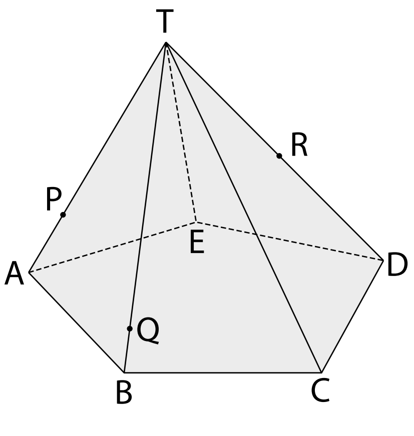
De doorsnede is PQTR.

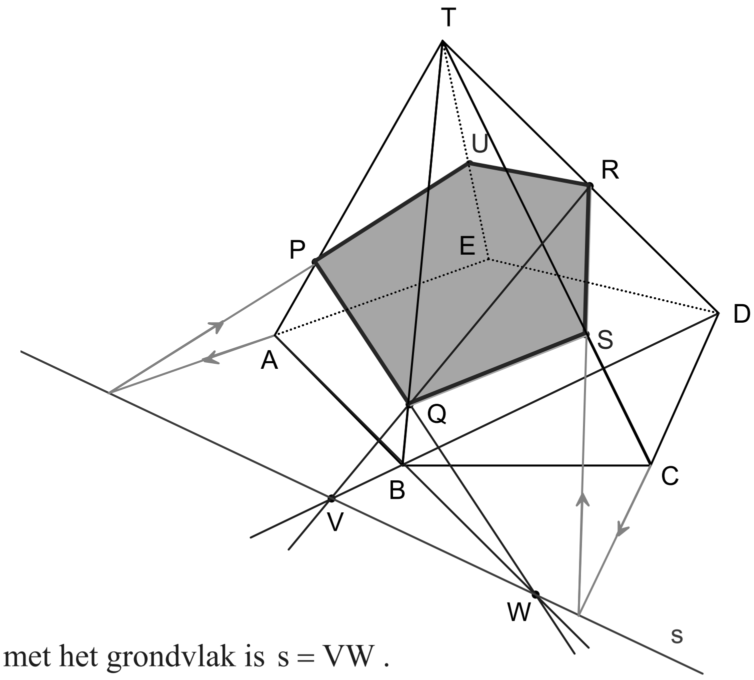


Opdracht 29 bladzijde 218

Construeer de doorsnede van de piramide met $\mathrm{vl}(P,Q,R)$.

1

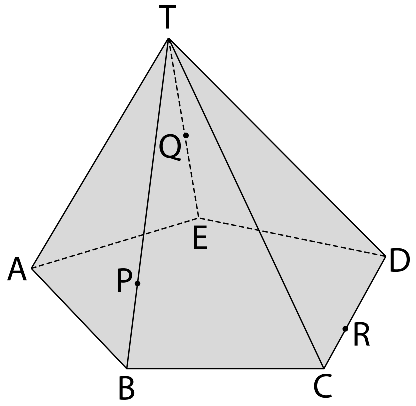


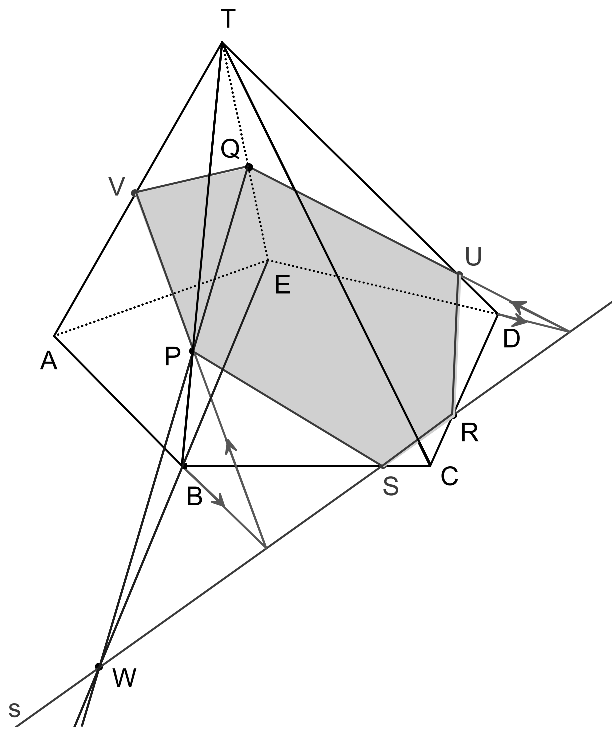


- De snijlijn van $\mathrm{vl}(P,Q,R)$ met het grondvlak is $s = VW$.

  Hierbij is V het snijpunt van RQ en BD in $\mathrm{vl}(T,B,D)$ en W het snijpunt van PQ en AB in $\mathrm{vl}(T,A,B)$.
- De doorsnede is PQSRU.

2





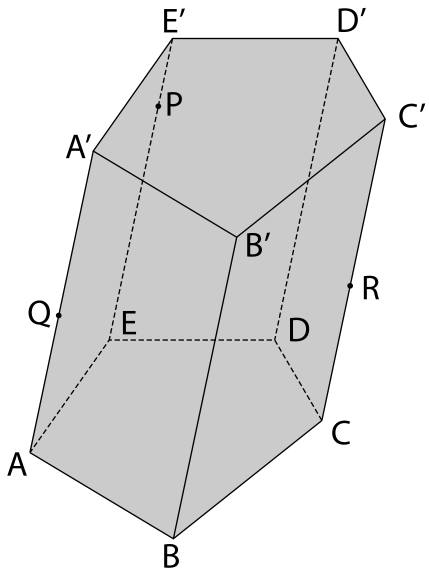
- De snijlijn van $\text{vl}(P, Q, R)$ met het grondvlak is $s = RW$.

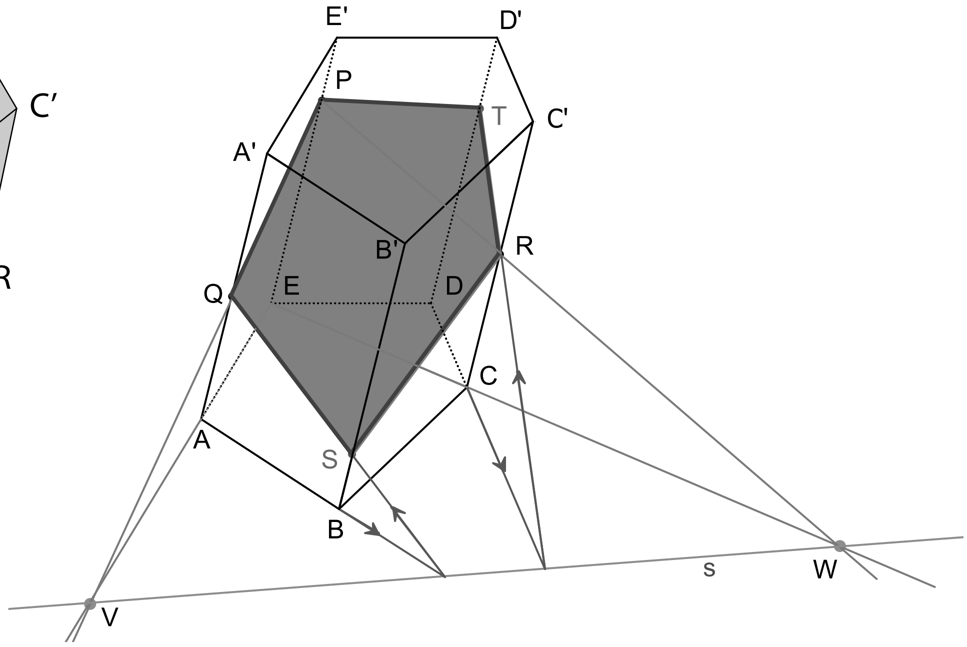
  Hierbij is W het snijpunt van PQ en BE in $\text{vl}(T, B, E)$.
- De doorsnede is PSRUQV.

Opdracht 30 bladzijde 219

Construeer de doorsnede van het prisma met $\mathrm{vl}(P, Q, R)$.

1

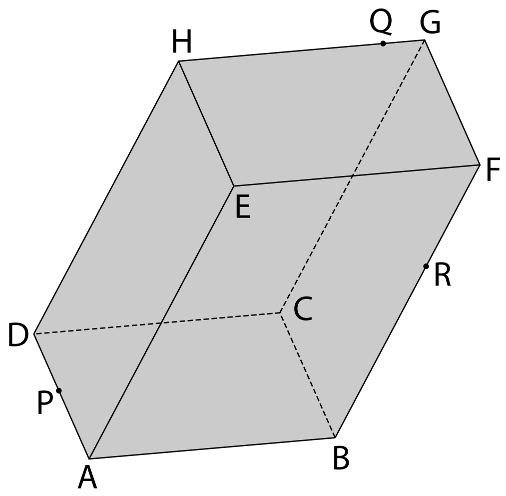


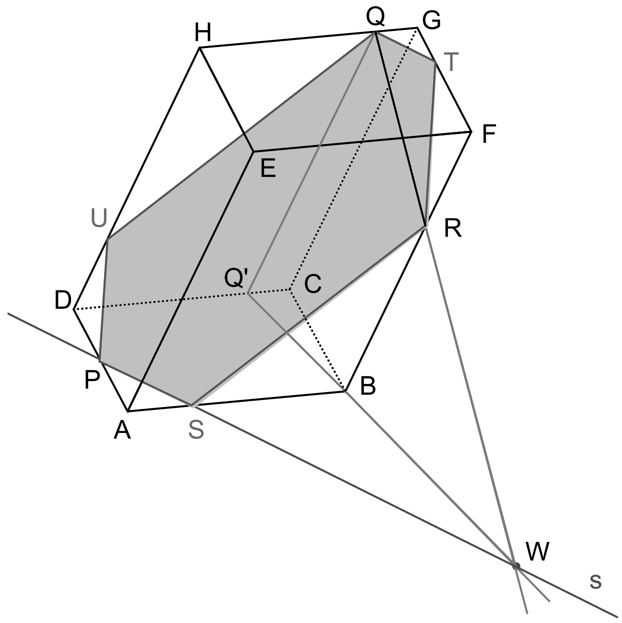


- De snijlijn van $\mathrm{vl}(P, Q, R)$ met het grondvlak is $s = VW$.

  Hierbij is V het snijpunt van PQ en AE in $\mathrm{vl}(AE, A'E')$ en W het snijpunt van PR en EC in $\mathrm{vl}(EC, E'C')$.
- De doorsnede is PQSRT.

2



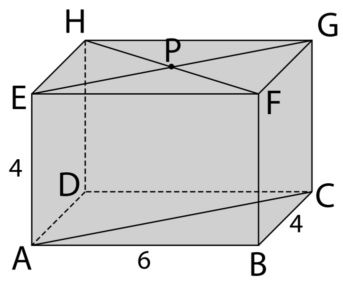


- De snijlijn van $\text{vl}(\text{P}, \text{Q}, \text{R})$ met het grondvlak is $\text{s} = \text{PW}$.

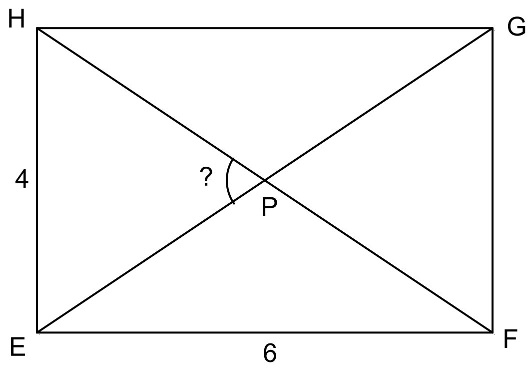
  Hierbij is W het snijpunt van Q'B en QR in $\text{vl}(\text{QQ}', \text{FG})$.
- De doorsnede is PSRTQU met PS // QT, SR // UQ en UP // TR.

Opdracht 31 bladzijde 221

De getekende balk heeft lengte 6, breedte 4 en hoogte 4.



1 Bereken de scherpe hoek die de rechten EG en HF insluiten.



In ΔEPH is $|HE| = 4$ en $|EP| = |HP| = \dfrac{\sqrt{6^2 + 4^2}}{2} = \sqrt{13}$.

Hieruit volgt (ZZZ) : $E\hat{P}H = 67°22'48"$.

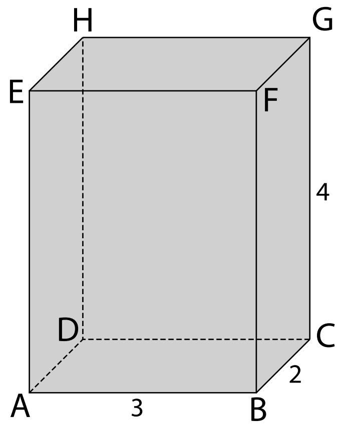
2 Hoe zou je de scherpe hoek tussen de kruisende rechten AC en HF kunnen bepalen ?

Verschuif AC naar EG // AC in het vlak EFGH dat HF omvat. De scherpe hoek tussen AC en HF is de scherpe hoek die de rechten EG en HF insluiten.

De scherpe hoek tussen de kruisende rechten AC en HF is $67°22'48"$.

Opdracht 32 bladzijde 222

Bereken de volgende hoeken in de balk.

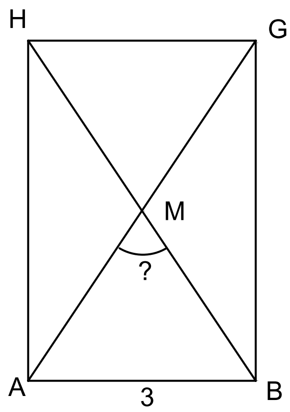


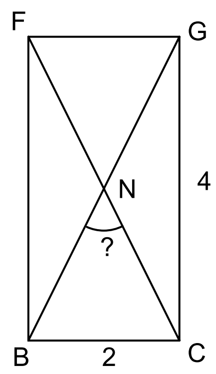
$\boxed{1 \quad \widehat{HB,GA}}$

In ΔAMB is $|AB| = 3$ en $|MA| = |MB| = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$

Hieruit volgt (ZZZ) :

$A\widehat{M}B = \widehat{HB,GA} = 67°42'33''$





$\boxed{2 \quad \widehat{AH,FC}}$

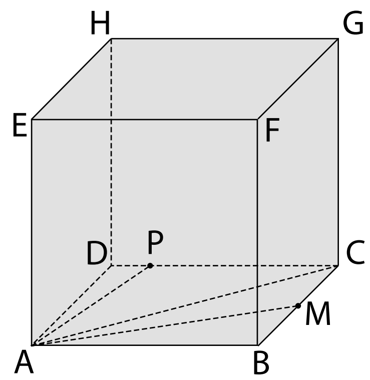
$AH\hat{,}FC = BG\hat{,}FC$ want AH // BG

In ΔBNC is $|BC| = 2$ en $|NB| = |NC| = \dfrac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$

Hieruit volgt (ZZZ) :

$B\widehat{N}C = \widehat{AH,FC} = 53°7'48''$

Opdracht 33 bladzijde 223



In de kubus staat AE loodrecht op het grondvlak ABCD.

Hoe groot zijn de hoeken $E\widehat{A}B$, $E\widehat{A}M$, $E\widehat{A}C$, $E\widehat{A}P$ en $E\widehat{A}D$ in werkelijkheid?

Oplossing

Al deze hoeken zijn in werkelijkheid 90°.

Opdracht 34 bladzijde 223

Teken op een blad papier drie rechten a, b en c door een punt S.
Gebruik je geodriehoek om de volgende vragen te beantwoorden.

1 Hoeveel rechten zijn er, in het vlak van het tekenblad, die door S gaan en loodrecht staan op a?

Er is één rechte in het vlak van het tekenblad die door S gaat en loodrecht staat op a.

2 Hoeveel rechten zijn er die door S gaan en loodrecht staan op a?

Er zijn oneindig veel rechten die door S gaan en loodrecht staan op a.

3 Hoeveel rechten zijn er die door S gaan en loodrecht staan op a en op b?

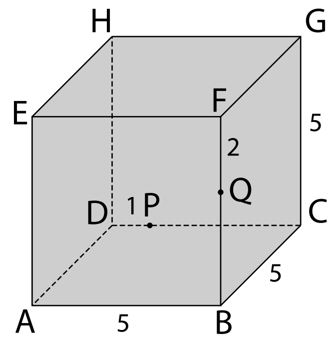
Er is één rechte die door S gaat en loodrecht staat op a en op b.

4 Hoeveel rechten zijn er die door S gaan en loodrecht staan op a, op b en op c?

Er is één rechte die door S gaat en loodrecht staat op a, b en c.

Opdracht 35 bladzijde 225

Gegeven een kubus met ribbe 5. P ligt op $[DC]$ en $|DP| = 1$,
Q ligt op $[BF]$ en $|FQ| = 2$.



1 Bereken de zijden van de driehoek BPQ.

$|BQ| = 3$

$$|BP| = \sqrt{|PC|^2 + |CB|^2} \qquad \text{in } \Delta PCB$$
$$= \sqrt{4^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{41}$$
$$|PQ| = \sqrt{|PB|^2 + |BQ|^2} \qquad \Delta PBQ \text{ is rechthoekig in B}$$
$$= \sqrt{41 + 3^2}$$
$$= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

2 Bereken de hoeken van de driehoek HPQ.

$$|HP| = \sqrt{|HD|^2 + |DP|^2} \qquad \text{in } \Delta HDP$$
$$= \sqrt{5^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{26}$$
$$|PQ| = 5\sqrt{2}$$
$$|HQ| = \sqrt{|HF|^2 + |FQ|^2} \qquad \Delta HFQ$$
$$= \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

Met het programma ZZZ vinden we $\widehat{H} = 66°24'6''$, $\widehat{H} = 72°14'12''$ en $\widehat{H} = 41°21'41''$.

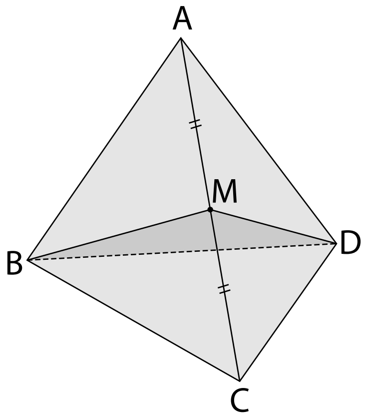
Opdracht 36 bladzijde 225

ABCD is een regelmatig viervlak.

Dit betekent dat alle ribben even lang zijn.

M is het midden van [AC].

Toon aan dat AC loodrecht staat op $\text{vl}(B, M, D)$.



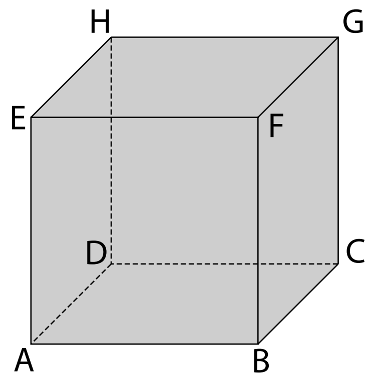
Oplossing

$$\begin{cases} AC \perp BM & \text{in de gelijkzijdige driehoek ABC is de zwaartelijn BM ook hoogtelijn} \\ AC \perp MD & \text{in de gelijkzijdige driehoek ACD is de zwaartelijn MD ook hoogtelijn} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad AC \perp \text{vl}(B, M, D)$$

Opdracht 37 bladzijde 225

1 Welke zijvlakken van de kubus staan loodrecht op het grondvlak ABCD?



het voorvlak ABFE,

het rechterzijvlak BCGF,

het achtervlak DCGH

en het linkerzijvlak ADHE.

2 Welke zijvlakken van de kubus staan loodrecht op het linkerzijvlak ADHE?

het grondvlak ABCD,

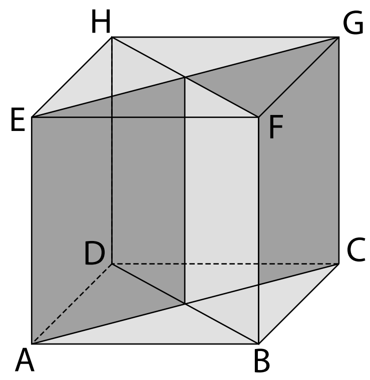
het voorvlak ABFE,

het bovenvlak EFGH

en het achtervlak DCGH.

Opdracht 38 bladzijde 225

Verklaar waarom $\text{vl}(\text{AE}, \text{GC})$ loodrecht staat op $\text{vl}(\text{DB}, \text{HF})$.

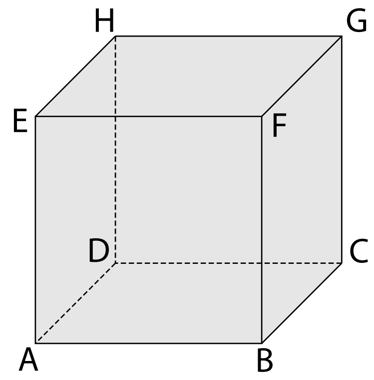


Oplossing

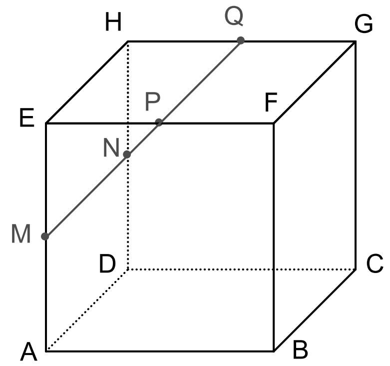
$$\begin{cases} \text{EG} \perp \text{HF} & \text{de diagonalen van het vierkant EFGH} \\ & \text{staan loodrecht op elkaar} \\ \text{EG} \perp \text{BF} & \text{BF} \perp \text{vl}(\text{EF}, \text{HG}) \text{ dus BF staat loodrecht} \\ & \text{op elke rechte van vl}(\text{EF}, \text{HG}) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad \text{EG} \perp \text{vl}(\text{DB}, \text{HF}) \\ \qquad \text{EG in vl}(\text{AE}, \text{GC}) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{vl}(\text{AE}, \text{GC}) \perp \text{vl}(\text{DB}, \text{HF})$$

Opdracht 39 bladzijde 231



1 Op de tekening in parallelperspectief is het voorvlak ABFE in ware grootte getekend.
Breng de middens M, N, P en Q van respectievelijk $[AE]$, $[DH]$, $[EF]$ en $[HG]$ aan op deze tekening.



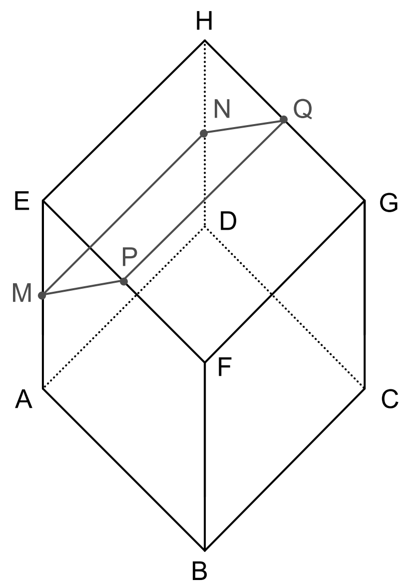
2 Wat stel je vast wat de onderlinge ligging van deze vier middens betreft ?

De vier middens lijken collineair te zijn.

3 Op de tweede tekening in parallelperspectief is het bovenvlak EFGH in ware grootte getekend.
Breng hierop de middens M, N, P en Q aan. Wat stel je nu vast met betrekking tot de middens van deze lijnstukken ?

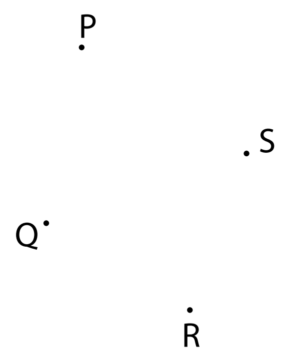
De vier middens vormen een vierhoek.

De eerste tekening is dus niet geschikt om deze figuur weer te geven.

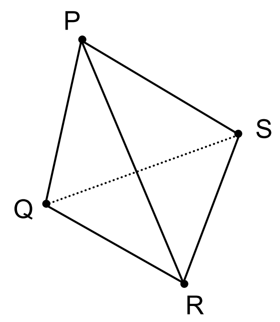


Opdracht 40 bladzijde 231

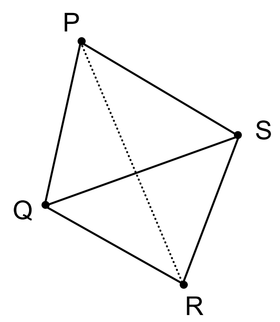
P, Q, R en S zijn de hoekpunten van een viervlak.



1 Teken dit viervlak als $[QS]$ onzichtbaar is.



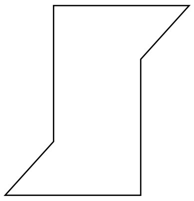
2 Teken dit viervlak als $[QS]$ zichtbaar is.



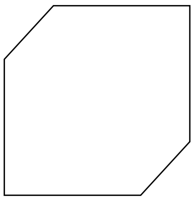
Opdracht 41 bladzijde 232

We zien vijf aanzichten van een ruimtefiguur, gevormd door zes ribben van een kubus.
Vier van deze aanzichten zijn van dezelfde ruimtefiguur. Welke is de andere?

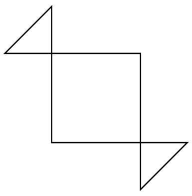
A



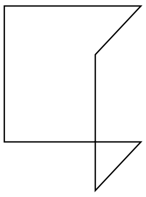
B



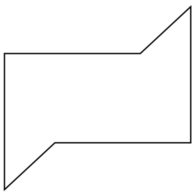
C



D

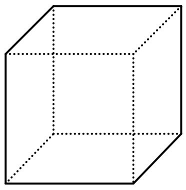


E

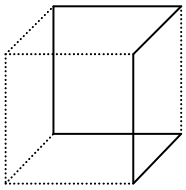


Oplossing

A, B, C en E zijn aanzichten van de nevenstaande ruimtefiguur.



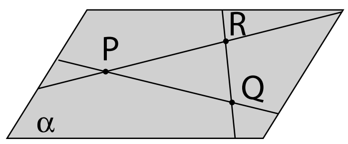
Aanzicht D is dat van een de ruimtefiguur hiernaast getekend.



Opdracht 42 bladzijde 232

De niet-collineaire punten P, Q en R liggen in het vlak α.

Geef vijf mogelijke notaties voor α waarin deze punten en/of rechten door deze punten voorkomen.

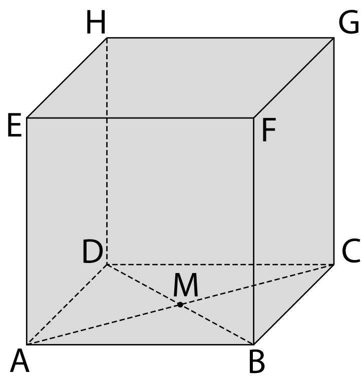


Oplossing

- $\text{vl}(P, QR)$
- $\text{vl}(P, Q, R)$
- $\text{vl}(PQ, PR)$
- $\text{vl}(QR, QP)$
- $\text{vl}(Q, PR)$

Opdracht 43 bladzijde 232

Wat is de onderlinge ligging van de volgende rechten in de kubus?



$\boxed{1 \quad \text{AB en BG}}$

AB en BG zijn snijdend.

$\boxed{2 \quad \text{AC en HD}}$

AC en HD zijn kruisend.

$\boxed{3 \quad \text{EH en BC}}$

EH en BC zijn evenwijdig.

$\boxed{4 \quad \text{AE en BG}}$

AE en BG zijn kruisend.

$\boxed{5 \quad \text{HM en BG}}$

HM en BG zijn kruisend.

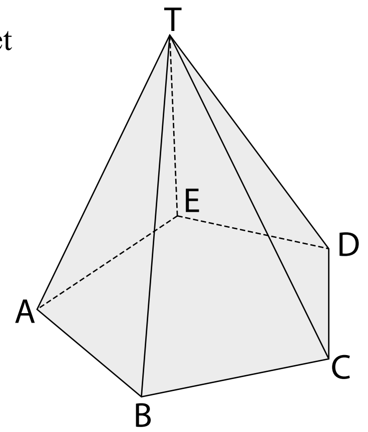
$\boxed{6 \quad \text{EM en AG}}$

EM en AG zijn snijdend.

Opdracht 44 bladzijde 233

Bepaal de onderlinge ligging van de rechten in de piramide met grondvlak ABCDE en top T.

Geef ook telkens een verklaring.



1 BD en EC

BD en EC zijn snijdend want ze zijn coplanair (in het grondvlak ABCDE) en niet evenwijdig getekend.

2 AB en TB

AB en TB zijn snijdend want ze hebben het punt B gemeen.

3 TC en ED

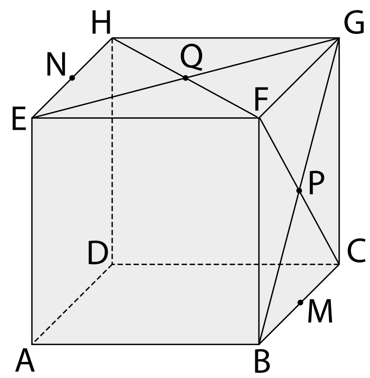
TC en ED zijn kruisend want T, C, E en D zijn niet coplanair aangezien C niet in $\text{vl}(T, D, E)$ ligt.

4 TD en AB

TD en AB zijn kruisend want T, D, A en B zijn niet coplanair aangezien D niet in $\text{vl}(T, A, B)$ ligt.

Opdracht 45 bladzijde 233

Welke van de volgende vlakken zijn dezelfde?



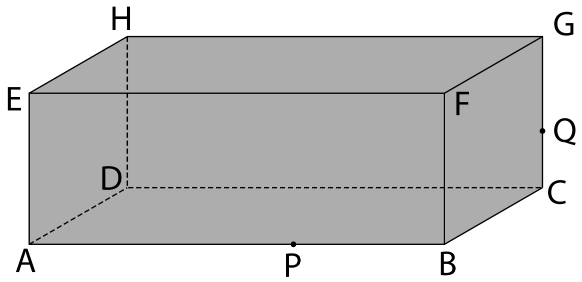
1 $\text{vl}(A, D, H)$	5 $\text{vl}(AE, CG)$
2 $\text{vl}(B, E, G)$	6 $\text{vl}(AC, Q)$
3 $\text{vl}(BC, EH)$	7 $\text{vl}(B, P, Q)$
4 $\text{vl}(AD, EH)$	8 $\text{vl}(B, M, N)$

Oplossing

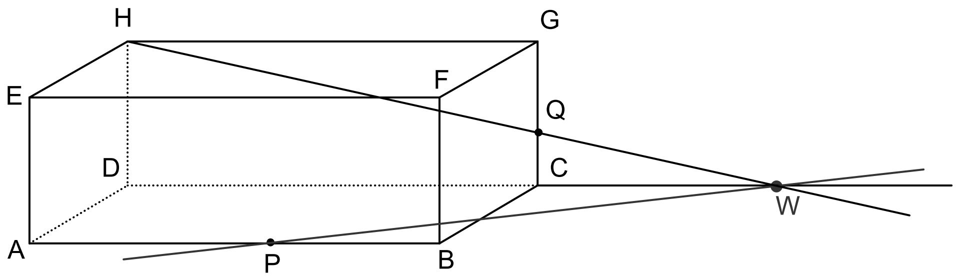
- $\text{vl}(A, D, H) = \text{vl}(AD, EH)$
- $\text{vl}(B, E, G) = \text{vl}(B, P, Q)$
- $\text{vl}(BC, EH) = \text{vl}(B, M, N)$
- $\text{vl}(AE, CG) = \text{vl}(AC, Q)$

Opdracht 46 bladzijde 233

Construeer de snijlijn van $\text{vl}(P, Q, H)$ met het grondvlak ABCD van de balk.



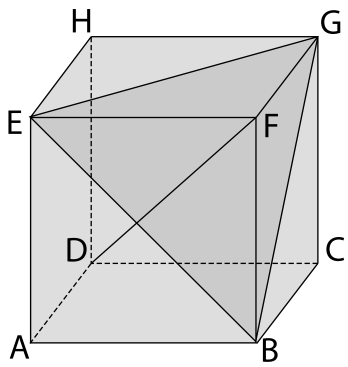
Oplossing

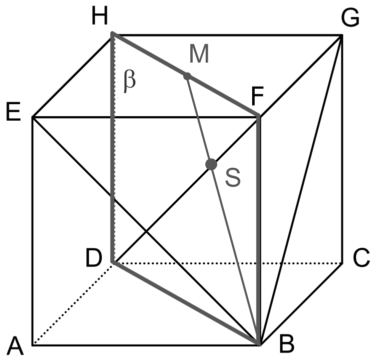


De snijlijn is PW. Hierbij is W het snijpunt van HQ en DC in het achtervlak DCGH.

Opdracht 47 bladzijde 233

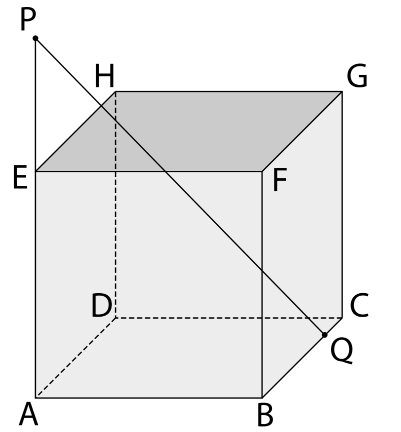
1 Construeer in de kubus het snijpunt S van DF en $\text{vl}(B, E, G)$.

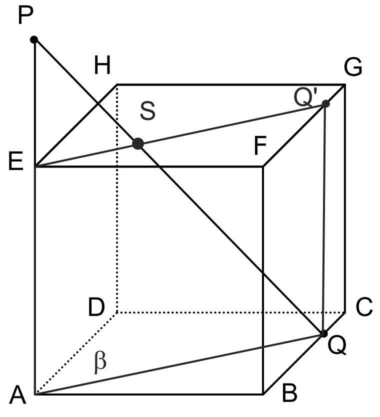




- Kies als hulpvlak $\beta = \text{vl}(DB, HF)$.
- De snijlijn van β en $\text{vl}(B, E, G)$ is BM.
- S is het snijpunt van DF en BM.

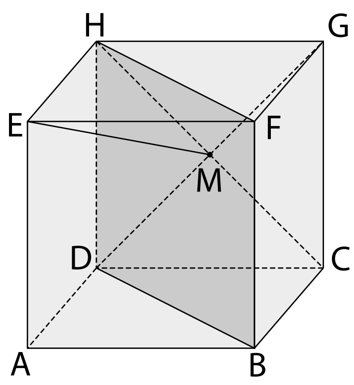
2 Construeer in de kubus het snijpunt S van PQ en $\text{vl}(E, F, G)$.

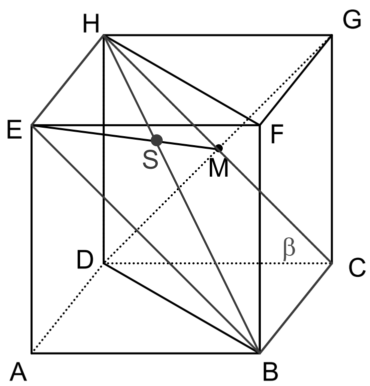




- Kies als hulpvlak $\beta = \text{vl}(EA, Q)$.
- De snijlijn van β en $\text{vl}(E, G, F)$ is EQ'.
- S is het snijpunt van PQ en EQ'.

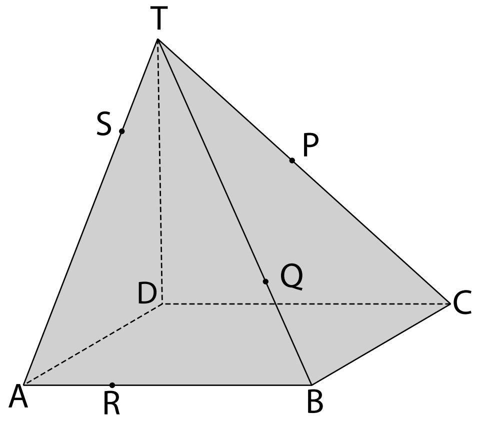
3 Construeer in de kubus het snijpunt S van EM en $\text{vl}(D, B, F)$.





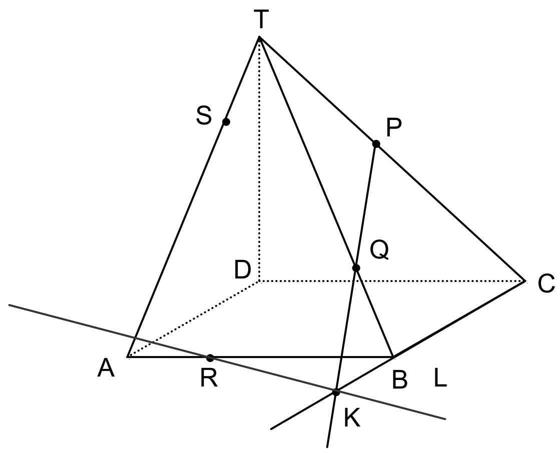
- Kies als hulpvlak $\beta = \text{vl}(EH, BC)$.
- De snijlijn van β en $\text{vl}(D, B, F)$ is HB.
- S is het snijpunt van EM en HB.

Opdracht 48 bladzijde 234



1 Teken het snijpunt K van PQ met het grondvlak ABCD van de piramide.

K is het snijpunt van PQ en BC (in $\text{vl}(T, B, C)$).

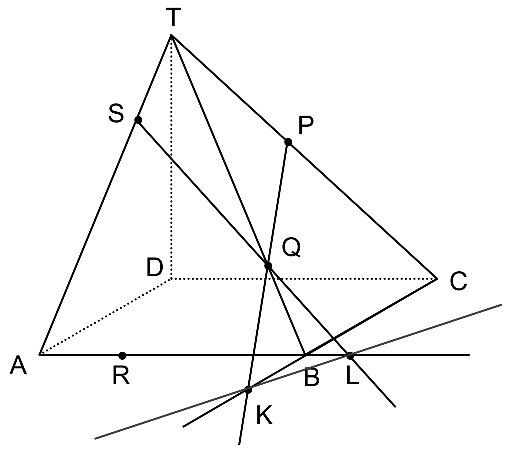


2 Wat is de snijlijn van $\text{vl}(P, Q, R)$ en $\text{vl}(AB, CD)$?

RK is de snijlijn.

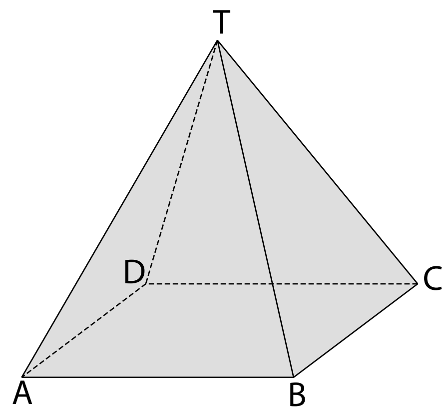
3 Wat is de snijlijn van $\text{vl}(P, Q, S)$ en $\text{vl}(AB, CD)$?

De snijlijn is KL met L het snijpunt van QS en AB (in $\text{vl}(T, A, B)$).



Opdracht 49 bladzijde 235

Het grondvlak ABCD van de piramide met top T is een vierkant.



1 Teken de snijlijn van $\text{vl}(A,B,C)$ en $\text{vl}(T,C,D)$.

CD is de snijlijn.

2 Teken de snijlijn van $\text{vl}(A,B,C)$ en $\text{vl}(T,B,D)$.

BD is de snijlijn.

3 Teken de snijlijn van $\text{vl}(T,A,D)$ en $\text{vl}(T,B,D)$.

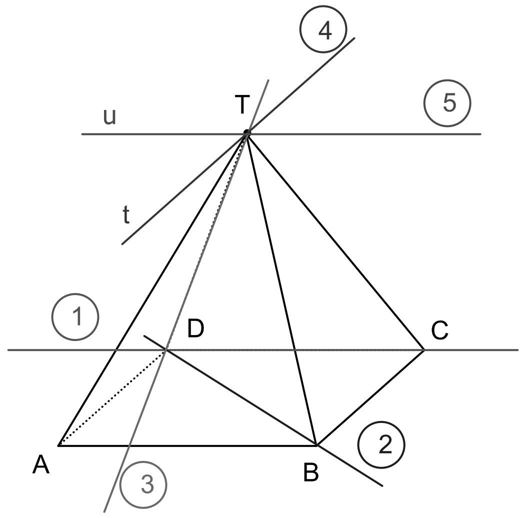
TD is de snijlijn.

4 Teken de snijlijn van $\text{vl}(T,A,D)$ en $\text{vl}(T,B,C)$.

De snijlijn is t, de rechte door T // AD.

5 Teken de snijlijn van $\text{vl}(T,A,B)$ en $\text{vl}(T,D,C)$.

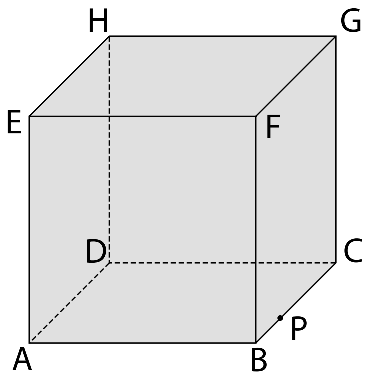
De snijlijn is u, de rechte door T // AB.



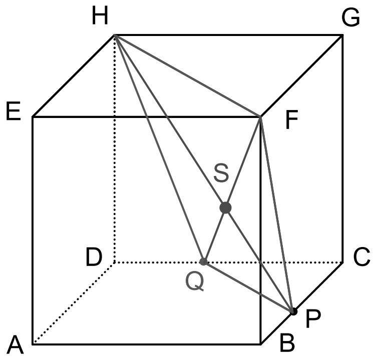
Opdracht 50 bladzijde 235

In de kubus ligt het punt P op de ribbe [BC].
Construeer het punt Q op de ribbe [DC] zo dat HP en FQ elkaar snijden.

Verklaar je constructie.



Oplossing



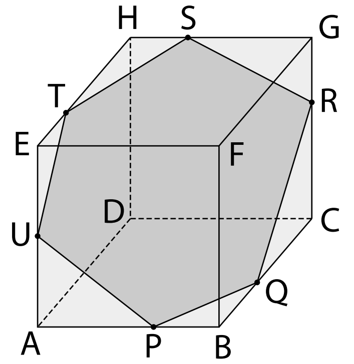
We construeren het snijpunt van DC en vl (H, F, P). Dit is het punt Q dat we vinden door in het grondvlak PQ evenwijdig met HF te tekenen.

Aangezien HP en FQ coplanair en niet evenwijdig getekend zijn, zijn deze rechten snijdend in S.

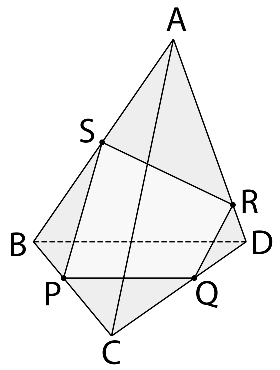
Opdracht 51 bladzijde 236

Verklaar waarom de gekleurde delen geen vlakke doorsneden kunnen zijn.

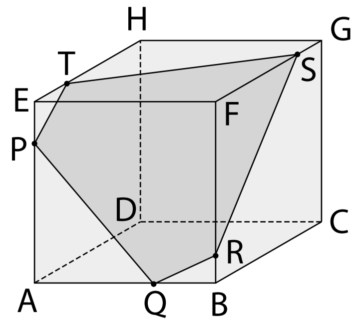
1



3



2

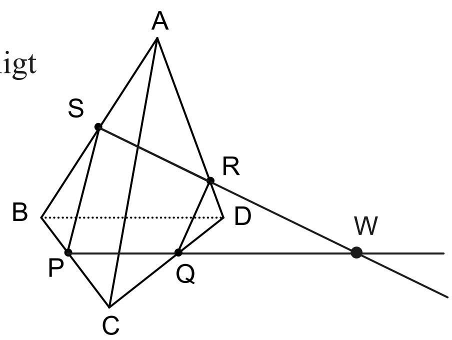


Oplossing

In figuur 1 kun je met je tekendriehoek nagaan dat de rechten TS en PQ niet evenwijdig zijn.
Omdat deze rechten tevens in twee evenwijdige vlakken liggen, zijn ze kruisend.
Kruisende rechten kunnen nooit in een vlakke doorsnede liggen.

In figuur 2 zijn er twee snijlijnen met het voorvlak, namelijk PQ en QR.

In figuur 3 is W het snijpunt van SR en PQ. Dat snijpunt ligt niet op BD, de snijlijn van $\text{vl}(A, B, D)$ en $\text{vl}(B, C, D)$.



Opdracht 52 bladzijde 236

Teken de doorsnede van de balk met

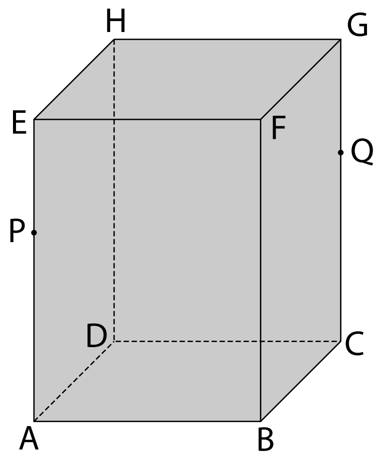
1 $\text{vl}(P, C, D)$

2 $\text{vl}(A, B, Q)$

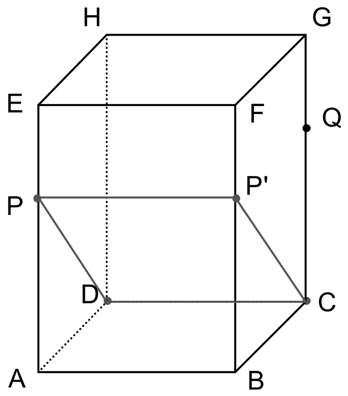
3 $\text{vl}(PQ, H)$

4 $\text{vl}(PQ, F)$

5 $\text{vl}(PQ, CG)$

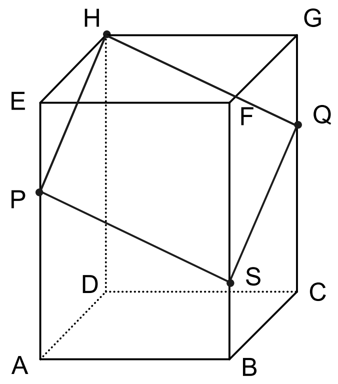


Oplossing van 1



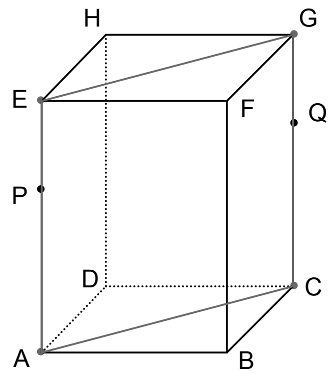
parallellogram PDCP'.

Oplossing van 3



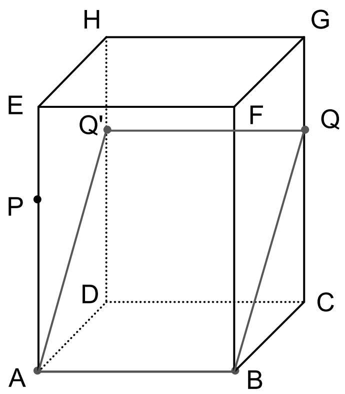
parallellogram PSQH

Oplossing van 5



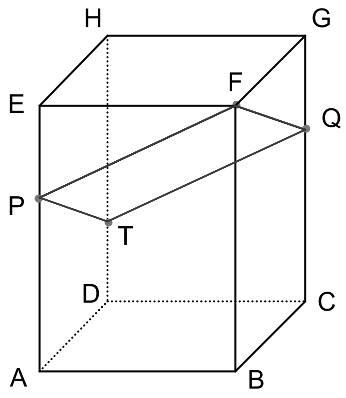
parallellogram EACG

Oplossing van 2



parallellogram ABQQ'

Oplossing van 4

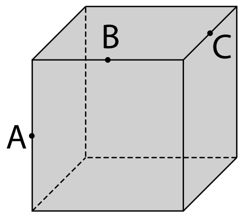


parallellogram PFQT

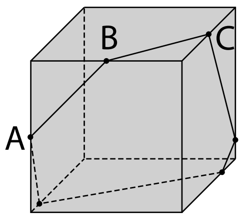
Opdracht 53 bladzijde 237

Een kubus wordt gesneden door een vlak dat door de middens A, B, C van drie ribben gaat (zie figuur).

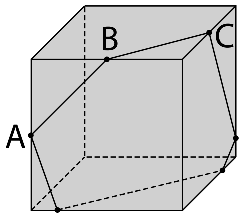
Welke van de volgende is de juiste doorsnede?



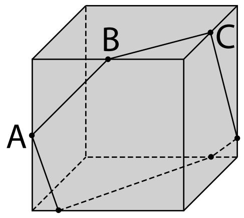
1



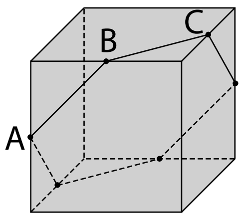
2



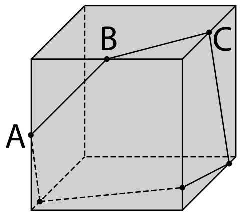
3



4



5



Oplossing

1, 2 en 5 hebben twee snijlijnen met het rechterzijvlak.

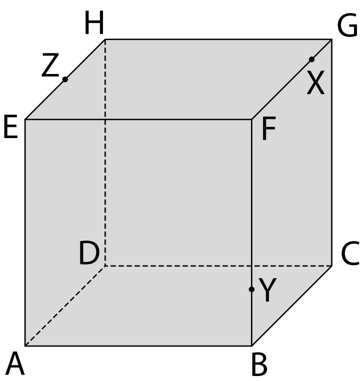
3 heeft twee snijlijnen met het voorvlak.

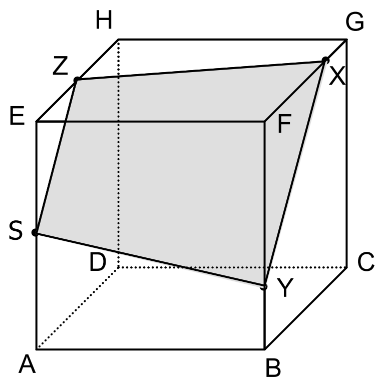
4 is de juiste doorsnede.

Opdracht 54 bladzijde 237

Teken de doorsnede van de kubus met $\text{vl}(X, Y, Z)$.

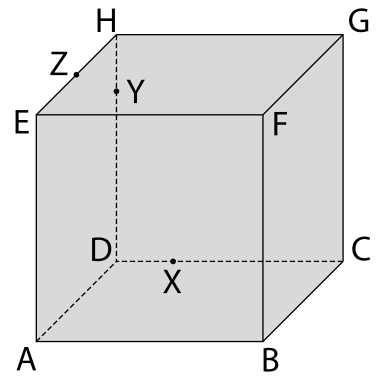
1

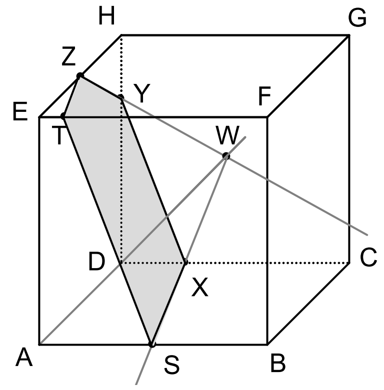




ZSYX is de doorsnede met ZS // XY.

2

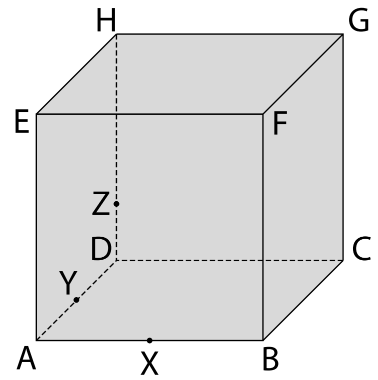


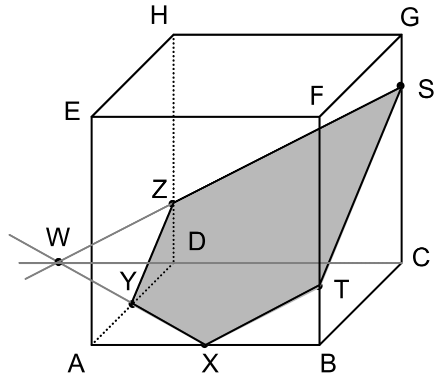


Construeer eerst het snijpunt W van YZ en het grondvlak (op AD).

De doorsnede is XYZTS.

3

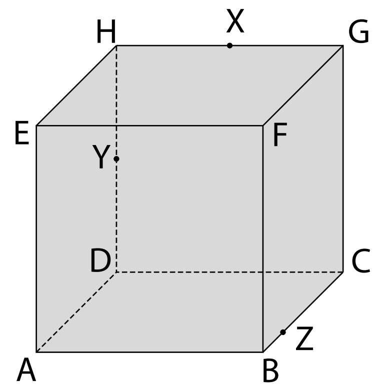


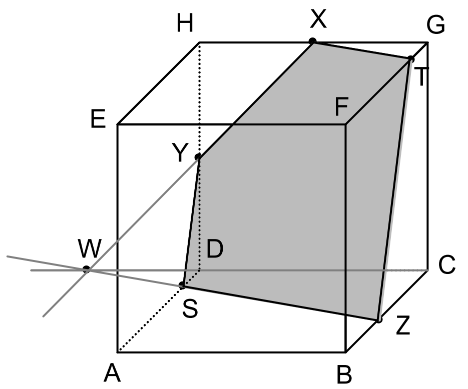


Construeer eerst het snijpunt W van XY en het achtervlak (op DC).

De doorsnede is XTSZY.

4

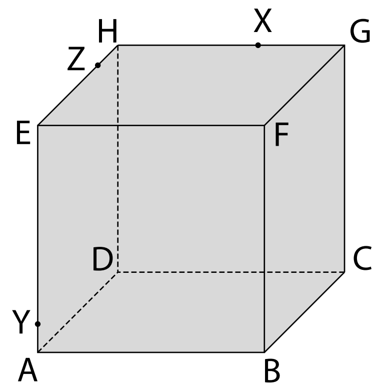


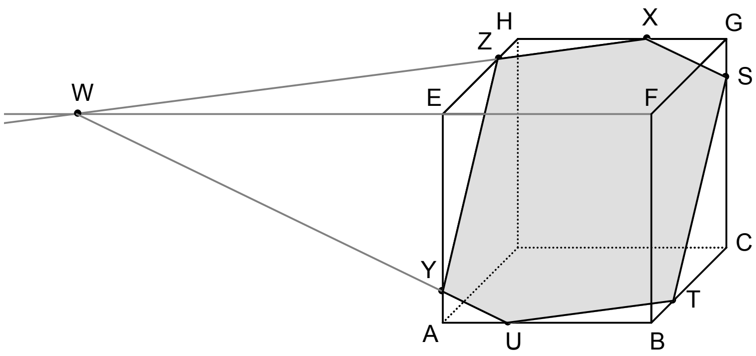


Construeer eerst het snijpunt W van XY en het grondvlak (op DC).

De doorsnede is XYSZT.

5

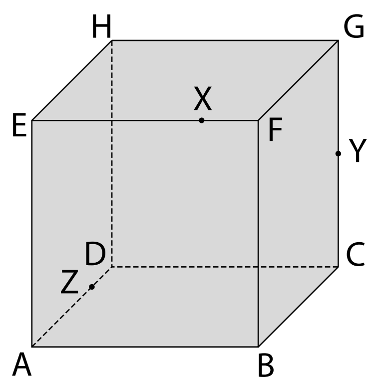


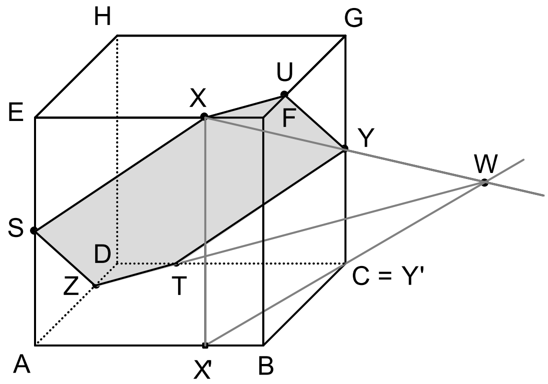


Construeer eerst het snijpunt W van XZ en het voorvlak (op EF).

De doorsnede is XZYUTS.

6

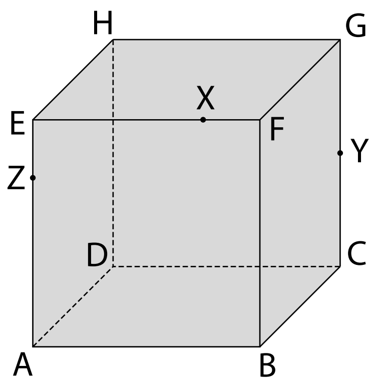


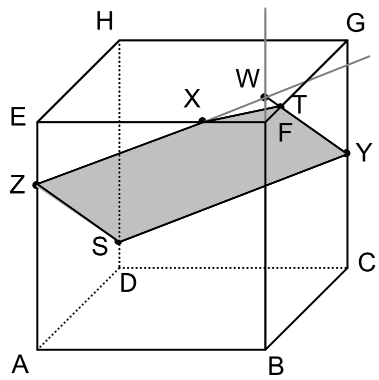


Construeer eerst het snijpunt W van XY en het grondvlak (op X’Y’).

De doorsnede is XSZTYU.

7

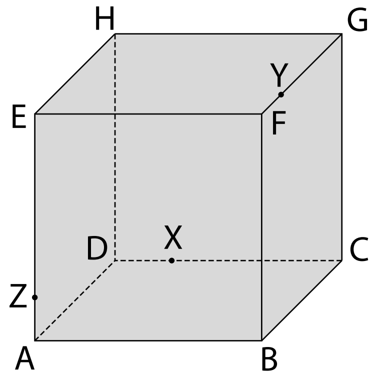


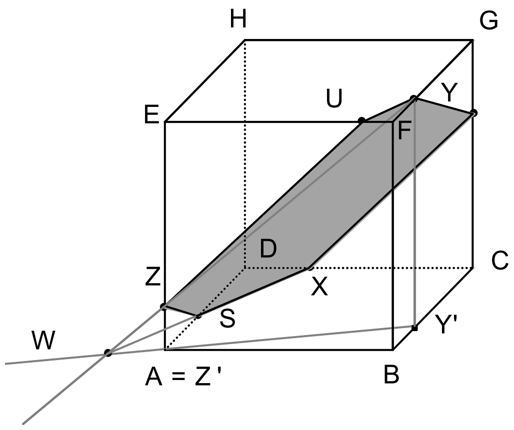


Construeer eerst het snijpunt W van ZX en het rechterzijvlak (op BF).

De doorsnede is XZSYT.

8

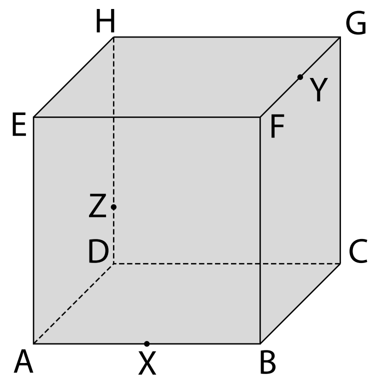


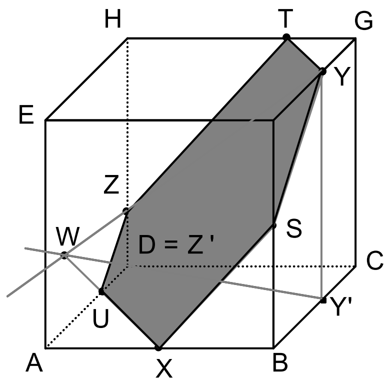


Construeer eerst het snijpunt W van YZ en het grondvlak (op Y’Z’).

De doorsnede is ZSXTYU.

9

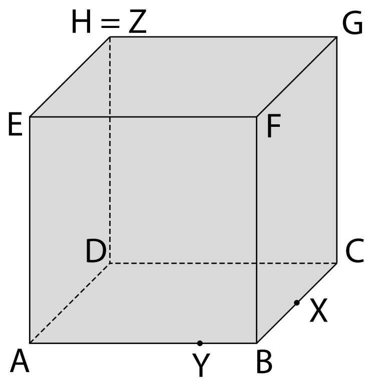


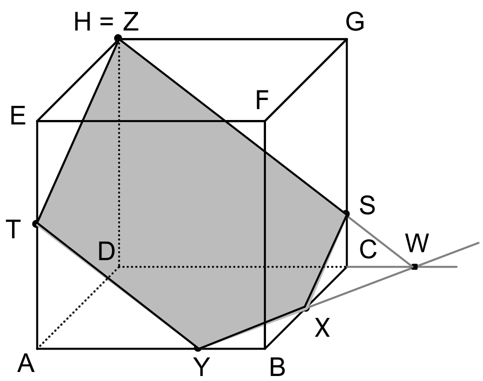


Construeer eerst het snijpunt W van YZ en het grondvlak (op Y’Z’).

De doorsnede is XSYTZU.

10





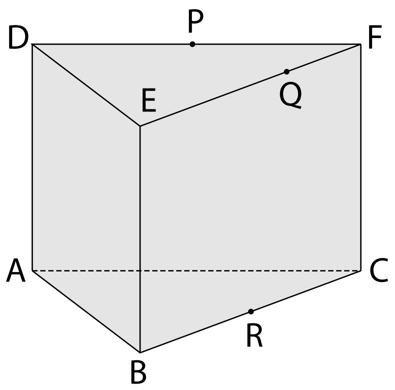
Construeer eerst het snijpunt W van YX en het achtervlak (op DC).

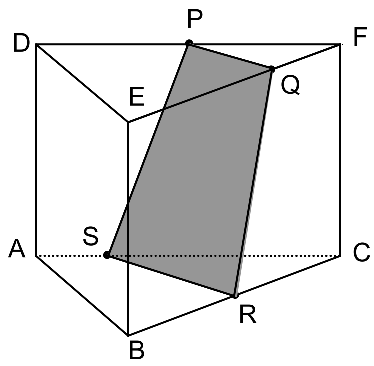
De doorsnede is ZTYXS.

Opdracht 55 bladzijde 238

Construeer de doorsnede van het prisma met $\mathrm{vl}(\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R})$.

1

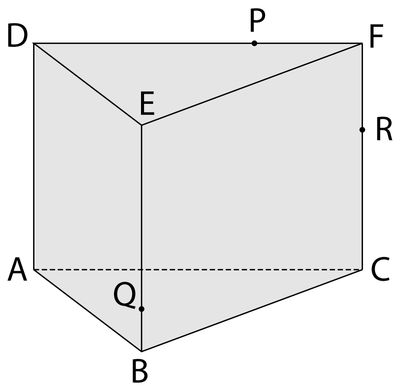


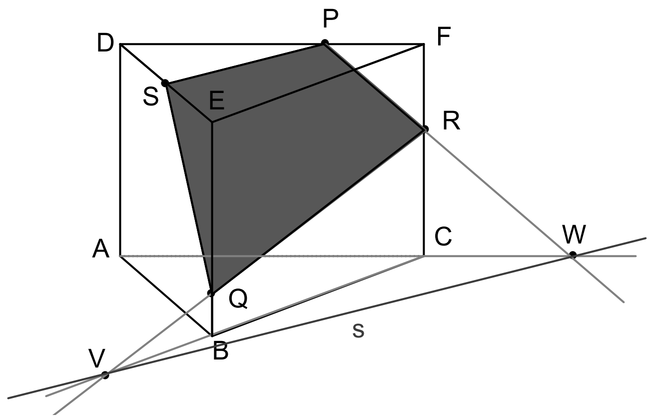


Teken in het grondvlak SR // PQ.

De doorsnede is PSRQ.

2





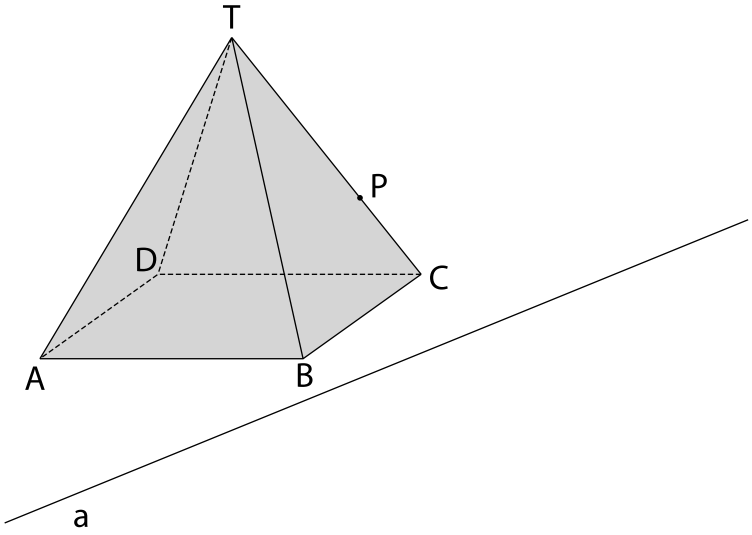
Teken de snijlijn $s = \mathrm{VW}$ van vl (P,Q,R) en het grondvlak.

De doorsnede is PSQR (met SP // s).

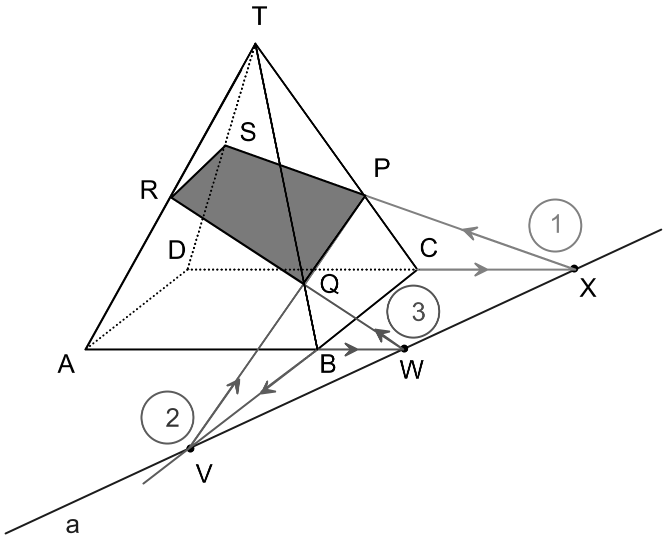
Opdracht 56 bladzijde 239

Construeer de doorsnede van de piramide met $\text{vl}(P, a)$ waarbij de rechte a in het grondvlak van de piramide ligt.

1

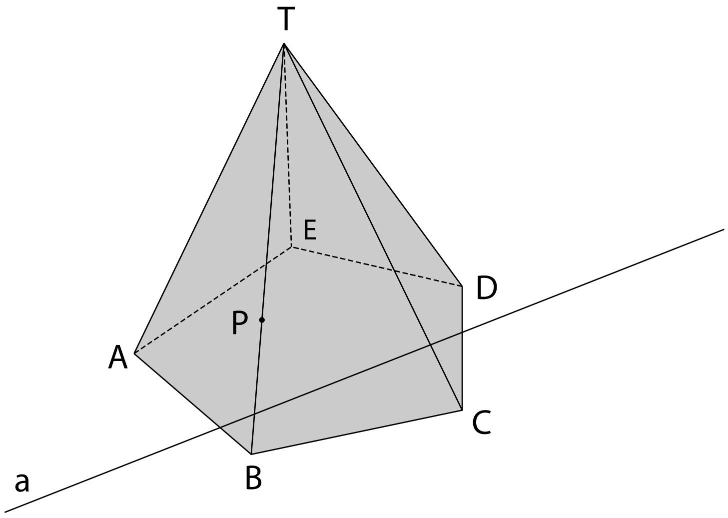


Oplossing

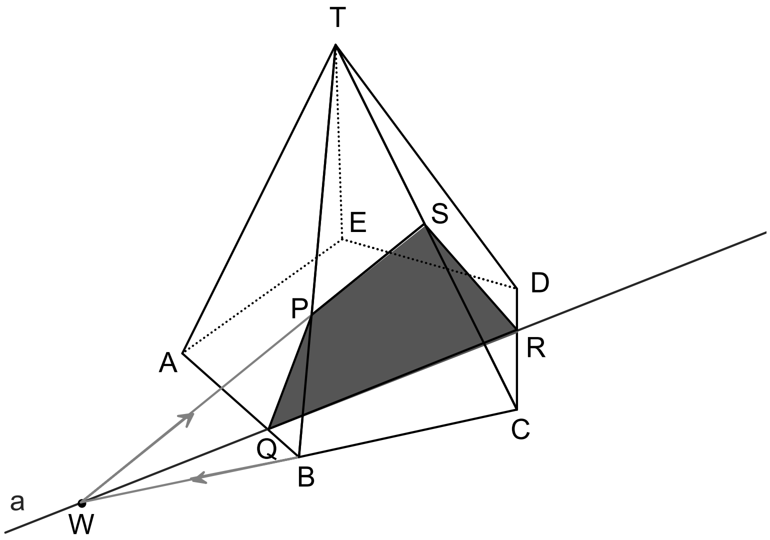


De doorsnede is RQPS.

2



Oplossing

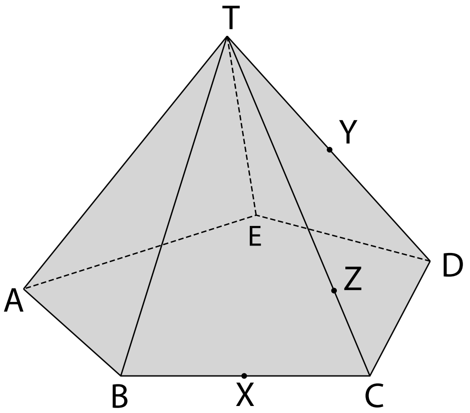


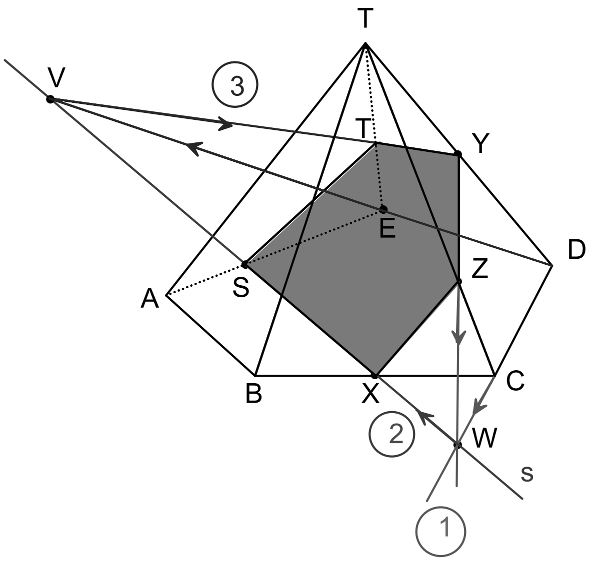
De doorsnede is PQRS.

Opdracht 57 bladzijde 240

Construeer de doorsnede van de piramide met $\text{vl}(X, Y, Z)$.

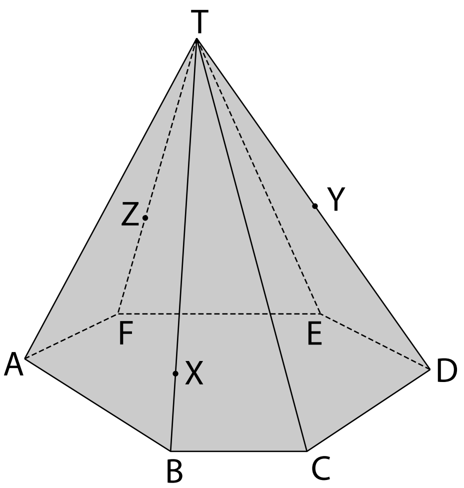
1

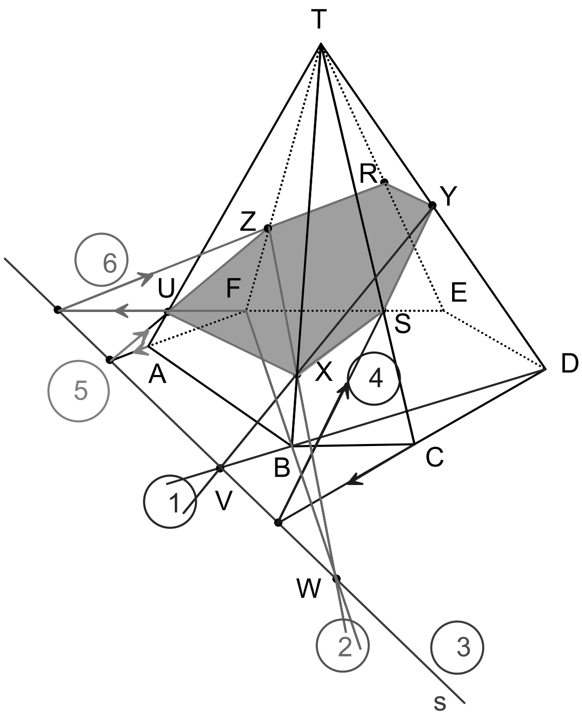




De doorsnede is XZYTS.

2

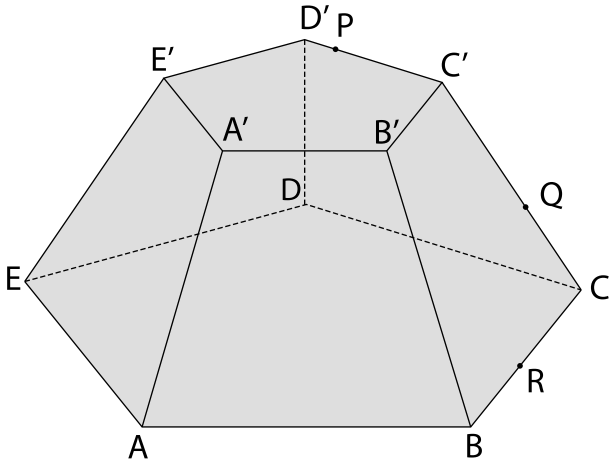




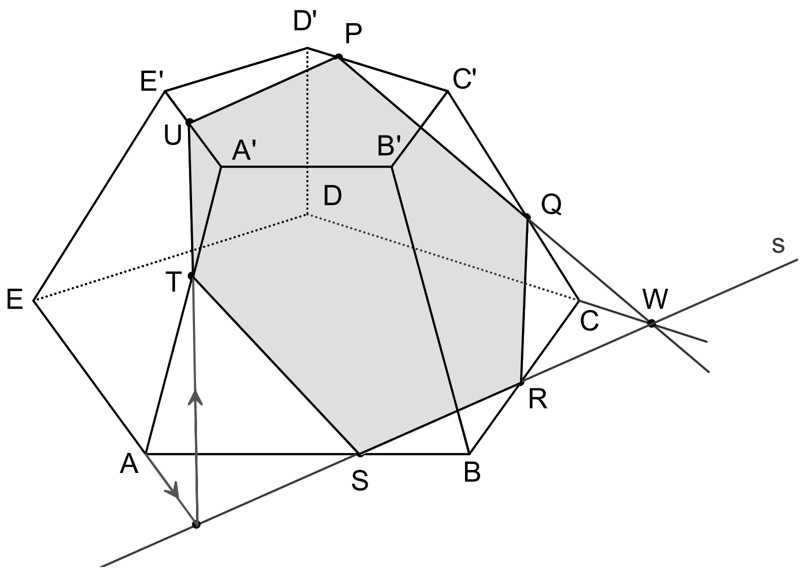
De doorsnede is XSYRZU.

Opdracht 58 bladzijde 240

In de figuur is een afgeknotte piramide met een vijfhoek als grondvlak getekend.
Het bovenvlak is evenwijdig met het grondvlak.
Construeer de doorsnede van deze afgeknotte piramide met $\text{vl}(P, Q, R)$.



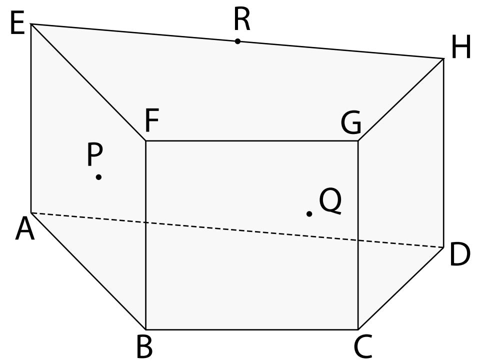
Oplossing



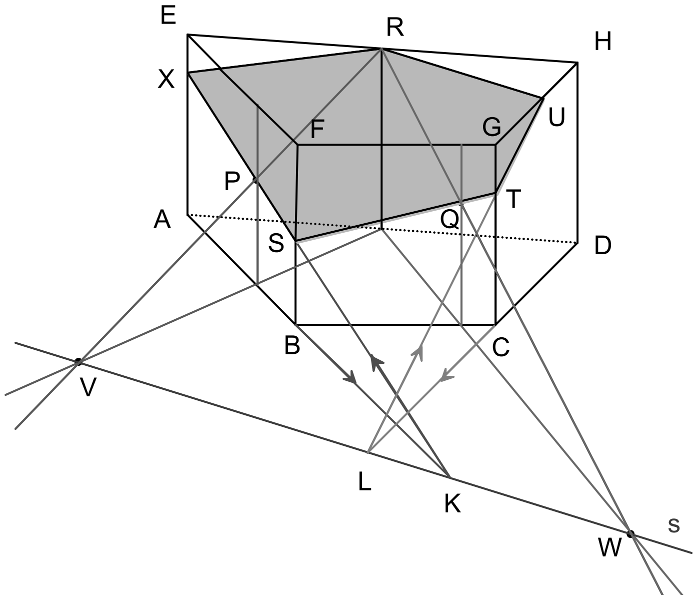
De doorsnede is PUTSRQ met UP // SR.

Opdracht 59 bladzijde 241

Construeer de doorsnede van het prisma met $\mathrm{vl}(P,Q,R)$ waarbij P ligt in $\mathrm{vl}(AB,EF)$ en Q in $\mathrm{vl}(BC,FG)$.



Oplossing



We construeren eerst de snijlijn $s = VW$ van vl(P,Q,R) en het grondvlak ABCD.

Hierbij is V het snijpunt van PR met het grondvlak. W is het snijpunt van RQ met het grondvlak.

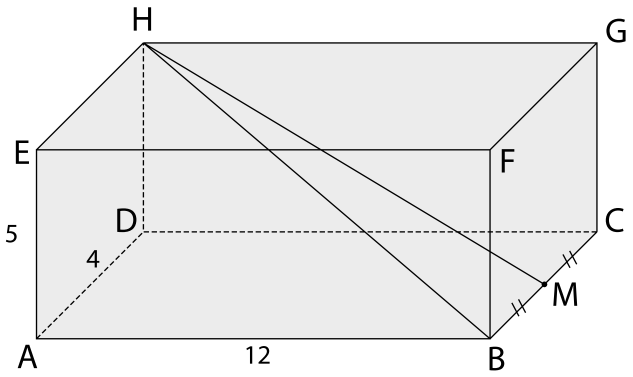
Het snijpunt van s en AB geeft het punt K die de snijlijn XS in vl(AB, EF) geeft.

Het snijpunt L van s en CD geeft de snijlijn TU in vl(CD, GH).

De doorsnede is XSTUR.

Opdracht 60 bladzijde 241

Bereken |BH| en |HM| in de balk.



Oplossing

- In ΔHAB is

$$|\text{HA}| = \sqrt{|\text{HE}|^2 + |\text{EA}|^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$|\text{AB}| = 12$$

zodat $|\text{HB}| = \sqrt{|\text{HA}|^2 + |\text{AB}|^2}$

$$= \sqrt{41 + 12^2}$$

$$= \sqrt{185}$$

- In ΔHCM is

$$|\text{HC}| = \sqrt{|\text{HG}|^2 + |\text{GC}|^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$$|\text{CM}| = 2$$

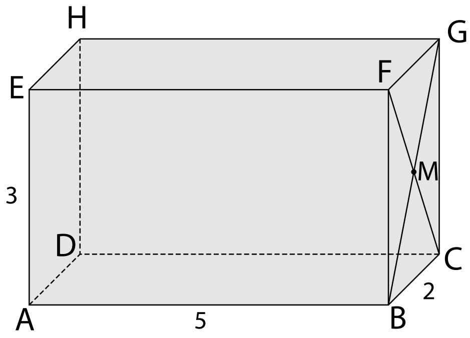
zodat $|\text{HM}| = \sqrt{|\text{HC}|^2 + |\text{CM}|^2}$

$$= \sqrt{13^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{173}$$

Opdracht 61 bladzijde 241

Gegeven een balk met lengte 5, breedte 2 en hoogte 3.



1	Welke rechte is de loodlijn uit G op $\text{vl}(A, D, E)$?

De rechte GH.

2	Bereken $\|CE\|$ en $\|ME\|$.

- In ΔCBE is

$$|EB| = \sqrt{|EA|^2 + |AB|^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

$$|BC| = 2$$

zodat $|EC| = \sqrt{|EB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{34 + 2^2} = \sqrt{38}$

- In ΔEFM is

$$|EF| = 5$$

$$|FM| = \frac{|FC|}{2} = \frac{\sqrt{|FB|^2 + |BC|^2}}{2} = \frac{\sqrt{3^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

zodat $|ME| = \sqrt{|EF|^2 + |FM|^2} = \sqrt{5^2 + \frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{113}}{2}$

3	Bereken de hoek tussen EM en EC.

In ΔEMC is $|EM| = \frac{\sqrt{113}}{2}$, $|EC| = \sqrt{38}$ en $|MC| = \frac{\sqrt{13}}{2}$ zodat (ZZZ)

$\widehat{AM, EC} = M\hat{E}C = 15°58'7"$.

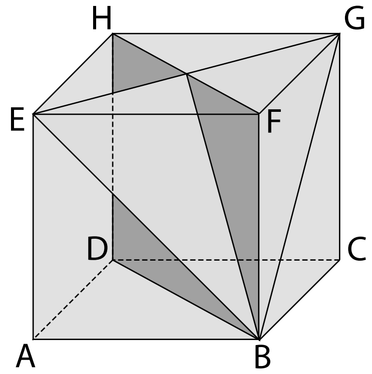
4	Bereken de hoek tussen EM en AB.

$\widehat{EM, AB} = \widehat{EM, EF}$ want EF // AB.

In ΔEFM is $|EF| = 5$, $|EM| = \frac{\sqrt{113}}{2}$ en $|FM| = \frac{\sqrt{13}}{2}$ zodat (ZZZ)

$\widehat{EM, EF} = M\hat{E}F = 19°49'37"$.

Opdracht 62 bladzijde 242



Verklaar waarom $vl(BD, HF)$ en $vl(B, E, G)$ in de kubus loodrecht op elkaar staan.

Oplossing

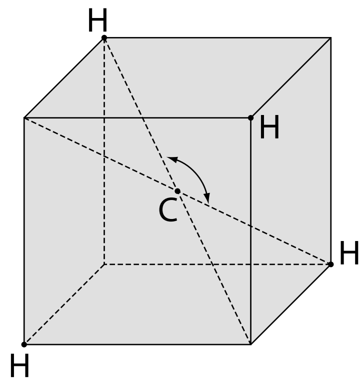
$$\begin{cases} EG \perp HF & \text{de diagonalen van het vierkant EFGH staan loodrecht op elkaar.} \\ EG \perp FB & FB \perp vl(EF, HG) \text{ en EG ligt in } vl(EG, HG) \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad EG \perp vl(BD, HF)$

Aangezien $vl(B, E, G)$ de loodlijn EG van $vl(BD, HF)$ omvat, geldt:

$vl(BD, HF) \perp vl(B, E, G)$.

Opdracht 63 bladzijde 242



Een molecule methaangas (CH_4) wordt gevormd door

- vier waterstofatomen, die hoekpunten van een kubus zijn, echter zo dat geen twee atomen op eenzelfde ribbe liggen;
- een koolstofatoom dat zich in het middelpunt van de kubus bevindt.

1	Waarom zijn de vier waterstofatomen de hoekpunten van een regelmatig viervlak?

De 6 ribben van het viervlak zijn allemaal zijvlaksdiagonalen van de kubus. Deze zijn alle even lang zodat het viervlak regelmatig is.

2	De hoek waaronder men twee waterstofatomen ziet vanuit het koolstofatoom, wordt de valentiehoek of bindingshoek van methaan genoemd. Bereken deze hoek.

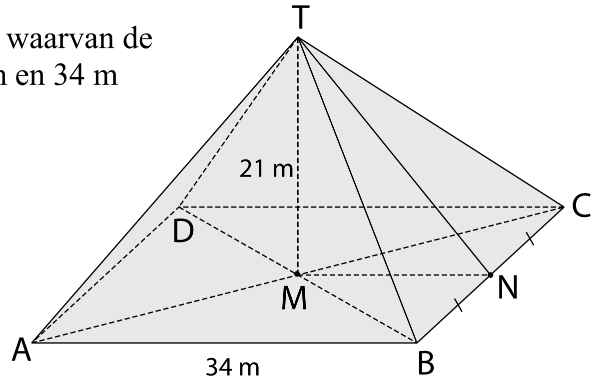
Alle kubussen zijn gelijkvormig.

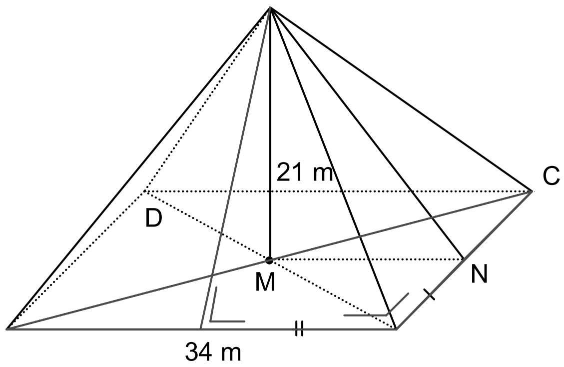
Kies de ribbe van de kubus dus gelijk aan 1.

Aangezien de hoek te zien is in een driehoek met zijden $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $\frac{\sqrt{3}}{3}$ is de hoek gelijk aan 109°28'16" (ZZZ).

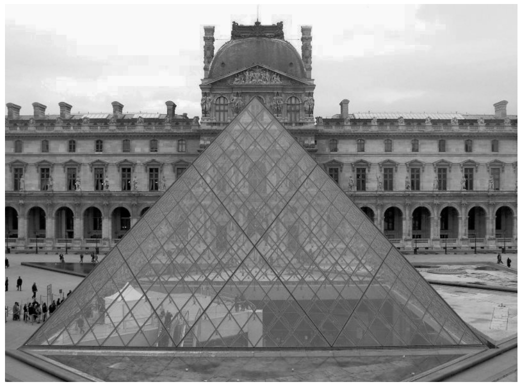
Opdracht 64 bladzijde 242

De piramide van het Louvre is een regelmatige piramide, waarvan de hoogte en de zijde van het grondvlak respectievelijk 21 m en 34 m bedragen.





Om de volgende vragen te kunnen beantwoorden is het noodzakelijk vooraf $|AM|$ en $|TA|$ te berekenen.



$$\text{In } \Delta ABC \text{ geldt}: |AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2}$$
$$= \sqrt{2 \cdot 34^2}$$
$$= \sqrt{2312} \approx 48{,}08$$

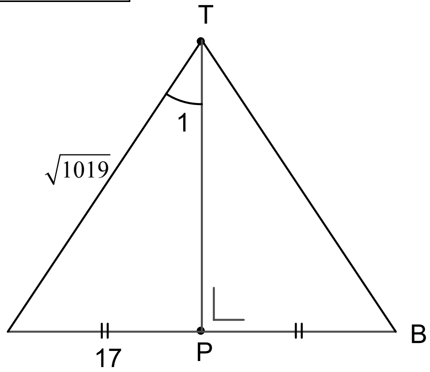
Hieruit volgt: $|AM| = \dfrac{1}{2}\sqrt{2312} \approx 24{,}04$

In ΔATM geldt $\left(TM \perp \text{grondvlak, dus } TM \perp AM\right)$:

$$|TA| = \sqrt{|TM|^2 + |AM|^2}$$
$$= \sqrt{21^2 + \frac{2312}{4}}$$
$$= \sqrt{1019} \approx 31{,}92$$

1 Bereken de hoek $A\hat{T}B$ tussen twee opeenvolgende opstaande ribben.

$$\text{In } \Delta TAP \text{ geldt}: \sin \hat{T}_1 = \frac{17}{\sqrt{1019}}$$
$$\Downarrow$$
$$\hat{T}_1 = 32{,}178°$$
$$\Downarrow$$
$$A\hat{T}B = 64{,}356° = 64°21'22''$$



2 Bereken de hoek $A\hat{T}C$ tussen twee niet-opeenvolgende opstaande ribben.

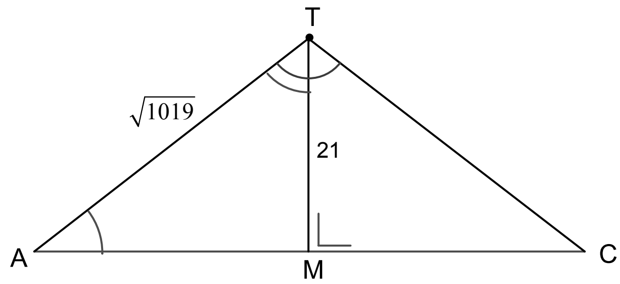
In ΔTAM geldt : $\cos A\hat{T}M = \dfrac{21}{\sqrt{1019}}$

$$\Downarrow$$

$$A\hat{T}M = 48{,}86°$$

$$\Downarrow$$

$$A\hat{T}C = 97{,}73° = 97°43'36''$$



3 $T\hat{A}M$ is de hellingshoek van de opstaande ribbe $[TA]$ t.o.v. het grondvlak. Bereken deze hoek.

In ΔTAM geldt : $\sin T\hat{A}M = \dfrac{21}{\sqrt{1019}}$

$$\Downarrow$$

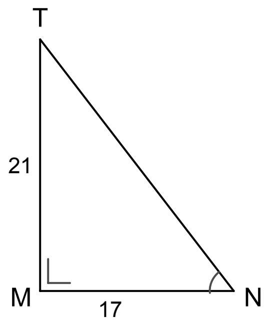
$$T\hat{A}M = 41°8'12''$$

4 $T\hat{N}M$ is de hellingshoek van het zijvlak TCB t.o.v. het grondvlak. Bereken deze hoek.

In ΔTNM geldt : $\tan T\hat{N}M = \dfrac{21}{17}$

$$\Downarrow$$

$$T\hat{N}M = 51°32''$$



5 Waarom is $vl(T,M,N)$ een loodvlak op de rechte BC?

In ΔTBC is TN zwaartelijn en hoogtelijn.

Dus $BC \perp TN$.

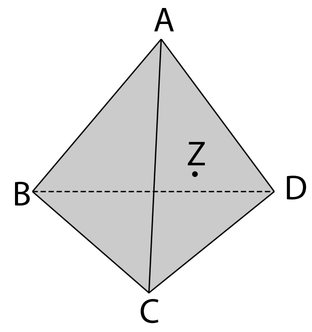
In het grondvlak geldt: $BC \perp AB$ en dus ook $BC \perp MN$.

BC staat dus loodrecht op twee snijdende rechten (MN en TN) van vl(T,M,N).

Bijgevolg: $BC \perp vl(T,M,N)$.

Opdracht 65 bladzijde 243

1 ABCD is een regelmatig viervlak. De ribben hebben a als lengte. Bereken de lengte van de kortste weg die een mier moet afleggen om van B naar het zwaartepunt Z van het zijvlak ACD te kruipen.

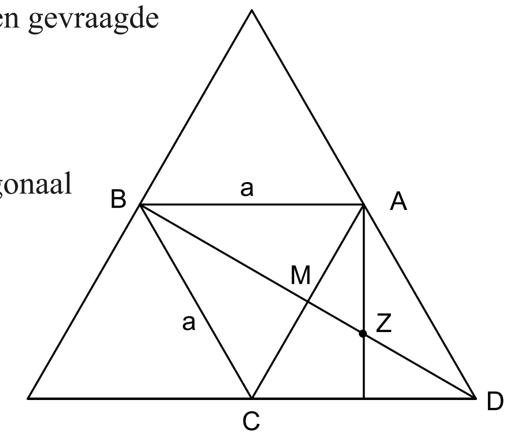


We ontwikkelen het regelmatig viervlak.

In deze ontwikkeling is de rechte verbinding van B naar Z een gevraagde kortste weg.

In de ruit ABCD delen de diagonalen elkaar middendoor.

DM is dus en zwaartelijn in ΔACD en Z ligt dus op de diagonaal [BD].



In ΔABM geldt : $\sin \widehat{A} = \dfrac{|BM|}{|AB|}$

$$\Downarrow$$

$$|BM| = a \cdot \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Omdat M het midden is van [BD] geldt dus ook $|DM| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

In een driehoek verdeelt het zwaartepunt elke zwaartelijn in stukken die zich verhouden als 1 en 2. Bijgevolg geldt: $|MZ| = \dfrac{1}{3}|MD| = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

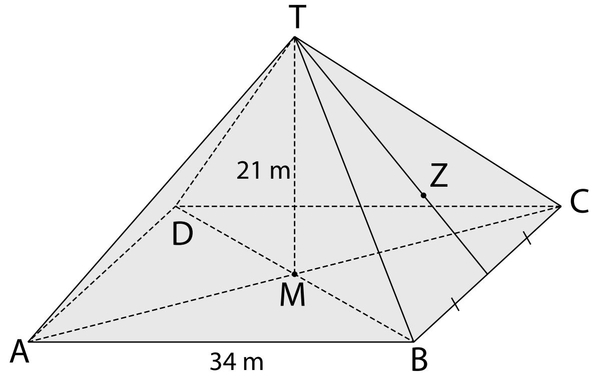
Besluit: $|BZ| = |BM| + |MZ| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} + \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

De lengte van de kortste weg is dus $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

<u>Opmerking</u>

In onze redenering kroop de mier van B naar Z over de zijvlakken ABC en ACD. Ze kan ook van B naar Z via de zijvlakken BCD of BAD en ACD. In deze gevallen blijven de redenering en het resultaat hetzelfde.

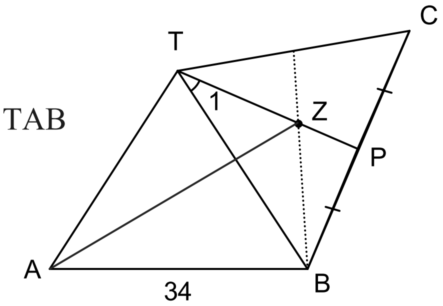
2	Bereken die kortste weg, als de mier zich op de piramide van het Louvre van het hoekpunt A in het grondvlak wil verplaatsen naar het zwaartepunt Z van het zijvlak TBC.



Voor de kortste weg moet de mier in de zijvlakken TAB en TBC kruipen, ofwel in het grondvlak en het zijvlak TBC.

Op een tekening (op schaal 1:1000) zien we dat de kortste weg verloopt over de zijvlakken TAB en TBC.

We berekenen deze weg.



- We draaien het zijvlak TBC over TB tot het in het vlak TAB valt. De kortste weg van A naar Z is |AZ|.

  In ΔATZ is $|TA| = \sqrt{1019}$ (zie opdracht 64) $\qquad (1)$

  $|TZ| = \dfrac{2}{3}|TP|$ en $A\hat{T}Z = 3 \cdot \hat{T}_1$ kunnen we berekenen. Dan

  is ΔATZ volledig bepaald (ZHZ) en kunnen we dus $|AZ|$ bepalen.

- We berekenen $|TZ|$.

  Uit opdracht 64 weten we $|TA| = \sqrt{1019} = |TB| = |TC|$

  In ΔTBP geldt: $|TP|^2 = |TB|^2 - |BP|^2$

  $$= 1019 - 17^2$$
  $$= 730$$
  $$|TP| = \sqrt{730}$$
  $$|TZ| = \frac{2}{3}|TP| = \frac{2}{3}\sqrt{730} \qquad (2)$$

- We berekenen $A\hat{T}Z$.

  In ΔTBP geldt ook: $\sin \hat{T}_1 = \dfrac{|BP|}{|TB|} = \dfrac{17}{\sqrt{1019}}$

  $$\Downarrow$$
  $$\hat{T}_1 = 32{,}178°$$
  $$A\hat{T}Z = 3 \cdot \hat{T}_1 = 96{,}534°$$
  $$= 96°32'3'' \qquad (3)$$

- In ΔATZ geldt nu volgens de cosinusregel:

$$\begin{aligned} |AZ|^2 &= |AT|^2 + |TZ|^2 - 2\cdot|AT|\cdot|TZ|\cdot\cos A\hat{T}Z \\ &= 1019 + \frac{4}{9}\cdot 730 - 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{1019}\cdot\sqrt{730}\cdot\cos 96°32'3" \qquad (\text{zie } (1),\ (2) \text{ en } (3)) \\ &= 1474,30 \\ |AZ| &= 38,4 \end{aligned}$$

De kortste weg is 38,4 m.

Opmerking

We kunnen ook de kortste weg over het grondvlak ABCD en het zijvlak TBC berekenen.

- We draaien het zijvlak TBC rond BC tot het in $vl(A, B, C)$ valt.

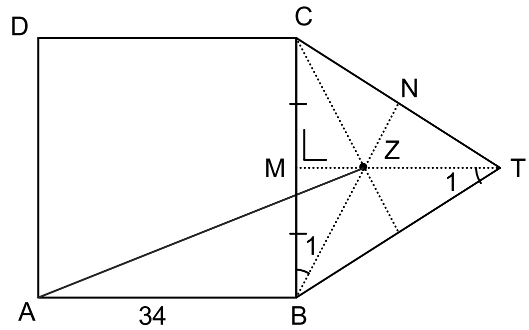
  De kortste weg van A naar Z is in dit geval |AZ|.

  In ΔABZ is $|BZ| = \frac{2}{3}|BN|$ en $A\hat{B}Z = 90° + \hat{B}_1$.

  We weten (opdracht 64): $|TB| = |TC| = \sqrt{1019}$.

  ΔABZ is volledig bepaald (ZHZ) als we

  $|AB| = 34$, $|BZ|$ en $A\hat{B}Z$ kennen. $\qquad (1)$



- We berekenen $|BZ|$.

  In ΔBMT geldt: $\sin\hat{T}_1 = \frac{|BM|}{|BT|} = \frac{17}{\sqrt{1019}}$

$$\Downarrow$$
$$\hat{T}_1 = 32,178°$$
$$\Downarrow$$
$$B\hat{T}C = 2\cdot\hat{T}_1 = 64,356° = 64°21'22"$$

  cosinusregel in ΔBNT:

$$\begin{aligned} |BN|^2 &= |BT|^2 + |NT|^2 - 2\cdot|BT|\cdot|NT|\cdot\cos B\hat{T}C \\ &= 1019 + \frac{1019}{4} - 2\cdot\sqrt{1019}\cdot\frac{\sqrt{1019}}{2}\cdot\cos 64°21'22" \\ &= 832,75 \\ |BN| &= 28,86 \end{aligned}$$

$$|BZ| = \frac{2}{3}|BN| = 19,24 \qquad (2)$$

- We berekenen $A\hat{B}Z$.

  In ΔBCN geldt:

  $$|CN|^2 = |BC|^2 + |BN|^2 - 2\cdot|BC|\cdot|BN|\cdot\cos\hat{B}_1$$
  $$\frac{1019}{4} = 34^2 + 832,75 - 2\cdot 34\cdot\sqrt{832,75}\cdot\cos\hat{B}_1$$
  $$\cos\hat{B}_1 = \frac{1734}{1962,23} = 0,88366$$
  $$\Downarrow$$
  $$\hat{B}_1 = 27°54'49''$$

  Bijgevolg, $A\hat{B}Z = 90° + \hat{B}_1 = 117°54'49''$ $\quad(3)$

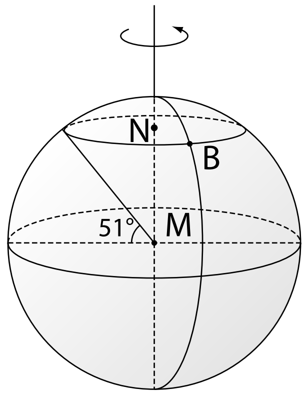
- In ΔABZ geldt nu volgens de cosinusregel:

  $$\begin{aligned}|AZ|^2 &= |AB|^2 + |BZ|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|BZ|\cdot\cos A\hat{B}Z\\ &= 34^2 + 19,24^2 - 2\cdot 34\cdot 19,24\cdot\cos 117°54'49'' \qquad (\text{zie } (1),\ (2) \text{ en } (3))\\ &= 2138,65\\ |AZ| &= 46,25\end{aligned}$$

Deze weg is 46,25 m.

Deze afstand is groter dan 38,4 over de zijvlakken TAB en TBC zodat dit niet de kortste weg is.

Opdracht 66 bladzijde 244



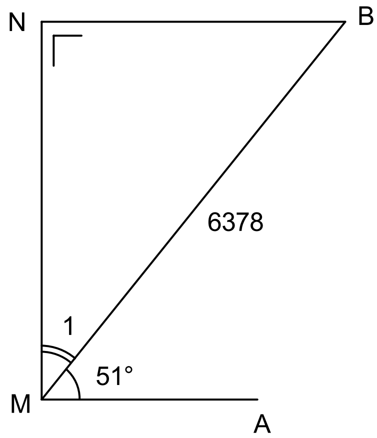
Brussel ligt op 51° NB en dus op de 51e breedtecirkel.
Bereken de omtrek van deze breedtecirkel.
De straal van de aarde bedraagt 6378 km.

De aardas gaat door het middelpunt van de aarde en de middelpunten van de breedtecirkels en staat loodrecht op de vlakken waarin deze breedtecirkels liggen.

Oplossing

Omdat MN loodrecht staat op het vlak waarin de 51^{ste} breedtecirkel ligt, geldt: $MN \perp NB$.

In de rechthoekige driehoek NMB vinden we:



$$\sin \widehat{M}_1 = \frac{|NB|}{|MB|}$$

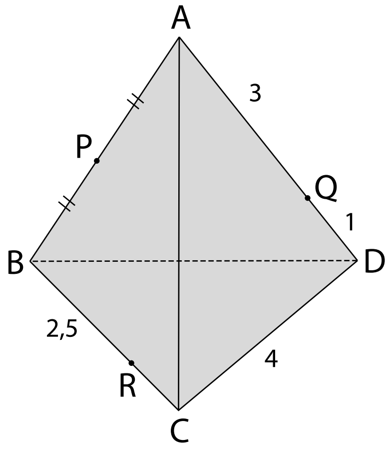
$$\Downarrow$$

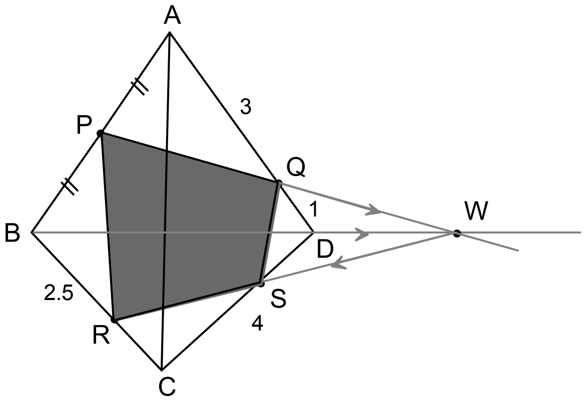
$$\begin{aligned} |NB| &= |MB| \cdot \sin \widehat{M}_1 \\ &= 6378 \cdot \sin 39° \\ &= 4013,81 \end{aligned}$$

De omtrek van de 51^{ste} breedtecirkel is: $2\pi \cdot |NB| = 25\,219,5 \text{ km}$.

Opdracht 67 bladzijde 244

1 Construeer de doorsnede PQRS van het regelmatig viervlak ABCD met het snijvlak PQR.

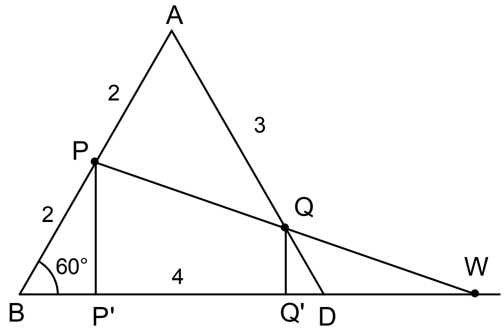




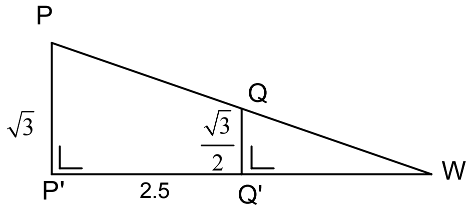
2 Bereken $|DS|$.

$|PP'| = 2 \cdot \sin 60° = \sqrt{3}$ $\qquad$ $|QQ'| = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$|BP'| = 2 \cdot \cos 60° = 1$ $\qquad$ $|Q'D| = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

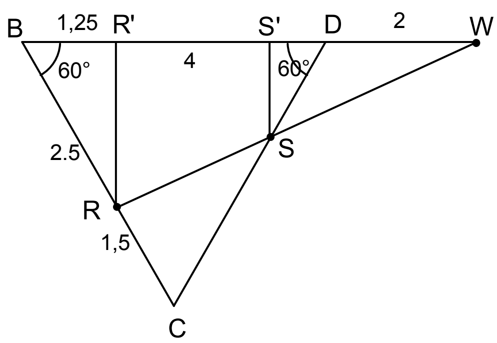


$$\Delta PP'W \sim \Delta QQ'W \qquad (HH)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{|PP'|}{|QQ'|} = \frac{|P'W|}{|Q'W|}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{2}{1} = \frac{2,5 + |Q'W|}{|Q'W|} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot |Q'W| = 2,5 + |Q'W|$$
$$\Rightarrow \quad |Q'W| = 2,5$$



$$|DW| = |Q'W| - |Q'D| = 2,5 - 0,5 = 2$$

$$\tan 60° = \frac{|SS'|}{|DS'|} \text{ en } \frac{|SS'|}{|RR'|} = \frac{2 + \frac{|SS'|}{\sqrt{3}}}{4,75}$$

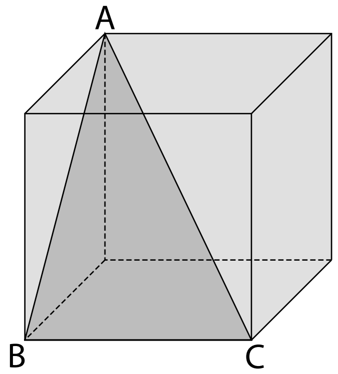


$$4,75 \cdot |SS'| = 2,5\sqrt{3} + 1,25 \cdot |SS'| \quad \Rightarrow \quad 3,5 \cdot |SS'| = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \quad |SS'| = \frac{5}{7}\sqrt{3}$$

$$|DS| \text{ uit } \sin 60° = \frac{|SS'|}{|DS|} \quad \Rightarrow \quad |DS| = \frac{5 \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{7\sqrt{3}} = \frac{10}{7} \approx 1,429$$

Herhalingsopdracht 68 bladzijde 245

Gegeven een kubus.
Welke uitspraak over ΔABC is correct?



A Hij is gelijkbenig en stomp.
B Hij is gelijkbenig en scherp.
C Hij is gelijkbenig en rechthoekig.
D Hij is rechthoekig met drie verschillende zijden.
E Hij is noch gelijkbenig, noch rechthoekig.

Oplossing

Bij een kubus met ribbe a is

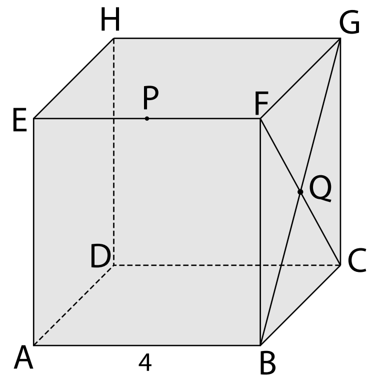
$|AB| = a\sqrt{2}$, $|BC| = a$ en $|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = a\sqrt{3}$ aangezien $BC \perp AB$

De driehoek ABC is dus rechthoekig met drie verschillende zijden.

Antwoord D is het juiste antwoord.

Herhalingsopdracht 69 bladzijde 245

In een kubus met ribbe 4 is P het midden van [EF] en Q het snijpunt van BG en CF.



1 Bepaal de onderlinge ligging van de rechten a PQ en EC b AG en HQ Geef ook een verklaring.

a PQ // EC, want

$$\left.\begin{array}{l}\text{P is het midden van } [EF] \\ \text{S is het midden van } [FC]\end{array}\right\} \Rightarrow [PQ] \text{ is middenparallel van } \Delta EFC \Rightarrow PQ \,/\!/\, EC$$

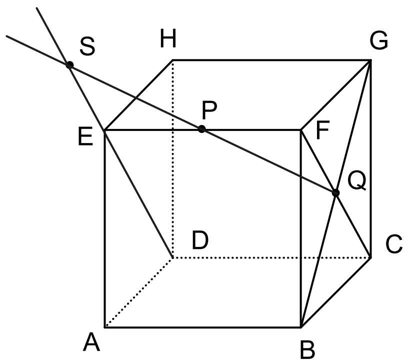
b AG en HQ zijn snijdende rechten, want

- ze zijn coplanair. Ze liggen namelijk in het diagonaalvlak ABGH;
- ze zijn niet evenwijdig getekend en dus niet evenwijdig.

2 Wat is de onderlinge ligging van PQ met
a $\text{vl}(D, C, F)$?
b $\text{vl}(A, D, H)$?
Construeer het snijpunt in het geval PQ (één van) deze vlakken snijdt.

a PQ ligt in $\text{vl}(D, C, F)$

b PQ snijdt $\text{vl}(A, D, H)$ in het punt S op ED.



3 Welke rechte is de snijlijn van $\text{vl}(D, P, Q)$ en $\text{vl}(H, D, B)$?

De snijlijn is DF.

4 Bereken de zijden en de hoeken van de driehoek DPQ.

- $|DP|$ in ΔDEP met $|EP| = 2$ en $|ED| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

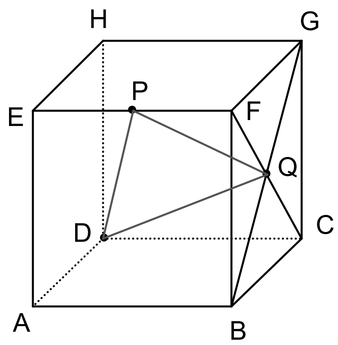
  $\Rightarrow \quad |DP| = \sqrt{|EP|^2 + |ED|^2} = \sqrt{2^2 + 16 \cdot 2} = 6$

- $|PQ|$ in ΔPFQ met $|PF| = 2$ en $|FQ| = \dfrac{|FC|}{2} = 2\sqrt{2}$

  $\Rightarrow \quad |PQ| = \sqrt{|PF|^2 + |FQ|^2} = \sqrt{2^2 + 4 \cdot 2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

- $|DQ|$ in ΔDCQ met $|DC| = 4$ en $|CQ| = |FQ| = 2\sqrt{2}$

  $\Rightarrow \quad |DQ| = \sqrt{|DC|^2 + |CQ|^2} = \sqrt{4^2 + 4 \cdot 2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$



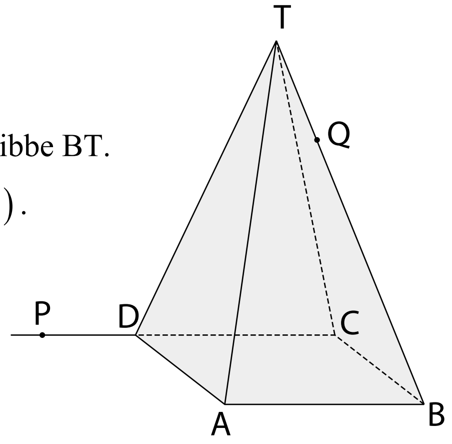
- Via het programma ZZZ (of met de cosinusregel) vinden we

  $\widehat{D} = 35°15'52''$, $\widehat{P} = 54°44'8''$ en $\widehat{Q} = 90°$.

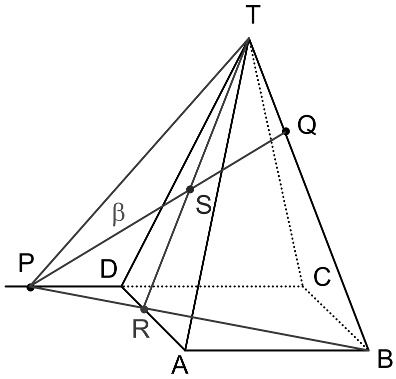
Herhalingsopdracht 70 bladzijde 245

Beschouw de piramide met grondvlak ABCD en top T.
Op het verlengde van de ribbe CD ligt P en Q ligt op de ribbe BT.

Construeer het snijpunt S van de rechte PQ en $\mathrm{vl}(A, D, T)$.



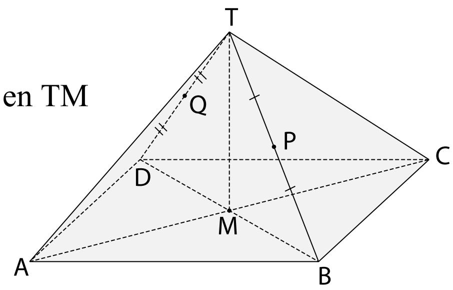
Oplossing



- Kies als als hulpvlak $\beta = \mathrm{vl}(P, TB)$.
- De snijlijn van $\mathrm{vl}(A, D, T)$ en β is TR met R op AD.
- Het gevraagde punt S is het snijpunt van PQ en TR.

Herhalingsopdracht 71 bladzijde 246

TABCD is een regelmatige piramide (ABCD is een vierkant en TM staat loodrecht op het grondvlak).



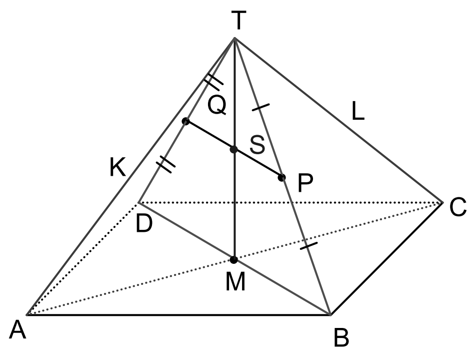
1 Welke rechten door twee hoekpunten kruisen TD?

De rechten AB, BC en AC

2 BD en TC zijn kruisende rechten. Er bestaat een rechte door A die deze twee rechten snijdt. Welke?

De rechte AC

3 P en Q zijn de middens van respectievelijk [TB] en [TD]. Bepaal het snijpunt S van PQ met $\mathrm{vl}(T, A, C)$.



- Hulpvlak door PQ: $\mathrm{vl}(T, B, D)$
- Snijlijn hulpvlak (T, B, D) en snijvlak (T, A, C): TM
- S is het snijpunt van TM en PQ.

4 Waarom zijn TC en PQ kruisende rechten?

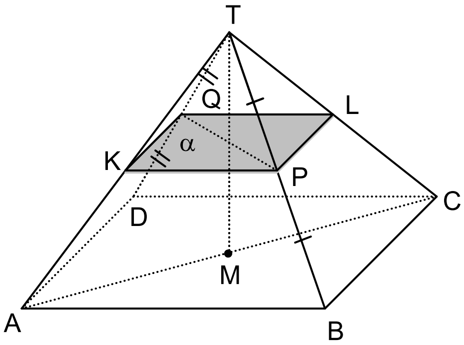
Omdat Q niet behoort tot $\text{vl}(\text{T}, \text{P}, \text{C})$ zodat TC en PQ niet coplanair, dus kruisend zijn.

5 Er bestaat ook een rechte door A die TC en PQ snijdt. Welke?

AS want:

- AS snijdt PQ in S
- snijdt TC omdat AS en TC in $\text{vl}(\text{T}, \text{A}, \text{C})$ liggen en niet evenwijdig getekend, dus niet evenwijdig zijn.

6 Construeer de doorsnede van de piramide met een vlak α dat door PQ gaat en evenwijdig is met het grondvlak.

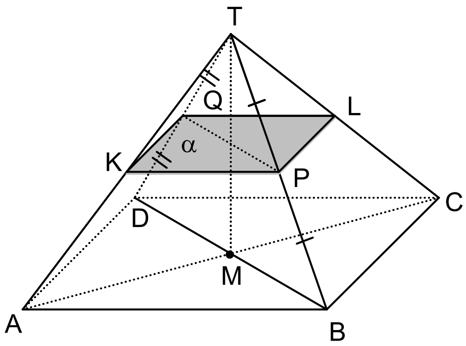


Noem de doorsnede PKQL.

Hierbij is KP // AB als snijlijnen van de evenwijdige vlakken α en $\text{vl}(\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D})$ met het zijvlak $(\text{T}, \text{A}, \text{B})$.

Om een analoge reden geldt: KQ // AD, QL // DC en PL // BC.

7 Bereken de inhoud van de afgeknotte piramide met die doorsnede als bovenvlak en ABCD als grondvlak, als $\lvert \text{AB} \rvert = 8$ en $\lvert \text{TM} \rvert = 7$.



Noem I de gevraagde inhoud.

$$\begin{aligned} \text{I} &= \text{inhoud TABCD} - \text{inhoud TPKQL} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \lvert \text{TM} \rvert \cdot \text{opp. ABCD} - \frac{1}{3} \cdot \lvert \text{TS} \rvert \cdot \text{opp. PKQL} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 8^2 - \frac{1}{3} \cdot \lvert \text{TS} \rvert \cdot \text{opp. PKQL} \qquad (*) \end{aligned}$$

We moeten dus nog $\lvert \text{TS} \rvert$ en opp. PKQL bepalen.

- Omdat P het midden is van [TB] en KP // AB is [KP] een middenparallel in ΔTAB.

  Bijgevolg: $\lvert \text{KP} \rvert = \frac{1}{2} \lvert \text{AB} \rvert = 4$

  Op analoge manier vinden we: $\lvert \text{PL} \rvert = \lvert \text{LQ} \rvert = \lvert \text{QK} \rvert = 4$.

  PKQL is dus een vierkant met zijde 4.

  Dus opp. $\text{PKQL} = 4^2 = 16$

- PQ // BD als snijlijnen van de evenwijdige vlakken α en ABCD en $\text{vl}(T,B,D)$.

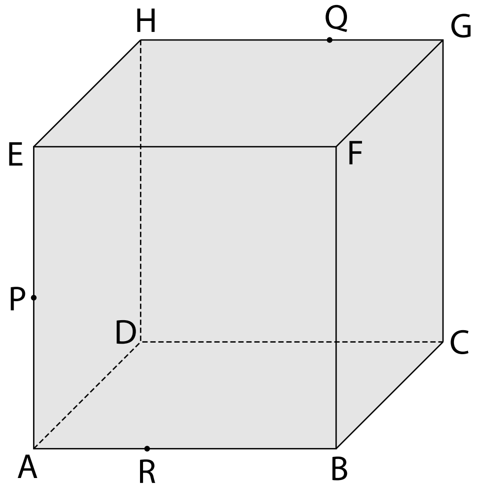
  Omdat P het midden is van [TB] is dus [PS] een middenparallel in ΔTBM.

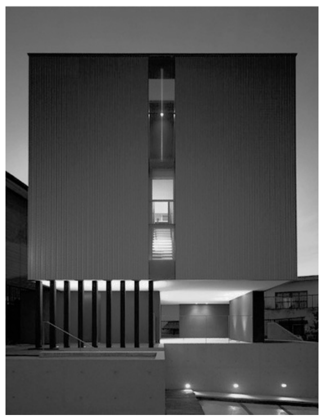
  S is bijgevolg heet midden van [TM] of $|TS| = \frac{7}{2}$.

Uit $(*)$ volgt nu: $I = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 8^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} \cdot 16 = \frac{392}{3}$

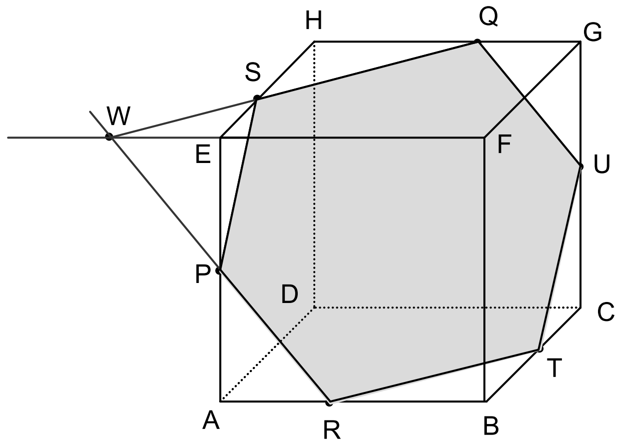
Herhalingsopdracht 72 bladzijde 246

Construeer de doorsnede van de kubus met $\text{vl}(P,Q,R)$.





Oplossing



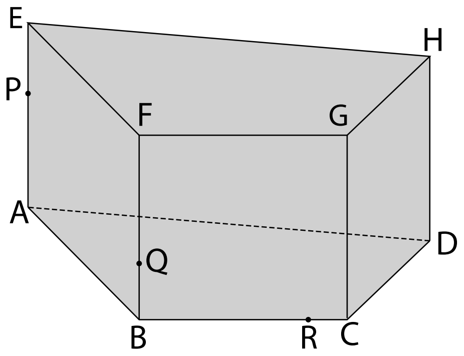
Construeer eerst het snijnpunt W van PR met het bovenvlak (op EF).

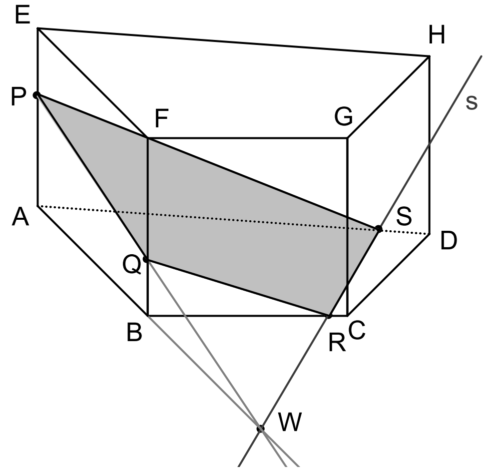
De doorsnede is PRTUQS.

Herhalingsopdracht 73 bladzijde 247

Construeer de doorsnede van het prisma met $\text{vl}(P, Q, R)$.

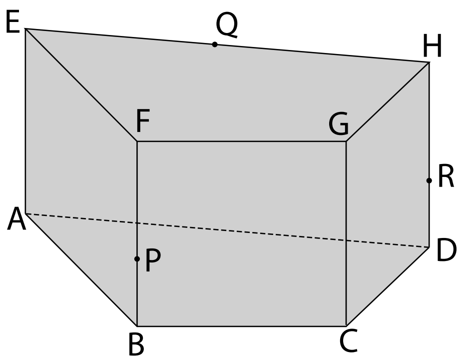
1

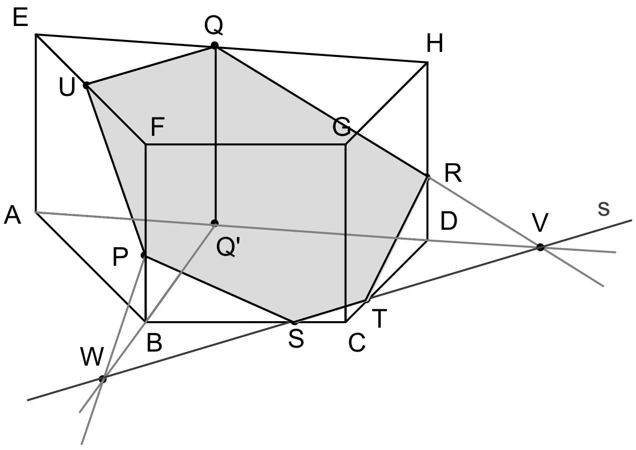




De doorsnede is PQRS.

2





De doorsnede is PSTRQU.