

Hoofdstuk 1

De cirkel

1.1 Middellijn, koorde en apothema

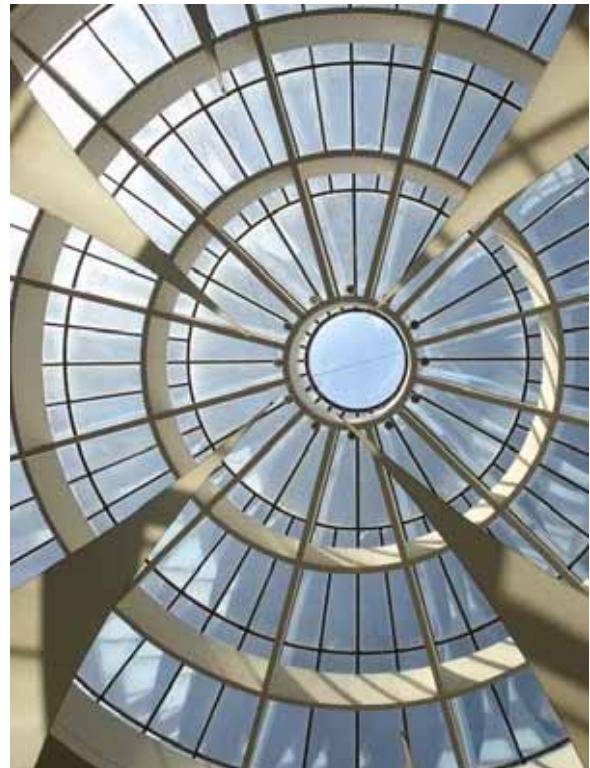
1.2 Middelpuntshoek en omtrekshoek

1.3 Raaklijn aan een cirkel

1.4 Onderlinge ligging van twee cirkels

**1.5 Omgeschreven en ingeschreven
cirkel van een driehoek**

1.6 Regelmatige veelhoeken

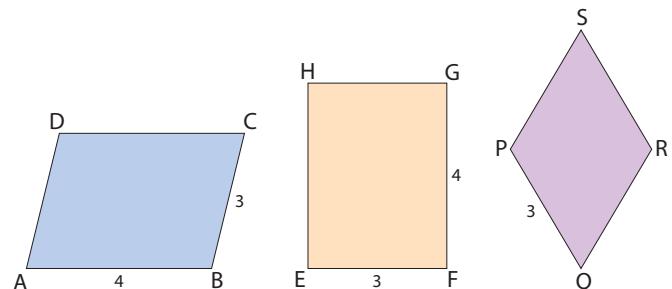


Oplossingen van de opdrachten



Opdracht 1 bladzijde 8

De vierhoek ABCD is een parallellogram, EFGH is een rechthoek en PQRS is een ruit.



- Van welke van deze vierhoeken liggen de hoekpunten op een cirkel? Verklaar waarom dat zo is.

De diagonalen van een rechthoek zijn even lang en delen elkaar middendoor.

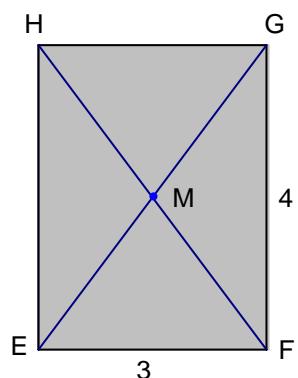
Dit is niet zo bij een ruit en bij een parallellogram.

Enkel bij een rechthoek liggen de vier hoekpunten op een cirkel.

- Teken het middelpunt en bereken de straal van deze cirkel(s).

Het middelpunt is M, het snijpunt van de diagonalen [EG] en [HF].

De straal is $|MG| = \frac{5}{2}$.



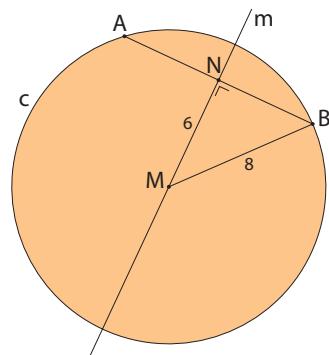
Opdracht 2 bladzijde 8

De cirkel c heeft als middelpunt M en als straal 8.

De koorde [AB] snijdt de middellijn m in N en $m \perp AB$.

De afstand van M tot [AB] is 6.

Bereken $|AN|$ en $|NB|$.



Oplossing

- De hoogtelijn [MN] in de gelijkbenige driehoek AMB is ook zwaartelijn, zodat $|AN| = |NB|$.
- $|AN| = |NB| = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

Opdracht 3 bladzijde 11

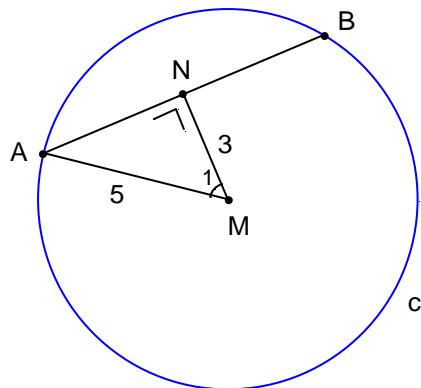
- 1 Teken in een cirkel $c(M, 5)$
een koorde $[AB]$ waarvan het apothema 3 cm is.

- 2 Bereken $|AB|$.

$$|AB| = 2 \cdot |AN| = 2 \cdot \sqrt{5^2 - 3^2} = 8$$

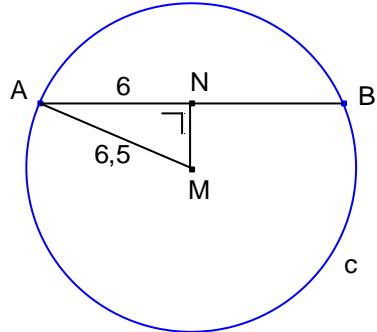
- 3 Bereken \hat{AMB} .

$$\begin{aligned} \hat{AMB} &= 2 \cdot \hat{M}_1 \text{ met } \cos \hat{M}_1 = \frac{3}{5} \\ &\Rightarrow \hat{M}_1 = 53^\circ 7' 48'' \\ &\Rightarrow \hat{AMB} = 106^\circ 15' 37'' \end{aligned}$$

**Opdracht 4 bladzijde 11**

- 1 In een cirkel $c(M; 6,5)$ is een koorde 12 cm lang.
Bereken het apothema van deze koorde.

$$|MN| = \sqrt{6,5^2 - 6^2} = 2,5$$



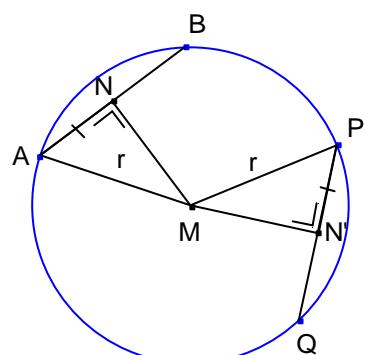
- 2 Verklaar de volgende eigenschap: gelijke korden hebben gelijke apothema's.

Zij $[MN]$ het apothema van een koorde $[AB]$ met lengte a,

dan is $|AN| = \frac{a}{2}$ en $|AM| = r$ in de rechthoekige driehoek

AMN .

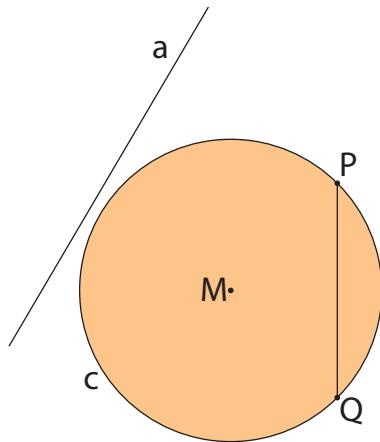
Alle korden $[PQ]$ met lengte a bepalen op dezelfde manier
een rechthoekige driehoek PMN' die congruent is met driehoek
 AMN ($ZZ90^\circ$). De apothema's $[MN]$ en $[MN']$ zijn dan ook
even lang.



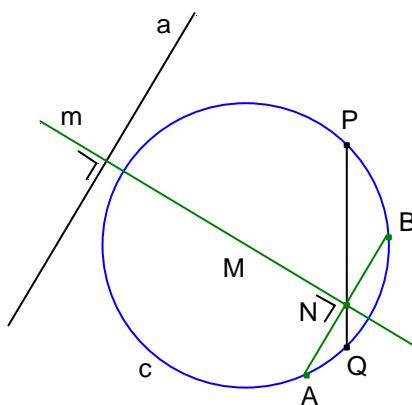
Opdracht 5 bladzijde 11

Construeer de koorde $[AB]$ van de cirkel c die voldoet aan de volgende twee voorwaarden:

- $[AB]$ is evenwijdig met de rechte a ;
- $[AB]$ wordt door PQ middendoor gedeeld.

**Oplossing**

- Teken de loodlijn m door M op a .
- M snijdt PQ in N .
- Teken de loodlijn door N op m , deze snijdt de cirkel in A en B .
 $[AB]$ is de gevraagde koorde, want ze wordt door de middelloodlijn m die er loodrecht op staat middendoor gedeeld en $a \parallel AB$.



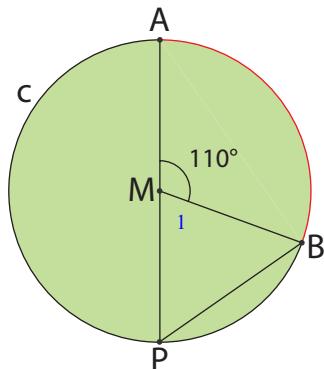
Opdracht 6 bladzijde 12

- 1 Bereken $\hat{A}PB$ met de gegevens in de figuur.

$$\hat{M}_1 = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

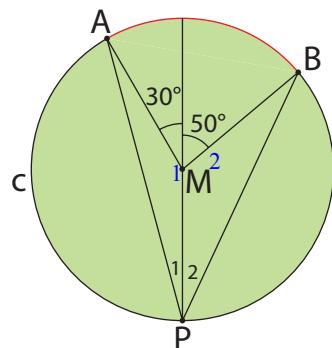
$$\Delta MPB \text{ is gelijkbenig zodat } \hat{P} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$$

$$APB = 55^\circ$$



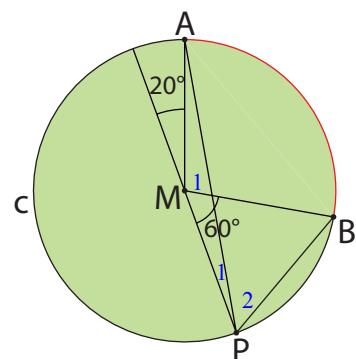
- 2 Bereken $APB = \hat{P}_1 + \hat{P}_2$ met de gegevens in de figuur.

- $\hat{M}_1 = 150^\circ \stackrel{\text{in } \Delta APM}{\Rightarrow} \hat{P}_1 = 15^\circ$
- $\hat{M}_2 = 130^\circ \stackrel{\text{in } \Delta BMP}{\Rightarrow} \hat{P}_2 = 25^\circ$
- $APB = \hat{P}_1 + \hat{P}_2 = 40^\circ$



- 3 Bereken AMB en APB met de gegevens in de figuur.

- $\hat{M}_1 = 100^\circ = AMB$
- In ΔAMP is $\hat{P}_1 = 10^\circ$.
- In ΔMPB is $\hat{P}_{12} = 60^\circ$.
- $APB = \hat{P}_{12} - \hat{P}_1 = 50^\circ$

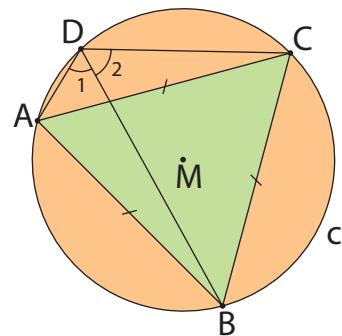


- 4 Welk verband vind je in de drie gevallen tussen APB en AMB ?

In de drie gevallen is $APB = \frac{1}{2} AMB$.

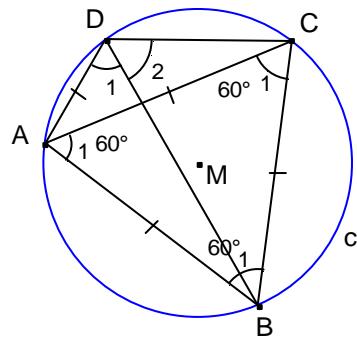
Opdracht 7 bladzijde 15

Bereken de hoeken \hat{D}_1 , \hat{D}_2 en \hat{ADC} als je weet dat de driehoek ABC gelijkzijdig is.



Oplossing

- $\hat{D}_1 = \hat{C}_1 = 60^\circ$ want dit zijn omtrekshoeken op dezelfde boog \widehat{AB} .
- $\hat{D}_2 = \hat{A}_1 = 60^\circ$ want dit zijn omtrekshoeken op dezelfde boog \widehat{BC} .
- $\hat{ADC} = \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 120^\circ$.

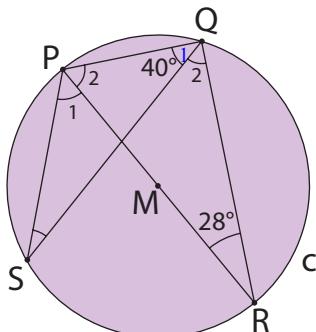


Opdracht 8 bladzijde 15

Bereken de hoeken \hat{P}_1 , \hat{P}_2 , \hat{Q}_2 en \hat{S} met de gegevens in de figuur.

Oplossing

- $\hat{Q}_{12} = 90^\circ$ want deze omtrekhoek staat op de middellijn $[PR]$, dus $\hat{Q}_2 = 50^\circ$.
- $\hat{P}_1 = \hat{Q}_2 = 50^\circ$ want dit zijn omtrekshoeken op dezelfde boog \widehat{SR} .
- $\hat{P}_2 = 180^\circ - 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$ in ΔPQR .
- $\hat{S} = \hat{R} = 28^\circ$ want dit zijn omtrekshoeken op dezelfde boog \widehat{PQ} .



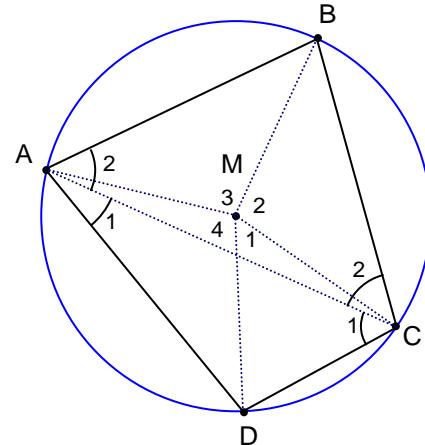
**Opdracht 9 bladzijde 15**

Een koordenvierhoek is een vierhoek waarvan alle hoekpunten op een cirkel liggen.
Bewijs dat de overstaande hoeken van een koordenvierhoek supplementair zijn.

Oplossing

- $$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{C} &= \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 \\ &= \frac{1}{2} \hat{DMC} + \frac{1}{2} \hat{CMB} + \frac{1}{2} \hat{AMD} + \frac{1}{2} \hat{AMB} \\ &= \frac{1}{2} (\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4) \\ &= \frac{1}{2} (360^\circ) \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

- $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$
 of $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ en $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$



↓

$$\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

Opdracht 10 bladzijde 15

Teken een rechthoekige driehoek waarvan de schuine zijde 6 cm meet en de hoogte op de schuine zijde 2 cm is.

Oplossing

Construeer een lijnstuk $[AB]$ van 6 cm.

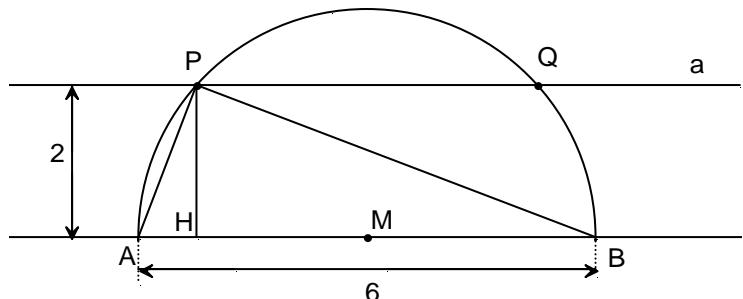
Construeer een halve cirkel met middellijn $[AB]$, dus met als middelpunt M het midden van $[AB]$.

Construeer de rechte a zodat $a \parallel AB$ en $d(a, AB) = 2$ cm, die de halve cirkel snijdt in P (en Q).

ΔABP is een gevraagde driehoek.

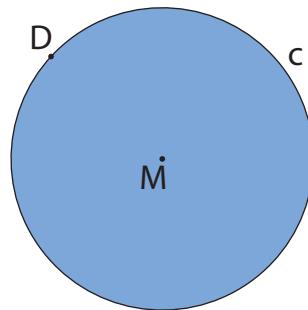
Immers:

- $\hat{P} = 90^\circ$
- schuine zijde $[AB] = 6$ cm
- $|PH| = d(a, AB) = 2$ cm



Opdracht 11 bladzijde 18

D is een punt op de cirkel c met middelpunt M.

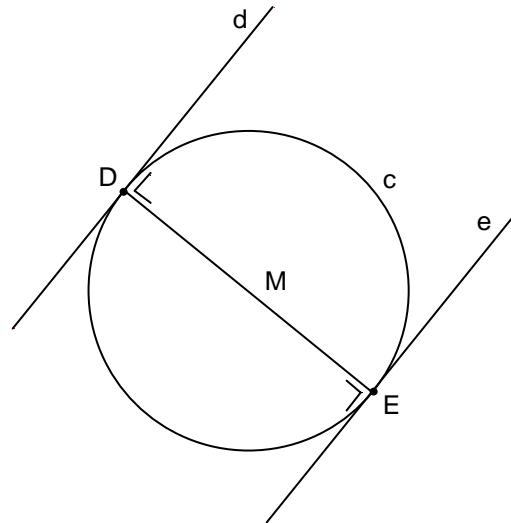


- 1 Construeer de raaklijn d aan de cirkel in D.

$$d \perp MD \text{ en } d \text{ door } D.$$

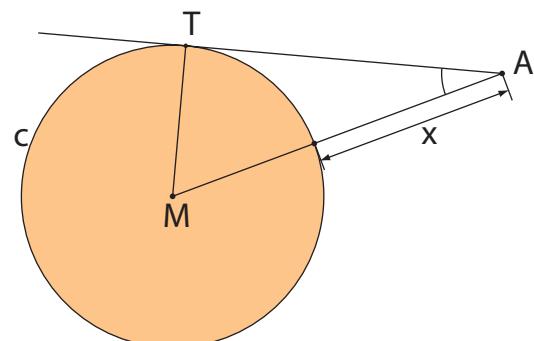
- 2 Construeer een tweede raaklijn e aan c die evenwijdig is met d.

$$e \perp MD \text{ en } e \text{ door } E, \text{ het tweede snijpunt van } MD \text{ en } c.$$

**Opdracht 12 bladzijde 18**

In de figuur is TA een raaklijn aan de cirkel $c(M, 10)$ met $|TA| = 21$.

Bereken x en \hat{TAM} .

**Oplossing**

- TA is een raaklijn aan c

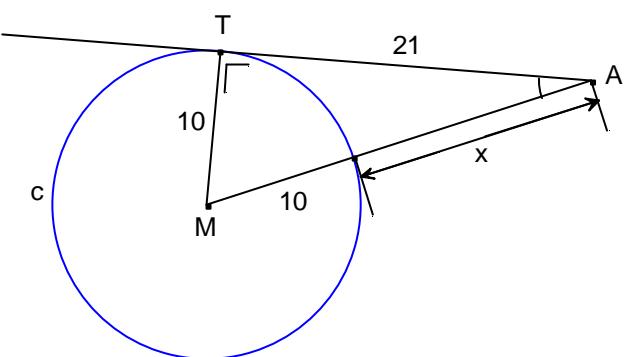


$$\hat{MTA} = 90^\circ$$

- In ΔTAM is $|MA| = \sqrt{21^2 + 10^2} = \sqrt{541}$

$$\Rightarrow x = \sqrt{541} - 10 \approx 13,26$$

- $\tan \hat{TAM} = \frac{10}{21} \Rightarrow \hat{TAM} = 25^\circ 27' 48''$

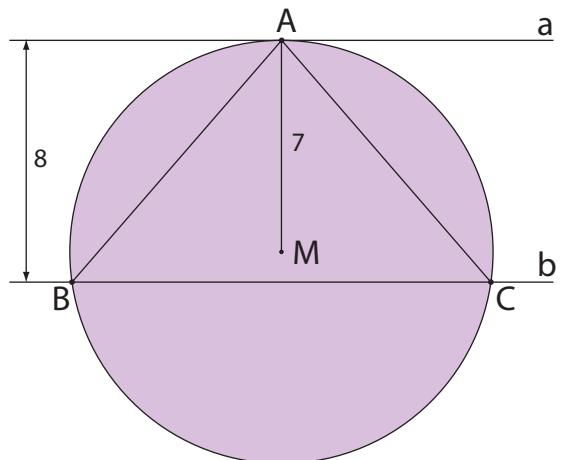


Opdracht 13 bladzijde 19

a is een raaklijn aan $c(M, 7)$ met raakpunt A.

De rechte b is evenwijdig met a en snijdt de cirkel in B en C. De afstand tussen a en b is 8.

Bereken de zijden en de hoeken van driehoek ABC.

**Oplossing**

Omdat a een raaklijn is aan c in A geldt: $a \perp MA$.

Uit $a \parallel b$ volgt: $b \perp MA$ of $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90^\circ$.

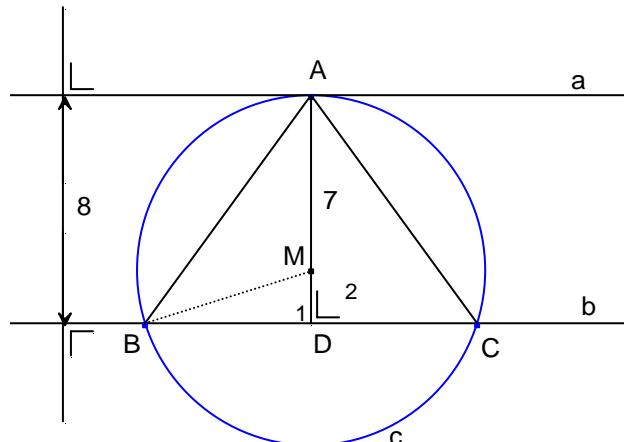
In ΔBMD geldt:

$$|BM| = r = 7$$

$$|MD| = 8 - 7 = 1$$

$$|BD| = \sqrt{|BM|^2 - |MD|^2} = \sqrt{49 - 1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Bijgevolg: $|BC| = 2|BD| = 8\sqrt{3}$ (De middellijn (AD) loodrecht op een koorde ([BC]) deelt die koorde middendoor: dus $|BD| = |DC|$.)



In ΔABD geldt: $|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$

$$\begin{aligned} &= 8^2 + (4\sqrt{3})^2 \\ &= 112 \end{aligned}$$

Bijgevolg: $|AB| = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$.

Zo ook vinden we: $|AC| = 4\sqrt{7}$.

In ΔABD geldt: $\tan \hat{B} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{8}{4\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow \hat{B} = 49^\circ 6' 24''$.

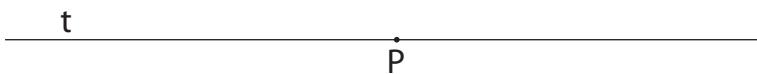
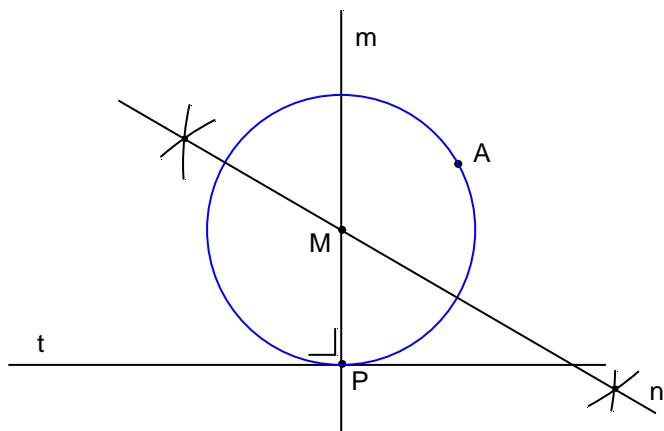
Omdat ΔABC gelijkbenig is, geldt: $\hat{C} = 49^\circ 6' 24''$.

Uit $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ volgt $\hat{A} = 81^\circ 47' 12''$.

**Opdracht 14 bladzijde 19**

Construeer een cirkel die door A gaat en raakt aan de rechte t in P.

• A

**Oplossing**

Het middelpunt M van de cirkel is het snijpunt van

- m, de loodlijn door P op t
- n, de middelloodlijn van [PA]

De straal van de cirkel is $|MA| = |MP|$.

Opdracht 15 bladzijde 19

Hoeveel raaklijnen aan de cirkel c gaan door

1 A?

c

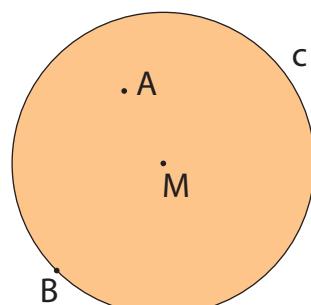
Door A gaat geen raaklijn aan de cirkel c.

2 B?

Door B gaat één raaklijn aan de cirkel c.

3 C?

Door C gaan twee raaklijnen aan de cirkel c.



Opdracht 16 bladzijde 21

PA en PB zijn raaklijnen aan de cirkel

 $c(M, 5)$ met raakpunten A en B. $|MP| = 13$.1 Bereken $|PA|$ en $|PB|$.

$$\begin{aligned} \text{In } \DeltaAMP \text{ is } |PA| &= \sqrt{|MP|^2 - |MA|^2} \\ &= \sqrt{13^2 - 5^2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$|PB| = |PA| = 12$$

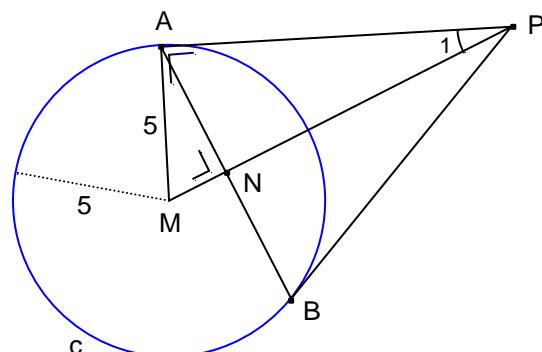
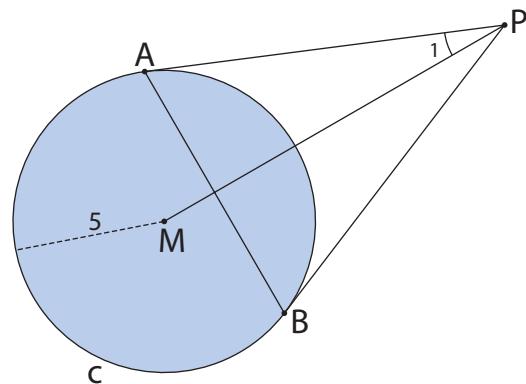
2 Bereken \hat{P}_1 .

$$\begin{aligned} \sin \hat{P}_1 &= \frac{|AM|}{|MP|} \text{ in } \DeltaAMP \\ &= \frac{5}{13} \\ \Rightarrow \hat{P}_1 &= 22^\circ 37' 12'' \end{aligned}$$

3 Bereken de lengte van de koorde [AB].

$$|AB| = 2 \cdot |AN|$$

$$\begin{aligned} \text{In } \Delta ANP \text{ is } \sin \hat{P}_1 &= \frac{|AN|}{|AP|} \\ &\Downarrow \\ \frac{5}{13} &= \frac{|AN|}{12} \\ &\Downarrow \\ |AN| &= \frac{60}{13} \\ &\Downarrow \\ |AB| &= \frac{120}{13} \end{aligned}$$



Opdracht 17 bladzijde 21

PA en PB zijn raaklijnen aan de cirkel $c(M, 5)$ met raakpunten A en B. $|AB| = 8$.

1 Bereken \widehat{AMB} en \widehat{APB} .

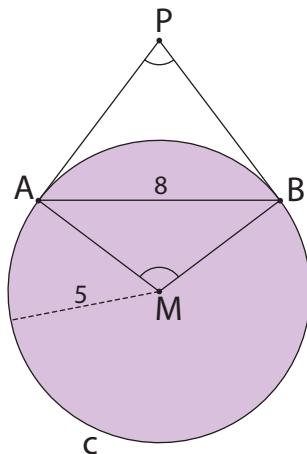
- $\widehat{AMB} = 2 \cdot \widehat{M}_1$

In ΔANM is

$$\sin \widehat{M}_1 = \frac{4}{5} \Rightarrow \widehat{M}_1 = 53^\circ 7' 48''$$

⇓

$$\widehat{AMB} = 106^\circ 15' 37''$$

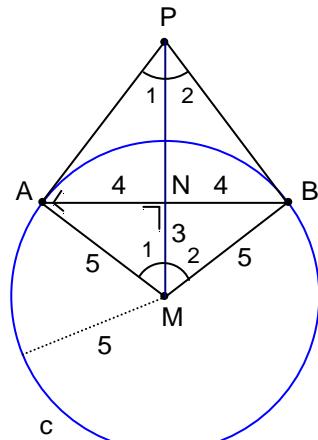


- $\widehat{APB} = 2 \cdot \widehat{P}_1$

In ΔPAM is

$$\widehat{P}_1 = 90^\circ - \widehat{M}_1 = 36^\circ 52' 12''$$

$$\Rightarrow \widehat{APB} = 73^\circ 44' 23''$$



$$|NM| = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

2 Bereken $|PA|$ en $|PM|$.

- In ΔPAM is

$$\tan \widehat{M}_1 = \frac{|PA|}{5} \Rightarrow |PA| = 5 \cdot \tan \widehat{M}_1$$

$$\tan \widehat{M}_1 = \frac{|AN|}{|NM|} = \frac{4}{3} \text{ in } \Delta ANM$$

$$\Rightarrow |PA| = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$$

- In ΔPAM is $|PM| = \sqrt{|PA|^2 + |AM|^2} = \frac{25}{3}$

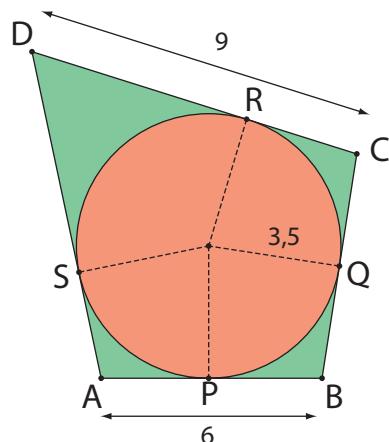
Opdracht 18 bladzijde 21

ABCD is een raaklijnenvierhoek van de cirkel $c(M; 3,5)$, dit betekent dat elke zijde van de vierhoek ABCD een raaklijn is van de cirkel c . De raakpunten zijn P, Q, R en S. Twee zijden van de vierhoek ABCD zijn gegeven:
 $|AB| = 6$ en $|CD| = 9$.

- 1 Stel $|AP| = x$ en $|DR| = y$.

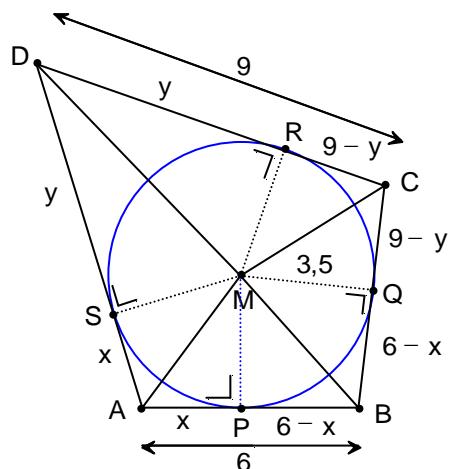
Druk nu $|DA|$ en $|BC|$ uit in functie van x en y .

$$\left\{ \begin{array}{l} |AP| = x \Rightarrow |AS| = x \text{ en } |PB| = 6 - x \\ \quad \Downarrow \\ \quad |BQ| = 6 - x \\ |DR| = y \Rightarrow |DS| = y \text{ en } |RC| = 9 - y \\ \quad \Downarrow \\ \quad |CQ| = 9 - y \\ \Rightarrow |DA| = x + y \text{ en } |BC| = 15 - x - y \end{array} \right.$$



- 2 Bereken de omtrek van de vierhoek ABCD.

$$\begin{aligned} \text{Omtrek } ABCD &= |AB| + |BC| + |CD| + |DA| \\ &= 6 + 15 - x - y + 9 + x + y = 30 \end{aligned}$$



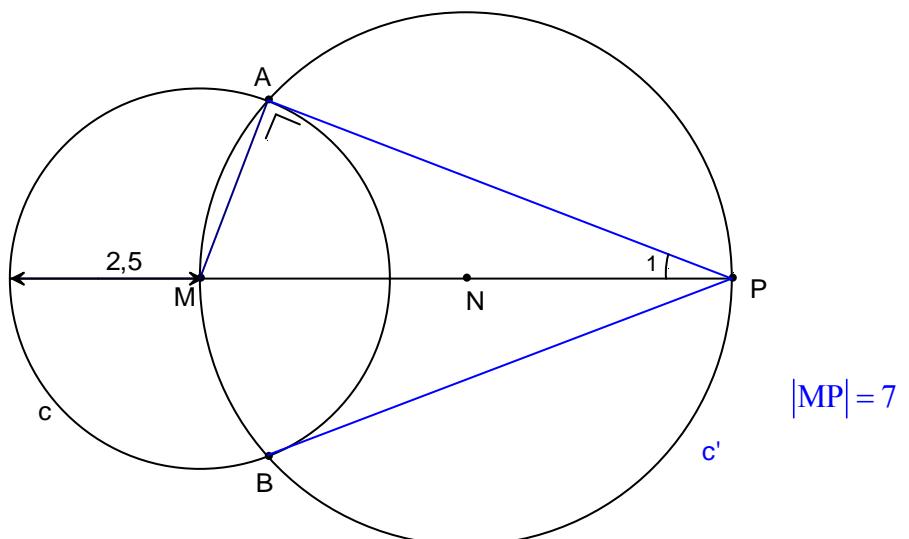
- 3 Bereken de oppervlakte van de vierhoek ABCD.

$$\begin{aligned} \text{Oppervlakte } ABCD &= \text{opp } \Delta ABM + \text{opp } \Delta BCM + \text{opp } \Delta CDM + \text{opp } \Delta DAM \\ &= \frac{|AB| \cdot 3,5}{2} + \frac{|BC| \cdot 3,5}{2} + \frac{|CD| \cdot 3,5}{2} + \frac{|DA| \cdot 3,5}{2} \\ &= \left(|AB| + |BC| + |CD| + |DA| \right) \cdot \frac{3,5}{2} \stackrel{\text{zie } 2}{=} 30 \cdot \frac{3,5}{2} = 52,5 \end{aligned}$$

Opdracht 19 bladzijde 22

- 1 Teken een cirkel c met straal 2,5 cm.

Construeer de raaklijnen aan die cirkel uit een punt P dat op 7 cm ligt van het middelpunt van c .



- Teken $c(M; 2,5)$.
- Teken de cirkel $c'(N; 3,5)$ met middellijn $[MP]$. c en c' snijden elkaar in A en B . PA en PB zijn de gevraagde raaklijnen.

- 2 Bereken de lengte van deze raaklijnen.

In ΔPAM is $\hat{A} = 90^\circ$.

$$\text{Bijgevolg: } |PA|^2 = |PM|^2 - |MA|^2$$

$$\begin{aligned} &= 7^2 - 2,5^2 \\ &= 42,75 \end{aligned}$$

$$|PA| = 6,54$$

- 3 Bereken de scherpe hoek gevormd door deze raaklijnen.

In ΔPAM is

$$\sin \hat{P}_1 = \frac{|MA|}{|MP|} = \frac{2,5}{7}$$

\Downarrow

$$\hat{P}_1 = 20^\circ 55' 29''$$

\Downarrow

$$\hat{APB} = 2\hat{P}_1 = 41^\circ 50' 59''$$

**Opdracht 20 bladzijde 23**

Hoeveel gemeenschappelijke punten hebben de cirkels $c_1(M_1, 6)$ en $c_2(M_2, 4)$ als

1 $|M_1M_2| > 10$?

geen

2 $|M_1M_2| = 10$?

1

3 $2 < |M_1M_2| < 10$?

2

4 $|M_1M_2| = 2$?

1

5 $|M_1M_2| < 2$?

geen

Opdracht 21 bladzijde 23

Welk verband is er tussen $|M_1M_2|$, r_1 en r_2 als de cirkels $c_1(M_1, r_1)$ en $c_2(M_2, r_2)$ met $r_1 \geq r_2$

1 geen gemeenschappelijke punten hebben?

$|M_1M_2| > r_1 + r_2$ of $|M_1M_2| < r_1 - r_2$

2 één gemeenschappelijk punt hebben?

$|M_1M_2| = r_1 + r_2$ of $|M_1M_2| = r_1 - r_2$

3 twee gemeenschappelijke punten hebben?

$r_1 - r_2 < |M_1M_2| < r_1 + r_2$



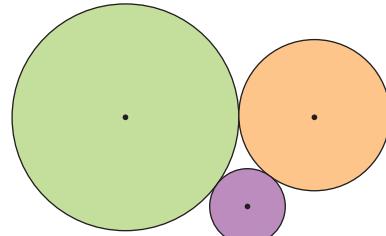
Opdracht 22 bladzijde 25

Wat is de onderlinge ligging van de cirkels $c_1(A, 3)$ en $c_2(B, 5)$ als

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1 $ AB =1?$ | 4 $ AB =5?$ |
| volledig binnen elkaar | snijdend |
| 2 $ AB =2?$ | 5 $ AB =8?$ |
| inwendig rakend | uitwendig rakend |
| 3 $ AB =3?$ | 6 $ AB =10?$ |
| snijdend | volledig buiten elkaar |

Opdracht 23 bladzijde 25

Drie cirkels raken elkaar twee aan twee zoals op de figuur.
Als de stralen van de cirkels respectievelijk 1 dm, 2 dm en
3 dm lang zijn, hoe groot is dan de oppervlakte van de
driehoek met de drie middelpunten als hoekpunten?



- A 4 dm^2 B 6 dm^2 C 8 dm^2 D 10 dm^2 E 12 dm^2

Oplossing

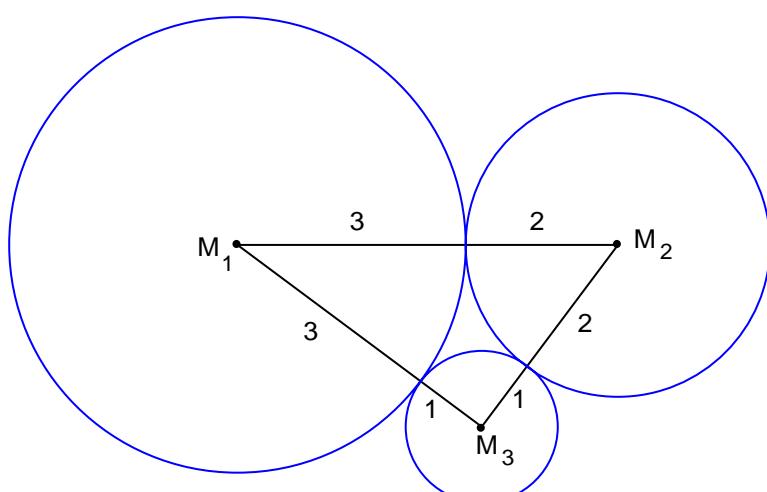
In de driehoek $M_1M_2M_3$ is

$$|M_1M_2|=3+2=5$$

$$|M_1M_3|=3+1=4$$

$$|M_2M_3|=2+1=3$$

Uit de stelling van Pythagoras volgt
dat $\Delta M_1M_2M_3$ rechthoekig is in
 M_3 zodat de oppervlakte gelijk is
aan $\frac{4 \cdot 3}{2} \text{ dm}^2 = 6 \text{ dm}^2$.

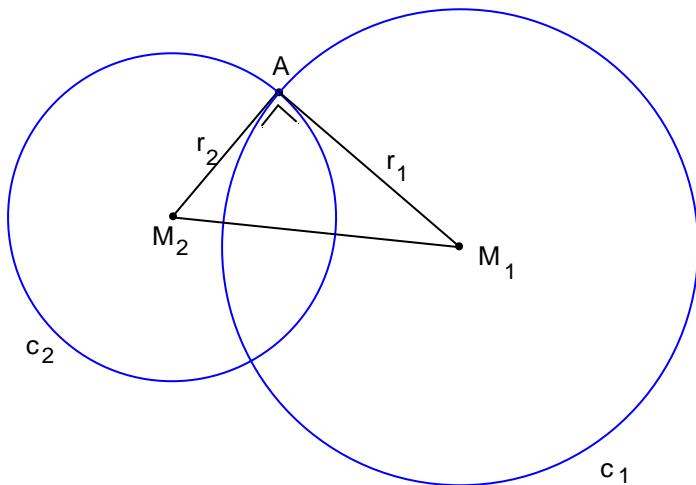


Antwoord B is het juiste antwoord.

Opdracht 24 bladzijde 25

- 1 Construeer twee cirkels met middelpunten M_1 en M_2 en respectievelijke stralen r_1 en r_2 zodat $|M_1M_2|^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Construeer de rechthoekige driehoek AM_1M_2 zodat $\widehat{A} = 90^\circ$, $|M_1A| = r_1$ en $|M_2A| = r_2$.



$c_1(M_1, r_1)$ en $c_2(M_2, r_2)$ zijn de gevraagde cirkels.

- 2 Noem A een snijpunt van de cirkels. Welke hoek maken de raaklijnen in A aan beide cirkels?

Omdat $AM_2 \perp M_1A$ is AM_2 de raaklijn in A aan c_1 .

Omdat $AM_1 \perp M_2A$ is AM_1 de raaklijn in A aan c_2 .

De raaklijnen in A sluiten dus een hoek van 90° in.

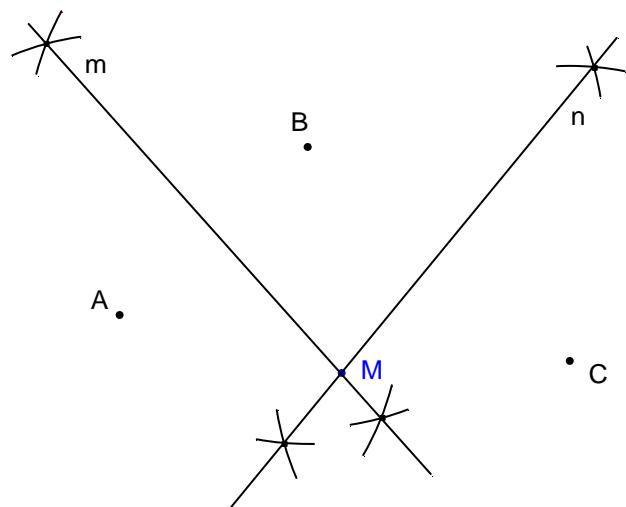
**Opdracht 25 bladzijde 26**

1 Teken drie verschillende punten A, B en C.

2 Teken de verzameling van alle punten die even ver liggen van A als van B.

Alle punten even ver van A als van B liggen op m, de middelloodlijn van [AB].

3 Teken de verzameling van alle punten die even ver liggen van B als van C.



Alle punten even ver van B als van C liggen op n, de middelloodlijn van [BC].

4 Teken, indien mogelijk, het punt dat even ver ligt van A, B en C.

Het snijpunt M van m en n ligt even ver van A, B als van C.

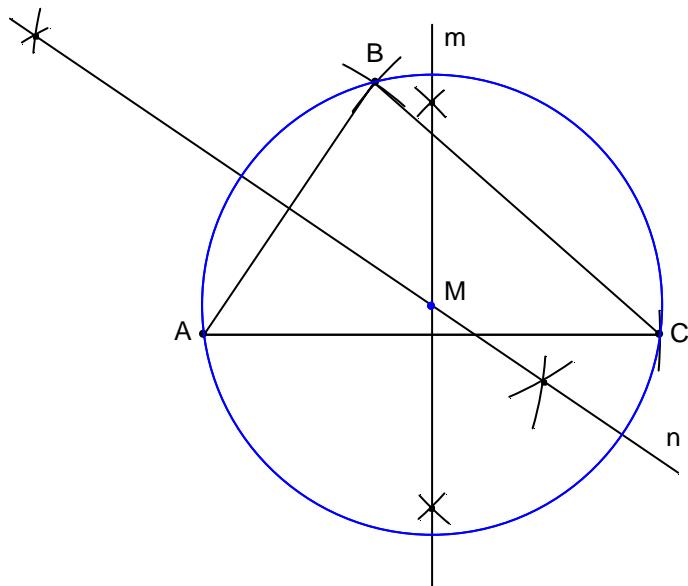
5 Voor welke ligging van A, B en C is er geen punt dat even ver ligt van deze drie punten? Verklaar.

Als A, B en C collinear zijn, is er geen punt even ver van A, B en C.

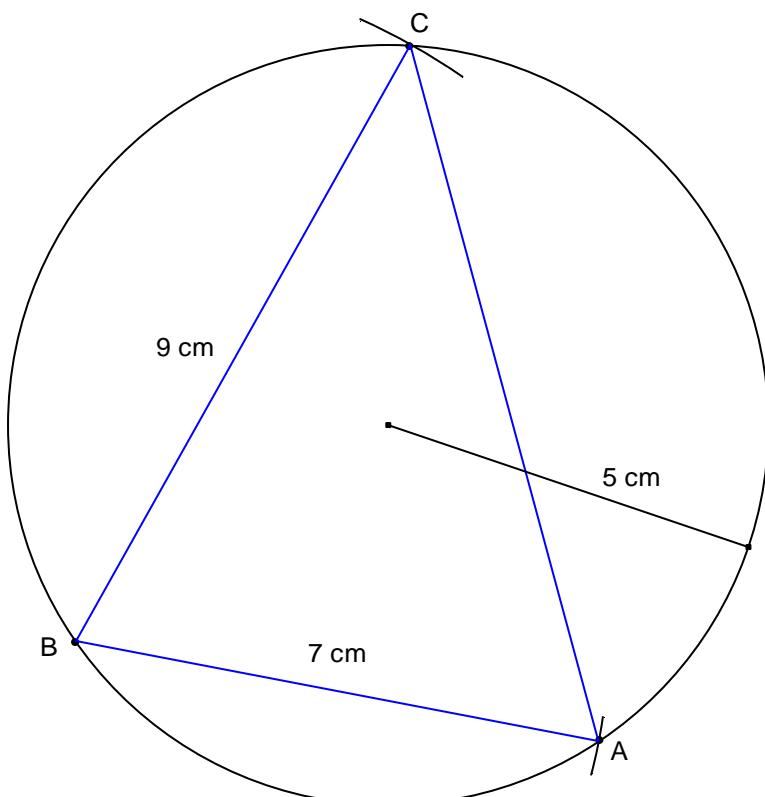
De middelloodlijnen m en n zijn dan strikt evenwijdig.

**Opdracht 26 bladzijde 28**

- 1 Construeer de omgeschreven cirkel van een driehoek ABC met zijden $|AB| = 4 \text{ cm}$, $|BC| = 5 \text{ cm}$ en $|AC| = 6 \text{ cm}$.



- 2 Construeer een driehoek ABC met 5 cm als straal van de omgeschreven cirkel, $|AB| = 7 \text{ cm}$, en $|BC| = 9 \text{ cm}$.



Opdracht 27 bladzijde 28

De gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 6 heeft Z als zwaartepunt.

- Waarom is Z het middelpunt van de omgeschreven cirkel c van de driehoek ABC?

In een gelijkzijdige driehoek zijn de zwaartelijnen ook de middelloodlijnen van de zijden. Het zwaartepunt Z is dus ook het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

- Bereken de straal van c.

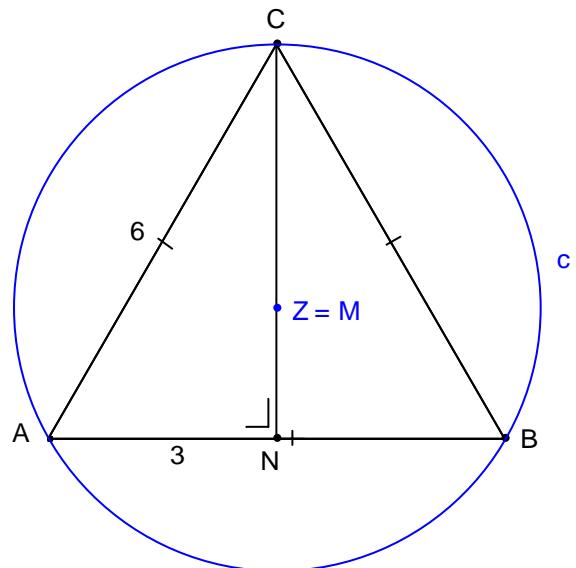
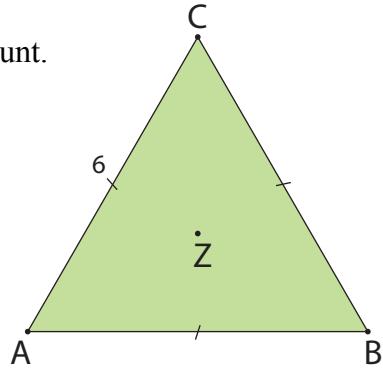
In ΔACN is

$$\begin{aligned} |CN| &= \sqrt{6^2 - 3^2} \\ &= \sqrt{27} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Omdat Z het zwaartepunt is van

$$\Delta ABC \text{ is } |CZ| = \frac{2}{3} \cdot |CN| = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

De straal van c is $2\sqrt{3}$.



Opdracht 28 bladzijde 28

- 1 Construeer een gelijkbenige driehoek ABC met $|AB| = |AC| = 6 \text{ cm}$ en $|BC| = 4 \text{ cm}$.
- 2 Construeer de omgeschreven cirkel c van de driehoek ABC.
- 3 Bereken de straal van c.

Oplossing

We berekenen $r = |AM|$ in ΔAMN uit

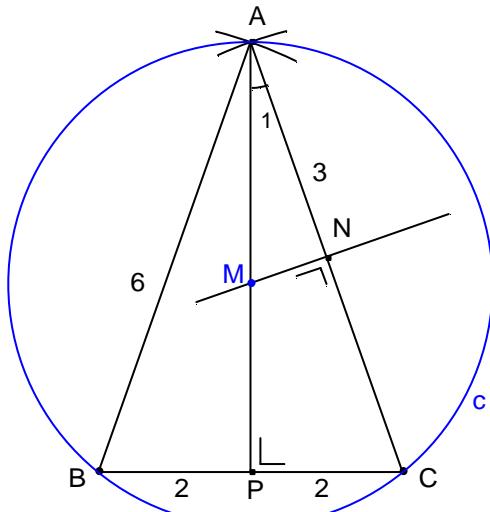
$$\cos \hat{A}_1 = \frac{|AN|}{|AM|} \Rightarrow r = \frac{3}{\cos \hat{A}_1} \quad (1)$$

$\cos \hat{A}_1$ vinden we in ΔAPC :

$$\cos \hat{A}_1 = \frac{|AP|}{|AC|} = \frac{\sqrt{6^2 - 2^2}}{6} \Rightarrow \cos \hat{A}_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (2).$$

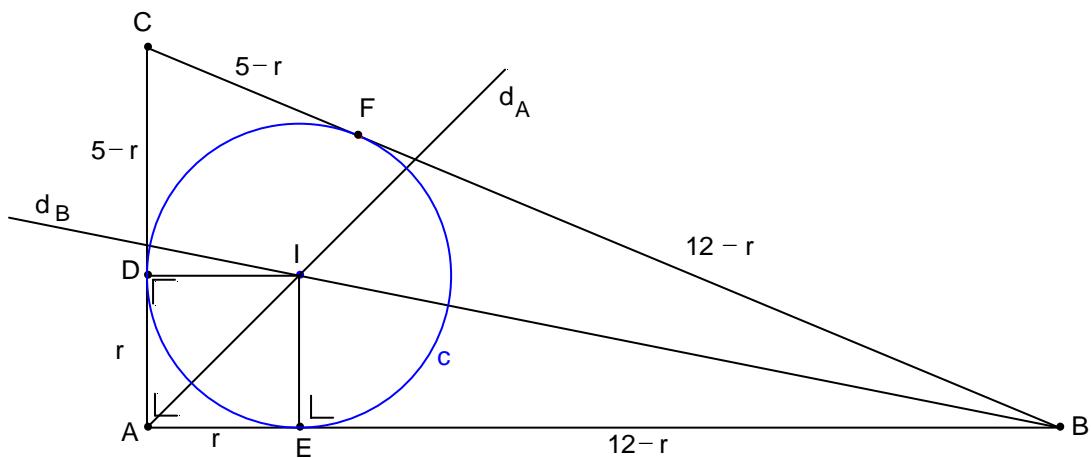
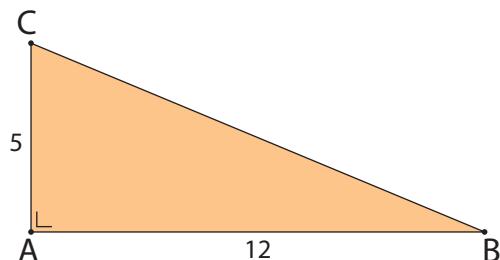
$$(2) \text{ en } (1) \text{ geeft } r = \frac{3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

De straal van de omgeschreven cirkel is $\frac{9\sqrt{2}}{4}$.



**Opdracht 29 bladzijde 30**

- 1 Construeer de ingeschreven cirkel van de rechthoekige driehoek ABC.



- 2 Bereken de straal van de ingeschreven cirkel.

- $|AB| = 12$ en $|AC| = 5 \Rightarrow |BC| = 13$
- Noem D, E en F de raakpunten (zie figuur).

De straal van de ingeschreven cirkel is dan $|ID| = |AD| = |AE| = r$.

$$\Rightarrow |BE| = 12 - r \text{ en } |CD| = 5 - r$$

De raaklijnen uit B, respectievelijk C aan de cirkel c zijn even lang.

$$\Rightarrow |BF| = 12 - r \text{ en } |CF| = 5 - r$$

$$\text{Nu is } |BC| = |BF| + |CF| = 13 \Rightarrow 12 - r + 5 - r = 13$$

$$\Rightarrow r = 2$$

De straal van de ingeschreven cirkel is 2.

Opdracht 30 bladzijde 30

Bereken de zijde van een gelijkzijdige driehoek waarvan de straal van de ingeschreven cirkel 6 is.

Oplossing

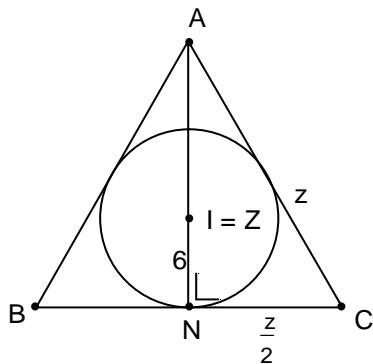
In een gelijkzijdige driehoek valt het middelpunt van de ingeschreven cirkel samen met het zwaartepunt.

Als $r = |IN| = 6$, is dus $|AI| = 12$, zodat $|AN| = 18$.

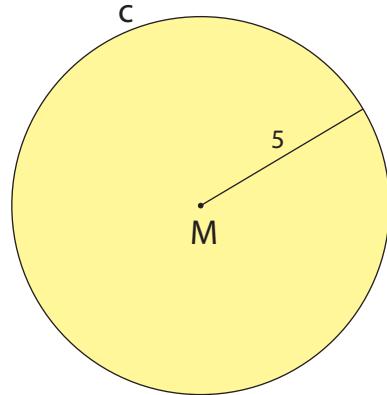
Stel de zijde van ΔABC voor door z , dan is in ΔANC .

$$\begin{aligned} 18^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 &= z^2 \\ \Rightarrow 324 &= \frac{3z^2}{4} \\ \Rightarrow z^2 &= 432 \\ \Rightarrow z &= 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

De zijde van de driehoek is $12\sqrt{3}$.

**Opdracht 31 bladzijde 31**

- 1 Construeer in de cirkel $c(M, 5)$ stralen $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$, $[MD]$ en $[ME]$ die de 360° rond M in vijf gelijke middelpuntshoeken verdelen.
- 2 Toon aan dat de zijden en de hoeken van de vijfhoek ABCDE gelijk zijn.

Oplossing

De middelpuntshoeken $\widehat{M_1}, \widehat{M_2}, \widehat{M_3}, \widehat{M_4}$ en $\widehat{M_5}$ zijn allemaal hoeken van 72° .

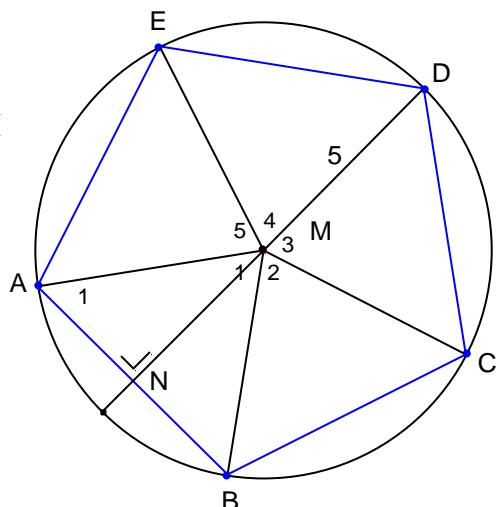
De driehoeken ΔAMB , ΔBMC , ΔCMD , ΔDME en ΔEAM zijn congruente (ZHZ) en gelijkbenige driehoeken.

Hieruit volgt:

- $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |AE|$
- voor de hoeken van de vijfhoek ABCDE:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E} = 2\widehat{M_1} = 2\left(\frac{180^\circ - 72^\circ}{2}\right) = 108^\circ.$$

Bijgevolg is $\widehat{A_1} = 54^\circ$.



Opdracht 32 bladzijde 32

- 1 ABCDEF is een regelmatige zeshoek met omgeschreven cirkel $c(M, r)$.

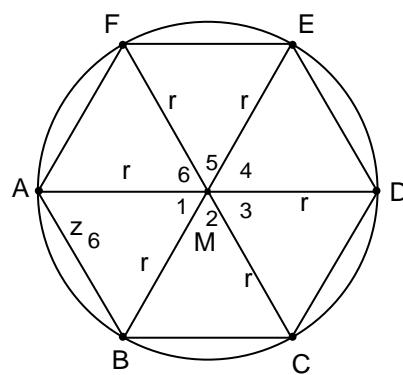
Toon aan dat de zijde z_6 van de zeshoek gelijk is aan de straal r .

De middelpuntshoeken $\widehat{M}_1, \widehat{M}_2, \dots, \widehat{M}_6$ zijn alle gelijk aan 60° .

De driehoeken ABM, BCM, \dots, FAM zijn dus gelijkzijdig zodat $z_6 = r$.

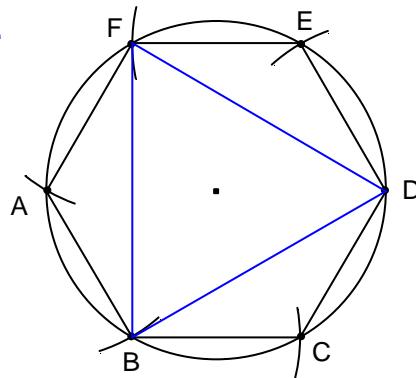
- 2 Maak gebruik van de eigenschap uit 1 om een regelmatige zeshoek te construeren in een willekeurige cirkel.

Door, vertrekend in een punt A op een cirkel $c(M, r)$ zes opeenvolgende koorden $[AB], [BC], \dots, [FA]$ met lengte r af te passen op de cirkel c , vinden we de regelmatige zeshoek ABCDEF.



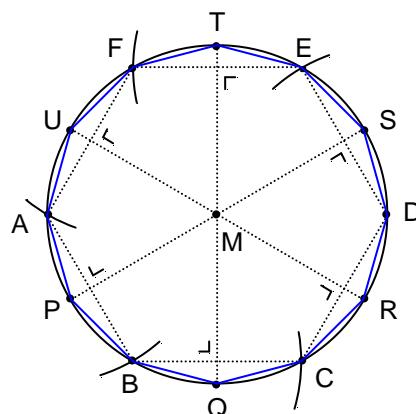
- 3 Construeer een gelijkzijdige driehoek.

Uit de constructie van de regelmatige zeshoek ABCDEF volgt onmiddellijk de constructie van de gelijkzijdige driehoek ACE.



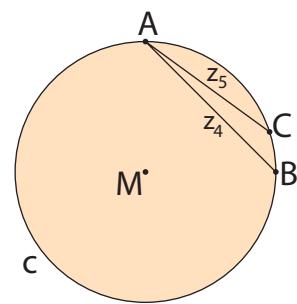
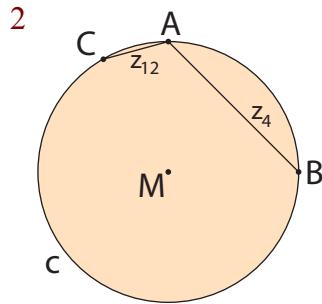
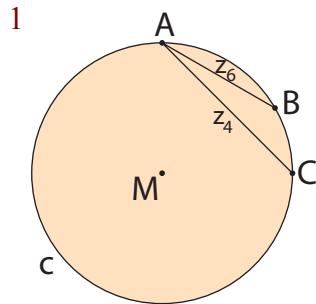
- 4 Construeer een regelmatige twaalfhoek.

Ook de constructie van de regelmatige twaalfhoek APBQCRDSETFU volgt uit de constructie van de regelmatige zeshoek ABCDEF (zie figuur).



Opdracht 33 bladzijde 33

Van twee regelmatige veelhoeken met omgeschreven cirkel c is telkens een zijde gegeven.
Voor welke regelmatige n -hoek, ingeschreven in de cirkel c , is $|BC|$ een zijde?



Oplossing

$$1 \quad z_6 = |AB| \Rightarrow \widehat{AMB} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

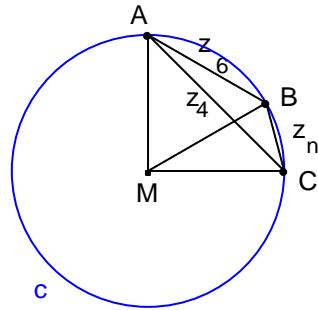
$$z_4 = |AC| \Rightarrow \widehat{AMC} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

↓

$$\widehat{BMC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Uit $\frac{360^\circ}{n} = 30^\circ$ volgt $n = 12$.

$|BC|$ is de zijde van een regelmatige 12-hoek.



$$2 \quad z_4 = |AB| \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$$

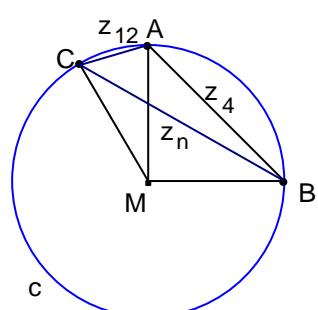
$$z_{12} = |CA| \Rightarrow \widehat{CMA} = 30^\circ$$

↓

$$\widehat{CMB} = 120^\circ$$

Uit $\frac{360^\circ}{n} = 120^\circ$ volgt $n = 3$.

$|BC|$ is de zijde van een gelijkzijdige driehoek.



$$3 \quad z_4 = |AB| \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$$

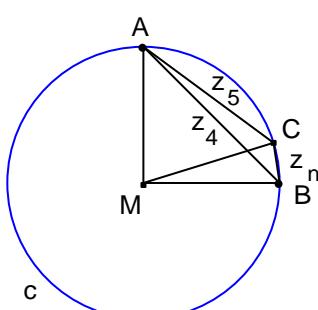
$$z_5 = |AC| \Rightarrow \widehat{AMC} = 72^\circ$$

↓

$$\widehat{CMB} = 18^\circ$$

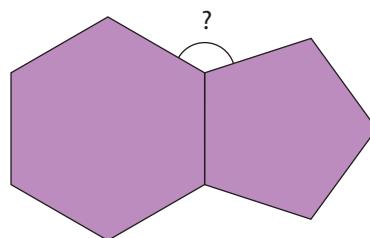
Uit $\frac{360^\circ}{n} = 18^\circ$ volgt $n = 20$.

$|BC|$ is de zijde van een regelmatige 20-hoek.



Opdracht 34 bladzijde 33

Een regelmatige vijfhoek en een regelmatige zeshoek hebben een zijde gemeenschappelijk (zie figuur).



Hoe groot is de aangeduide hoek?

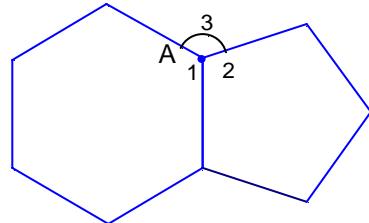
- A 108° B 120° C 124° D 132° E 135°

Oplossing

$$\hat{A}_1 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ$$

$$\hat{A}_2 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$\hat{A}_3 = 360^\circ - 120^\circ - 108^\circ = 132^\circ$$



Antwoord D is het juiste antwoord.

Opdracht 35 bladzijde 33

In welke regelmatige veelhoek is de kortste diagonaal even lang als de straal van de omgeschreven cirkel?

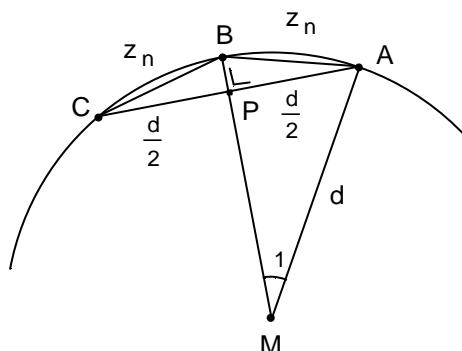
- A zeshoek B achthoek C tienhoek D twaalfhoek E vijftienhoek

Oplossing

In ΔAPM is $|AP| = \frac{d}{2}$ en $|MA| = d$ met de gegevens.

$$\text{Daaruit volgt } \sin \widehat{M}_1 = \frac{d}{\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{M}_1 = 30^\circ.$$

De middelpuntshoek van de regelmatige n-hoek is dus 30° . dit is zo bij een regelmatige 12-hoek.



Antwoord D is het juiste antwoord.

V

Opdracht 36 bladzijde 33

ABCDE is een regelmatige vijfhoek met zijde 5.

- 1 Construeer de cirkel die door A, B en C gaat.

Het middelpunt M van de cirkel door A, B en C is het snijpunt van de middelloodlijnen (m en n) van [AB] en [BC].

De gevraagde cirkel is $c(M,r)$ met $r = |MA|$.

- 2 Toon aan dat die cirkel ook door D en E gaat.

We moeten aantonen dat $|MD|$ gelijk is aan de straal van de geconstrueerde cirkel, dus $|MD| = r$.

We willen aantonen dat $|MD| = |MC|$, wat volgt uit $\Delta BMC \cong \Delta CMD$.

$$\Delta AMB \cong \Delta CMB \text{ (ZZZ) want } \begin{cases} |AB| = |BC| & (\text{ABCDE is regelmatig}) \\ |AM| = |MB| = |MC| = r \end{cases}$$

\Downarrow

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

\Downarrow

$$\hat{B} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ \text{ want ABCDE is een regelmatige vijfhoek}$$

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 54^\circ$$

Omdat de driehoek BMC gelijkbenig is ($|MB| = |MC| = r$) geldt:

$$\hat{B}_2 = \hat{C}_1 = 54^\circ$$

\Downarrow

$$\hat{C} = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 108^\circ \text{ (ABCDE is een regelmatige vijfhoek)}$$

$$\hat{C}_2 = 54^\circ$$

$$\Delta BMC \cong \Delta CMD \text{ (ZHZ) want } \begin{cases} |BM| = |CM| = r \\ \hat{B}_2 = \hat{C}_2 = 54^\circ \\ |BC| = |CD| \text{ (als zijden van de regelmatige vijfhoek ABCDE)} \end{cases}$$

\Downarrow

$$|MC| = |MD|$$

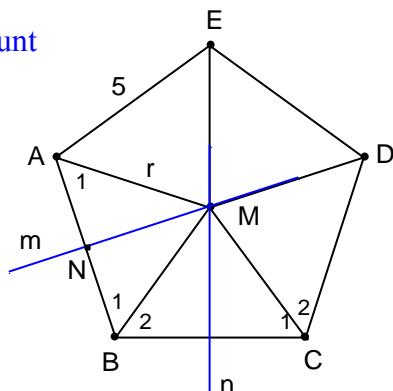
\Downarrow

$$|MD| = r$$

- 3 Bereken de straal van die omgeschreven cirkel van ABCDE.

$$\text{In } \Delta AMN \text{ geldt: } \cos \hat{A}_1 = \frac{|AN|}{|MA|}.$$

$$\text{Bijgevolg: } r = |MA| = \frac{|AN|}{\cos \hat{A}_1} = \frac{2,5}{\cos 54^\circ} \approx 4,25.$$



Opdracht 37 bladzijde 34

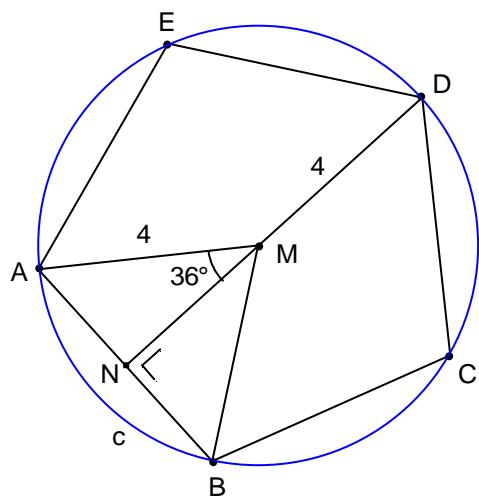
- 1 Bereken de zijde en de omtrek van de regelmatige vijfhoek ABCDE met omgeschreven cirkel $c(M, 4)$.

- $z_5 = 2 \cdot |AN|$ met $|AN|$ in ΔAMN uit

$$\sin 36^\circ = \frac{|AN|}{4} \Rightarrow |AN| = 4 \sin 36^\circ.$$

$$z_5 = 8 \sin 36^\circ \approx 4,70$$

- De omtrek is dan $5z_5 \approx 23,51$.



- 2 Bereken de oppervlakte van de vijfhoek ABCDE.

$$A_5 = 5 \cdot \text{opp AMB}$$

$$= 5 \cdot \frac{a_5 \cdot z_5}{2} \text{ met } a_5 \text{ uit } \cos 36^\circ = \frac{a_5}{4}$$

$$\Rightarrow A_5 = 5 \cdot \frac{4 \cos 36^\circ \cdot 8 \sin 36^\circ}{2} = 80 \cos 36^\circ \cdot \sin 36^\circ \approx 38,04$$

Opdracht 38 bladzijde 36

Een regelmatige twaalfhoek heeft 5 cm als straal van de omgeschreven cirkel.

- 1 Bereken de omtrek van deze twaalfhoek.

$$p_{12} = 2 \cdot 12 \cdot 5 \cdot \sin \frac{180^\circ}{12} \text{ cm}$$

$$\approx 31,06 \text{ cm}$$

- 2 Bereken de oppervlakte van deze twaalfhoek.

$$A_{12} = 12 \cdot 5^2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{12} \cdot \cos \frac{180^\circ}{12} \text{ cm}^2$$

$$= 75 \text{ cm}^2$$

- 3 Hoeveel procent van de omgeschreven cirkel wordt door de twaalfhoek bedekt?

De oppervlakte van de omgeschreven cirkel is $\pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2 = 25\pi \text{ cm}^2$.

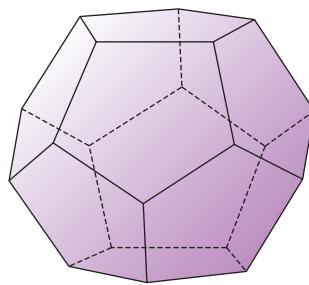
Er wordt dus $\frac{75}{25\pi} = \frac{3}{\pi} \approx 95,5\%$ van deze cirkel bedekt door de twaalfhoek.



Opdracht 39 bladzijde 36

Een dodecaëder is een ruimtefiguur die bestaat uit twaalf regelmatige vijfhoeken.

Bereken de manteloppervlakte van een dodecaëder met ribbe 5 cm.

Oplossing

- $z_5 = 5$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2r \sin \frac{180^\circ}{5} &= 5 \\ \Rightarrow r &= \frac{5}{2 \sin 36^\circ}\end{aligned}$$

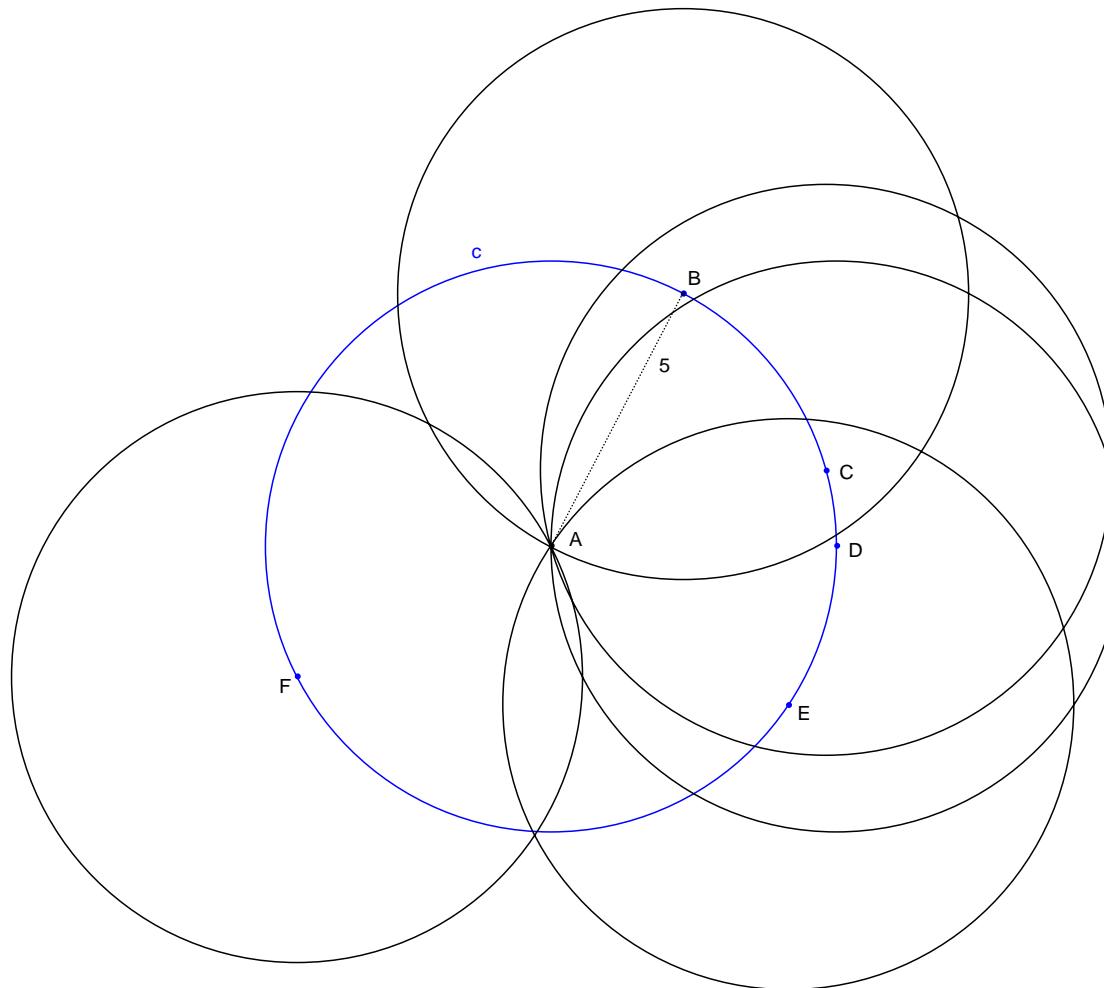
- $A_5 = 5 \cdot \left(\frac{5}{2 \sin 36^\circ} \right)^2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{5} \cdot \cos \frac{180^\circ}{5}$

$$= \frac{125}{4} \cdot \frac{1}{\tan 36^\circ} \approx 43,01$$

- De manteloppervlakte van de dodecaëder is $516,14 \text{ cm}^2$.

Opdracht 40 bladzijde 42

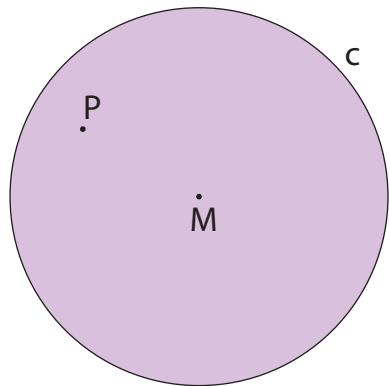
Bepaal de verzameling van de middelpunten van de cirkels die door een gegeven punt A gaan en 5 cm als straal hebben.

Oplossing

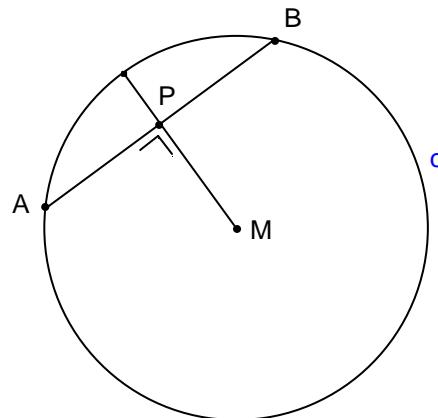
De middelpunten liggen op de cirkel $c(A, 5)$.

Opdracht 41 bladzijde 42

Construeer een koorde $[AB]$ van de cirkel $c(M, r)$ zodanig dat P het midden is van $[AB]$.

**Oplossing**

- Teken de middellijn PM .
- Teken de loodlijn op PM door P , deze snijdt de cirkel in A en in B .
- Aangezien de middellijn loodrecht op een koorde de koorde middendoor deelt, is P het midden van $[AB]$.

**Opdracht 42 bladzijde 42**

In een cirkel met middelpunt M heeft de koorde $[AB]$ een lengte van 6 cm.

Het apothema van $[AB]$ is 2 cm.

- 1 Bereken de straal van de cirkel.

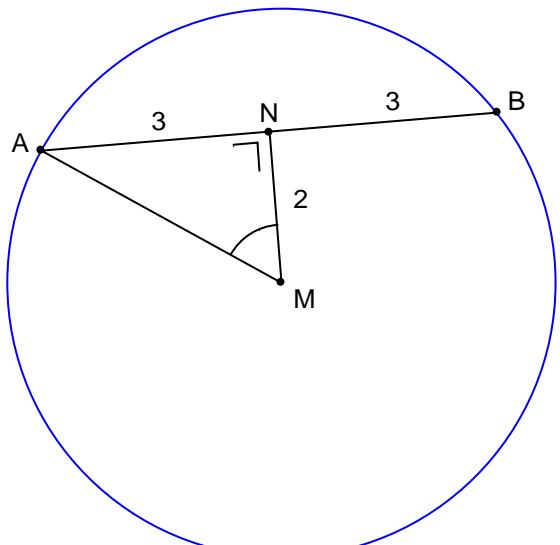
Noem N het midden van $[AB]$.

$$\begin{aligned} \text{In } \Delta AMN \text{ is } r &= |AM| = \sqrt{3^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

De straal van de cirkel is $\sqrt{13}$ cm.

- 2 Bereken \widehat{AMB} .

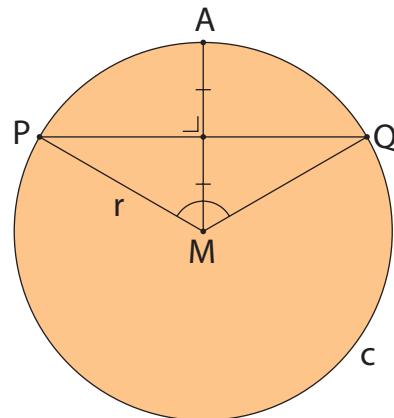
$$\begin{aligned} \widehat{AMB} &= 2 \cdot \widehat{AMN} \quad \text{met} \quad \tan \widehat{AMN} = \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow \widehat{AMN} = 56^\circ 18' 36'' \\ &\Rightarrow \widehat{AMB} = 112^\circ 37' 12'' \end{aligned}$$



Opdracht 43 bladzijde 42

In de cirkel $c(M, r)$ deelt de koorde $[PQ]$ de straal $[MA]$ loodrecht middendoor.

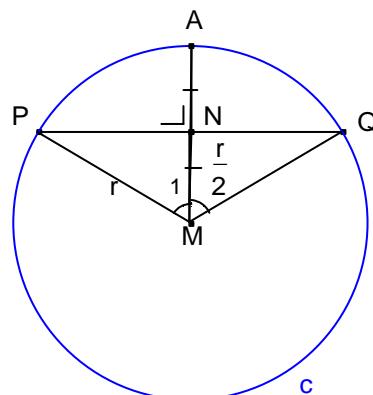
Bereken de hoek \widehat{PMQ} .

**Oplossing**

$$\text{In } \triangle PMN \text{ is } \cos \hat{M}_1 = \frac{|MN|}{|PM|} = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{M}_1 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{PMQ} = 120^\circ$$

**Opdracht 44 bladzijde 43**

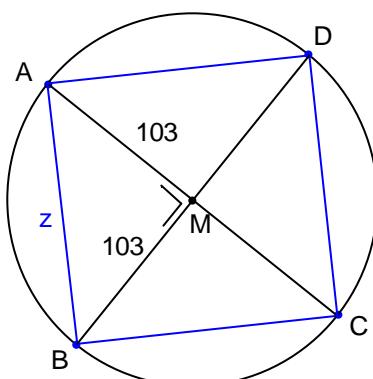
Om een vierkant houten tafeltje te maken, vertrekt men van een ronde boomstam met een diameter van 206 cm. Wat is de zijde van het grootste vierkant dat hieruit gezaagd kan worden?

**Oplossing**

$$z = |AB| \text{ in } \triangle AMB:$$

$$z = \sqrt{103^2 + 103^2} \approx 145,66$$

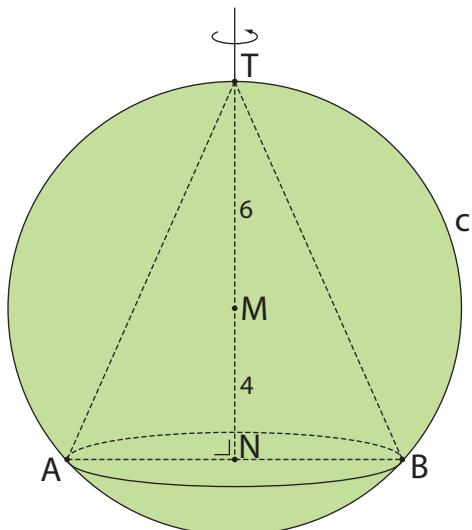
De zijde van het grootste vierkant is 145 cm.



Opdracht 45 bladzijde 43

Laten we de driehoek TAB draaien over 180° om de middellijn TM van de cirkel c, dan ontstaat een kegel.

Bereken de inhoud van de kegel als $|TM| = 6 \text{ dm}$ en $|MN| = 4 \text{ dm}$.

**Oplossing**

$$|TM| = |AM| = 6$$

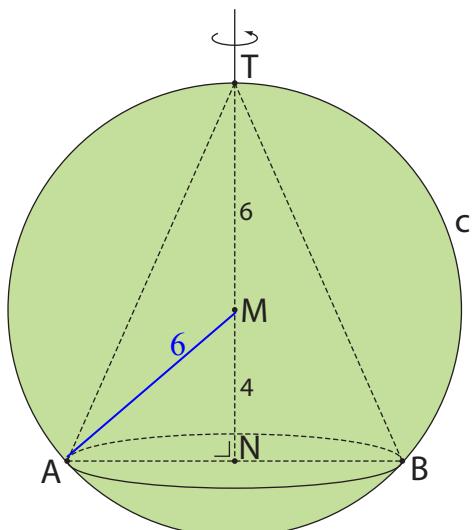
↓

$$|AN| = \sqrt{6^2 - 4^2}$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

De inhoud van de kegel is

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10 \text{ dm}^3 = \frac{200\pi}{3} \text{ dm}^3 \approx 209,44 \text{ dm}^3.$$

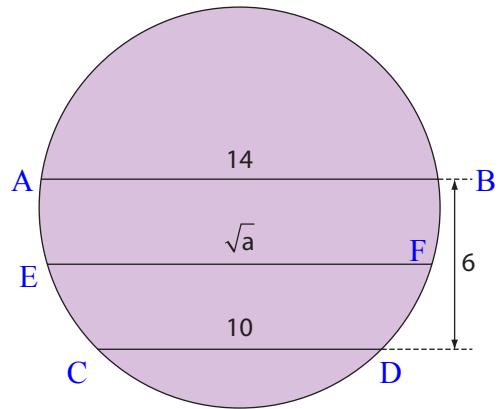


Opdracht 46 bladzijde 43

Twee evenwijdige koorden in een cirkel hebben 10 en 14 als lengte, en hun onderlinge afstand is 6.

De koorde, evenwijdig met de gegeven koorden en precies halfweg tussen hen, heeft lengte \sqrt{a} .

Dan is a gelijk aan



A 184

B 176

C 168

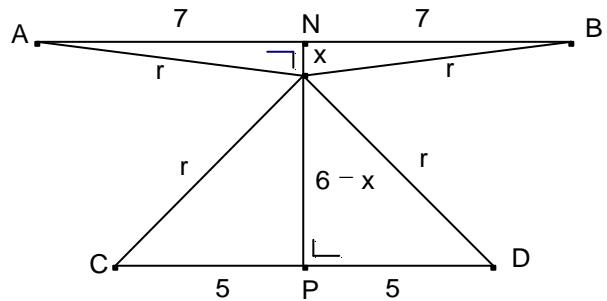
D 156

E 144

Oplossing

- We bepalen eerst de straal r van de cirkel.

Stel $|MN| = x$, dan is $|MP| = 6 - x$



$$\left. \begin{array}{l} \text{In } \triangle MNB \text{ is } x^2 + 7^2 = r^2 \\ \text{In } \triangle MPD \text{ is } (6-x)^2 + 5^2 = r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + 49 = 36 - 12x + x^2 + 25$$

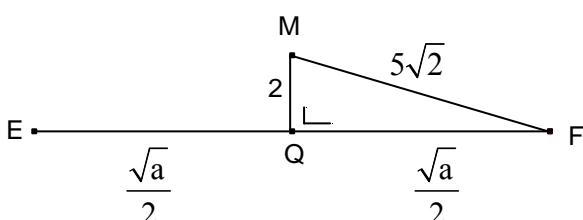
\Downarrow

$$x = 1$$

zodat $r = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

- De koorde met lengte \sqrt{a} ligt dus op een afstand 2 van het middelpunt.

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle MQF \text{ is } 2^2 + \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2 &= (5\sqrt{2})^2 \\ \Rightarrow 4 + \frac{a}{4} &= 50 \\ \Rightarrow a &= 184 \end{aligned}$$

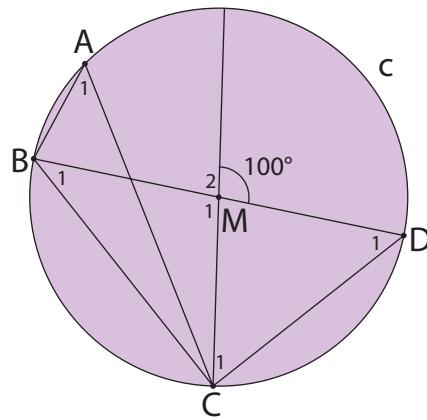


Antwoord A is het juiste antwoord.

Opdracht 47 bladzijde 44

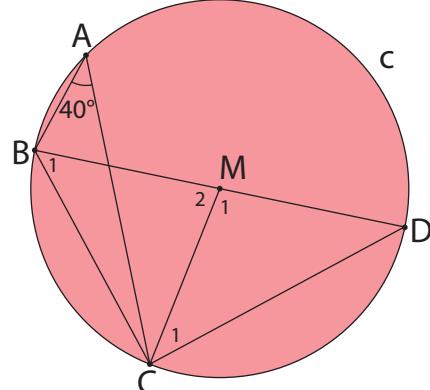
1 Bereken de hoeken \hat{A}_1 , \hat{B}_1 , \hat{C}_1 , \hat{D}_1 , \hat{M}_2 en \hat{BCD} in de cirkel c met middelpunt M als $\hat{M}_1 = 100^\circ$.

- $\hat{M}_2 = 80^\circ$
- $\hat{B}_1 = \frac{180^\circ - \hat{M}_1}{2} \quad \text{in } \Delta BMC$
 $= 40^\circ$
- $\hat{C}_1 = \frac{180^\circ - \hat{M}_2}{2} \quad \text{in } \Delta CMD$
 $= 50^\circ$
- $\hat{D}_1 = \hat{C}_1 = 50^\circ \quad \text{in } \Delta CMD$
- $\hat{A}_1 = \frac{1}{2} \hat{M}_1 \quad \text{op } \widehat{BC}$
 $= 50^\circ$
- $\hat{BCD} = 90^\circ \quad \text{op } \widehat{BD}$



2 Bereken de hoeken \hat{B}_1 , \hat{C}_1 , \hat{D}_1 , \hat{M}_1 , \hat{M}_2 en \hat{BCD} in de cirkel c met middelpunt M als $\hat{A}_1 = 40^\circ$.

- $\hat{M}_2 = 2 \cdot \hat{A} = 80^\circ \quad \text{op } \widehat{BC}$
- $\hat{M}_1 = 100^\circ$
- $\hat{D} = \hat{A} = 40^\circ \quad \text{op } \widehat{BC}$
- $\hat{C}_1 = \hat{D} = 40^\circ \quad \text{in } \Delta CMD$
- $\hat{B}_1 = \frac{1}{2} \hat{M}_1 = 50^\circ \quad \text{op } \widehat{CD}$
- $\hat{BCD} = 90^\circ \quad \text{op } \widehat{BD}$

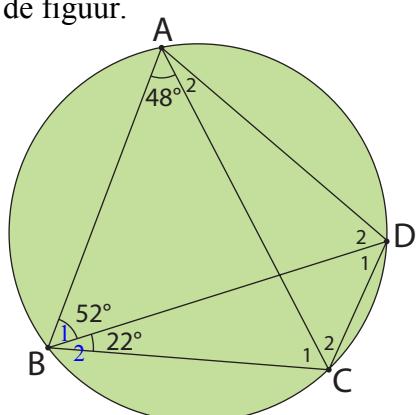


Opdracht 48 bladzijde 44

Bereken de hoeken \hat{A}_2 , \hat{C}_1 , \hat{C}_2 , \hat{D}_1 en \hat{D}_2 met de gegevens in de figuur.

Oplossing

- $\hat{D}_1 = \hat{A} = 48^\circ \quad \text{op } \widehat{BC}$
- $\hat{A}_2 = \hat{B}_1 = 22^\circ \quad \text{op } \widehat{CD}$
- $\hat{C}_1 = 180^\circ - 48^\circ - 74^\circ = 58^\circ \quad \text{in } \Delta ABC$
- $\hat{D}_2 = \hat{C}_1 = 58^\circ \quad \text{op } \widehat{AB}$
- $\hat{C}_2 = \hat{B}_2 = 52^\circ \quad \text{op } \widehat{AD}$

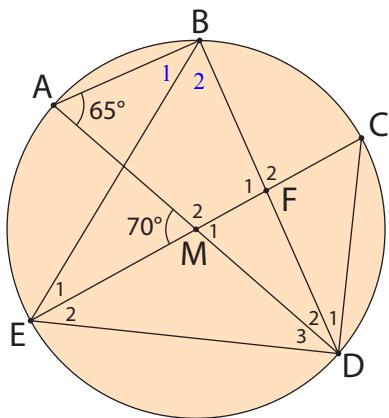


Opdracht 49 bladzijde 45

Bereken de hoeken \hat{D}_1 , \hat{D}_2 , \hat{D}_3 , \hat{E}_1 , \hat{E}_2 , \hat{F}_1 , \hat{F}_2 en \hat{C} met de gegevens in de cirkel met middelpunt M.

Oplossing

- $\hat{M}_1 = 70^\circ$
- $\hat{M}_2 = 110^\circ$
- $\hat{B}_{12} = 90^\circ$ op \widehat{AD}
- $\hat{D}_2 = 90^\circ - \hat{A}$ in ΔABD
 $= 25^\circ$
- $\hat{E}_2 = \frac{180^\circ - \hat{M}_2}{2}$ in ΔMED
 $= 35^\circ$
- $\hat{D}_3 = \hat{E}_2 = 35^\circ$ in ΔMED
- $\hat{D}_1 = 30^\circ$ $\hat{D}_{123} = 90^\circ$
- $\hat{E}_1 = \hat{D}_1 = 30^\circ$ op \widehat{BC}
- $\hat{F}_2 = 180^\circ - \hat{M}_1 - \hat{D}_2$ in ΔMDF
 $= 85^\circ$
- $\hat{F}_1 = 180^\circ - \hat{F}_2$
 $= 95^\circ$
- $\hat{C} = 180^\circ - \hat{F}_1 - \hat{D}_1$ in ΔCFD
 $= 55^\circ$

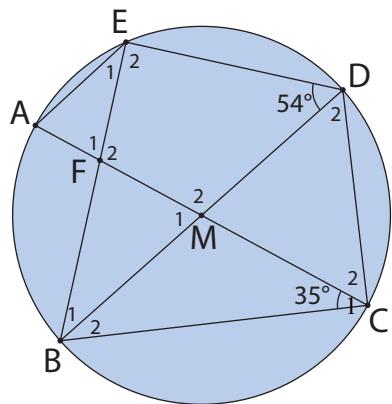


Opdracht 50 bladzijde 45

Bereken de hoeken \hat{A} , \hat{B}_1 , \hat{B}_2 , \hat{C}_2 , \hat{D}_2 , \hat{E}_1 , \hat{E}_2 , \hat{F}_1 , \hat{F}_2 , \hat{M}_1 en \hat{M}_2 met de gegevens in de cirkel met middelpunt M.

Oplossing

- $\hat{E}_2 = 90^\circ$ op \widehat{BD}
- $\hat{B}_1 = 90^\circ - \hat{D}_1$ in ΔBED
 $= 36^\circ$
- $\hat{C}_2 = 90^\circ - 35^\circ$ $\hat{C}_{12} = 90^\circ$
 $= 55^\circ$
- $\hat{M}_1 = 2 \cdot \hat{C}_1$ op \widehat{AB}
 $= 70^\circ$
- $\hat{M}_2 = 180^\circ - \hat{M}_1$
 $= 110^\circ$
- $\hat{B}_2 = \hat{C}_1 = 35^\circ$ in ΔMBC
- $\hat{D}_2 = 90^\circ - \hat{B}_2$ in ΔBCD
 $= 55^\circ$
- $\hat{E}_1 = \frac{1}{2} \hat{M}_1$ op \widehat{AB}
 $= 35^\circ$
- $\hat{F}_1 = 180^\circ - \hat{M}_1 - \hat{B}_1$ in ΔFBM
 $= 74^\circ$
- $\hat{F}_2 = 180^\circ - \hat{F}_1$
 $= 106^\circ$
- $\hat{A} = 180^\circ - \hat{F}_1 - \hat{E}_1$ in ΔAFE
 $= 71^\circ$

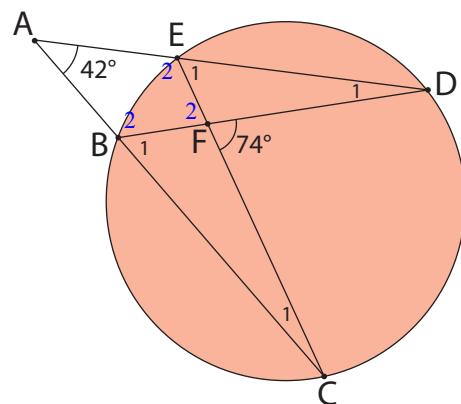


Opdracht 51 bladzijde 45

Bereken de hoeken \hat{B}_1 , \hat{C}_1 , \hat{D}_1 en \hat{E}_1 met de gegevens in de figuur.

Oplossing

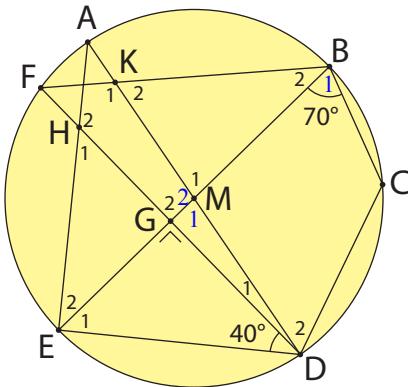
- $\hat{E}_1 = \hat{B}_1$ op \widehat{CD}
 $\Rightarrow \hat{E}_2 = \hat{B}_2$
- Met $\hat{F}_2 = 74^\circ$ is in de vierhoek ABFE
 $42^\circ + 2 \cdot \hat{B}_2 + 74^\circ = 360^\circ$
 $\Rightarrow \hat{B}_2 = 122^\circ$
 $\Rightarrow \hat{B}_1 = 58^\circ$
 $\Rightarrow \hat{E}_1 = 58^\circ$
- In ΔABD vinden we $\hat{D}_1 = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}_2 = 16^\circ$
- $\hat{C}_1 = \hat{D}_1 = 16^\circ$ op \widehat{BE}


Opdracht 52 bladzijde 45

Bereken de hoeken \hat{A} , \hat{B}_2 , \hat{C} , \hat{D}_1 , \hat{D}_2 , \hat{E}_1 , \hat{E}_2 , \hat{F} , \hat{H}_1 en \hat{K}_1 met de gegevens aangeduid in de cirkel met middelpunt M.

Oplossing

- $\hat{E}_1 = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ in ΔEGD
- $\hat{B}_2 = \hat{D}_3 = 40^\circ$ op \widehat{EF}
- $\hat{C} = 180^\circ - \hat{E}_1 = 130^\circ$ in $\Delta BEDC$
- $\hat{F} = \hat{E}_1 = 50^\circ$ op \widehat{BD}
- $\hat{E}_2 = 90^\circ - \hat{E}_1 = 40^\circ$ $\hat{E}_{12} = 90^\circ$ in ΔEGH
- $\hat{H}_1 = 90^\circ - \hat{E}_2 = 50^\circ$ in ΔEGH
- $\hat{M}_1 = 2 \cdot \hat{E}_2 = 80^\circ$ op \widehat{AB}
- $\hat{D}_1 = 90^\circ - \hat{M}_1 = 10^\circ$ in ΔMGD
- $\hat{A} = 90^\circ - \hat{D}_{13} = 40^\circ$ in ΔAED
- $\hat{D}_{123} = 180^\circ - \hat{B}_1 = 110^\circ$
 $\Rightarrow \hat{D}_2 = 60^\circ$ in $\Delta EDCB$
- $\hat{K}_1 = 360^\circ - \hat{F} - \hat{G}_2 - \hat{M}_2$ in $\Delta KFGM$
 $= 120^\circ$

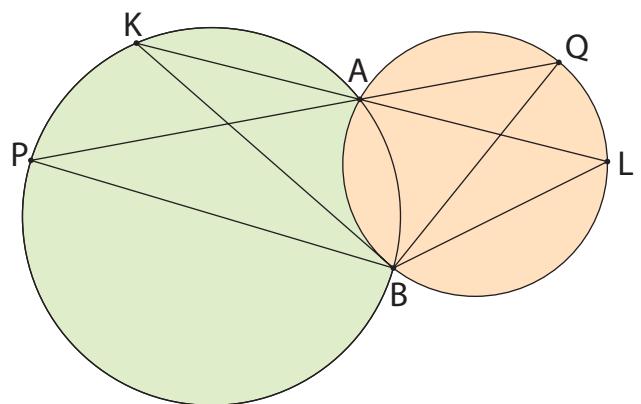


Opdracht 53 bladzijde 46

Is $\hat{PBQ} = \hat{KBL}$? Verklaar.

Oplossing

$$\begin{aligned}
 \text{Ja, want } \hat{PBQ} &= \hat{PBK} + \hat{KBQ} \\
 &\stackrel{\text{op } \widehat{PK}}{=} \hat{PAK} + \hat{KBQ} \\
 &\stackrel{\text{overst. hoeken}}{=} \hat{QAL} + \hat{KBQ} \\
 &\stackrel{\text{op } \widehat{QL}}{=} \hat{QBL} + \hat{KBQ} \\
 &= \hat{KBL}
 \end{aligned}$$

**Opdracht 54 bladzijde 46**

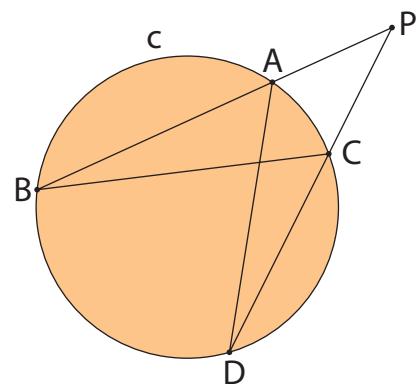
- 1 Als twee rechten uit een punt P, buiten (figuur 1) of binnen (figuur 2) een cirkel gelegen, deze cirkel snijden in A en B, respectievelijk in C en D, dan is $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$. Bewijs deze eigenschap.

Gegeven: cirkel c
punt P niet op c
A, B, C en D op c
P is het snijpunt van AB en CD

Te bewijzen: $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$

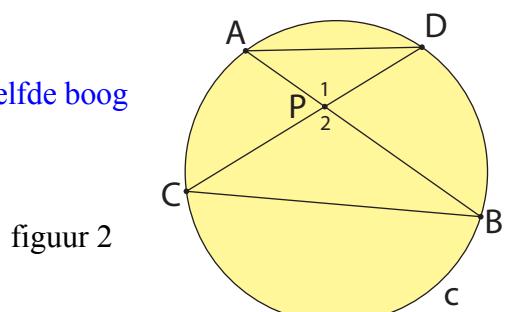
Bewijs

- Verbind A met D en B met C.
- $\Delta PAD \sim \Delta PCB$ omdat



figuur 1

$$\begin{aligned}
 H &\left\{ \begin{array}{l} \hat{P} = \hat{P} \quad (\text{figuur 1}) \\ \text{of } \hat{P}_1 = \hat{P}_2 \quad (\text{figuur 2}) \end{array} \right. \\
 H &\left\{ \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{B} \quad \text{omtrekshoeken op dezelfde boog} \\ \downarrow \\ \frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|} \end{array} \right. \\
 \downarrow & \\
 |PA| \cdot |PB| &= |PC| \cdot |PD| \\
 \downarrow & \\
 |PA| \cdot |PB| &= |PC| \cdot |PD|
 \end{aligned}$$



figuur 2

- 2 Bereken de lengte van de koorde $[PQ]$ van $c(M; 7,5)$
als $PQ \perp AB$, $|AC| = 3$ en $|CB| = 12$.

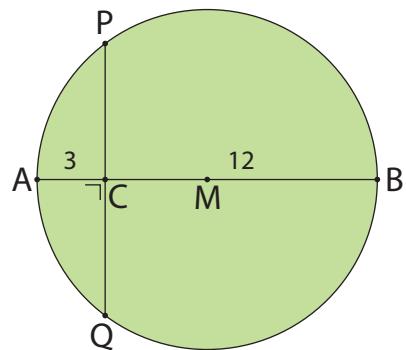
$$|CP| \cdot |CQ| = |CA| \cdot |CB|$$

$$\Downarrow |CP| = |CQ| = \frac{|PQ|}{2}$$

$$\frac{|PQ|^2}{4} = 3 \cdot 12$$

\Downarrow

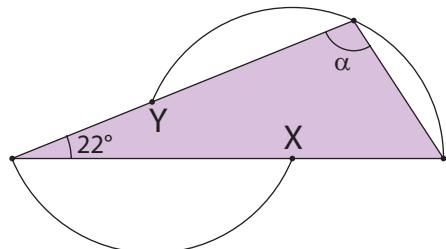
$$|PQ| = 12$$



Opdracht 55 bladzijde 47

Op de figuur zijn X en Y de middelpunten van de getekende cirkelbögen.

Bereken de hoek α .



Oplossing

In ΔBYX is

$$\hat{X}_1 = \hat{B} = 22^\circ \text{ en } \hat{Y}_2 = 136^\circ$$

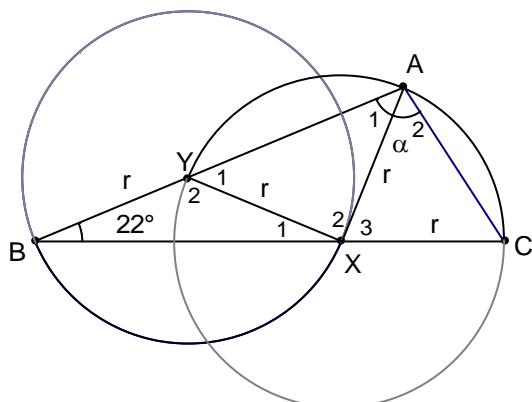
In ΔYXA is

$$\hat{Y}_1 = \hat{A}_1 = 44^\circ \text{ en } \hat{X}_2 = 92^\circ$$

ΔAXB is

$$\hat{X}_3 = 180^\circ - 92^\circ - 22^\circ = 66^\circ$$

$$\text{en dus } \hat{A}_2 = \frac{180^\circ - 66^\circ}{2} = 57^\circ$$

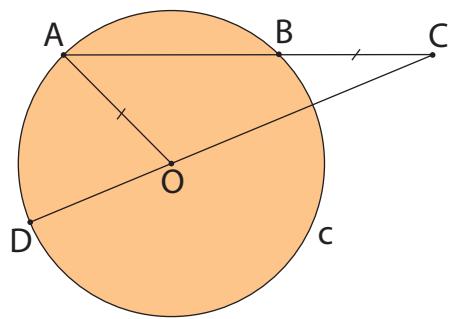


$$\alpha = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 101^\circ$$

Opdracht 56 bladzijde 47

Als je in een cirkel $c(O, r)$ een koorde $[AB]$ verlengt met $|BC|=r$ en de middellijn CD trekt, dan is $\hat{AOB} = 3 \cdot \hat{ACD}$.

Bewijs deze eigenschap die je terugvindt als stelling 8 in *Het boek der lemma's* van Archimedes (ca. 250 v. Chr.).

**Oplossing**

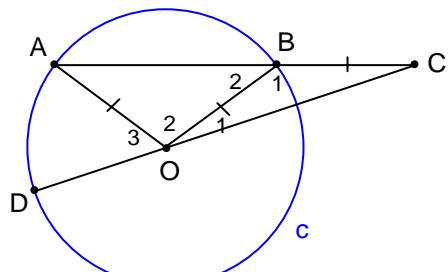
In ΔOBC is

$$\hat{O}_1 = \hat{C} \text{ en } \hat{B}_1 = 180^\circ - 2 \cdot \hat{C}$$

In ΔAOB is dan

$$\hat{B}_2 = 2 \cdot \hat{C} = \hat{A}$$

$$\text{zodat } \hat{O}_2 = 180^\circ - 4\hat{C}$$



Nu is $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ$

$$\Rightarrow \hat{C} + 180^\circ - 4\hat{C} + \hat{O}_3 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{O}_3 = 3\hat{C}$$

$$\text{of } \hat{AOB} = 3 \cdot \hat{ACD}$$

Opdracht 57 bladzijde 47

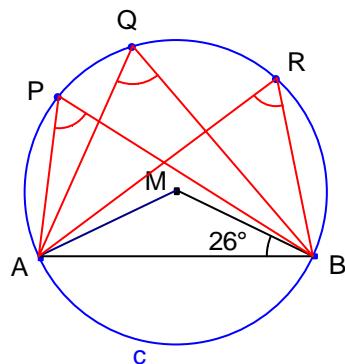
- 1 Onder welke hoek zien we de koorde $[AB]$ vanuit P, Q en R?

We zien $[AB]$ vanuit P, Q en R onder gelijke omtrekshoeken

$\hat{A}PB$, $\hat{A}QB$ en $\hat{A}RB$.

De grootte van deze omtrekshoeken is

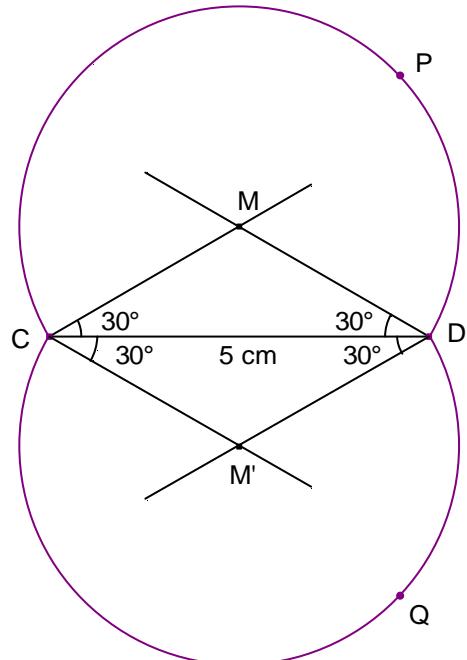
$$\frac{1}{2} \hat{AMB} = \frac{1}{2} (180^\circ - 2 \cdot 26^\circ) = 64^\circ.$$



- 2 Construeer een cirkelboog van waaruit een lijnstuk $[CD]$ van 5 cm gezien wordt onder een hoek van 60° .

- Construeer een gelijkbenige driehoek CMD met $|CD| = 5 \text{ cm}$ en $\hat{CMD} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ en dus $\hat{C} = \hat{D} = 30^\circ$.
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal $|MC| = |MD|$.
- De boog \widehat{CPD} is een cirkelboog van waaruit $[CD]$ gezien wordt onder een hoek van 60° .

- 3 Zijn er nog andere punten van waaruit $[CD]$ gezien wordt onder een hoek van 60° ?
Zo ja, welke?



Als we de cirkelboog \widehat{CPD} spiegelen om CD, dan is ook het spiegelbeeld \widehat{CQD} een boog van waaruit $[CD]$ gezien wordt onder een hoek van 60° .

- 4 Wat is de verzameling van punten van waaruit een lijnstuk $[EF]$ van 4 cm gezien wordt onder een hoek van 90° ?

De cirkel met middelpunt M, het midden van $[EF]$, en straal 2 cm bevat alle gevraagde punten. De punten E en F liggen ook op deze cirkel maar behoren niet tot de gevraagde verzameling.

Opdracht 58 bladzijde 47

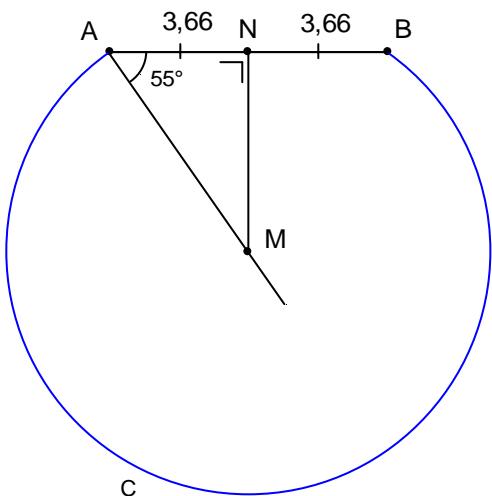
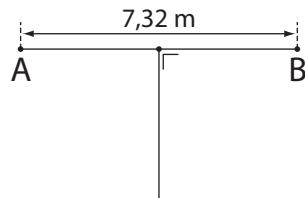
Een voetbaltrainer wil op een training zijn spelers op doel laten schieten onder eenzelfde schiethoek.

Hij weet dat hij hierbij een cirkelboog moet laten uitlijnen, waarvan het middelpunt M op de middelloodlijn van $[AB]$ moet liggen.

- 1 Op welke afstand van de doellijn ligt M als de schiethoek 35° moet bedragen?

De cirkelboog van waarop de spelers op doel schieten is \widehat{ACB} .

De gevraagde afstand is 5,23 m want $|MN| = 3,66 \cdot \tan 55^\circ \approx 5,23$.



- 2 Hoe groot is de schiethoek en de straal van de cirkelboog als M op 5 m van de doellijn ligt?

- In ΔMNA geldt:

$$\tan \hat{M}_1 = \frac{3,66}{5} = 0,732$$

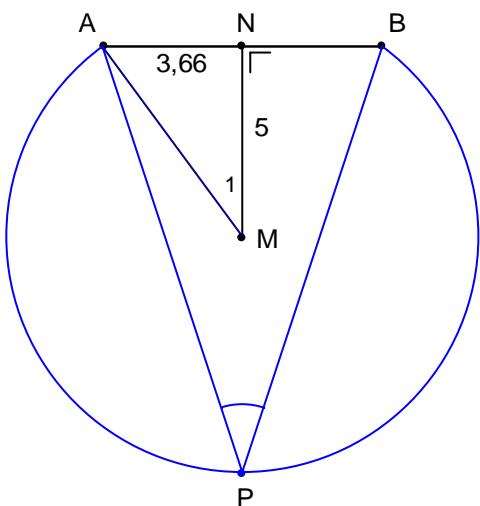
↓

$$\hat{M}_1 = 36^\circ 12' 15''$$

↓

$$\text{schiethoek } \hat{P} = \frac{1}{2} \widehat{AMB} = \hat{M}_1 = 36^\circ 12' 15''$$

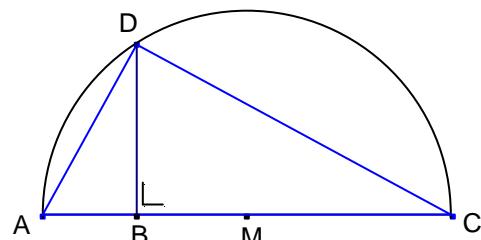
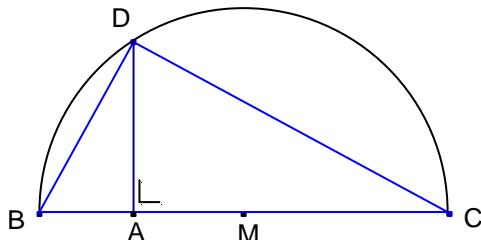
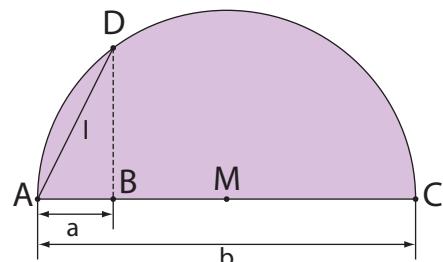
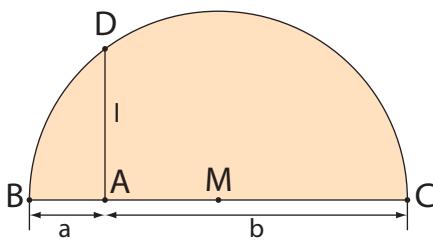
- In ΔAMN : straal $|AM| = \sqrt{5^2 + 3,66^2} = 6,20$ m.



Opdracht 59 bladzijde 48

- 1 Een lijnstuk met lengte l is **middelevenredig** tussen lijnstukken met lengtes a en b als en slechts als $l^2 = a \cdot b$ of $\frac{a}{l} = \frac{l}{b}$.

Verklaar waarom op de onderstaande figuren $[AD]$ middelevenredig is tussen $[AB]$ en $[AC]$.



ΔABC is rechthoekig in D .

In deze rechthoekige driehoek is de hoogte $|DA|$ op de schuine zijde middelevenredig tussen de stukken waarin ze de schuine zijde verdeelt.

Dus: $|AD|^2 = |AB| \cdot |AC|$

(Deze betrekking volgt ook uit
 $\Delta ABD \sim \Delta ADC$.)

ΔACD is rechthoekig in D .

In deze rechthoekige driehoek is de rechthoekszijde $[AD]$ middelevenredig tussen de schuine zijde en haar projectie op de schuine zijde.

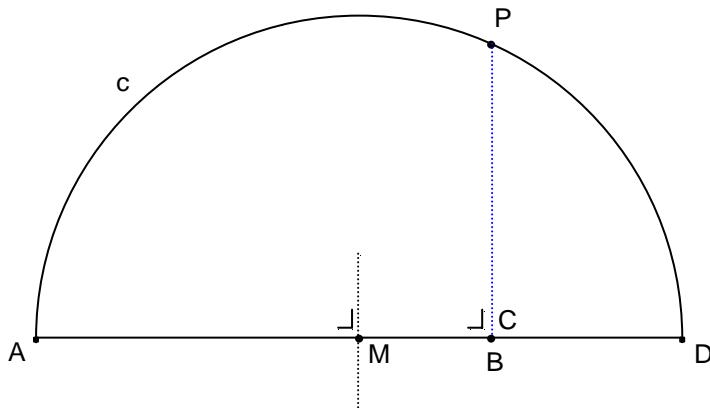
Dus: $|AD|^2 = |AC| \cdot |AB|$

(Deze betrekking volgt ook uit
 $\Delta ADB \sim \Delta ACD$.)

- 2 Construeer een lijnstuk dat middelevenredig is tussen de gegeven lijnstukken $[AB]$ en $[CD]$.



- Eerste constructie



Construeer het lijnstuk $[AD]$ met $|AD| = |AB| + |CD| = 8,5 \text{ cm}$.

Construeer het midden M van $[AD]$ (door de middelloodlijn van $[AD]$ te tekenen).

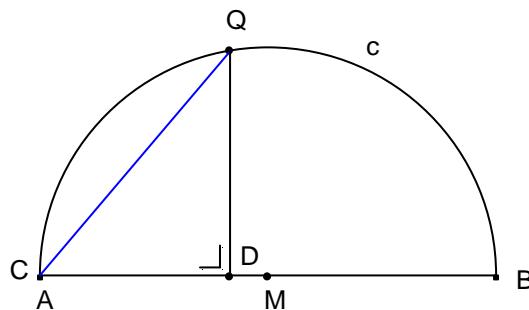
Trek een halve cirkel c op de middellijn $[AD]$, dus met middelpunt M en straal $|MA|$.

De loodlijn in B op AD snijdt die halve cirkel in P.

$[BP]$ is een gevraagd lijnstuk.

In de rechthoekige driehoek APD geldt immers: $|PB|^2 = |AB| \cdot |CD|$.

- Tweede constructie



Construeer achtereenvolgens:

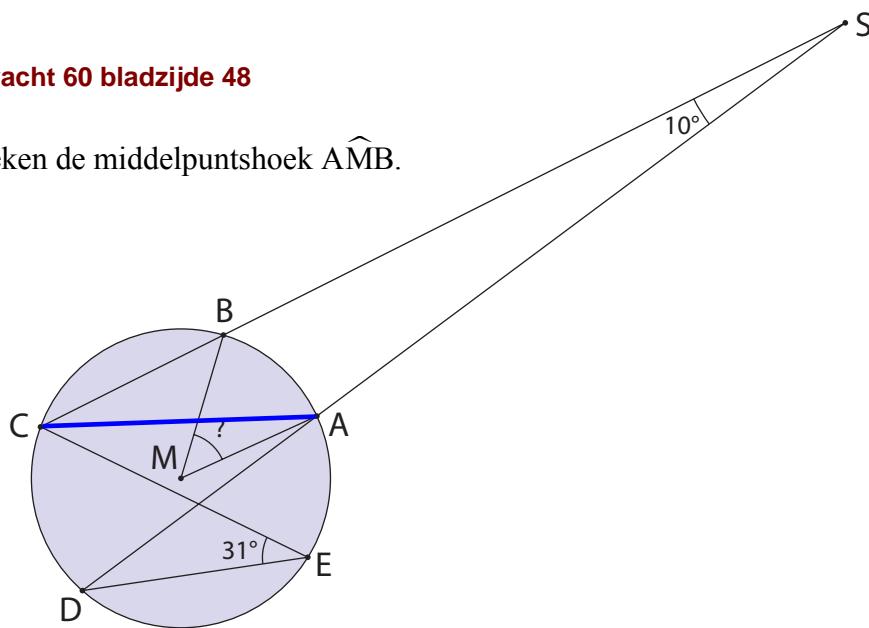
- een halve cirkel c op de middellijn $[AB]$ met $|AB| = 6 \text{ cm}$;
- C in A en D op $[AB]$ zodat $|CD| = 2,5 \text{ cm}$;
- de loodlijn in D op AB, die de halve cirkel snijdt in Q.

$[AQ]$ is een gevraagd lijnstuk.

In de rechthoekige driehoek AQB geldt immers: $|AQ|^2 = |AB| \cdot |CD|$.

Opdracht 60 bladzijde 48

Bereken de middelpuntshoek \widehat{AMB} .



Oplossing

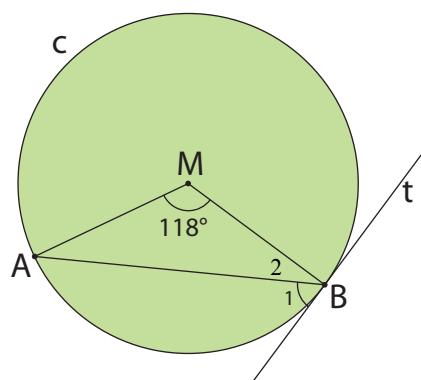
- Trek de koorde [AC] om de omtrekshoek $B\hat{C}A = \frac{1}{2} \widehat{AMB}$ te verkrijgen.
- $C\hat{A}D = C\hat{E}D = 31^\circ$ omtrekshoeken op \widehat{CD}
 $\Rightarrow C\hat{A}S = 149^\circ$
 $\Rightarrow B\hat{C}A = 180^\circ - 10^\circ - 149^\circ$ in $\triangle CAS$
 $= 21^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{AMB} = 42^\circ$

Opdracht 61 bladzijde 49

In de cirkel c is de middelpuntshoek $\widehat{AMB} = 118^\circ$ en t is de raaklijn aan c in B. Bereken de hoek \hat{B}_1 .

Oplossing

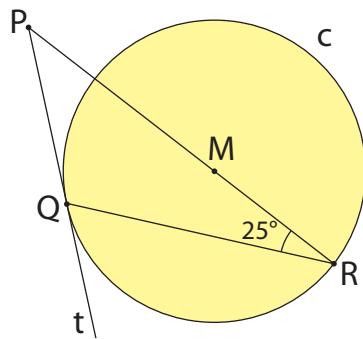
- $\hat{B}_{12} = 90^\circ$ aangezien t een raaklijn is aan c.
- $\hat{B}_2 = \frac{180^\circ - 118^\circ}{2} = 31^\circ$ in $\triangle AMB$
- $\hat{B}_1 = 90^\circ - 31^\circ = 59^\circ$



Opdracht 62 bladzijde 49

De rechte t is een raaklijn uit P aan de cirkel $c(M, r)$ met raakpunt Q .

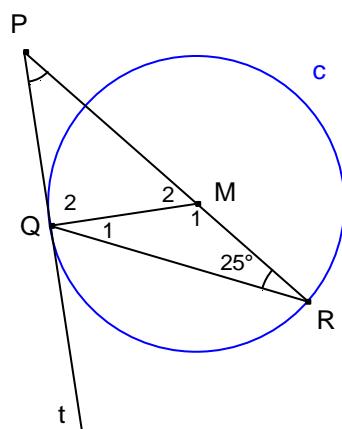
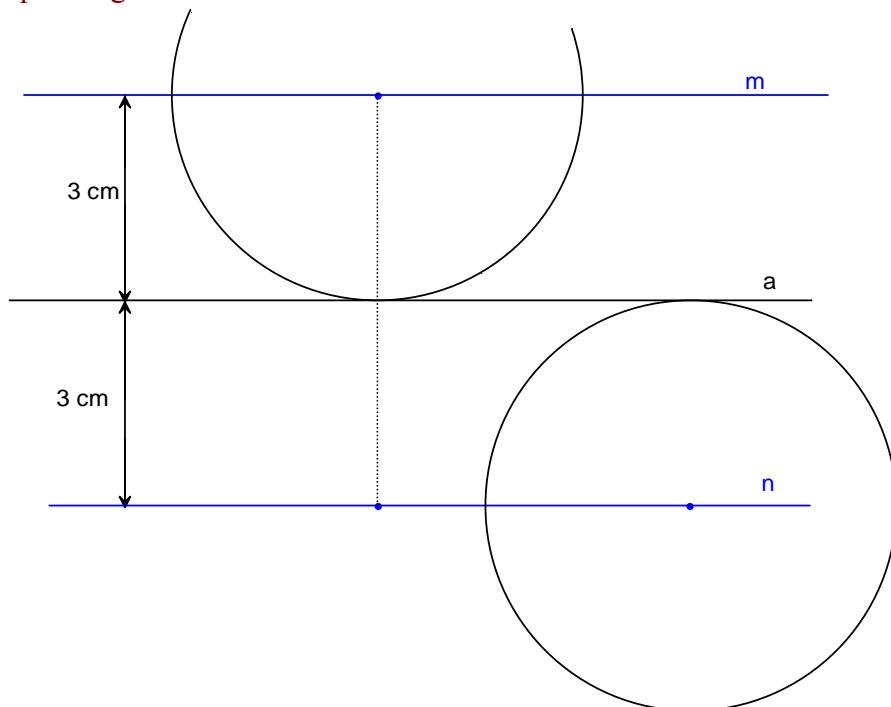
Bereken de hoek $\hat{Q}PR$ met de gegevens in de figuur.

**Oplossing**

- In ΔMQR is $\hat{Q}_1 = 25^\circ$ en $\hat{M}_1 = 130^\circ$.
- In ΔPQM is $\hat{M}_2 = 50^\circ$ en $\hat{Q}_2 = 90^\circ$ (raaklijn)
 $\Rightarrow \hat{P} = 40^\circ$.

Opdracht 63 bladzijde 49

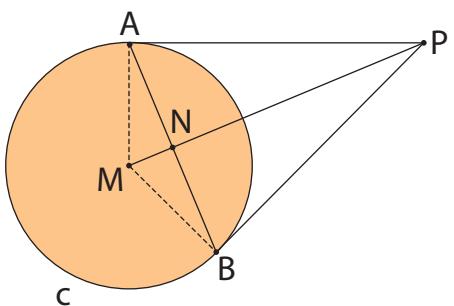
Wat is de verzameling van de middelpunten van de cirkels die een straal van 3 cm hebben en raken aan een gegeven rechte a ?

**Oplossing**

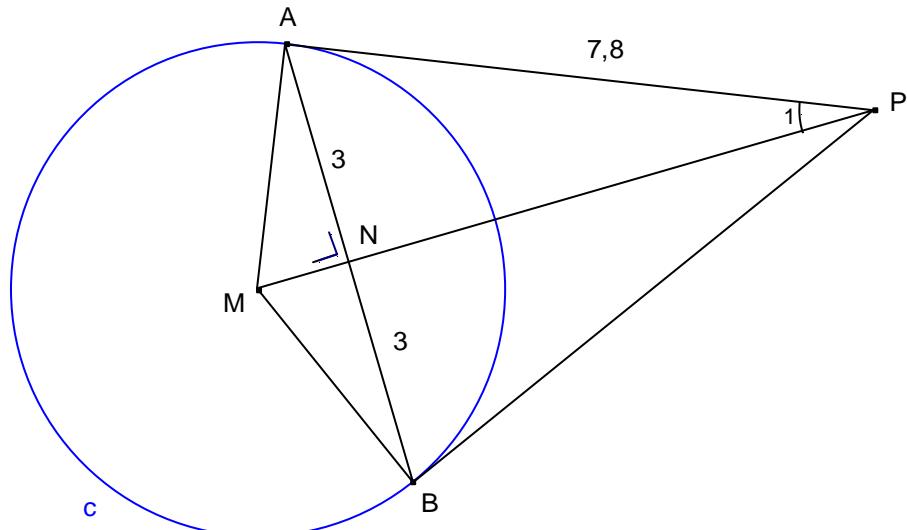
De gevraagde verzameling bestaat uit twee rechten m en n , die beide evenwijdig zijn met a en op een afstand van 3 cm van a liggen.

Opdracht 64 bladzijde 49

In de figuur is de cirkel $c(M, r)$ getekend met raaklijnen PA en PB .
 $|PA| = 7,8$ en $|AB| = 6$.



- 1 Bereken de straal van de cirkel.



- In ΔPAN is $|AN| = 3$ en $|PA| = 7,8$

$$\text{zodat } \sin \hat{P}_1 = \frac{3}{7,8} = \frac{5}{13}$$

$$|PN| = 7,2$$

$$\tan \hat{P}_1 = \frac{3}{7,2} = \frac{5}{12}$$

- In ΔMAP is $\tan \hat{P}_1 = \frac{|AM|}{|AP|}$

$$\Rightarrow |AM| = |AP| \cdot \tan \hat{P}_1 = 7,8 \cdot \frac{5}{12} = 3,25 = \frac{13}{4}$$

De straal is 3,25.

- 2 Bereken de hoek \hat{APB} .

$$\sin \hat{P}_1 = \frac{5}{13} \Rightarrow \hat{P}_1 = 22^\circ 37' 12''$$

$$\Rightarrow \hat{APB} = 45^\circ 14' 23''$$

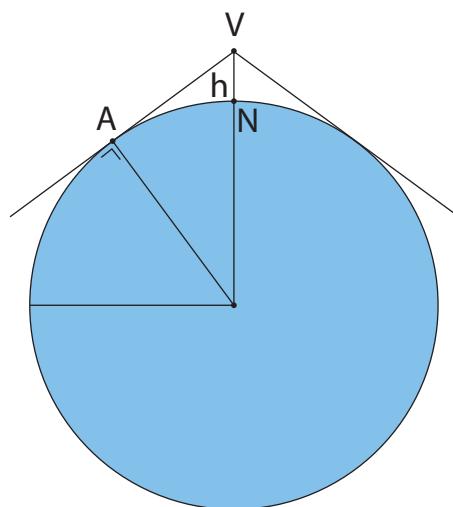
Opdracht 65 bladzijde 50

Een vliegtuig V vliegt boven de Noordpool N.

A is één van de zichtbare plaatsen op aarde met de grootste reikwijdte.

Bereken de hoogte h waarop het vliegtuig zich boven de aarde bevindt, als A op 87° NB ligt.

De straal van de aarde is 6378 km.

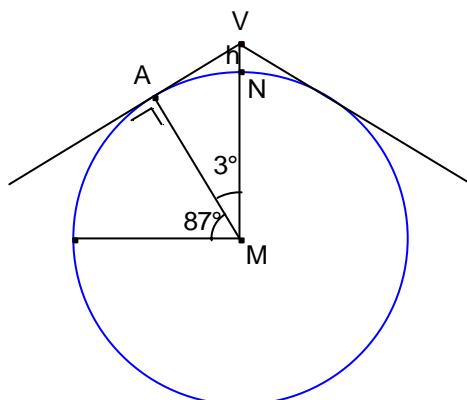
**Oplossing**

In ΔAMV is $\widehat{M} = 3^\circ$ en $|AM| = 6378$

$$\Rightarrow \cos 3^\circ = \frac{|AM|}{|VM|}$$

$$\Rightarrow |VM| = \frac{6378}{\cos 3^\circ} \approx 6386,75$$

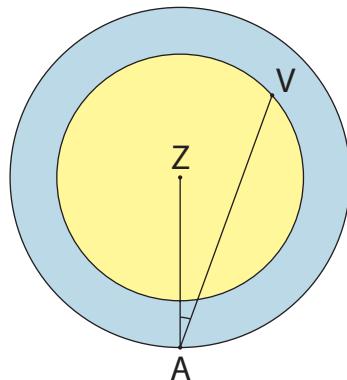
$$\begin{aligned} \Rightarrow h &= |VN| = |VM| - |NM| \\ &= 6386,75 - 6378 \\ &= 8,75 \end{aligned}$$



De hoogte van het vliegtuig is ongeveer 8,75 km.

Opdracht 66 bladzijde 50

De planeten Venus (V) en aarde (A) beschrijven bij benadering cirkelvormige banen rond de zon (Z).



- 1 Teken een stand van V en een stand van A waarbij de hoek \widehat{VAZ} het grootst is.

\widehat{VAZ} is het grootst als AV een raaklijn is aan de Venus-baan.

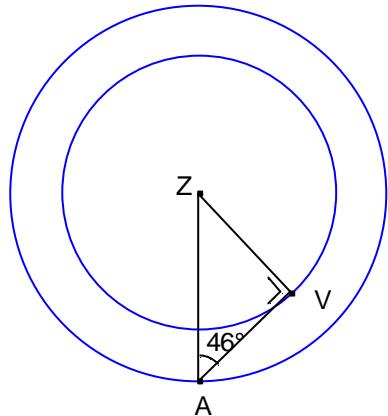
- 2 Herhaalde metingen van de hoek \widehat{VAZ} laten toe te besluiten dat de maximale grootte van deze hoek 46° is. Bereken hieruit de straal van de Venusbaan, als je weet dat de afstand tussen de aarde en de zon 150 miljoen kilometer bedraagt.

In de driehoek ZAV geldt dan:

- $\widehat{V} = 90^\circ$
- $\widehat{A} = 46^\circ$
- $|AZ| = 150\,000\,000 \text{ km}$

Uit $\sin \widehat{A} = \frac{|VZ|}{|AZ|}$ volgt:

$$\begin{aligned}|VZ| &= |AZ| \cdot \sin \widehat{A} \\ &= 150\,000\,000 \cdot \sin 46^\circ \\ &\approx 107\,900\,970\end{aligned}$$

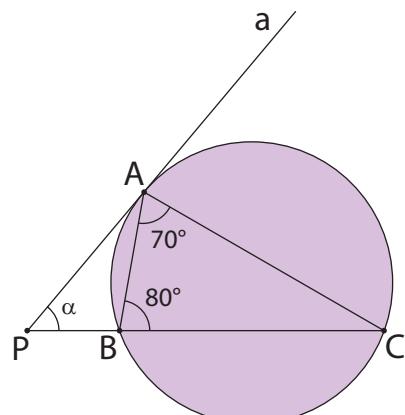


De straal van de Venusbaan is ongeveer 108 miljoen kilometer.

Opdracht 67 bladzijde 51

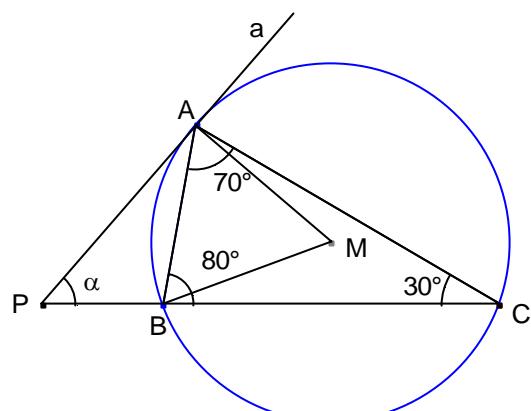
De rechte a is een raaklijn in A aan de cirkel die de hoekpunten van de driehoek ABC bevat.

Bereken de hoek α met de gegevens in de figuur.



Oplossing

- $\widehat{C} = 30^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{AMB} = 60^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{BAM} = 60^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{PAB} = \widehat{PAM} - \widehat{BAM}$
 $= 90^\circ - 60^\circ$
 $= 30^\circ$
- In ΔPBA is
 $\widehat{A} = 30^\circ$
 $\widehat{B} = 100^\circ$
zodat $\alpha = 50^\circ$

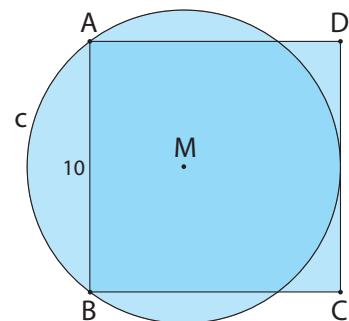


Opdracht 68 bladzijde 51

Een vierkant ABCD heeft als zijde 10.

Een cirkel $c(M, r)$ gaat door A en B en raakt aan $[CD]$.

Bereken de straal r van de cirkel.

**Oplossing**

In ΔAPM is

$$|AP|^2 + |PM|^2 = |AM|^2$$

\Downarrow

$$25 + (10 - r)^2 = r^2$$

\Downarrow

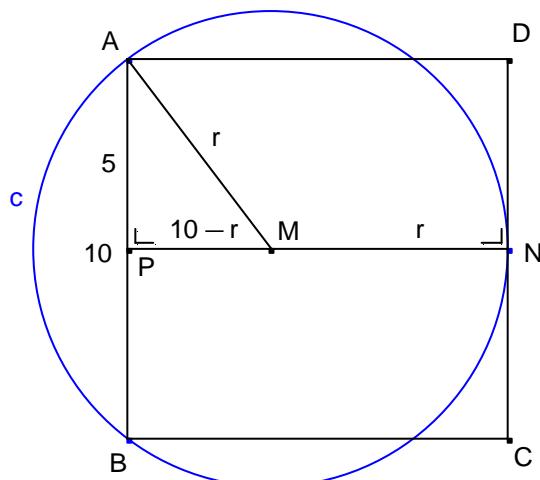
$$25 + 100 - 20r + r^2 = r^2$$

\Downarrow

$$20r = 125$$

\Downarrow

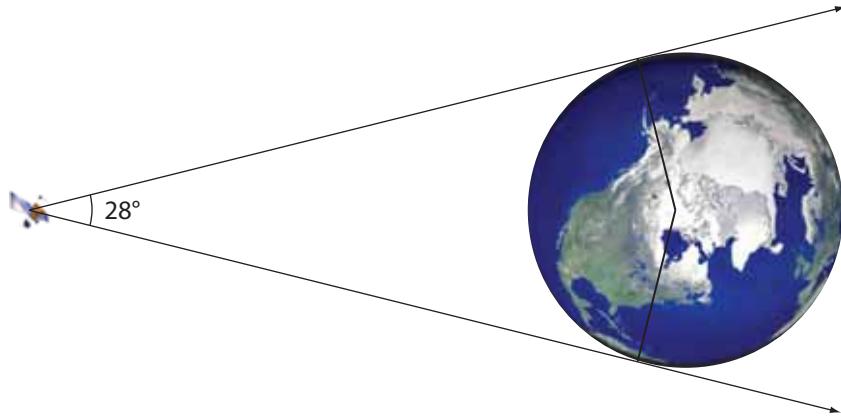
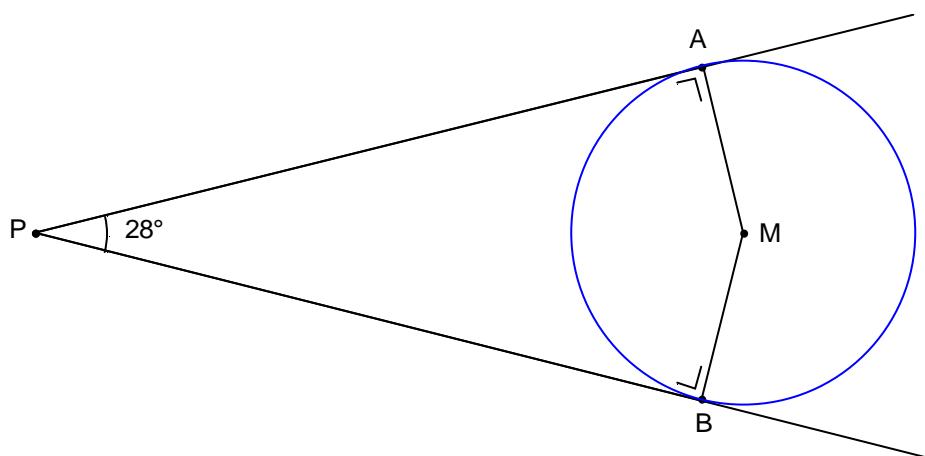
$$r = \frac{25}{4}$$



Opdracht 69 bladzijde 51

Een satelliet blijft boven hetzelfde punt op de evenaar als de aarde draait.

Als de aarde gezien wordt onder een hoek van 28° , welk deel van de evenaar is dan zichtbaar vanuit de satelliet?

**Oplossing**

In de vierhoek APBM is $\widehat{M} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 28^\circ = 152^\circ$.

Het deel van de evenaar dat zichtbaar is, is dus $\frac{152}{360} = \frac{19}{45} \approx 42,2\%$.

Opdracht 70 bladzijde 52

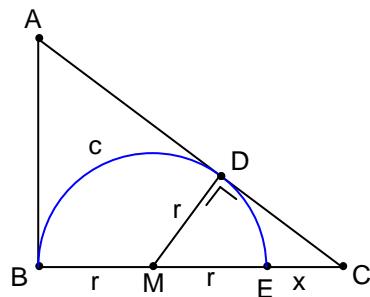
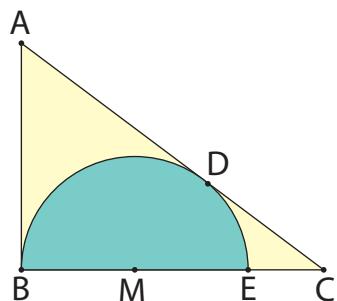
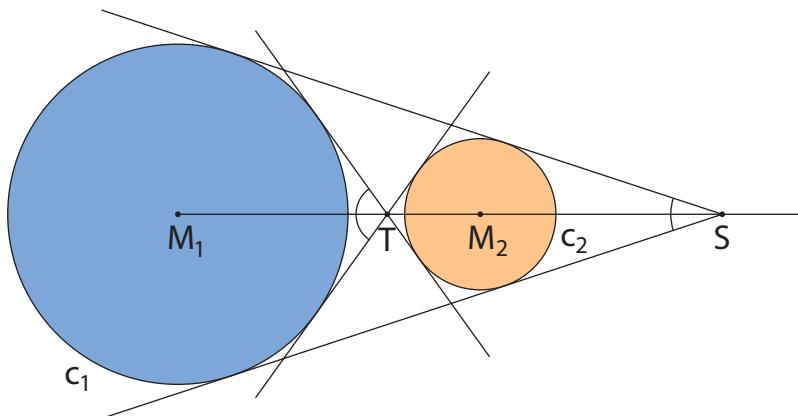
Twee zijden van de driehoek ABC raken aan een halve cirkel met middelpunt M.

$$|AB| = 3, |BC| = 4 \text{ en } |AC| = 5.$$

Bereken $|EC|$.

Oplossing

- $|AB| = |AD| = 3$ De raaklijnen uit A aan c zijn even lang.
 $\Rightarrow |DC| = 2$
- Stel $|EC| = x$, dan is $2r + x = 4$ ($= |BC|$)
 $\Rightarrow x = 4 - 2r$ (*)
- In ΔMDC is $|MD|^2 + |DC|^2 = |MC|^2$
 $\Rightarrow r^2 + 4 = (r + x)^2$
 $\stackrel{(*)}{\Rightarrow} r^2 + 4 = (4 - r)^2$
 $\Rightarrow r^2 + 4 = 16 - 8r + r^2$
 $\Rightarrow r = 1,5$
 $\stackrel{(*)}{\Rightarrow} x = |EC| = 1$

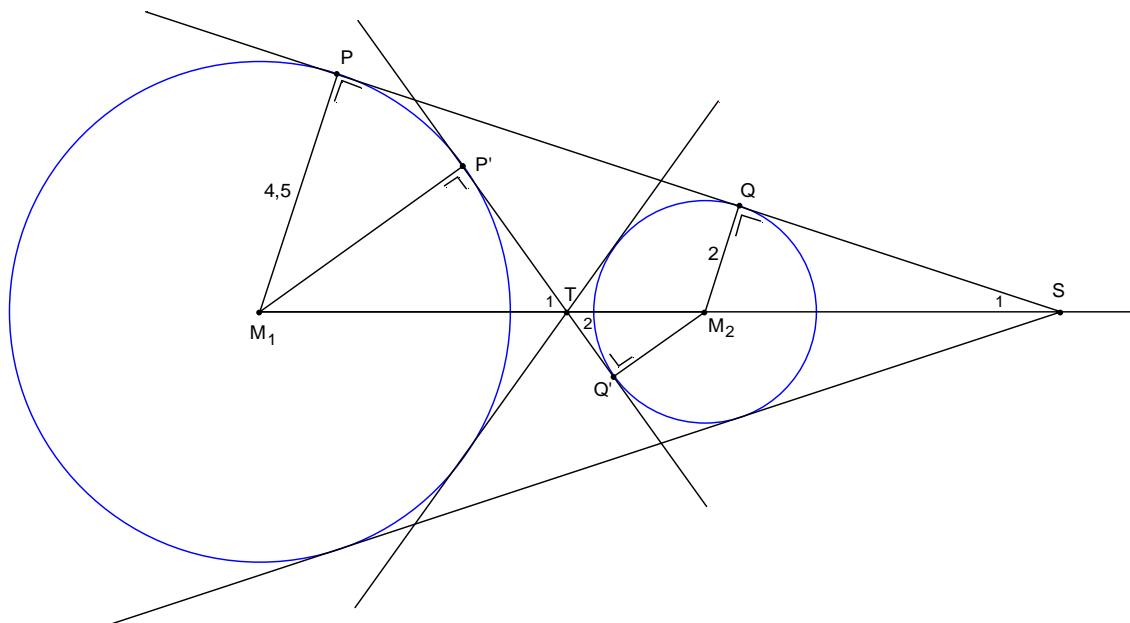
**Opdracht 71 bladzijde 52**

Gegeven zijn de cirkels $c_1(M_1; 4,5)$ en $c_2(M_2, 2)$ waarbij $|M_1M_2| = 8$.

De twee cirkels hebben twee uitwendig gemeenschappelijke raaklijnen die elkaar snijden in S en twee inwendig gemeenschappelijke raaklijnen die elkaar snijden in T.

Omdat de gemeenschappelijke middellijn M_1M_2 een symmetrieas is van de beide cirkels, liggen S en T op deze middellijn.

- 1 Bereken $|SM_2|$ en $|TM_2|$.



- $\Delta SM_1P \sim \Delta SM_2Q$ omdat $\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_1 = \hat{S}_1 \\ \hat{P} = \hat{Q} = 90^\circ \end{array} \right.$

\Downarrow

$$\frac{|SM_1|}{|SM_2|} = \frac{|M_1P|}{|M_2Q|}$$

\Downarrow

$$\frac{|SM_2| + |M_1M_2|}{|SM_2|} = \frac{|M_1P|}{|M_2Q|}$$

\Downarrow

$$\frac{|SM_2| + 8}{|SM_2|} = \frac{4,5}{2}$$

\Downarrow

$$16 = 2,5 \cdot |SM_2|$$

\Downarrow

$$|SM_2| = \frac{16}{2,5} = \frac{32}{5}$$

- $\Delta TM_1P' \sim \Delta TM_2Q'$ omdat $\left\{ \begin{array}{l} \hat{T}_1 = \hat{T}_2 \text{ (overstaande hoeken)} \\ \hat{P}' = \hat{Q}' = 90^\circ \end{array} \right.$

$$\begin{aligned}
 &\Downarrow \\
 \frac{|TM_1|}{|TM_2|} &= \frac{|M_1P'|}{|M_2Q'|} \\
 &\Downarrow \\
 \frac{8 - |TM_2|}{|TM_2|} &= \frac{4,5}{2} \\
 &\Downarrow \\
 6,5 \cdot |TM_2| &= 16 \\
 &\Downarrow \\
 |TM_2| &= \frac{16}{6,5} = \frac{32}{13}
 \end{aligned}$$

- 2 Bereken de hoeken \hat{S} en \hat{T} , gevormd door deze uitwendige en inwendige gemeenschappelijke raaklijnen, waaronder de beide cirkels gezien worden vanuit S en T.

- In ΔSM_2Q geldt :

$$\begin{aligned}
 \sin \hat{S}_1 &= \frac{|M_2Q|}{|SM_2|} = \frac{2,5}{6,4} \\
 &\Downarrow \\
 \hat{S}_1 &\approx 18,21^\circ \\
 &\Downarrow \\
 \hat{S} &= 2 \cdot \hat{S}_1 \approx 36^\circ 25' 12"
 \end{aligned}$$

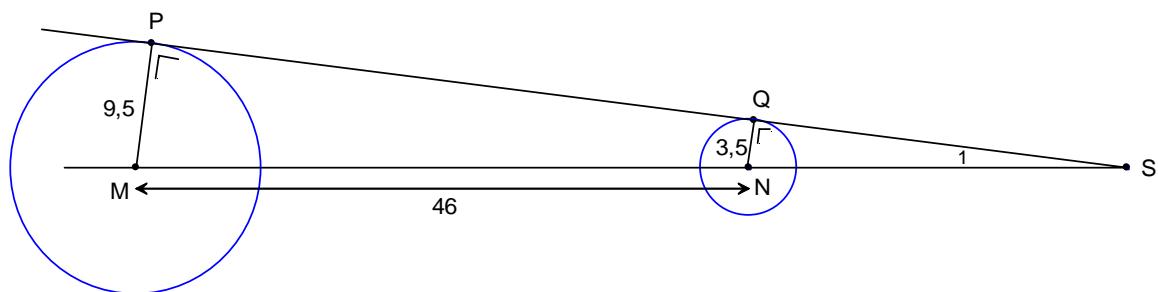
- In $\Delta TM_2Q'$ geldt :

$$\begin{aligned}
 \sin \hat{T}_2 &= \frac{|M_2Q'|}{|M_2T|} = \frac{2}{\frac{32}{13}} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16} \\
 &\Downarrow \\
 \hat{T}_2 &\approx 54,34^\circ \\
 &\Downarrow \\
 \hat{T} &= 2 \cdot \hat{T}_2 \approx 108^\circ 40' 55"
 \end{aligned}$$

Opdracht 72 bladzijde 52

Hoe lang zijn de rechte stukken van een fietsketting die loopt over een groot kamwiel met straal 9,5 cm en met een klein kamwiel met straal 3,5 cm als de middelpunten van beide kamwielen 46 cm uit elkaar staan?

Oplossing



$$\Delta SPM \sim \Delta SQN \text{ omdat } \begin{cases} \hat{S}_1 = \hat{S}_1 \\ \hat{P} = \hat{Q} = 90^\circ \end{cases}$$

↓

$$\frac{|SM|}{|SN|} = \frac{|PM|}{|QN|}$$

↓

$$\frac{|SN| + 46}{|SN|} = \frac{9,5}{3,5}$$

↓

$$|SN| = \frac{46 \cdot 3,5}{6} = \frac{161}{6}$$

$$\text{Hieruit volgt: } |SM| = \frac{161}{6} + 46 = \frac{437}{6}$$

$$\text{In } \Delta SNQ \text{ geldt: } |SQ| = \sqrt{\left(\frac{161}{6}\right)^2 - 3,5^2} = \sqrt{\frac{6370}{6}} \approx 26,6.$$

$$\text{In } \Delta SMP \text{ geldt: } |SP| = \sqrt{\left(\frac{437}{6}\right)^2 - 9,5^2} = \sqrt{\frac{46930}{3}} \approx 72,2.$$

$$\text{Bijgevolg: } |PQ| = |SP| - |SQ| \approx 45,6.$$

De gevraagde lengte is 45,6 cm.

Opdracht 73 bladzijde 53

Vervolledig de volgende tabel.

	r_1	r_2	$ M_1M_2 $	onderlinge stand van $c_1(M_1, r_1)$ en $c_2(M_2, r_2)$
1	8	2	6	
2	7	3	12	
3	4	1	0	
4	9	2	5	
5	6	5	11	
6	10	3	8	
7	5	3		inwendig rakend
8		4	9	uitwendig rakend

Oplossing

	r_1	r_2	$ M_1M_2 $	onderlinge stand van $c_1(M_1, r_1)$ en $c_2(M_2, r_2)$
1	8	2	6	inwendig rakend
2	7	3	12	volledig buiten elkaar
3	4	1	0	concentrisch
4	9	2	5	volledig binnen elkaar
5	6	5	11	uitwendig rakend
6	10	3	8	snijdend
7	5	3	2	inwendig rakend
8	5	4	9	uitwendig rakend

Opdracht 74 bladzijde 53

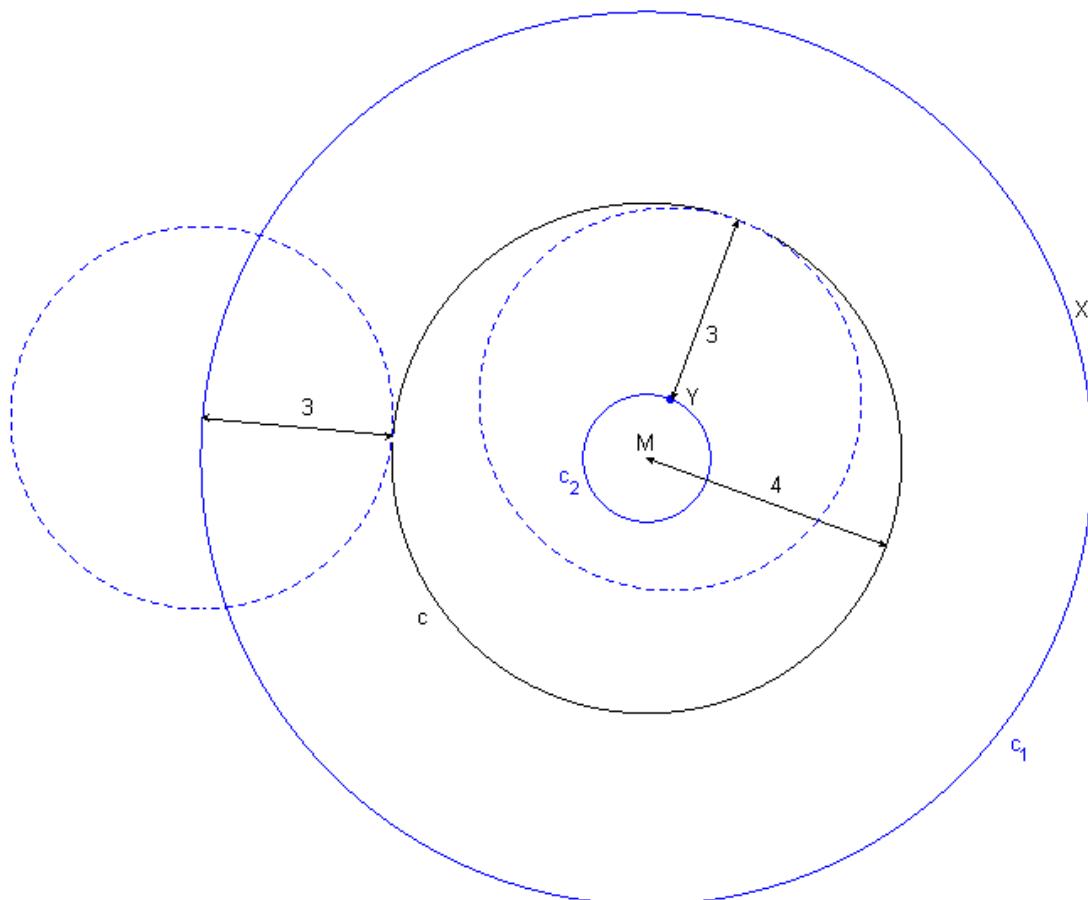
Wat is de verzameling van de middelpunten van de cirkels die een straal van 3 cm hebben en die raken aan een gegeven cirkel met middelpunt M en straal 4 cm?

Oplossing

Als $c(M,4)$ de gegeven cirkel is, dan bestaat de gevraagde verzameling uit twee cirkels:

$c_1(M, 4+3)$ en $c_2(M, 4-3)$,

dus $c_1(M, 7)$ en $c_2(M, 1)$.



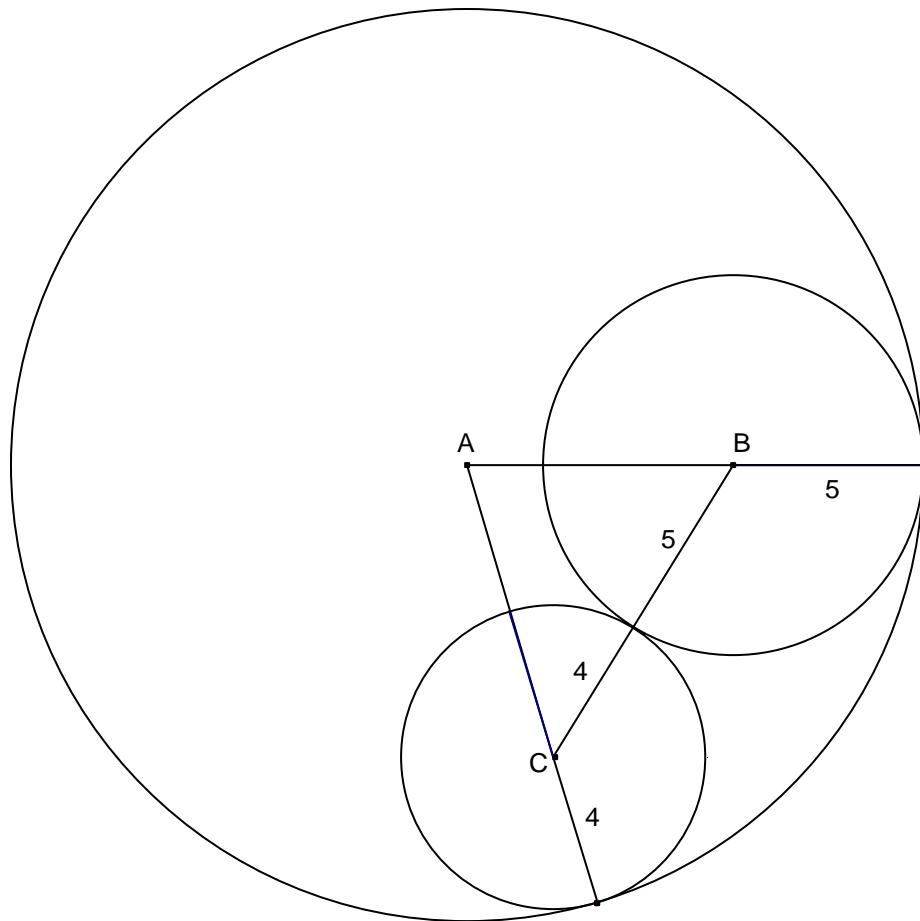
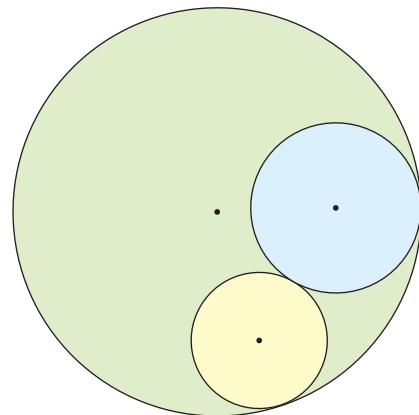
Opdracht 75 bladzijde 53

Een cirkel met straal 4 en een cirkel met straal 5 raken elkaar uitwendig en beide raken inwendig aan een cirkel met straal 12.

Bepaal de omtrek van de driehoek gevormd door de middelpunten van deze drie cirkels.

- A 18 B 21 C 24 D 25 E 26

Oplossing



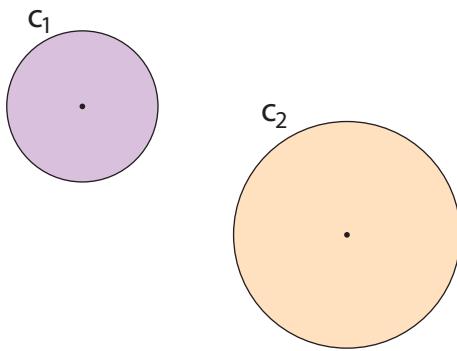
$$|AB| = 12 - 5 = 7$$

$$|AC| = 12 - 4 = 8$$

$$|BC| = 4 + 5 = 9$$

De omtrek van ΔABC is 24.

Antwoord C is het juiste antwoord.

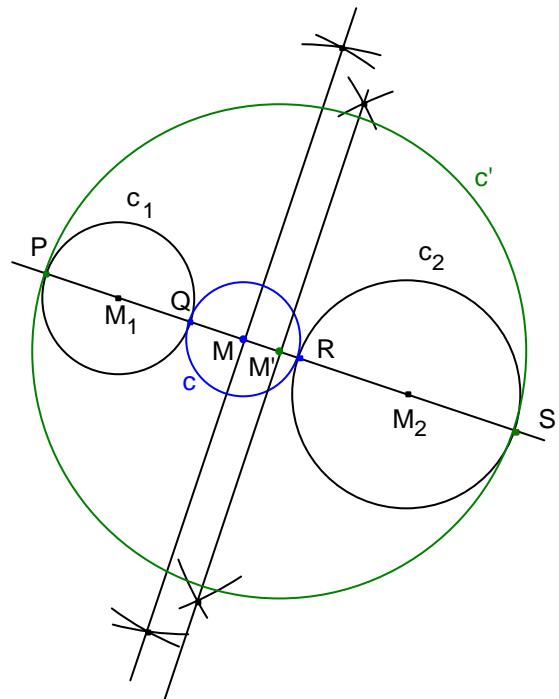
Opdracht 76 bladzijde 54

- 1 Construeer een cirkel die de cirkels c_1 en c_2 uitwendig raakt.
- 2 Construeer een cirkel die de cirkels c_1 en c_2 inwendig raakt.

Oplossing

De centraal M_1M_2 snijdt de cirkels in P, Q, R en S.

- 1 Construeer het midden M van [QR].
De cirkel $c(M, |MQ|)$ raakt c_1 en c_2 uitwendig.
- 2 Construeer het midden M' van [PS].
De cirkel $c'(M', |PM'|)$ raakt c_1 en c_2 inwendig.

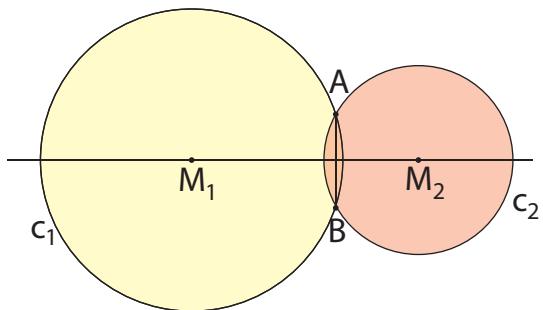


Opdracht 77 bladzijde 54

- 1 Noem A en B de snijpunten van de cirkels

c_1 en c_2 met middelpunten M_1 en M_2 .

Waarom is M_1M_2 de middelloodlijn van $[AB]$?



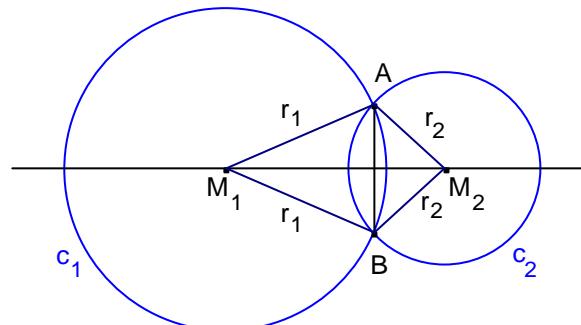
M_1 ligt even ver van A als van B, namelijk

$$|M_1A| = |M_1B| = r_1.$$

M_2 ligt even ver van A als van B, namelijk

$$|M_2A| = |M_2B| = r_2.$$

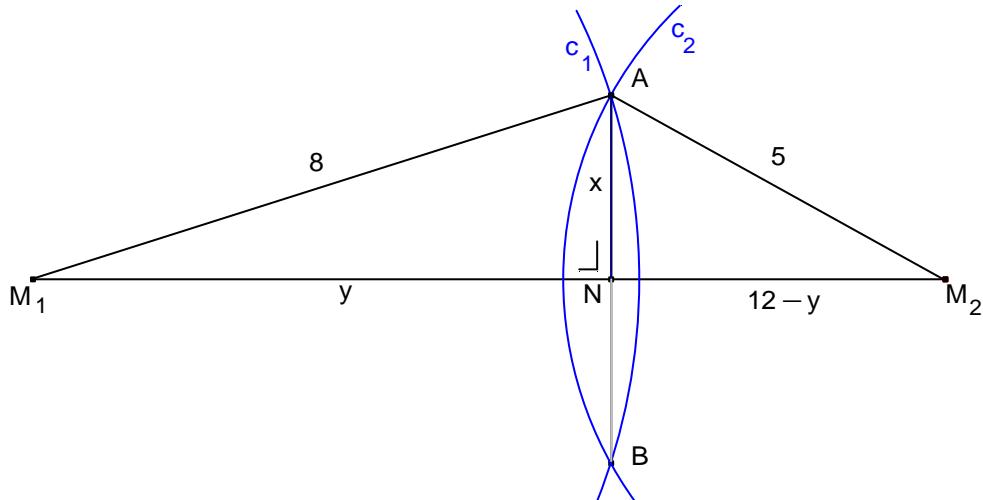
$\Rightarrow M_1M_2$ is de middelloodlijn van $[AB]$.



- 2 Twee cirkels $c_1(M_1, 8)$ en $c_2(M_2, 5)$ snijden elkaar in A en B.

Bereken $|AB|$ als $|M_1M_2| = 12$.

$$|AB| = 2 \cdot |AN| \text{ met } N \text{ op } M_1M_2 \text{ en } |M_1M_2| = 12$$



Stel $|AN| = x$ en $|M_1N| = y$, dan is $|NM_2| = 12 - y$.

Nu is $x^2 + y^2 = 8^2$ in ΔAM_1N

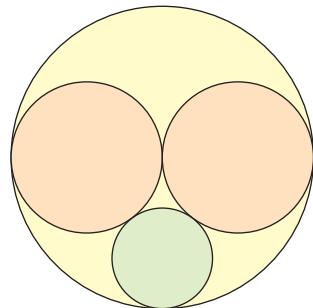
en $x^2 + (12 - y)^2 = 5^2$ in ΔAM_2N .

$$\begin{aligned}\Rightarrow 64 - y^2 &= 25 - 144 + 24y - y^2 \\ \Rightarrow y &= \frac{61}{8} \text{ zodat } x = \sqrt{64 - y^2} = \frac{5}{8}\sqrt{15} \\ \Rightarrow |AB| &= \frac{5}{4}\sqrt{15}\end{aligned}$$

Opdracht 78 bladzijde 54

Binnen een cirkel met straal 2 bevinden zich twee even grote cirkels met straal 1 die elkaar uitwendig raken en de grote cirkel inwendig raken. Buiten de twee kleine cirkels en binnen de grote cirkel bevindt zich een kleinere cirkel die de andere drie cirkels raakt.

Bereken de straal van die kleinste cirkel.

**Oplossing**

Stel $|M_3Q| = r$, de gezochte straal, dan is $|PM_3| = 2 - r$.

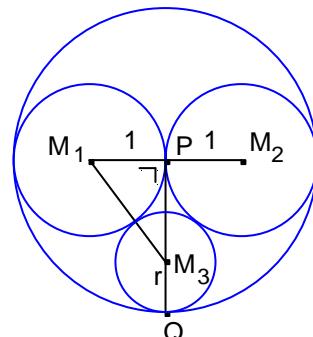
In ΔM_1PM_3 is $|M_1P|^2 + |PM_3|^2 = |M_1M_3|^2$

$$\Rightarrow 1 + (2 - r)^2 = (1 + r)^2$$

$$\Rightarrow 1 + 4 - 4r + r^2 = 1 + 2r + r^2$$

$$\Rightarrow 4 = 6r$$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

**Opdracht 79 bladzijde 55**

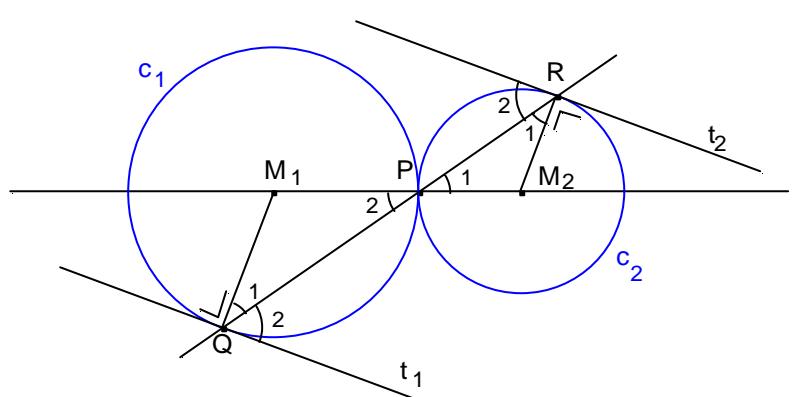
De cirkels $c_1(M_1, r_1)$ en $c_2(M_2, r_2)$ raken elkaar uitwendig in P.

Een gemeenschappelijke snijlijn door P snijdt c_1 in Q en c_2 in R.

Is de raaklijn in Q aan c_1 evenwijdig met de raaklijn in R aan c_2 ? Verklaar.

Oplossing

Ja, de raaklijn t_1 aan c_1 is evenwijdig met de raaklijn t_2 aan c_2 .



Verklaring:

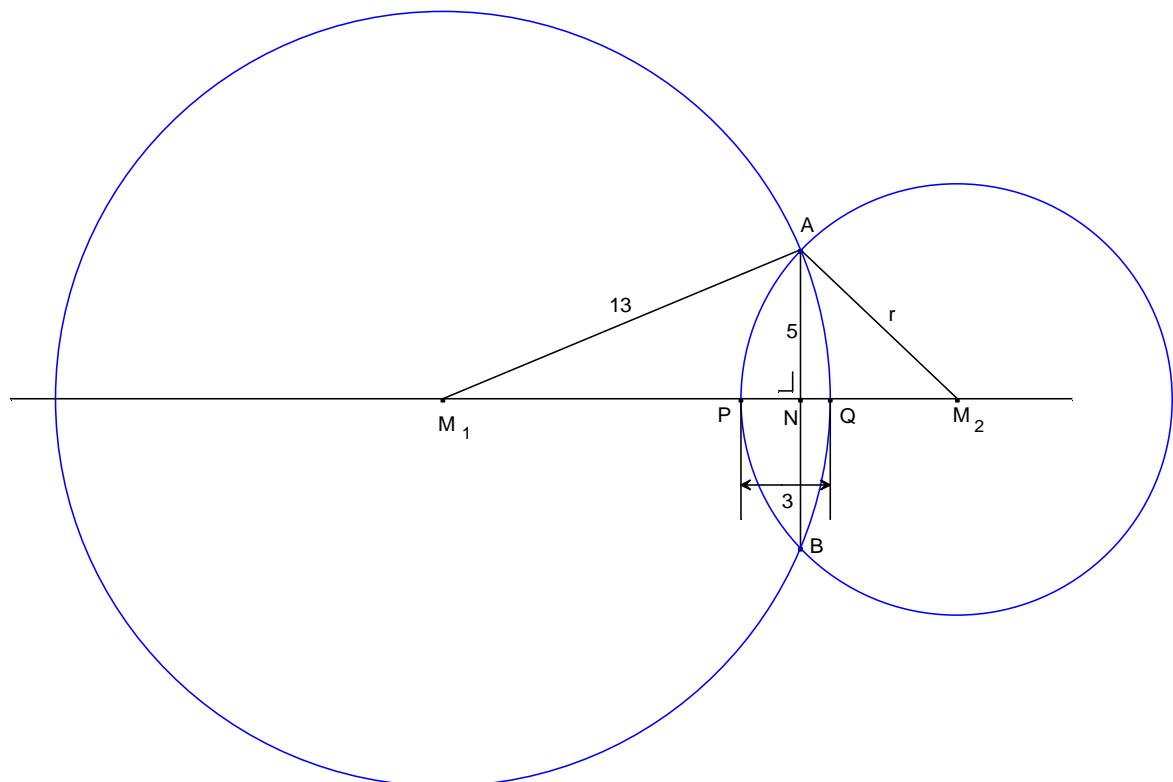
- $\hat{Q}_1 = \hat{P}_2$ $\Delta M_1 PQ$ is gelijkbenig
 $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ overstaande hoeken
 $\hat{P}_1 = \hat{R}_1$ $\Delta M_2 RP$ is gelijkbenig
 $\Rightarrow \hat{Q}_1 = \hat{R}_1$ (1)
- Aangezien t_1 en t_2 raaklijnen zijn, is $\hat{Q}_{12} = 90^\circ$ en $\hat{R}_{12} = 90^\circ$. (2)
- Uit (1) en (2) volgt: $\hat{Q}_2 = \hat{R}_2$. (1)

De rechten t_1 en t_2 vormen met de snijlijn QR dus gelijke verwisselende binnenhoeken.

Bijgevolg is $t_1 // t_2$.

Opdracht 80 bladzijde 55

Twee cirkels snijden elkaar in A en in B en de gemeenschappelijke koorde heeft als lengte 10. Het lijnstuk dat de middelpunten van de cirkels verbindt, snijdt de cirkels in P en in Q. $|PQ| = 3$ en de straal van één van de cirkels is 13. Bereken de straal van de andere cirkel.

Oplossing

N, het midden van [AB], ligt op $M_1 M_2$.

In ΔAM_1N is $|M_1N| = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

$$\Rightarrow |NQ| = |M_1Q| - |M_1N| = 1$$

$$\Rightarrow |PN| = |PQ| - |NQ| = 2$$

Stel $|AM_2| = r$, dan is $|PM_2| = r$ en dus $|NM_2| = r - 2$.

In ΔANM_2 is bijgevolg

$$5^2 + (r - 2)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 25 + r^2 - 4r + 4 = r^2$$

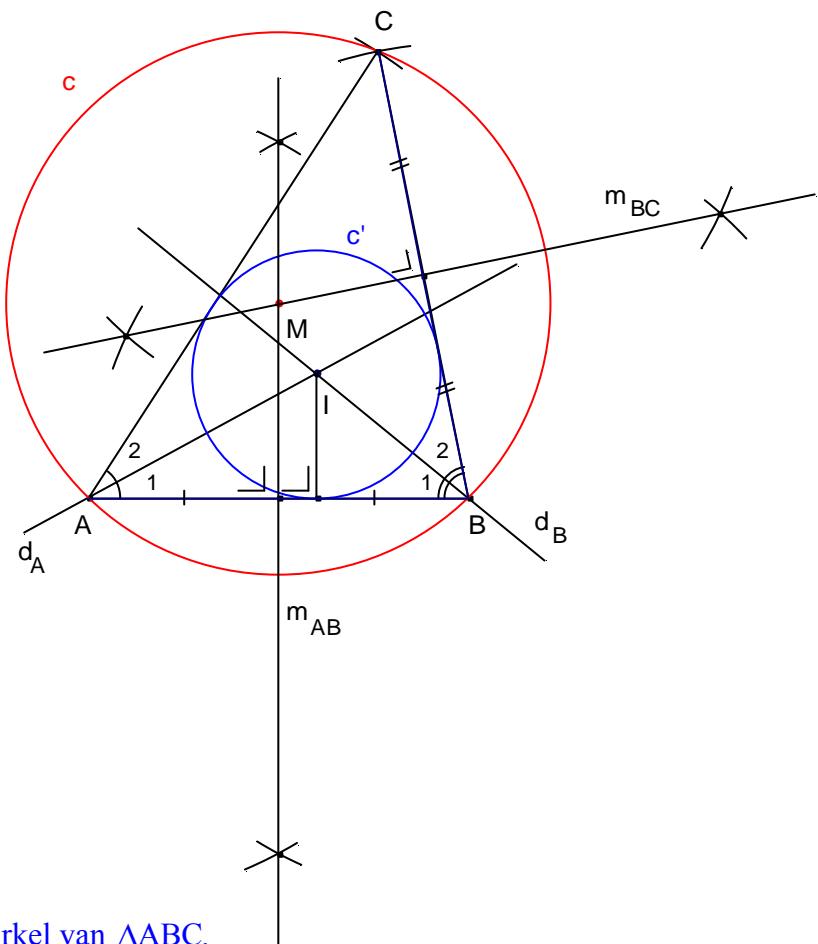
$$\Rightarrow r = \frac{29}{4}$$



Opdracht 81 bladzijde 56

Construeer de omgeschreven en de ingeschreven cirkel van de driehoek ABC met zijden $|AB| = 5 \text{ cm}$, $|BC| = 6 \text{ cm}$ en $|AC| = 7 \text{ cm}$.

Oplossing



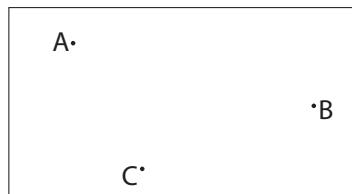
c is de omgeschreven cirkel van ΔABC .

c' is de ingeschreven cirkel van ΔABC .

Opdracht 82 bladzijde 56

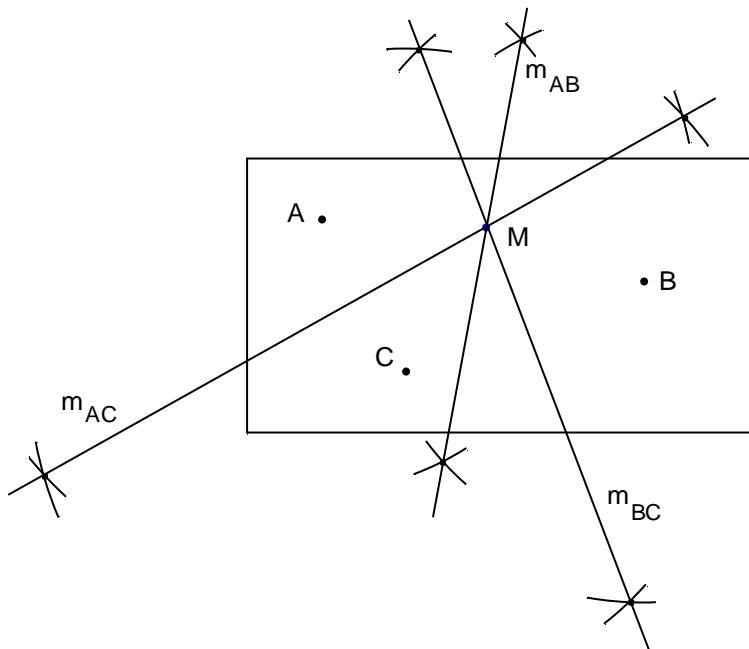
In een stad zijn drie basisscholen A, B en C.

De ouders sturen hun kinderen naar de dichtstbijzijnde school.



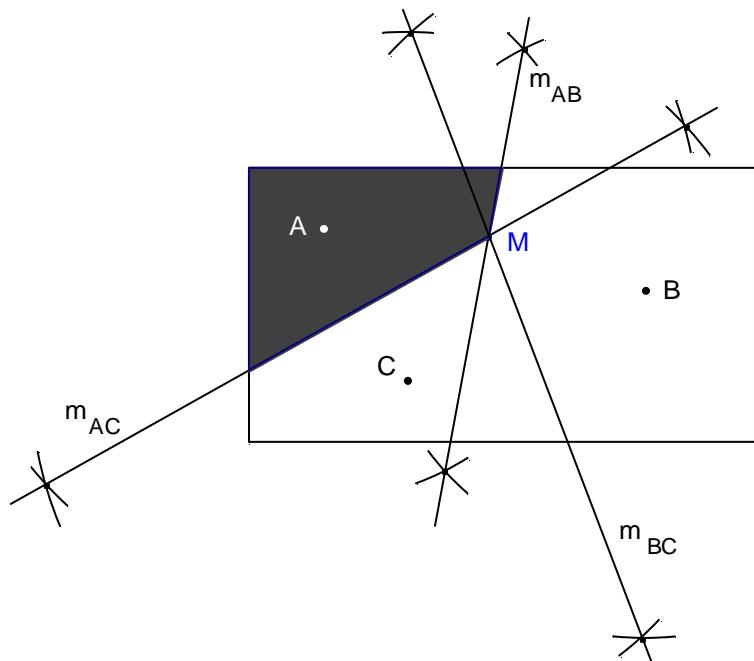
- 1 Waar wonen de ouders die kunnen kiezen tussen de drie scholen?

Construeer deze woonplaats op de figuur.



In M, het snijpunt van de middelloodlijnen van ΔABC .

- 2 Arceer het gebied waar de ouders wonen die hun kinderen naar school A sturen.



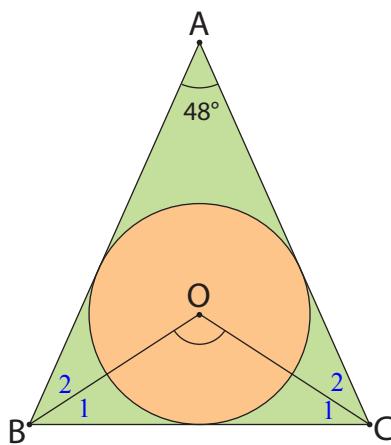
Dit gebied wordt begrensd door m_{AB} en m_{AC} .

Opdracht 83 bladzijde 56

Een gelijkbenige driehoek ABC heeft als top hoek $\hat{BAC} = 48^\circ$.

Als O het middelpunt is van de ingeschreven cirkel, dan is de hoek \hat{BOC} gelijk aan

- A 96°
- B 108°
- C 114°
- D 122°
- E 132°

**Oplossing**

- In de gelijkbenige driehoek ABC is $\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = 66^\circ$.
- OB en OC zijn bissectrices zodat $\hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 33^\circ$.
- $\hat{BOC} = 180^\circ - 2 \cdot 33^\circ = 114^\circ$.

Antwoord C is het juiste antwoord.

Opdracht 84 bladzijde 56

De straal van de ingeschreven cirkel van een gelijkzijdige driehoek is 10.

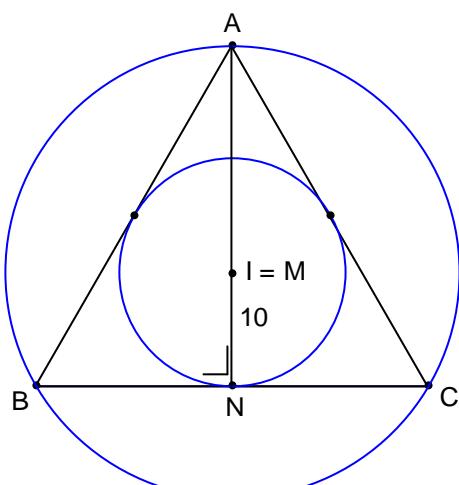
Bereken de straal van de omgeschreven cirkel van deze driehoek.

Oplossing

In een gelijkzijdige driehoek vallen het middelpunt van de in- en omgeschreven cirkel samen met het zwaartepunt.

$$|NI| = 10 \Rightarrow |AI| = 20 \quad \text{eigenschap zwaartepunt}$$

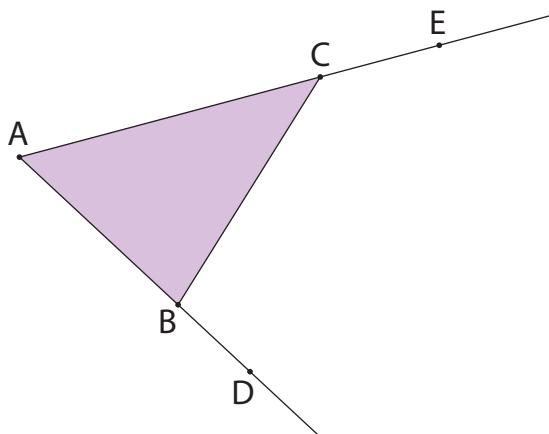
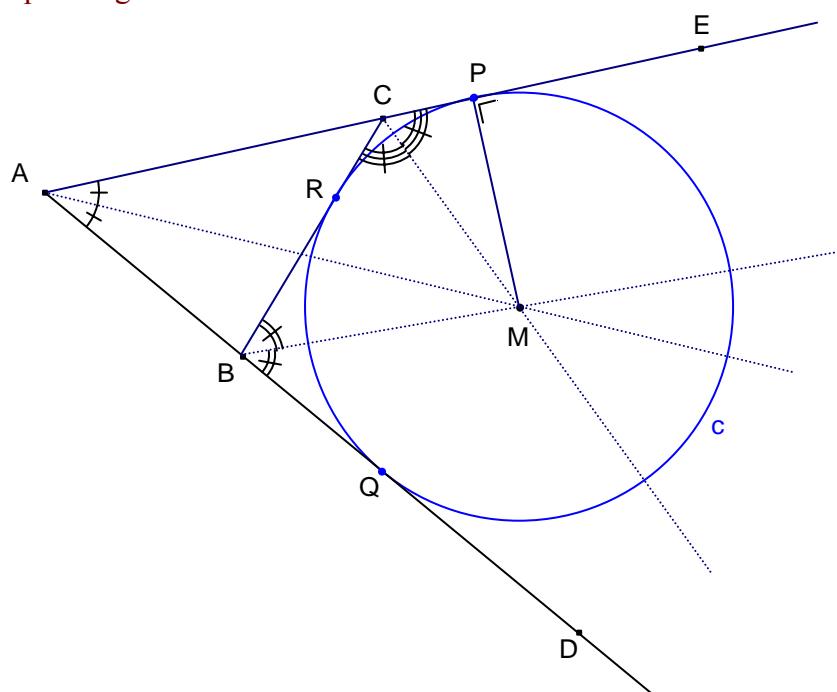
De straal van de omgeschreven cirkel is dus 20.



Opdracht 85 bladzijde 57

Construeer de cirkel die raakt aan de zijde $[BC]$ van de driehoek ABC en aan de verlengden $[BD]$ en $[CE]$ van de andere zijden van deze driehoek.

We noemen deze cirkel de **aangeschreven cirkel** van de driehoek ABC.

**Oplossing**

Het middelpunt M van deze cirkel ligt even ver van $[BC]$ en $[BD]$.

M ligt bijgevolg op de bissectrice van \hat{CBD} .

M ligt ook op de bissectrice van \hat{BCE} en op de bissectrice van \hat{A} .

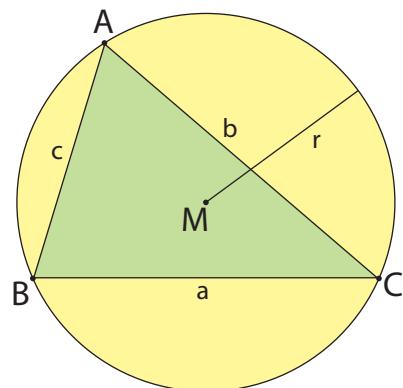
M is dus het snijpunt van twee van deze bissectrices.

De gevraagde cirkel is $c(M, |MP|)$, waarbij $|MP|$ de afstand is van M tot AB, tot AC of tot BC.

Opdracht 86 bladzijde 57

Als a , b en c de zijden zijn van driehoek ABC en r is de straal van de omgeschreven cirkel, dan is
 $\text{opp. } \Delta ABC = \frac{abc}{4r}$.

Bewijs.

**Oplossing**

Te bewijzen: $\text{opp. } \Delta ABC = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}$

Bewijs

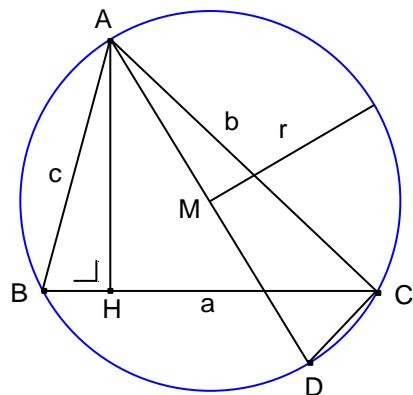
Omdat in het ‘te bewijzen’ sprake is van opp. ΔABC construeren we de hoogtelijn $[AH]$. Omdat hierin ook r voorkomt, construeren we de middellijn $[AD]$.

$$\text{opp. } \Delta ABC = \frac{1}{2} |BC| \cdot |AH| = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |AH| \quad (*)$$

Hierin moeten we $|AH|$ vervangen door b , c en r in te voeren.

We zoeken dus een betrekking tussen deze vier lengten b , c , r en $|AH|$.

Die vinden we als zijden van de driehoeken ABH en ADC .



$$\Delta ABH \sim \Delta ADC \text{ omdat } \begin{cases} \hat{B} = \hat{D} & \left(\text{omtrekshoeken op } \widehat{AC} \right) \\ \hat{H} = \hat{C} = 90^\circ \end{cases}$$

↓

$$\frac{|AH|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AD|}$$

↓

$$\frac{|AH|}{b} = \frac{c}{2r}$$

↓

$$|AH| = \frac{bc}{2r}$$

$$\text{Uit } (*) \text{ volgt nu opp. } \Delta ABC = \frac{1}{2} a \frac{bc}{2r} = \frac{abc}{4r}.$$

Opdracht 87 bladzijde 57

- 1 Construeer een rechthoekige driehoek die een hoek van 60° heeft en waarvan de straal van de ingeschreven cirkel 2 cm is.

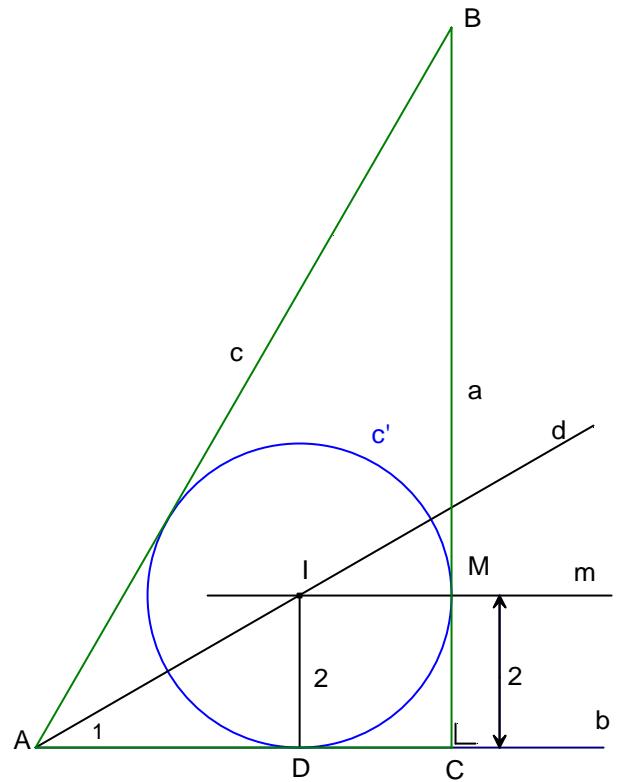
Construeer een hoek $\hat{A} = \hat{bc}$ van 60° .

Als we I het middelpunt van de ingeschreven cirkel noemen, dan ligt I:

- op de bissectrice d van \hat{A}
- op een afstand 2 van een been (b) van \hat{A} , dus op een evenwijdige m aan b zodat $d(m,b) = 2$ (Met $d(m,b)$ bedoelen we de afstand tussen de evenwijdige rechten m en b. m nemen we boven b, zodat ze in het binnengebied van \hat{A} zal lopen en dus d zal snijden.)

Construeer nu de ingeschreven cirkel $c'(I,2)$.

Noem M het snijpunt van m met de cirkel c' dat het verste van A verwijderd is.



De raaklijn a in M aan de cirkel c' is, naast de benen b en c van \hat{A} , de derde zijde van de gevraagde rechthoekige driehoek ABC.

Die raaklijn a staat immers loodrecht op de middellijn m, dus loodrecht op b, zodat $\hat{C} = 90^\circ$.

- 2 Bereken de zijden van deze driehoek.

- In ΔAID geldt: $\tan \hat{A}_1 = \frac{|ID|}{|AD|} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{2}{|AD|} \Rightarrow |AD| = \frac{2}{\tan 30^\circ} = 2\sqrt{3}$
- Omdat DCMI een vierkant is met zijde 2, geldt: $|AC| = 2 + 2\sqrt{3}$
- In ΔABC geldt:

$$\tan \hat{A} = \frac{|BC|}{|AC|} \quad \text{en} \quad \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{|BC|}{2 + 2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow |BC| = (2 + 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 6$$

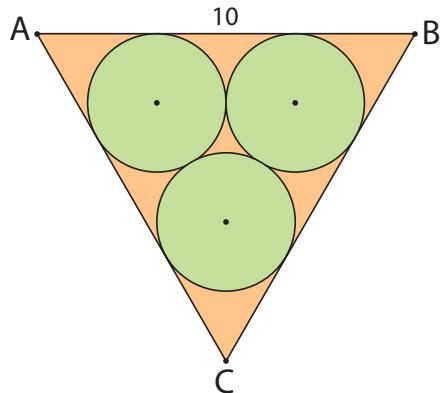
$$\cos \hat{A} = \frac{|AC|}{|AB|} \quad \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{|AB|}$$

$$\Rightarrow |AB| = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 4 + 4\sqrt{3}$$

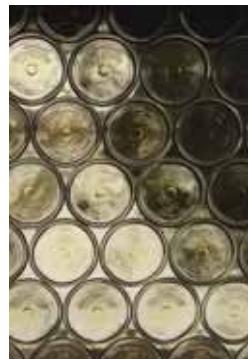
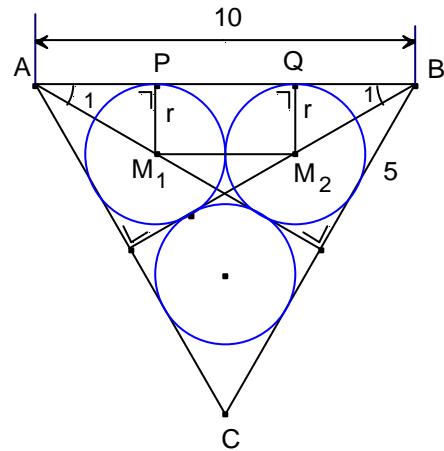
Opdracht 88 bladzijde 57

In de gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 10 zijn drie congruente cirkels getekend. Elk van deze cirkels raakt aan twee zijden van de driehoek en aan de twee andere cirkels.

Bereken de straal van deze cirkels.

**Oplossing**

- AM_1 en BM_2 zijn bissectrices van ΔABC .
 $\Rightarrow \hat{A}_1 = 30^\circ$ en $\hat{B}_1 = 30^\circ$
 - $|AB| = |AP| + |PQ| + |QB|$
 \Downarrow
 $10 = |AP| + 2r + |QB|$
- \parallel
- in ΔAPM_1 is $\tan \hat{A}_1 = \frac{r}{|AP|}$
 $\Rightarrow |AP| = \frac{r}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} \cdot r$
- \parallel
- in ΔBQM_2 is $\tan \hat{B}_1 = \frac{r}{|QB|}$
 $\Rightarrow |QB| = \frac{r}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} \cdot r$
- \Downarrow
- $10 = \sqrt{3} \cdot r + 2r + \sqrt{3} \cdot r$
 \Downarrow
 $10 = (2\sqrt{3} + 2) \cdot r$
 \Downarrow
 $r = \frac{5}{\sqrt{3} + 1} \approx 1,83$



Opdracht 89 bladzijde 58

Een voetbal bestaat uit 20 regelmatige zeshoeken en 12 regelmatige vijfhoeken. Om een voetbal te maken worden de vijfhoeken en zeshoeken met de goede kant tegen elkaar gelegd en aan elkaar genaaid.

Per naad zijn er 8 steken.

Hoeveel steken zijn er nodig om een voetbal volledig dicht te naaien ?

**Oplossing**

$$\text{Er zijn } \frac{20 \cdot 6 + 12 \cdot 5}{2} = 90 \text{ naden,}$$

Dus zijn er 720 steken nodig.

Opdracht 90 bladzijde 58

Van welke regelmatige n-hoek zijn de hoeken 162° ?

Oplossing

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = 162^\circ$$

$$18^\circ = \frac{360^\circ}{n}$$

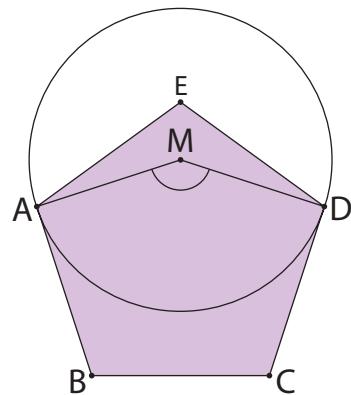
$$n = 20$$

Van een regelmatige 20-hoek.

opdracht 91 bladzijde 58

Voor een gegeven regelmatige vijfhoek ABCDE kan een cirkel c met middelpunt M getekend worden die raakt aan DC in D en aan AB in A.

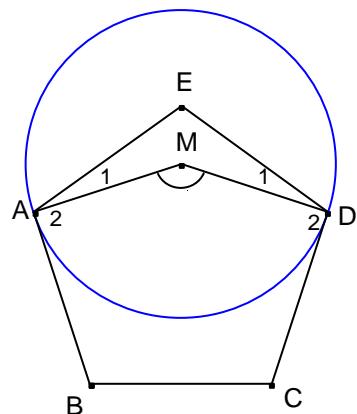
Bereken de hoek \widehat{AMD} .



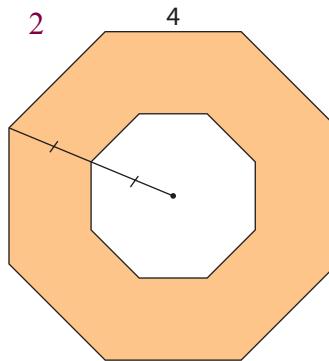
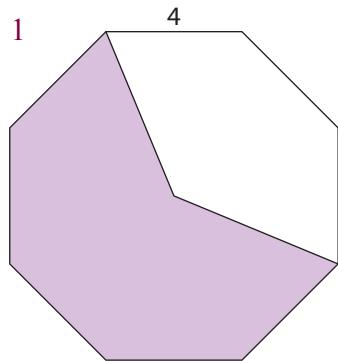
Oplossing

- $\widehat{B} = \widehat{C} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$
- $\widehat{A}_2 = \widehat{D}_2 = 90^\circ$ want AB en CD zijn raaklijnen aan de cirkel.
- In de vijfhoek ABCDM is de som van de hoeken $(5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$ zodat

$$\widehat{AMD} = 540^\circ - 2 \cdot 108^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 144^\circ$$

**opdracht 92 bladzijde 58**

Bereken de gekleurde oppervlakte in de regelmatige achthoek met zijde 4.



Oplossing

De straal van de omgeschreven cirkel vinden we uit

$$z_8 = 2r \cdot \sin \frac{180^\circ}{8} \Rightarrow r = \frac{2}{\sin 22,5^\circ}$$

De totale oppervlakte van de 8-hoek is $A_8 = 8 \cdot \left(\frac{2}{\sin 22,5^\circ} \right)^2 \cdot \sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ \approx 77,25$.

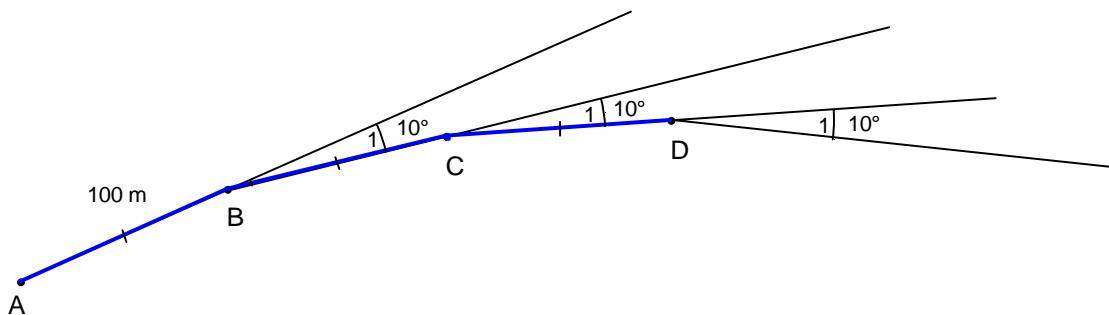
1 De oppervlakte is $\frac{5}{8} A_8 \approx 48,28$.

2 De oppervlakte is $\frac{3}{4} A_8 \approx 57,94$.

Opdracht 93 bladzijde 59

Een wandelaar gaat 100 m in rechte lijn, draait dan precies 10° naar rechts, gaat dan weer 100 m rechtsgaand, draait dan weer 10° naar rechts en marcheert zo verder tot hij terug aan zijn beginpunt komt.

1 Welke regelmatige veelhoek heeft hij beschreven?



Iedere hoek van de ingewandelde regelmatige veelhoek ABCD... is 170° .

$$\text{Vandaar: } 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = 170^\circ$$

↓

$$180n - 360 = 170n$$

↓

$$180n - 170n = 360$$

↓

$$n = 36$$

De wandelaar volgt bij zijn wandeling een regelmatige 36-hoek als traject.

2 Hoe lang duurde zijn wandeling als hij een gemiddelde snelheid van 4 km/h haalde?

Noemen we p de omtrek van de regelmatige 36-hoek.

$$p = 36 \cdot 100 \text{ m} = 3600 \text{ m}$$

afgelegde weg in meter	tijd in minuten
4000	60
3600	x

$$\frac{4000}{3600} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = \frac{3600 \cdot 60}{4000} = 54$$

De duur van de wandeling is 54 minuten.

3 Hoeveel bedraagt de grootste afstand tussen de wandelaar en zijn startpunt ?

De grootste afstand tussen de wandelaar en zijn startpunt is de diameter $2r$ van de omgeschreven cirkel van de 36-hoek.

$$\text{Nu is } z_{36} = 2r \cdot \sin \frac{180^\circ}{36} \Rightarrow 2r = \frac{z_{36}}{\sin 5^\circ} = \frac{100}{\sin 5^\circ} \approx 1147,37$$

De grootste afstand is ongeveer 1147 m.

Opdracht 94 bladzijde 59

Als een regelmatige zeshoek ingeschreven is in een cirkel met straal r , dan is de lengte van een diagonaal die niet door het middelpunt gaat gelijk aan

- A $r\sqrt{2}$
- B $\frac{3r}{2}$
- C $r\sqrt{3}$
- D $2r$
- E $r\sqrt{5}$

Oplossing

- B en M liggen even ver van A als van C.

⇓

BM is de middelloodlijn van [AC].

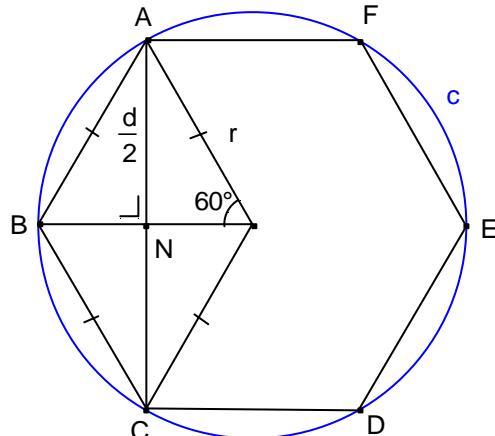
- Stel d is de lengte van de diagonaal die niet door het middelpunt gaat, dan is in ΔAMN

$$\sin 60^\circ = \frac{d}{2r}$$

⇓

$$d = 2r \sin 60^\circ = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$

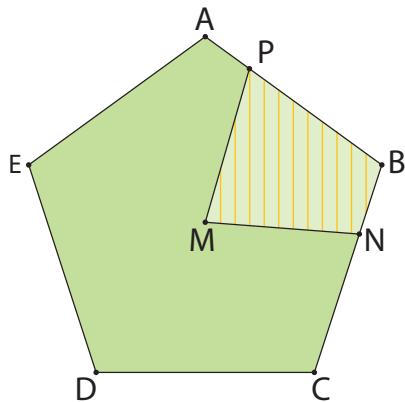
Antwoord C is het juiste antwoord.



Opdracht 95 bladzijde 59

ABCDE is een regelmatige vijfhoek met middelpunt M waarbij $|AP| = \frac{1}{4}|AB|$ en $|BN| = \frac{1}{3}|BC|$.

Wat is de verhouding van de gearceerde oppervlakte tot de totale oppervlakte van de vijfhoek?



- A $\frac{1}{5}$ B $\frac{13}{60}$ C $\frac{7}{30}$ D $\frac{1}{4}$ E $\frac{2}{5}$

Oplossing

- opp $\Delta AMB = \text{opp } \Delta BMC = \frac{|AB| \cdot |MQ|}{2} = \frac{z_5 \cdot a_5}{2}$

- opp $\Delta MBP = \frac{|BP| \cdot |MQ|}{2}$

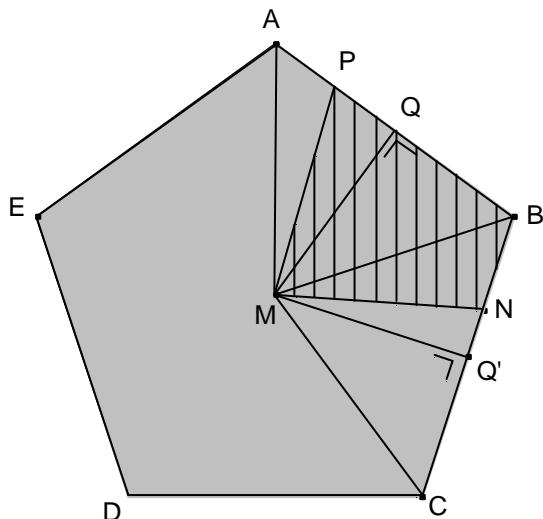
$$= \frac{\frac{3}{4} \cdot z_5 \cdot a_5}{2}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \text{opp } \Delta AMB$$

$$\text{opp } \Delta BMN = \frac{|BN| \cdot |MQ|}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot z_5 \cdot a_5}{2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \text{opp } \Delta BMC$$



- De totale oppervlakte van de vijfhoek is $5 \cdot \text{opp } \Delta AMB$.

De gevraagde verhouding is dus $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{13}{60}$.

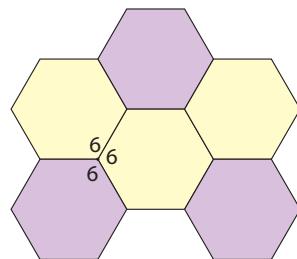
Antwoord B is het juiste antwoord.

**Onderzoeksopdracht 96 bladzijde 60**

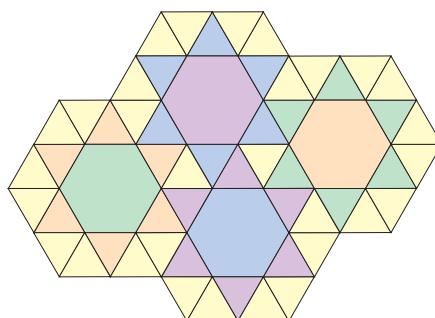
Met regelmatige veelhoeken zijn veel vlakvullingen mogelijk.

Zo kun je met regelmatige zeshoeken een vlakvulling maken waarbij in elk hoekpunt drie zeshoeken samenkomen.

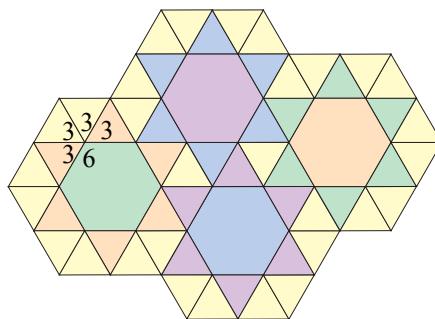
We noemen dit een $6 \cdot 6 \cdot 6$ of 6^3 vlakvulling.



- 1 Verklaar waarom we de nevenstaande vlakvulling een $6 \cdot 3^4$ vlakvulling noemen.

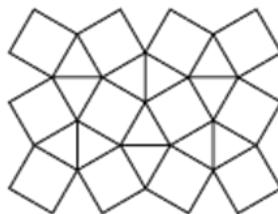


In elk hoekpunt komen een regelmatige zeshoek en vier gelijkzijdige driehoeken samen.

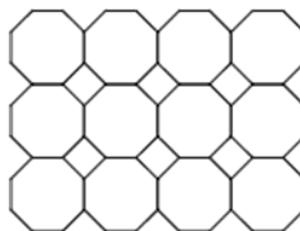


- 2 Teken zelf een stuk van een
 - a $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3^2$ vlakvulling.
 - b $8^2 \cdot 4$ vlakvulling.

Een $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3^2$ vlakvulling:



Een $8^2 \cdot 4$ vlakvulling:



3 Geef zelf nog enkele vlakvullingen die mogelijk zijn met regelmatige veelhoeken.

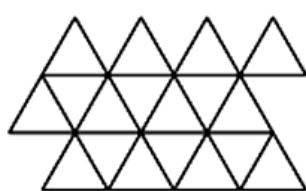
Leerlingen kunnen hierover veel informatie vinden op het internet maar kunnen ook zelf creatief op zoek gaan naar zoveel mogelijk (semi-)regelmatige vlakvullingen.

We onderscheiden verschillende soorten vlakvulling met regelmatige veelhoeken.

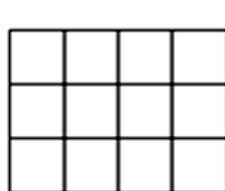
1 De regelmatige (Platonische) vlakvulling

Hierbij moeten de veelhoeken congruent zijn.

Er zijn enkel regelmatige vlakvullingen mogelijk met gelijkzijdige driehoeken, vierkanten en regelmatige zeshoeken. Enkel bij deze veelhoeken is de hoek namelijk een deler van 360° .



3^6



4^4



6^3

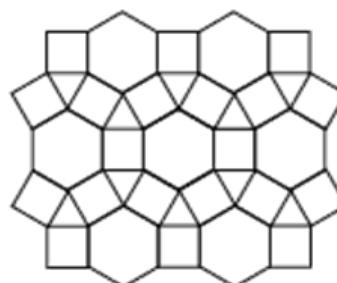
2 De semi-regelmatige (Archimedische) vlakvulling

Hierbij worden verschillende regelmatige veelhoeken gebruikt die elkaar in elk hoekpunt op dezelfde manier ontmoeten (vlakvulling van de eerste orde).

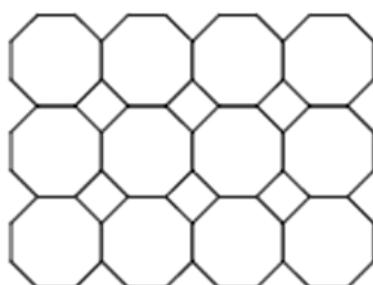
Er zijn 8 mogelijkheden:



$3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6$



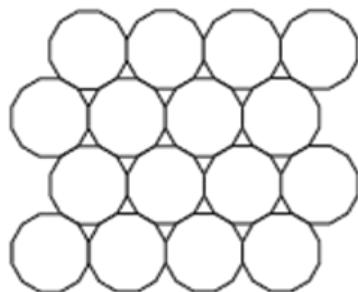
$4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$



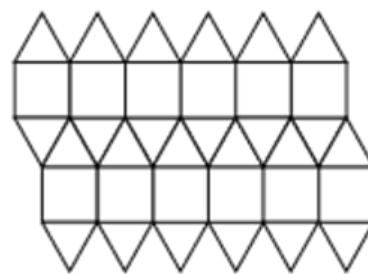
$8^2 \cdot 4$



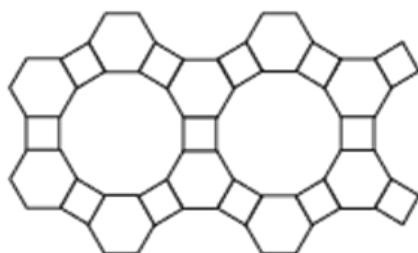
$4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3^2$



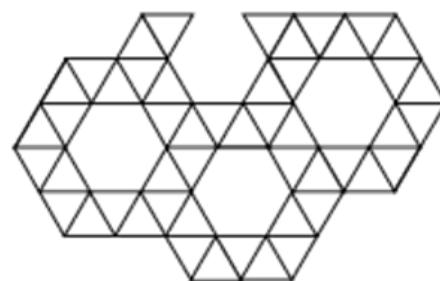
$$3 \cdot 12^2$$



$$3^3 \cdot 4^2$$

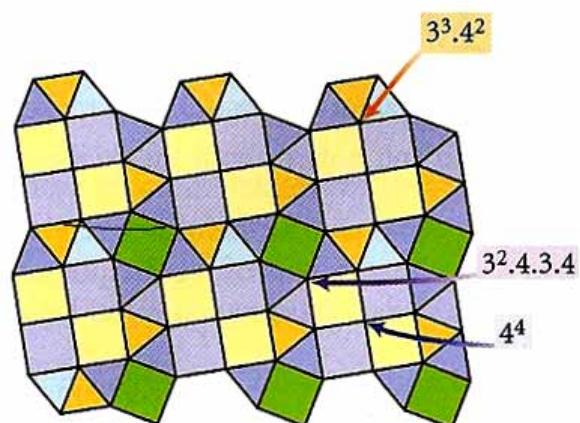
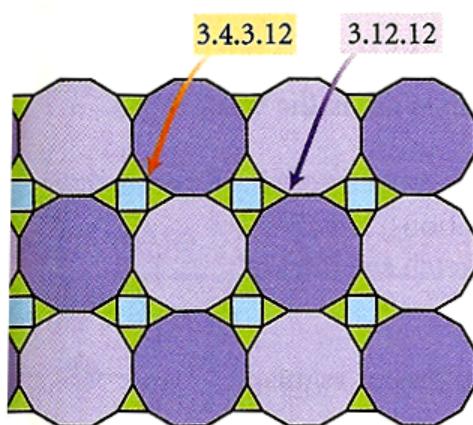


$$4 \cdot 6 \cdot 12$$



$$3^4 \cdot 6$$

- 3 Er zijn ook vlakvullingen mogelijk waarbij de regelmatige veelhoeken elkaar op verschillende manieren ontmoeten in de hoekpunten. Als dit op twee verschillende manieren gebeurt, noemen we de vlakvulling van de **tweede orde**, zoals in het voorbeeld links onder. Rechts zie je een vlakvulling van de **derde orde**.

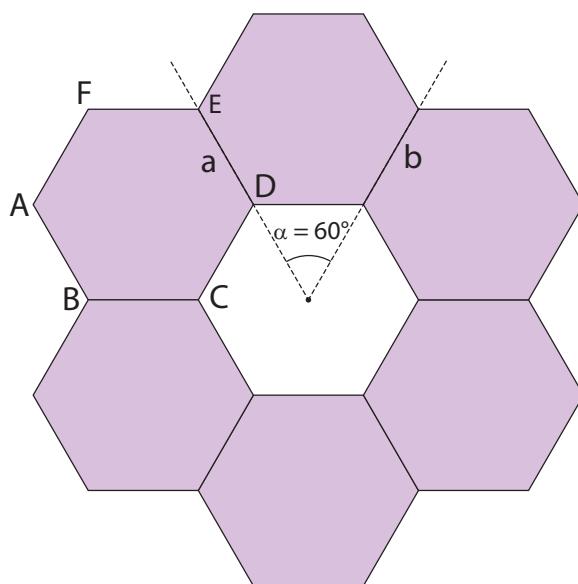




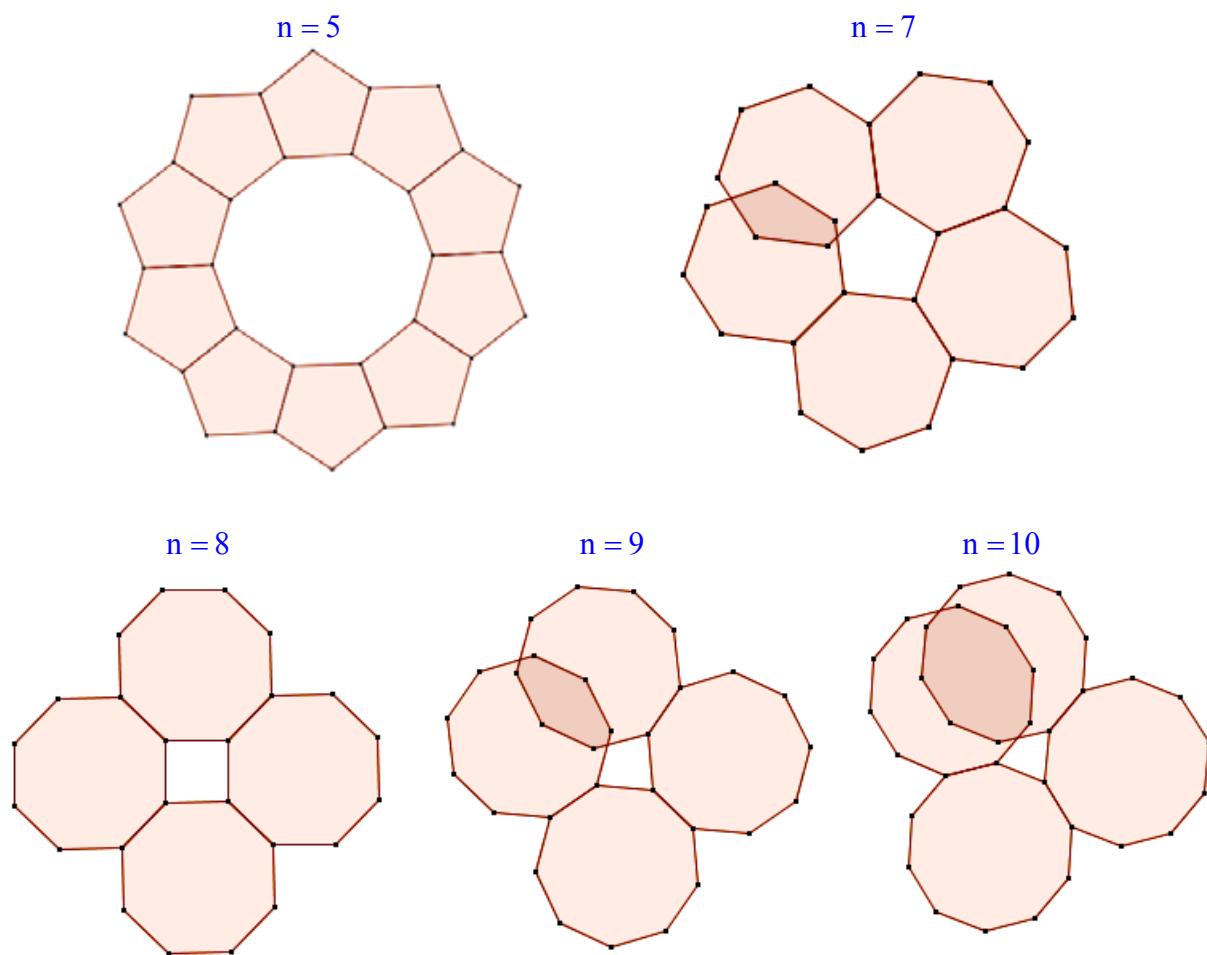
Onderzoeksopdracht 97 bladzijde 60

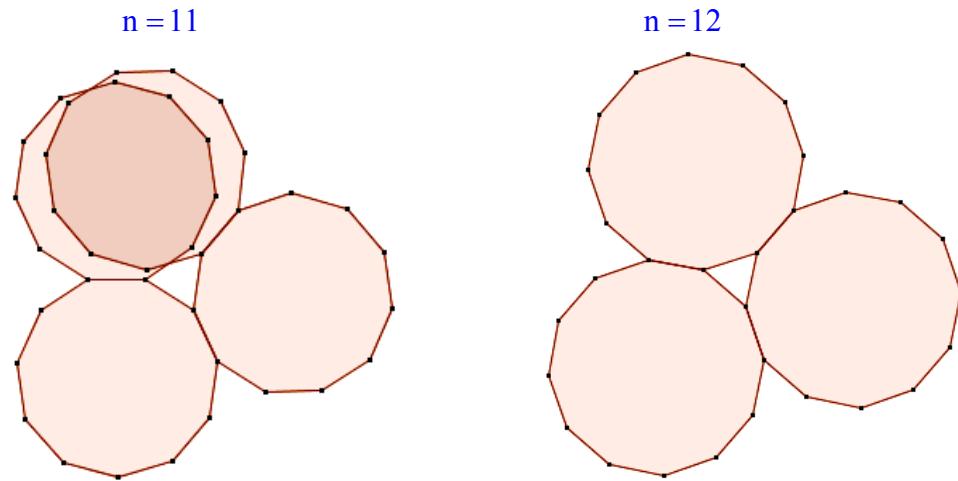
Door een regelmatige veelhoek ABCDEF te spiegelen t.o.v. één van zijn zijden, vervolgens het spiegelbeeld weer te spiegelen t.o.v. één van zijn zijden, enzovoort, krijgen we een krans van regelmatige veelhoeken.

Hiernaast zie je een krans die bestaat uit zes regelmatige zeshoeken (bijencellen). Het is gelukt om die krans te tekenen omdat de hoek α ($= 60^\circ$) tussen twee opeenvolgende spiegelassen a en b een geheel aantal keren (6 maal) past in 360° .



- 1 Onderzoek met een dynamisch meetkundepakket of je een dergelijke krans kunt maken met vijfhoeken, zevenhoeken, achthoeken, negenhoeken, tienhoeken, elfhoeken en twaalfhoeken. Verklaar telkens waarom de constructie mogelijk is of niet.





We kunnen een krans maken met regelmatige vijf-, acht- en twaalfhoeken, maar niet met regelmatige zeven-, negen-, tien- en elfhoeken.

- 2 We gaan nu op zoek naar alle regelmatige veelhoeken, waarvoor het lukt om een krans te maken met een regelmatig veelhoekig gat in het midden.

Daarom zoek je een verband tussen twee variabelen n en k met

n : het aantal zijden van de regelmatige veelhoek

k : het aantal veelhoeken van de krans, d.i. het aantal zijden van de inwendige veelhoek

Is α de hoek tussen twee opeenvolgende spiegelassen, dan weet je dat er een krans mogelijk is als er een natuurlijk getal k bestaat zó dat $k \cdot \alpha = 360^\circ$.

Dit getal k is dan het aantal veelhoeken van de krans.

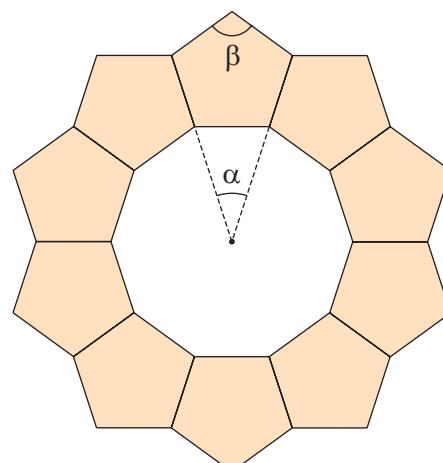
Om hieruit een verband tussen n en k af te leiden, moet je α berekenen in functie van n .

Dit verband kun je berekenen in drie stappen **a**, **b** en **c**.

- a** Bepaal eerst een verband tussen α , de hoek tussen twee opeenvolgende spiegelassen en β , de hoek van de regelmatige veelhoek zelf.

Voor regelmatige vijfhoeken zie je op de nevenstaande tekening dat $\alpha + 3\beta = 360^\circ$.

Pas deze formule nu aan voor een zeshoek, een zevenhoek, ... en veralgemeen voor een n -hoek.



Bij een regelmatige vijfhoek is $\alpha + 3\beta = 360^\circ (= 2 \cdot 180^\circ)$

Bij een regelmatige zeshoek is $\alpha + 4\beta = 540^\circ (= 3 \cdot 180^\circ)$

Bij een regelmatige n-hoek is $\alpha + (n-2)\beta = (n-3) \cdot 180^\circ \quad (1)$

- b** Druk β uit in functie van n .

β is de hoek van een regelmatige n-hoek, dus

$$\beta = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \quad (2)$$

- c** Substitueer nu de uitdrukking voor β die je in **b** vond, in de formule voor α die je in **a** vond en je vindt een verband tussen α en n .

Toon aan dat je dit verband kunt herschrijven als $k \cdot \alpha = 360^\circ$ met $k = \frac{2n}{n-4}$.

Als je het verband tussen k en n gevonden hebt, is het vinden van kransen teruggebracht tot een rekenkundig probleem: bij welke waarden van n is k een natuurlijk getal groter of gelijk aan 3? Maak nu een lijst van alle mogelijke kransen en zet er een tekening bij.

$$\alpha + (n-2)\beta = (n-3) \cdot 180^\circ \quad (1)$$

$$\beta = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \quad (2)$$

- (2) in (1): $\alpha + \frac{(n-2)^2 \cdot 180^\circ}{n} = (n-3) \cdot 180^\circ$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{n(n-3) - (n-2)^2}{n} \cdot 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{n^2 - 3n - n^2 + 4n - 4}{n} \cdot 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{n-4}{n} \cdot 180^\circ = \frac{n-4}{2n} \cdot 360^\circ$$

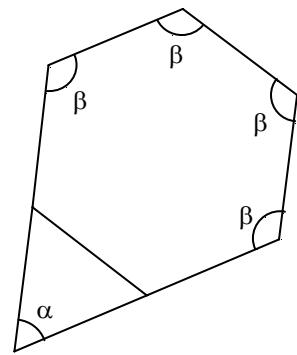
- We kunnen dus schrijven dat $k \cdot \alpha = 360^\circ$ met $k = \frac{2n}{n-4}$.

- $k \in \mathbb{N}$ en $k \geq 3$ als $n = 5$ ($k = 10$)

$$n = 6 \quad (k = 6)$$

$$n = 8 \quad (k = 4)$$

$$n = 12 \quad (k = 3)$$



Er zijn dus maar vier mogelijkheden: bij een regelmatige 5-, 6-, 8- en 12-hoek vinden we een krans van regelmatige veelhoeken met respectievelijk een regelmatige 10-, 6-, 4- en 3-hoek in het midden (dit is de betekenis van k).

Opmerking

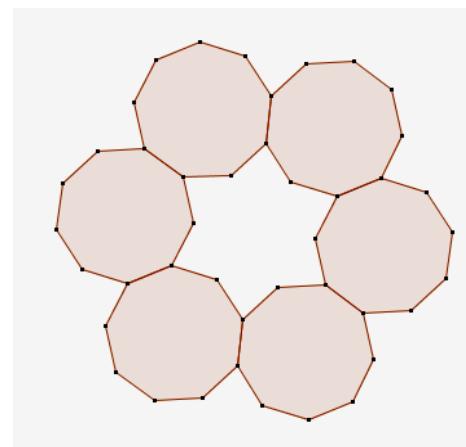
We hebben ons beperkt tot kransen met een convexe regelmatige veelhoek in het midden.

Als we ook kransen beschouwen met een regelmatige ster in het midden, dan wordt het aantal mogelijkheden sterk uitgebreid.

Zo zie je hiernaast dat er dan wel een krans van regelmatige 9- hoeken mogelijk is.

Voor een verdere uitwerking van deze gevallen verwijzen we naar Uitwiskeling, jaargang 24, nummer 4, blz. 8-13.

Het is op dit artikel dat deze opdracht gebaseerd is, maar je vindt natuurlijk ook veel informatie op het internet.



Herhalingsopdracht 98 bladzijde 62

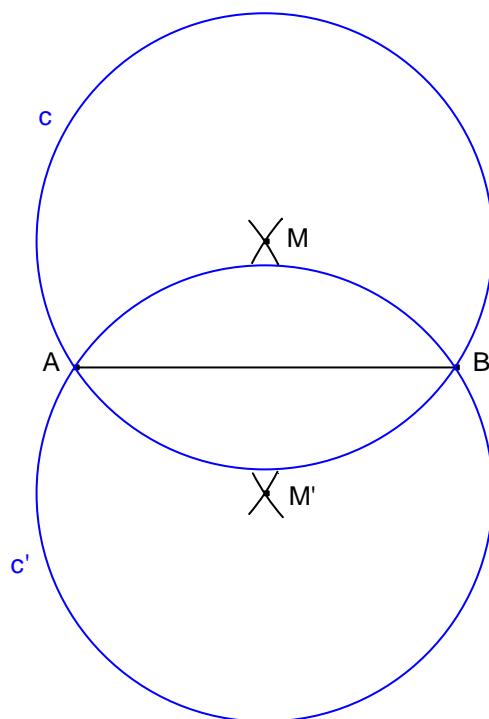
Teken alle cirkels met straal 3 cm die $[AB]$ als koorde hebben.



Oplossing

Het middelpunt van zo'n cirkel ligt op 3 cm van A en B.

$C(M, 3)$ en $c'(M', 3)$ zijn de gevraagde cirkels.

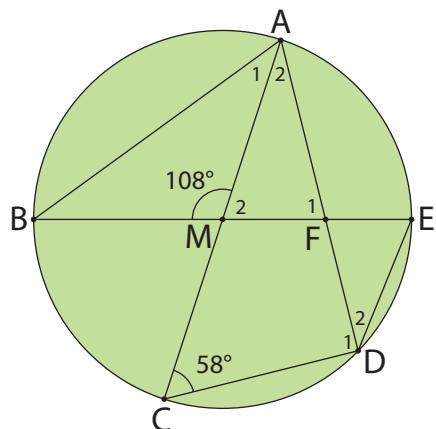


Herhalingsopdracht 99 bladzijde 62

Bereken de hoeken \hat{A}_1 , \hat{A}_2 , \hat{D}_1 , \hat{D}_2 , \hat{E} , \hat{F}_1 en \hat{M}_2 met de gegevens aangeduid in de cirkel met middelpunt M.

Oplossing

- $\hat{M}_2 = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$
- $\hat{D}_1 = 90^\circ$
omtrekshoek op middellijn $[AC]$
- $\hat{A}_1 = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2}$ in ΔABM
 $= 36^\circ = \hat{B}$
- $\hat{A}_2 = 180^\circ - 90^\circ - 58^\circ$ in ΔACD
 $= 32^\circ$
- $\hat{D}_2 = \hat{B}$ omtrekshoeken op \widehat{AE}
 $= 36^\circ$
- $\hat{F}_1 = 180^\circ - \hat{M}_2 - \hat{A}_2$ in ΔAMF
 $= 76^\circ$
- $\hat{E} = 180^\circ - \hat{F}_2 - \hat{D}_2$ in ΔFDE
 $= 68^\circ$



Herhalingsopdracht 100 bladzijde 62

Gegeven de cirkel $c(M, 6)$ met $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \hat{M}_3$.

- 1 Toon aan dat $|AB| = |BC| = |CD| = 6$.

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \hat{M}_3$ (gegeven) en $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3$ is een gestrekte hoek.

Bijgevolg: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \hat{M}_3 = 60^\circ$

De driehoeken MAB, MBC en MCD zijn dus gelijkzijdig (gelijkbenige driehoeken met tophoek 60°).

Bijgevolg: $|AB| = |BC| = |CD| = r = 6$.

- 2 Toon aan dat $|SC| = |SB| (= x)$ en $|SA| = |SD| (= y)$.

- In $\triangle SBC$ geldt: $\hat{B}_1 = \frac{1}{2} \widehat{CMD} = \frac{1}{2} \hat{M}_3 = 30^\circ$

$$\hat{C}_1 = \frac{1}{2} \hat{M}_1 = 30^\circ$$

$\triangle SBC$ is dus gelijkbenig.

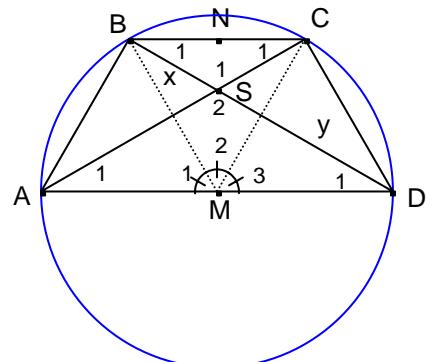
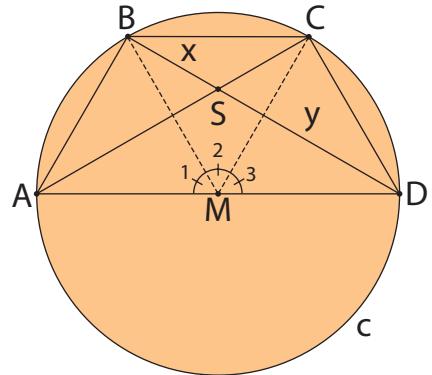
Bijgevolg: $|SB| = |SC|$

- In $\triangle SAD$ geldt: $\hat{A}_1 = \frac{1}{2} \hat{M}_3 = 30^\circ$

$$\hat{D}_1 = \frac{1}{2} \hat{M}_1 = 30^\circ$$

$\triangle SAD$ is dus gelijkbenig.

Bijgevolg: $|SA| = |SD|$



3 Bereken x en y.

Eerste methode

Om twee onbekenden x en y te bepalen zoeken we twee vergelijkingen in x en y.

ΔABD is rechthoekig (in B)

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ |BD|^2 &= |AD|^2 - |AB|^2 \\ &= 12^2 - 6^2 \\ &= 108 \\ |BD| &= \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \\ &\Downarrow \\ x + y &= 6\sqrt{3} \quad (1) \end{aligned}$$

$\Delta SBC \sim \Delta SDA$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \quad \begin{cases} \hat{S}_1 = \hat{S}_2 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 = 30^\circ \end{cases} \\ \frac{|SB|}{|SD|} &= \frac{|BC|}{|DA|} \\ &\Downarrow \\ \frac{x}{y} &= \frac{6}{12} \\ &\Downarrow \\ y &= 2x \quad (2) \end{aligned}$$

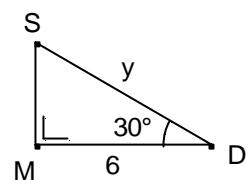
Uit het stelsel $\begin{cases} x + y = 6\sqrt{3} \\ y = 2x \end{cases}$ vinden we: $\begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ y = 4\sqrt{3} \end{cases}$.

Tweede methode

In de gelijkbenige driehoek ASD is de zwaartelijn ook hoogtelijn. Bijgevolg is ΔSMD rechthoekig.

In deze driehoek geldt: $\cos \hat{D} = \frac{|MD|}{|SD|} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{6}{y}$

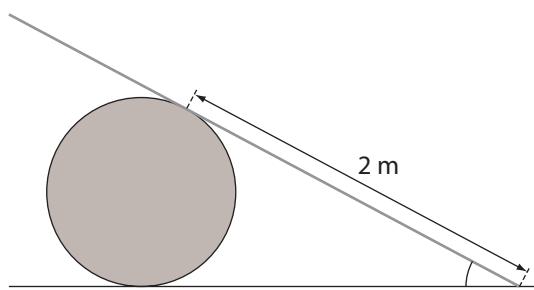
$$y = \frac{6}{\cos 30^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$



Op analoge manier (in ΔBSN) of uit $x + y = |BD| = 6\sqrt{3}$ vinden we nu: $x = 2\sqrt{3}$.

Herhalingsopdracht 101 bladzijde 62

Een olievat dat neerligt heeft een diameter van 50 cm. Om een schans te maken, legt men er een plank op. Wat is de hoek die de plank maakt met de grond?

**Oplossing**

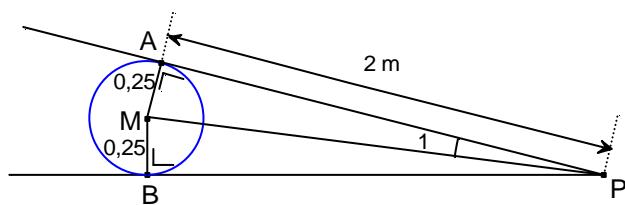
$$\tan \hat{P}_1 = \frac{0,25}{2} \text{ in } \Delta AMP$$

↓

$$\hat{P}_1 = 7^\circ 7' 30''$$

↓

$$\hat{P} = 2 \cdot \hat{P}_1 = 14^\circ 15' 0''$$



De plank maakt een hoek van $14^\circ 15' 0''$ met de grond.

Herhalingsopdracht 102 bladzijde 62

Twee cirkels c en c' hebben hetzelfde middelpunt M en als straal 4 cm en 6 cm.

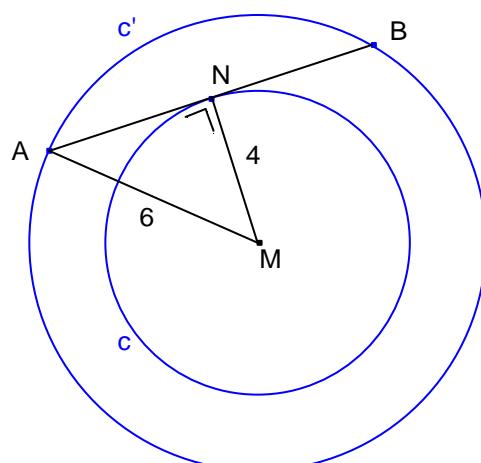
Een raaklijn aan de kleinste cirkel bepaalt een koorde $[AB]$ van de grootste cirkel.

Bereken $|AB|$.

Oplossing

$$\begin{aligned} |AB| &= 2 \cdot |AN| \\ &= 2 \cdot \sqrt{6^2 - 4^2} \\ &= 2\sqrt{20} \\ &= 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

De koorde is $4\sqrt{5}$ cm $\approx 8,94$ cm lang.

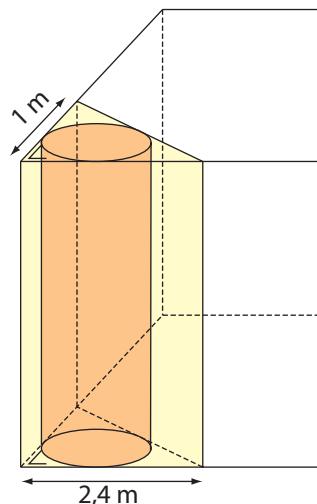


Herhalingsopdracht 103 bladzijde 63

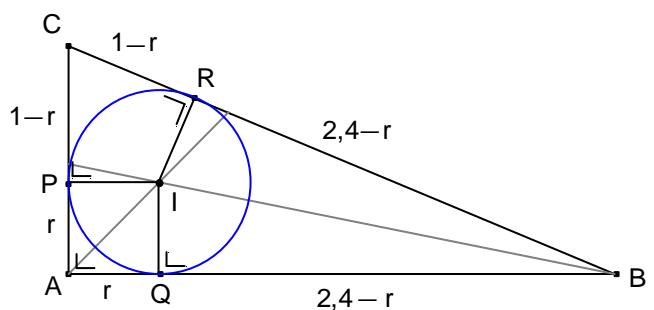
In de trapzaal van een flatgebouw bevindt zich een prismavormige ruimte, met een rechthoekige driehoek als grond- en bovenvlak.

In die ruimte komt een cilindervormige stortkoker voor huisvuil.

Bereken de diameter van de grootst mogelijke stortkoker.

Oplossing

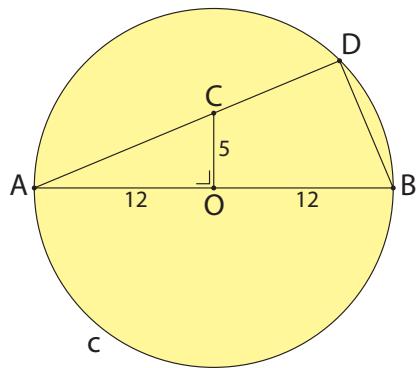
- De diameter van de grootst mogelijke koker is deze van de ingeschreven cirkel van het grond- of bovenvlak van de prismavormige ruimte
- Stel r is de straal van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$,
dan is $r = |PI| = |IQ| = |PA| = |AQ|$ met $|AC| = 1$; $|AB| = 2,4$ en $|BC| = \sqrt{1^2 + 2,4^2} = 2,6$.
 $|BQ| = |BR| = 2,4 - r$ en $|CP| = |CR| = 1 - r$ zodat
 $|BC| = |CR| + |RB| = 2,4 - r + 1 - r = 2,6 \Rightarrow r = 0,4$
- De gevraagde diameter is 0,8 m.



Herhalingsopdracht 104 bladzijde 63

De cirkel c heeft als middelpunt O en als straal 12.

Bereken $|AD|$ met de gegevens in de figuur.



Oplossing

- $\hat{ADB} = 90^\circ$ want \hat{ADB} is een omtrekshoek op de middellijn $[AB]$.
- $|AC| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$
- $\Delta AOC \sim \Delta ADB$

$$\Downarrow \begin{cases} H & \hat{A} = \hat{A} \\ H & \hat{O} = \hat{D} = 90^\circ \end{cases}$$

$$\frac{|AO|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

\Downarrow

$$\frac{|OA| \cdot |AB|}{|AC|} = |AD|$$

\Downarrow

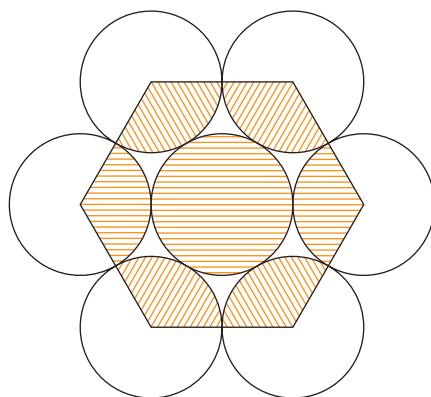
$$|AD| = \frac{12 \cdot 24}{13} = \frac{288}{13}$$

Herhalingsopdracht 105 bladzijde 63

In de figuur zijn 7 rakende cirkels getekend en een zeshoek waarvan de hoekpunten de middelpunten van 6 cirkels zijn.

De oppervlakte van elk van de cirkels is gelijk aan 1 cm^2 .

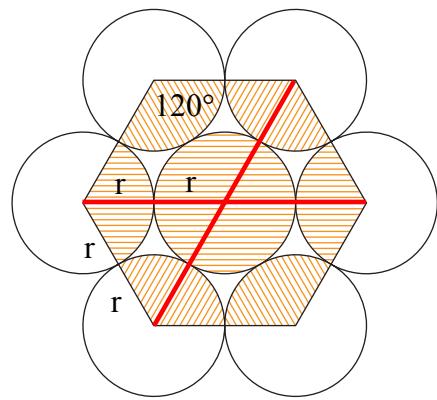
- 1 Bereken de oppervlakte van het gearceerde gebied.



De hoek van een regelmatige zeshoek is 120° .

Er zijn dus $6 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 3$ cirkels gearceerd, met een totale oppervlakte van 3 cm^2 .

- 2 Bereken de omtrek van de zeshoek.



Als r de straal is van een cirkel, dan is $2r$ de zijde van de zeshoek.

$$\text{Nu is } \pi r^2 = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

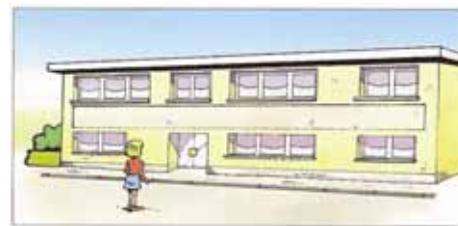
De omtrek van de zeshoek is $12r = \frac{12}{\sqrt{\pi}} \text{ cm} \approx 6,77 \text{ cm}$.

- 3 Bereken de oppervlakte van de zeshoek.

$$\begin{aligned} A_6 &= 6 \cdot (2r)^2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{6} \cdot \cos \frac{180^\circ}{6} \\ &= 6 \cdot \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \text{ cm}^2 \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \text{ cm}^2 \\ &\approx 3,31 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Herhalingsopdracht 106 bladzijde 64

Lies staat midden voor een gebouw dat 48 m breed is. Als ze 25 m dichter bij het gebouw staat, ziet ze dat onder een twee keer zo grote hoek.



- 1 Hoe ver staat Lies in beide gevallen van het gebouw af?

We beschouwen de omgeschreven cirkel van driehoek ABP.

Als Lies van P naar Q gaat, dan zal \hat{AQB} het dubbel zijn van \hat{APB} als en slechts als Q in het middelpunt van de omgeschreven cirkel valt, want de omtrekshoek \hat{APB} is de helft van de middelpuntshoek \hat{AQB} .

Dan geldt: $|QA| = |QB| = |QP| = 25$.

In ΔAMQ geldt: $|MQ| = \sqrt{|QA|^2 - |MA|^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$.

Hieruit volgt: $|PM| = 25 + 7 = 32$.

Lies staat eerst 32 m en nadien 7 m van het gebouw.

- 2 Onder welke hoeken ziet ze dan in beide gevallen het gebouw?

$$\text{In } \Delta AMP \text{ geldt: } \tan \hat{P}_1 = \frac{24}{32} = 0,75$$

↓

$$\hat{P}_1 = 36,87^\circ$$

↓

$$\hat{APB} = 73,74^\circ = 73^\circ 44'23''$$

$$\text{In } \Delta AQM \text{ geldt: } \tan \hat{Q}_1 = \frac{24}{7} = 3,42857$$

↓

$$\hat{Q}_1 = 73,74^\circ$$

↓

$$\hat{AQB} = 147,48^\circ = 147^\circ 28'46''$$

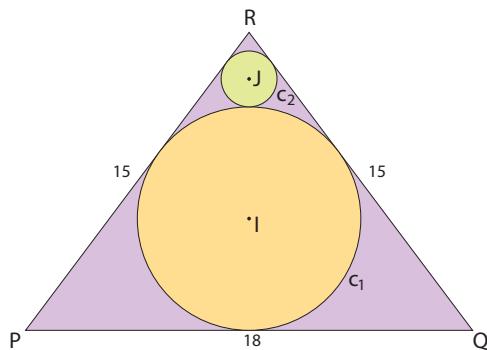
Opmerking

We hadden natuurlijk \hat{AQB} kunnen afleiden uit \hat{APB} of omgekeerd, vermits we weten dat $\hat{AQB} = 2\hat{APB}$.

Door beide hoeken te berekenen, hebben we echter meteen een controle op de juistheid van de berekende afstanden $|PM|$ en $|PQ|$ en eigenlijk ook op de juistheid van onze redenering om die afstanden te vinden.

Herhalingsopdracht 107 bladzijde 64

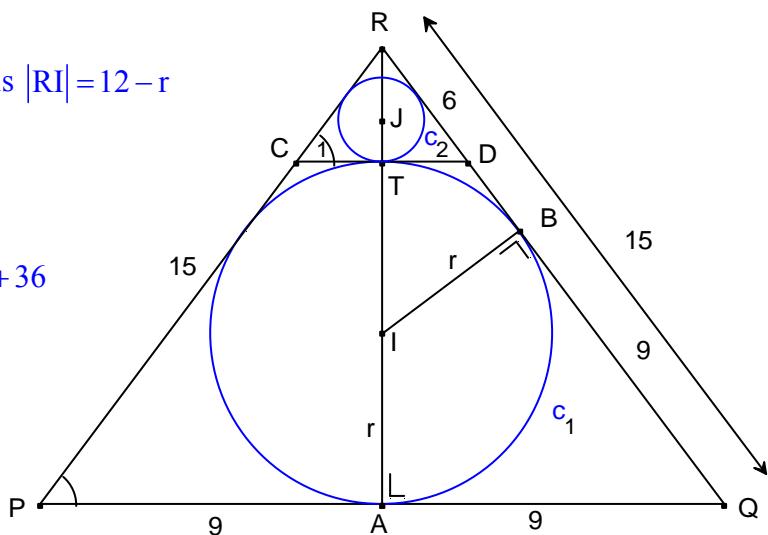
In de gelijkbenige driehoek PQR is $|PQ| = 18$ en $|PR| = |QR| = 15$.



- 1 Bereken de straal van de ingeschreven cirkel c_1 van de driehoek PQR.

- De raaklijnen uit Q aan c_1 zijn even lang, zodat $|QA|=|QB|=9 \Rightarrow |RB|=6$
 - $|RA|=\sqrt{15^2 - 9^2} = 12$
 - Stel r de straal van c_1 , dan is $|RI|=12-r$
 - In ΔRIB is

$$\begin{aligned}(12-r)^2 &= r^2 + 6^2 \\ \Rightarrow 144 - 24r + r^2 &= r^2 + 36 \\ \Rightarrow 108 &= 24r \\ \Rightarrow r &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$



- 2 Bereken de straal van de cirkel c_2 die raakt aan de zijden $[PR]$ en $[QR]$ en de cirkel c_1 uitwendig raakt.

Zij T het raakpunt van c_1 en c_2 .

Trek door T een evenwijdige met PQ die PR snijdt in C en QR in D.

$$\text{Nu is } \Delta PQR \sim \Delta CDR \quad \text{nl HH} \quad \begin{cases} \hat{R} = \hat{R} \\ \hat{P} = \hat{C}_1 \quad (\text{overeenkomstige hoeken}) \end{cases}$$

Aangezien $|RA| = 12$ en $r = \frac{9}{2}$ is $|RT| = 12 - 2 \cdot \frac{9}{2} = 3$.

De gelijkvormigheidsfactor van ΔPQR t.o.v. ΔCDR is 4 zodat de straal van de

ingeschreven cirkel van ΔCDR gelijk is aan $\frac{9}{8}$.

Hoofdstuk 2

Tweedegraadsfuncties

2.1 De functies $f(x) = ax^2$

2.2 De functies $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

2.3 De functies $f(x) = ax^2 + bx + c$

2.4 Opstellen van functievoorschriften

2.5 Gemiddelde verandering

