Hoofdstuk 3

Vergelijkingen en ongelijkheden van de tweede graad

Oplossingen van de opdrachten

Opdracht 1 bladzijde 120

Zet de volgende zinnen om in symbolen.

1 De oppervlakte van een vierkant met zijde x is 9.

$x^2 = 9$

2 De oppervlakte van een cirkel met straal r is 12.

$\pi r^2 = 12$

3 Het kwadraat van een getal vermeerderd met het drievoud van dat getal is -2.

$x^2 + 3x = -2$

Opdracht 2 bladzijde 121

1 Voor welke waarden van x is $x(x-7)=0$?

$x(x-7)=0$

$x=0 \quad \text{of} \quad x-7=0$

$x=0 \quad \text{of} \quad x=7$

$x(x-7)=0$ voor $x=0$ en voor $x=7$

2 Bepaal x zodat $x^2 + 4x = 0$.

$x^2+4x=0$

$x(x+4)=0$

$x=0 \quad \text{of} \quad x=-4$

Opdracht 3 bladzijde 121

Bepaal x zodat

1 $x^2 = 25$

$x=-5 \quad \text{of} \quad x=5$

2 $2x^2 - 8 = 0$

$x^2 = 4$

$x=-2 \quad \text{of} \quad x=2$

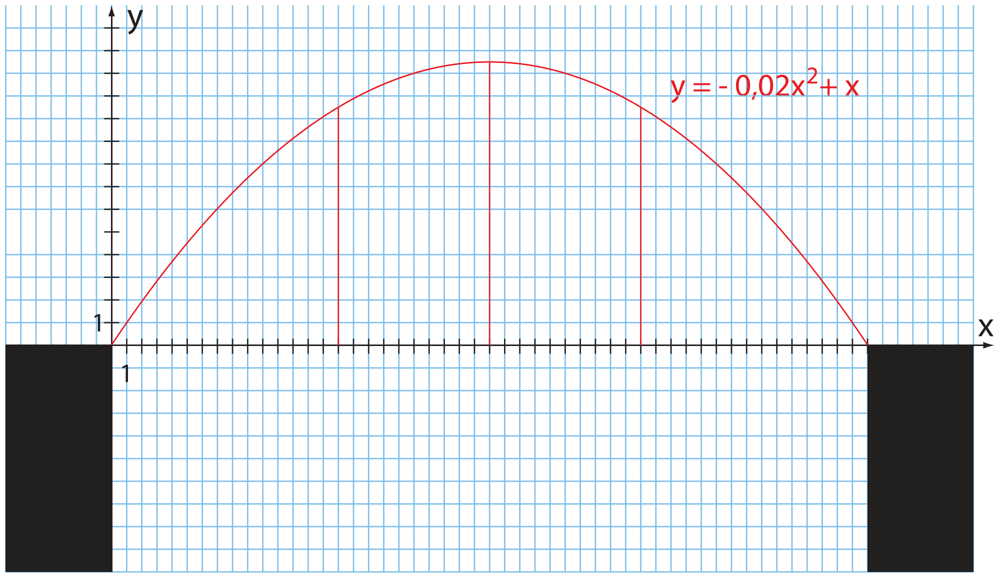
3 $3x^2 + 27 = 0$

$x^2 = -9$

geen reële oplossingen

Opdracht 4 bladzijde 121

Een brug over een rivier heeft een boog die geconstrueerd is volgens de formule $y = -0,02x^2 + x$. Hierbij stelt x de afstand voor in meter, gemeten vanaf de linkeroever en y de hoogte van de boog boven het wegdek, ook in meter.
Hoe breed is de rivier?



Oplossing

We bepalen de nulpunten van $y = -0,02x^2 + x$.

$-0,02x^2 + x = 0$

$x(-0,02x + 1) = 0$

$x = 0 \quad \text{of} \quad x = \dfrac{1}{0,02}$

$x = 50$

De rivier is 50 m breed.

Opdracht 5 bladzijde 122

Los de volgende onvolledige vierkantsvergelijkingen op.

1 $x(2x-8)=0$

$$x(2x-8)=0$$
$$x=0 \quad \text{of} \quad 2x-8=0$$
$$x=0 \quad \text{of} \quad x=4$$

7 $2x^2-18=0$

$$2x^2-18=0$$
$$x^2=9$$
$$x=-3 \quad \text{of} \quad x=3$$

2 $x^2+3x=0$

$$x^2+3x=0$$
$$x(x+3)=0$$
$$x=0 \quad \text{of} \quad x=-3$$

8 $x^2+25=0$

$$x^2+25=0$$
$$x^2=-25$$

geen reële wortels

3 $-3x+18x^2=0$

$$-3x+18x^2=0$$
$$3x(-1+6x)=0$$
$$3x=0 \quad \text{of} \quad -1+6x=0$$
$$x=0 \quad \text{of} \quad x=\frac{1}{6}$$

9 $2x^2=0$

$$2x^2=0$$
$$x^2=0$$
$$x=0$$

4 $15t^2=18t$

$$15t^2=18t$$
$$15t^2-18t=0$$
$$3t(5t-6)=0$$
$$3t=0 \quad \text{of} \quad 5t-6=0$$
$$t=0 \quad \text{of} \quad t=\frac{6}{5}$$

10 $-z^2+289=0$

$$-z^2+289=0$$
$$z^2=289$$
$$z=-17 \quad \text{of} \quad z=17$$

5 $5x^2+0,8x=0$

$$5x^2+0,8x=0$$
$$x\left(5x+\frac{4}{5}\right)=0$$
$$x=0 \quad \text{of} \quad 5x+\frac{4}{5}=0$$
$$x=0 \quad \text{of} \quad x=-\frac{4}{25}$$

11 $36=-0,25x^2$

$$36=-0,25x^2$$
$$x^2=-144$$

geen reële wortels

$\boxed{6 \quad -4x^2+\sqrt{3}\,x=0}$

$$-4x^2+\sqrt{3}\,x=0$$
$$x\left(-4x+\sqrt{3}\right)=0$$
$$x=0 \quad \text{of} \quad -4x+\sqrt{3}=0$$
$$x=0 \quad \text{of} \quad x=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$\boxed{12 \quad -4y^2+12=0}$

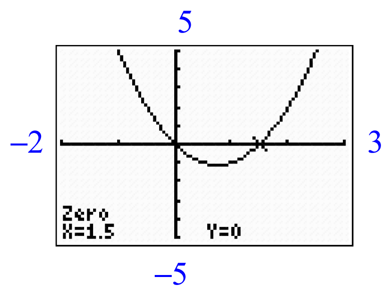
$$-4y^2+12=0$$
$$y^2=3$$
$$y=-\sqrt{3} \quad \text{of} \quad y=\sqrt{3}$$

Opdracht 6 bladzijde 122

Bepaal de eventuele nulpunten van de volgende functies.

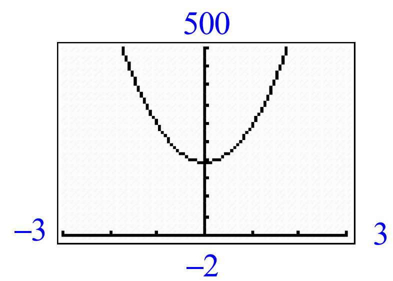
$\boxed{1 \quad f(x)=2x^2-3x}$

$$2x^2-3x=0$$
$$x(2x-3)=0$$
$$x=0 \text{ of } x=\frac{3}{2}$$
$$\text{nulpunten : } 0, \frac{3}{2}$$



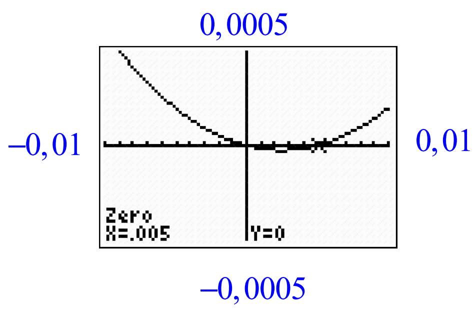
$\boxed{2 \quad f(x)=100x^2+193{,}21}$

$$100x^2+193{,}21=0$$
$$x^2=-1{,}9321$$
$$\text{de functie heeft geen nulpunten}$$



$\boxed{3 \quad f(x)=4x^2-0{,}02x}$

$$4x^2-0{,}02x=0$$
$$4x^2-\frac{1}{50}x=0$$
$$x\left(4x-\frac{1}{50}\right)=0$$
$$x=0 \text{ of } x=\frac{1}{200}$$
$$\text{nulpunten : } 0, \frac{1}{200}$$



4 $f(x) = 450 - \frac{1}{2}x^2$

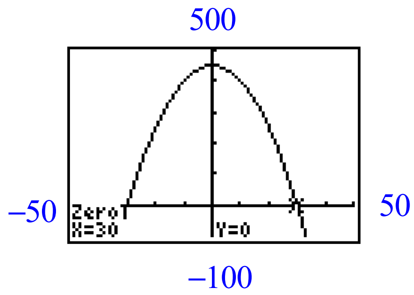
$450 - \frac{1}{2}x^2 = 0$

$\frac{1}{2}x^2 = 450$

$x^2 = 900$

$x = -30 \text{ of } x = 30$

$\text{nulpunten : } -30, 30$



Opdracht 7 bladzijde 123

Een vuurpijl wordt verticaal omhoog geschoten.
Na t seconden is de hoogte h in m gelijk aan $25t - 5t^2$.
Na hoeveel seconden zal de pijl terug op de grond vallen?

Oplossing

We bepalen de nulpunten van de functie $h = 25t - 5t^2$.

$25t - 5t^2 = 0$

$5t(5 - t) = 0$

$5t = 0 \text{ of } 5 - t = 0$

$t = 0 \text{ of } t = 5$

Na 5 seconden valt de pijl op de grond.

V Opdracht 8 bladzijde 123

Los de volgende vergelijkingen op.

1 $(x+1)(x+2)(x+3)=0$

$(x+1)(x+2)(x+3)=0$ $\qquad A\cdot B\cdot C=0 \iff A=0 \text{ of } B=0 \text{ of } C=0$

$x+1=0 \text{ of } x+2=0 \text{ of } x+3=0$

$x=-1 \text{ of } x=-2 \text{ of } x=-3$

2 $(x^2-4x)(x^2-15)=0$

$(x^2-4x)(x^2-15)=0$

$x^2-4x=0 \text{ of } x^2-15=0$

$x(x-4)=0 \text{ of } x^2=15$

$x=0 \text{ of } x=4 \text{ of } x=-\sqrt{15} \text{ of } x=\sqrt{15}$

3 $(x-2)(x+6)+(x-2)(3x-4)=0$

$\underline{(x-2)}(x+6)+\underline{(x-2)}(3x-4)=0$ $\qquad$ gemeenschappelijke factoren voorop plaatsen

$(x-2)(x+6+3x-4)=0$

$(x-2)(4x+2)=0$

$x=2 \text{ of } x=-\dfrac{1}{2}$

4 $(x+2)(x+6)-(x+2)=0$

$\underline{(x+2)}(x+6)-\underline{(x+2)}=0$

$(x+2)(x+6-1)=0$

$(x+2)(x+5)=0$

$x=-2 \text{ of } x=-5$

5 $(x-8)^2=2x-16$

$(x-8)^2=2x-16$

$\underline{(x-8)}^2-2\underline{(x-8)}=0$

$(x-8)(x-8-2)=0$

$(x-8)(x-10)=0$

$x=8 \text{ of } x=10$

$\boxed{6 \quad x^2 = (2x+1)^2}$

$x^2 = (2x+1)^2 \qquad\qquad A^2 = B^2 \quad \Leftrightarrow \quad A = B \text{ of } A = -B$

$x = 2x+1 \text{ of } x = -(2x+1)$

$-x = 1 \text{ of } x = -2x-1$

$x = -1 \text{ of } 3x = -1$

$x = -1 \text{ of } x = -\dfrac{1}{3}$

$\boxed{7 \quad (x-3)^2 = 25x^2}$

$(x-3)^2 = 25x^2$

$(x-3)^2 = (5x)^2$

$x-3 = 5x \text{ of } x-3 = -5x$

$-4x = 3 \text{ of } 6x = 3$

$x = -\dfrac{3}{4} \text{ of } x = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{8 \quad 9x^2 = 4(x-2)^2}$

$9x^2 = 4(x-2)^2$

$(3x)^2 = (2x-4)^2$

$3x = 2x-4 \text{ of } 3x = -2x+4$

$x = -4 \text{ of } 5x = 4$

$x = -4 \text{ of } x = \dfrac{4}{5}$

$\boxed{9 \quad (x^2+x-1)^2 = (3x^2-x-1)^2}$

$(x^2+x-1)^2 = (3x^2-x-1)^2 = 0$

$x^2+x-1 = 3x^2-x-1 \text{ of } x^2+x-1 = -3x^2+x+1$

$-2x^2+2x = 0 \text{ of } 4x^2-2 = 0$

$2x(-x+1) = 0 \text{ of } x^2 = \dfrac{1}{2}$

$x = 0 \text{ of } x = 1 \text{ of } x = -\sqrt{\dfrac{1}{2}}\left(= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ of } x = \sqrt{\dfrac{1}{2}}\left(= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\boxed{10 \quad 16\left(x^2-3\right)^2=49\left(5-x^2\right)^2}$

$$16\left(x^2-3\right)^2=49\left(5-x^2\right)^2$$
$$\left(4x^2-12\right)^2=\left(35-7x^2\right)^2$$
$$4x^2-12=35-7x^2 \text{ of } 4x^2-12=-35+7x^2$$
$$11x^2=47 \text{ of } -3x^2=-23$$
$$x=-\sqrt{\frac{47}{11}} \text{ of } x=\sqrt{\frac{47}{11}} \text{ of } x=-\sqrt{\frac{23}{3}} \text{ of } x=\sqrt{\frac{23}{3}}$$

Opdracht 9 bladzijde 123

Los op.

$\boxed{1 \quad (x+1)^2=4}$

$$(x+1)^2=4$$
$$x+1=2 \text{ of } x+1=-2$$
$$x=1 \text{ of } x=-3$$

$\boxed{2 \quad (2x+5)^2=9}$

$$(2x+5)^2=9$$
$$2x+5=3 \text{ of } 2x+5=-3$$
$$2x=-2 \text{ of } 2x=-8$$
$$x=-1 \text{ of } x=-4$$

$\boxed{3 \quad (x+5)^2=-4}$

geen reële wortels

$\boxed{4 \quad x^2-4x+4=9}$

$$x^2-4x+4=9$$
$$(x-2)^2=9$$
$$x-2=3 \text{ of } x-2=-3$$
$$x=5 \text{ of } x=-1$$

$\boxed{5 \quad x^2+8x+16=0}$

$$x^2+8x+16=0$$
$$(x+4)^2=0$$
$$x+4=0$$
$$x=-4$$

$\boxed{6 \quad 4x^2+4x+1=-25}$

$$4x^2+4x+1=-25$$
$$(2x+1)^2=-25$$

geen reële wortels

Opdracht 10 bladzijde 123

1 Toon aan dat je de vergelijking $x^2+6x+8=0$ kunt schrijven als $(x+3)^2=1$ en los deze vergelijking op.

$$x^2+6x+8=0$$
$$x^2+6x+9-1=0$$
$$(x+3)^2-1=0$$
$$(x+3)^2=1$$
$$x+3=1 \text{ of } x+3=-1$$
$$x=-2 \text{ of } x=-4$$

2 Los de vergelijking $4x^2+12x+5=0$ op.

$$\begin{array}{lcl} 4x^2 & + & 12x+5=0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (2x)^2 & & 2\cdot 2x\cdot 3 \end{array}$$
$$4x^2 + 12x+9-4=0$$
$$(2x+3)^2=4$$
$$2x+3=2 \text{ of } 2x+3=-2$$
$$2x=-1 \text{ of } 2x=-5$$
$$x=-\frac{1}{2} \text{ of } x=-\frac{5}{2}$$

Opdracht 11 bladzijde 126

Los de volgende vierkantsvergelijkingen op.

$\boxed{1 \quad x^2+x-2=0}$

$$x^2+x-2=0$$
$$D=1+8=9$$
$$x=\frac{-1\pm 3}{2}$$
$$x=-2 \text{ of } x=1$$

$\boxed{2 \quad 4x^2+4x+1=0}$

$$4x^2+4x+1=0$$
$$D=16-16=0$$
$$x=-\frac{4}{8}$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

of : $(2x+1)^2=0$

$$2x+1=0$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

$\boxed{3 \quad 7x^2 - 5x + 1 = 0}$

$x^2 + x - 2 = 0$

$D = 25 - 28 = -3 < 0$

geen reële wortels

$\boxed{4 \quad 4x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 3 = 0}$

$4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

$D = 16\cdot3 - 4\cdot4\cdot3 = 0$

$x = \dfrac{4\sqrt{3}}{8}$

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

of : $\left(2x - \sqrt{3}\right)^2 = 0$

$2x - \sqrt{3} = 0$

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{5 \quad t^2 + t - 30 = 0}$

$t^2 + t - 30 = 0$

$D = 1 + 120 = 121$

$t = \dfrac{-1 \pm 11}{2}$

$t = -6$ of $t = 5$

$\boxed{6 \quad -2x^2 + 2x + 1 = 0}$

$-2x^2 + 2x + 1 = 0$

$D = 4 + 8 = 12$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{-4}$

$x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{-4}$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

$x = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$ of $\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$

Opdracht 12 bladzijde 127

Los de volgende vergelijkingen op volgens de werkwijze die het meest aangewezen is.

1 $x^2 - 5 = 0$

$$x^2 - 5 = 0$$
$$x^2 = 5$$
$$x = -\sqrt{5} \text{ of } x = \sqrt{5}$$

2 $6x^2 + 5x - 6 = 0$

$$6x^2 + 5x - 6 = 0$$
$$D = 25 + 144 = 169$$
$$x = \frac{-5 \pm 13}{12}$$
$$x = -\frac{3}{2} \text{ of } x = \frac{2}{3}$$

3 $-2x^2 + 6x = 0$

$$-2x^2 + 6x = 0$$
$$-2x(x-3) = 0$$
$$-2x = 0 \text{ of } x - 3 = 0$$
$$x = 0 \text{ of } x = 3$$

4 $-9x^2 + x - 2 = 0$

$$9x^2 + x - 2 = 0$$
$$D = 1 - 4 \cdot 9 \cdot 2 < 0$$

geen reële wortels

6 $(x-3)^2 - 2 = 0$

$$(x-3)^2 - 2 = 0$$
$$(x-3)^2 = 2$$
$$x - 3 = -\sqrt{2} \text{ of } x - 3 = \sqrt{2}$$
$$x = 3 - \sqrt{2} \text{ of } x = 3 + \sqrt{2}$$

7 $x^2 = \sqrt{12}\,x + 13$

$$x^2 = \sqrt{12}\,x + 13$$
$$x^2 - \sqrt{12}\,x - 13 = 0$$
$$D = 12 + 52 = 64$$
$$x = \frac{\sqrt{12} \pm 8}{2}$$
$$x = \frac{2\sqrt{3} \pm 8}{2}$$
$$x = \sqrt{3} - 4 \text{ of } x = \sqrt{3} + 4$$

8 $\frac{4}{5}y^2 + \frac{1}{5}y - \frac{1}{10} = 0$

$$\frac{4}{5}y^2 + \frac{1}{5}y - \frac{1}{10} = 0 \qquad (\cdot 10)$$
$$8y^2 + 2y - 1 = 0$$
$$D = 4 + 32 = 36$$
$$y = \frac{-2 \pm 6}{16}$$
$$y = -\frac{1}{2} \text{ of } y = \frac{1}{4}$$

9 $6(t+2)^2 - 24 = 0$

$$6(t+2)^2 - 24 = 0$$
$$(t+2)^2 = 4$$
$$t + 2 = -2 \text{ of } t + 2 = 2$$
$$t = -4 \text{ of } t = 0$$

$\boxed{5 \quad x^2 + \sqrt{3}\,x + 2 = 0}$

$$x^2 + \sqrt{3}\,x + 2 = 0$$

$$D = 3 - 8 < 0$$

geen reële wortels

$\boxed{10 \quad \left(x^2 + 2x - 2\right)\left(12x^2 + x - 1\right) = 0}$

$$\left(x^2 + 2x - 2\right)\left(12x^2 + x - 1\right) = 0$$

$x^2 + 2x - 2 = 0 \quad \text{of} \quad 12x^2 + x - 1 = 0$

$D = 4 + 8 = 12 \qquad D = 1 + 48 = 49$

$x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \qquad x = \dfrac{-1 \pm 7}{24}$

$x = -1 - \sqrt{3}$ of $x = -1 + \sqrt{3}$

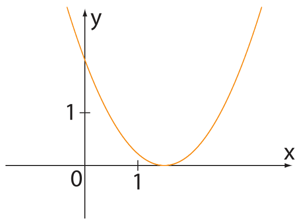
of $x = -\dfrac{1}{3}$ of $x = \dfrac{1}{4}$

Opdracht 13 bladzijde 127

Hieronder zie je enkele grafieken van tweedegraadsfuncties $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Bepaal voor elke functie het teken van $b^2 - 4ac$, van a en van c.

1

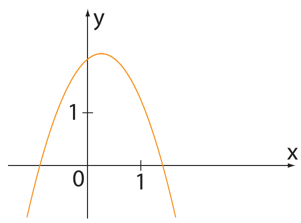


1 nulpunt $\Rightarrow$ $D = 0$

dalparabool $\Rightarrow$ $a > 0$

$f(0) > 0 \Rightarrow c > 0$

4



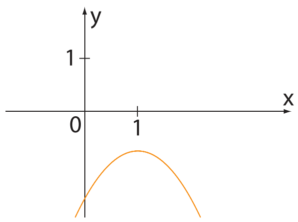
twee verschillende nulpunten

$\Rightarrow D > 0$

bergparabool $\Rightarrow$ $a < 0$

$f(0) > 0 \Rightarrow c > 0$

2

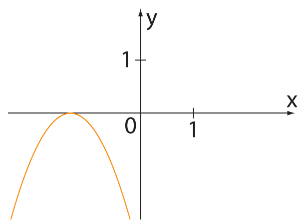


geen nulpunt $\Rightarrow$ $D < 0$

bergparabool $\Rightarrow$ $a < 0$

$f(0) < 0 \Rightarrow c < 0$

5

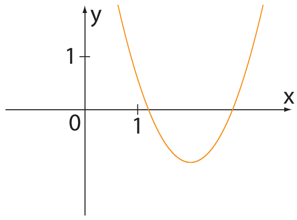


1 nulpunt $\Rightarrow$ $D = 0$

bergparabool $\Rightarrow$ $a < 0$

$f(0) < 0 \Rightarrow c < 0$

3



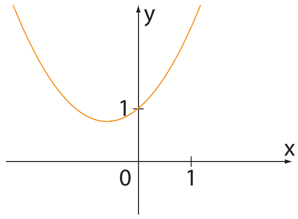
twee verschillende nulpunten

$\Rightarrow \quad D > 0$

dalparabool $\quad \Rightarrow \quad a > 0$

$f(0) > 0 \quad \Rightarrow \quad c > 0$

6



geen nulpunt $\quad \Rightarrow \quad D < 0$

dalparabool $\quad \Rightarrow \quad a > 0$

$f(0) > 0 \quad \Rightarrow \quad c > 0$

Opdracht 14 bladzijde 128

Bepaal de nulpunten van de volgende functies.

$\boxed{1 \quad f(x) = -3x^2 + 5x - 2}$

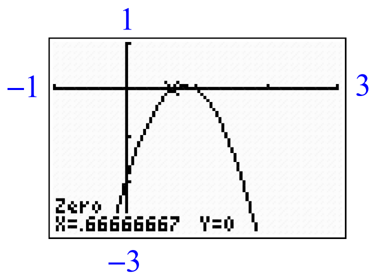
$-3x^2 + 5x - 2 = 0$

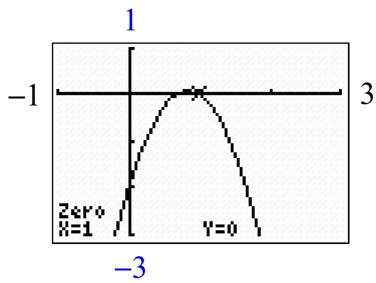
$D = 25 - 24 = 1$

$x = \dfrac{-5 \pm 1}{-6}$

$x = 1 \text{ of } x = \dfrac{2}{3}$

nulpunten : $1, \dfrac{2}{3}$





$\boxed{2 \quad f(x) = 9x^2 + 6x + 1}$

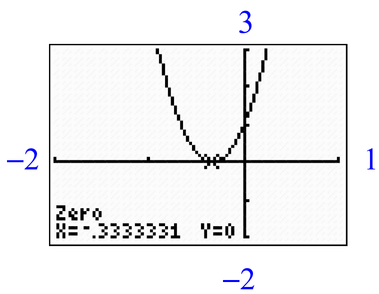
$9x^2 + 6x + 1 = 0$

$D = 36 - 36 = 0$

$x = -\dfrac{6}{18}$

$x = -\dfrac{1}{3}$

nulpunt : $-\dfrac{1}{3}$

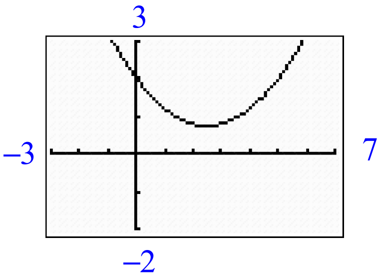


$\boxed{3 \quad f(x) = \frac{1}{5}x^2 - x + 2}$

$$\frac{1}{5}x^2 - x + 1 = 0$$

$$D = 1 - \frac{8}{5} < 0$$

geen nulpunten



$\boxed{4 \quad f(x) = 2x^2 + 1{,}6x - 10{,}26}$

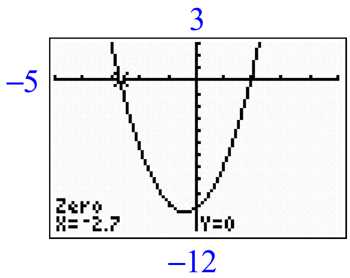
$$2x^2 + 1{,}6x - 10{,}26 = 0$$

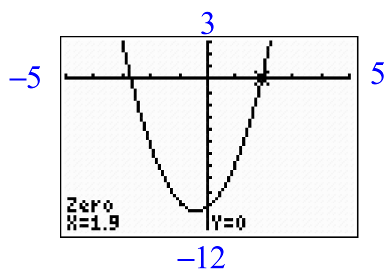
$$D = 1{,}6^2 + 4 \cdot 2 \cdot 10{,}26 = 84{,}64$$

$$x = \frac{-1{,}6 \pm 9{,}2}{4}$$

$x = -2{,}7$ of $x = 1{,}9$

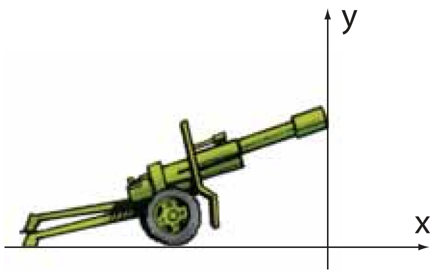
nulpunten : $-2{,}7; 1{,}9$





Opdracht 15 bladzijde 128

De baan van een kogel, weggeschoten met een kanon, wordt beschreven met de formule $y = -0{,}01x^2 + 0{,}79x + 1{,}62$. Hierin stelt x de horizontale afstand in meter voor vanaf de vuurmond van het kanon en y de hoogte boven de grond, ook in meter.



1 Op welke hoogte bevindt zich de vuurmond van het kanon?

Voor $x = 0$ is $y = 1{,}62$.

De vuurmond bevindt zich op een hoogte van 1,62 m.

2 Op welke afstand van het kanon zal de kogel neerkomen?

We bepalen de nulpunten van $y = -0{,}01x^2 + 0{,}79x + 1{,}62$.

$$-0{,}01x^2 + 0{,}79x + 1{,}62 = 0$$

$$D = 0{,}79^2 + 4 \cdot 0{,}01 \cdot 1{,}62 = 0{,}6889$$

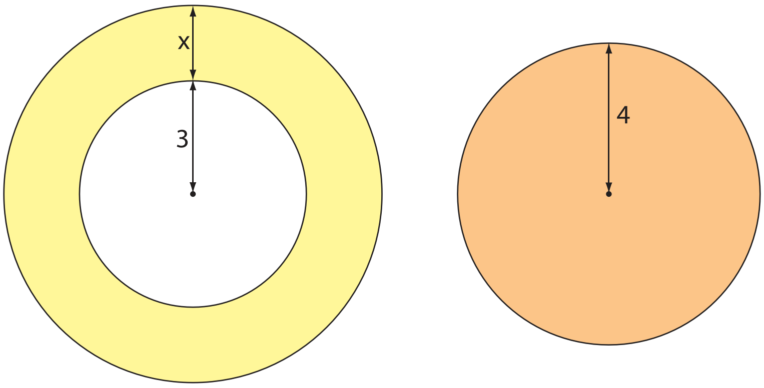
$$x = \frac{-0{,}79 \pm 0{,}83}{-0{,}02}$$

$x = 81$ of $\cancel{x = -2}$ (geen realistische oplossing)

De kogel zal op een afstand van 81 m van het kanon neerkomen.

Opdracht 16 bladzijde 128

Bepaal x zodat de oppervlakte van de ring even groot is als de oppervlakte van de rechtercirkel.



Oplossing

Oppervlakte van de ring $= \pi(x+3)^2 - \pi \cdot 3^2$

Oppervlakte van de rechtercirkel $= \pi \cdot 4^2$

$\pi\left[(x+3)^2 - 9\right] = \pi \cdot 16$

$(x+3)^2 = 25$

$x+3=-5$ of $x+3=5$

$\cancel{x=-8}$ of $x=2$

$\downarrow$

geen realistische oplossing

$x=2$

Opdracht 17 bladzijde 128

Bepaal m zodat de volgende vergelijkingen slechts één wortel hebben.

Opdat de vergelijking slechts één wortel zou hebben, moet $D=0$.

1 $x^2 + mx + 16 = 0$

$D = m^2 - 64$

$D = 0$ als $m^2 = 64$, dus $m=-8$ of $m=8$

2 $mx^2 + 2x + m = 0$

$D = 4 - 4m^2$

$D = 0$ als $4 - 4m^2 = 0$, dus $m^2 = 1$

$m=-1$ of $m=1$

Opdracht 18 bladzijde 128

Voor welke waarde(n) van m heeft de vierkantsvergelijking $3x^2 + 4x + 4m = 0$

1 geen wortels?

De vergelijking $3x^2 + 4x + 4m = 0$ heeft geen wortels als $D < 0$.

$D = 16 - 48m$

$$16 - 48m < 0$$
$$-48m < -16$$
$$m > \frac{16}{48}$$
$$m > \frac{1}{3}$$

De vergelijking $3x^2 + 4x + 4m = 0$ heeft geen wortels als $m > \frac{1}{3}$.

2 juist één wortel?

De vergelijking $3x^2 + 4x + 4m = 0$ heeft juist één wortel als $D = 0$.

$$16 - 48m = 0$$
$$m = \frac{1}{3}$$

De vergelijking $3x^2 + 4x + 4m = 0$ heeft juist één wortel als $m = \frac{1}{3}$.

3 twee verschillende wortels?

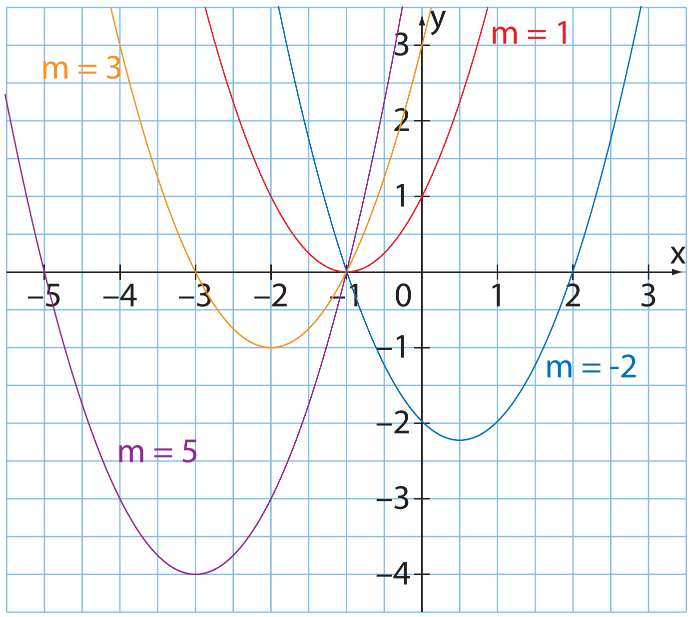
De vergelijking $3x^2 + 4x + 4m = 0$ heeft twee verschillende wortels als $D > 0$.

$$16 - 48m > 0$$
$$-48m > -16$$
$$m < \frac{1}{3}$$

De vergelijking $3x^2 + 4x + 4m = 0$ heeft twee verschillende wortels als $m < \frac{1}{3}$.

Opdracht 19 bladzijde 129

De parametervergelijking $y = x^2 + (m+1)x + m$ stelt een familie parabolen voor.
Op de figuur zie je voor enkele waarden van m de corresponderende parabolen.



1 Toon aan dat alle parabolen van deze familie door het punt met coördinaat $(-1, 0)$ gaan.

Voor $(-1,0)$ geldt:

$$0 = 1 + (m+1)\cdot(-1) + m$$
$$0 = 1 - m - 1 + m$$
$$0 = 0 \qquad \text{identieke vergelijking}$$

Alle parabolen van deze familie gaan door het punt met coördinaat $(-1,0)$.

2 Toon aan dat deze parabolen ofwel twee verschillende snijpunten hebben met de x-as ofwel de x-as raken.

$$\begin{aligned} D &= (m+1)^2 - 4m \\ &= m^2 + 2m + 1 - 4m \\ &= m^2 - 2m + 1 \\ &= (m-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

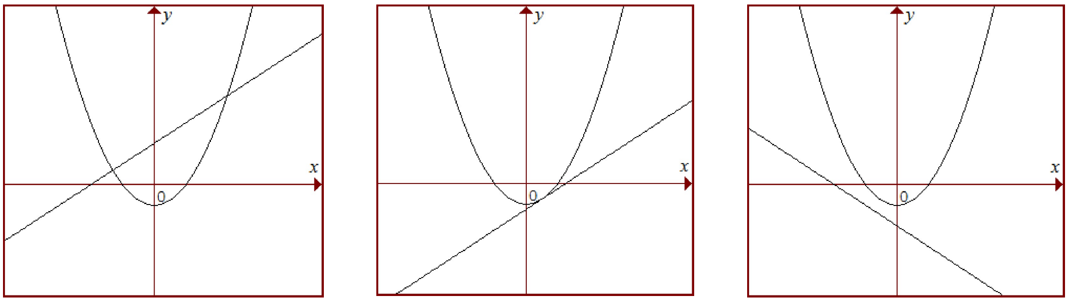
$D > 0$ als $m \neq 1$ $\Rightarrow$ twee verschillende snijpunten

$D = 0$ als $m = 1$ $\Rightarrow$ één snijpunt, de parabool raakt de x-as.

Opdracht 20 bladzijde 129

1 Hoeveel snijpunten kunnen een parabool en een rechte hebben?

Een parabool en een rechte kunnen twee snijpunten of één snijpunt of geen snijpunten hebben.



2 Bepaal de eventuele snijpunten van de grafieken van $f(x) = -x + 1$ en $g(x) = x^2 - x$.

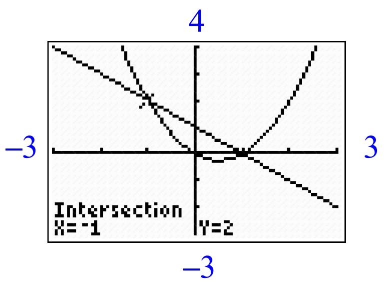
Om de snijpunten te bepalen, moeten we $f(x)$ gelijkstellen aan $g(x)$.

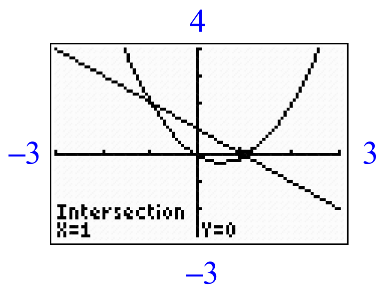
$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
-x + 1 &= x^2 - x \\
1 &= x^2
\end{aligned}
$$

$x = -1$ of $x = 1$

Als $x = -1$, dan is $f(x) = g(x) = 2$ en als $x = 1$, dan is $f(x) = g(x) = 0$.

Snijpunten: $S_1(-1, 2)$ en $S_2(1, 0)$





Opdracht 21 bladzijde 130

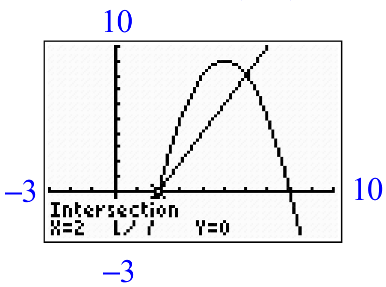
Bepaal de eventuele snijpunten van de grafieken van de volgende functies.

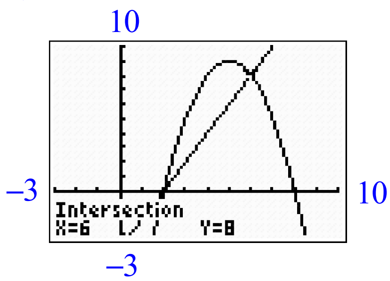
1 $f(x) = 2x - 4$ en $g(x) = -x^2 + 10x - 16$

$$f(x) = g(x)$$
$$2x - 4 = -x^2 + 10x - 16$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$D = 64 - 48 = 16$$
$$x = \frac{8 \pm 4}{2}$$
$$x = 2 \text{ of } x = 6$$

Als $x = 2 \Rightarrow f(x) = g(x) = 0$ en als $x = 6 \Rightarrow f(x) = g(x) = 8$.

Snijpunten: $S_1(2,0)$ en $S_2(6,8)$



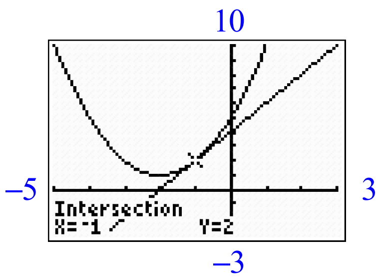


2 $f(x) = x^2 + 4x + 5$ en $g(x) = 2x + 4$

$$x^2 + 4x + 5 = 2x + 4$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$(x+1)^2 = 0$$
$$x = -1$$

Als $x = -1 \Rightarrow f(x) = g(x) = 2$

Snijpunt: $S(-1,2)$

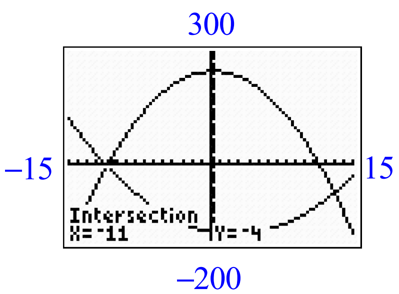


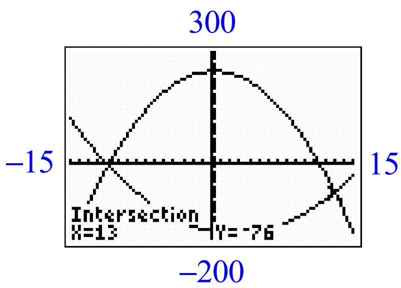
3 $f(x)=x^2-5x-180$ en $g(x)=-2x^2+x+249$

$$x^2-5x-180=-2x^2+x+249$$
$$3x^2-6x-429=0$$
$$x^2-2x-143=0$$
$$D=4+572=576$$
$$x=\frac{2\pm 24}{2}$$
$$x=-11 \text{ of } x=13$$

Als $x=-11 \Rightarrow f(x)=g(x)=-4$ en als $x=13 \Rightarrow f(x)=g(x)=-76$.

Snijpunten: $S_1(-11,-4)$ en $S_2(13,-76)$

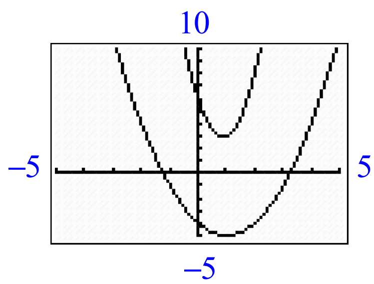




4 $f(x)=4x^2-7x+6$ en $g(x)=x^2-2x-4$

$$4x^2-7x+6=x^2-2x-4$$
$$3x^2-5x+10=0$$
$$D=25-120<0$$

De twee parabolen hebben geen snijpunten.



Opdracht 22 bladzijde 130

Voor welke waarde(n) van m hebben de parabool $y = mx^2 + 2x$ en de rechte $y = x - 2$ twee verschillende snijpunten?

Oplossing

Om de snijpunten de bepalen, stellen we

$mx^2 + 2x = x - 2$ met $m \neq 0$

$mx^2 + x + 2 = 0$

$D = 1 - 8m$

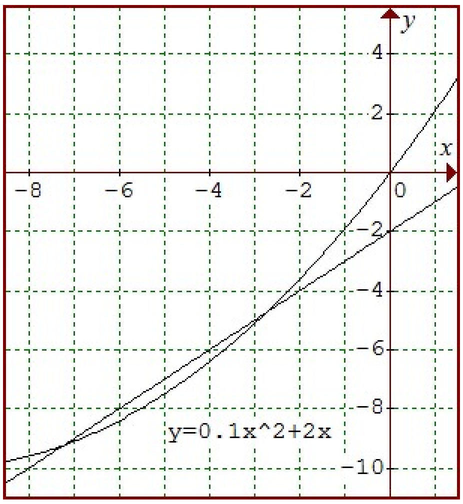
Er zijn twee verschillende snijpunten als $D > 0$, dus moet

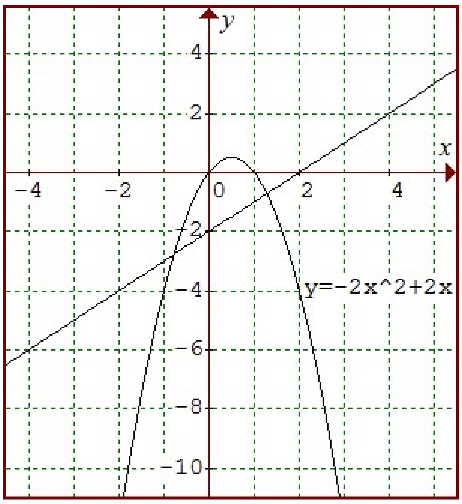
$1 - 8m > 0$

$-8m > -1$

$m < \frac{1}{8}$

De parabool en de rechte hebben twee verschillende snijpunten als $m < \frac{1}{8}$ en $m \neq 0$.





Opdracht 23 bladzijde 132

1 Vul de tabel in. Noteer de eventuele decimale resultaten in breukvorm.

x_1 en x_2 zijn de wortels van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$.

	vergelijking	wortels x_1 en x_2	som $x_1 + x_2$	product $x_1 \cdot x_2$
1	$x^2 - 4 = 0$			
2	$x^2 - 5x + 6 = 0$			
3	$-x^2 + 3x + 4 = 0$			
4	$2x^2 + 3x - 5 = 0$			
5	$3x^2 - 2x - 1 = 0$			

	vergelijking	wortels x_1 en x_2	som $x_1 + x_2$	product $x_1 \cdot x_2$
1	$x^2 - 4 = 0$	**−2 en 2**	**0**	**−4**
2	$x^2 - 5x + 6 = 0$	**2 en 3**	**5**	**6**
3	$-x^2 + 3x + 4 = 0$	**−1 en 4**	**3**	**−4**
4	$2x^2 + 3x - 5 = 0$	**1 en** $-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$
5	$3x^2 - 2x - 1 = 0$	**1 en** $-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

2 Merk je een verband tussen de som van de wortels van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ en de coëfficiënten a, b en c?

De som van de wortels van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ blijkt gelijk te zijn aan $-\frac{b}{a}$.

3 Merk je een verband tussen het product van de wortels van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ en de coëfficiënten a, b en c?

Het product van de wortels van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ blijkt gelijk te zijn aan $\frac{c}{a}$.

Opdracht 24 bladzijde 134

Los de volgende vierkantsvergelijkingen op met de som- en productformules.

1 $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} s = 5 \\ p = 6 \end{array}\right\} \quad x_1 = 2 \text{ en } x_2 = 3$$

$x = 2$ of $x = 3$

2 $x^2 - 15x + 56 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} s = 15 \\ p = 56 \end{array}\right\} \quad x_1 = 7 \text{ en } x_2 = 8$$

$x = 7$ of $x = 8$

3 $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} s = -4 \\ p = 4 \end{array}\right\} \quad x_1 = -2 \text{ en } x_2 = -2$$

$x = -2$

4 $-x^2 + 9x - 14 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} s = 9 \\ p = 14 \end{array}\right\} \quad x_1 = 2 \text{ en } x_2 = 7$$

$x = 2$ of $x = 7$

5 $x^2 + x - 20 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} s = -1 \\ p = -20 \end{array}\right\} \quad x_1 = -5 \text{ en } x_2 = 4$$

$x = -5$ of $x = 4$

6 $-x^2 + 10x - 25 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} s = 10 \\ p = 25 \end{array}\right\} \quad x_1 = 5 \text{ en } x_2 = 5$$

$x = 5$

7 $x^2 - 3x - 18 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} s = 3 \\ p = -18 \end{array}\right\} \quad x_1 = -3 \text{ en } x_2 = 6$$

$x = -3$ of $x = 6$

8 $-x^2 + 4x + 45 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} s = 4 \\ p = -45 \end{array}\right\} \quad x_1 = -5 \text{ en } x_2 = 9$$

$x = -5$ of $x = 9$

U Opdracht 25 bladzijde 135

1 Vul in de volgende tabel, waar mogelijk, het juiste symbool +, $-$ of 0 in opdat de wortels aan de gegeven voorwaarden zouden voldoen.

		D	p	s
1	twee verschillende strikt positieve wortels			
2	twee verschillende strikt negatieve wortels			
3	twee wortels met een verschillend teken			
4	één strikt positieve wortel			
5	geen wortels			

		D	p	s
1	twee verschillende strikt positieve wortels	+	+	+
2	twee verschillende strikt negatieve wortels	+	+	–
3	twee wortels met een verschillend teken	+	–	
4	één strikt positieve wortel	0	+	+
5	geen wortels	–		

3 : het teken van de som kan

- positief zijn (bijvoorbeeld -3 en 5 : $s = 2$)
- negatief zijn (bijvoorbeeld -5 en 3 : $s = -2$)
- nul zijn (bijvoorbeeld -3 en 3 : $s = 0$)

5 : als er geen wortels zijn, is er ook geen som en product.

2 Van D, p en s is het teken gegeven.
Wat kun je besluiten over het aantal en het teken van de wortels van de bijbehorende vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$?

	D	p	s	aantal en teken van de wortels
1	+	+	–	
2	+	0	+	
3	+	–	–	
4	0	+	–	
5	0	0	0	
6	–			

	D	p	s	aantal en teken van de wortels
1	+	+	–	er zijn twee verschillende wortels x_1 en x_2, beiden moeten strikt negatief zijn want het product moet positief zijn en de som negatief
2	+	0	+	er zijn twee verschillende wortels: één van de wortels moet 0 zijn en de andere strikt positief opdat het product 0 zou zijn en de som positief
3	+	–	–	er zijn twee verschillende wortels: de ene moet strikt negatief zijn en de andere strikt positief (dan is het product negatief), bovendien moet de absolute waarde van de negatieve wortel groter zijn dan de positieve wortel (dan is de som negatief, bijvoorbeeld -3 en 2)
4	0	+	–	er is één strikt negatieve wortel (bijvoorbeeld $-3 \Rightarrow p = -3 \cdot (-3) = 9 > 0$ en $s = -3 - 3 = -6 < 0$)
5	0	0	0	er is één wortel en die moet 0 zijn
6	–			geen wortels

U **Opdracht 26 bladzijde 135**

Voor welke waarde(n) van m heeft $4x^2 + 36x + m = 0$

1 twee verschillende, strikt negatieve wortels?

Hiertoe moet

$D > 0$

$36^2 - 16m > 0$

$-16m > -1296$

$m < 81$

$p > 0$

$p = \frac{m}{4}$

$\frac{m}{4} > 0$

$m > 0$

$s < 0$

$s = -9$ OK

$\Rightarrow \quad 0 < m < 81$

2 een strikt positieve en een strikt negatieve wortel?

Hiertoe moet

$D > 0$

$m < 81$

$p < 0$

$\frac{m}{4} < 0$

$m < 0$

$s < 0$ OK

$\Rightarrow \quad m < 0$

3 twee wortels die elkaars omgekeerde zijn?

Deze wortels moeten negatief zijn omdat de som van de wortels steeds negatief is.

Dus moet:

$D > 0$

$m < 81$

$p = 1$ (de wortels zijn elkaars omgekeerde en negatief, bijvoorbeeld -3 en $-\frac{1}{3}$)

$\frac{m}{4} = 1$

$m = 4$

$\Rightarrow \quad m = 4$

Opdracht 27 bladzijde 135

Ontbind, indien mogelijk, in factoren van de eerste graad.

1 $x^2-1=(x-1)(x+1)$

$(A^2-B^2=(A+B)(A-B))$

2 $x^2-2x=x(x-2)$

3 x^2+25 is niet ontbindbaar

(A^2+B^2 is niet ontbindbaar in factoren van de eerste graad.)

4 $x^2-2x+1=(x-1)^2$

$(A^2-2AB+B^2=(A-B)^2)$

5 $-x^2+10x-25=-(x^2-10x+25)$

$=-(x-5)^2$

6 $2x^2+12x+18=2(x^2+6x+9)$

$=2(x+3)^2$

Opdracht 28 bladzijde 136

Vul de tabel in.

	ax^2+bx+c	wortels van ax^2+bx+c	ontbinding in factoren van de eerste graad
1	x^2-4		
2	x^2-81		
3	x^2-6x		
4	x^2+5x		
5	$3x^2-3$		
6	x^2-5x+6		

Oplossing

	ax^2+bx+c	wortels van ax^2+bx+c	ontbinding in factoren van de eerste graad
1	x^2-4	$-2, 2$	$(x-2)(x+2)$
2	x^2-81	$-9, 9$	$(x-9)(x+9)$
3	x^2-6x	$0, 6$	$x(x-6)$
4	x^2+5x	$0, -5$	$x(x+5)$
5	$3x^2-3$	$-1, 1$	$3(x-1)(x+1)$
6	x^2-5x+6	$2, 3$	$(x-2)(x-3)$

$\left.\begin{array}{l}1\\2\end{array}\right\}$ $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$\left.\begin{array}{l}3\\4\end{array}\right\}$ gemeenschappelijke factoren afzonderen

5 $3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$

6 $$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= x^2 - 2x - 3x + 6 \\ &= x(x - 2) - 3(x - 2) \\ &= (x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

Opdracht 29 bladzijde 137

Ontbind, indien mogelijk, de volgende drietermen. Schrijf de ontbinding met gehele coëfficiënten.

$\boxed{1 \quad x^2 + 4x - 21}$

$x^2 + 4x - 21 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} s = -4 \\ p = -21 \end{array}\right\} \quad -7 \text{ en } 3$$

$x^2 + 4x - 21 = (x + 7)(x - 3)$

$\boxed{2 \quad -x^2 - 3x - 2}$

$-x^2 - 3x - 2 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} s = -3 \\ p = 2 \end{array}\right\} \quad -2 \text{ en } -1$$

$-x^2 - 3x - 2 = -(x + 2)(x + 1)$

$\boxed{3 \quad 5x^2 - 7x + 2}$

$5x^2 - 7x + 2 = 0$

$D = 9$

$x = 1 \text{ of } x = \frac{2}{5}$

$$\begin{aligned} 5x^2 - 7x + 2 &= 5\left(x - \frac{2}{5}\right)(x - 1) \\ &= (5x - 2)(x - 1) \end{aligned}$$

$\boxed{4 \quad 9x^2 + 15x + 25}$

$9x^2 + 15x + 25 = 0$

$D < 0$

$9x^2 + 15x + 25$ is niet ontbindbaar

5 $10y^2+9y-9$

$$10y^2+9y-9=0$$
$$D=441$$
$$y=\frac{3}{5} \text{ of } y=-\frac{3}{2}$$

$$10y^2+9y-9=10\left(y-\frac{3}{5}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)$$
$$=5\left(y-\frac{3}{5}\right)\cdot 2\left(y+\frac{3}{2}\right)$$
$$=(5y-3)\cdot(2y+3)$$

6 $3t^2+12t+12$

$$3t^2+12t+12=3\left(t^2+4t+4\right)$$
$$=3(t+2)^2$$

V **Opdracht 30 bladzijde 137**

Vereenvoudig de volgende breuken door de teller en de noemer te ontbinden.

1 $\dfrac{x^2+x-12}{x^2+7x+12}$

$$\frac{x^2+x-12}{x^2+7x+12}=\frac{(x-3)\cancel{(x+4)}}{(x+3)\cancel{(x+4)}}=\frac{x-3}{x+3}$$

teller: $D=49,\quad x=3 \text{ of } x=-4$

noemer: $D=1,\quad x=-3 \text{ of } x=-4$

2 $\dfrac{2t^2+3t-2}{2t-1}$

$$\frac{2t^2+3t-2}{2t-1}=\frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+2)}{2t-1}=\frac{\cancel{(2t-1)}(t+2)}{\cancel{2t-1}}=t+2$$

teller: $D=25,\quad t=\frac{1}{2} \text{ of } t=-2$

3 $\dfrac{2t^2+12t+18}{t^2+5t+6}$

$$\frac{2t^2+12t+18}{t^2+5t+6}=\frac{2\left(t^2+6t+9\right)}{t^2+5t+6}=\frac{2(t+3)^{\cancel{2}}}{(t+2)\cancel{(t+3)}}=\frac{2(t+3)}{t+2}$$

noemer: $\left.\begin{matrix} s=-5 \\ p=6 \end{matrix}\right\} \quad -2 \text{ en } -3$

4 $\dfrac{(6x^2-5x-6)(1-x)}{(-2x^2+5x-3)(3x+2)}$

$$\frac{(6x^2-5x-6)(1-x)}{(-2x^2+5x-3)(3x+2)}=\frac{6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)(1-x)}{-2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)(3x+2)}=\frac{\cancel{(2x-3)}\,\cancel{(3x+2)}\,\cancel{(1-x)}}{\cancel{(-x+1)}\,\cancel{(2x-3)}\,\cancel{(3x+2)}}=1$$

$$6x^2-5x-6=0:\quad D=169,\quad x=\frac{3}{2}\text{ of }x=-\frac{2}{3}$$

$$-2x^2+5x-3=0:\quad D=1,\quad x=1\text{ of }x=\frac{3}{2}$$

Opdracht 31 bladzijde 137

Stel een vierkantsvergelijking op met de gegeven wortels.

1 -1 en 2

Als -1 en 2 de wortels zijn van een vierkantsvergelijking, dan is

$s=-\dfrac{b}{a}=-1+2=1$ en

$p=\dfrac{c}{a}=-1\cdot 2=-2$

Stellen we $a=1$, dan is $b=-1$ en $c=-2$, zodat een mogelijke vierkantsvergelijking is:

$x^2-x-2=0$.

<u>of anders</u>:

als -1 en 2 de wortels zijn van een vierkantsvergelijking en we stellen $a=1$, dan is een mogelijke vierkantsvergelijking $(x+1)(x-2)=0$ of $x^2-x-2=0$.

2 3 en 5

$(x-3)(x-5)=0$ of $x^2-8x+15=0$

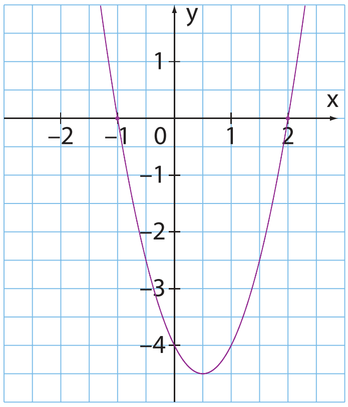
3 7 en 7

$(x-7)(x-7)=0$ of $(x-7)^2=0$ of $x^2-14x+49=0$

4 $-\dfrac{3}{2}$ en $-\dfrac{3}{2}$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=0\text{ of }\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=0\text{ of }x^2+3x+\frac{9}{4}=0\text{ of }4x^2+12x+9=0$$

Opdracht 32 bladzijde 138



1 De gegeven grafiek is een parabool.

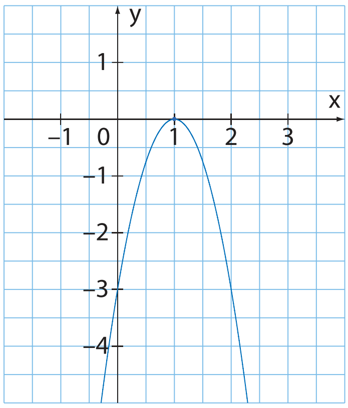
a Vul aan: $y = a(x - ...)(x - ...)$.

b Bepaal a als je weet dat $P(0, -4)$ op de grafiek ligt.

a $y = a(x+1)(x-2)$

b $P(0,-4)$ ligt op de grafiek:

$$-4 = a \cdot 1 \cdot (-2)$$
$$2 = a$$



2 De gegeven grafiek is een parabool.

a Vul aan: $y = a(x - ...)(x - ...)$.

b Bepaal a als je weet dat $P(0, -3)$ op de grafiek ligt.

a $y = a(x-1)(x-1)$

b $P(0,-3)$ ligt op de grafiek:

$$-3 = a \cdot (-1) \cdot (-1)$$
$$a = -3$$

Opdracht 33 bladzijde 138

Bepaal het voorschrift van de tweedegraadsfunctie met gegeven nulpunten en waarvan de grafiek door het gegeven punt P gaat.

	nulpunten	punt P
1	-1 en $\frac{1}{2}$	$(0, -1)$
2	-2 en -2	$(-1, 5)$
3	$-\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{3}$	$(1, 20)$
4	$-\frac{3}{2}$ en $-\frac{3}{2}$	$(-2, -1)$

Oplossing

1 -1 en $\frac{1}{2}$ zijn nulpunten $\Rightarrow$ $y = a(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$P(0,1)$ ligt op de grafiek:

$$-1 = a \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a = 2$$

$$\Rightarrow \quad y = 2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$y = (x+1)(2x-1)$$

$$y = 2x^2 + x - 1$$

2 -2 en -2 zijn nulpunten $\Rightarrow$ $y = a(x+2)^2$

$P(-1,5)$ ligt op de grafiek:

$$5 = a \cdot 1$$

$$a = 5$$

$$\Rightarrow \quad y = 5(x+2)^2$$

$$y = 5x^2 + 20x + 20$$

3 $-\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{3}$ zijn nulpunten $\Rightarrow$ $y = a\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$

$P(1,20)$ ligt op de grafiek:

$$20 = a \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$$

$$24 = a$$

$$\Rightarrow \quad y = 24\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

$$y = 2(4x+1)(3x-1)$$

$$y = 24x^2 - 2x - 2$$

4 $-\frac{3}{2}$ en $-\frac{3}{2}$ zijn nulpunten $\Rightarrow$ $y = a\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$

$P(-2,-1)$ ligt op de grafiek:

$$-1 = a \cdot \left(-2+\frac{3}{2}\right)^2$$

$$-1 = a \cdot \frac{1}{4}$$

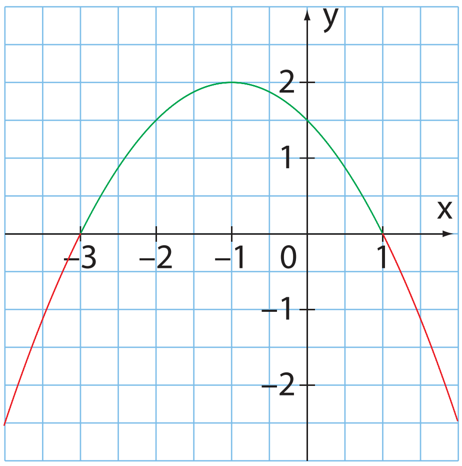
$$a = -4$$

$$\Rightarrow \quad y = -4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$$

$$y = -4x^2 - 12x - 9$$

Opdracht 34 bladzijde 139

Hieronder zie je de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$.



Hieruit kun je de volgende tekentabel afleiden:

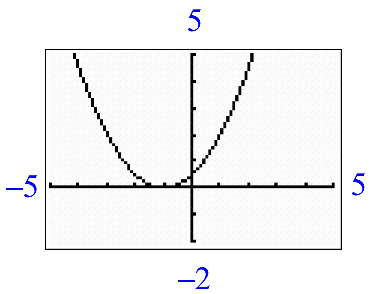
x		−3		1	
y	−	0	+	0	−

Maak nu zelf een tekentabel bij de volgende functies.

1 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

−1 is het enige nulpunt.

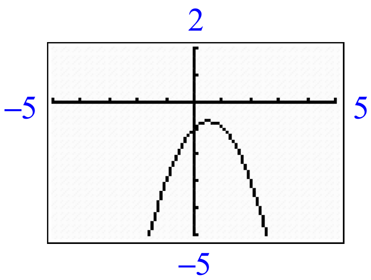
x		−1	
y	+	0	+



2 $f(x) = -x^2 + x - 1$

Deze functie heeft geen nulpunten.

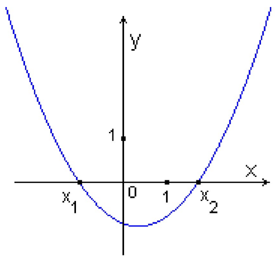
x	
y	−



Opdracht 35 bladzijde 139

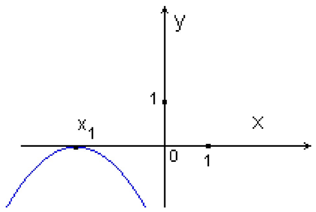
Teken voor de volgende drie situaties een grafiek en stel een bijbehorende tekentabel op.

1 De functie $f(x) = ax^2 + bx + c$, waarbij $a > 0$, heeft twee nulpunten x_1 en x_2, met $x_1 < x_2$.



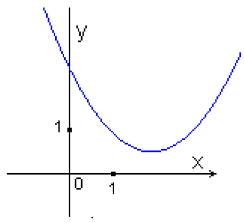
x		x_1		x_2	
y	+	0	−	+	0

2 De functie $f(x) = ax^2 + bx + c$, waarbij $a < 0$, heeft één dubbel nulpunt x_1.



x		x_1	
y	−	0	−

3 De functie $f(x) = ax^2 + bx + c$, waarbij $a > 0$, heeft geen nulpunten.



x	
y	+

Opdracht 36 bladzijde 141

Stel een tekentabel op van de volgende functies.

1 $y = x^2 + 2x - 3$

$\left.\begin{array}{l} s = -2 \\ p = -3 \end{array}\right\} \; -3 \text{ en } 1$

x		-3		1	
y	+	0	−	0	+

2 $y = -x^2 + 2x - 5$

$D = -16$

geen nulpunten

x	
y	−

3 $y = -x^2 + 2x$

$y = x(-x + 2)$

nulpunten : 0 en 2

x		0		2	
y	−	0	+	0	−

4 $y = -\frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$

$= -\frac{3}{2}(x^2 - 2x + 1)$

$= -\frac{3}{2}(x - 1)^2$

nulpunt : 1

x		1	
y	−	0	−

5 $y = x^2 + 6$

geen nulpunten

x	
y	+

6 $y = 2(x - 1)(x + 2)$

nulpunten : 1 en -2

x		-2		1	
y	+	0	−	0	+

7 $y = -4(x + 3)(x + 6)$

nulpunten : -3 en -6

x		-6		-3	
y	−	0	+	0	−

8 $y = (x^2 - 1)(3 - x)$

nulpunten van $y_1 = x^2 - 1 : -1$ en 1

nulpunt van $y_2 = 3 - x : 3$

x		-1		1		3	
y_1	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y_2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

9 $y = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 3x - 4)$

nulpunt van $y_1 = x^2 - 2x + 1 : 1$

nulpunten van $y_2 = x^2 + 3x - 4 : 1$ en -4

x		-4		1	
y_1	$+$	$+$	$+$	0	$+$
y_2	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+$	0	$-$	0	$+$

10 $y = (-x^2 + x - 3)(6x^2 - 7x + 2)$

nulpunten van $y_1 = -x^2 + x - 3 :$ geen

nulpunten van $y_2 = 6x^2 - 7x + 2 : \frac{2}{3}$ en $\frac{1}{2}$

x		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
y_1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
y_2	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-$	0	$+$	0	$-$

Opdracht 37 bladzijde 142

1 Stel een tekentabel op van de functie $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

nulpunten : $\frac{1}{2}$ en -3

x		-3		$\frac{1}{2}$	
y	$+$	0	$-$	0	$+$

2 Maak gebruik van de tekentabel om alle waarden van x te bepalen waarvoor $2x^2 + 5x - 3 < 0$.

$2x^2 + 5x - 3 < 0$ als $-3 < x < \frac{1}{2}$

Opdracht 38 bladzijde 143

Los de volgende ongelijkheden op

1 $x^2+4x+3>0$

tekentabel van $f(x)=x^2+4x+3$

x		-3		-1	
y	$+$	0	$-$	0	$+$

opl. verz. $=\left]-\infty,-3\right[\cup\left]-1,+\infty\right[$

2 $-2y^2+3y\le 1$ of $-2y^2+3y-1\le 0$

tekentabel van $f(y)=-2y^2+3y-1$

y		$\frac{1}{2}$		1	
$f(y)$	$-$	0	$+$	0	$-$

opl. verz. $=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

3 $2x^2-4x+2\le 0$

tekentabel van $f(x)=2x^2-4x+2$

x		1	
y	$+$	0	$-$

opl. verz. $=\{1\}$

4 $x^2+9\ge 0$

tekentabel van $f(x)=x^2+9$

x	
y	$+$

opl. verz. $=\mathbb{R}$

5 $-t^2+2t\ge 5$ of $-t^2+2t-5\ge 0$

tekentabel van $f(t)=-t^2+2t-5$

t	
$f(t)$	$-$

geen oplossingen

6 $(6-3x)(2+9x)\ge 0$

tekentabel van

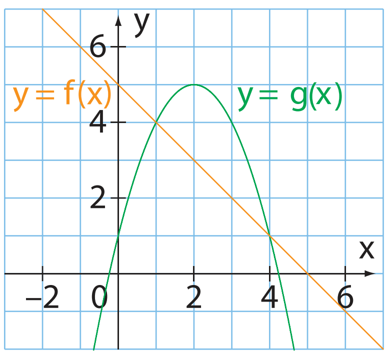
$f(x)=(6-3x)(2+9x)$ $\quad (a<0)$

x		$-\frac{2}{9}$		2	
y	$-$	0	$+$	0	$-$

opl. verz. $=\left[-\frac{2}{9},2\right]$

Opdracht 39 bladzijde 143

Bepaal grafisch de waarden van x waarvoor $f(x)>g(x)$.



Oplossing

$f(x)>g(x)$ als $x<1$ of $x>4$.

Opdracht 40 bladzijde 143

Als $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ en $g(x) = x^2 - 8x + 14$, voor welke waarden van x geldt dan

1 $f(x) = g(x)$?

$$f(x) = g(x)$$
$$-x^2 + 4x - 2 = x^2 - 8x + 14$$
$$-2x^2 + 12x - 16 = 0$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$x = 2 \text{ of } x = 4$$

2 $f(x) > g(x)$?

$$f(x) > g(x) \text{ of } f(x) - g(x) > 0$$
$$-2x^2 + 12x - 16 > 0$$
$$x^2 - 6x + 8 < 0$$

x		2		4	
$x^2 - 6x + 8$	+	0	–	0	+

$f(x) > g(x)$ als $2 < x < 4$

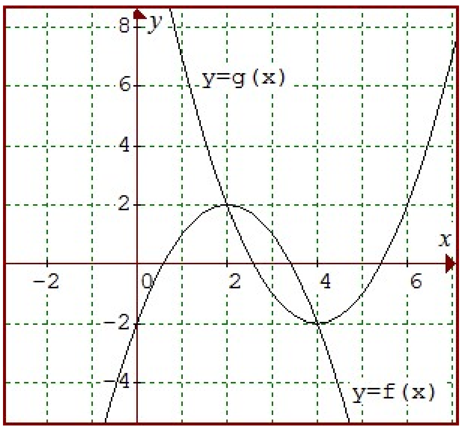
3 $f(x) < g(x)$?

$$f(x) < g(x) \text{ of } f(x) - g(x) < 0$$
$$x^2 - 6x + 8 > 0$$

x		2		4	
$x^2 - 6x + 8$	+	0	–	0	+

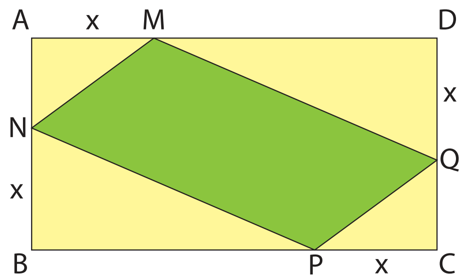
$f(x) < g(x)$ als $x < 2$ of $x > 4$

Controleer je resultaten grafisch.



Opdracht 41 bladzijde 143

De afmetingen van een rechthoek ABCD zijn 20 cm en 30 cm. Vanuit elk hoekpunt, en in dezelfde zin, past men op elke zijde een lengte van x cm af (zie figuur). Men verbindt de vier nieuwe punten tot een vierhoek MNPQ.



1 Geef de formule voor de oppervlakte van de vierhoek MNPQ in functie van x.

$$\begin{aligned}\text{Opp. vierhoek MNPQ } &= \text{opp. ABCD} - 2\cdot\text{opp.AMN} - 2\cdot\text{opp.QMD}\\ &= 30\cdot 20 - \frac{2\cdot x\cdot(20-x)}{2} - \frac{2\cdot x\cdot(30-x)}{2}\\ &= 600 - 20x + x^2 - 30x + x^2\\ &= 2x^2 - 50x + 600\end{aligned}$$

2 Welke zijn de zinvolle waarden voor x?

$0 < x < 20$

3 Voor welke waarden van x is de oppervlakte van de vierhoek MNPQ minstens gelijk aan de helft van de oppervlakte van de vierhoek ABCD?

$$2x^2 - 50x + 600 \geq \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 20$$

$$2x^2 - 50x + 600 \geq 300$$

$$2x^2 - 50x + 300 \geq 0$$

x		10		15	
$2x^2 - 50x + 300$	+	0	−	0	+

rekening houdend met $0 < x < 20$: voor $0 < x \leq 10$ of $15 \leq x < 20$

V Opdracht 42 bladzijde 144

Los op.

1 $(2x-5)(x^2-3x+2)>0$

nulpunt van $y_1 = 2x-5$: $\frac{5}{2}$

nulpunten van $y_2 = x^2-3x+2$: 1, 2

x		1		2		$\frac{5}{2}$	
y_1	−	−	−	−	−	0	+
y_2	+	0	−	0	+	+	+
y	−	0	+	0	−	0	+

opl. verz. $=]1, 2[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$

2 $(x^2+3x-4)(x^2-x)\leq 0$

nulpunten van $y_1 = x^2+3x-4$: 1, −4

nulpunten van $y_2 = x^2-x$: 0, 1

x		−4		0		1	
y_1	+	0	−	−	−	0	+
y_2	+	+	+	0	−	0	+
y	+	0	−	0	+	0	+

opl. verz. $= [-4, 0] \cup \{1\}$

3 $\left(6x^2+x-1\right)\left(x+6\right)^2\left(-3x^2+2x+1\right)\geq 0$

nulpunten van $y_1 = 6x^2+x-1 : \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$

nulpunt van $y_2 = \left(x+6\right)^2 : -6$

nulpunten van $y_3 = -3x^2+2x+1 : -\frac{1}{3}, 1$

x		-6		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		1	
y_1	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+
y_2	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
y_3	−	−	−	−	−	0	+	+	+	0	−
y	−	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−

opl. verz. $=\left\{-6\right\}\cup\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3},1\right]$

Opdracht 43 bladzijde 145

Los de volgende stelsels van ongelijkheden op.

1 $\begin{cases} x^2+x-6>0 \\ 2-x\leq 0 \end{cases}$

nulpunten van $y_1 = x^2+x-6 : -3, 2$

nulpunt van $y_2 = 2-x : 2$

x		-3		2	
y_1	+	0	−	0	+
y_2	+	+	+	0	−

opl. verz. $=\left]2,+\infty\right[$

2 $\begin{cases} -x^2+4x+3 \geq 0 \\ 2x^2-7x-9 \leq 0 \end{cases}$

nulpunten van $y_1 = -x^2+4x+3$

$$D = 28$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{-2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

nulpunten van $y_2 = 2x^2-7x-9 : \frac{9}{2}, -1$

x		-1		$2-\sqrt{7}$		$\frac{9}{2}$		$2+\sqrt{7}$	
y_1	$-$	$+$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y_2	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

opl. verz. $= \{-1\} \cup \left[2-\sqrt{7}, \frac{9}{2}\right]$

3 $\begin{cases} -x^2+2x-3 \leq 0 \\ (x-2)^2 > -1 \end{cases}$

nulpunten van $y_1 = -x^2+2x-3$: geen, want voor alle waarden van x is $-x^2+2x-3<0$

nulpunten van $(x-2)^2 > -1$: geen, want voor alle waarden van x is $(x-2)^2 > 0$

opl. verz. $= \mathbb{R}$

4 $-2 < x^2-6x+7 \leq -1$

$\begin{cases} -2 < x^2-6x+7 \\ x^2-6x+7 \leq -1 \end{cases}$ of $\begin{cases} x^2-6x+7+2>0 \\ x^2-6x+7+1 \leq 0 \end{cases}$ of $\begin{cases} x^2-6x+9>0 \\ x^2-6x+8 \leq 0 \end{cases}$ of $\begin{cases} (x-3)^2>0 \\ x^2-6x+8 \leq 0 \end{cases}$

nulpunt van $y_1 = (x-3)^2 : 3$

nulpunten van $y_2 = x^2-6x+8 : 2, 4$

x		2		3		4	
y_1	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
y_2	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

opl. verz. $= [2, 3[\cup]3, 4]$

5 $-3 < 3x^2 + 5x - 1 < 1$

$$\begin{cases} -3 < 3x^2 + 5x - 1 \\ 3x^2 + 5x - 1 < 1 \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} 3x^2 + 5x + 2 > 0 \\ 3x^2 + 5x - 2 < 0 \end{cases}$$

nulpunten van $y_1 = 3x^2 + 5x + 2$: $-\frac{2}{3}, -1$

nulpunten van $y_2 = 3x^2 + 5x - 2$: $\frac{1}{3}, -2$

x		-2		-1		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	
y_1	+	+	+	0	−	0	+	+	+
y_2	+	0	−	−	−	−	−	0	+

opl. verz. $= \left]-2, -1\right[\cup \left]-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right[$

6 $\frac{1}{2}x - \frac{9}{2} \leq x^2 - 4x \leq -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{9}{2} \leq x^2 - 4x \\ x^2 - 4x \leq -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} x^2 - 4x - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \geq 0 \\ x^2 - 4x + \frac{1}{2}x - \frac{9}{2} \leq 0 \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} 2x^2 - 9x + 9 \geq 0 \\ 2x^2 - 7x - 9 \leq 0 \end{cases}$$

nulpunten van $y_1 = 2x^2 - 9x + 9$: $3, \frac{3}{2}$

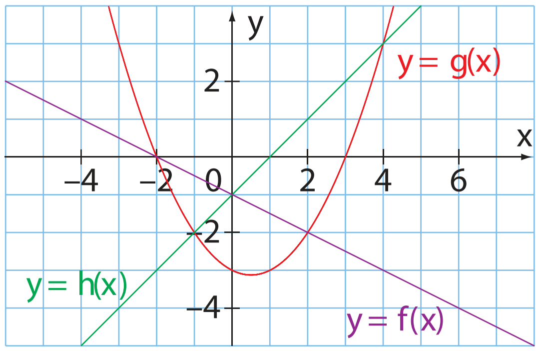
nulpunten van $y_2 = 2x^2 - 7x - 9$: $\frac{9}{2}, -1$

x		-1		$\frac{3}{2}$		3		$\frac{9}{2}$	
y_1	+	+	+	0	−	0	+	+	+
y_2	+	0	−	−	−	−	−	0	+

opl. verz. $= \left[-1, \frac{3}{2}\right] \cup \left[3, \frac{9}{2}\right]$

Opdracht 44 bladzijde 146

De grafieken van de functies f, g en h zijn getekend. Bepaal grafisch de oplossingsverzameling van de ongelijkheid $f(x) < g(x) < h(x)$.

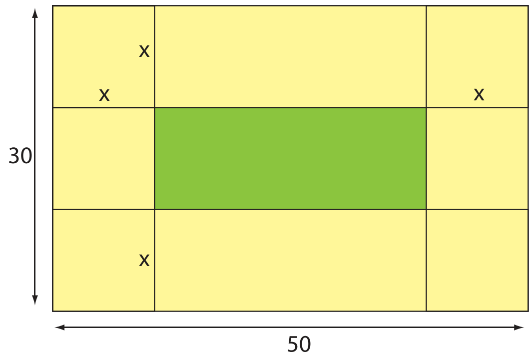


Oplossing

De grafiek van g ligt boven die van f en onder die van h voor $2 < x < 4$

Opdracht 45 bladzijde 146

Bij een rechthoekig blad papier van 50 cm op 30 cm brengt men onder en boven, links en rechts, een kleurband aan van x cm.



Hoe groot moet je x nemen opdat de resterende oppervlakte minstens 300 cm² en hoogstens 800 cm² zou zijn?

Oplossing

Resterende oppervlakte $= (50-2x)(30-2x)$ voorwaarde : $0 < x < 15$

$$= 4x^2 - 160x + 1500$$

$300 \le 4x^2 - 160x + 1500 \le 800$

$$\begin{cases} 300 \le 4x^2 - 160x + 1500 \\ 4x^2 - 160x + 1500 \le 800 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} 4x^2 - 160x + 1200 \ge 0 \\ 4x^2 - 160x + 700 \le 0 \end{cases}$$

nulpunten van $y_1 = 4x^2 - 160x + 1200$: 10, 30

nulpunten van $y_2 = 4x^2 - 160x + 700$: 5, 35

x		5		10		30		35	
y_1	+	+	+	0	−	0	+	+	+
y_2	+	0	−	−	−	−	−	0	+

rekening houdend met $0 < x < 15$: $5 \le x \le 10$

Opdracht 46 bladzijde 147

Beschouw de vergelijking $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

1 Maak een goede keuze voor een nieuwe onbekende t waardoor deze vergelijking een vierkantsvergelijking in t wordt.

Stellen we $t = x^2$, dan wordt de vergelijking $t^2 - 5t + 4 = 0$.

2 Los de vierkantsvergelijking in t op en leid hieruit de oplossingen voor x af.

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} s = 5 \\ p = 4 \end{array}\right\} \ 1 \text{ en } 4$$

$$t = 1 \text{ of } t = 4$$

We vervangen t opnieuw door x^2

$$x^2 = 1 \text{ of } x^2 = 4$$
$$x = -1 \text{ of } x = 1 \text{ of } x = -2 \text{ of } x = 2$$

Opdracht 47 bladzijde 148

Los de volgende bikwadratische vergelijkingen op.

1 $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$

Stel $t = x^2$

$$t^2 - 11t + 28 = 0$$
$$t = 7 \text{ of } t = 4$$
$$x^2 = 7 \text{ of } x^2 = 4$$
$$x = -\sqrt{7} \text{ of } x = \sqrt{7} \text{ of } x = -2 \text{ of } x = 2$$

2 $4x^4 - 12x^2 + 9 = 0$

Stel $t = x^2$

$$4t^2 - 12t + 9 = 0$$
$$(2t-3)^2 = 0$$
$$2t - 3 = 0$$
$$t = \frac{3}{2}$$
$$x^2 = \frac{3}{2}$$
$$x = -\sqrt{\frac{3}{2}}\left(= -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \text{ of } x = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(= \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

3 $x^4 + 6x^2 - 27 = 0$

Stel $t = x^2$

$$t^2 + 6t - 27 = 0$$
$$t = 3 \text{ of } t = -9$$
$$x^2 = 3 \text{ of } \cancel{x^2 = -9}$$
$$x = -\sqrt{3} \text{ of } x = \sqrt{3}$$

4 $x^4 - 8x^2 + 9 = 0$

Stel $t = x^2$

$$t^2 - 8t + 9 = 0$$
$$D = 28$$
$$t = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 4 \pm \sqrt{7}$$
$$x^2 = 4 - \sqrt{7}\,(>0) \text{ of } x^2 = 4 + \sqrt{7}$$
$$x = -\sqrt{4-\sqrt{7}} \text{ of } x = \sqrt{4-\sqrt{7}} \text{ of}$$
$$x = -\sqrt{4+\sqrt{7}} \text{ of } x = \sqrt{4+\sqrt{7}}$$

Opdracht 48 bladzijde 148

Los de volgende vergelijkingen op.

1 $x^6+26x^3-27=0$

Stel $t=x^3$

$t^2+26t-27=0$
$t=1$ of $t=-27$
$x^3=1$ of $x^3=-27$
$x=1$ of $x=-3$

2 $(3x-2)^2-5(3x-2)-14=0$

Stel $t=3x-2$

$t^2-5t-14=0$
$t=7$ of $t=-2$
$3x-2=7$ of $3x-2=-2$
$x=3$ of $x=0$

3 $(2x^2-x)^2-2(2x^2-x)+1=0$

Stel $t=2x^2-x$

$t^2-2t+1=0$
$(t-1)^2=0$
$t=1$
$2x^2-x=1$
$2x^2-x-1=0$
$x=1$ of $x=-\dfrac{1}{2}$

4 $(x^2+4x+7)^2-15(x^2+4x)-69=0$

Stel $t=x^2+4x+7$

$t^2-15(t-7)-69=0$
$t^2-15t+36=0$
$t=12$ of $t=3$
$x^2+4x+7=12$ of $x^2+4x+7=3$
$x^2+4x-5=0$ of $x^2+4x+4=0$
$x=1$ of $x=-5$ of $x=-2$

Opdracht 49 bladzijde 148

Gegeven: $\dfrac{x^2}{x-3}-8=\dfrac{9}{x-3}$. (1)

1 Door beide leden van (1) te vermenigvuldigen met eenzelfde tweeterm, krijg je een nieuwe vergelijking waarin geen noemer meer voorkomt. Los deze nieuwe vergelijking op.

$(x-3)\left(\dfrac{x^2}{x-3}-8\right)=\dfrac{9}{x-3}\cdot(x-3)$
$x^2-8(x-3)=9$
$x^2-8x+15=0$
$x=5$ of $x=3$

2 Voldoen alle gevonden oplossingen aan de oorspronkelijke vergelijking (1)?

$x=3$ voldoet niet aan de gegeven vergelijking omdat je dan x^2 en 9 deelt door 0.

3 Welke is dan de oplossing van de gegeven vergelijking?

$x=5$

Opdracht 50 bladzijde 149

Los de volgende gebroken vergelijkingen op.

1 $\boxed{x+\frac{1}{x}=2}$

$$x\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)=2\cdot x \qquad x\neq 0$$
$$x^2+1=2x$$
$$x^2-2x+1=0$$
$$(x-1)^2=0$$
$$x=1$$

4 $\boxed{\frac{y-1}{y+1}=\frac{16}{y^2-1}-5}$ $\qquad y\neq\pm1$

$$(y-1)\cdot(y-1)=16-5\left(y^2-1\right)$$
$$y^2-2y+1=16-5y^2+5$$
$$6y^2-2y-20=0$$
$$3y^2-y-10=0$$
$$y=2 \text{ of } y=-\frac{5}{3}$$

2 $\boxed{\frac{2x+7}{x+5}=\frac{9-x}{4x-13}}$ $\qquad x\neq-5$ en $x\neq\frac{13}{4}$

$$(2x+7)\cdot(4x-13)=(9-x)(x+5)$$
$$8x^2+2x-91=-x^2+4x+45$$
$$9x^2-2x-136=0$$
$$x=4 \text{ of } x=-\frac{34}{9}$$

5 $\boxed{\frac{2x+6}{\underbrace{x^2+2x}_{x(x+2)}}+\frac{2}{x+2}=\frac{3}{x}}$ $\qquad x\neq0$ en $x\neq-2$

$$2x+6+2x=3(x+2)$$
$$4x+6=3x+6$$
$$\cancel{x=0}$$

geen reële oplossing

3 $\boxed{\frac{x}{x^2+3x-4}=7-\frac{4}{x^2+3x-4}}$

$x^2+3x-4\neq0$ als $x\neq1$ en $x\neq-4$

$$x=7\left(x^2+3x-4\right)-4$$
$$7x^2+20x-32=0$$
$$x=\frac{8}{7} \text{ of } \cancel{x=-4}$$

6 $\boxed{\frac{10x+20}{x^2+2x}+x^2=2x+5}$ $\qquad x\neq0$ en $x\neq-2$

$$10x+20+x^2\left(x^2+2x\right)=(2x+5)\left(x^2+2x\right)$$
$$\cancel{10x}+20+x^4+\cancel{2x^3}=\cancel{2x^3}+4x^2+5x^2+\cancel{10x}$$
$$x^4-9x^2+20=0$$

Stel $t=x^2$

$$t^2-9t+20=0$$
$$t=5 \text{ of } t=4$$
$$x^2=5 \text{ of } x^2=4$$
$$x=-\sqrt{5} \text{ of } x=\sqrt{5} \text{ of } \cancel{x=-2} \text{ of } x=2$$

Opdracht 51 bladzijde 149

Een aantal verstokte gokkers uit een zelfde bedrijf speelt elke week met de Lotto voor een gezamenlijke inzet van € 120. Vier onder hen zijn hun wekelijks verlies stilaan beu geworden en besluiten niet meer mee te doen. Hierdoor verhoogt de wekelijkse bijdrage van de anderen met € 1 per persoon om de totale inzet op € 120 te houden.
Met hoeveel gokkers zijn ze gestart?

Oplossing

Stel $x = $ aantal oorspronkelijke gokkers

Inzet per persoon $= \dfrac{120}{x}$

Inzet per persoon na afhaken 4 personen $= \dfrac{120}{x-4}$

$\dfrac{120}{x-4} = \dfrac{120}{x} + 1 \qquad x \neq 0 \quad (\text{evident}) \text{ en } x \neq 4$

$120x = 120(x-4) + (x-4) \cdot x$

$120x = 120x - 480 + x^2 - 4x$

$-x^2 + 4x + 480 = 0$

$x = 24 \text{ of } \cancel{x = -20} \quad (\text{niet realistisch})$

Ze zijn met 24 gokkers gestart.

Opdracht 52 bladzijde 153

Los de volgende vierkantsvergelijkingen op.

1 $9x^2 = 16$

$$9x^2 = 16$$
$$x^2 = \frac{16}{9}$$
$$x = \pm\frac{4}{3}$$
$$x = -\frac{4}{3} \text{ of } x = \frac{4}{3}$$

2 $2x^2 - 5x + 6 = 0$

$$2x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$D = -23$$

geen reële wortels

3 $x^2 + 2x - 2 = 0$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$
$$D = 12$$
$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$
$$x = -1 - \sqrt{3} \text{ of } x = -1 + \sqrt{3}$$

4 $-2x^2 + 7x = 0$

$$-2x^2 + 7x = 0$$
$$x(-2x + 7) = 0$$
$$x = 0 \text{ of } x = \frac{7}{2}$$

8 $12y^2 + y + 1 = 0$

$$12y^2 + y + 1 = 0$$
$$D = -47$$

geen reële wortels

9 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x = 0$

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x = 0$$
$$\frac{1}{4}x(-2x + 3) = 0$$
$$x = 0 \text{ of } x = \frac{3}{2}$$

10 $6z^2 - 5z - 2 = 0$

$$6z^2 - 5z - 2 = 0$$
$$D = 73$$
$$z = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{12}$$
$$z = \frac{5 - \sqrt{73}}{12} \text{ of } z = \frac{5 + \sqrt{73}}{12}$$

11 $2t^2 + 6 = 0$

$$2t^2 + 6 = 0$$
$$t^2 = -3$$

geen reële wortels

$\boxed{5 \quad x^2+36=-12x}$

$$x^2+36=-12x$$
$$x^2+12x+36=0$$
$$(x+6)^2=0$$
$$x=-6$$

$\boxed{6 \quad \sqrt{5}\,x^2+5x-30\sqrt{5}=0}$

$$\sqrt{5}\,x^2+5x-30\sqrt{5}=0$$
$$D=625$$
$$x=\frac{-5\pm 25}{2\sqrt{5}}$$
$$x=-\frac{30}{2\sqrt{5}}=-\frac{15}{\sqrt{5}}=-\frac{15\sqrt{5}}{5}=-3\sqrt{5}$$
$$\text{of } x=\frac{20}{2\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$$

$\boxed{7 \quad x^2-4\pi x+4\pi^2=0}$

$$x^2-4\pi x+4\pi^2=0$$
$$(x-2\pi)^2=0$$
$$x=2\pi$$

$\boxed{12 \quad (x+2)(x+3)=6(x+2)}$

$$(x+2)(x+3)=6(x+2)$$
$$(x+2)(x+3-6)=0$$
$$(x+2)(x-3)=0$$
$$x+2=0 \text{ of } x-3=0$$
$$x=-2 \text{ of } x=3$$

$\boxed{13 \quad (3x+5)(x-1)=(2-x)(x-3)+2x}$

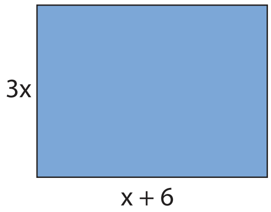
$$(3x+5)(x-1)=(2-x)(x-3)+2x$$
$$3x^2+\cancel{2x}-5=-x^2+5x-6+\cancel{2x}$$
$$4x^2-5x+1=0$$
$$D=9$$
$$x=1 \text{ of } x=\frac{1}{4}$$

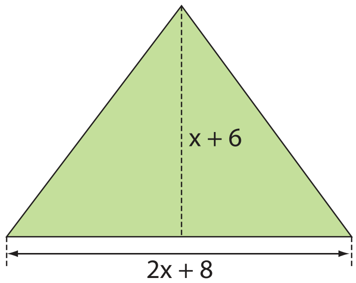
$\boxed{14 \quad 4x^2-x(5+3x)=(6-2x)^2-36}$

$$4x^2-x(5+3x)=(6-2x)^2-36$$
$$4x^2-5x-3x^2=36-24x+4x^2-36$$
$$-3x^2+19x=0$$
$$x(-3x+19)=0$$
$$x=0 \text{ of } x=\frac{19}{3}$$

Opdracht 53 bladzijde 153

Bepaal x zodat de oppervlakte van de rechthoek even groot is als de oppervlakte van de driehoek.





Oplossing

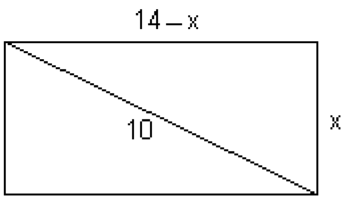
oppervlakte rechthoek $= 3x(x+6)$

oppervlakte driehoek $= \dfrac{(2x+8)(x+6)}{2}$

$$3x(x+6) = \frac{(2x+8)(x+6)}{2}$$
$$6x(x+6) - (2x+8)(x+6) = 0$$
$$(x+6)(6x-2x-8) = 0$$
$$x+6=0 \text{ of } 4x-8=0$$
$$\cancel{x=-6} \text{ of } x=2$$
$$\Rightarrow x=2$$

Opdracht 54 bladzijde 153

De omtrek van een rechthoek is 28 m en de diagonaal is 10 m.
Welke afmetingen heeft deze rechthoek?



Oplossing

omtrek rechthoek $= 28$ m, dus halve omtrek $= 14$ m

Stel x een afmeting van de zijde van een rechthoek.

$$(14-x)^2 + x^2 = 10^2$$
$$196 - 28x + x^2 + x^2 = 100$$
$$2x^2 - 28x + 96 = 0$$
$$D = 4$$
$$x = 6 \text{ of } x = 8$$

Als $x = 6$, dan is $14 - 6 = 8$.

Als $x = 8$, dan is $14 - 8 = 6$.

De afmetingen van de rechthoek zijn 8 m en 6 m.

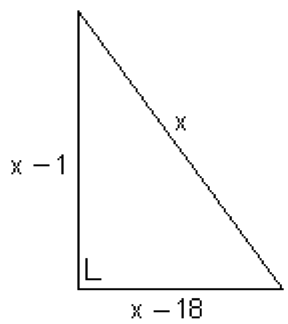
Opdracht 55 bladzijde 153

In een rechthoekige driehoek is een rechthoekszijde 1 cm korter dan de schuine zijde en de andere rechthoekszijde is 18 cm korter dan de schuine zijde.

Bereken de lengte van de rechthoekszijden.

Oplossing

Stel x de lengte van de schuine zijde van de rechthoekige driehoek.



$(x-1)^2+(x-18)^2=x^2$

$x^2-2x+1+x^2-36x+324=x^2$

$x^2-38x+325=0$

$D=144$

$x=25$ of $x=13$

$\downarrow$

niet realistisch $(13-18<0)$

Als $x=25$, dan is $x-1=24$ en $x-18=7$.

De lengte van de ene rechthoekszijde is 24 cm en de lengte van de andere rechthoekszijde is 7 cm.

Opdracht 56 bladzijde 153

Bepaal twee opeenvolgende gehele getallen waarvan de som van de kwadraten gelijk is aan 365.

Oplossing

Stel x en $x+1$ de twee opeenvolgende gehele getallen.

$x^2+(x+1)^2=365$

$x^2+x^2+2x+1=365$

$2x^2+2x-364=0$

$x^2+x-182=0$

$D=729$

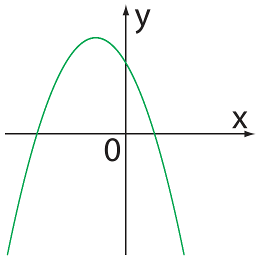
$x=13$ of $x=-14$

De twee opeenvolgende gehele getallen zijn 13 en 14 of -14 en -13.

Opdracht 57 bladzijde 154

Hieronder zie je de grafiek van een functie $f(x) = ax^2 + bx + c$. Vul in met $<, >$ of $=$.

Oplossing



1 $\quad a < 0$

(bergparabool)

2 $\quad c > 0$

(snijpunt y-as)

3 $\quad f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) > 0$ (y-waarde top)

4 $\quad b^2 - 4ac > 0$ (twee verschillende nulpunten)

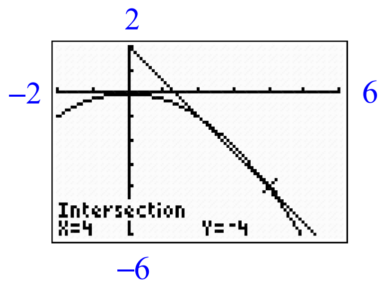
Opdracht 58 bladzijde 154

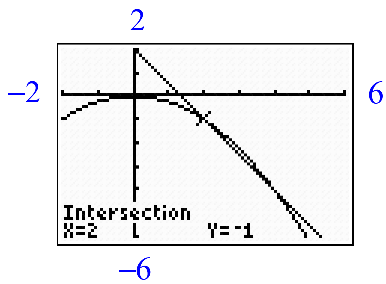
Bepaal de eventuele snijpunten van de grafieken van de volgende functies.

1 $\quad f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2$ en $g(x) = -\dfrac{3}{2}x + 2$

$$f(x) = g(x)$$
$$-\frac{1}{4}x^2 = -\frac{3}{2}x + 2$$
$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 = 0$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$x = 4 \text{ of } x = 2$$
$$f(4) = g(4) = -4$$
$$f(2) = g(2) = -1$$

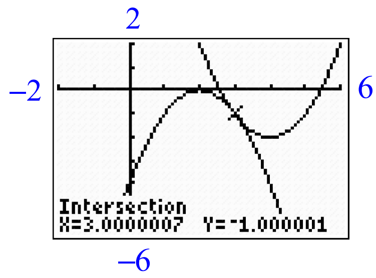
Twee snijpunten: $S_1(4, -4)$ en $S_2(2, -1)$





2 $f(x) = x^2 - 8x + 14$ en $g(x) = -x^2 + 4x - 4$

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 - 8x + 14 = -x^2 + 4x - 4$$
$$2x^2 - 12x + 18 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$(x-3)^2 = 0$$
$$x = 3$$
$$f(3) = g(3) = -1$$

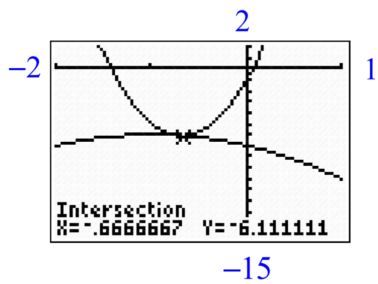


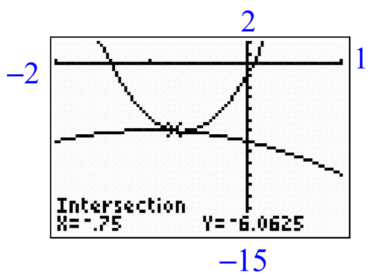
Eén snijpunt (raakpunt): $S(3, -1)$

De parabolen raken elkaar in $S(3, -1)$.

3 $f(x) = -x^2 - 2x - 7$ en $g(x) = 11x^2 + 15x - 1$

$$f(x) = g(x)$$
$$-x^2 - 2x - 7 = 11x^2 + 15x - 1$$
$$12x^2 + 17x + 6 = 0$$
$$D = 1$$
$$x = -\frac{2}{3} \text{ of } x = -\frac{3}{4}$$
$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = g\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{55}{9}$$
$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = g\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{97}{16}$$

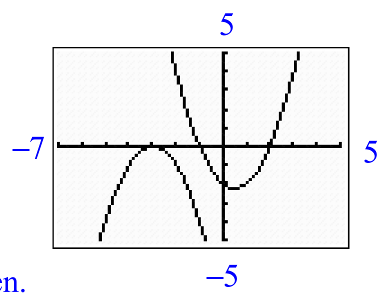




Twee snijpunten: $S_1\left(-\frac{2}{3}, -\frac{55}{9}\right)$ en $S_2\left(-\frac{3}{4}, -\frac{97}{16}\right)$

4 $f(x) = x^2 - x - 2$ en $g(x) = -x^2 - 6x - 9$

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 - x - 2 = -x^2 - 6x - 9$$
$$2x^2 + 5x + 7 = 0$$
$$D = -31$$



De parabolen hebben geen gemeenschappelijke punten.

Opdracht 59 bladzijde 154

Bepaal m zodat de volgende vergelijkingen juist één wortel hebben.

1 $-x^2 - 4x + m = 0$

Deze vergelijking heeft juist één wortel als $D = 0$.

$16 + 4m = 0$
$m = -4$

2 $mx^2 + mx + 1 = 0$

$D = 0$
$m^2 - 4m = 0$
$m(m-4) = 0$
$m = 0 \text{ of } m = 4$

Vervang je in de vergelijking m door 0, dan krijg je $1 = 0$. Dat is een valse vergelijking.

De vergelijking $mx^2 + mx + 1 = 0$ heeft juist één wortel als $m = 4$.

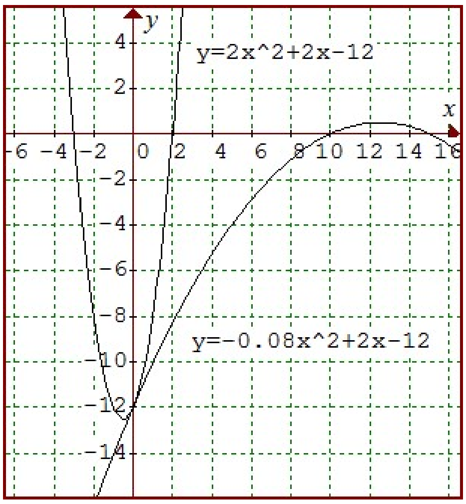
Opdracht 60 bladzijde 154

Voor welke waarde(n) van m heeft de parabool $y = mx^2 + 2x - 12$

1 twee verschillende snijpunten met de x-as?

$D > 0$
$4 - 4m \cdot (-12) > 0$
$4 + 48m > 0$
$1 + 12m > 0$
$m > -\frac{1}{12}$

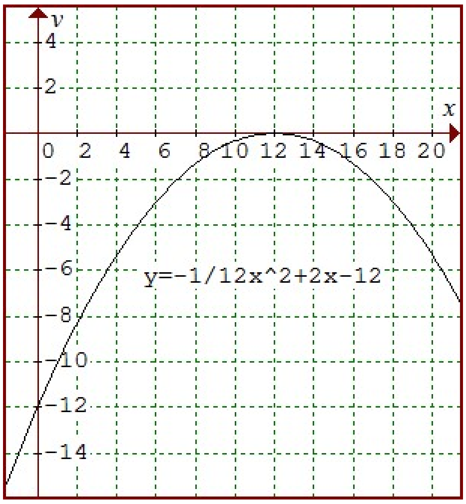
De parabool $y = mx^2 + 2x - 12$ heeft twee verschillende snijpunten als $m \neq 0$ (parabool!) en $m > -\frac{1}{12}$.



2 juist één snijpunt met de x-as?

$D = 0$

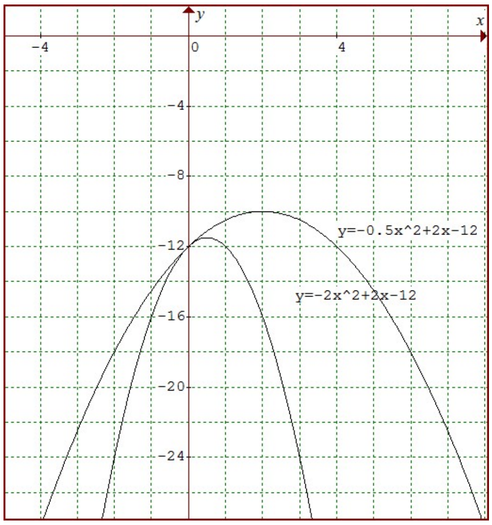
$m = -\dfrac{1}{12}$



3 geen snijpunten met de x-as?

$D < 0$

$m < -\dfrac{1}{12}$



Opdracht 61 bladzijde 154

1 is een oplossing van de vierkantsvergelijking $x^2 + kx + 3 = 0$.
Wat is de andere oplossing?

A -4 B -3 C -1 D 2 E 3

Oplossing

1 is een oplossing: $1 + k + 3 = 0$ of $k = -4$

$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$

$D = 4$

$x = 3$ of $x = 1$

De andere oplossing is 3.

Antwoord E is het juiste antwoord.

Opdracht 62 bladzijde 155

Los de vergelijkingen op zonder de formule voor de discriminant te gebruiken.

1 $\left(15-3x^2\right)\left(x^2-4x\right)=0$

$$\left(15-3x^2\right)\left(x^2-4x\right)=0$$
$$15-3x^2=0 \text{ of } x^2-4x=0$$
$$x^2=5 \text{ of } x\left(x-4\right)=0$$
$$x=-\sqrt{5} \text{ of } x=\sqrt{5} \text{ of } x=0 \text{ of } x=4$$

2 $\left(z-1\right)\left(z-2\right)+\left(z-1\right)\left(z-3\right)+\left(z-1\right)\left(z-5\right)=0$

$$\left(z-1\right)\left(z-2\right)+\left(z-1\right)\left(z-3\right)+\left(z-1\right)\left(z-5\right)=0$$
$$\left(z-1\right)\left(z-2+z-3+z-5\right)=0$$
$$\left(z-1\right)\left(3z-10\right)=0$$
$$z=1 \text{ of } z=\frac{10}{3}$$

3 $\left(x^2-1\right)\left(3x^2+2x+1\right)+\left(x^2-1\right)\left(-x^2-5x-1\right)=0$

$$\left(x^2-1\right)\left(3x^2+2x+1\right)+\left(x^2-1\right)\left(-x^2-5x-1\right)=0$$
$$\left(x^2-1\right)\left(3x^2+2x+1-x^2-5x-1\right)=0$$
$$\left(x^2-1\right)\left(2x^2-3x\right)=0$$
$$x^2-1=0 \text{ of } 2x^2-3x=0$$
$$x^2=1 \text{ of } x\left(2x-3\right)=0$$
$$x=-1 \text{ of } x=1 \text{ of } x=0 \text{ of } x=\frac{3}{2}$$

4 $3\left(x-3\right)\left(x-4\right)=\left(x-4\right)^2$

$$3\left(x-3\right)\left(x-4\right)=\left(x-4\right)^2$$
$$\left(x-4\right)\left(3x-9-x+4\right)=0$$
$$x-4=0 \text{ of } 2x-5=0$$
$$x=4 \text{ of } x=\frac{5}{2}$$

$\boxed{5 \quad (z+5)^2 + 2z + 10 = 0}$

$$
\begin{aligned}
&(z+5)^2 + 2z + 10 = 0\\
&(z+5)^2 + 2(z+5) = 0\\
&(z+5)(z+5+2) = 0\\
&z+5 = 0 \text{ of } z+7 = 0\\
&z = -5 \text{ of } z = -7
\end{aligned}
$$

$\boxed{6 \quad (2x+5)(x+3) + x^2 + 3x = 0}$

$$
\begin{aligned}
&(2x+5)(x+3) + x^2 + 3x = 0\\
&(2x+5)(x+3) + x(x+3) = 0\\
&(x+3)(2x+5+x) = 0\\
&x+3 = 0 \text{ of } 3x+5 = 0\\
&x = -3 \text{ of } x = -\frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

$\boxed{7 \quad 3x(6x-2) - 2(3x-1) = 9x - 3}$

$$
\begin{aligned}
&3x(6x-2) - 2(3x-1) = 9x - 3\\
&6x(3x-1) - 2(3x-1) = 3(3x-1)\\
&(3x-1)(6x-2-3) = 0\\
&3x-1 = 0 \text{ of } 6x-5 = 0\\
&x = \frac{1}{3} \text{ of } x = \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

$\boxed{8 \quad 3x(2x-8) = x(5x-20) + 2(x^2-16)}$

$$
\begin{aligned}
&3x(2x-8) = x(5x-20) + 2(x^2-16)\\
&6x(x-4) = 5x(x-4) + 2(x-4)(x+4)\\
&(x-4)(6x-5x-2x-8) = 0\\
&x-4 = 0 \text{ of } -x-8 = 0\\
&x = 4 \text{ of } x = -8
\end{aligned}
$$

9 $(x-1)(x+2)=(1-x)^2$

$$(x-1)(x+2)=(1-x)^2$$
$$-(1-x)(x+2)-(1-x)^2=0$$
$$(1-x)(x+2)+(1-x)^2=0$$
$$(1-x)(x+2+1-x)=0$$
$$(1-x)\cdot 3=0$$
$$1-x=0$$
$$x=1$$

10 $z^2-4+5(z-2)=0$

$$z^2-4+5(z-2)=0$$
$$(z-2)(z+2)+5(z-2)=0$$
$$(z-2)(z+2+5)=0$$
$$z=2 \text{ of } z=-7$$

11 $4x^2=(2x+1)^2$

$$4x^2=(2x+1)^2$$
$$(2x)^2=(2x+1)^2$$
$$2x=2x+1 \text{ of } 2x=-2x-1$$
$$0=1 \text{ of } 4x=-1$$
$$\downarrow \qquad x=-\frac{1}{4}$$

valse vergelijking

12 $(2x+1)^2-(3x-4)^2=0$

$$(2x+1)^2-(3x-4)^2=0$$
$$(2x+1-3x+4)(2x+1+3x-4)=0$$
$$(-x+5)(5x-3)=0$$
$$x=5 \text{ of } x=\frac{3}{5}$$

13 $x^2=-(x-3)^2$

$$x^2=-(x-3)^2$$
$$x^2>0 \text{ en } -(x-3)^2<0$$

geen reële wortels

14 $2x^2 - 8(3x-1)^2 = 0$

$2x^2 - 8(3x-1)^2 = 0$

$x^2 = 4(3x-1)^2$

$x = 2(3x-1)$ of $x = -2(3x-1)$

$x = 6x - 2$ of $x = -6x + 2$

$-5x = -2$ of $7x = 2$

$x = \frac{2}{5}$ of $x = \frac{2}{7}$

Opdracht 63 bladzijde 155

De vergelijking $a^2x^2 + ax + 2 = 0$ heeft voor elk reëel getal a

A 0 reële oplossingen
B 1 reële oplossing
C 2 reële oplossingen
D oneindig veel reële oplossingen
E een aantal reële oplossingen dat afhangt van a

Oplossing

$a^2x^2 + ax + 2 = 0$

- $a = 0$: geen oplossing
- $a \neq 0$: $D = a^2 - 8a^2 = -7a^2 < 0$: geen oplossing

Antwoord A is het juiste antwoord.

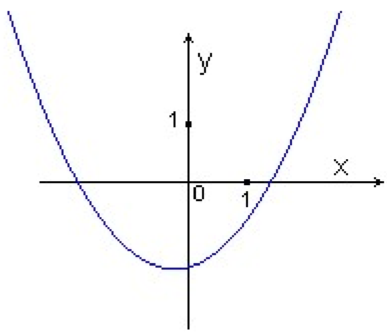
Opdracht 64 bladzijde 156

1 Teken de grafiek van een functie waarbij

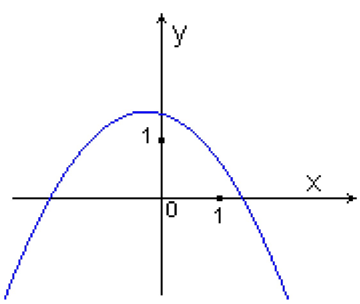
a $a > 0$ en $c < 0$;

b $a < 0$ en $c > 0$.

a



b



2 Beredeneer aan de hand van de vorige grafieken het aantal wortels van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, wanneer a en c een verschillend teken hebben.

Een dalparabool ($a > 0$) die de y-as snijdt onder de x-as ($c < 0$) zal de x-as twee keer snijden.

Ook een bergparabool ($a < 0$) die de y-as snijdt boven de x-as ($c > 0$) zal de x-as twee keer snijden.

Wanneer a en c een verschillend teken hebben, heeft de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ bijgevolg twee verschillende wortels.

3 Verklaar het vorige besluit ook algebraïsch.

Als $ac < 0$, dan is $D = \underbrace{b^2}_{\geq 0} - 4\underbrace{ac}_{<0} > 0$.

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft bijgevolg twee verschillende wortels.

Opdracht 65 bladzijde 156

In een cirkel is een koorde, die 3 cm langer is dan de straal, op 3 cm van het middelpunt gelegen. Bereken de straal van de cirkel.

Oplossing

Stel $x =$ de straal van de cirkel.

In ΔMNA geldt:

$$x^2 = 9 + \left(\frac{3+x}{2}\right)^2$$

$$x^2 = 9 + \frac{9 + 6x + x^2}{4}$$

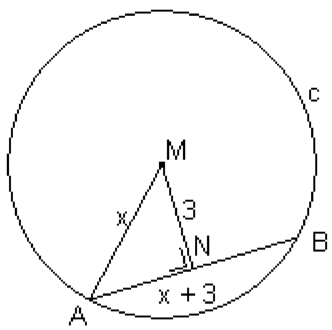
$$4x^2 = 36 + 9 + 6x + x^2$$

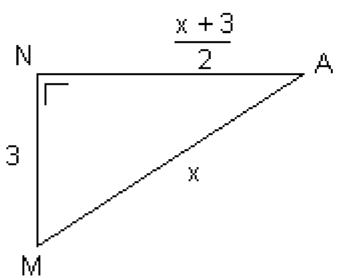
$$3x^2 - 6x - 45 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = 5 \text{ of } \cancel{x = -3}$$

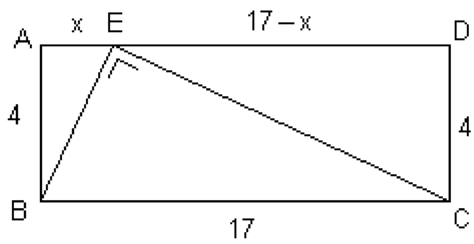
De straal van de cirkel is 5 cm.





Opdracht 66 bladzijde 156

Bepaal x zodat ΔBCE rechthoekig is in E.



Oplossing

- In ΔABE : $|BE|^2 = 16 + x^2$

  $|BE| = \sqrt{16 + x^2}$

- In ΔECD : $|EC|^2 = 16 + (17 - x)^2$

  $|EC| = \sqrt{16 + (17 - x)^2}$

- ΔBCE is rechthoekig in E als :

  $16 + x^2 + 16 + (17 - x)^2 = 17^2$

  $16 + x^2 + 16 + \cancel{289} - 34x + x^2 = \cancel{289}$

  $2x^2 - 34x + 32 = 0$

  $x^2 - 17x + 16 = 0$

  $x = 16$ of $x = 1$

Opdracht 67 bladzijde 156

Bij volleybal verdeelt het net het speelvlak in twee stroken van 9 m breed.
De bovenkant van het net hangt 2,43 m boven de grond.
Een speler, die 2 m van het net verwijderd is, lobt de bal in een loodvlak op het net.

De baan van de bal heeft als vergelijking $y = -0{,}11x^2 + 0{,}88x + 2{,}2$. Hierbij stelt x de afstand tot de speler voor en y de hoogte van de bal, telkens uitgedrukt in meter.

1 Gaat de bal over het net? Verklaar je antwoord.

Voor $x = 2$ geldt : $y = -0{,}11 \cdot 4 + 0{,}88 \cdot 2 + 2{,}2 = 3{,}52$.

De hoogte van de bal is 3,52 m. De bal gaat over het net.

2 Gaat de bal out of niet? Verklaar je antwoord.

We bepalen de nulpunten van $y = -0{,}11x^2 + 0{,}88x + 2{,}2$.

$-0{,}11x^2 + 0{,}88x + 2{,}2 = 0$

$\cancel{x = -2}$ of $x = 10$

De buitenrand van het veld is op (2 + 9) m = 11 m van de speler verwijderd. De bal gaat dus niet buiten.

Opdracht 68 bladzijde 156

In een getal van twee cijfers is het cijfer van de eenheden het dubbel van het cijfer van de tientallen. Het product van dit getal met het getal verkregen door de cijfers te verwisselen is 4032. Bepaal de twee getallen.

Oplossing

Stel x = het cijfer van de tientallen, dan is $2x$ het cijfer van de eenheden.

Het getal is dus $10x + 2x = 12x$.

Verwisselen we de cijfers, dan is het getal $20x + x = 21x$.

$$21x \cdot 12x = 4032$$

$$x^2 = 16$$

$$\underset{x>0}{\Rightarrow} \quad x = 4$$

De twee getallen zijn 48 en 84.

Opdracht 69 bladzijde 156

Voor welke waarde(n) van m heeft de vierkantsvergelijking $(2m+1)x^2 - (4m+3)x + 2m - 1 = 0$ geen reële wortels?

Oplossing

De vierkantsvergelijking $(2m+1)x^2 - (4m+3)x + 2m - 1 = 0$ heeft geen reële wortels als $D < 0$.

$$(4m+3)^2 - 4(2m+1)(2m-1) < 0$$

$$\cancel{16m^2} + 24m + 9 \cancel{-16m^2} + 4 < 0$$

$$24m + 13 < 0$$

$$m < -\frac{13}{24}$$

Opdracht 70 bladzijde 157

Voor welke waarde(n) van m raakt de parabool $p \leftrightarrow y = mx^2 + 2x$ aan de rechte $r \leftrightarrow y = x - m$?

Oplossing

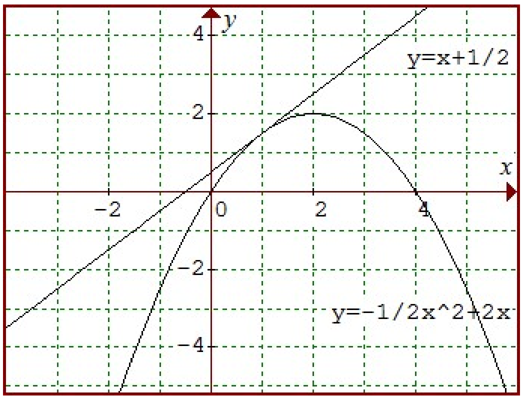
$mx^2 + 2x = x - m$

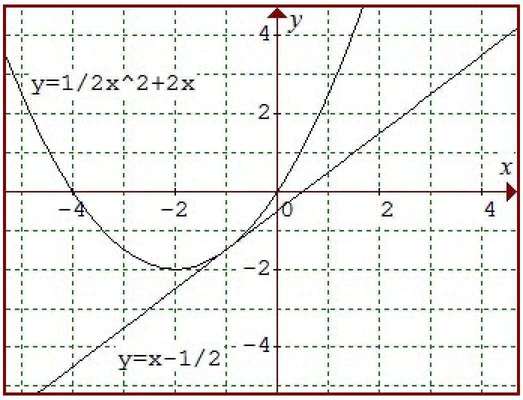
$mx^2 + x + m = 0$

Als de parabool en de rechte maar één gemeenschappelijk punt hebben, moet

$D = 1 - 4m^2 = 0$ of $m^2 = \frac{1}{4}$

Hieruit volgt: $m = -\frac{1}{2}$ of $m = \frac{1}{2}$





Opdracht 71 bladzijde 157

Los de volgende vergelijkingen op met x als onbekende.

$\boxed{1 \quad x^2 + 2kx - 3k^2 = 0}$

$D = 4k^2 + 12k^2$

$D = 16k^2$

$x = \frac{-2k \pm 4k}{2} < \begin{matrix} -3k \\ k \end{matrix}$

$x = -3k$ of $x = k$

$\boxed{2 \quad -6x^2 + kx + 2k^2 = 0}$

$D = k^2 + 48k^2$

$D = 49k^2$

$x = \frac{-k \pm 7k}{-12} < \begin{matrix} -\frac{1}{2}k \\ \frac{2}{3}k \end{matrix}$

$x = -\frac{k}{2}$ of $x = \frac{2k}{3}$

$\boxed{3 \quad x^2 - 2kx + k^2 - m^2 = 0}$

$$D = 4k^2 - 4\left(k^2 - m^2\right)$$

$$D = 4m^2$$

$$x = \frac{2k \pm 2m}{2} \begin{cases} k+m \\ k-m \end{cases}$$

$$x = k+m \ \text{ of } \ x = k-m$$

$\boxed{4 \quad -6x^2 + (5k+m)x + m^2 - k^2 = 0}$

$$\begin{aligned} D &= (5k+m)^2 + 24\left(m^2 - k^2\right) \\ &= 25k^2 + 10km + m^2 + 24m^2 - 24k^2 \\ &= k^2 + 10km + 25m^2 \\ &= (k+5m)^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-5k - m \pm (k+5m)}{-12} \begin{cases} \dfrac{-4k+4m}{-12} = \dfrac{k-m}{3} \\ \dfrac{-6k-6m}{-12} = \dfrac{k+m}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{k-m}{3} \ \text{ of } \ x = \frac{k+m}{2}$$

$\boxed{5 \quad x^2 - (3k+3m)x + 2k^2 + 2m^2 + 5km = 0}$

$$\begin{aligned} D &= (3k+3m)^2 - 4\left(2k^2 + 2m^2 + 5km\right) \\ &= 9k^2 + 18km + 9m^2 - 8k^2 - 8m^2 - 20km \\ &= k^2 - 2km + m^2 \\ &= (k-m)^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{3k + 3m \pm (k-m)}{2} \begin{cases} \dfrac{4k+2m}{2} = 2k+m \\ \dfrac{2k+4m}{2} = k+2m \end{cases}$$

$$x = 2k+m \ \text{ of } \ x = k+2m$$

$\boxed{6 \quad x^2 + 2kx - 4mx - 2km + 3m^2 = 0}$

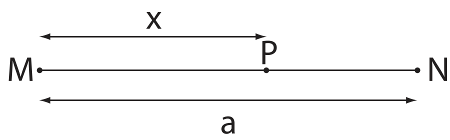
$$\begin{aligned} D &= (2k-4m)^2 - 4\left(-2km + 3m^2\right) \\ &= 4k^2 - 16km + 16m^2 + 8km - 12m^2 \\ &= 4k^2 - 8km + 4m^2 \\ &= 4\left(k^2 - 2km + m^2\right) \\ &= 4(k-m)^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-2k + 4m \pm 2(k-m)}{2} \begin{cases} m \\ -2k+3m \end{cases}$$

$$x = m \ \text{ of } \ x = 3m - 2k$$

Opdracht 72 bladzijde 157 : de gulden snede

Een lijnstuk $[MN]$ wordt door een punt P in twee stukken verdeeld zodat hun lengtes aan de volgende evenredigheid voldoen: $\dfrac{|MN|}{|MP|}=\dfrac{|MP|}{|PN|}$



Stel $|MN| = a$ en $|MP| = x$.

1 Bereken $|MP|$ in functie van a.

Uit $\dfrac{|MN|}{|MP|}=\dfrac{|MP|}{|PN|}$, $|MN| = a$ en $|MP| = x$ volgt :

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$$
$$a(a-x)=x^2$$
$$x^2+ax-a^2=0$$
$$D=a^2+4a^2=5a^2$$
$$x=\frac{-a\pm\sqrt{5}\,a}{2}$$
$$\underset{x>0}{\Longrightarrow}\quad x=\frac{-a+\sqrt{5}\,a}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$
$$|MP|=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

2 Bereken $|PN|$ in functie van a.

$$\begin{aligned}|PN|&=a-x\\&=a-\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\\&=\frac{2a}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\\&=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a\end{aligned}$$
$$|PN|=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a$$

3 Bereken de verhouding $\dfrac{a}{x}$.

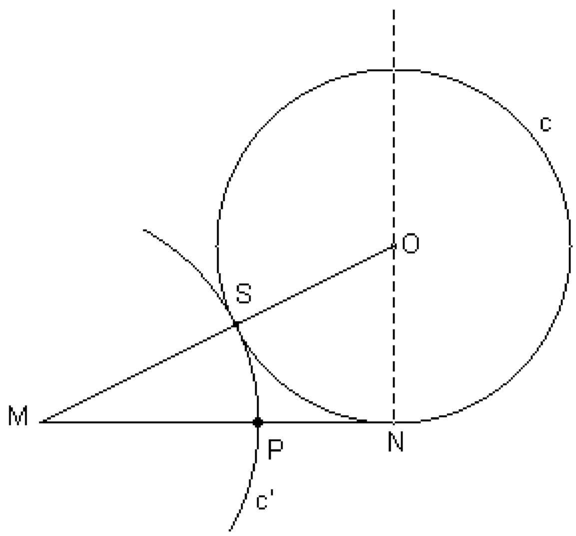
Deze verhouding noemt men de **gulden verhouding**.
De verdeling van een lijnstuk in twee stukken waarvoor de gulden verhouding geldt, noemt men de **gulden snede**.

$$\frac{a}{x}=\frac{a}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}\approx 1{,}618$$

4 De volgende figuur illustreert de constructie van de gulden snede voor het lijnstuk $[MN]$, zoals ze wordt toegeschreven aan Heroon van Alexandrië.

a Leid uit deze figuur de verschillende constructiestappen af.

- Teken de cirkel $c\left(O, \frac{|MN|}{2}\right)$ die MN raakt in N.
- Bepaal het snijpunt S van [MO] en c.
- Bepaal het snijpunt P van $c'\left(M, |MS|\right)$ met [MN].

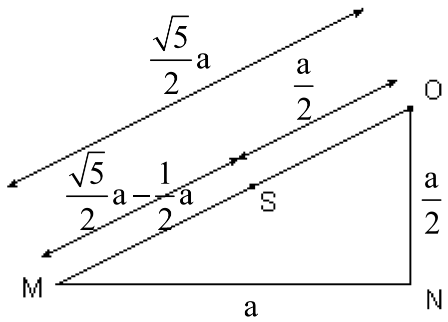


b Verantwoord deze constructie.

- $\Delta MNO: |MO| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$
- $|OS| = \frac{a}{2}$

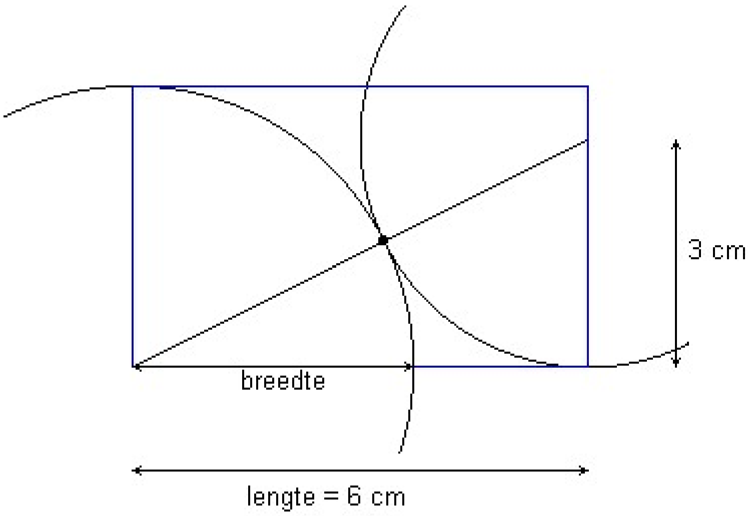
$\Rightarrow \quad |MS| = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$

$\Rightarrow \quad |MP| = |MS| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$



5 Een **gulden rechthoek** is een rechthoek waarvan de afmetingen zich verhouden als de gulden verhouding. Je herkent de gulden rechthoek bijvoorbeeld in het Parthenon (tempel op de akropolis van Athene). Psychologen hebben aangetoond dat de meeste mensen deze vorm verkiezen bij het aankopen van prentkaarten, boeken, spiegels ...

Construeer een gulden rechthoek waarvan een zijde 6 cm is.



We hernemen de constructie uit 4 en passen dan de breedte af.

Opdracht 73 bladzijde 159

Los de volgende vergelijkingen op met de som- en productformules.

1 $x^2+5x-6=0$

$x^2+5x-6=0$

$\left.\begin{array}{r} s=-5 \\ p=-6 \end{array}\right\}\quad -6 \text{ en } 1$

$x=-6 \text{ of } x=1$

2 $-x^2+4x+5=0$

$-x^2+4x+5=0$

$\left.\begin{array}{r} s=4 \\ p=-5 \end{array}\right\}\quad 5 \text{ en } -1$

$x=-1 \text{ of } x=5$

3 $2x^2-4x+2=0$

$2x^2-4x+2=0$

$\left.\begin{array}{r} s=2 \\ p=1 \end{array}\right\}\quad 1 \text{ en } 1$

$x=1$

4 $x^2+16x+63=0$

$x^2+16x+63=0$

$\left.\begin{array}{r} s=-16 \\ p=63 \end{array}\right\}\quad -7 \text{ en } -9$

$x=-9 \text{ of } x=-7$

Opdracht 74 bladzijde 159

De volgende vergelijkingen hebben allemaal x = 3 als wortel.

Bereken telkens de onbekende coëfficiënt en ook de eventuele andere wortel.

$\boxed{1 \quad ax^2 - 7x + 12 = 0}$

$x = 3$ is een wortel:

$9a - 21 + 12 = 0$

$9a - 9 = 0$

$a = 1$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$$\left.\begin{matrix} s = 7 \\ p = 12 \end{matrix}\right\} \; 3 \text{ en } 4$$

$a = 1$ en $x = 4$

$\boxed{2 \quad 2x^2 - bx - 3 = 0}$

$x = 3$ is een wortel:

$18 - 3b - 3 = 0$

$15 - 3b = 0$

$b = 5$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$\left.\begin{matrix} s = \frac{5}{2} \\ p = -\frac{3}{2} \end{matrix}\right\} \; 3 \text{ en } -\frac{1}{2}$$

$b = 5$ en $x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{3 \quad -\frac{1}{3}x^2 - 2x + c = 0}$

$x = 3$ is een wortel:

$-3 - 6 + c = 0$

$c = 9$

$-\frac{1}{3}x^2 - 2x + 9 = 0$

$$\left.\begin{matrix} s = -6 \\ p = -27 \end{matrix}\right\} \; -9 \text{ en } 3$$

$c = 9$ en $x = -9$

$\boxed{4 \quad ax^2 + (a+2)x - 42 = 0}$

$x = 3$ is een wortel:

$9a + 3a + 6 - 42 = 0$

$12a - 36 = 0$

$a = 3$

$3x^2 + 5x - 42 = 0$

$$\left.\begin{matrix} s = -\frac{5}{3} \\ p = -14 \end{matrix}\right\} \; 3 \text{ en } -\frac{14}{3}$$

$a = 3$ en $x = -\frac{14}{3}$

Opdracht 75 bladzijde 159

Ontbind, indien mogelijk, de volgende drietermen. Schrijf de ontbinding zonder breuken en zonder decimale getallen.

1 x^2+6x-7

$$x^2+6x-7=0$$

$$\left.\begin{array}{l} s=-6 \\ p=-7 \end{array}\right\} \quad -7 \text{ en } 1$$

$$x^2+6x-7=(x+7)(x-1)$$

2 $8x^2-13x+15$

$$8x^2-13x+15=0$$

$$D<0$$

$8x^2-13x+15$ is niet ontbindbaar

3 x^2-4x+4

$$x^2-4x+4=(x-2)^2$$

4 $-x^2-3x-2$

$$-x^2-3x-2=0$$

$$\left.\begin{array}{l} s=-3 \\ p=2 \end{array}\right\} \quad -2 \text{ en } -1$$

$$-x^2-3x-2=-(x+2)(x+1)$$

5 $x^2+\sqrt{3}\,x-6$

$$x^2+\sqrt{3}\,x-6=0$$

$$D=27$$

$$x=\frac{-\sqrt{3}\pm3\sqrt{3}}{2} \quad \begin{array}{l} -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{array}$$

$$x^2+\sqrt{3}\,x-6=\left(x+2\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$$

6 $-5x^2+7x-2$

$$-5x^2+7x-2=0$$

$$D=9$$

$$x=\frac{2}{5} \text{ of } x=1$$

$$-5x^2+7x-2=-5\left(x-\frac{2}{5}\right)(x-1)$$

$$=(-5x+2)(x-1)$$

7 $12x^2-19x+4$

$$12x^2-19x+4=0$$

$$D=169$$

$$x=\frac{4}{3} \text{ of } x=\frac{1}{4}$$

$$12x^2-19x+4=12\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

$$=(3x-4)(4x-1)$$

8 $15x^2+7x-2$

$$15x^2+7x-2=0$$

$$D=169$$

$$x=\frac{1}{5} \text{ of } x=-\frac{2}{3}$$

$$15x^2+7x-2=15\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

$$=(5x-1)(3x+2)$$

Opdracht 76 bladzijde 159

Bepaal het voorschrift van een tweedegraadsfunctie met gegeven nulpunten en waarvan de grafiek door het gegeven punt P gaat.

	nulpunten	punt P
1	1 en 4	$(0, 4)$
2	-4 en -3	$(1, 4)$
3	-2 en -2	$(-1, -1)$
4	$-\frac{1}{5}$ en $\frac{2}{3}$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$

Oplossing

1 $y = a(x-1)(x-4)$

$P(0,4)$ behoort tot de parabool:

$$4 = a \cdot (-1) \cdot (-4)$$
$$a = 1$$

$y = (x-1)(x-4) = x^2 - 5x + 4$

2 $y = a(x+4)(x+3)$

$P(1,4)$ behoort tot de parabool:

$$4 = a \cdot 5 \cdot 4$$
$$a = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{1}{5}(x+4)(x+3)$$
$$y = \frac{1}{5}(x^2 + 7x + 12)$$
$$y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{7}{5}x + \frac{12}{5}$$

3 $y = a(x+2)^2$

$P(-1,-1)$ behoort tot de parabool:

$$-1 = a \cdot 1$$
$$a = -1$$

$$y = -(x+2)^2$$
$$y = -x^2 - 4x - 4$$

4 $y = a\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$

$P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ behoort tot de parabool:

$$\frac{1}{2} = a \cdot \frac{\cancel{6}^{2}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{3}}$$
$$a = \frac{5}{4}$$

$$y = \frac{5}{4}\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$$
$$y = \frac{5}{4}\left(x^2 - \frac{7}{15}x - \frac{2}{15}\right)$$
$$y = \frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{12}x - \frac{1}{6}$$

Opdracht 77 bladzijde 159

De vierkantsvergelijking $x^2 + bx + c = 0$ heeft $4+\sqrt{5}$ en $4-\sqrt{5}$ als wortels. Bepaal b en c.

Oplossing

$4+\sqrt{5}$ en $4-\sqrt{5}$ zijn de wortels van $x^2 + bx + c = 0$.

$s = 4+\sqrt{5}+4-\sqrt{5} = 8 = -b$

$p = \left(4+\sqrt{5}\right)\left(4-\sqrt{5}\right) = 16-5 = 11 = c$

$b = -8$ en $c = 11$

Opdracht 78 bladzijde 160

De omtrek van een rechthoekige kruidentuin is 34 m en de oppervlakte is 66 m^2.
Bepaal de lengte en de breedte van de tuin.

Oplossing

De halve omtrek van de tuin is 17 m.

$$\left.\begin{array}{l} l+b=17 \\ l\cdot b=66 \end{array}\right\} \quad 6 \text{ en } 11$$

De afmetingen van de tuin zijn 6 m en 11 m.

Opdracht 79 bladzijde 160

Bepaal twee getallen waarvan

1 de som 13 is en het product -4

De twee gevraagde getallen zijn de wortels van de vergelijking $x^2 - 13x - 4 = 0$.

$D = 185$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{185}}{2}$$

De getallen zijn $\frac{13}{2} - \frac{\sqrt{185}}{2}$ en $\frac{13}{2} + \frac{\sqrt{185}}{2}$.

2 de som -1 is en het product -7

De twee gevraagde getallen zijn de wortels van de vergelijking $x^2 + x - 7 = 0$.

$D = 29$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

De getallen zijn $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}$ en $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Opdracht 80 bladzijde 160

Wat weet je over het aantal en het teken van de wortels van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ bij de volgende gegevens?

Oplossing

1 $\left.\begin{array}{l} D > 0 \\ p > 0 \\ s > 0 \end{array}\right\}$ twee verschillende strikt positieve wortels

2 $\left.\begin{array}{l} D > 0 \\ p = 0 \\ s < 0 \end{array}\right\}$ twee verschillende wortels: wortel 0 en een strikt negatieve wortel

3 $\left.\begin{array}{l} D > 0 \\ p < 0 \\ s = 0 \end{array}\right\}$ twee verschillende wortels die elkaars tegengestelde zijn

4 $\left.\begin{array}{l} D > 0 \\ p < 0 \\ s > 0 \end{array}\right\}$ twee verschillende wortels, een strikt positieve en een strikt negatieve; de positieve wortel is groter dan de absolute waarde van de negatieve

5 $\left.\begin{array}{l} D = 0 \\ p > 0 \\ s > 0 \end{array}\right\}$ een dubbele, strikt positieve wortel

Opdracht 81 bladzijde 160

Schrijf een vierkantsvergelijking op waarvan de wortels ten opzichte van de wortels van de vergelijking $x^2 - 5x + 6 = 0$

1 drie eenheden meer zijn

De wortels van $x^2 - 5x + 6 = 0$ zijn 2 en 3.

De wortels van de gevraagde vergelijking zijn 5 en 6.

Een mogelijke vierkantsvergelijking is: $(x-5)(x-6) = 0$ of $x^2 - 11x + 30 = 0$.

Of via: $s = 11$ en $p = 30 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 11x + 30 = 0$

2 de tegengestelden zijn

De wortels van $x^2 - 5x + 6 = 0$ zijn 2 en 3.

De wortels van de gevraagde vergelijking zijn -2 en -3.

$s = -5$ en $p = 6$

Een mogelijke vierkantsvergelijking is: $x^2 + 5x + 6 = 0$.

3 de omgekeerden zijn

De wortels van $x^2 - 5x + 6 = 0$ zijn 2 en 3.

De wortels van de gevraagde vergelijking zijn $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$.

$s = \frac{5}{6}$ en $p = \frac{1}{6}$

Een mogelijke vierkantsvergelijking is: $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$ of $6x^2 - 5x + 1 = 0$.

Opdracht 82 bladzijde 160

Beschouw de vergelijking $6x^2 + x + m = 0$ (m is een reële parameter).

1 Voor welke waarde(n) van m heeft deze vergelijking geen wortels?

De vergelijking heeft geen wortels als $D < 0$.

$1 - 24m < 0$

$1 < 24m$

$m > \frac{1}{24}$

2 Voor welke waarde(n) van m heeft de vergelijking twee verschillende strikt negatieve wortels?

De vergelijking heeft twee verschillende strikt negatieve wortels als

$D > 0, s < 0$ en $p > 0$.

$D > 0$ als $m < \frac{1}{24}$

$s = -\frac{1}{6} < 0$

$p = \frac{m}{6} > 0$ als $m > 0$

$\Rightarrow \quad 0 < m < \frac{1}{24}$

3 Kan deze vergelijking twee wortels hebben die elkaars tegengestelde zijn? Verklaar.

Als de wortels elkaars tegengestelde zijn, dan is de som 0.

Dit kan niet want de som is $-\frac{1}{6}$.

Opdracht 83 bladzijde 161

Ontbind de volgende drietermen in factoren van de eerste graad. Schrijf de ontbinding zonder breuken en zonder decimale getallen.

1 $x^2+2xy-8y^2$

$$x^2+2xy-8y^2=0 \qquad (\text{vkv in } x)$$
$$D=36y^2$$
$$x=2y \text{ of } x=-4y$$
$$x^2+2xy-8y^2=(x-2y)(x+4y)$$

2 $26x^2+17xy-15y^2$

$$26x^2+17xy-15y^2=0$$
$$D=1849y^2$$
$$x=\frac{1}{2}y \text{ of } x=-\frac{15}{13}y$$
$$26x^2+17xy-15y^2 = 26\left(x-\frac{1}{2}y\right)\left(x+\frac{15}{13}y\right) = (2x-y)(13x+15y)$$

3 $4x^2-12xy+9y^2$

$$4x^2-12xy+9y^2=(2x-3y)^2$$

4 $12x^2-11xy-5y^2$

$$12x^2-11xy-5y^2=0$$
$$D=361y^2$$
$$x=\frac{5}{4}y \text{ of } x=-\frac{1}{3}y$$
$$12x^2-11xy-5y^2=12\left(x-\frac{5}{4}y\right)\left(x+\frac{1}{3}y\right) = (4x-5y)(3x+y)$$

5 $6x^2-xy-y^2$

$$6x^2-xy-y^2=0$$
$$D=25y^2$$
$$x=\frac{1}{2}y \text{ of } x=-\frac{1}{3}y$$
$$6x^2-xy-y^2=6\left(x-\frac{1}{2}y\right)\left(x+\frac{1}{3}y\right) = (2x-y)(3x+y)$$

6 $a^2x^2+a^2xy-2a^2y^2$

$$a^2x^2+a^2xy-2a^2y^2=0$$
$$x^2+xy-2y^2=0$$
$$D=9y^2$$
$$x=y \text{ of } x=-2y$$
$$a^2x^2+a^2xy-2a^2y^2=a^2(x-y)(x+2y)$$

Opdracht 84 bladzijde 161

Bepaal m zodat $4x^2+7mx+9-10m$ het kwadraat is van een tweeterm.
Welke is deze tweeterm?

Oplossing

$4x^2+7mx+9-10m$ moet het kwadraat zijn van een tweeterm: $D=0$

$$
\begin{aligned}
&49m^2-16(9-10m)=0\\
&49m^2-144+160m=0\\
&49m^2+160m-144=0\\
&\qquad D=53\,824\\
&m=-4 \text{ of } m=\frac{36}{49}
\end{aligned}
$$

Als $m=-4$, dan is $4x^2+7mx+9-10m=4x^2-28x+49$
$$=(2x-7)^2$$

$\Rightarrow \quad m=-4$, tweeterm $=2x-7$

Als $m=\frac{36}{49}$, dan is $4x^2+7mx+9-10m=4x^2+\frac{36}{7}x+\frac{81}{49}$
$$=\left(2x+\frac{9}{7}\right)^2$$

$\Rightarrow \quad m=\frac{36}{49}$, tweeterm $=2x+\frac{9}{7}$

Opdracht 85 bladzijde 161

Bepaal de parameter m in de vergelijking $(m-1)x^2-5x+3m-7=0$, zodat de ene wortel het omgekeerde is van de andere.

Oplossing

Als de ene wortel het omgekeerde moet zijn van de andere, dan moet

$m\neq 1$, $D=-12m^2+40m-3>0$ en $p=1$

$$
\begin{aligned}
&p=\frac{3m-7}{m-1}=1\\
&\quad 3m-7=m-1\\
&\quad 2m=6\\
&\quad m=3
\end{aligned}
$$

Voor $m=3$ is $D=-12\cdot 9+40\cdot 3-3>0$

$\Rightarrow \quad m=3$

Opdracht 86 bladzijde 161

Vereenvoudig.

1 $$\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=\frac{\cancel{(x+1)}(x+2)}{\cancel{(x+1)}(x+3)}=\frac{x+2}{x+3}$$

2 $$\frac{2x^2+5x-3}{4x^2+7x-15}=\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)\cancel{(x+3)}}{4\left(x-\frac{5}{4}\right)\cancel{(x+3)}}=\frac{2x-1}{4x-5}$$

3 $$\frac{-4x^2+3xy+y^2}{2x^2-3xy+y^2}=\frac{-4\left(x+\frac{1}{4}y\right)\cancel{(x-y)}}{2\cancel{(x-y)}\left(x-\frac{1}{2}y\right)}=\frac{-4x-y}{2x-y}=\frac{4x+y}{y-2x}$$

4 $$\frac{8x^2-14xy+3y^2}{-2x^2-xy+6y^2}=\frac{8\cancel{\left(x-\frac{3}{2}y\right)}\left(x-\frac{1}{4}y\right)}{-2(x+2y)\cancel{\left(x-\frac{3}{2}y\right)}}=\frac{8x-2y}{-2x-4y}=\frac{y-4x}{x+2y}$$

Opdracht 87 bladzijde 161

Gegeven de vierkantsvergelijking $x^2+bx-1=0$. Noem σ de som van de omgekeerden van de wortels van deze vierkantsvergelijking. Noem π het product van de omgekeerden van de wortels van deze vierkantsvergelijking. Dan is $\sigma+\pi$ gelijk aan

A $b+1$ B $b-1$ C $-b$ D $-\frac{1+b}{b}$ E $-\frac{1}{1+b}$

Oplossing

Stellen we x_1 en x_2 gelijk aan de wortels van $x^2+bx-1=0$, dan geldt:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b & (1)\\ x_1\cdot x_2=-1 & (2)\\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\sigma & (3)\\ \frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\pi & (4)\end{cases}$$

Uit (2) en (4): $\pi=-1$ en uit (3): $\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\sigma$

Uit (1) en (2): $\frac{-b}{-1}=\sigma$ of $\sigma=b$

$\Rightarrow \quad \sigma+\pi=b-1$

Antwoord B is het juiste antwoord.

Opdracht 88 bladzijde 161

Bepaal de parameter m in de vierkantsvergelijking $2x^2 + 3mx + 4m = 0$ zodat de ene wortel het dubbele is van de andere.

Oplossing

Opdat de ene wortel het dubbele zou zijn van de andere, moet $D > 0$ en $x_1 = 2x_2$.

- $D = 9m^2 - 32m$
- $s = -\frac{3}{2}m = x_1 + x_2 = 3x_2 \qquad (1)$

  $p = 2m = x_1 \cdot x_2 = 2x_2^2 \qquad (2)$
- Uit (1): $x_2 = -\frac{1}{2}m$

  In (2): $2m = 2 \cdot \frac{1}{4}m^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{4}m \quad \Rightarrow \quad m = 4$

Omdat $9 \cdot 4^2 - 32 \cdot 4 > 0$, geldt dat $m = 4$.

Opdracht 89 bladzijde 161

Gegeven: de vergelijking $x^2 + 4mx + m^2 - 5 = 0$ met parameter m.

1 Toon aan dat deze vierkantsvergelijking steeds twee verschillende wortels heeft.

$$\begin{aligned} D &= 16m^2 - 4\left(m^2 - 5\right) \\ &= 12m^2 + 20 > 0, \text{ voor elke waarde van m} \end{aligned}$$

2a Bepaal m als de wortels elkaars tegengestelde zijn.

$$x_2 = -x_1$$
$$s = -4m = x_1 + x_2 = x_1 - x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$$
$$p = m^2 - 5 = x_1 \cdot x_2 = -x_1^2$$

Als $m = 0$ dan zijn de wortels elkaars tegengestelde.

(Dan is $x_1^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad$ de wortels zijn $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$)

2b Bepaal m als de som van de kwadraten van de wortels gelijk is aan 24.

$x_1^2 + x_2^2 = 24$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 \\ &= (-4m^2) - 2(m^2 - 5) \\ &= 16m^2 - 2m^2 + 10 \\ &= 14m^2 + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14m^2 + 10 &= 24 \\ 14m^2 &= 14 \\ m &= \pm 1 \end{aligned}$$

Als $m = 1$ of $m = -1$ is de som van de kwadraten van de wortels gelijk aan 24.

($m = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x - 4 = 0$

$D = 32$

$x = \dfrac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2}$ < $-2 - 2\sqrt{2}$; $-2 + 2\sqrt{2}$

$\left(-2-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(-2+2\sqrt{2}\right)^2 = 4 + \cancel{8\sqrt{2}} + 8 + 4 - \cancel{8\sqrt{2}} + 8 = 24$

Hetzelfde geldt voor $m = -1$)

2c Bepaal m als de som van de omgekeerden van de wortels 1 is.

$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 1$

$\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = 1$

$\dfrac{-4m}{m^2 - 5} = 1$

$m^2 + 4m - 5 = 0$

$m = 1$ of $m = -5$

Als $m = 1$ of $m = -5$ is de som van de omgekeerden van de wortels gelijk aan 1.

($m = 1$: $x_1 = -2 - 2\sqrt{2}$ en $x_2 = -2 + 2\sqrt{2}$ (zie b)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \frac{-1}{2+2\sqrt{2}} + \frac{1}{-2+2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2 - \cancel{2\sqrt{2}} + 2 + \cancel{2\sqrt{2}}}{8-4} \\ &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Hetzelfde geldt voor $m = -5$)

Opdracht 90 bladzijde 162

Lotte moet een vierkantsvergelijking oplossen. Ze is echter wat verstrooid en verwisselt de constante en de coëfficiënt van x.
Opmerkelijk is echter dat ze daarbij toch nog één van de oplossingen toevallig 'correct' heeft.
Haar andere oplossing is -3, maar die is fout.

Wat zijn de correcte oplossingen van de oorspronkelijke vierkantsvergelijking?

Oplossing

vierkantsvergelijking

$ax^2 + bx + c = 0$

wortels x_1 en x_2

$s = -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 \quad (1)$

$p = \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 \quad (2)$

vierkantsvergelijking Lotte

$ax^2 + cx + b = 0$

wortels x_1 en -3

$s = -\frac{c}{a} = x_1 - 3 \quad (3)$

$p = \frac{b}{a} = -3x_1 \quad (4)$

(1) en (4) : $-3x_1 = -x_1 - x_2$

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 \quad (5)$$

(2) en (3) : $x_1 \cdot x_2 = 3 - x_1$

met (5) : $\frac{1}{2}x_2^2 = 3 - \frac{1}{2}x_2$

$x_2^2 + x_2 - 6 = 0$

$x_2 = -3$ of $x_2 = 2$

$\downarrow$

foute oplossing

Als $x_2 = 2$, dan is $x_1 = 1$.

De correcte oplossingen zijn 1 en 2.

Opdracht 91 bladzijde 162

Ontbind in factoren van de eerste graad. Schrijf de ontbinding met gehele coëfficiënten.

$\boxed{1 \quad 6x^2 + x - xy - 2y^2 + 11y - 15}$

$$6x^2 + x - xy - 2y^2 + 11y - 15 = 0$$
$$6x^2 + (1-y)x - 2y^2 + 11y - 15 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (1-y)^2 - 24(-2y^2 + 11y - 15) \\ &= 1 - 2y + y^2 + 48y^2 - 264y + 360 \\ &= 49y^2 - 266y + 361 \\ &= (7y-19)^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{y - 1 \pm (7y-19)}{12} \quad \begin{cases} \dfrac{8y-20}{12} = \dfrac{2y-5}{3} \\ \dfrac{-6y+18}{12} = \dfrac{-y+3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &6x^2 + x - xy - 2y^2 + 11y - 15 \\ &= 6\left(x - \frac{2y-5}{3}\right)\left(x - \frac{-y+3}{2}\right) \\ &= (3x - 2y + 5)(2x + y - 3) \end{aligned}$$

$\boxed{2 \quad 4x^2 - 19x + 4xy - 3y + 12}$

$$4x^2 - 19x + 4xy - 3y + 12 = 0$$
$$4x^2 + (4y-19)x - 3y + 12 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (4y-19)^2 - 16(-3y+12) \\ &= 16y^2 - 152y + 361 + 48y - 192 \\ &= 16y^2 - 104y + 169 \\ &= (4y-13)^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{19 - 4y \pm (4y-13)}{8} \quad \begin{cases} \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{-8y+32}{8} = -y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &4x^2 - 19x + 4xy - 3y + 12 \\ &= 4\left(x - \frac{3}{4}\right)(x + y - 4) \\ &= (4x-3)(x+y-4) \end{aligned}$$

$\boxed{3 \quad 3x^2 - x - 8xy + 5y^2 + 3y - 2}$

$$3x^2 - x - 8xy + 5y^2 + 3y - 2 = 0$$
$$3x^2 - (1+8y)x + 5y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (1+8y)^2 - 12(5y^2 + 3y - 2) \\ &= 1 + 16y + 64y^2 - 60y^2 - 36y + 24 \\ &= 4y^2 - 20y + 25 \\ &= (2y-5)^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1+8y \pm (2y-5)}{6} < \begin{array}{l} \dfrac{10y-4}{6} = \dfrac{5y-2}{3} \\ \dfrac{6y+6}{6} = y+1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &3x^2 - x - 8xy + 5y^2 + 3y - 2 \\ &= 3\left(x - \frac{5y-2}{3}\right)(x - y - 1) \\ &= (3x - 5y + 2)(x - y - 1) \end{aligned}$$

Opdracht 92 bladzijde 163

Stel een tekentabel op van de volgende functies.

$\boxed{1 \quad y = x^2 - x}$

$$x^2 - x = 0$$
$$x(x-1) = 0$$
$$x = 0 \text{ of } x = 1$$

x		0		1	
y	+	0	–	0	+

$\boxed{5 \quad y = -x^2 + 6}$

$$-x^2 + 6 = 0$$
$$x^2 = 6$$
$$x = -\sqrt{6} \text{ of } x = \sqrt{6}$$

x		$-\sqrt{6}$		$\sqrt{6}$	
y	–	0	+	0	–

2 $\boxed{y = 3x^2 + 2x + 5}$

$3x^2 + 2x + 5 = 0$

$D < 0$

x	
y	+

3 $\boxed{y = -x^2 + 2x - 1}$

$-x^2 + 2x - 1 = 0$

$-\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0$

$-\left(x - 1\right)^2 = 0$

$x = 1$

x		1	
y	−	0	−

4 $\boxed{y = -x^2 + 3x - 4}$

$-x^2 + 3x - 4 = 0$

$D = -7$

x	
y	−

6 $\boxed{y = -4x^2 + 8x}$

$-4x^2 + 8x = 0$

$4x\left(-x + 2\right) = 0$

$x = 0$ of $x = 2$

x		0		2	
y	−	0	+	0	−

7 $\boxed{y = \left(2x - 3\right)\left(3x + 15\right)}$

$\left(2x - 3\right)\left(3x + 15\right) = 0$

$2x - 3 = 0$ of $3x + 15 = 0$

$x = \frac{3}{2}$ of $x = -5$

x		-5		$\frac{3}{2}$	
y	+	0	−	0	+

8 $\boxed{y = \left(4 - x\right)\left(16 - 3x\right)}$

$\left(4 - x\right)\left(16 - 3x\right) = 0$

$4 - x = 0$ of $16 - 3x = 0$

$x = 4$ of $x = \frac{16}{3}$

x		4		$\frac{16}{3}$	
y	+	0	−	0	+

Opdracht 93 bladzijde 163

Los de volgende ongelijkheden op.

1 $x^2 - 7x + 12 < 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$D = 1$

$x = 4$ of $x = 3$

x		3		4	
$x^2 - 7x + 12$	+	0	−	0	+

opl. verz. $=]3, 4[$

2 $x^2 + 5x + 6 \geq 0$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$D = 1$

$x = -2$ of $x = -3$

x		-3		-2	
$x^2 + 5x + 6$	+	0	−	0	+

opl. verz. $=]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$

3 $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

$(2x - 3)^2 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

x		$\frac{3}{2}$	
$4x^2 - 12x + 9$	+	0	+

opl. verz. $= \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$\boxed{4 \quad t^2+13t \le 7t+1}$ $\qquad t^2+6t-1 \le 0$

$t^2+6t-1=0$

$D=40$

$$t=\frac{-6\pm\sqrt{40}}{2} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-6-2\sqrt{10}}{2}=-3-\sqrt{10} \\ -3+\sqrt{10} \end{array} \right.$$

t		$-3-\sqrt{10}$		$-3+\sqrt{10}$	
t^2+6t-1	$+$	0	$-$	0	$+$

opl. verz. $=\left[-3-\sqrt{10},-3+\sqrt{10}\right]$

$\boxed{5 \quad a^2+4a+10>6}$ $\qquad a^2+4a+4>0$

$a^2+4a+4=0$

$(a+2)^2=0$

$a=-2$

a		-2	
a^2+4a+4	$+$	0	$+$

opl. verz. $=]-\infty,-2[\,\cup\,]-2,-\infty[$

We kunnen dit ook noteren als $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

$\boxed{6 \quad 3z^2 \ge 1-2z}$ $\qquad 3z^2+2z-1 \ge 0$

$3z^2+2z-1=0$

$D=16$

$z=\frac{1}{3}$ of $z=-1$

x		-1		$\frac{1}{3}$	
$3z^2+2z-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

opl. verz. $=]-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$

7 $(2x-5)(3x-17)>0$

$(2x-5)(3x-17)=0$

$2x-5=0$ of $3x-17=0$

$x=\frac{5}{2}$ of $x=\frac{17}{3}$

x		$\frac{5}{2}$		$\frac{17}{3}$	
$(2x-5)(3x-17)$	+	0	−	0	+

opl. verz. $=\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[\cup\left]\frac{17}{3},+\infty\right[$

8 $(x+1)^2+(x-1)^2\geq 0$

Een som van twee kwadraten is steeds positief.

opl. verz. $=\mathbb{R}$

9 $3x(x-2)<2(x^2-1)$ $\quad 3x^2-6x<2x^2-2 \Rightarrow x^2-6x+2<0$

$x^2-6x+2=0$

$D=28$

$x=\frac{6\pm2\sqrt{7}}{2}$ $3+\sqrt{7}$ / $3-\sqrt{7}$

x		$3-\sqrt{7}$		$3+\sqrt{7}$	
x^2-6x+2	+	0	−	0	+

opl. verz. $=\left]3-\sqrt{7},3+\sqrt{7}\right[$

10 $(x-8)^2>2x-16$

$(x-8)^2-2(x-8)>0 \Rightarrow (x-8)(x-8-2)>0 \Rightarrow (x-8)(x-10)>0$

$(x-8)(x-10)=0$

$x=8$ of $x=10$

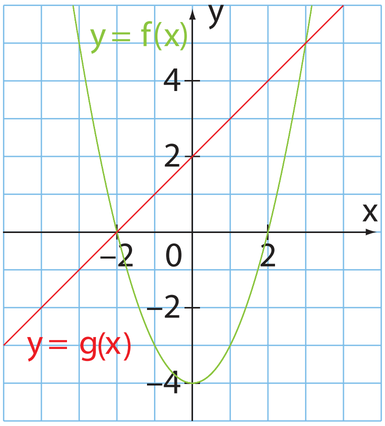
x		8		10	
$(x-8)(x-10)$	+	0	−	0	+

opl. verz. $=]-\infty,8[\cup]10,+\infty[$

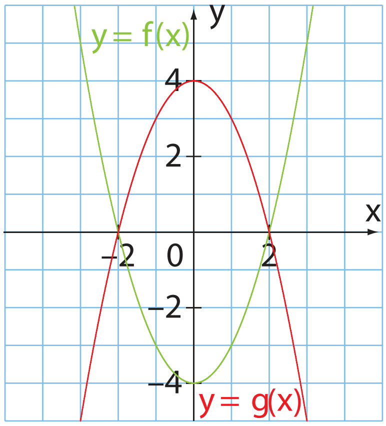
Opdracht 94 bladzijde 163

Bepaal grafisch de oplossingsverzameling van de ongelijkheid

1 $f(x) < g(x)$



2 $f(x) \geq g(x)$



Oplossing

1 $f(x) < g(x)$

De grafiek van f ligt onder de grafiek van g als $-2 < x < 3$.

opl. verz. $=]-2, 3[$

2 $f(x) \geq g(x)$

De grafiek van f ligt boven de grafiek van g of ze vallen samen als $x \leq -2$ of als $x \geq 2$.

opl. verz. $=]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

Opdracht 95 bladzijde 163

Bepaal algebraïsch de oplossingsverzameling van de volgende ongelijkheden.

1 $\left(4x^2+2x-12\right)(2x+4)\le 0$

$\left(4x^2+2x-12\right)(2x+4)=0$

$4x^2+2x-12=0 \quad \text{of} \quad 2x+4=0$

$D=196 \qquad\qquad x=-2$

$x=\dfrac{3}{2} \text{ of } x=-2$

x		-2		$\frac{3}{2}$	
$4x^2+2x-12$	$+$	0	$-$	0	$+$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$-$	0	$-$	0	$+$

opl. verz. $=\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$

2 $(5x-8)\left(x^2+2x+1\right)\ge 0$

$(5x-8)\left(x^2+2x+1\right)=0$

$5x-8=0 \quad \text{of} \quad x^2+2x+1=0$

$x=\dfrac{8}{5} \quad \text{of} \quad (x+1)^2=0$

$x=-1$

x		-1		$\frac{8}{5}$	
$5x-8$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2+2x+1	$+$	0	$+$	$+$	$+$
y	$-$	0	$-$	0	$+$

opl. verz. $=\{-1\}\cup\left[\dfrac{8}{5},+\infty\right[$

3 $\left(15-3x^2\right)\left(x^2-4x\right)>0$

$\left(15-3x^2\right)\left(x^2-4x\right)=0$

$15-3x^2=0 \quad \text{of} \quad x^2-4x=0$

$x^2=5 \quad \text{of} \quad x(x-4)=0$

$x=-\sqrt{5}$ of $x=\sqrt{5}$ of $x=0$ of $x=4$

x		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		4	
$15-3x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2-4x	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

opl. verz. $= \left]-\sqrt{5}, 0\right[\cup \left]\sqrt{5}, 4\right[$

4 $\left(-x^2+4x-4\right)(4x+5)\left(3x^2+2x\right)\geq 0$

$\left(-x^2+4x-4\right)(4x+5)\left(3x^2+2x\right)=0$

$-x^2+4x-4=0$ of $4x+5=0$ of $3x^2+2x=0$

$-(x-2)^2=0$ of $x=-\frac{5}{4}$ of $x(3x+2)=0$

$x=2$ of $x=-\frac{5}{4}$ of $x=0$ of $x=-\frac{2}{3}$

x		$-\frac{5}{4}$		$-\frac{2}{3}$		0		2	
$-x^2+4x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$-$
$4x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3x^2+2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

opl. verz. $= \left]-\infty, -\frac{5}{4}\right] \cup \left[-\frac{2}{3}, 0\right] \cup \{2\}$

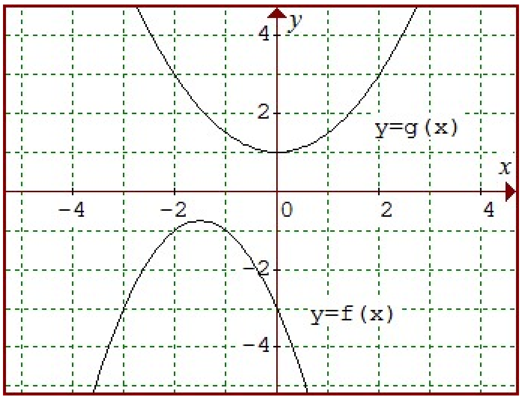
Opdracht 96 bladzijde 164

1 Bepaal de waarden van x waarvoor $f(x) < g(x)$ als $f(x) = -x^2 - 3x - 3$ en $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

$$f(x) < g(x)$$
$$-x^2 - 3x - 3 < \frac{1}{2}x^2 + 1$$
$$-\frac{3}{2}x^2 - 3x - 4 < 0$$
$$3x^2 + 6x + 8 > 0$$
$$D = -60$$

x	
$3x^2 + 6x + 8$	+

opl. verz. $= \mathbb{R}$



2 Wat is de grafische betekenis van dit resultaat?

De grafiek van f ligt volledig onder de grafiek van g.

Opdracht 97 bladzijde 164

Welke van de volgende ongelijkheden heeft juist één oplossing?

A $(7-x)^2 > 0$ B $(7-x)^2 < 0$ C $(7-x)^2 \leq 0$

D $(7-x)^2 \geq 0$ E $(7-x)^2 \neq 0$

Oplossing

A $(7-x)^2 > 0$ is waar voor elke reële waarde van x uitgezonderd voor $x = 7$

B $(7-x)^2 < 0$ is een valse ongelijkheid en heeft dus geen oplossing

C $(7-x)^2 \leq 0$ is enkel waar voor $x = 7$ en heeft dus juist één oplossing

D $(7-x)^2 \geq 0$ is waar voor elke reële waarde van x

E $(7-x)^2 \neq 0$ is waar voor elke reële waarde van x uitgezonderd voor $x = 7$

Antwoord C is het juiste antwoord.

Opdracht 98 bladzijde 164

Los de volgende stelsels op.

1 $\begin{cases} -2x+3>0 \\ 3x^2-4x\geq 0 \end{cases}$

$-2x+3>0$

x		$\frac{3}{2}$	
$-2x+3$	+	0	−

$3x^2-4x\geq 0$

x		0		$\frac{4}{3}$	
$3x^2-4x$	+	0	−	0	+

x		0		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	
$-2x+3$	+	+	+	+	+	0	−
$3x^2-4x$	+	0	−	0	+	+	+

opl. verz. $= \left]-\infty, 0\right] \cup \left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right[$

2 $\begin{cases} x^2-2x+1>0 \\ 9<-x^2-6x \end{cases}$

$x^2-2x+1>0$

$(x-1)^2>0$

x		1	
$(x-1)^2$	+	0	+

$9<-x^2-6x$

$x^2+6x+9<0$

$(x+3)^2<0$

geen oplossingen

geen oplossingen

3 $\frac{5}{2} < \frac{1}{2}x^2 - x + 1 < 5$

$\frac{5}{2} < \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} > 0$

$x^2 - 2x - 3 > 0$

x		-1		3	
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

$\frac{1}{2}x^2 - x + 1 < 5$

$\frac{1}{2}x^2 - x - 4 < 0$

$x^2 - 2x - 8 < 0$

x		-2		4	
x^2-2x-8	$+$	0	$-$	0	$+$

x		-2		-1		3		4	
x^2-2x-3	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-2x-8	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

opl. verz. $=]-2, -1[\cup]3, 4[$

4 $2x^2 + 5x - 3 \le 3x + 9 \le 3$

$2x^2 + 5x - 3 \le 3x + 9$

$2x^2 + 2x - 12 \le 0$

$x^2 + x - 6 \le 0$

x		-3		2	
x^2+x-6	$+$	0	$-$	0	$+$

$3x + 9 \le 3$

$3x + 6 \le 0$

$x + 2 \le 0$

x		-2	
$x+2$	$-$	0	$+$

x		-3		-2		2	
x^2+x-6	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

opl. verz. $= [-3, -2]$

Opdracht 99 bladzijde 164

Noteer een mogelijk stelsel bij de gegeven tekentabel en oplossingsverzameling.

1

x		1		2		3		4	
f(x)	–	0	+	+	+	0	–	–	–
g(x)	+	+	+	0	–	–	–	0	+

De oplossingsverzameling is $]2, 3[$.

- nulpunten van f: $1, 3$ en $a < 0$
  voorbeeld: $f(x) = -(x-1)(x-3)$
  $= -x^2 + 4x - 3$

  Vermits de oplossingsverzameling $]2, 3[$ is moet $-x^2 + 4x - 3 > 0$.
- nulpunten van g: $2, 4$ en $a > 0$
  voorbeeld: $g(x) = (x-2)(x-4)$
  $= x^2 - 6x + 8$

  Vermits de oplossingsverzameling $]2, 3[$ is moet $x^2 - 6x + 8 < 0$.
- Een mogelijk stelsel is $\begin{cases} -x^2 + 4x - 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases}$.

2

x		−1		2		5	
f(x)	+	0	–	–	–	0	+
g(x)	–	–	–	0	–	–	–

De oplossingsverzameling is $[-1, 2[\cup]2, 5]$.

- nulpunten van f: $-1, 5$ en $a > 0$
  voorbeeld: $f(x) = (x+1)(x-5)$
  $= x^2 - 4x - 5$

  Rekening houdend met de oplossingsverzameling: $x^2 - 4x - 5 \leq 0$.
- nulpunten van g: 2 en $a < 0$
  voorbeeld: $g(x) = -(x-2)^2$
  $= -x^2 + 4x - 4$

  Rekening houdend met de oplossingsverzameling $= -x^2 + 4x - 4 < 0$
- Een mogelijk stelsel is $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \leq 0 \\ -x^2 + 4x - 4 < 0 \end{cases}$.

Opdracht 100 bladzijde 165

$y = x^2 + (2m-3)x + 2m$ stelt een familie parabolen voor.

1 Voor welke waarde(n) van m heeft de parabool twee snijpunten met de x-as?

Hiertoe moet de vierkantsvergelijking $y = x^2 + (2m-3)x + 2m = 0$ twee verschillende wortels hebben of $D > 0$.

$(2m-3)^2 - 8m > 0$

$4m^2 - 12m + 9 - 8m > 0$

$4m^2 - 20m + 9 > 0$

$4m^2 - 20m + 9 = 0$

$D = 259$

$m = \frac{9}{2}$ of $m = \frac{1}{2}$

m		$\frac{1}{2}$		$\frac{9}{2}$	
$4m^2 - 20m + 9$	+	0	−	0	+

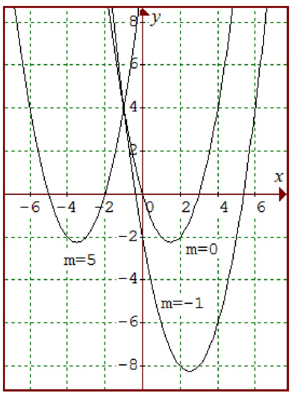
De parabool heeft twee snijpunten met de x-as als $m < \frac{1}{2}$ of als $m > \frac{9}{2}$.

2 Voor welke waarde(n) van m raakt de parabool de x-as?

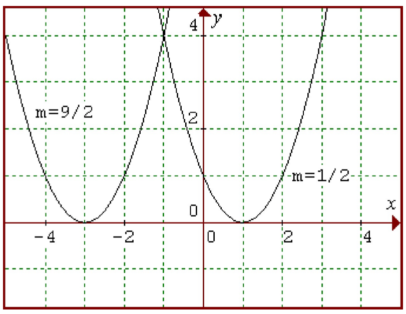
De parabool raakt de x-as als $m = \frac{1}{2}$ of als $m = \frac{9}{2}$ (zie vraag 1 en $D = 0$).

3 Voor welke waarde(n) van m heeft de parabool geen punten gemeenschappelijk met de x-as?

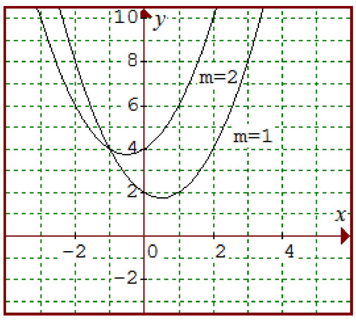
De parabool heeft geen punten gemeenschappelijk met de x-as als $\frac{1}{2} < m < \frac{9}{2}$ (zie vraag 1 en $D < 0$).



$m < \frac{1}{2}$ of $m > \frac{9}{2}$



$m = \frac{1}{2}$ of $m = \frac{9}{2}$



$\frac{1}{2} < m < \frac{9}{2}$

Opdracht 101 bladzijde 165

De grafiek van de parabool met vergelijking $y = mx^2 + 2x + m$ ligt volledig onder de x-as als en slechts als

A $m < -1$ B $m < 0$ C $-1 < m < 0$ D $|m| > 1$ E $m > 1$

Oplossing

De grafiek van de parabool met vergelijking $y = mx^2 + 2x + m$ ligt volledig onder de x-as als $mx^2 + 2x + m < 0$ voor elke waarde van x. Hiertoe moet $m < 0$ en $D < 0$.

$D = 4 - 4m^2$

m		-1		1	
$4-4m^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Rekening houdend met $m < 0$ vinden we dat $m < -1$.

Antwoord A is het juiste antwoord.

Opdracht 102 bladzijde 165

Bepaal de waarde(n) van p waarvoor de grafiek van $f(x) = 3px^2 + 3px + p + 1$

1 geheel boven de x-as ligt

De grafiek van $f(x) = 3px^2 + 3px + p + 1$ ligt boven de x-as als $p > 0$ en $D < 0$.

$$\begin{aligned} D &= 9p^2 - 12p(p+1) \\ &= 9p^2 - 12p^2 - 12p \\ &= -3p^2 - 12p \\ &= -3p(p+4) \end{aligned}$$

p		-4		0	
D	$-$	0	$+$	0	$-$

$p > 0$ en $D < 0$ als $p > 0$

Voor $p = 0$ is de grafiek een rechte met vergelijking $y = 1$ die ook volledig boven de x-as ligt. De grafiek van f ligt dus volledig boven de x-as als $p \geq 0$.

2 geheel onder de x-as ligt

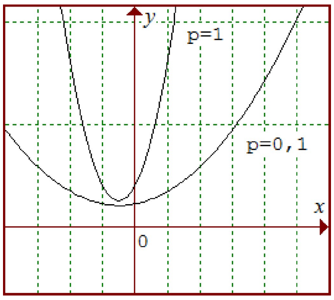
De grafiek ligt geheel onder de x-as als $p < 0$ en $D < 0$, dus als $p < -4$.

3 een bergparabool is die de x-as raakt

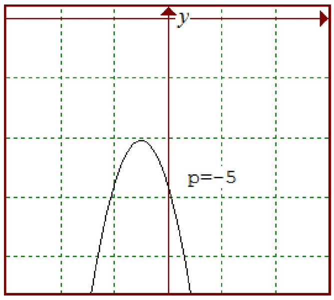
De grafiek is een bergparabool die de x-as raakt als $p < 0$ en $D = 0$, dus als $p = -4$.

4 een bergparabool is die de x-as snijdt in twee verschillende punten

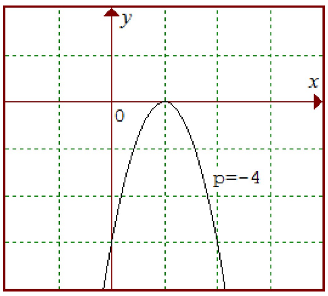
De grafiek is een bergparabool die de x-as snijdt in twee verschillende punten als $p < 0$ en $D > 0$, dus als $-4 < p < 0$.



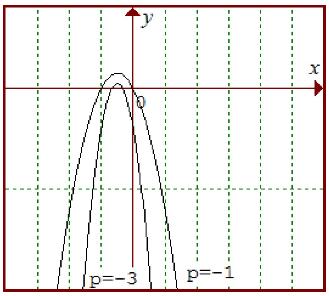
$p > 0$ en $D < 0$



$p < 0$ en $D < 0$



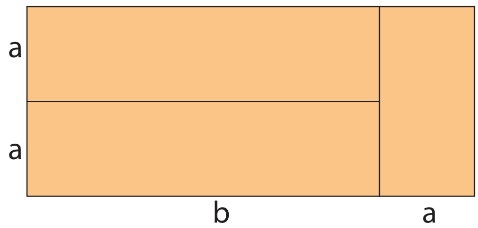
$p < 0$ en $D = 0$



$p < 0$ en $D > 0$

Opdracht 103 bladzijde 165

Jan wil voor zijn konijnen een loophok maken met drie afgescheiden loopruimten, zoals afgebeeld op de figuur. Voor het maken van de randen en de scheidingswanden beschikt hij over 21 m draad die hij volledig wil gebruiken.



1 Voor welke afmetingen a en b is de oppervlakte van het hok zo groot mogelijk?

Jan heeft $(8a + 3b = 21)\,\text{m}$ draad nodig.

Dus is $b = 7 - \frac{8}{3}a$.

$$\begin{aligned}\text{Oppervlakte} &= (a+b)\cdot 2a\\ &= \left(a + 7 - \frac{8}{3}a\right)\cdot 2a\\ &= \left(-\frac{5}{3}a + 7\right)\cdot 2a\\ &= -\frac{10}{3}a^2 + 14a\end{aligned}$$

De oppervlakte is maximaal als $a = -\dfrac{14}{-\frac{20}{3}} = \dfrac{21}{10} = 2{,}1$ (top bergparabool).

Dan is $b = 7 - \frac{8}{3}\cdot\frac{21}{10} = \frac{7}{5} = 1{,}4$.

De oppervlakte is maximaal als $a = 2{,}1\,\text{m}$ en $b = 1{,}4\,\text{m}$.

2 Voor welke afmetingen a en b zijn de drie loopruimten even groot?

De drie loopruimten zijn even groot als $b = 2a$.

Dan is $2a = 7 - \frac{8}{3}a$ of $\frac{14}{3}a = 7$

$a = \frac{3}{2}$ en $b = 3$

De die loopruimten zijn even groot als $a = \frac{3}{2}\,\text{m}$ en $b = 3\,\text{m}$.

3 Welke afmetingen a en b moet hij nemen om een totaal loopoppervlak van minstens 10 m^2 te verkrijgen? Rond je resultaten af op 0,01 m.

Het totale loopoppervlak is minstens 10 m² als

$-\frac{10}{3}a^2+14a\geq 10$

$-10a^2+42a-30\geq 0$

$-5a^2+21a-15\geq 0$

$$-5a^2+21a-15=0$$

$$D=141$$

$$a=\frac{-21\pm\sqrt{141}}{-10} \quad \begin{cases} 2{,}1+\frac{\sqrt{141}}{10} \\ 2{,}1-\frac{\sqrt{141}}{10} \end{cases}$$

a		$2{,}1-\frac{\sqrt{141}}{10}$ $\approx 0{,}9125$		$2{,}1+\frac{\sqrt{141}}{10}$ $\approx 3{,}2874$	
$-5a^2+21a-15$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dus moet $0{,}9125...\leq a\leq 3{,}2874...$

Uit deze tekentabel volgt dat we a moeten nemen tussen 0,92 m en 3,28 m.

Er is echter maar 21 m draad, zodat a maximaal $\frac{21}{8}\text{ m}=2{,}625\text{ m}$ is.

Afgerond moeten we a tussen 0,92 m en 2,62 m nemen.

b is afhankelijk van de gekozen waarde voor a: $b=7-\frac{8}{3}a$.

Opdracht 104 bladzijde 165

Voor welke waarden van a en b zal de vergelijking $x^2 + abx + a^2b = 0$

1 geen wortels hebben?

2 een dubbele wortel hebben?

3 twee verschillende wortels hebben?

Oplossing

$x^2 + abx + a^2b = 0$

$$D = a^2b^2 - 4a^2b$$
$$= a^2b(b-4)$$
$$\downarrow$$
$$a^2 \geq 0$$

b		0		4	
$b(b-4)$	+	0	−	0	+

1 De vergelijking heeft geen wortels als $D < 0$.

Hiertoe moet $a \neq 0$ en $0 < b < 4$.

2 De vergelijking heeft een dubbele wortel als $D = 0$.

Hiertoe moet $a = 0$ of $b = 0$ of $b = 4$.

3 De vergelijking heeft twee verschillende wortel als $D > 0$.

Hiertoe moet $a \neq 0$ en $b < 0$ of $a \neq 0$ en $b > 4$.

Opdracht 105 bladzijde 166

Los de volgende vergelijkingen op.

$\boxed{1 \quad x^4 + 5x^2 - 36 = 0}$

Stel $x^2 = t$

$t^2 + 5t - 36 = 0$

$D = 169$

$t = 4$ of $t = -9$

Vervang t door x^2 :

$x^2 = 4$ of $x^2 = -9$

$\downarrow$

geen oplossing

$x = -2$ of $x = 2$

$\boxed{2 \quad t^4 - 5t^2 + 4 = 0}$

Stel $t^2 = x$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$\left.\begin{array}{l} s = 5 \\ p = 4 \end{array}\right\}$ 1 en 4

$x = 1$ of $x = 4$

$t^2 = 1$ of $t^2 = 4$

$t = -1$ of $t = 1$ of $t = -2$ of $t = 2$

$\boxed{3 \quad 9x^4 + 16x^2 - 4 = 0}$

Stel $x^2 = t$

$9t^2 + 16t - 4 = 0$

$D = 400$

$t = \frac{2}{9}$ of $t = -2$

$x^2 = \frac{2}{9}$ of $x^2 = -2$

$\downarrow$

geen oplossing

$x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ of $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\boxed{5 \quad x^6 - 12x^3 + 32 = 0}$

Stel $x^3 = t$

$t^2 - 12t + 32 = 0$

$D = 16$

$t = 8$ of $t = 4$

Vervang t door x^3 :

$x^3 = 8$ of $x^3 = 4$

$x = 2$ of $x = \sqrt[3]{4}$

$\boxed{6 \quad (2x-3)^2 - 5(2x-3) - 24 = 0}$

Stel $2x - 3 = t$

$t^2 - 5t - 24 = 0$

$D = 121$

$t = 8$ of $t = -3$

$2x - 3 = 8$ of $2x - 3 = -3$

$x = \frac{11}{2}$ of $x = 0$

$\boxed{7 \quad (1-2x)^2 - 2(1-2x) - 8 = 0}$

Stel $1 - 2x = t$

$t^2 - 2t - 8 = 0$

$D = 36$

$t = 4$ of $t = -2$

$1 - 2x = 4$ of $1 - 2x = -2$

$x = -\frac{3}{2}$ of $x = \frac{3}{2}$

$\boxed{4 \quad 2z^4 + 16z^2 + 32 = 0}$

$z^4 + 8z^2 + 16 = 0$

$(z^2 + 4)^2 = 0$

$z^2 + 4 = 0$

geen reële wortels

$\boxed{8 \quad -3(2x^2 - 1)^2 - 2(2x^2 - 1) + 1 = 0}$

Stel $t = 2x^2 - 1$

$-3t^2 - 2t + 1 = 0$

$D = 16$

$t = -1$ of $t = \frac{1}{3}$

$2x^2 - 1 = -1$ of $2x^2 - 1 = \frac{1}{3}$

$x = 0$ of $x^2 = \frac{2}{3}$

$x = 0$ of $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ of $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Opdracht 106 bladzijde 166

Los de volgende vergelijkingen op.

$\boxed{1 \quad (x^3 - 5)^2 + 15 = 8(x^3 - 5)}$

$(x^3 - 5)^2 - 8(x^3 - 5) + 15 = 0$

Stel $x^3 - 5 = t$

$t^2 - 8t + 15 = 0$

$\left.\begin{array}{l} s = 8 \\ p = 15 \end{array}\right\} \quad 3 \text{ en } 5$

$t = 3$ of $t = 5$

$x^3 - 5 = 3$ of $x^3 - 5 = 5$

$x^3 = 8$ of $x^3 = 10$

$x = 2$ of $x = \sqrt[3]{10}$

$\boxed{3 \quad (x^6 - x^3)^2 - 13(x^6 - x^3) = 140}$

Stel $x^6 - x^3 = t$

$t^2 - 13t - 140 = 0$

$D = 729$

$t = 20$ of $t = -7$

$x^6 - x^3 = 20$ of $x^6 - x^3 = -7$

Stel $x^3 = t$

$t^2 - t - 20 = 0$ of $t^2 - t + 7 = 0$

$D = 81$ $\qquad D < 0$

$t = 5$ of $t = -4$ $\qquad$ geen wortels

$x^3 = 5$ of $x^3 = -4$

$x = \sqrt[3]{5}$ of $x = \sqrt[3]{-4}$

2 $\boxed{\left(x^4-2x^2\right)^2-6\left(x^4-2x^2\right)-16=0}$

Stel $x^4-2x^2=t$

$t^2-6t-16=0$

$D=100$

$t=8$ of $t=-2$

$x^4-2x^2=8$ of $x^4-2x^2=-2$

$x^4-2x^2-8=0$ of $x^4-2x^2+2=0$

Stel $t=x^2$

$t^2-2t-8=0$ of $t^2-2t+2=0$

$D=36$ $\quad$ $D<0$

$t=4$ of $t=-2$ $\quad$ geen wortels

$x^2=4$ of $x^2=-2$

$\downarrow$

geen wortels

$x=-2$ of $x=2$

4 $\boxed{\left(2x^4+6x^2-27\right)^2=\left(x^4-3x^2+9\right)^2}$

$2x^4+6x^2-27=x^4-3x^2+9$

of $2x^4+6x^2-27=-x^4+3x^2-9$

$x^4+9x^2-36=0$ of $3x^4+3x^2-18=0$

$x^4+x^2-6=0$

Stel $x^2=t$

$t^2+9t-36=0$ of $t^2+t-6=0$

$D=225$ $\quad$ $D=25$

$t=3$ of $t=-12$ $\quad$ $t=2$ of $t=-3$

$x^2=3$ of $x^2=-12$ of $x^2=2$ of $x^2=-3$

$\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$

geen wortels $\quad$ geen wortels

$x=-\sqrt{3}$ of $x=\sqrt{3}$ of $x=-\sqrt{2}$ of $x=\sqrt{2}$

Opdracht 107 bladzijde 166

Bij het vooraf bespreken van een plaats in een concertzaal rekent men € 1,5 als reservatiekosten. Voor de opvoering van Aïda waren 400 plaatsen bezet. De opbrengst van de gereserveerde tickets bedroeg € 7875, voor de niet-gereserveerde tickets was dit € 4500.

Wat is de prijs van een niet-gereserveerd ticket?

Oplossing

Stel x gelijk aan de prijs (in €) van een niet-gereserveerd ticket. De prijs van een gereserveerd ticket is dan $x+1,5$.

Het aantal verkochte niet-gereserveerde tickets is $\dfrac{4500}{x}$ en het aantal verkochte gereserveerde tickets is $\dfrac{7875}{x+1,5}$.

$$\frac{4500}{x}+\frac{7875}{x+1,5}=400$$

$$4500(x+15)+7875x=400x(x+1,5)$$

$$4500x+6750+7875x=400x^2+600x$$

$$400x^2-11775x-6750=0$$

$$D=149\,450\,625$$

$$x=30 \text{ of } \cancel{x=-\frac{9}{16}} \quad (\text{context!})$$

Een niet-gereserveerd ticket kost € 30.

Opdracht 108 bladzijde 166

Los de volgende gebroken vergelijkingen op.

1 $\dfrac{x^2-17}{x^2-5}+x^2=7$

$$\frac{x^2-17}{x^2-5}+x^2=7$$

$$\left(x^2-5\right)\left(\frac{x^2-17}{x^2-5}+x^2\right)=7\left(x^2-5\right)$$

$$x^2-17+x^2\left(x^2-5\right)=7x^2-35$$

$$x^2-17+x^4-5x^2-7x^2+35=0$$

$$x^4-11x^2+18=0$$

Stel $x^2=t$

$$t^2-11t+18=0$$

$$D=49$$

$t=9$ of $t=2$

$x^2=9$ of $x^2=2$

$x=-3$ of $x=3$ of $x=-\sqrt{2}$ of $x=\sqrt{2}$

2 $\left(\dfrac{x^2-7}{x-3}\right)^2-5\cdot\dfrac{x^2-7}{x-3}+6=0$

Stel $\dfrac{x^2-7}{x-3}=t$

$$t^2-5t+6=0$$

$$\left.\begin{array}{l} s=5 \\ p=6 \end{array}\right\}\ 2 \text{ en } 3$$

$\dfrac{x^2-7}{x-3}=2$ of $\dfrac{x^2-7}{x-3}=3$

$x^2-7=2x-6$ of $x^2-7=3x-9$

$x^2-2x-1=0$ of $x^2-3x+2=0$

$D=8$ $\qquad$ $D=1$

$x=\dfrac{2\pm2\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $x=2$ of $x=1$

$x=1-\sqrt{2}$ of $x=1+\sqrt{2}$ of $x=2$ of $x=1$

3 $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x}{x-1}+1$

$$x\cdot(x-1)\cdot\frac{x-1}{x}=x\cdot(x-1)\cdot\frac{x}{x-1}+x\cdot(x-1)$$

$$(x-1)^2=x^2+x^2-x$$

$$x^2-2x+1=2x^2-x$$

$$x^2+x-1=0$$

$$D=5$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$x=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ of $x=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

4 $\dfrac{4\left(t^2-t+4\right)}{t^2-16}=\dfrac{3t}{t+4}+\dfrac{2t}{t-4}$

$$\frac{4\left(t^2-t+4\right)}{t^2-16}=\frac{3t}{t+4}+\frac{2t}{t-4}$$

$$\left(t^2-16\right)\left(\frac{4\left(t^2-t+4\right)}{t^2-16}\right)=\left(\frac{3t}{t+4}+\frac{2t}{t-4}\right)\underset{(t-4)(t+4)}{\underset{\downarrow}{\left(t^2-16\right)}}$$

$$4\left(t^2-t+4\right)=3t(t-4)+2t(t+4)$$

$$4t^2-4t+16=3t^2-12t+2t^2+8t$$

$$t^2=16$$

$t=-4$ of $t=4$

Voor $t=-4$ en voor $t=4$ delen we in de gegeven vergelijking door 0. Er is dus geen oplossing.

Opdracht 109 bladzijde 167

Het aantal oplossingen in $\mathbb{R}$ van de vergelijking $\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+2\right)=12$ is

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

Oplossing

$\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+2\right)=12$

Stel $x^2-x=t$

$(t+1)(t+2)=12$

$t^2+3t+2=12$

$t^2+3t-10=0$

$$\left.\begin{array}{r} s=-3 \\ p=-10 \end{array}\right\} \quad -5 \text{ en } 2$$

$x^2-x=-5$ of $x^2-x=2$

$x^2-x+5=0$ $\qquad$ $x^2-x-2=0$

$D=1-20<0$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{r} s=1 \\ p=-2 \end{array}\right\} \quad 2 \text{ en } -1$

geen wortels

Het aantal oplossingen is 2.

Antwoord C is het juiste antwoord.

Opdracht 110 bladzijde 167

Voor welke waarde(n) van de parameter m heeft de bikwadratische vergelijking
$x^4+(3-m)x^2+m-4=0$ vier verschillende reële wortels?

Oplossing

$x^4+(3-m)x^2+m-4=0$

Stel $x^2=t$

$t^2+(3-m)t+m-4=0$

$$\begin{aligned} D &= (3-m)^2-4(m-4) \\ &= 9-6m+m^2-4m+16 \\ &= m^2-10m+25 \\ &= (m-5)^2>0 \text{ als } m\neq 5 \end{aligned}$$

$t=\dfrac{m-3\pm(m-5)}{2} \begin{cases} m-4 \\ 1 \end{cases}$

$x^2=m-4$ of $x^2=1$

$\downarrow$ $\qquad x=-1$ of $x=1$

heeft twee verschillende
oplossingen als $m-4>0$ of $m>4$

De vergelijking heeft vier verschillende reële wortels als $m>4$ en $m\neq 5$

Herhalingsopdracht 111 bladzijde 168

Los de volgende vergelijkingen op zonder gebruik te maken van de discriminant.

1 $\boxed{7x-3x^2=0}$

$$x(7-3x)=0$$
$$x=0 \text{ of } 7-3x=0$$
$$x=0 \text{ of } x=\frac{7}{3}$$

2 $\boxed{5(2x-5)^2-45=0}$

$$(2x-5)^2=9$$
$$2x-5=-3 \text{ of } 2x-5=3$$
$$x=1 \text{ of } x=4$$

3 $\boxed{2(x-2)(5-x)=(5-x)^2}$

$$(5-x)[2(x-2)-(5-x)]=0$$
$$(5-x)(2x-4-5+x)=0$$
$$(5-x)(3x-9)=0$$
$$5-x=0 \text{ of } 3x-9=0$$
$$x=5 \text{ of } x=3$$

4 $\boxed{6x(x+3)-2(x^2-9)-5x-15=0}$

$$6x(x+3)-2(x-3)(x+3)-5(x+3)=0$$
$$(x+3)(6x-2(x-3)-5)=0$$
$$(x+3)(6x-2x+6-5)=0$$
$$x+3=0 \text{ of } 4x+1=0$$
$$x=-3 \text{ of } x=-\frac{1}{4}$$

5 $\boxed{(3x+1)^2=(x+3)^2}$

$$3x+1=x+3 \text{ of } 3x+1=-x-3$$
$$2x=2 \text{ of } 4x=-4$$
$$x=1 \text{ of } x=-1$$

6 $\boxed{(x^2+2x+4)^2=(2x^2+2x-4)^2}$

$$x^2+2x+4=2x^2+2x-4$$
$$\text{of } x^2+2x+4=-2x^2-2x+4$$
$$x^2-8=0 \text{ of } 3x^2+4x=0$$
$$x^2=8 \text{ of } x(3x+4)=0$$
$$x=-2\sqrt{2} \text{ of } x=2\sqrt{2} \text{ of } x=0 \text{ of } x=-\frac{4}{3}$$

Herhalingsopdracht 112 bladzijde 168

Los de volgende vierkantsvergelijkingen op.

1 $\boxed{x^2+7x-8=0}$

$$\left.\begin{array}{l} s=-7 \\ p=-8 \end{array}\right\} -8 \text{ en } 1 \qquad \text{of } D=81$$
$$x=-8 \text{ of } x=1$$

2 $\boxed{2x^2-5x+2=0}$

$$D=9$$
$$x=2 \text{ of } x=\frac{1}{2}$$

3 $\boxed{2x^2-3x+3=0}$

$$D=-15$$

geen wortels

4 $\boxed{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=0}$

$$9x^2-6x+1=0$$
$$(3x-1)^2=0 \qquad \text{of } D=0$$
$$x=\frac{1}{3}$$

Herhalingsopdracht 113 bladzijde 168

Hoeveel verschillende (reële) oplossingen heeft de vergelijking $\left(\left(x^2-2\right)^2-5\right)^2=1$?

A 4 B 5 C 6 D 7 E 8

Oplossing

$$\left(\left(x^2-2\right)^2-5\right)^2=1$$

$$\left(x^2-2\right)^2-5=-1 \text{ of } \left(x^2-2\right)^2-5=1$$

$$\left(x^2-2\right)^2=4 \text{ of } \left(x^2-2\right)^2=6$$

$$x^2-2=-2 \text{ of } x^2-2=2 \text{ of } x^2-2=-\sqrt{6} \text{ of } x^2-2=\sqrt{6}$$

$$x^2=0 \text{ of } x^2=4 \text{ of } \underbrace{x^2=2-\sqrt{6}}_{<0} \text{ of } x^2=2+\sqrt{6}$$

$$x=0 \text{ of } x=-2 \text{ of } x=2 \text{ of } x=-\sqrt{2+\sqrt{6}} \text{ of } x=\sqrt{2+\sqrt{6}}$$

Er zijn 5 verschillende reële oplossingen.

Antwoord B is het juiste antwoord.

Herhalingsopdracht 114 bladzijde 168

Bepaal algebraïsch de oplossingsverzameling van de volgende ongelijkheden en stelsels van ongelijkheden.

1 $2x^2+3x-2\leq 0$

$2x^2+3x-2=0$

$D=25$

$x=\frac{1}{2}$ of $x=-2$

x		-2		$\frac{1}{2}$	
$2x^2+3x-2$	$+$	0	$-$	0	$+$

opl. verz. $=\left[-2,\frac{1}{2}\right]$

2 $x^2+12x+36>0$ $\qquad (x+6)^2>0$

x		-6	
$x^2+12x+36$	$-$	0	$-$

opl. verz. $=]-\infty,-6[\cup]6,+\infty[$

3 $-5x^2+2x-1>0$

$-5x^2+2x-1=0$

$D<0$

x	
$-5x^2+2x-1$	$-$

Geen oplossingen

4 $\left(x^2-3x-70\right)\left(4x^2-1\right)<0$

$x^2-3x-70=0$ of $4x^2-1=0$

$D=289$ $\qquad x^2=\frac{1}{4}$

$x=10$ of $x=-7$ of $x=-\frac{1}{2}$ of $x=\frac{1}{2}$

x		-7		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		10	
$x^2-3x-70$	+	0	−	−	−	−	−	0	+
$4x^2-1$	+	+	+	0	−	0	+	+	+
y	+	0	−	0	+	0	−	0	+

opl. verz. $=\left]-7,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},10\right[$

5 $\begin{cases} x^2-7x-8\geq 0 \\ -2x^2+5x-2<0 \end{cases}$

$x^2-7x-8\geq 0$

x		-1		8	
x^2-7x-8	+	0	−	0	+

$-2x^2+5x-2<0$

x		$\frac{1}{2}$		2	
$-2x^2+5x-2$	−	0	+	0	−

x		-1		$\frac{1}{2}$		2		8	
x^2-7x-8	+	0	−	−	−	−	−	0	+
$-2x^2+5x-2$	−	−	−	0	+	0	−	−	−

opl. verz. $=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[8,+\infty\right[$

6 $\quad -3 < 3x^2 + 5x - 1 < 1$

$-3 < 3x^2 + 5x - 1$

$3x^2 + 5x + 2 > 0$

x		-1		$-\frac{2}{3}$	
$3x^2+5x+2$	+	0	−	0	+

$3x^2 + 5x - 1 < 1$

$3x^2 + 5x - 2 < 0$

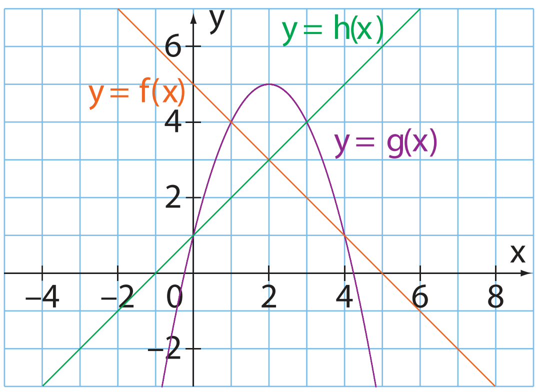
x		-2		$\frac{1}{3}$	
$3x^2+5x-1$	+	0	−	0	+

x		-2		-1		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	
$3x^2+5x+2$	+	+	+	0	−	0	+	+	+
$3x^2+5x-1$	+	0	−	−	−	−	−	0	+

opl. verz. $= \left]-2, -1\right[\cup \left]-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right[$

Herhalingsopdracht 115 bladzijde 169

Bepaal grafisch de oplossingsverzameling van de volgende ongelijkheden.



1 $\quad f(x) \geq g(x)$

$f(x) \geq g(x)$ als $x \leq 1$ of als $x \geq 4$

opl. verz. $= \left]-\infty, 1\right] \cup \left[4, +\infty\right[$

2 $\quad f(x) < g(x) < h(x)$

$f(x) < g(x)$ als $1 < x < 4$

$g(x) < h(x)$ als $x < 0$ of als $x > 3$

$\Rightarrow \quad f(x) < g(x) < h(x)$ als $3 < x < 4$

opl. verz. $= \left]3, 4\right[$

Herhalingsopdracht 116 bladzijde 169

Ontbind in factoren van de eerste graad. Schrijf de ontbinding zonder breuken en zonder decimale getallen.

1 $x^2 - 3x - 28$

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} s = 3 \\ p = -28 \end{array}\right\} \quad 7 \text{ en } -4$$

$$x^2 - 3x - 28 = (x-7)(x+4)$$

2 $-6x^2 + 19x - 10$

$$-6x^2 + 19x - 10 = 0$$

$$D = 121$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ of } x = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} -6x^2 + 19x - 10 &= -6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) \\ &= -(3x-2)(2x-5) \\ &= (2-3x)(2x-5) \end{aligned}$$

3 $18x^2 - 48x + 32$

$$\begin{aligned} &18x^2 - 48x + 32 \\ &= 2(9x^2 - 24x + 16) \\ &= 2(3x-4)^2 \end{aligned}$$

4 $2x^2 - 5xy + 3y^2$

$$2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$$

$$D = y^2$$

$$x = \frac{5y \pm y}{4} \;\begin{array}{l} \nearrow \frac{3y}{2} \\ \searrow y \end{array}$$

$$\begin{aligned} &2x^2 - 5xy + 3y^2 \\ &= 2\left(x - \frac{3y}{2}\right)(x-y) \\ &= (2x-3y)(x-y) \end{aligned}$$

5 $25x^2 - 10xy + y^2$

$$\begin{aligned} &25x^2 - 10xy + y^2 \\ &= (5x-y)^2 \end{aligned}$$

6 $x^4 - 3x^2y^2 + 2y^4$

$$x^4 - 3x^2y^2 + 2y^4 = 0$$

Stel $x^2 = t$

$$t^2 - 3ty^2 + 2y^4 = 0$$

$$D = y^4$$

$$t = \frac{3y^2 \pm y^2}{2} \;\begin{array}{l} \nearrow 2y^2 \\ \searrow y^2 \end{array}$$

$$x^2 = 2y^2 \text{ of } x^2 = y^2$$

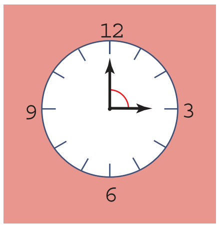
$$x = -\sqrt{2}\,y \text{ of } x = \sqrt{2}\,y \text{ of } x = -y \text{ of } x = y$$

$$\begin{aligned} &x^4 - 3x^2y^2 + 2y^4 \\ &= \left(x + \sqrt{2}\,y\right)\left(x - \sqrt{2}\,y\right)(x+y)(x-y) \end{aligned}$$

Herhalingsopdracht 117 bladzijde 169

De grote wijzer van een uurwerk is 2 mm langer dan de kleine wijzer. Om 3 uur is de afstand tussen de wijzerpunten 10 mm.

Bepaal de lengte van de wijzers.

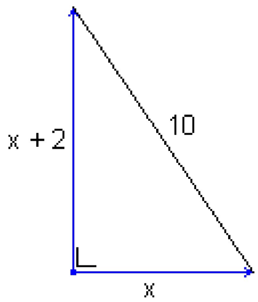


Oplossing

Stel $x =$ de lengte van de kleine wijzer, dan is $x+2$ de lengte van de grote wijzer.

Er geldt: $(x+2)^2 + x^2 = 100$

$$x^2+4x+4+x^2=100$$
$$2x^2+4x-96=0$$
$$x^2+2x-48=0$$
$$D=196$$
$$x=6 \text{ of } \cancel{x=-8} \quad (\text{context!})$$



De kleine wijzer meet 6 mm en de grote wijzer 8 mm.

Herhalingsopdracht 118 bladzijde 169

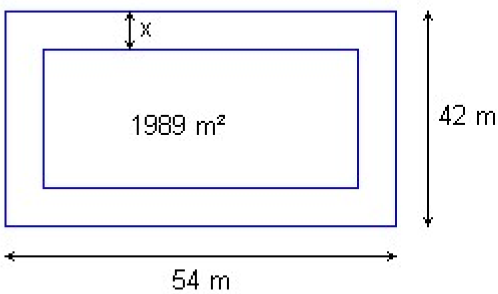
Een rechthoekige tuin is 54 m lang en 42 m breed. Langs de omtrek van de tuin wordt een pad aangelegd dat overal even breed is. Bereken met een vergelijking de breedte van dit pad als er 1989 m^2 bebouwbare tuin overblijft.

Oplossing

De zijden van de bebouwbare tuin zijn $(54-2x)$m en $(42-2x)$m.

Er geldt: $(54-2x)(42-2x)=1989$

$$2268-192x+4x^2=1989$$
$$4x^2-192x+279=0$$
$$\cancel{x=\frac{93}{2}} \quad (\text{context!}) \text{ of } x=\frac{3}{2}$$



De breedte van het pad is 1,5 m.

Herhalingsopdracht 119 bladzijde 170

Een boekhandelaar heeft voor € 450 boeken aangekocht. Als hij 10 boeken niet verkoopt en de andere met een winst van € 2,50 per boek verkoopt, dan heeft hij een winst van € 180. Hoeveel boeken heeft hij aangekocht ?

Oplossing

Stel $x =$ het aantal boeken dat de boekhandel heeft aangekocht.

Er geldt:

$$\underbrace{(x-10)}_{\text{aantal verkochte boeken}} \cdot \underbrace{\left(\frac{450}{x}+2,5\right)}_{\text{prijs per boek}} = \underbrace{450+180}_{630}$$

$$450+2,5x-\frac{4500}{x}-25=630$$

$$2,5x^2-205x-4500=0$$

$$D=87025$$

$x=100$ of $\cancel{x=-18}$

De boekhandelaar heeft 100 boeken aangekocht.

Herhalingsopdracht 120 bladzijde 170

Voor welke waarde(n) van m zal één van de snijpunten van de rechte $y = 3x + 2$ en de parabool $y = x^2 + (m+2)x + 2m$ op de x-as liggen?
Bepaal in dat geval de coördinaat van de snijpunten.

Oplossing

De rechte $y = 3x + 2$ snijdt de x-as in het punt $P\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$. Dit punt moet ook op de parabool liggen:

$$0 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + (m+2)\left(-\frac{2}{3}\right) + 2m$$

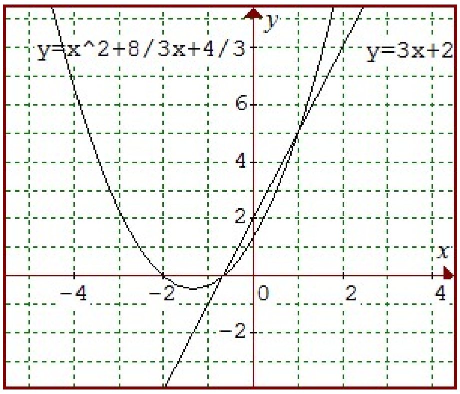
$$0 = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}m - \frac{4}{3} + 2m$$

$$0 = 4 - 6m - 12 + 18m$$

$$8 = 12m$$

$$m = \frac{2}{3}$$

Als $m = \frac{2}{3}$, dan is $y = x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}$



Snijpunten: $x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3} = 3x + 2$

$$3x^2 + 8x + 4 = 3x + 2$$

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 25$$

$$x = 1 \text{ of } x = -\frac{2}{3}$$

De snijpunten zijn $S_1\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ en $S_2(1,5)$.

Herhalingsopdracht 121 bladzijde 170

Gegeven de familie functies $f(x) = mx^2 - 2mx + 3$ met parameter m.

1 Voor welke waarde(n) van m is 4 een nulpunt van f ?

4 is een nulpunt van f als $16m - 8m + 3 = 0$ of als $m = -\frac{3}{8}$

2 Voor welke waarde(n) van m ligt de grafiek van f volledig boven de x-as?

De grafiek van f ligt volledig boven de x-as als $D < 0$.

$$\begin{aligned} D &= 4m^2 - 12m \\ &= 4m(m-3) \end{aligned}$$

m		0		3	
D	+	0	−	0	+

Als $0 < m < 3$ is de grafiek van f een dalparabool die volledig boven de x-as ligt.

Als $m = 0$ is de grafiek van f een rechte met vergelijking $y = 3$ die ook volledig boven de x-as ligt.

De grafiek van f ligt dus volledig boven de x-as als $0 \le m < 3$.

3 Voor welke waarde(n) van m is de grafiek van f een dalparabool die de x-as raakt?

De grafiek van f is een dalparabool ($m > 0$) die de x-as raakt als $m = 3$ (zie vraag 2).

Merk op dat voor $m = 0$ de grafiek van f geen parabool is.

4 Voor welke waarde(n) van m is de grafiek van f een bergparabool die twee snijpunten heeft met de x-as?

De grafiek van f is een bergparabool die 2 snijpunten heeft met de x-as als $m < 0$ (zie vraag 2).

Herhalingsopdracht 122 bladzijde 170

Bepaal x en y als $\begin{cases} x^2 + y^2 = 97 \\ xy = -36 \end{cases}$.

Oplossing

Er geldt dat
$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \\ &= 97 - 72 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Dus is $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = -36 \end{cases}$ of $\begin{cases} x + y = -5 \\ xy = -36 \end{cases}$

Hieruit volgt dat

$x = 9$ en $y = -4$ of $x = -4$ en $y = 9$ of $x = -9$ en $y = 4$ of $x = 4$ en $y = -9$