Hoofdstuk 6

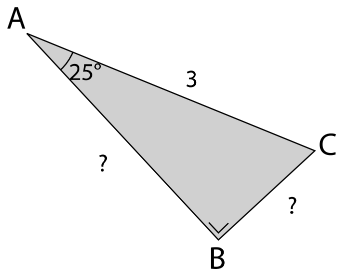
Driehoeksmeting

Oplossingen van de opdrachten

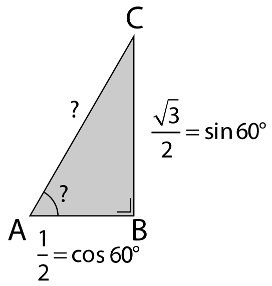
Opdracht 1 bladzijde 8

1 Bereken de gevraagde zijden of hoeken in de gegeven rechthoekige driehoeken.

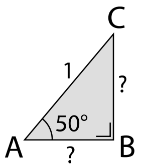
a



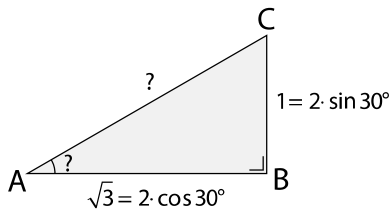
c



b



d



Oplossing van a

$$|AB| = 3 \cdot \cos 25° = 2{,}72$$

$$|BC| = 3 \cdot \sin 25° = 1{,}27$$

Oplossing van c

$$|AC| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$1 \cdot \cos \widehat{A} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{A} = 60°$$

Oplossing van b

$$|AB| = \cos 50° = 0{,}64$$

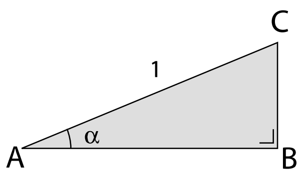
$$|BC| = \sin 50° = 0{,}77$$

Oplossing van d

$$|AC| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$2 \cdot \cos \widehat{A} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \cos \widehat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{A} = 30°$$

2 Geef de lengte van de beide rechthoekszijden van de rechthoekige driehoek met schuine zijde 1, als de hoek α gegeven is.



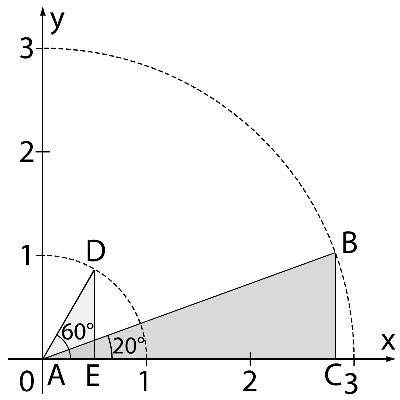
$$|AB| = \cos \alpha$$

$$|BC| = \sin \alpha$$

Opdracht 2 bladzijde 8

Twee rechthoekige driehoeken ABC en ADE hebben één rechthoekszijde die op de x-as ligt en een hoekpunt in de oorsprong.
De hoekpunten B en D liggen op een cirkel met straal 3 resp. 1. De hoeken in A zijn gegeven op de figuur.

Bepaal de coördinaten van de punten B en D.



Oplossing

$|AC| = 3 \cdot \cos 20° = 2,82 \quad \Rightarrow \quad x_B = 2,82$

$|BC| = 3 \cdot \sin 20° = 1,03 \quad \Rightarrow \quad y_B = 1,03$

$co(B) = (2,82; 1,03)$

$|AE| = \cos 60° = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_D = \frac{1}{2}$

$|ED| = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad y_D = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$co(D) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Opdracht 3 bladzijde 10

Bereken de hoek α tussen de halfrechte $[OP$ en de positieve x-as voor het gegeven punt P.

$\boxed{1 \quad P(3, 2)}$

$\tan \alpha = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 33°41'24''$

$\boxed{2 \quad P(1, \sqrt{3})}$

$\tan \alpha = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60°$

Opdracht 4 bladzijde 10

Een punt P op de goniometrische cirkel in het eerste kwadrant heeft als x-coördinaat 0,6.
Bereken zijn y-coördinaat en de scherpe hoek α waarvan P het beeldpunt is.

Oplossing

Exacte methode

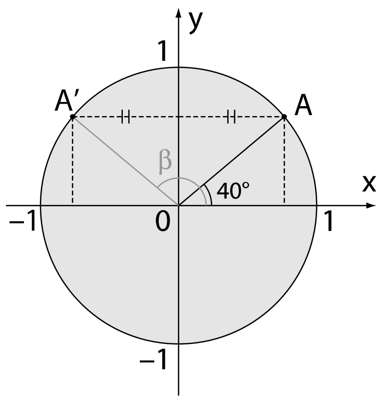
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\alpha = 1 - 0{,}36$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin\alpha = \pm 0{,}8$$

In het eerste kwadrant is $\sin\alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = 0{,}8$

Benaderende methode

$$\cos\alpha = 0{,}6 \quad \overset{\text{(grm)}}{\Rightarrow} \quad \alpha \approx 53°7'48'' \quad \overset{\text{(grm)}}{\Rightarrow} \quad \sin\alpha \approx 0{,}8$$

Opdracht 5 bladzijde 10



A is het beeldpunt van een hoek van 40°.

1	Bepaal de coördinaat van A (afgerond op 2 cijfers na de komma) met je rekentoestel.

$$\text{co}(A) = (\cos 40°, \sin 40°) = (0{,}77; 0{,}64)$$

2	Het punt A' is het spiegelbeeld van A om de y-as. Bepaal de coördinaat van A' uit die van A.

$$\text{co}\left(A'\right) = (-0{,}77; 0{,}64)$$

3	Bereken β.

$$\beta = 180° - 40° = 140°$$

4	Gebruik je rekentoestel om na te gaan of de coördinaat van A' ook gelijk is aan $(\cos\beta, \sin\beta)$.

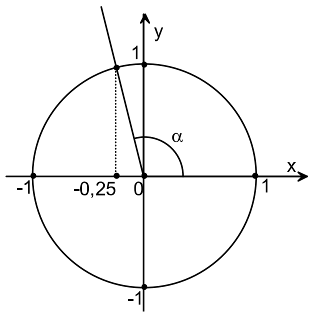
$$\cos 140° = -0{,}77; \sin 140° = 0{,}64 \quad \Rightarrow \quad \text{co}\left(A'\right) = (\cos 140°, \sin 140°)$$

Opdracht 6 bladzijde 12

Van een onbekende hoek α, tussen 0° en 180°, is de cosinus gegeven.
Construeer in de goniometrische cirkel de hoek die hieraan voldoet. Meet α met je gradenboog en bereken deze hoek ook met je rekentoestel.

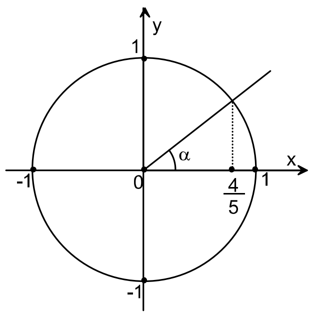
$\boxed{1 \quad \cos\alpha = -0,25}$

$\cos\alpha = -0,25 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 104°28'39"$



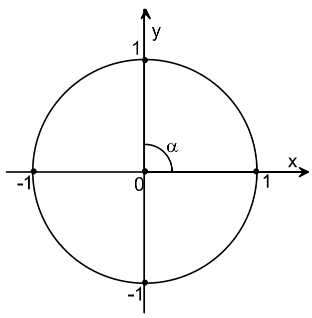
$\boxed{2 \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 36°52'12"$



$\boxed{3 \quad \cos\alpha = 0}$

$\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90°$



Opdracht 7 bladzijde 12

Bewijs met de hoofdformule van de goniometrie.

$$\boxed{1 \quad 1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$1+\tan^2\alpha = 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

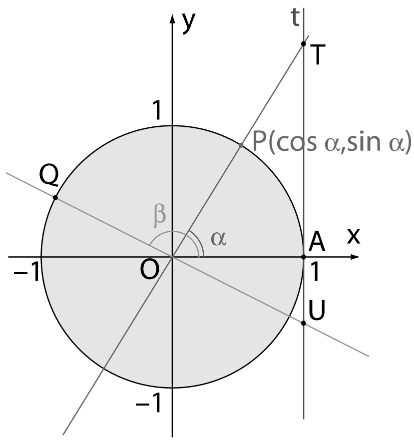
$$\boxed{2 \quad \tan\alpha+\cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}$$

$$\tan\alpha+\cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}$$

$$\boxed{3 \quad \frac{1}{\sin^2\alpha}-1 = \cot^2\alpha}$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}-1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \cot^2\alpha$$

Opdracht 8 bladzijde 13



Beschouw het beeldpunt P van de scherpe hoek α en Q van de stompe hoek β.

1	Geef de richtingscoëfficiënt van de rechte OP.

$$\text{rico OP} = \frac{\sin\alpha - 0}{\cos\alpha - 0} = \tan\alpha$$

2	T is het snijpunt van OP en de verticale raaklijn t aan de cirkel in A. Bepaal de coördinaat van T.

$$\text{OP} \leftrightarrow y = \tan\alpha \cdot x$$

$$\text{snijpunt met } t \leftrightarrow x = 1 \quad : \quad \begin{cases} y = \tan\alpha \cdot x \\ x = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \tan\alpha \end{cases}$$

$$\text{co}(T) = (1, \tan\alpha)$$

3	Wat is de richtingscoëfficiënt van de rechte OQ?

$$\text{rico OQ} = \frac{\sin\beta - 0}{\cos\beta - 0} = \tan\beta$$

4	Bepaal de coördinaat van U, het snijpunt van OQ met t.

$$\text{OU} \leftrightarrow y = \tan\beta \cdot x$$

$$\text{snijpunt met } t \leftrightarrow x = 1 \quad : \quad \begin{cases} y = \tan\beta \cdot x \\ x = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \tan\beta \end{cases}$$

$$\text{co}(U) = (1, \tan\beta)$$

Opdracht 9 bladzijde 14

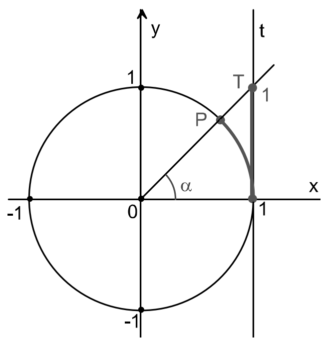
Onderzoek aan de hand van de (tweede) meetkundige betekenis van tan α in welk interval tan α ligt als

1 $0° \leq \alpha \leq 45°$ 2 $45° \leq \alpha < 90°$ 3 $90° < \alpha \leq 135°$ 4 $135° \leq \alpha \leq 180°$

Oplossing

Noem P het beeldpunt van α en T het snijpunt van OP met t, de raaklijn aan de goniometrische cirkel in $A(1,0)$.

1 $0° \leq \alpha \leq 45°$

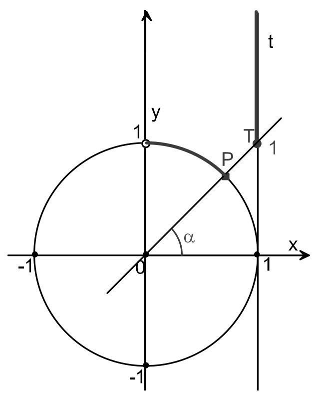


$0° \leq \alpha \leq 45° \Rightarrow 0 \leq y_T \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \tan\alpha \leq 1$

$\tan\alpha$ ligt in het interval $[0,1]$.

2 $45° \leq \alpha < 90°$

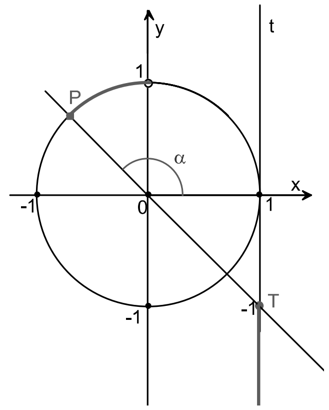


$45° \leq \alpha < 90° \Rightarrow y_T \geq 1$

$\Rightarrow \tan\alpha \geq 1$

$\tan\alpha$ ligt in het interval $[1,+\infty[$.

3 $90° < \alpha \leq 135°$

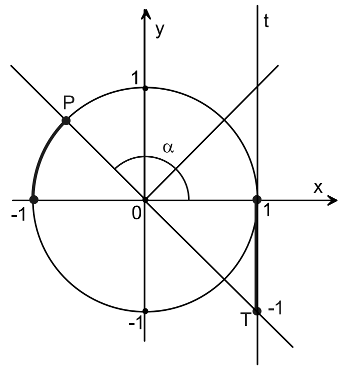


$90° < \alpha \leq 135° \Rightarrow y_T \leq -1$

$\Rightarrow \tan\alpha \leq -1$

$\tan\alpha$ ligt in het interval $]-\infty,-1]$.

4 $135° \leq \alpha \leq 180°$



$135° \leq \alpha \leq 180° \Rightarrow -1 \leq y_T \leq 0$

$\Rightarrow -1 \leq \tan\alpha \leq 0$

$\tan\alpha$ ligt in het interval $[-1,0]$.

Opdracht 10 bladzijde 14

Bepaal de scherpe hoek tussen de rechte a en de x-as.

$\boxed{1 \quad a \leftrightarrow y = 3x}$

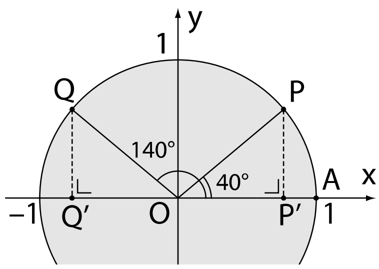
$$\tan\alpha = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 71°33'54''$$

$\boxed{2 \quad a \leftrightarrow y = 1000\,000\,x}$

$$\tan\alpha = 1000\,000 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 89°59'59,794''$$

Opdracht 11 bladzijde 15

De punten P en Q zijn de beeldpunten van 40° en $180° - 40° = 140°$. De punten P' en Q' zijn de loodrechte projecties van P resp. Q op de x-as.



$\boxed{1 \quad \text{Verklaar waarom } \Delta POP' \cong \Delta QOQ'.}$

$$\begin{cases} H & P'\hat{O}P = Q'\hat{O}Q = 40° \\ Z & |OP| = |OQ| = 1 \\ H & O\hat{P}P' = O\hat{Q}Q' = 50° \end{cases}$$

$\boxed{2 \quad \text{Leid hieruit een verband af tussen cos 40°, sin 40°, cos 140° en sin 140°.}}$

$$\sin 140° = \left|QQ'\right| = \left|PP'\right| = \sin 40°$$

$$\cos 140° = -\left|OQ'\right| = -\left|OP'\right| = -\cos 40°$$

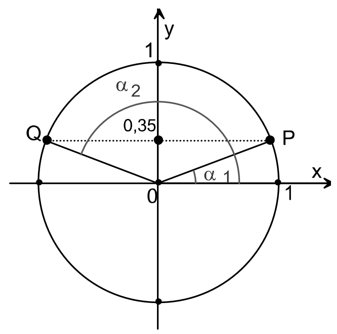
Opdracht 12 bladzijde 15

Van een hoek α is enkel geweten dat $\sin\alpha = 0,35$.
Teken op de goniometrische cirkel alle hoeken α tussen 0° en 180° die hieraan voldoen en bereken ze.

Oplossing

$\sin\alpha = 0,35$ met $0 \le \alpha \le 180°$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 20°29'14" \text{ of } \alpha = 180° - 20°29'14" = 159°30'46"$$



Opdracht 13 bladzijde 17

Vul de volgende tabel in.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0				
$\tan\alpha$									
$\cot\alpha$									

Oplossing

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

Opdracht 14 bladzijde 17

Bepaal de hoek(en) α tussen 0° en 180° waarvoor geldt:

$\boxed{1 \quad \sin\alpha = 0,2}$

$$\sin\alpha = 0,2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 11°32'13'' \text{ of } \beta = 180° - 11°32'13'' = 168°27'47''$$

$\boxed{2 \quad \tan\alpha = -\frac{3}{2}}$

$$\tan\alpha = -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 123°41'24''$$

$\boxed{3 \quad \sin\alpha = \frac{3}{2}}$

onmogelijk, want $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

$\boxed{4 \quad \cos\alpha = \frac{12}{13}}$

$$\cos\alpha = \frac{12}{13} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 22°37'12''$$

Opdracht 15 bladzijde 17

α, β en γ zijn de hoeken van een driehoek.

$\boxed{1 \quad \text{Onderzoek het verband tussen } \sin\alpha \text{ en } \sin(\beta+\gamma)}$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Rightarrow \quad \beta + \gamma = 180° - \alpha$$

$$\sin(\beta+\gamma) = \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

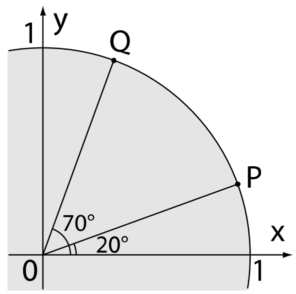
$\boxed{2 \quad \text{Onderzoek het verband tussen } \cos\alpha \text{ en } \cos(\beta+\gamma)}$

$$\cos(\beta+\gamma) = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$\boxed{3 \quad \text{Onderzoek het verband tussen } \tan\alpha \text{ en } \tan(\beta+\gamma)}$

$$\tan(\beta+\gamma) = \tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$$

Opdracht 16 bladzijde 17



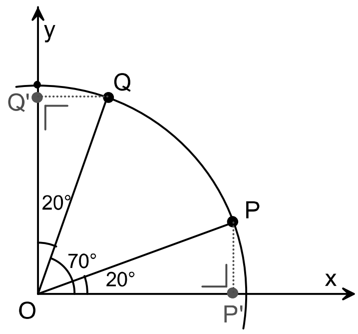
P en Q zijn de beeldpunten op de goniometrische cirkel van hoeken van 20° en 70°.

1 Maak gebruik van je rekentoestel om verbanden te zoeken tussen cos 20°, sin 20°, cos 70° en sin 70°.

$\cos 20° = \sin 70°$ en $\cos 70° = \sin 20°$

2 Hoe kun je deze verbanden verklaren?

Noem P' de loodrechte projectie van P op de x-as en Q' de loodrechte projectie Q op de y-as.



Er geldt: $\Delta POP' \cong \Delta QOQ' \quad (HZH)$

Bijgevolg:

$|OP'| = |OQ'| \quad \Rightarrow \quad \cos 20° = \sin 70°$

$|PP'| = |QQ'| \quad \Rightarrow \quad \sin 20° = \cos 70°$

Opdracht 17 bladzijde 19

Vul een minteken in waar nodig.

1 $\cos(180° - \alpha) = ...\sin(90° - \alpha)$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = -\sin(90° - \alpha)$

2 $\sin(180° - \alpha) = ...\cos(90° - \alpha)$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$

3 $\tan(90° - \alpha) = ...\cot(180° - \alpha)$

$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha = -\cot(180° - \alpha)$

Opdracht 18 bladzijde 19

α, β en γ zijn de hoeken van een driehoek. Vereenvoudig.

$\boxed{1 \quad \sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$

$$\alpha+\beta+\gamma = 180° \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2} - \cos\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2} = 0$$

$\boxed{2 \quad \tan\frac{\alpha}{2} \cdot \tan\frac{\beta+\gamma}{2}}$

$$\tan\frac{\alpha}{2} \cdot \tan\frac{\beta+\gamma}{2} = \tan\frac{\alpha}{2} \cdot \tan\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \tan\frac{\alpha}{2} \cdot \cot\frac{\alpha}{2} = 1$$

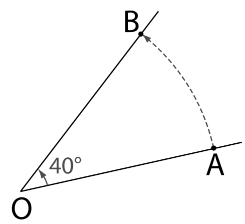
$\boxed{3 \quad \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma+\alpha}{2}}$

$$\sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma+\alpha}{2} = \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \sin^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} = 1$$

Opdracht 19 bladzijde 19

B ontstaat door A te draaien om O over 40°, in tegenwijzerzin.
Dit noteren we als $B = r_{(O,\,40°)}(A)$.



$\boxed{1 \quad \text{Vul aan} : A = r_{(0,\,...)}(B).}$

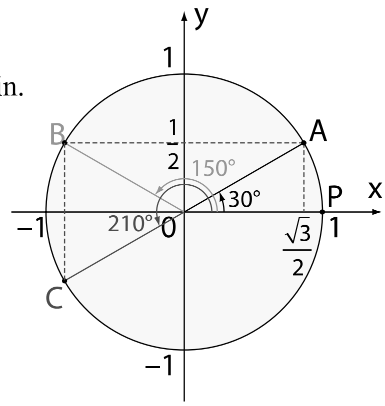
$$A = r_{(0,\,-40°)}(B) \qquad (\text{zie Delta Nova 2a, H3})$$

2 Geef minstens één andere hoek waardoor A op B afgebeeld wordt door een rotatie met middelpunt O.

Andere mogelijkheden zijn: $-320°, 400°$.

Alle mogelijkheden kun je uitdrukken met $40° + k \cdot 360°$ met $k \in \mathbb{Z}$.

Opdracht 20 bladzijde 19



De punten A, B en C ontstaan door P om de oorsprong te roteren volgens de aangegeven hoeken, met de gegeven draaizin.

Voor A, B en C zijn er ook negatieve draaihoeken α, β en γ te vinden zodat $A = r_{(O,\alpha)}(P)$, $B = r_{(O,\beta)}(P)$ en $C = r_{(O,\gamma)}(P)$.

Geef een waarde voor α, β en γ en onderzoek met je rekentoestel of de cosinus en sinus van deze negatieve hoeken telkens de x- en y-coördinaat van het bijbehorende punt geven.

Oplossing

$\alpha = -330°$ $\quad \cos(-330°) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$

$\sin(-330°) = \frac{1}{2} = \sin 30°$

$\beta = -210°$ $\quad \cos(-210°) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 150°$

$\sin(-210°) = \frac{1}{2} = \sin 150°$

$\gamma = -150°$ $\quad \cos(-150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 210°$

$\sin(-150°) = -\frac{1}{2} = \sin 210°$

Opdracht 21 bladzijde 20

1	De som van 240° en $-60°$ is 180°. Volgens de definitie zijn dit dus supplementaire hoeken. Onderzoek of de formules voor supplementaire hoeken nog altijd gelden voor deze hoeken.

$\sin 240° = -0{,}87 = \sin(-60°) \qquad \left(= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\cos 240° = -0{,}5 = -\cos(-60°)$

$\tan 240° = 1{,}73 = -\tan(-60°) \qquad \left(= \sqrt{3}\right)$

De formules voor supplementaire hoeken gaan ook hier op.

2	Kies zelf twee complementaire hoeken die niet beide positief zijn en onderzoek het verband tussen hun goniometrische getallen.

De hoeken 110° en $-20°$ zijn complementair en niet beide positief $\left(110 + (-20) = 90\right)$.

$\sin 110° = 0{,}94$

$\sin(-20°) = -0{,}34$

$\cos 110° = -0{,}34$

$\cos(-20°) = 0{,}94$

$\sin 110° = \cos(-20°)$

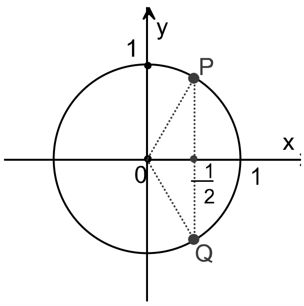
$\sin(-20°) = \cos 110°$

Ook hier blijven de formules gelden.

Opdracht 22 bladzijde 20

De hoek α ligt telkens tussen $-180°$ en $180°$.
Maak eerst een schets en bereken daarna de mogelijke waarde(n) van α.

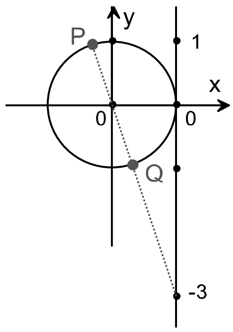
1 $\cos\alpha = \frac{1}{2}$



In het eerste kwadrant is $\alpha = 60°$.

Op de afbeelding zien we dat $\alpha = -60°$ dezelfde cosinus heeft.

2 $\tan\alpha = -3$

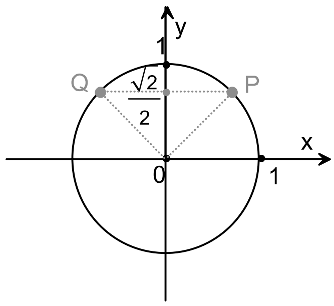


Via het rekentoestel vinden we $\alpha = -71°33'54''$.

Op de figuur zien we $Q = r_{(O,180°)}(P)$

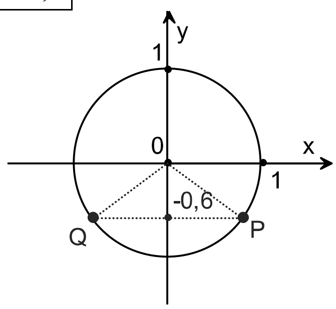
zodat $\alpha = -71°33'54'' + 180° = 108°26'6''$ ook voldoet aan $\tan\alpha = -3$.

3 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$



De supplementaire hoeken 45° en 135° hebben een sinus gelijk aan $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4 $\sin\alpha = -0,6$



Het rekentoestel geeft $\alpha = -36°52'12''$, wat overeenkomt met beeldpunt P.

Met Q komt de supplementaire hoek $180° - (-36°52'12'') = 216°52'12''$ overeen, maar deze ligt niet tussen $-180°$ en $180°$.

Trek je van deze hoek 360° af, dan beland je in hetzelfde beeldpunt Q. De bijbehorende hoek is $216°52'12'' - 360° = -143°7'48''$.

Opdracht 23 bladzijde 21

Bepaal de hellingshoek van de gegeven rechten.

$\boxed{1 \quad a \leftrightarrow y = 4x + 4}$

We beperken ons tot hoeken α tussen $-90°$ en $90°$.

Dan geldt $\tan\alpha = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 75°57'50''$

$\boxed{2 \quad b \leftrightarrow x + 2y - 6 = 0}$

We beperken ons tot hoeken α tussen $-90°$ en $90°$.

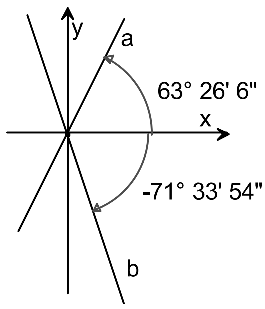
$$x + 2y - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$\tan\alpha = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -26°33'54''$$

Opdracht 24 bladzijde 21

Bereken de scherpe hoek tussen de rechten a en b.

$\boxed{1 \quad a \leftrightarrow y = 2x \text{ en } b \leftrightarrow y = -3x}$

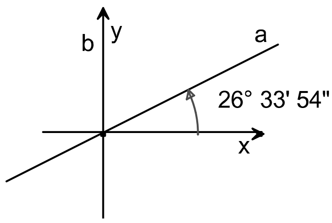


Met het rekentoestel vinden we $\alpha_a = 63°26'6''$ en $\alpha_b = -71°33'54''$.

De stompe hoek tussen beide rechten is $\alpha_a - \alpha_b = 135°$.

De scherpe hoek is bijgevolg $180° - 135° = 45°$.

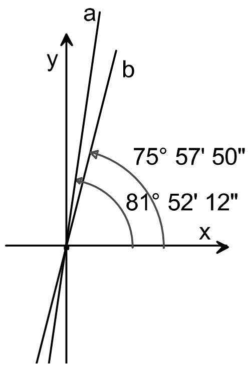
$\boxed{2 \quad a \leftrightarrow y = \frac{1}{2}x \text{ en } b \leftrightarrow x = 0}$



De hellingshoek van a is $\alpha_a = 26°33'54''$.

De scherpe hoek tussen a en b is $90° - 26°33'54'' = 63°26'6''$.

$\boxed{3 \quad a \leftrightarrow y = 7x \text{ en } b \leftrightarrow y = 4x}$



$\alpha_a = 81°52'12''$ en $\alpha_b = 75°57'50''$

De scherpe hoek tussen beide rechten is $\alpha_a - \alpha_b = 5°54'22''$.

4 $a \leftrightarrow 3x+2y-4=0$ en $b \leftrightarrow 4x-5y+7=0$

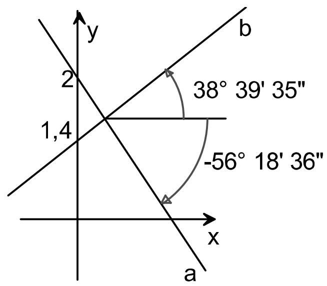
$a \leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+2$ en $b \leftrightarrow y=\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}$

$\alpha_a = -56°18'36"$ en $\alpha_b = 38°39'35"$

De stompe hoek tussen beide rechten is

$\alpha_b - \alpha_a = 94°58'11"$ en de scherpe hoek is bijgevolg

$85°1'49"$.



Opdracht 25 bladzijde 22

Hubert wil met zijn gemotoriseerde deltavlieger vanaf een vliegveld in Moerbeke (M) naar het punt A vliegen dat precies 100 km ten zuiden van M ligt.

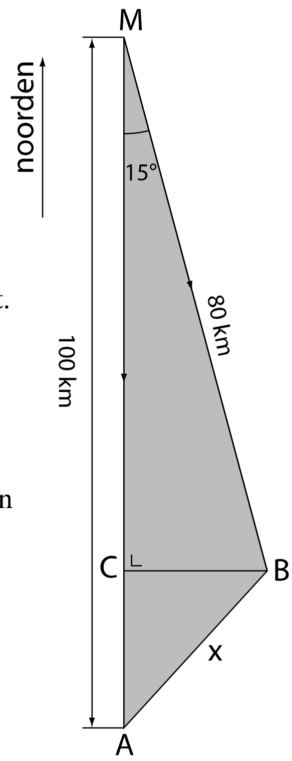
Hij vliegt met een kruissnelheid van 80 km/h. Na één uur zou hij zich dus op 20 km van A moeten bevinden. Door de westenwind is hij echter 15° uit koers geslagen.

Daardoor bevindt hij zich in het punt B, dat meer dan 20 km van A ligt. Maar hoe ver dan wel?

Was ABM een rechthoekige driehoek, dan konden we x = |AB| berekenen met de stelling van Pythagoras. Maar er is hier geen sprake van een rechthoekige driehoek.

Door een hoogtelijn uit B te tekenen, kun je ΔABM echter opsplitsen in twee rechthoekige driehoeken.

Bereken de onbekende lengte x = |AB|.



Oplossing

In ΔMBC geldt:

$|BC| = 80 \cdot \sin 15° \approx 20{,}71$ en $|MC| = 80 \cdot \cos 15° \approx 77{,}27$.

In ΔABC geldt: $|AC| = 100 - |MC| \approx 22{,}73$.

Uit $|AC|^2 + |BC|^2 = x^2$ volgt $x \approx 30{,}74$.

De onbekende lengte is 30,74 km.

Opdracht 26 bladzijde 24

Bereken de ontbrekende zijde in ΔABC met

$\boxed{1 \quad b = 5;\, c = 4 \text{ en } \alpha = 60°}$

$$a^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60° \quad \Rightarrow \quad a = 4{,}58$$

$\boxed{2 \quad a = 45{,}65;\, b = 67{,}8 \text{ en } \gamma = 77°30'}$

$$c^2 = 45{,}65^2 + 67{,}8^2 - 2 \cdot 45{,}65 \cdot 67{,}8 \cdot \cos 77°30' \quad \Rightarrow \quad c = 73{,}08$$

$\boxed{3 \quad b = 7;\, c = 3{,}5 \text{ en } \alpha = 120°}$

$$a^2 = 7^2 + 3{,}5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3{,}5 \cdot \cos 120° \quad \Rightarrow \quad a = 9{,}26$$

Opdracht 27 bladzijde 25

Bereken de hoeken van ΔABC op 1" nauwkeurig als $a = 6$, $b = 7$ en $c = 8$.

Oplossing

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0{,}6875 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 46°34'3''$$

Analoog voor β: $\cos\beta = 0{,}53125 \quad \Rightarrow \quad \beta = 57°54'36''$.

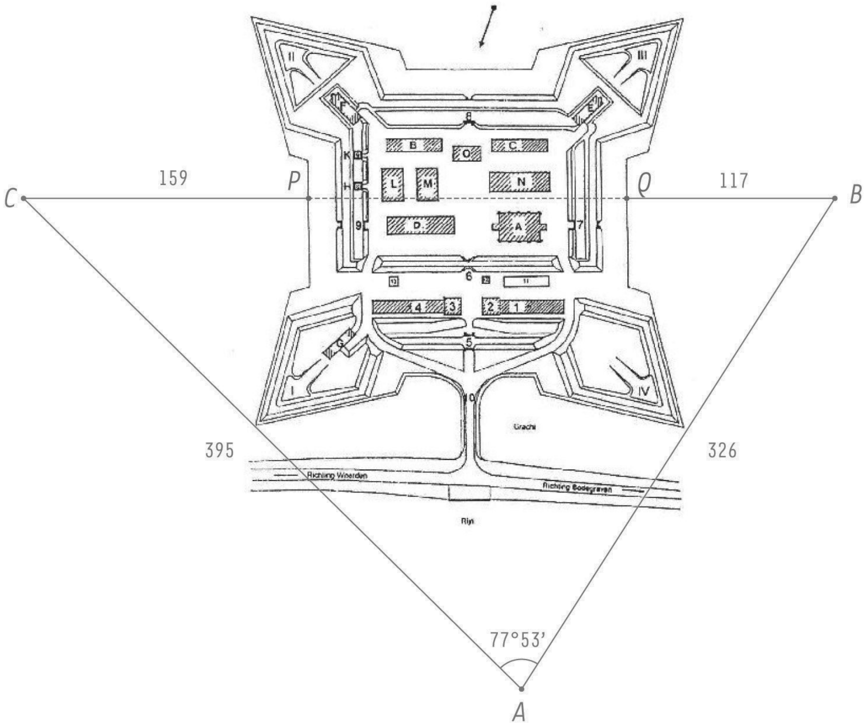
$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 75°31'21''$

Opdracht 28 bladzijde 25

De Wiericker Schans is een voormalig omwald legerkampement uit de 17e eeuw in Nederland. Om de breedte ervan te bepalen, tussen de punten P en Q, gaat Gregory als volgt te werk.

Aangezien hij de paaltjes in P en Q niet rechtstreeks kan zien vanuit A, voegt hij twee paaltjes B en C toe, zó dat B, C, P en Q op een rechte liggen. De afmetingen, in meter, tussen de paaltjes en de hoek $B\widehat{A}C$ kun je op de figuur aflezen.

Bereken |PQ|.



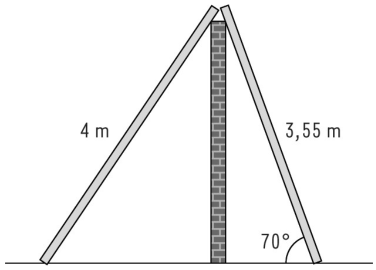
Oplossing

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \cos \widehat{A} \quad \Rightarrow \quad |BC| = 456,34$$

$$\Rightarrow \quad |PQ| = 456,34 - 159 - 117 = 180,34$$

De afstand $|PQ|$ is gelijk aan 180,34 m.

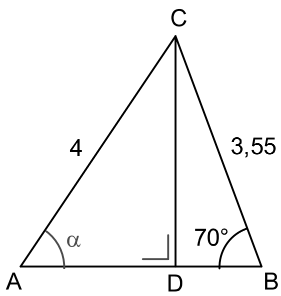
Opdracht 29 bladzijde 25



Twee ladders van ongelijke lengte raken elkaar net boven een verticale smalle muur. De ene ladder maakt een hoek van 70° met de horizontale grond en is 3,55 m lang. De andere ladder is 4 m lang.

Welke hoek maakt de andere ladder met de grond?

Oplossing



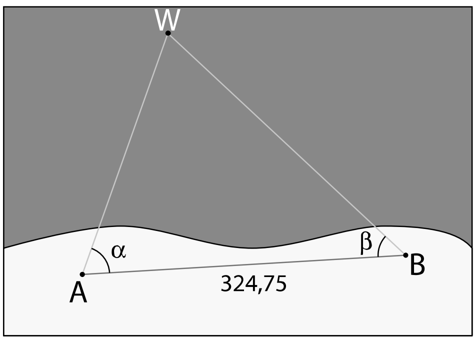
In $\Delta BCD : |CD| = 3{,}55 \cdot \sin 70° \approx 3{,}34 \qquad (m)$

In $\Delta ADC : |CD| = 4 \cdot \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \dfrac{|CD|}{4} \approx 0{,}8340$

$\Rightarrow \quad \alpha = 56°30'34''$

De andere ladder maakt met de grond een hoek van 56°30’34”.

Opdracht 30 bladzijde 28



Voor de kust staat een windmolen W. Maxim wil weten hoe groot de afstand is van het punt A aan de kust tot aan de windmolen. Omdat hij die afstand niet rechtstreeks kan meten, kiest hij een punt B zó dat de afstand |AB| wél te meten is.
Hij vindt: |AB| = 324,75 m.
Verder meet hij de hoeken $\alpha = 51°12'$
en $\beta = 39°44'$.

Bereken de afstand |AW|.

Oplossing

$\widehat{W} = 180° - \alpha - \beta = 89°4'$

$\dfrac{|AW|}{\sin\beta} = \dfrac{|AB|}{\sin\widehat{W}} \quad \Rightarrow \quad |AW| = \dfrac{324{,}75 \cdot \sin 39°44'}{\sin 89°4'} = 207{,}61$

De afstand $|AW|$ is gelijk aan 207,61 m.

Opdracht 31 bladzijde 28

In de volgende driehoeken zijn telkens twee zijden en een aanliggende hoek gegeven.
Bereken de gevraagde hoek. Let op het aantal oplossingen.

$\boxed{1 \quad a = 8;\, b = 6 \text{ en } \alpha = 70°. \text{ Bereken } \beta.}$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} \approx 0,7048 \quad \Rightarrow \quad \beta = 44°48'39''$$

Het supplement van deze hoek, 135°11’21”, heeft dezelfde sinus, maar is niet mogelijk omdat de som van de hoeken van de driehoek groter dan 180° zou zijn.

$\boxed{2 \quad b = 29;\, c = 9 \text{ en } \beta = 115°. \text{ Bereken } \gamma.}$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = \frac{c\cdot\sin\beta}{b} \approx 0,2813 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 16°20'9''$$

Het supplement van de hoek γ is niet mogelijk omdat de som van de hoeken van de driehoek groter dan 180° zou zijn

$\boxed{3 \quad a = 3,3;\, b = 5,2 \text{ en } \alpha = 33°50'. \text{ Bereken } \beta.}$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} \approx 0,8773 \quad \Rightarrow \quad \beta = 61°19'27''$$

of $\beta = 180° - 61°19'27'' = 118°40'33''$

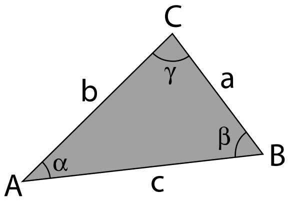
Opdracht 32 bladzijde 28

In totaal hebben we zeven formules die verbanden tussen hoeken en/of zijden van willekeurige driehoeken uitdrukken. We kunnen ze in drie groepen onderbrengen.

cosinusregel	sinusregel	hoekensom
1a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ 1b $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ 1c $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$	2a $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$ 2b $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ 2c $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$	3 $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Beschouw vier situaties waarin drie variabelen gegeven zijn.

1 Gegeven : $a = 3, \beta = 110°, c = 4$ $\quad$ (ZHZ)
2 Gegeven : $a = 5, \alpha = 30°, \gamma = 70°$ $\quad$ (ZHH)
3 Gegeven : $b = 4, c = 3, \beta = 60°$ $\quad$ (ZZH)
4 Gegeven : $a = 10, b = 4, c = 9$ $\quad$ (ZZZ)



Beantwoord voor elke situatie telkens de onderstaande twee vragen.

a Welke vierde variabele kun je hier rechtstreeks uit berekenen en met welke van de formules hierboven? Bereken ze.

b Geef voor de overblijvende twee variabelen telkens de formule waarmee je ze kunt berekenen.

Oplossing

1 a Met de formule 1b kun je b berekenen: $b = 5,76$.

b Je kunt nu α (of γ) berekenen met 1a of 2a (respectievelijk 1c of 2b) en vervolgens γ (of α) met 3.

2 a Met 3 kan β berekend worden: $\beta = 80°$.

b Vervolgens kunnen b en c berekend worden met 2a en 2c.

3 a Met 2b kan γ berekend worden: $\gamma = 40°30'19''$.

b Formule 3 geeft α en 1a (of 2a of 2c) laat toe om a te berekenen.

4 a Met 1a, 1b en 1c kunnen α, β respectievelijk γ rechtstreeks berekend worden:

$\alpha = 92°23'17'', \beta = 23°33'23'', \beta = 64°3'20''$.

b Zie a.

Opdracht 33 bladzijde 31

Bereken de ontbrekende zijden en hoeken in de driehoek ABC.

$\boxed{1 \quad c = 187 \qquad \alpha = 63° \qquad \beta = 41°}$

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 76°$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = 171,72$$

$$\text{en} \quad b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = 126,44$$

$\boxed{2 \quad a = 24 \qquad b = 31 \qquad c = 50}$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 21°27'52"$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = 28°12'23"$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 130°19'45"$$

$\boxed{3 \quad a = 18,6 \qquad b = 34,2 \qquad \gamma = 62°30'}$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \Rightarrow \quad c = 30,47$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 32°47'20"$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Rightarrow \quad \beta = 84°42'40"$$

$\boxed{4 \quad b = 12,7 \qquad \beta = 28° \qquad \gamma = 71°}$

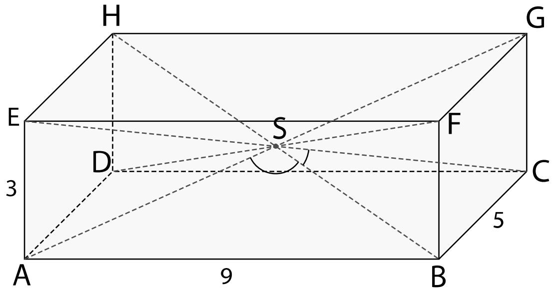
$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 81°$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} = 26,72$$

$$\text{en} \quad c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta} = 25,58$$

Opdracht 34 bladzijde 31

Een balk met als grondvlak ABCD heeft als lengte $|AB| = 9$, als breedte $|BC| = 5$ en als hoogte $|AE| = 3$. S is het snijpunt van de ruimtediagonalen. Bereken de hoeken $A\hat{S}B$ en $B\hat{S}C$.

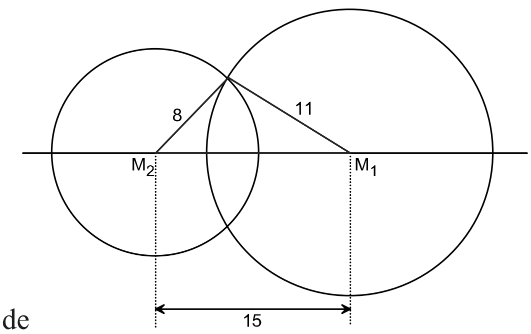


Oplossing

- In ΔBCG geldt: $|BG|^2 = |BC|^2 + |GC|^2 \quad \Rightarrow \quad |BG| = \sqrt{34}$
  In ΔABG geldt: $|AG|^2 = |AB|^2 + |BG|^2 \quad \Rightarrow \quad |AG| = \sqrt{115} = 2 \cdot |AS|$
  In ΔABS zijn de drie zijden nu gekend.
  Met de cosinusregel vinden we: $\cos A\hat{S}B = \dfrac{|AS|^2 + |BS|^2 - |AB|^2}{2 \cdot |AS| \cdot |BS|} \quad \Rightarrow \quad A\hat{S}B = 114°7'23"$.
  (Aangezien ΔABG rechthoekig is en ΔABS gelijkbenig, zijn er verschillende andere oplossingswijzen.)
- Uit de symmetrie van de figuur weten we dat $|CS| = |BS| = \dfrac{\sqrt{115}}{2}$, zodat we opnieuw met de cosinusregel kunnen werken.
  $B\hat{S}C = 55°34'57"$

Opdracht 35 bladzijde 31

De cirkel c_1 heeft als middelpunt M_1 en als straal $r_1 = 11$.
De cirkel c_2 heeft als middelpunt M_2 en als straal $r_2 = 8$.
$|M_1M_2| = 15$
Bereken de hoek gevormd door de stralen naar één van de snijpunten van beide cirkels.



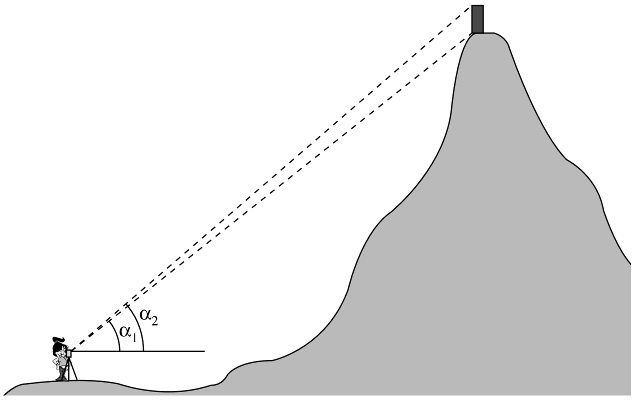
Oplossing

Aangezien de drie zijden gekend zijn, kan elke hoek met de cosinusregel gevonden worden.
De gevraagde hoek is 103° 8’ 12”.

Opdracht 36 bladzijde 32

Charlotte wil de hoogte van een berg meten. Op de berg staat een toren van 18 m hoog. Vanuit een punt in het dal meet ze voor de elevatiehoeken α_1 en α_2 van de voet en de top van de toren resp. 38°30' en 39°48'.

Hoe hoog ligt de bergtop boven het dal als de ooghoogte van de theodoliet, het apparaat waarmee ze die hoeken meet, 1,50 m is?



Oplossing

Om $|AD|$ te kunnen berekenen, hebben we $|AC|$ of $|BC|$ nodig.

Om in ΔABC de zijde $|AC|$ te berekenen, hebben we $\hat{B}$ nodig.

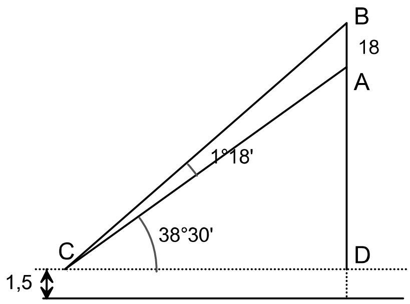
Aangezien $B\hat{C}D = 39°48'$, is $\hat{B} = 50°12'$.

In ΔABC geldt:

$$\frac{|AC|}{\sin \hat{B}} = \frac{|AB|}{\sin A\hat{C}B} \quad \Rightarrow \quad |AC| = \frac{18 \cdot \sin 50°12'}{\sin 1°18'} = 609,55\,.$$

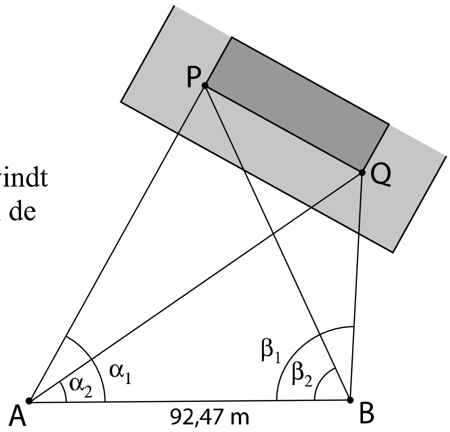
In ΔACD geldt: $|AD| = |AC| \cdot \sin 38°30' = 379,45$.

Tellen we hier 1,5 bij op, dan vinden we de totale hoogte: $380,95$.



De bergtop ligt 380,95 m boven het dal.

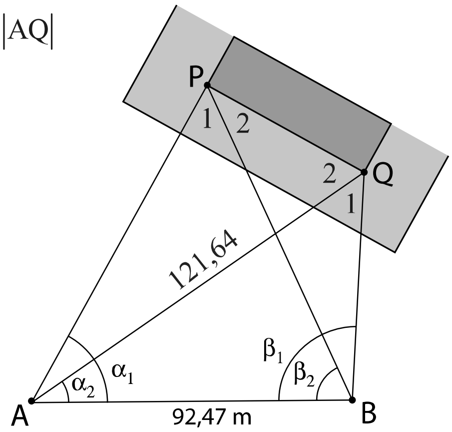
Opdracht 37 bladzijde 32



Dries wil de lengte |PQ| van een kasteelmuur meten.
De punten P en Q zijn ontoegankelijk. Hij zet daarom stokken in de toegankelijke punten A en B.
De afstand |AB| meet hij met een afstandsmeter. Hij vindt 92,47 m. Daarna meet hij met een theodoliet vanuit A de hoeken $\alpha_1 = 61°42'$ en $\alpha_2 = 36°30'$ en vanuit B de hoeken $\beta_1 = 94°12'$ en $\beta_2 = 65°48'$.

Bepaal de afstand |PQ|.

Oplossing



$|PQ|$ kan in ΔAPQ berekend worden indien $|AP|$ en $|AQ|$ gekend zijn.

$|AQ|$ kunnen we rechtstreeks in ΔABQ berekenen:

$$\frac{|AQ|}{\sin\beta_1} = \frac{92,47}{\sin\hat{Q}_1} \quad \text{met } \hat{Q}_1 = 180° - \alpha_2 - \beta_1$$

$$\Rightarrow \quad |AQ| = \frac{92,47 \cdot \sin 94°12'}{\sin 49°18'} = 121,64$$

In ΔABP kunnen we $|AP|$ berekenen:

$$\frac{|AP|}{\sin\beta_2} = \frac{92,47}{\sin\hat{P}_1} \quad \text{met } \hat{P}_1 = 180° - \alpha_1 - \beta_2$$

$$\Rightarrow \quad |AP| = \frac{92,47 \cdot \sin 65°48'}{\sin 52°30'} = 106,31$$

Tenslotte vinden we in ΔAPQ:

$$|PQ|^2 = |AP|^2 + |AQ|^2 - 2 \cdot |AP| \cdot |AQ| \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \quad \Rightarrow \quad |PQ| = 51,93$$

De afstand $|PQ|$ is gelijk aan 51,93 m.

Vanaf hier zullen we gebruik maken van de drie programmaatjes op bladzijde 33 telkens er zich één van de 'congruentiegevallen' ZZZ, ZHZ of HZH voordoet.

Opdracht 38 bladzijde 36

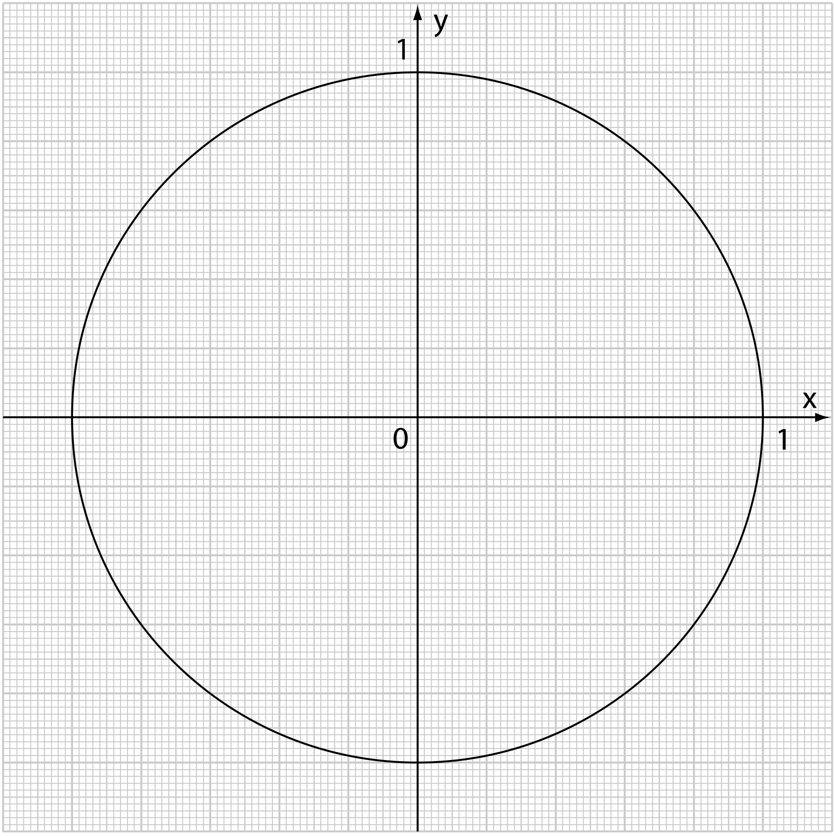
Teken het beeldpunt van de hoek en lees op de goniometrische cirkel de sinus en de cosinus van deze hoek bij benadering af. Controleer met je rekentoestel.

1 $\alpha = 72°$ met beeldpunt A

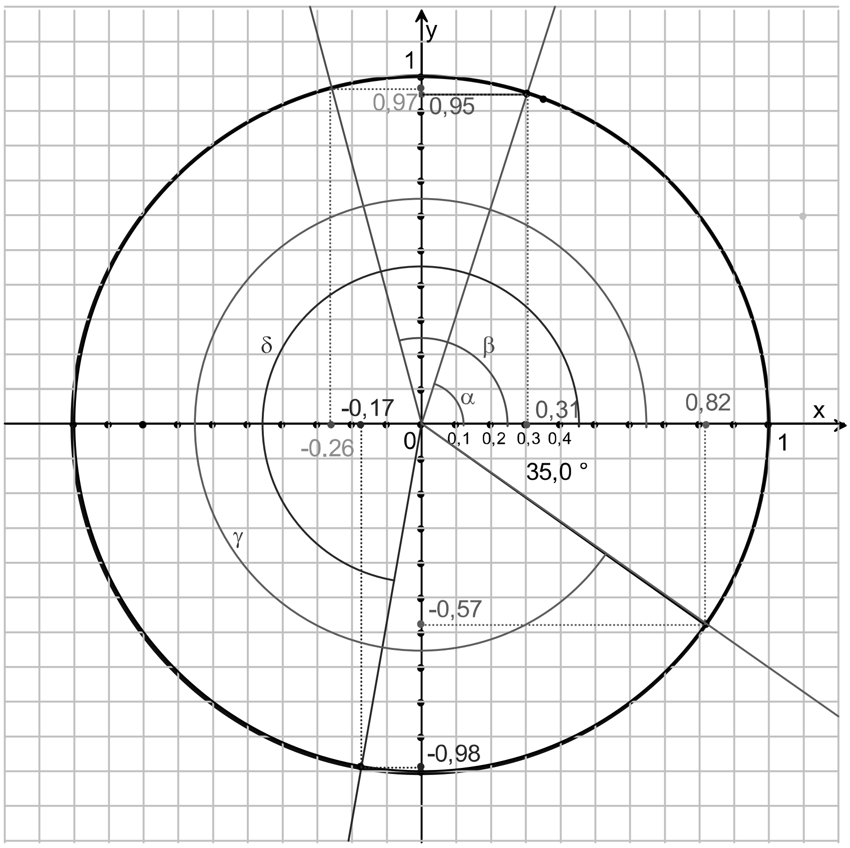
2 $\beta = 105°$ met beeldpunt B

3 $\gamma = 325°$ met beeldpunt C

4 $\delta = 260°$ met beeldpunt D



Oplossing



1 $\alpha = 72°$ met beeldpunt A

$\cos 72° = 0,31$ Rekentoestel: $\cos 72° = 0,31$

$\sin 72° = 0,95$ $\sin 72° = 0,95$

2 $\beta = 105°$ met beeldpunt B

$\cos 105° = -0,26$ Rekentoestel: $\cos 105° = -0,26$

$\sin 105° = 0,97$ $\sin 105° = 0,97$

3 $\gamma = 325°$ met beeldpunt C

$\cos 325° = 0,82$ Rekentoestel: $\cos 325° = 0,82$

$\sin 325° = -0,57$ $\sin 325° = -0,57$

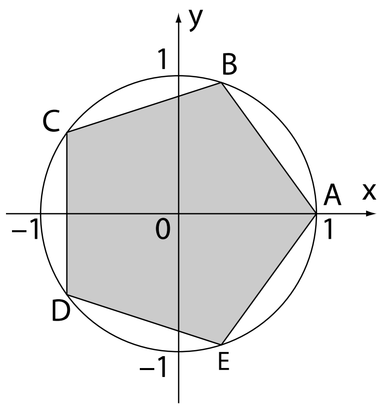
4 $\delta = 260°$ met beeldpunt D

$\cos 260° = -0,17$ Rekentoestel: $\cos 260° = -0,17$

$\sin 260° = -0,98$ $\sin 260° = -0,98$

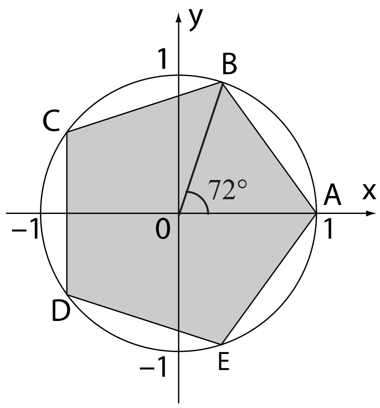
Opdracht 39 bladzijde 37

Geef tot op twee cijfers na de komma de coördinaten van de hoekpunten van de regelmatige vijfhoek ABCDE, ingeschreven in de goniometrische cirkel.



Oplossing

$$\text{co}(A) = (1, 0)$$
$$\text{co}(B) = (\cos 72°, \sin 72°) = (0{,}31;\ 0{,}95)$$
$$\text{co}(C) = (\cos 144°, \sin 144°) = (-0{,}81;\ 0{,}59)$$



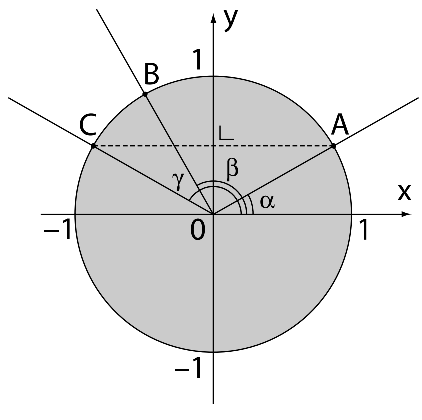
Wegens de symmetrie t.o.v. de x-as kunnen de coördinaten van D en E hier uit afgeleid worden:

$$\text{co}(D) = (-0{,}81;\ -0{,}59)$$
$$\text{co}(E) = (0{,}31;\ -0{,}95)$$

Opdracht 40 bladzijde 37

Welke van de volgende uitspraken zijn waar?

1	$\cos\alpha > 0$	6	$\tan\alpha = \tan\gamma$
2	$\sin\beta > 0$	7	$\cos\beta < \cos\gamma$
3	$\tan\gamma > 0$	8	$\sin\gamma < \sin\beta$
4	$\cos\alpha = \cos\gamma$	9	$\tan\alpha < \tan\beta$
5	$\sin\alpha = \sin\gamma$	10	$\cos\alpha < \sin\gamma$



Oplossing

De antwoorden kunnen afgelezen worden op de figuur.

De uitspraken 1, 2, 5 en 8 zijn waar.

Opdracht 41 bladzijde 37

Vereenvoudig.

$\boxed{1 \quad 1-\cos^2\alpha}$

$$1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

$\boxed{2 \quad \dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}}$

$$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \sin\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha$$

$\boxed{3 \quad \cos\alpha+\sin\alpha\cdot\tan\alpha}$

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\tan\alpha &= \cos\alpha+\sin\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ &= \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\\ &= \frac{1}{\cos\alpha}\end{aligned}$$

$\boxed{4 \quad \cot\alpha\tan\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$

$$\begin{aligned}\cot\alpha\tan\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\\ &= \quad 1 \quad - \quad 1\\ &= 0\end{aligned}$$

$\boxed{5 \quad \dfrac{\cos\alpha}{\tan\alpha}+\sin\alpha}$

$$\begin{aligned}\frac{\cos\alpha}{\tan\alpha}+\sin\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}+\sin\alpha\\ &= \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\sin\alpha\\ &= \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\\ &= \frac{1}{\sin\alpha}\end{aligned}$$

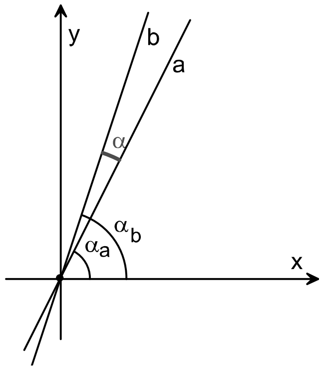
$\boxed{6 \quad \dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}$

$$\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha$$

Opdracht 42 bladzijde 38

Bereken de scherpe hoek tussen de gegeven rechten.

$\boxed{1 \quad a \leftrightarrow y = 2x \ \text{ en } \ b \leftrightarrow y = 3x}$

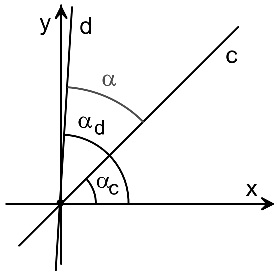


$\tan \alpha_a = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_a = 63°26'6''$

$\tan \alpha_b = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_b = 71°33'54''$

$\alpha = \alpha_b - \alpha_a = 8°7'48''$

$\boxed{2 \quad c \leftrightarrow y = x \ \text{ en } \ d \leftrightarrow y = 100x}$

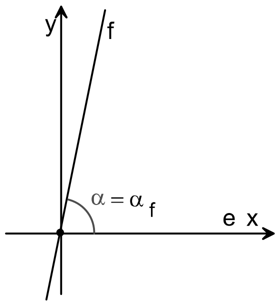


$\alpha_c = 45°$

$\tan \alpha_d = 100 \quad \Rightarrow \quad \alpha_d = 89°25'37''$

$\alpha = \alpha_d - \alpha_c = 44°25'37''$

$\boxed{3 \quad e \leftrightarrow y = 0 \ \text{ en } \ f \leftrightarrow y = 5x}$

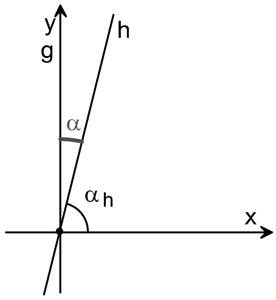


e valt samen met de x-as.

$\tan \alpha_f = 5 \quad \Rightarrow \quad \alpha_f = 78°41'24''$

Dit is tevens de hoek tussen e en f.

$\boxed{4 \quad g \leftrightarrow x = 0 \ \text{ en } \ h \leftrightarrow y = 4x}$



g valt samen met de y-as.

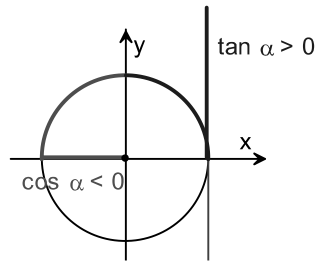
$\tan \alpha_h = 4 \quad \Rightarrow \quad \alpha_h = 75°57'50''$

$\Rightarrow \quad \alpha = 90° - \alpha_h = 14°2'10''$

Opdracht 43 bladzijde 38

De hoek α ligt tussen 0° en 180°. Geef aan of de volgende combinaties van goniometrische getallen mogelijk of onmogelijk zijn en verklaar.

$\boxed{1 \quad \cos\alpha < 0 \text{ en } \tan\alpha > 0}$

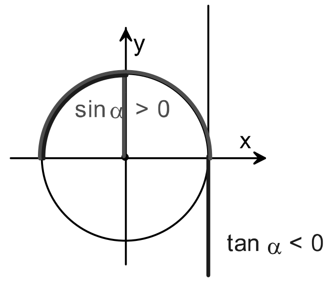


$\cos\alpha < 0$ als α in het tweede kwadrant ligt.

$\tan\alpha > 0$ als α in het eerste kwadrant ligt.

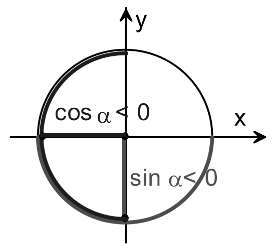
$\Rightarrow$ De voorgestelde combinatie kan niet.

$\boxed{2 \quad \sin\alpha > 0 \text{ en } \tan\alpha < 0}$



De combinatie is mogelijk want voor hoeken in het tweede kwadrant is de sinus positief en de tangens negatief.

$\boxed{3 \quad \sin\alpha < 0 \text{ en } \cos\alpha < 0}$



De combinatie is niet mogelijk voor hoeken tussen 0° en 180°, aangezien de sinus van die hoeken altijd positief is.

$\boxed{4 \quad \cot\alpha > 0 \text{ en } \cos\alpha > 0}$

Aangezien de meetkundige interpretatie van de cotangens niet gekend is, moeten we hier anders te werk gaan.

kwadrant	I	II
sin	+	+
cos	+	–
tan	+	–
cot	+	–

Een overzicht van de mogelijk tekens leert ons dat de gegeven combinatie mogelijk is.

$\boxed{5 \quad \cot\alpha < 0 \text{ en } \cos\alpha < 0}$

Uit de tabel bij de vorige vraag blijkt dat ook deze combinatie mogelijk is.

$\boxed{6 \quad \tan\alpha < 0 \text{ en } \cot\alpha > 0}$

Aangezien $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ hebben de beide goniometrische getallen van eenzelfde hoek altijd hetzelfde teken. De voorgestelde combinatie is niet mogelijk.

Opdracht 44 bladzijde 38

Bewijs de volgende gelijkheden.

1 $\left(1+\sin\alpha\right)\left(1-\sin\alpha\right)=\left(\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}\right)^2$

Eerste werkwijze: uitwerken van het ene lid naar het andere

Hier werken we uit van rechts naar links.

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}\right)^2=\left(\frac{\sin\alpha}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right)^2=\left(\sin\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\left(1+\sin\alpha\right)\left(1-\sin\alpha\right)$$

Tweede werkwijze: beide leden tegelijk uitwerken

$$\left(1+\sin\alpha\right)\left(1-\sin\alpha\right)=\left(\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}\right)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$1-\sin^2\alpha=\left(\frac{\sin\alpha}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos^2\alpha=\left(\sin\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos^2\alpha=\cos^2\alpha$$

2 $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$

Tweede werkwijze: beide leden tegelijk uitwerken

$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$\boxed{3 \quad \sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}_{\substack{\parallel \\ 1}}\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$\boxed{4 \quad \dfrac{\cot\alpha}{1+\cot^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha}$

$$\frac{\cot\alpha}{1+\cot^2\alpha} = \sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{1} = \sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

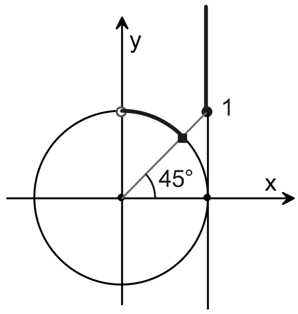
$$\Updownarrow$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\alpha = \sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

Opdracht 45 bladzijde 38

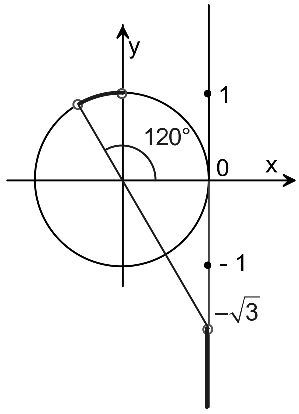
Geef alle hoeken α van 0° tot en met 180° die voldoen aan de volgende voorwaarden.
Geef je redenering weer in een schets.

$\boxed{1 \quad \tan\alpha \geq 1}$



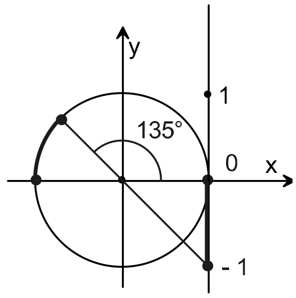
$\tan\alpha \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 45° \leq \alpha < 90°$

$\boxed{3 \quad \tan\alpha < -\sqrt{3}}$



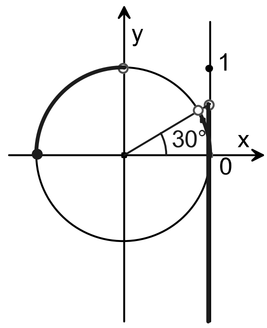
$\tan\alpha < -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 90° < \alpha < 120°$

$\boxed{2 \quad -1 \leq \tan\alpha \leq 0}$



$-1 \leq \tan\alpha \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 135° \leq \alpha \leq 180°$

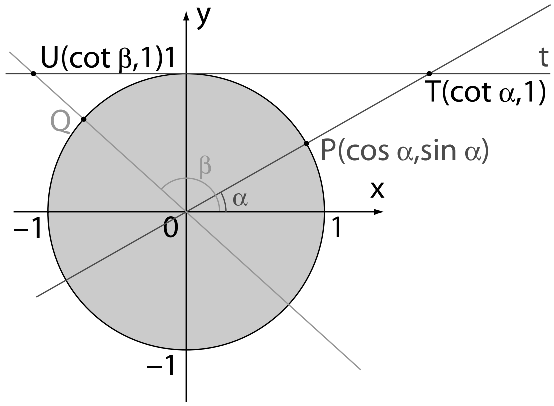
$\boxed{4 \quad \tan\alpha < \frac{\sqrt{3}}{3}}$



$\tan\alpha < \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 0° \leq \alpha < 30° \text{ of } 90° < \alpha \leq 180°$

Opdracht 46 bladzijde 39

De afbeelding illustreert de **meetkundige betekenis van de cotangens** van een hoek α.
Formuleer en verklaar deze meetkundige betekenis.



Oplossing

De cotangens van een hoek is de x-coördinaat van het snijpunt van het eindbeen van die hoek met de raaklijn in $(0,1)$ aan de goniometrische cirkel.

Verklaring

Is $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ het beeldpunt van α, dan geldt $OP \leftrightarrow y = \tan\alpha \cdot x$.

De raaklijn aan de goniometrische cirkel in $(0,1)$ heeft als vergelijking $y = 1$.

Om de coördinaten van hun snijpunten T te bepalen, lossen we het stelsel $\begin{cases} y = \tan\alpha \cdot x \\ y = 1 \end{cases}$ op.

We vinden $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\tan\alpha} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cot\alpha \\ y = 1 \end{cases}$.

Er geldt dus $co(T) = (\cot\alpha, 1)$.

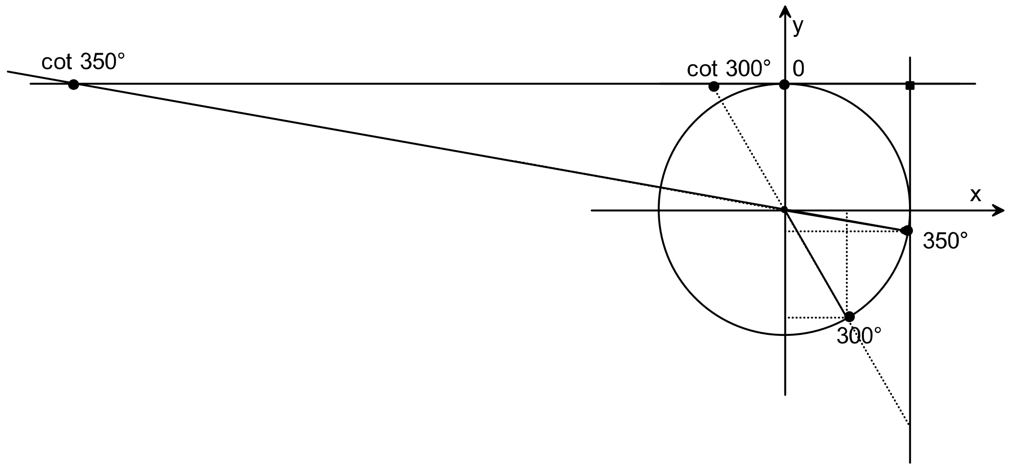
Opdracht 47 bladzijde 39

Welke ongelijkheid is fout?

A $\sin 300° < \sin 350°$ B $\cos 300° < \cos 350°$ C $\sin 300° < \cos 350°$

D $\tan 300° < \tan 350°$ E $\cot 300° < \cot 350°$

Oplossing



Uit de figuur blijkt:

$\sin 300° < \sin 350°$

$\cos 300° < \cos 350°$

$\sin 300° < \cos 350°$

$\tan 300° < \tan 350°$

$\boxed{\cot 300° > \cot 350°}$

Uitspraak E is fout.

(Wie de grafische interpretatie van de cotangens niet kent, kan het juiste antwoord op 2 manieren vinden.

- Door eliminatie: de andere vier ongelijkheden zijn zeker juist.
- Door het verband $\cot \alpha = \dfrac{1}{\tan \alpha}$ te gebruiken.

  Voor negatieve getallen a en b geldt: $a < b \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

  Dus: $\tan 300° < \tan 350° < 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\tan 300°} > \dfrac{1}{\tan 350°} \quad \Rightarrow \quad \cot 300° > \cot 350°$)

Opdracht 48 bladzijde 39

Bewijs de volgende gelijkheden.

1 $\dfrac{\tan^2\alpha-1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\frac{\tan^2\alpha-1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

2 $\dfrac{1-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}=\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha$

$$\frac{1-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1+\sin^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha\cdot\left(1+\sin^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$$
$$=1+\sin^2\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha$$

3 $(3\cos\alpha+4\sin\alpha)^2+(3\sin\alpha-4\cos\alpha)^2=25$

$$\begin{aligned}&(3\cos\alpha+4\sin\alpha)^2+(3\sin\alpha-4\cos\alpha)^2\\&=9\cos^2\alpha+24\cos\alpha\sin\alpha+16\sin^2\alpha+9\sin^2\alpha-24\sin\alpha\cos\alpha+16\cos^2\alpha\\&=25\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\\&=25\end{aligned}$$

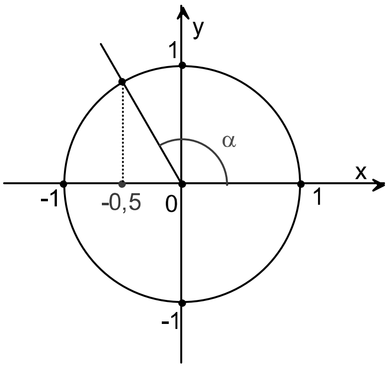
4 $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cot\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1-\tan\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha}{1-\cot\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1-\tan\alpha}&=\frac{\sin\alpha}{1-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}-\frac{\cos\alpha}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\\&=\frac{\sin\alpha}{\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}}-\frac{\cos\alpha}{\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}\\&=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}\\&=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\\&=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\\&=\frac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha}\end{aligned}$$

Opdracht 49 bladzijde 40

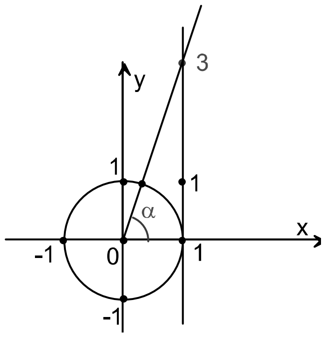
Teken en bereken de hoek(en) α tussen 0° en 180° waarvoor geldt

$\boxed{1 \quad \cos\alpha = -0{,}5}$



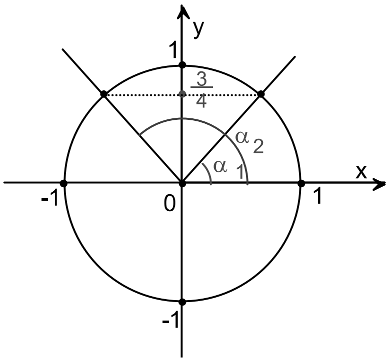
$\cos\alpha = 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 120°$

$\boxed{3 \quad \tan\alpha = 3}$



$\tan\alpha = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 71°33'54''$

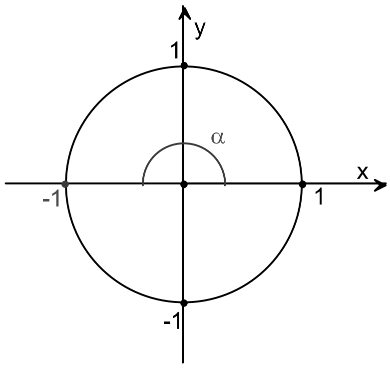
$\boxed{2 \quad \sin\alpha = \dfrac{3}{4}}$



$\sin\alpha = \dfrac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 48°35'25''$

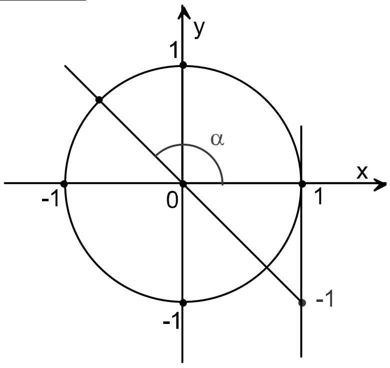
$\text{of} \quad \alpha = 131°24'35''$

$\boxed{4 \quad \cos\alpha = -1}$



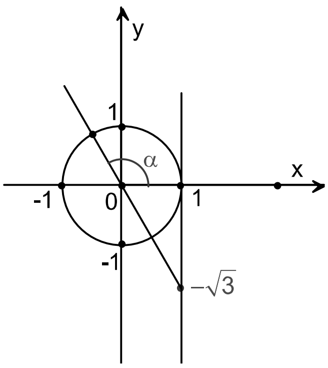
$\cos\alpha = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 180°$

$\boxed{5 \quad \tan\alpha = -1}$



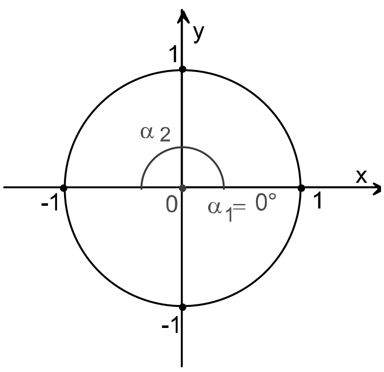
$$\tan\alpha = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 135°$$

$\boxed{6 \quad \tan\alpha = -\sqrt{3}}$



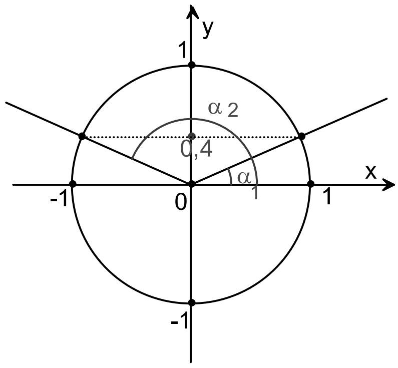
$$\tan\alpha = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 120°$$

$\boxed{7 \quad \sin\alpha = 0}$



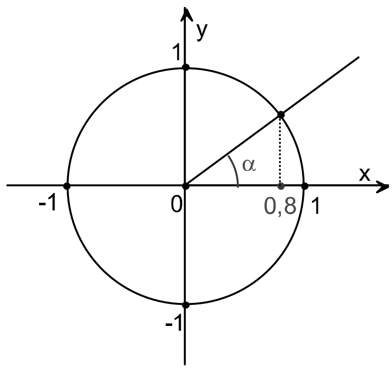
$$\sin\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0° \text{ of } \alpha = 180°$$

$\boxed{8 \quad \sin\alpha = 0,4}$



$$\sin\alpha = 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 23°34'41''$$
$$\text{of } \alpha = 156°25'19''$$

$\boxed{9 \quad \cos\alpha = 0,8}$



$$\cos\alpha = 0,8 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 36°52'12''$$

$\boxed{10 \quad \sin\alpha = 1,01}$

$$\sin\alpha = 1,01 \quad \rightarrow \quad \text{onmogelijk}$$

Opdracht 50 bladzijde 40

Bepaal de hoek α tussen 0° en 180° als $\sin\ \alpha = 0,62$ met α in het tweede kwadrant.

Oplossing

Voor hoeken tussen 0° en 180° vinden we

$\sin\alpha = 0,62 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 38°18'58''$ of $\alpha = 141°41'2''$.

Enkel deze laatste hoek ligt in het tweede kwadrant.

Opdracht 51 bladzijde 40

Vereenvoudig.

1 $\dfrac{\cos 125°}{\cos 55°}$

$$\frac{\cos 125°}{\cos 55°} = \frac{-\cos 55°}{\cos 55°} = -1$$

2 $\dfrac{\sin 35°}{\cos 55°}$

$$\frac{\sin 35°}{\cos 55°} = \frac{\cos 55°}{\cos 55°} = 1$$

3 $\dfrac{\cos 90°}{\cos 100°}$

$$\frac{\cos 90°}{\cos 100°} = \frac{0}{\cos 100°} = 0$$

4 $\dfrac{\tan 45°}{\sin 135°}$

$$\frac{\tan 45°}{\sin 135°} = \frac{1}{\sin 45°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Opdracht 52 bladzijde 40

Vereenvoudig.

1 $\sin\alpha \cdot \cos(180° - \alpha) + \cos\alpha \cdot \sin(180° - \alpha)$

$$\sin\alpha \cdot \cos(180° - \alpha) + \cos\alpha \cdot \sin(180° - \alpha) = -\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 0$$

2 $\dfrac{\sin(180° - \alpha)}{\cos\alpha}$

$$\frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$\boxed{3 \quad \sin\alpha\cdot\cos(90°-\alpha)+\cos\alpha\cdot\sin(90°-\alpha)}$

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cdot\cos(90°-\alpha)+\cos\alpha\cdot\sin(90°-\alpha)&=\sin\alpha\cdot\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\cos\alpha\\&=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\\&=1\end{aligned}$$

$\boxed{4 \quad \tan\alpha\cdot\tan(90°-\alpha)}$

$$\tan\alpha\cdot\tan(90°-\alpha)=\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\tan\alpha\cdot\frac{1}{\tan\alpha}=1$$

Opdracht 53 bladzijde 41

Vul een minteken in waar nodig.

$\boxed{1 \quad \sin(90°+\alpha)=\ldots\sin(90°-\alpha)}$

$$\sin(90°+\alpha)=\sin\big(180°-(90°+\alpha)\big)=\sin(90°-\alpha)$$

$\boxed{2 \quad \tan(110°+\alpha)=\ldots\tan(70°-\alpha)}$

$$\tan(110°+\alpha)=-\tan\big(180°-(110°+\alpha)\big)=-\tan(70°-\alpha)$$

$\boxed{3 \quad \sin(40°-\alpha)=\ldots\cos(50°+\alpha)}$

$$\sin(40°-\alpha)=\cos\big(90°-(40°-\alpha)\big)=\cos(50°+\alpha)$$

$\boxed{4 \quad \cot(55°+\alpha)=\ldots\tan(35°-\alpha)}$

$$\cot(55°+\alpha)=\tan\big(90°-(55°+\alpha)\big)=\tan(35°-\alpha)$$

$\boxed{5 \quad \cos(120°-2\alpha)=\ldots\cos(2\alpha+60°)}$

$$\cos(120°-2\alpha)=-\cos\big(180°-(120°-2\alpha)\big)=-\cos(60°+2\alpha)$$

$\boxed{6 \quad \cos(90°+\alpha)=\ldots\sin\alpha}$

$$\cos(90°+\alpha)=-\cos\big(180°-(90°+\alpha)\big)=-\cos(90°-\alpha)=-\sin\alpha$$

Opdracht 54 bladzijde 41

Vul aan met één van de goniometrische getallen en eventueel een minteken.

1 $\cos 30° = \ldots\ldots\, 60°$

$$\cos 30° = \sin 60°$$

2 $\sin 120° = \ldots\ldots\, 60°$

$$\sin 120° = \sin 60°$$

3 $\cot 170° = \ldots\ldots\, 10°$

$$\cot 170° = -\cot 10°$$

4 $\cos(40° - \alpha) = \ldots\ldots\,(140° + \alpha)$

$$\cos(40° - \alpha) = -\cos\big(180° - (40° - \alpha)\big) = -\cos(140° + \alpha)$$

5 $\tan(30° + \alpha) = \ldots\ldots\,(150° - \alpha)$

$$\tan(30° + \alpha) = -\tan\big(180° - (30 + \alpha)\big) = -\tan(150° - \alpha)$$

6 $\cot(105° - \alpha) = \ldots\ldots\,(\alpha - 15°)$

$$\cot(105° - \alpha) = \tan\big(90° - (105° - \alpha)\big) = \tan(\alpha - 15°)$$

Opdracht 55 bladzijde 41

α is een scherpe hoek. Welke van de volgende getallen zijn gelijk?
$\sin\alpha, \cos\alpha, -\sin\alpha, -\cos\alpha, \sin(90° - \alpha), \cos(90° - \alpha), -\sin(90° - \alpha),$
$-\cos(90° - \alpha), \sin(90° + \alpha), \cos(90° + \alpha), -\sin(90° + \alpha), -\cos(90° + \alpha),$
$\sin(180° - \alpha), \cos(180° - \alpha), -\sin(180° - \alpha), -\cos(180° - \alpha)$

Oplossing

'S' & 'C' staan voor supplementaire resp. complementaire hoeken.

$$\sin(180° - \alpha) \overset{S}{=} \sin\alpha \overset{C}{=} \cos(90° - \alpha) \overset{S}{=} -\cos(90° + \alpha)$$

$$-\sin(180° - \alpha) \overset{S}{=} -\sin\alpha \overset{C}{=} -\cos(90° - \alpha) \overset{S}{=} \cos(90° + \alpha)$$

$$-\cos(180° - \alpha) \overset{S}{=} \cos\alpha \overset{C}{=} \sin(90° - \alpha) \overset{S}{=} \sin(90° + \alpha)$$

$$\cos(180° - \alpha) \overset{S}{=} -\cos\alpha \overset{C}{=} -\sin(90° - \alpha) \overset{S}{=} -\sin(90° + \alpha)$$

Opdracht 56 bladzijde 41

Vereenvoudig, als α, β en γ de hoeken van een driehoek zijn.

$$\boxed{1 \quad \frac{\sin\alpha+\sin(\beta+\gamma)}{\tan(\beta+\gamma)}}$$

$$\frac{\sin\alpha+\sin(\beta+\gamma)}{\tan(\beta+\gamma)}=\frac{\sin\alpha+\sin(180°-\alpha)}{\tan(180°-\alpha)}=\frac{2\sin\alpha}{-\tan\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=2\sin\alpha\cdot\left(-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=-2\cos\alpha$$

$$\boxed{2 \quad \sin^2\frac{\gamma}{2}\cdot\left(1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\gamma}{2}\cdot\left(1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)&=\sin^2\frac{\gamma}{2}\cdot\left(1+\tan^2\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\right)\\&=\sin^2\frac{\gamma}{2}\cdot\left(1+\cot^2\frac{\gamma}{2}\right)\\&=\sin^2\frac{\gamma}{2}\cdot\left(1+\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}\right)\\&=\sin^2\frac{\gamma}{2}\cdot\left(\frac{\sin^2\frac{\gamma}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}\right)\\&=1\end{aligned}$$

Opdracht 57 bladzijde 41

Kies het juiste antwoord:

in een driehoek met hoeken α, β en γ is $\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$ gelijk aan

A $\cos\alpha$	C $\cos\gamma$	E $\sin\beta$
B $\cos\beta$	D $\sin\alpha$	F $\sin\gamma$

Oplossing

$$\alpha+\beta+\gamma=180° \quad\Rightarrow\quad \beta+\gamma=180°-\alpha \quad\Rightarrow\quad \frac{\beta+\gamma}{2}=90°-\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(90°-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$$

Antwoord D is het juiste antwoord.

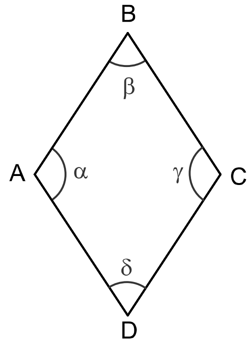
Opdracht 58 bladzijde 41

α, β, γ en δ zijn de opeenvolgende hoeken van een ruit. Vereenvoudig.

$\boxed{1 \quad \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta}$

In een ruit geldt : $\alpha = \gamma \,;\, \beta = \delta \,;\, \alpha + \beta = 180°$

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta &= \sin\alpha + \sin(180° - \alpha) + \sin\alpha + \sin(180° - \alpha)\\ &= \sin\alpha + \sin\alpha + \sin\alpha + \sin\alpha\\ &= 4\sin\alpha\end{aligned}$$



$\boxed{2 \quad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta}$

In een ruit geldt : $\alpha = \gamma \,;\, \beta = \delta \,;\, \alpha + \beta = 180°$

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta &= \cos\alpha + \cos(180° - \alpha) + \cos\alpha + \cos(180° - \alpha)\\ &= \cos\alpha - \cos\alpha + \cos\alpha - \cos\alpha\\ &= 0\end{aligned}$$

Opdracht 59 bladzijde 42

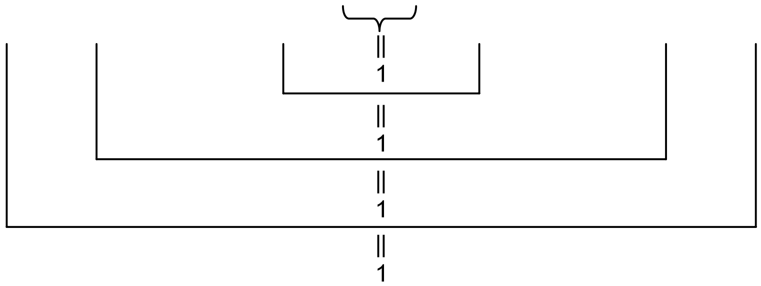
Bereken $\tan 1° \cdot \tan 2° \cdot \tan 3° \cdot ... \cdot \tan 87° \cdot \tan 88° \cdot \tan 89°$.

Oplossing

Alle factoren heffen elkaar op want $\tan\alpha = \cot(90° - \alpha) = \dfrac{1}{\tan(90° - \alpha)}$.

Zo is $\tan 1° = \dfrac{1}{\tan 89°};\ \tan 2° = \dfrac{1}{\tan 88°};\ \tan 3° = \dfrac{1}{\tan 87°};\ \cdots$

$$\tan 1° \cdot \tan 2° \cdot \ \cdots \ \cdot \tan 44° \cdot \underbrace{\tan 45°}_{} \cdot \tan 46° \cdot \ \cdots \ \cdot \tan 88° \cdot \tan 89°$$

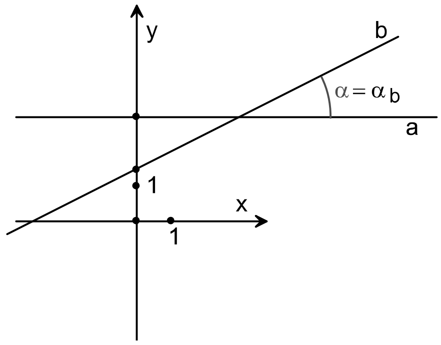


Het product is dus gelijk aan 1.

Opdracht 60 bladzijde 42

Bepaal de scherpe of rechte hoek tussen de rechten a en b.

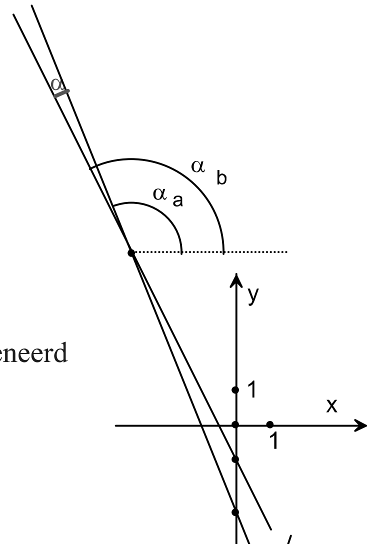
$\boxed{1 \quad a \leftrightarrow y = 3 \text{ en } b \leftrightarrow x - 2y + 3 = 0}$



$b \leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$\tan \alpha_b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_b = 26°33'54"$

$\alpha = \alpha_b = 26°33'54"$



$\boxed{2 \quad a \leftrightarrow 2x + y + 1 = 0 \text{ en } b \leftrightarrow 5x + 2y + 5 = 0}$

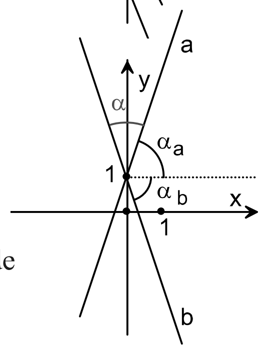
$a \leftrightarrow y = -2x - 1 \qquad \tan \alpha_a = -2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_a = 116°33'54"$

$b \leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x - \frac{5}{2} \qquad \tan \alpha_b = -\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_b = 111°48'5"$

$\alpha = \alpha_a - \alpha_b = 4°45'49"$

Opmerking: er kan ook met negatieve hellingshoeken geredeneerd worden.

$\boxed{3 \quad a \leftrightarrow y = 3x + 1 \text{ en } b \leftrightarrow y = -3x + 1}$

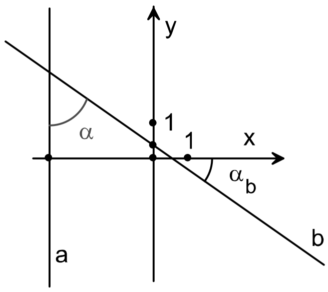


$\tan \alpha_a = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_a = 71°33'54"$

Bijgevolg is $\alpha_b = -71°33'54"$ $\left(\text{of } \alpha_b = 108°26'6"\right)$

De stompe hoek tussen a en b is $2 \cdot 71°33'54" = 143°7'48"$ en dus is de scherpe hoek $36°52'12"$.

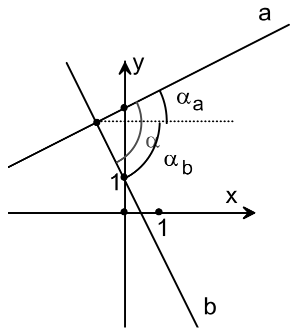
$\boxed{4 \quad a \leftrightarrow x + 3 = 0 \text{ en } b \leftrightarrow 2x + 3y - 1 = 0}$



$b \leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha_b = -33°41'24"$

$\alpha = 90° - 33°41'24" = 56°18'36"$

$\boxed{5 \quad a \leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 3 \text{ en } b \leftrightarrow y = -2x + 1}$

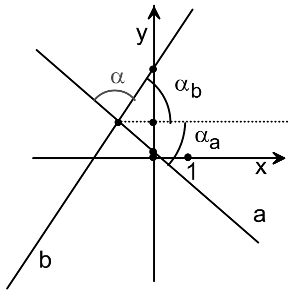


$$\tan\alpha_a = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_a = 26°33'54"$$
$$\tan\alpha_b = -2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_b = -63°26'6"$$
$$\alpha = \alpha_a - \alpha_b = 90°0'0"$$

$\boxed{6 \quad a \leftrightarrow 7x + 8y - 1 = 0 \text{ en } b \leftrightarrow 3x - 2y + 5 = 0}$

$$a \leftrightarrow y = -\frac{7}{8}x + \frac{1}{8} \qquad \tan\alpha_a = -\frac{7}{8} \quad \Rightarrow \quad \alpha_a = -41°11'9"$$
$$b \leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \qquad \tan\alpha_b = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_b = 56°18'36"$$

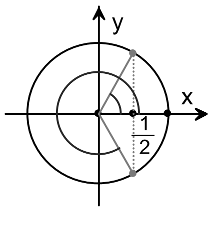
De stompe hoek is $\alpha_b - \alpha_a = 97°29'45"$ zodat de scherpe hoek $82°30'15"$ bedraagt.



Opdracht 61 bladzijde 42

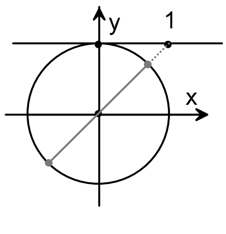
Teken en bereken de hoeken α tussen 0° en 360° waarvoor geldt:

$\boxed{1 \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}}$



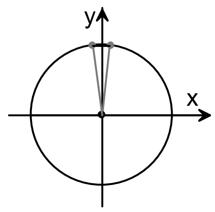
$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha = 60° \text{ of } \alpha = 360° - 60° = 300°$$

$\boxed{2 \quad \cot\alpha = 1}$



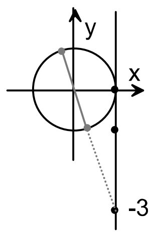
Puur meetkundig blijkt dat $\alpha = 45°$ een eerste oplossing is. De andere is $45° + 180° = 225°$.

$\boxed{3 \quad \sin\alpha = 0,99}$



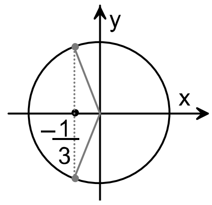
$$\sin\alpha = 0,99 \Leftrightarrow \alpha = 81°53'25''$$
$$\text{of } \alpha = 180° - 81°53'25''$$
$$= 98°6'35''$$

$\boxed{4 \quad \tan\alpha = -3}$



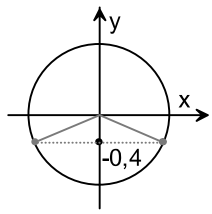
$$\tan\alpha = -3 \Leftrightarrow \alpha = 108°26'6''$$
$$\text{of } \alpha = 108°26'6'' + 180°$$
$$= 288°26'6''$$

$\boxed{5 \quad \cos\alpha = -\frac{1}{3}}$



$$\cos\alpha = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = 109°28'16''$$
$$\text{of } \alpha = 360° - 109°28'16''$$
$$= 250°31'44''$$

$\boxed{6 \quad \sin\alpha = -0,4}$



$\sin\alpha = 0,4 \rightarrow$ Het rekentoestel geeft

$\alpha = -23°34'41''$.

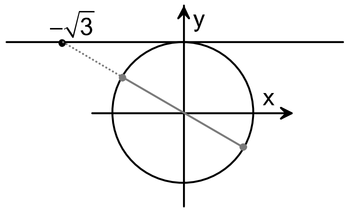
Daaruit volgt dat

$360° - 23°34'41'' = 336°25'19''$ een

mogelijke hoek is. Ook de hoek

$180° + 23°34'41'' = 203°34'41''$ voldoet

$\boxed{7 \quad \cot\alpha = -\sqrt{3}}$

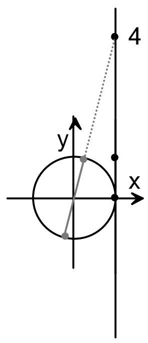


Hier kunnen we de omzetting naar $\tan\alpha$ gebruiken.

$$\cot\alpha = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\tan\alpha} = -\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\Leftrightarrow \tan\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

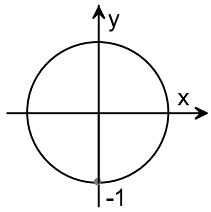
Het rekentoestel geeft $-30°$. De figuur maakt duidelijk dat $-30° + 180° = 150°$ en $-30° + 360° = 330°$ aan de vergelijking voldoen.

$\boxed{8 \quad \tan\alpha = 4}$



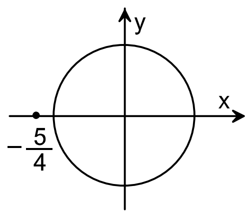
$$\tan\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 75°57'50''$$
$$\text{of } \alpha = 75°57'50'' + 180°$$
$$= 255°57'50''$$

$\boxed{9 \quad \sin\alpha = -1}$



$$\sin\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 270°$$

$\boxed{10 \quad \cos\alpha = -\frac{5}{4}}$



$$\cos\alpha = -\frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad \text{kan niet}$$

Opdracht 62 bladzijde 43

Bereken de ontbrekende zijden en hoeken in de driehoek ABC.

$\boxed{1 \quad a = 13;\, c = 6;\, \beta = 50°}$

ZHZ: $b = 10{,}23$; $\alpha = 103°18'42"$; $\gamma = 26°41'18"$

$\boxed{2 \quad a = 5;\, \beta = 73°23';\, \gamma = 25°14'28"}$

HZH: $\alpha = 81°22'32"$; $b = 4{,}85$; $c = 2{,}16$

$\boxed{3 \quad a = 84;\, b = 112;\, c = 154}$

ZZZ: $\alpha = 32°9'26"$; $\beta = 45°12'26"$; $\gamma = 102°38'8"$

$\boxed{4 \quad b = 4;\, c = 9;\, \gamma = 25°}$

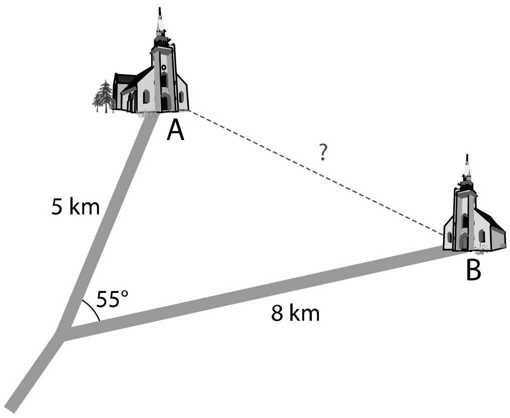
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\gamma}{c} = 0{,}1878 \quad \Rightarrow \quad \beta = 10°49'34"$$

Het supplement van deze hoek is $169°10'26"$. Dat supplement is voor deze driehoek niet mogelijk, want $169°10'26" + \gamma > 180°$.

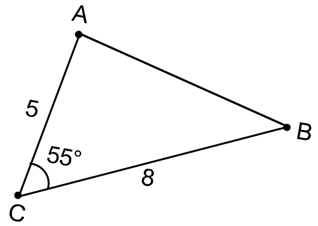
$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 144°10'26"$; $a = 12{,}47$

Opdracht 63 bladzijde 43

Twee rechte wegen maken een hoek van 55°. Vanaf hun kruising is het 5 km wandelen tot aan de kerk van dorp A en 8 km tot aan die van dorp B.



Wat is de afstand tussen beide kerken?



Oplossing

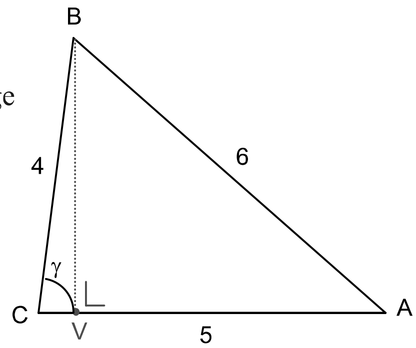
ZHZ: $|AB| = 6{,}57$

De afstand tussen beide kerken is 6,57 km.

Opdracht 64 bladzijde 43

Bereken de oppervlakte van driehoek ABC door eerst één hoek te berekenen, wanneer gegeven is dat a = 4, b = 5 en c = 6.

Oplossing



ZZZ: $\gamma = 82°49'9"$

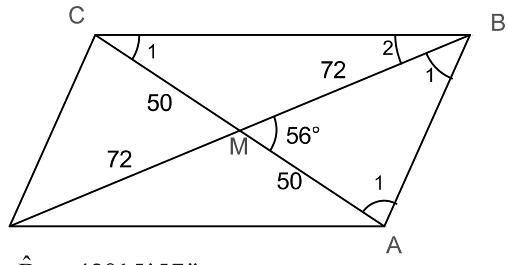
De hoogte van de driehoek berekenen we in de rechthoekige driehoek BCV. $|BV| = 4 \cdot \sin\gamma = 3{,}97$

De oppervlakte is $\dfrac{|AC| \cdot |BV|}{2} = 9{,}92$.

Opdracht 65 bladzijde 43

De diagonalen van een parallellogram hebben als lengten 144 en 100. Ze vormen een hoek van 56°. Bereken de
zijden en de hoeken van dit parallellogram.

Oplossing



In ΔABM (ZHZ): $|AB| = 60{,}48$; $\hat{A}_1 = 80°44'3"$ en $\hat{B}_1 = 43°15'57"$

In ΔBMC (ZHZ): $|BC| = 108{,}21$; $\hat{C}_1 = 33°28'37"$ en $\hat{B}_2 = 22°31'23"$

De zijden van het parallellogram zijn 60,48 en 108,21.

De hoeken zijn $65°47'20"$ $\left(\hat{B}_1 + \hat{B}_2\right)$ en het supplement hiervan, $114°12'40"$.

Opdracht 66 bladzijde 43

1	Bereken de hoeken van ΔABC met $A(0,0)$, $B(5,-1)$ en $C(2,-6)$.

$$a = |BC| = \sqrt{34}\ ;\ b = |CA| = \sqrt{40}\ ;\ c = |AB| = \sqrt{26} \quad (ZZZ)$$
$$\Rightarrow \quad \widehat{A} = 60°15'18"\ ;\ \widehat{B} = 70°20'46"\ ;\ \widehat{C} = 49°23'55"$$

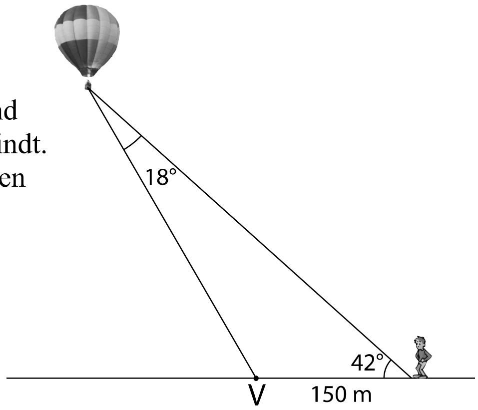
2	Bereken de hoeken van ΔABC met $A(-3,4)$, $B(1,1)$ en $C(4,-7)$.

$$a = |BC| = \sqrt{73}\ ;\ b = |CA| = \sqrt{170}\ ;\ c = |AB| = 5 \quad (ZZZ)$$
$$\Rightarrow \quad \widehat{A} = 20°39'32"\ ;\ \widehat{B} = 147°25'33"\ ;\ \widehat{C} = 11°54'55"$$

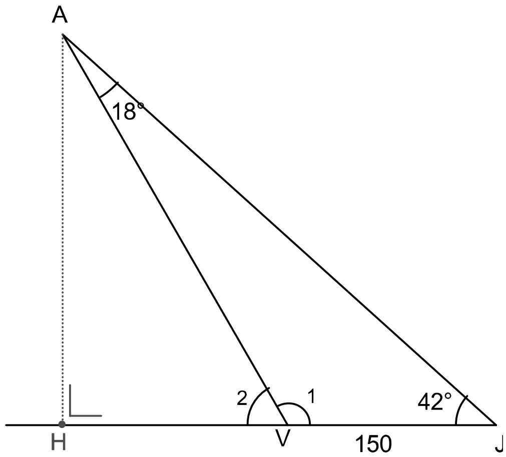
Opdracht 67 bladzijde 44

Aamin bevindt zich in een luchtballon en ziet een hoek van 18° tussen zijn vertrekpunt V en zijn vriend Jonas, die zich op 150 m van het vertrekpunt V bevindt. Van op de plek waar Jonas staat, kan men Aamin zien onder een hoek van 42° t.o.v. een horizontale.

Hoe hoog bevindt Aamin zich?



Oplossing



$\hat{V}_1 = 180° - 18° - 42° = 120°$

In ΔAVJ vinden we (HZH): $|AJ| = 420,38$

$(\text{en } |AV| = 324,80)$.

In ΔAHV geldt $|AH| = |AJ| \cdot \sin 42° = 281,29$

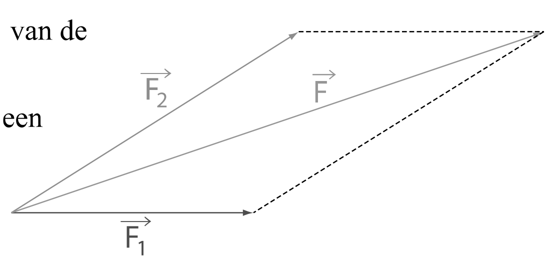
Aamin bevindt zich op een hoogte van 281,29 m.

Opdracht 68 bladzijde 44

Bereken de grootte en de richting van de resultante $\vec{F}$ van de krachten $\vec{F_1}$ en $\vec{F_2}$.

$\vec{F_1}$ heeft een grootte van 500 N (newton) en $\vec{F_2}$ heeft een grootte van 700 N.

De richtingen van beide krachten vormen een hoek van 32°10'.



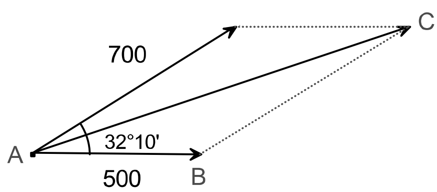
Oplossing

$\hat{B} = 180° - 32°10' = 147°50'$

ΔABC geldt (ZHZ): $|AC| = 1154,36$

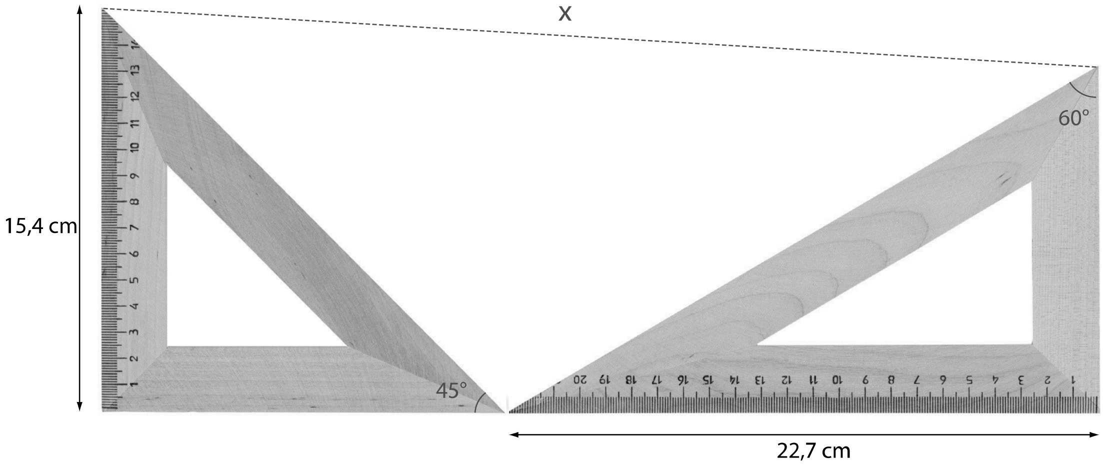
en $B\hat{A}C = 18°50'4''$.

De resultante heeft een grootte van 1154,36 N en maakt met $\vec{F_1}$ een hoek van 18°5'04".



Opdracht 69 bladzijde 44

Twee tekendriehoeken liggen met een punt tegen elkaar.



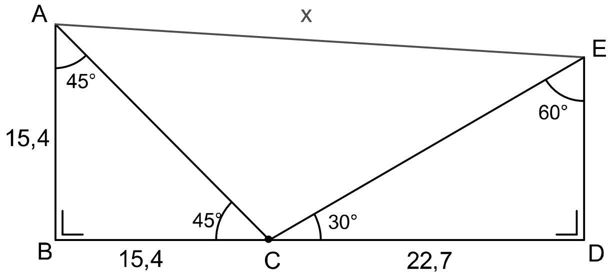
Bereken de afstand x tussen de twee bovenste hoekpunten tot op 0,01 cm nauwkeurig.

Oplossing

In ΔABC geldt: $|AC| = \sqrt{15,4^2 + 15,4^2} = 21,78$.

In ΔCDE geldt:

$$\cos 30° = \frac{|CD|}{|CE|} \quad \Rightarrow \quad |CE| = \frac{22,7}{\cos 30°} = 26,21.$$



Bovendien geldt

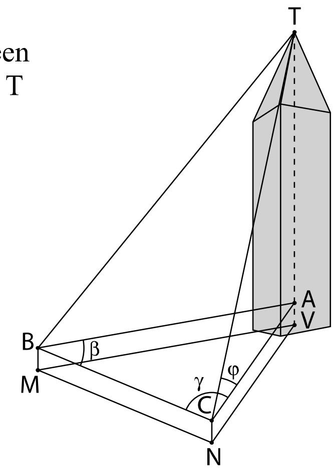
$$A\hat{C}E = 180° - 45° - 30° = 105°.$$

In ΔACE vinden we bijgevolg (ZHZ) :

$$x = |AE| = 38,17$$

De afstand x tussen de twee bovenste hoekpunten is 38,17 cm.

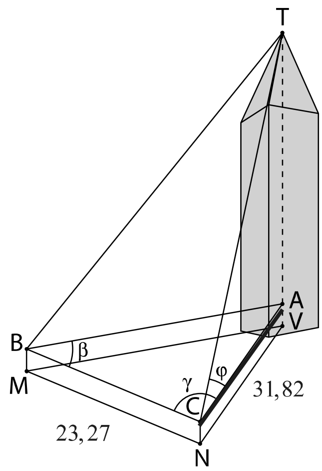
Opdracht 70 bladzijde 45



Sara wil de hoogte h = |VT| van een toren meten. Ze zet daartoe een horizontale basis [MN] uit, die zodanig gekozen wordt dat de top T vanuit M en N zichtbaar is.
Met een afstandsmeter vindt ze: |MN| = 23,37 m.
Ze stelt een theodoliet eerst op in M en meet daar de horizontale hoek β = 73°04'. Daarna stelt ze hem op in N en meet daar de horizontale hoek γ = 62°18' en de verticale hoek φ = 54°50'.

Bereken nu de hoogte van de toren als je weet dat de theodoliet 1,30 m boven de grond staat.

Oplossing



In ΔABC vinden we met het programma HZH : $|AC| = 31,82$.

In de rechthoekige driehoek ACT geldt :

$$\tan\gamma = \frac{|AT|}{|AC|} \quad \Rightarrow \quad |AT| = 31,82 \cdot \tan 54°50' = 45,17\,.$$

De hoogte van de toren is $45,17\ \text{m} + 1,30\ \text{m} = 46,47\ \text{m}$.

Opdracht 71 bladzijde 45

Toon aan dat in elke driehoek geldt :

1 $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$ 2 $b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$

Oplossing

Deze eigenschappen kunnen op twee manieren bewezen worden:

- meetkundig, door de hoogtelijn uit A op BC te construeren. Dit sluit aan bij de bewijsjes van de cosinus- en de sinusregel.
- algebraïsch, door de cosinussen in functie van a, b en c te schrijven d.m.v. de cosinusregel.

$\boxed{1 \quad a = b\cos\gamma + c\cos\beta}$

Deze eerste opdracht pakken we algebraïsch aan.

$$\begin{aligned} b\cos\gamma + c\cos\beta &= b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ &= \frac{a^2+b^2-c^2+a^2+c^2-b^2}{2a} \\ &= \frac{2a^2}{2a} \\ &= a \end{aligned}$$

$\boxed{2 \quad b = a\cos\gamma + c\cos\alpha}$

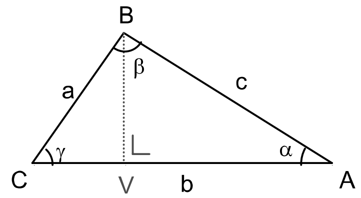
De tweede opdracht behandelen we meetkundig.

Eerste geval: α en γ zijn scherpe hoeken

In ΔBCV geldt : $|CV| = a\cdot\cos\gamma$

In ΔABV geldt : $|AV| = c\cdot\cos\alpha$

$b = |CV| + |AV| = a\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\alpha$

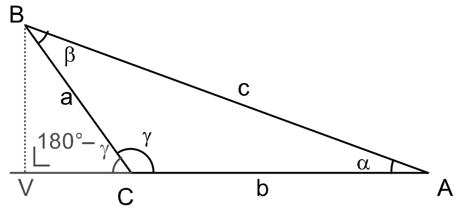


Tweede geval: α of γ is een stompe hoek

In ΔBCV geldt : $|CV| = a\cdot\cos(180°-\gamma) = -a\cdot\cos\gamma$

In ΔABV geldt : $|AV| = c\cdot\cos\alpha$

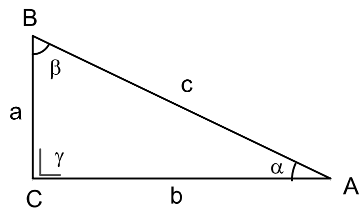
$b = |AV| - |CV| = c\cdot\cos\alpha + a\cdot\cos\gamma$



Derde geval: α of γ is een rechte hoek

In ΔABC geldt : $b = c\cdot\cos\alpha$.

Aangezien $\cos\gamma = \cos 90° = 0$, kunnen we dit herschrijven als $b = c\cdot\cos\alpha + a\cdot\cos\gamma$



Uit de drie gevallen blijkt dat in elke driehoek ABC geldt dat $b = a\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\alpha$.

Opdracht 72 bladzijde 45

Toon aan dat ΔABC gelijkbenig is als $a = 2b\cos\gamma$.

Oplossing

Gegeven: in ΔABC is $a = 2b\cos\gamma$

Te bewijzen: ΔABC is gelijkbenig

Bewijs

In de cosinusregel voor c vullen we het gegeven in.

We vinden:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ &= 4b^2\cos^2\gamma + b^2 - 2\cdot 2b\cos\gamma\cdot b\cdot\cos\gamma \\ &= b^2 \\ &\Downarrow \\ b &= c \quad (\text{afmetingen zijn positief}) \end{aligned}$$

Opdracht 73 bladzijde 45

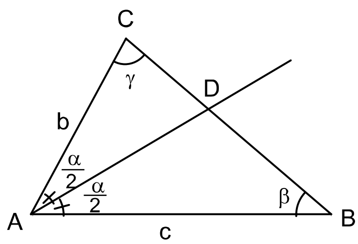
Teken een driehoek ABC en de deellijn AD van de hoek α met D op [BC].

Gebruik de sinusregel om te bewijzen dat $\dfrac{b}{c} = \dfrac{|DC|}{|BC|}$.

Oplossing

In ΔABC: $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ $\qquad (1)$

In ΔACD: $\dfrac{|AD|}{\sin\gamma} = \dfrac{|CD|}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad\Rightarrow\quad \sin\gamma = \dfrac{|AD|\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{|CD|}$ $\qquad (2)$

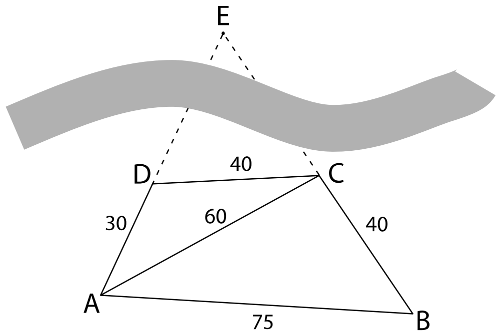


In ΔABD: $\dfrac{|AD|}{\sin\beta} = \dfrac{|BD|}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad\Rightarrow\quad \sin\beta = \dfrac{|AD|\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{|BD|}$ $\qquad (3)$

Invullen van (2) en (3) in (1) geeft $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\dfrac{|AD|\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{|BD|}}{\dfrac{|AD|\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{|CD|}} = \dfrac{|AD|\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{|BD|}\cdot\dfrac{|CD|}{|AD|\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{|CD|}{|BD|}$.

Opdracht 74 bladzijde 45

E is het snijpunt van AD en BC. Bereken de afstand van A tot E , gelegen aan de overkant van een rivier, als de vier zijden en een diagonaal van vierhoek ABCD gekend zijn, zoals aangegeven op de figuur. De zijden zijn uitgedrukt in m.



Oplossing

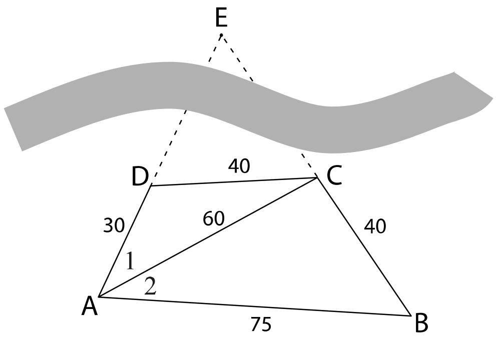
In ΔACD (ZZZ) berekenen we $\hat{A}_1$.

$\hat{A}_1 = 36°20'10''$

In ΔABC (ZZZ) berekenen we $\hat{A}_2$ en $\hat{B}$.

$\hat{A}_2 = 32°5'21''$

$\hat{B} = 52°49'52''$

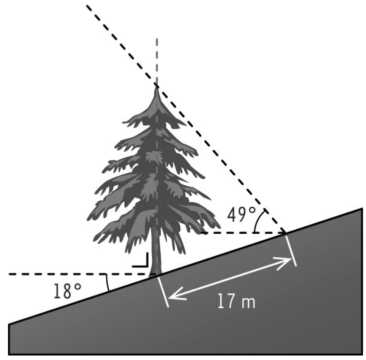


In ΔABE kennen we nu twee hoeken en de aanliggende zijde, zodat we $|AE|$ kunnen berekenen met het programma HZH.

$|AE| = 69,91$

De afstand van A tot E is gelijk aan 69,91 m.

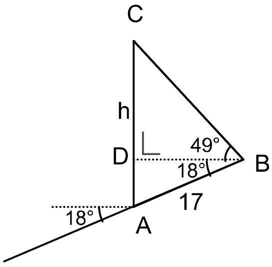
Opdracht 75 bladzijde 46



Een boom staat verticaal op een helling, die zelf een hoek van 18° maakt met een horizontale. De schaduw van de boom is 17 m lang wanneer de zonnestralen een hoek van 49° maken t.o.v. een horizontale.

Hoe hoog is de boom?

Oplossing



$\widehat{A} = 180° - 90° - 18° = 72°$

$\widehat{B} = 18° + 49° = 67°$

In ΔABC $\left(HZH\right)$ geldt : $\left|AC\right| = 23,85$

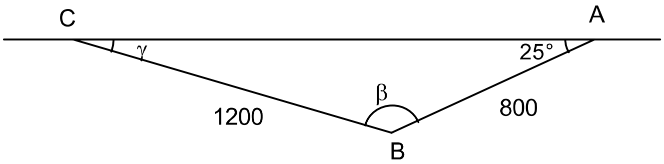
De boom heeft een hoogte van 23,85 m.

Opdracht 76 bladzijde 46

De piloot van een passagiersvliegtuig vliegt zijn toestel westwaarts met een snelheid van 800 km/h, wanneer hij via de controletoren op de hoogte wordt gesteld van een hevig onweer dat op zijn vluchtroute ligt. Hij verandert daarop zijn vliegrichting en draait 25° zuidwaarts. Na een uur vliegen in deze nieuwe richting maakt hij een tweede bocht en vliegt opnieuw richting zijn oorspronkelijke vluchtroute. Na 90 minuten vliegen volgens deze richting maakt hij een derde bocht, waarna hij zich opnieuw op zijn oorspronkelijke vluchtroute bevindt.

Hoeveel tijd heeft hij verloren door op die manier het onweer te vermijden?

Oplossing



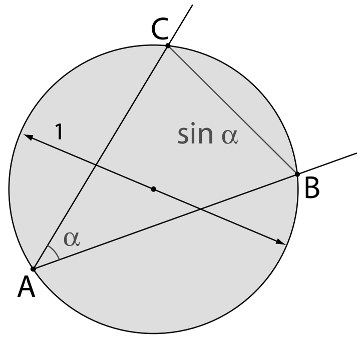
Met de sinusregel vinden we $\dfrac{1200}{\sin 25°} = \dfrac{800}{\sin \gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 16°21'52''$.

Hieruit volgt: $\beta = 180° - 25° - 16°21'52'' = 138°38'8''$.

Hiermee kunnen we $\left|AC\right|$ berekenen met de sinus- of cosinusregel: $\left|AC\right| = 1876$.

Het traject A – B – C is ongeveer 124 km langer, wat een tijdverlies van ongeveer 9 minuten en 18 seconden betekent.

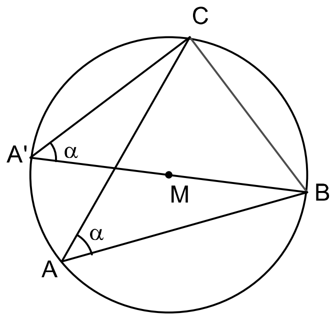
Opdracht 77 bladzijde 46



Toon de volgende eigenschap aan.

Wanneer je een hoek α inschrijft in een cirkel met diameter 1, dan bepaalt deze op die cirkel een koorde met lengte $\sin \alpha$.

Oplossing



$B\widehat{A}'C = B\widehat{A}C$ want beide zijn omtrekshoeken op dezelfde boog.

In $\Delta A'BC$ geldt: $\widehat{C} = 90°$ (omtrekshoek op een halve cirkel) en $|A'B| = 1$.

Sinusregel in

$$\Delta A'BC : \frac{|A'B|}{\sin \widehat{C}} = \frac{|BC|}{\sin \alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1} = \frac{|BC|}{\sin \alpha} \quad \Leftrightarrow \quad |BC| = \sin \alpha$$

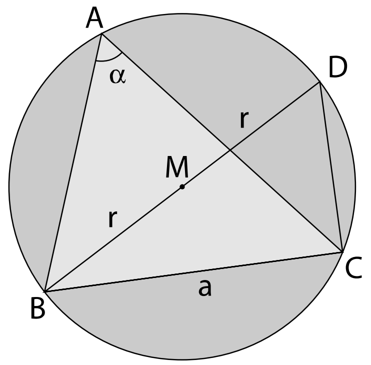
Opdracht 78 bladzijde 47

1 Bewijs: $\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma} = 2r,$

met r de straal van de omgeschreven cirkel van ΔABC.

Onderscheid drie gevallen en geef telkens een tekening.

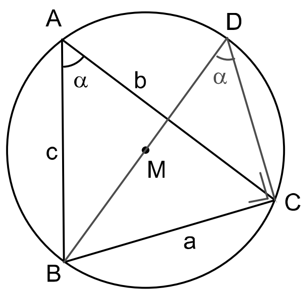
Voor een scherpe hoek α zou een tekening er kunnen uitzien zoals hiernaast.



Eerste geval: α is een scherpe hoek

Kies D zó dat M op BD ligt.

$\widehat{D} = \widehat{A} = \alpha$, aangezien $\widehat{A}$ en $\widehat{D}$ omtrekshoeken op dezelfde boog zijn.



Verder is $\widehat{C} = 90°$ als omtrekshoek op een halve cirkel.

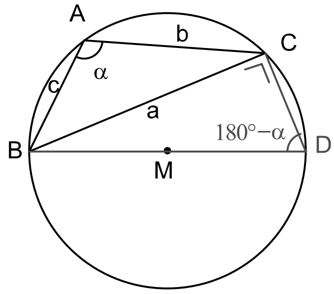
We passen de sinusregel toe op ΔBCD.

We krijgen $\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{|BD|}{\sin \widehat{C}} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{2r}{1} \qquad (1)$

Aangezien a en α ook in ΔABC voorkomen, vinden we in die driehoek

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \overset{(1)}{=} 2r\,.$$

Tweede geval: α is een stompe hoek



$\widehat{D}$ is omtrekshoek op de boog $\overset{\frown}{BAC}$.

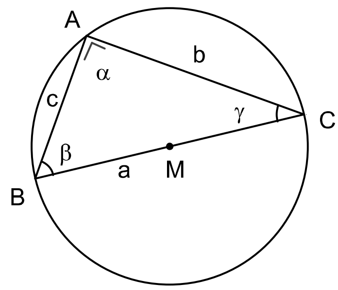
Aangezien de middelpuntshoeken bij $\widehat{A}$ en $\widehat{D}$ samen 360° vormen, zijn $\widehat{A}$ en $\widehat{D}$ supplementair. (Dit volgt ook uit het feit dat ABCD een koordenvierhoek is.)

De sinusregel in ΔBCD geeft :

$$\frac{a}{\sin\widehat{D}}=\frac{|BD|}{\sin\widehat{C}} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin(180°-\alpha)}=\frac{2r}{1} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin\alpha}=2r \qquad (1)$$

Bijgevolg geldt in ΔABC : $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}\overset{(1)}{=}2r$.

Derde geval: α is een rechte hoek



Als $\alpha = 90°$ dan is het een omtrekshoek op een halve cirkel en is $[BC]$ een diameter: $a=|BC|=2r$.

Invullen in de sinusregel geeft: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{2r}{1}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.

<u>Besluit</u>: in elke driehoek ABC geldt : $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2r$

met r de straal van de omgeschreven cirkel van ΔABC.

2	Bereken de hoeken van ΔABC met $b = 4$, $c = 5$ en $r = 3$.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2r \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{4}{\sin\beta}=\frac{5}{\sin\gamma}=6$$

Bijgevolg:

$$\frac{4}{\sin\beta}=6 \Rightarrow \sin\beta=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \beta=41°48'37'' \text{ of } \beta=138°11'23''$$

$$\frac{5}{\sin\gamma}=6 \Rightarrow \sin\gamma=\frac{5}{6} \Leftrightarrow \gamma=56°26'34'' \text{ of } \gamma=123°33'26''$$

De hoek $\beta = 138°11'23''$ is onmogelijk omdat hij samen met γ groter is dan 180°.

Voor γ zijn beide waarden echter mogelijk:

$$\gamma=123°33'26'' \text{ en } \beta=41°48'37'' \Rightarrow \alpha=14°37'57'' \qquad (1)$$

$$\gamma=56°26'34'' \text{ en } \beta=41°48'37'' \Rightarrow \alpha=81°44'49'' \qquad (2)$$

In geval (1) is $a=2r\sin\alpha=1{,}52$.

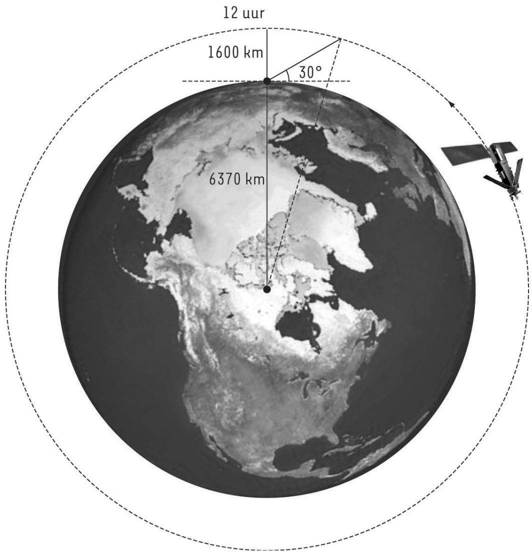
In geval (2) is $a=2r\sin\alpha=5{,}94$.

Opdracht 79 bladzijde 47

Een satelliet draait in een cirkelvormige baan 1600 km boven het aardoppervlak. Ze heeft 2 uur nodig om een volledige omwenteling rond de aarde te maken. Precies om 12 uur zal de satelliet vlak boven een meetstation passeren. De antenne van het meetstation is gericht op 30° boven de horizon (zie figuur).

Hoeveel minuten en seconden vóór 12 uur zal de meetantenne de satelliet detecteren?

Veronderstel dat de aardstraal 6370 km is.



Oplossing

$$\text{In } \Delta ASM \text{ geldt : } \frac{6370}{\sin\hat{S}} = \frac{7970}{\sin\widehat{A}} \quad \Rightarrow \quad \sin\hat{S} = \frac{6370 \cdot \sin 120°}{7970}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{S} = 43°48'7"$$

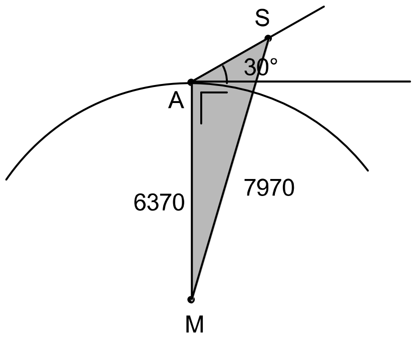
De hoek $\widehat{M}$ is dus $16°11'53"$.

Aangezien één omwenteling $(360°)$ overeenkomt met

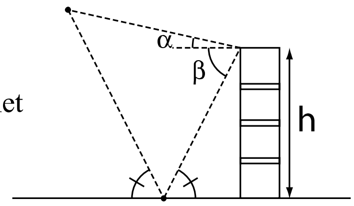
2 uren, komt $16°11'53"$ overeen met

$\frac{2}{360} \cdot 16{,}198\ldots$ uren $= 0{,}08998889$ uren $= 5$ minuten 24

seconden.



Opdracht 80 bladzijde 48



Een ornithologe bevindt zich op hoogte h boven de waterspiegel van een meer.

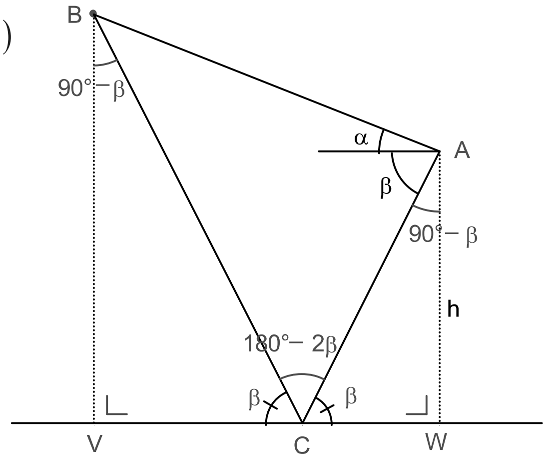
Boven haar ziet ze een vogel onder een hoek α en zijn beeld in het water onder een hoek β.

Hoe hoog vliegt de vogel boven het meer?

A $2h\sin\beta$ B $2h\cos\beta$ C $h\sin(\alpha+\beta)$

D $\dfrac{h}{\cos(\beta-\alpha)}$ E $h\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$

Oplossing



In ΔACW is $C\hat{A}W = 90° - \beta$ en dus is $A\hat{C}W = \beta$.

Bovendien is $\sin\beta = \dfrac{h}{|AC|}$ en dus : $|AC| = \dfrac{h}{\sin\beta}$. (1)

$V\hat{C}B = W\hat{C}A = \beta$ zodat $A\hat{C}B = 180° - 2\beta$.

Nu kunnen we $|BC|$ in ΔABC berekenen.

Daartoe berekenen we eerst $A\hat{B}C$.

$$\begin{aligned} A\hat{B}C &= 180° - (\alpha+\beta) - (180° - 2\beta) \\ &= \beta - \alpha \end{aligned}$$

De sinusregel leert ons: $\dfrac{|BC|}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{|AC|}{\sin(\beta-\alpha)}$.

Samen met (1) volgt hieruit: $|BC| = \dfrac{h\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cdot\sin(\beta-\alpha)}$.

Met $|BC|$ kunnen we in ΔBCV de gevraagde hoogte $|BV|$ bepalen:

$$|BV| = |BC|\cdot\sin\beta = h\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$$

Antwoord E is het juiste antwoord.

Dit antwoord kun je ook door eliminatie vinden: als $\alpha = 0°$ is de hoogte van de vogel h en is $\beta = 45°$. Enkel antwoord E voldoet hieraan.

Opdracht 81 bladzijde 48

Gebruik de sinusregel om de volgende eigenschap aan te tonen.
In elke driehoek ligt tegenover een langere zijde een grotere hoek.

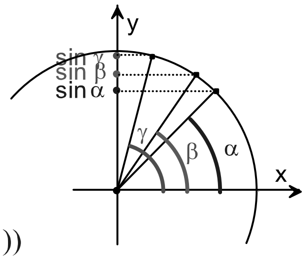
Oplossing

Stel $\alpha < \beta < \gamma$

Eerste geval: γ is een scherpe of een rechte hoek

In het eerste kwadrant geldt: $\alpha < \beta < \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha < \sin\beta < \sin\gamma$

In dat geval vereisen de gelijkheden $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$



dat de tellers bij grotere noemers zelf ook groter zijn.

Bijgevolg is $a < b < c$.

(Of $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad a = b \cdot \underbrace{\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}}_{<1} < b$ ($\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} < 1$ want $\sin\alpha < \sin\beta$))

Tweede geval: γ is een stompe hoek

Voor hoeken ψ en φ tussen $0°$ en $180°$ geldt niet langer $\psi < \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \sin\psi < \sin\varphi$.

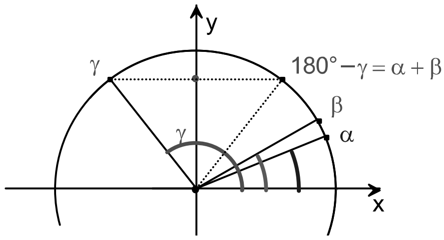
In een driehoek geldt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ zodat $180° - \gamma = \alpha + \beta$, met $\alpha + \beta$ in het eerste kwadrant als γ stomp is.

$\alpha < \beta < \alpha + \beta$

$\Leftrightarrow \quad \sin\alpha < \sin\beta < \sin(\alpha + \beta)$

$\Leftrightarrow \quad \sin\alpha < \sin\beta < \sin(180° - \gamma)$

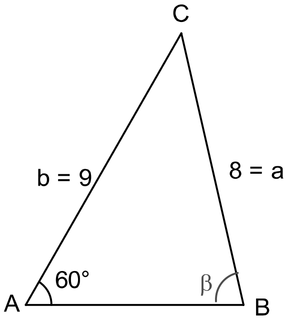
$\Leftrightarrow \quad \sin\alpha < \sin\beta < \sin\gamma$

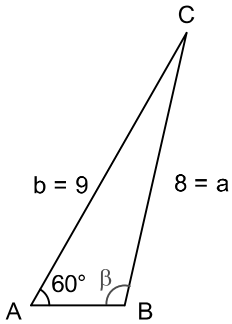


Dus moet ook hier voor de tellers gelden: $a < b < c$.

Opdracht 82 bladzijde 48

1 In ΔABC is $a = 8$, $b = 9$ en $a = 60°$.
Ga na dat er twee oplossingen zijn voor de hoek β.





$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} \quad \Rightarrow \quad \beta = 76°58'36" \text{ of } \beta = 103°1'24"$$

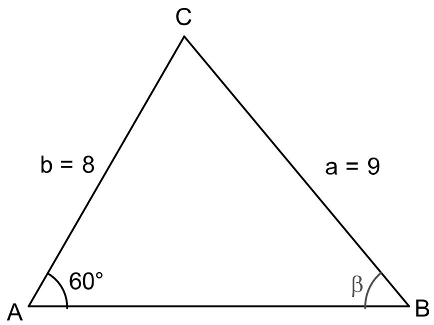
Beide hoeken zijn verenigbaar met $\alpha = 60°$.

2 Stel nu $a = 9$, $b = 8$ en $\alpha = 60°$.
Gebruik de eigenschap uit de vorige opdracht om te verklaren waarom er nu geen twee oplossingen voor de hoek β zullen zijn en controleer met een berekening.

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} \quad \Rightarrow \quad \beta = 50°20'9" \text{ of } \beta = 129°39'51"$$

Aangezien $b < a$ moet, wegens de eigenschap uit de vorige opdracht, $\beta < \alpha$.

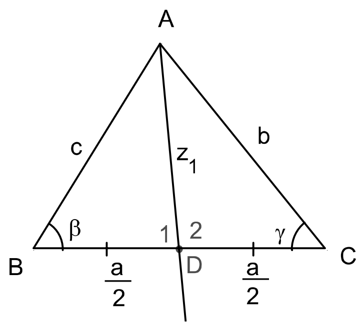
Enkel $\beta = 50°20'9"$ voldoet hieraan.



Opdracht 83 bladzijde 48

Als z_1 de lengte van de zwaartelijn uit het hoekpunt A van ΔABC is, toon dan aan dat $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}$.

Oplossing



In $\Delta ABD: c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + z_1^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot z_1 \cdot \cos\hat{D}_1$

$$\Rightarrow \quad \cos\hat{D}_1 = \frac{\frac{a^2}{4}+z_1^2-c^2}{a\cdot z_1} \qquad (1)$$

In $\Delta ACD: b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + z_1^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot z_1 \cdot \cos\hat{D}_2$

$$\Rightarrow \quad \cos\hat{D}_2 = \frac{\frac{a^2}{4}+z_1^2-b^2}{a\cdot z_1} \qquad (2)$$

Aangezien $\hat{D}_1$ en $\hat{D}_2$ supplementair zijn, is $\cos\hat{D}_2 = -\cos\hat{D}_1$.

Samen met (1) en (2) geeft dit:

$$\frac{\frac{a^2}{4}+z_1^2-c^2}{a\cdot z_1} = -\frac{\frac{a^2}{4}+z_1^2-b^2}{a\cdot z_1}$$

$$\Updownarrow$$

$$2\cdot z_1^2 = c^2+b^2-2\cdot\frac{a^2}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$z_1^2 = \frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$z_1^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}$$

Opdracht 84 bladzijde 48

In driehoek ABC is c de langste zijde. Er zijn drie mogelijkheden:

a $c^2 = a^2 + b^2$

b $c^2 > a^2 + b^2$

c $c^2 < a^2 + b^2$

Wat kun je zeggen over de vorm van de driehoek voor elke mogelijkheid:

1 op basis van een schets;

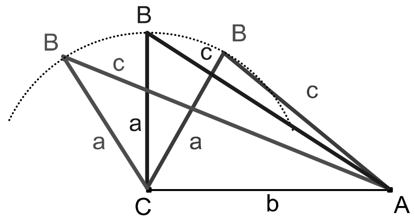
2 op basis van de cosinusregel.

Oplossing

1 a $c^2 = a^2 + b^2$: rechthoekige driehoek

b $c^2 > a^2 + b^2$: stomphoekige driehoek

c $c^2 < a^2 + b^2$: scherphoekige driehoek



2 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

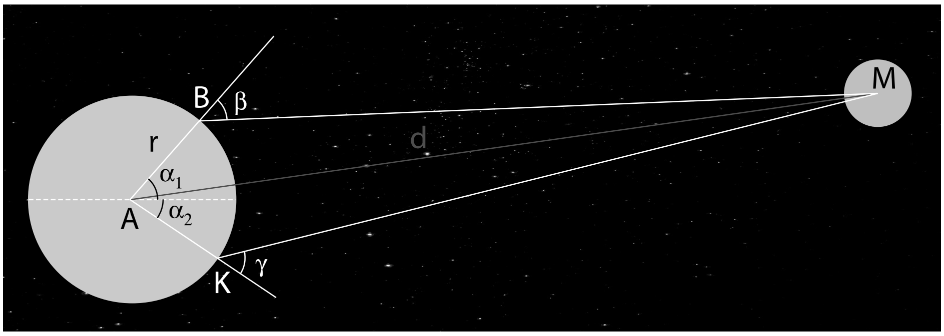
a $c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \cos\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 90°$

b $c^2 > a^2 + b^2 \Leftrightarrow \cos\gamma < 0 \Leftrightarrow 90° < \gamma < 180°$

c $c^2 < a^2 + b^2 \Leftrightarrow \cos\gamma > 0 \Leftrightarrow 0° < \gamma < 90°$

Opdracht 85 bladzijde 49

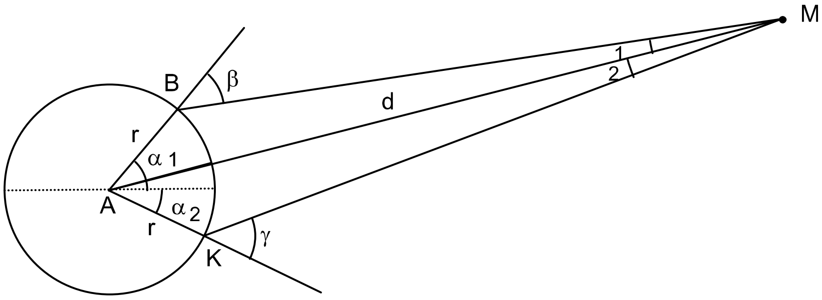
In 1752 schatten de Franse astronomen de Lacaille en Lalande, die toen amper 19 was, de afstand aarde-maan d.m.v. driehoeksmeting. De metingen vonden tegelijk in Berlijn (B) en in Kaapstad (K) plaats, twee steden die op dezelfde meridiaan liggen. In beide steden werd de hoek gemeten tussen de richting van de maan en de richting van het zenit, d.i. een denkbeeldig punt recht boven de stad. We noemen de hoeken resp. β en γ.

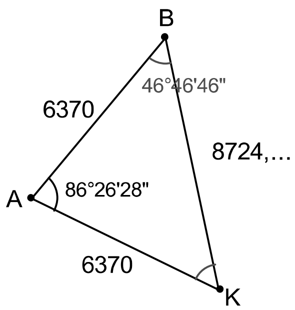


Bereken de afstand d tussen het middelpunt van de aarde en het middelpunt van de maan als gegeven is

- $r = 6370$ km
- noorderbreedte van Berlijn $\alpha_1 = 52°31'13"$
- zuiderbreedte van Kaapstad $\alpha_2 = 33°55'15"$
- $\beta = 41°15'44"$
- $\gamma = 46°33'37"$

Oplossing





- In ΔABK geldt : $|BK| = 8\,724,461414 \qquad (ZHZ)$

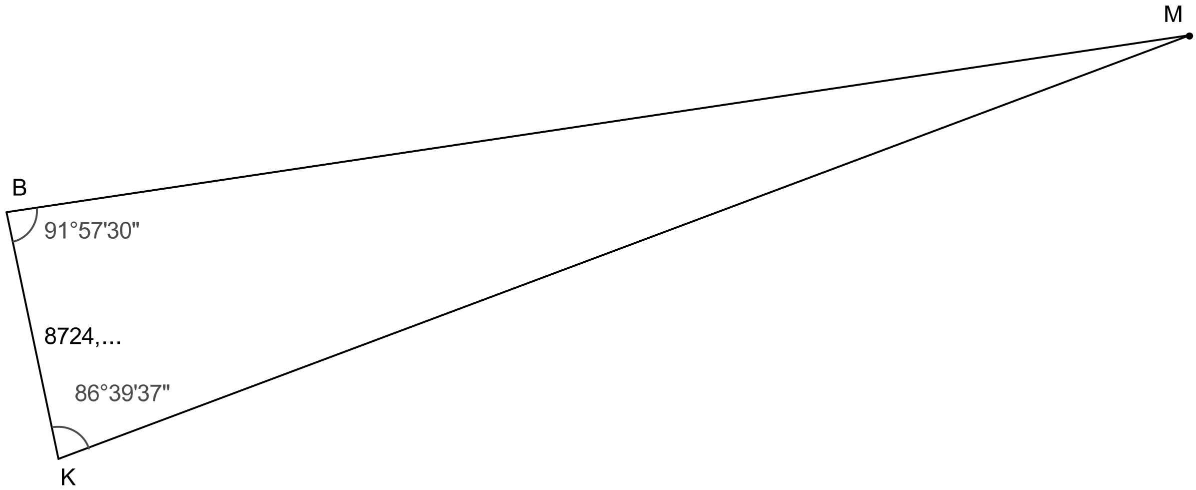
$$A\widehat{B}K = A\widehat{K}B = \frac{180° - 86°26'28"}{2} = 46°46'46"$$

- In ΔBKM vinden we : $K\widehat{B}M = 180° - \beta - A\widehat{B}K = 91°57'30"$

  $B\widehat{K}M = 180° - \gamma - A\widehat{K}B = 86°39'37"$

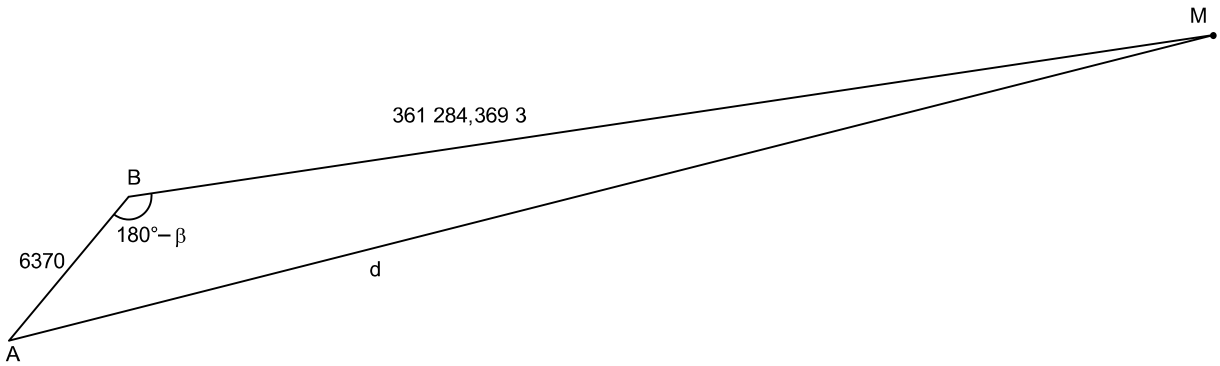
  Met het programma HZH of de sinusregel berekenen we : $|BM| = 361284,3693$

  $(|KM| = 361687,6239)$.



- In ΔABM kan nu d berekend worden. (ZHZ)

  We vinden : $d = 366096,7977$.



De afstand tussen het middelpunt van de aarde en het middelpunt van de maan is ongeveer 366097 km.

(Hedendaagse metingen geven een afstand van ongeveer 384400 km. Die 366097 km zit hier ongeveer 5% onder.)

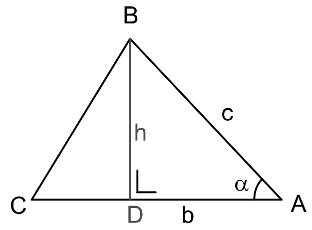
Opdracht 86 bladzijde 49

Rond 60 na Christus publiceerde en bewees Heroon in zijn werk Metrica een formule om de oppervlakte S van een driehoek ABC te berekenen op basis van de drie zijden a, b en c.

$$S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$

Hierin is p de halve omtrek van de driehoek : $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

1 Toon aan dat $S = \dfrac{1}{2} bc \sin\alpha$.



In ΔABD geldt : $h = c\sin\alpha$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{b\cdot c\sin\alpha}{2}$$

2 Met de sinusregel is het niet mogelijk $\sin\alpha$ te schrijven louter in functie van de zijden van de driehoek, maar de cosinusregel laat dat wel toe. Schrijf $\cos\alpha$ in functie van a, b en c.

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

3 Gebruik nu het verband tussen $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ om $\sin\alpha$ te schrijven in functie van a, b en c.

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad (0° < \alpha < 180°)$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$$

4	Toon tenslotte aan dat de uitdrukking die je nu hebt voor S herschreven kan worden in de vorm van de formule van Heroon.

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{4} b^2c^2 \sin^2 \alpha \\
&= \frac{1}{4} b^2c^2 \left(1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} b^2c^2 \left(\frac{4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4b^2c^2} \right) \\
&= \frac{1}{16} \left(2bc - b^2 - c^2 + a^2\right)\left(2bc + b^2 + c^2 - a^2\right) \\
&= \frac{1}{16} \left(a^2 - (b-c)^2\right)\left((b+c)^2 - a^2\right) \\
&= \frac{1}{16} (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a) \\
&= \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} \\
&= (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-a) \cdot p
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

Herhalingsopdracht 87 bladzijde 50

Vul een minteken in waar nodig.

$\boxed{1 \quad \cos(180° - \alpha) = \ldots \cos\alpha}$

$$\cos(180° - \alpha) \overset{S}{=} -\cos\alpha$$

$\boxed{2 \quad \tan(90° - \alpha) = \ldots \cot\alpha}$

$$\tan(90° - \alpha) \overset{C}{=} \cot\alpha$$

$\boxed{3 \quad \sin(180° - \alpha) = \ldots \sin\alpha}$

$$\sin(180° - \alpha) \overset{S}{=} \sin\alpha$$

$\boxed{4 \quad \cos(90° + \alpha) = \ldots \cos(90° - \alpha)}$

$$\cos(90° + \alpha) \overset{S}{=} -\cos(90° - \alpha)$$

$\boxed{5 \quad \sin(110° + 2\alpha) = \ldots \sin(70° - 2\alpha)}$

$$\sin(110° + 2\alpha) \overset{S}{=} \sin(70° - 2\alpha)$$

Herhalingsopdracht 88 bladzijde 50

Aan welke uitdrukkingen in de rechterkolom zijn de uitdrukkingen in de linkerkolom gelijk?

A	$1+\sin^2\alpha$	I	1
		II	$\cos^2\alpha$
B	$\dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}$	III	$\tan^2\alpha$
		IV	$\sin^2\alpha$
C	$\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$	V	$\sin^2\alpha-\cot^2\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Oplossing

A $\quad 1+\sin^2\alpha = \sin^2\alpha - \cot^2\alpha + \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (V)$

aangezien

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha - \cot^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} &= \sin^2\alpha - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\\ &= \sin^2\alpha + \frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\\ &= \sin^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}\\ &= \sin^2\alpha + 1\end{aligned}$$

B $\quad \dfrac{1}{1+\cot^2\alpha} = \sin^2\alpha \qquad (\mathrm{IV})$

aangezien

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\cot^2\alpha} &= \frac{1}{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}\\ &= \frac{1}{\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}\\ &= \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}\\ &= \frac{\sin^2\alpha}{1}\\ &= \sin^2\alpha\end{aligned}$$

C $\quad \dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha} = 1 \qquad (\mathrm{I})$

aangezien

$$\begin{aligned}\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha} &= \frac{\cancel{\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)}\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}{\cancel{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}}\\ &= \sin^2\alpha+\cos^2\alpha\\ &= 1\end{aligned}$$

Herhalingsopdracht 89 bladzijde 50

Vereenvoudig.

$\boxed{1 \quad \dfrac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}}$

$$\begin{aligned}\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} &= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}\\ &= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}\\ &= \frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos}\alpha}\cdot\frac{\cos\cancel{^2}\alpha}{1}\\ &= \sin\alpha\cdot\cos\alpha\end{aligned}$$

$$\boxed{2 \quad \cot^2\alpha + \frac{\cot(90° - \alpha)\cot(180° - \alpha)}{\tan^2\alpha}}$$

$$\begin{aligned}
\cot^2\alpha + \frac{\cot(90° - \alpha)\cot(180° - \alpha)}{\tan^2\alpha} &= \cot^2\alpha + \frac{\tan\alpha \cdot (-\cot\alpha)}{\tan^2\alpha} \\
&= \cot^2\alpha - \frac{1}{\tan^2\alpha} \\
&= \cot^2\alpha - \cot^2\alpha \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{3 \quad \frac{1+\tan^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1+\tan^2\alpha}{1+\cot^2\alpha} &= \frac{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} \\
&= \frac{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} \\
&= \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{1} \\
&= \tan^2\alpha
\end{aligned}$$

$$\boxed{4 \quad \tan\alpha\cot\alpha + \cot^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

$$\begin{aligned}
\tan\alpha\cot\alpha + \cot^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha} &= 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha} \\
&= 1 - \frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \\
&= 1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Herhalingsopdracht 90 bladzijde 50

1 Bepaal de hoek α tussen $0°$ en $180°$ als $\tan\alpha = -1000$.

$$\tan\alpha = -1000 \overset{S}{\Rightarrow} -\tan(180° - \alpha) = -1000$$
$$\Rightarrow \tan(180° - \alpha) = 1000$$
$$\Rightarrow 180° - \alpha = 89°56'34''$$
$$\Rightarrow \alpha = 90°3'26''$$

2 Bepaal de hoek α tussen $0°$ en $180°$ als $\sin\alpha = 0,76$ en $\cos\alpha < 0$.

$\sin\alpha = 0,76$ en $\cos\alpha < 0$

Uit $\sin\alpha = 0,76$ volgt $\alpha = 49°27'51''$ of $\alpha = 130°32'9''$.

Aangezien $\cos\alpha < 0$, is $\alpha = 130°32'9''$.

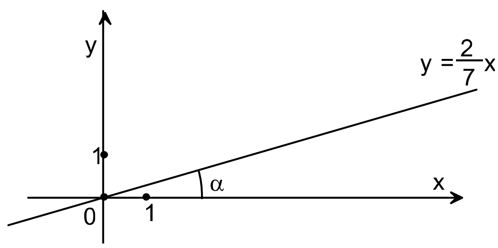
3 Bepaal de hoek α tussen $0°$ en $180°$ als $\cos\alpha = -0,16$.

$\cos\alpha = -0,16 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 99°12'25''$

Herhalingsopdracht 91 bladzijde 51

Bereken de scherpe hoek tussen

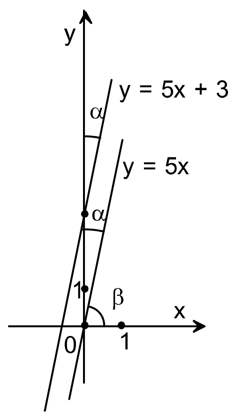
1 de x-as en $a \leftrightarrow 2x - 7y = 0$



$$a \leftrightarrow 2x - 7y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{7}x$$

$$\tan\alpha = \text{rico } a = \frac{2}{7} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 15°56'43''$$

2 de y-as en $b \leftrightarrow y = 5x + 3$



$b \leftrightarrow y = 5x + 3$

$b // b' \quad \leftrightarrow \quad y = 5x$

$\tan\beta = \text{rico } b' = 5 \quad \Rightarrow \quad \beta = 78°41'24''$

$$\overset{\alpha+\beta=90°}{\Rightarrow} \quad \alpha = 11°18'36''$$

$\boxed{3 \quad c \leftrightarrow 2x - y - 4 = 0 \text{ en } d \leftrightarrow 2x - 3y - 8 = 0}$

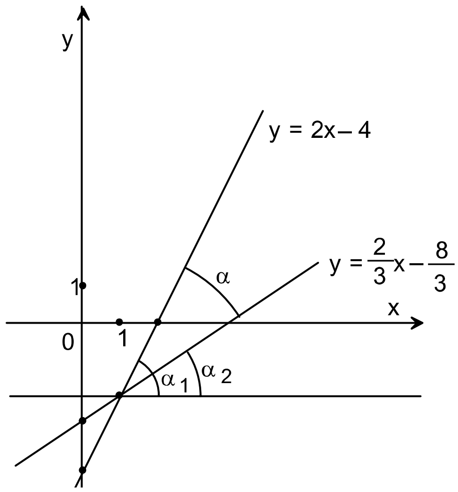
- $c \leftrightarrow 2x - y - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x - 4$

  $\Rightarrow \quad \tan \alpha_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 63°26'6''$

- $d \leftrightarrow 2x - 3y - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$

  $\Rightarrow \quad \tan \alpha_2 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 33°41'24''$

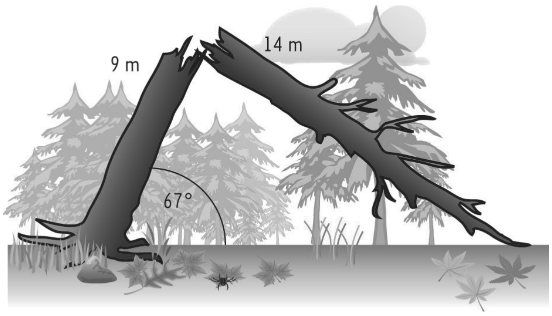
- $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 29°44'42''$



Herhalingsopdracht 92 bladzijde 51

Een scheve kale boomstam van 23 m maakt een hoek van 67° met de horizontale bodem en knakt tijdens een storm door op 14 m van de top.

Op welke afstand van de basis van de boom komt de top op de grond?



Oplossing

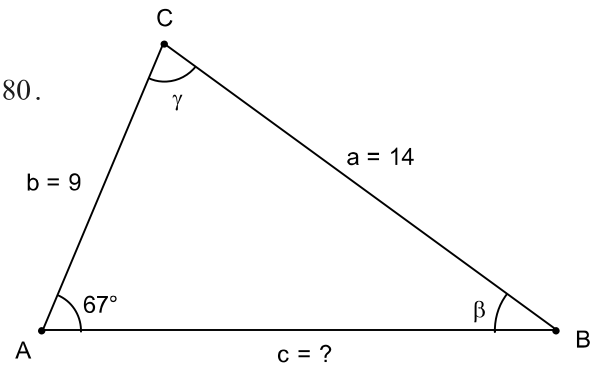
- Met de sinusregel vinden we β:

$$\frac{14}{\sin 67°} = \frac{9}{\sin \beta} \quad \Rightarrow \quad \sin \beta = \frac{9 \sin 67°}{14} \approx 0,59175$$

$$\Rightarrow \quad \beta = 36°16'53'' \text{ of } \cancel{\beta = 143°43'7''}$$

$$\left(143° + 67° > 180°\right)$$

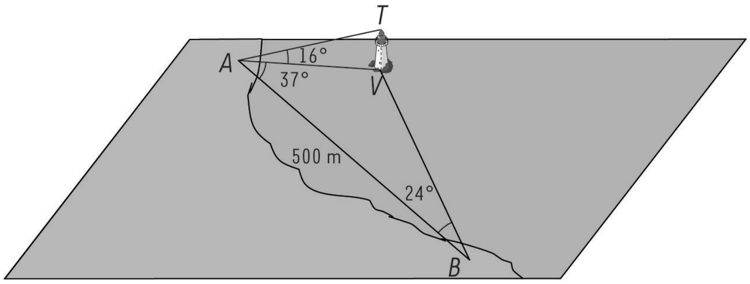
- $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 76°43'7''$
- Met het programma ZHZ vinden we $c = 14,80$.



De top van de boom komt op 14,80 m van de basis terecht.

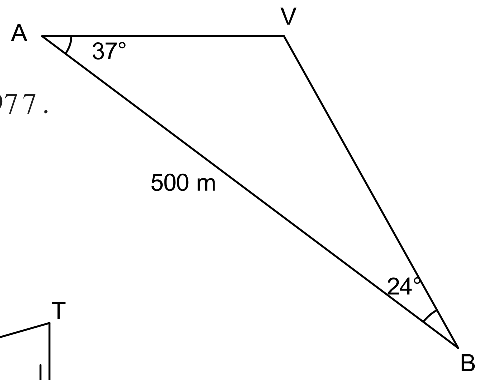
Herhalingsopdracht 93 bladzijde 51

Je wil de hoogte van een vuurtoren berekenen, maar doordat hij zich op een onbereikbaar eiland bevindt, moet je indirect te werk gaan.



De punten A en B liggen 500 m uit elkaar. Met een hoekmeter wordt vastgesteld dat
$V\widehat{A}B = 37°$, $V\widehat{B}A = 24°$ en $V\widehat{A}T = 16°$.
Hoe hoog is de vuurtoren?

Oplossing

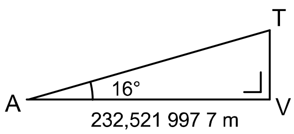


- We bepalen eerst $|AV|$ in ΔABV.

  Met het programma HZH vinden we $|AV| = 232,5219977$.

- In ΔAVT kan nu $|VT|$ bepaald worden.

$$\tan 16° = \frac{|VT|}{|AV|}$$
$$\Rightarrow \quad |VT| = |AV| \cdot \tan 16°$$
$$\approx 66,67$$

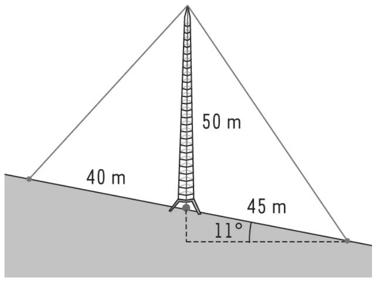


De vuurtoren is 66,67 m hoog.

Herhalingsopdracht 94 bladzijde 51

Een antenne van 50 m hoog staat op een heuvel die een hoek van 11° maakt met een horizontale. Twee van de kabels waarmee ze verticaal wordt gehouden worden in de grond verankerd op 45 m en 40 m afstand van de voet van de antenne, zoals op de schets aangegeven.

Hoeveel kabel is nodig?

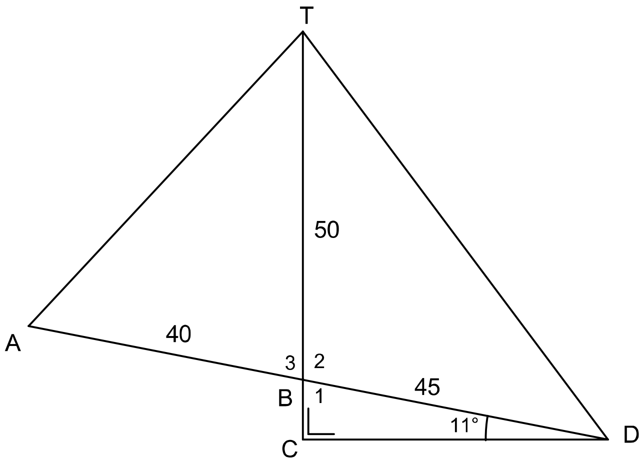


Oplossing

- In ΔBCD is $\hat{B}_1 = 90° - 11° = 79°$

  $\Rightarrow \quad \hat{B}_2 = 180° - 79° = 101° \quad$ in ΔTBD

  en $\hat{B}_3 = 79° \quad$ in ΔTAB



- Met het programma ZHZ vinden we

  in ΔTAB : $|TA| = 57{,}7647$

  in ΔTBD : $|TD| = 73{,}3733$

  $|TA| + |TD| = 131{,}14$

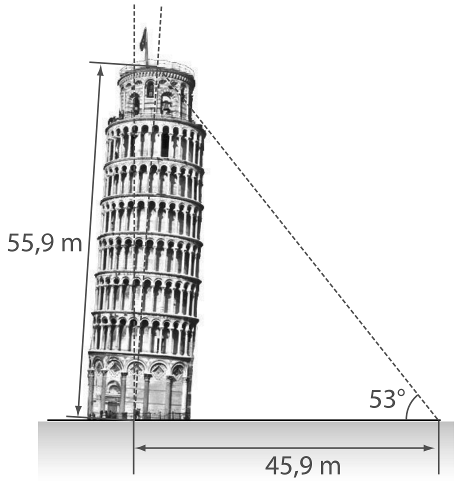
Er is 131,14 m kabel nodig.

Herhalingsopdracht 95 bladzijde 52

Lise staat bij de bekende scheve toren van Pisa.
Ze meet de schaduw op en merkt dat die 45,9 m lang is. De elevatiehoek van het uiterste puntje van de schaduw naar de top van de toren is 53°.

De toren is 55,9 m hoog, gemeten volgens de centrale as, vanaf de grond tot aan de top.

Welke hoek α maakt de de centrale as van de toren met een verticale?



Oplossing

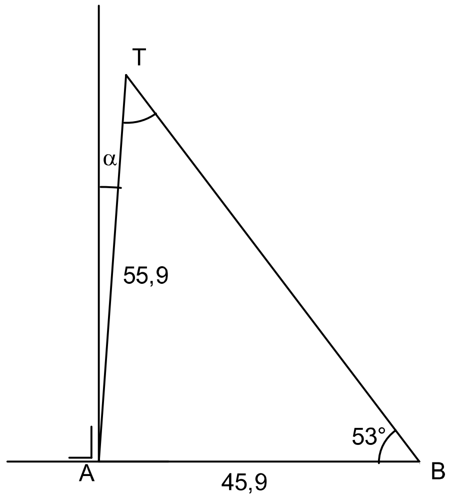
- In ΔTAB vinden we $\hat{T}$ met de sinusregel:

$$\frac{55{,}9}{\sin 53°} = \frac{45{,}9}{\sin \hat{T}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin \hat{T} = \frac{45{,}9 \cdot \sin 53°}{55{,}9} \approx 0{,}6558$$

$$\Rightarrow \quad \hat{T} = 40°58'40" \text{ of } \cancel{\hat{T} = 139°1'20"}$$

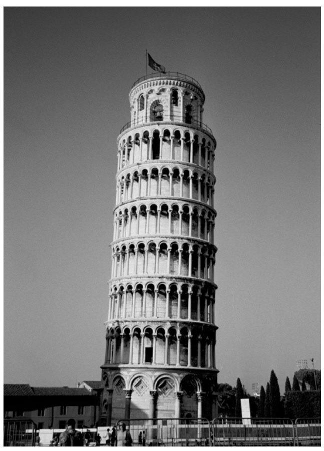
$$(139° + 53° > 180°)$$



- In ΔTAB is $\hat{A} = 180° - \hat{T} - \hat{B} = 86°1'20"$

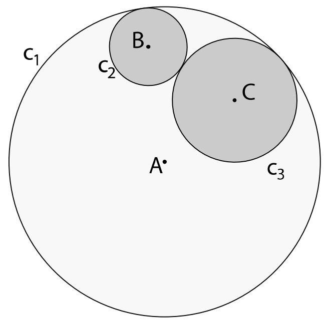
- $\alpha = 90° - 86°1'20" = 3°58'40"$

De centrale as van de toren maakt met de verticale een hoek van $3°58'40"$.



Herhalingsopdracht 96 bladzijde 52

Drie cirkels raken elkaar zoals op de figuur is weergegeven.
Hun stralen zijn $r_1 = 6$, $r_2 = 1,5$ en $r_3 = 2,4$.
Bereken de hoeken van ΔABC.

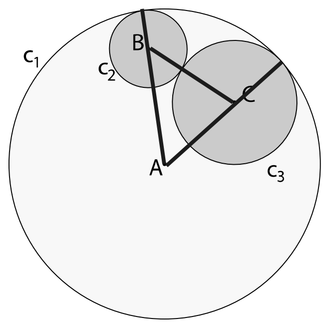


Oplossing

In ΔABC is $|AB| = r_1 - r_2 = 4,5$

$|AC| = r_1 - r_3 = 3,6$

$|BC| = r_2 + r_3 = 3,9$



Met het programma ZZZ vinden we de hoeken van ΔABC: $\widehat{A} = 56°15'4"$

$\widehat{B} = 50°7'54"$

$\widehat{C} = 73°37'2"$