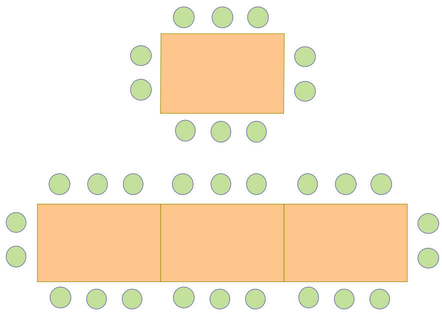
Hoofdstuk 5

Rijen

Oplossingen van de opdrachten

Opdracht 1 bladzijde 232

Aan een rechthoekige tafel kunnen tien personen plaatsnemen. Men zet enkele tafels met de kortste zijde tegen elkaar.



1 Vul de tabel in.

aantal tafels	1	2	3	4	5	6	…	n
aantal plaatsen								

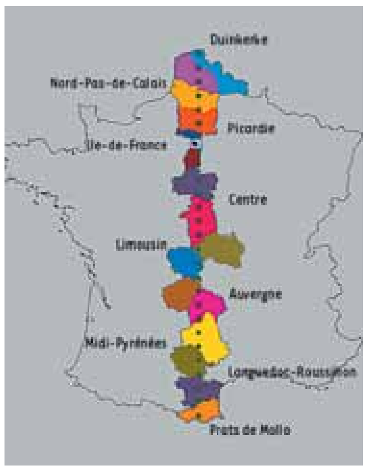
aantal tafels	1	2	3	4	5	6	…	n
aantal plaatsen	10	16	22	28	34	40	…	4+6n

Aan de eerste tafel kunnen 10 personen plaatsnemen. Per bijgeschoven tafel komen er steeds 6 plaatsen bij. Aan n tafels kunnen dus $10+(n-1)\cdot 6=4+6n$ personen plaatsnemen.

2 Hoeveel tafels moet men op die manier tegen elkaar schuiven voor een gezelschap van 130 personen?

$$4+6n=130$$
$$6n=126$$
$$n=21$$

3 Om het magische jaar 2000 te vieren, werd op 14 juli, de nationale feestdag in Frankrijk, 'L'incroyable Pique-Nique' georganiseerd. Van het noordelijke Duinkerke tot in het zuidelijke Prats de Mollo werd een reusachtige picknick gehouden over een lengte van 1236 km.



a Hoeveel tafels zou men hiervoor nodig hebben in de veronderstelling dat een tafel 2 m lang is?

b Hoeveel personen zouden hieraan kunnen plaatsnemen?

a $1236 \text{ km}=1236\,000 \text{ m}$

aantal nodige tafels: $\dfrac{1236\,000}{2}=618\,000$

b aantal personen: $4+6\cdot 618\,000=3\,708\,004$

Opdracht 2 bladzijde 233

Hieronder staan enkele getallenrijen. Ze zijn opgebouwd volgens een zekere regelmaat.
Tracht die regelmaat te ontdekken en schrijf telkens de twee volgende getallen van de rij.

1 $7, 10, 13, 16, \ldots$

$\text{telkens } +3$

$19, 22$

2 $1, 4, 9, 16, \ldots$

$\text{telkens } n^2$

$25, 36$

3 $3, 6, 12, 24, \ldots$

$\text{telkens } \cdot 2$

$48, 96$

4 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

$\text{telkens } \frac{1}{n}$

$\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$

5 $4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$

$\text{telkens } \cdot \frac{-1}{2}$

$\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$

6 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \ldots$

$\text{telkens } +\frac{1}{4}$

$\frac{6}{4}, \frac{7}{4}$

Opdracht 3 bladzijde 234

Bij de rij $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$ hoort het voorschrift $u_n = \frac{1}{n^2}$.
Bepaal telkens het voorschrift voor de volgende rijen en bereken hiermee u_5 en u_6.

1 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

$u_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad u_5 = \frac{5}{6}$ $\qquad u_6 = \frac{6}{7}$

2 $1, 3, 5, 7, \ldots$

$u_n = 2n-1$ $\qquad u_5 = 9$ $\qquad u_6 = 11$

3 $3, 6, 9, 12, \ldots$

$u_n = 3n$ $\qquad u_5 = 15$ $\qquad u_6 = 18$

4 $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \ldots$

$u_n = \frac{2n}{2n-1}$ $\qquad u_5 = \frac{10}{9}$ $\qquad u_6 = \frac{12}{11}$

Opdracht 4 bladzijde 234

Bepaal de eerste vijf termen van de rijen met voorschrift

1 $u_n = 2n+1$

$3, 5, 7, 9, 11$

2 $u_n = (-2)^n$

$-2, 4, -8, 16, -32$

3 $u_n = 1+\frac{1}{n}$

$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}$

4 $u_n = 1+(-1)^n$

$0, 2, 0, 2, 0$

Opdracht 5 bladzijde 234

Bepaal het expliciet voorschrift van de volgende rijen.

1 $1, 8, 27, 64, \ldots$

$u_n = n^3$

2 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$

$u_n = \frac{1}{2n}$

3 $0, 3, 6, 9, \ldots$

$u_n = 3(n-1)$

4 $-1, 1, -1, 1, \ldots$

$u_n = (-1)^n$

5 $2, -2, 2, -2, \ldots$

$u_n = 2\cdot(-1)^{n+1}$

6 $2, 5, 10, 17, \ldots$

$u_n = n^2+1$

Opdracht 6 bladzijde 235

Bepaal de eerste vijf termen van een rij waarvan elke term gelijk is aan driemaal de voorgaande. Is er meer dan één oplossing?

Oplossing

Er zijn oneindig veel oplossingen.

$1, 3, 9, 27, 81$

$-2, -6, -18, -54, -162$

$0, 0, 0, 0, 0$

$\vdots$

Opdracht 7 bladzijde 235

De term die aan u_n voorafgaat is u_{n-1}.

1 Noteer de eerste vijf termen van een rij waarbij $u_n = -5 \cdot u_{n-1}$ en $u_1 = 2$.

$2, -10, 50, -250, 1250$

2 Noteer de eerste vijf termen van een rij waarbij $u_n = u_{n-1} + 5$ en $u_4 = 9$.

$-6, -1, 4, 9, 14$

Opdracht 8 bladzijde 236

Bepaal de eerste vijf termen van de volgende rijen.

1 $u_n = u_{n-1} + 1$ en $u_1 = 0$

$0, 1, 2, 3, 4$

2 $u_n = -u_{n-1}$ en $u_1 = 10$

$10, -10, 10, -10, 10$

3 $u_n = u_{n-1} - 4$ en $u_5 = -11$

$5, 1, -3, -7, -11$

4 $u_n = \dfrac{1}{u_{n-1}}$ en $u_1 = 2$

$2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2$

5 $u_n = \dfrac{1}{2} \cdot u_{n-1}$ en $u_1 = 100$

$100 ; 50 ; 25 ; 12,5 ; 6,25$

6 $u_n = \sqrt{u_{n-1}^2 + 1}$ en $u_1 = 0$

$0, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$

Opdracht 9 bladzijde 236

Bij een recursief voorschrift is het ook mogelijk dat je voor de berekening van u_n *meerdere* voorafgaande termen nodig hebt. Bepaal de eerste zes termen van de volgende rijen.

1 $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ met $u_1 = 0$ en $u_2 = 1$

$0, 1, 1, 3, 5, 11$

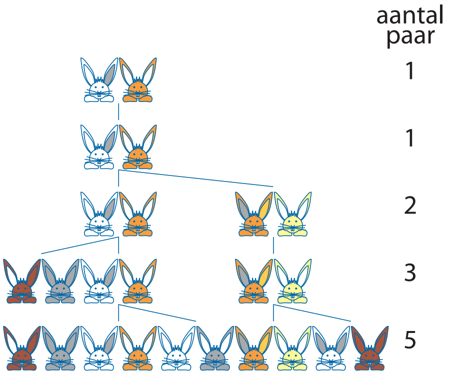
2 $u_n = u_{n-1} - u_{n-2}$ met $u_1 = 2$ en $u_2 = 5$

$2, 5, 3, -2, -5, -3$

Opdracht 10 bladzijde 236

Leonardo van Pisa, bijgenaamd Fibonacci (zoon van Bonacci), was een Italiaans wiskundige en koopman. In 1202 schreef hij het Liber Abaci, een belangrijk boek over de rekenkunde. Hierin komt het volgende probleem voor.

Een man koopt een pasgeboren konijnenpaar in het begin van de eerste maand. Twee maanden na hun geboorte begint dit konijnenpaar zich voort te planten en werpt vanaf dat moment maandelijks een nieuw konijnenpaar. De nakomelingen planten zich op dezelfde manier voort. We veronderstellen dat elk konijn blijft leven.



1 Geef voor de eerste acht maanden telkens het aantal konijnenparen dat de man in het begin van de maand heeft.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21

2 Kun je een recursief voorschrift bedenken voor deze rij, die bekend staat als de **rij van Fibonacci**?

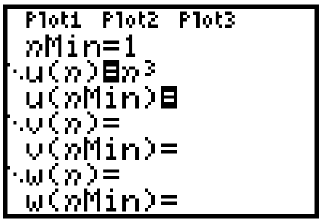
$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ met $u_1 = u_2 = 1$

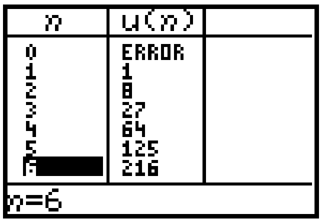
Opdracht 11 bladzijde 239

Bepaal met je grafisch rekentoestel de gevraagde termen van de volgende rijen.

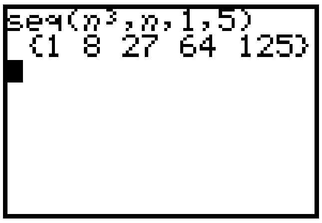
1 u_1 tot en met u_5 als $u_n = n^3$

1, 8, 27, 64, 125



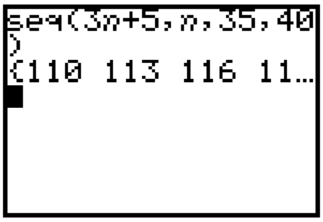


of



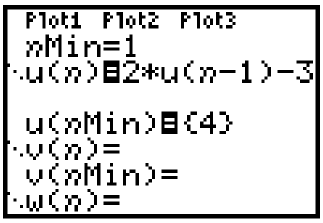
2 u_{35} tot en met u_{40} als $u_n = 3n + 5$

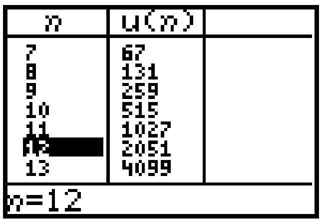
110, 113, 116, 119, 122, 125



3 u_7 tot en met u_{11} als $u_n = 2 \cdot u_{n-1} - 3$ en $u_1 = 4$

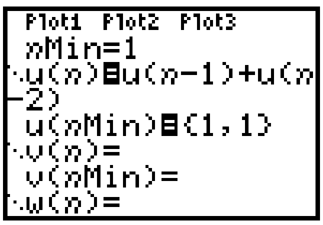
67, 131, 259, 515, 1027

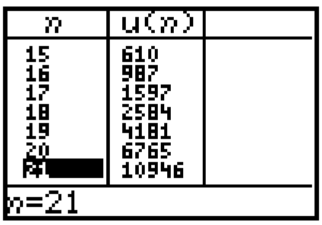




4 u_{15} tot en met u_{20} als $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $u_1 = 1$ en $u_2 = 1$

610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765





Opdracht 12 bladzijde 239

Het Griekse theater in Epidauros, gebouwd rond 350 vóór Christus, is een van de best bewaarde theaters uit de antieke Oudheid. Het is bekend om zijn uitstekende akoestiek. Er zijn 55 rijen zitplaatsen: 34 onder het middenpad en 21 erboven. Op de eerste (onderste) rij kunnen 96 mensen zitten. Op elke rij zijn er 6 plaatsen meer dan op de vorige rij.

1 Vul de tabel in.

rij	1	2	3	4	5
aantal zitplaatsen	96				

rij	1	2	3	4	5
aantal zitplaatsen	96	102	108	114	120

2 Geef een recursief voorschrift voor het aantal zitplaatsen op de n-de rij.

$u_n = u_{n-1} + 6$ met $u_1 = 96$

3 Hoeveel mensen kunnen op de laatste (55e) rij zitten?

Op de eerste rij kunnen 96 mensen zitten. Op elke volgende rij zijn er 6 plaatsen meer.

Aantal personen op de n-de rij: $u_n = 96 + (n-1) \cdot 6 = 90 + 6n$

Dus $u_{55} = 96 + 54 \cdot 6 = 420$ of $u_{55} = 90 + 6 \cdot 55 = 420$

Opdracht 13 bladzijde 239

De volgende rijen vertonen alle een zelfde soort regelmaat. Welke is deze?

1 $0, 5, 10, 15, \ldots$ 2 $4, 1, -2, -5, \ldots$ 3 $\frac{1}{2}, 3, \frac{11}{2}, 8, \ldots$

Oplossing

Elke term $(\neq u_1)$ is de som van de vorige met een constant getal.

Bij de eerste rij is dit getal 5, bij de tweede rij –3 en bij de derde rij is het $\frac{5}{2}$.

Opdracht 14 bladzijde 240

Welke van de volgende rijen zijn rekenkundig? Bepaal een voorschrift van de rijen die rekenkundig zijn.

$\boxed{1 \quad 17, 23, 29, 35, 41, \ldots}$

rekenkundig met $v = 6$

$u_n = u_{n-1} + 6$ met $u_1 = 17$

of $u_n = 17 + (n-1) \cdot 6 = 11 + 6n$

$\boxed{2 \quad 3, 6, 12, 21, 33, \ldots}$

niet rekenkundig

$\boxed{3 \quad 4, -4, -12, -20, -28, \ldots}$

rekenkundig met $v = -8$

$u_n = u_{n-1} - 8$ met $u_1 = 4$

of $u_n = 4 + (n-1) \cdot (-8) = 12 - 8n$

$\boxed{4 \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots}$

niet rekenkundig

$\boxed{5 \quad 4, 4, 4, 4, 4, \ldots}$

rekenkundig met $v = 0$

$u_n = u_{n-1}$ met $u_1 = 4$

of $u_n = 4$

$\boxed{6 \quad -3, -\frac{9}{4}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \ldots}$

rekenkundig met $v = \frac{3}{4}$

$u_n = u_{n-1} + \frac{3}{4}$ met $u_1 = -3$

of $u_n = -3 + (n-1) \cdot \frac{3}{4} = -\frac{15}{4} + \frac{3}{4}n$

Opdracht 15 bladzijde 241

Bereken het gevraagde bij de gegevens van een rekenkundige rij.

$\boxed{1 \quad u_1 = -3 \text{ en } v = 2, u_{20} \,?}$

$u_{20} = -3 + 19 \cdot 2 = 35$

$\boxed{2 \quad u_1 = 1 \text{ en } v = -\frac{1}{4}, u_{11} \,?}$

$u_{11} = 1 + 10 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

$\boxed{3 \quad u_1 = -27 \text{ en } v = -12, u_{25} \,?}$

$u_{25} = -27 + 24 \cdot (-12) = -315$

$\boxed{4 \quad u_1 = -36 \text{ en } u_{13} = 36, \text{ v?}}$

$$
\begin{aligned}
u_{13} &= u_1 + 12 \cdot v\\
36 &= -36 + 12 \cdot v\\
72 &= 12v\\
v &= 6
\end{aligned}
$$

$\boxed{5 \quad u_1 = 24 \text{ en } u_{12} = 0, \text{ v?}}$

$$
\begin{aligned}
u_{12} &= u_1 + 11 \cdot v\\
0 &= 24 + 11 \cdot v\\
v &= -\frac{24}{11}
\end{aligned}
$$

$\boxed{6 \quad u_8 = -8 \text{ en } v = -8, u_1\text{?}}$

$$
\begin{aligned}
u_8 &= u_1 + 7 \cdot v\\
-8 &= u_1 + 7 \cdot (-8)\\
u_1 &= -8 + 56 = 48
\end{aligned}
$$

$\boxed{7 \quad u_9 = 18 \text{ en } u_{12} = -18, u_1\text{? v?}}$

$$
\begin{cases}
u_9 = u_1 + 8v\\
u_{12} = u_1 + 11v
\end{cases}
$$

$$
\text{dus} \begin{cases}
u_1 + 8v = 18 & (1)\\
u_1 + 11v = -18 & (2)
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)-(1) \text{ geeft: } 3v &= -36\\
v &= -12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Invullen in } (1) \text{ geeft: } u_1 + 8 \cdot (-12) &= 18\\
u_1 &= 18 + 96 = 114
\end{aligned}
$$

$\boxed{8 \quad u_{17} = 344 \text{ en } u_{27} = 526, u_1\text{? v?}}$

$$
\begin{cases}
u_{17} = u_1 + 16v\\
u_{27} = u_1 + 26v
\end{cases}
$$

$$
\text{dus} \begin{cases}
u_1 + 16v = 344 & (1)\\
u_1 + 26v = 526 & (2)
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)-(1) \text{ geeft: } 10v &= 182\\
v &= 18,2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Invullen in } (1) \text{ geeft: } u_1 + 16 \cdot 18,2 &= 344\\
u_1 &= 344 - 291,2 = 52,8
\end{aligned}
$$

Opdracht 16 bladzijde 241

Ga na of het getal a tot de gegeven rekenkundige rij behoort. Bepaal het volgnummer indien dit het geval is.

1 $1, 4, 7, \ldots$ en $a = 241$

$$\begin{aligned} 241 &= 1 + (n-1)\cdot 3 \\ 240 &= (n-1)3 \\ n-1 &= 80 \\ n &= 81 \end{aligned}$$

2 $101, 98, 95, \ldots$ en $a = 12$

$$\begin{aligned} 12 &= 101 + (n-1)\cdot(-3) \\ -89 &= (n-1)\cdot(-3) \\ n-1 &= \frac{-89}{-3} \\ n &= \frac{89}{3} + 1 = 30,666\ldots \end{aligned}$$

Omdat n een natuurlijk getal moet zijn, behoort 12 niet tot de gegeven rekenkundige rij.

3 $\frac{1}{2}, 3, \frac{11}{2}, \ldots$ en $a = 53$

$$\begin{aligned} 53 &= \frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{5}{2} \\ \frac{105}{2} &= (n-1)\cdot\frac{5}{2} \\ n-1 &= \frac{105}{2}\cdot\frac{2}{5} = 21 \\ n &= 22 \end{aligned}$$

Opdracht 17 bladzijde 241

We laten een veerkrachtige bal vallen vanaf een hoogte van 405 cm. Bij elk contact met de grond veert de bal terug tot op $\frac{2}{3}$ van zijn vorige hoogte. Na de eerste bots bereikt de bal dus een hoogte van 270 cm.

1 Vul de tabel in.

na bots …	1	2	3	4
is de hoogte …	270			

na bots …	1	2	3	4
is de hoogte …	270	180	120	80

2 Geef een recursief voorschrift voor de hoogte die de bal bereikt na de n-de bots.

$$u_n = u_{n-1} \cdot \frac{2}{3} \text{ met } u_1 = 270$$

3 Welke hoogte bereikt de bal na 10 botsen?

Na de eerste bots bereikt de bal een hoogte van 270 cm.

Na elk contact met de grond veert de bal terug tot op $\frac{2}{3}$ van zijn vorige hoogte.

Na bots n is de hoogte dus: $u_n = 270 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Dus $u_{10} = 270 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 = 7{,}02 \text{ cm}$

Opdracht 18 bladzijde 241

De volgende rijen vertonen alle een zelfde soort regelmaat. Welke is deze?

1 $4, 8, 16, 32, \ldots$

2 $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$

3 $6, -18, 54, -162, \ldots$

Oplossing

Elke term $(\neq u_1)$ is het product van de vorige met een constant getal.

Bij de eerste rij is dit getal 2, bij de tweede rij $\frac{1}{3}$ en bij de derde rij is dit -3.

Opdracht 19 bladzijde 242

Welke van de volgende rijen zijn meetkundig? Bepaal een voorschrift van de rijen die meetkundig zijn.

1 $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

meetkundig met $q = 2$

$u_n = u_{n-1} \cdot 2$ met $u_1 = 1$

of $u_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

2 $3, 6, 12, 21, 33, \ldots$

niet meetkundig

3 $3\,;\, 0{,}3\,;\, 0{,}03\,;\, 0{,}003\,;\, 0{,}0003\,;\, \ldots$

meetkundig met $q = \dfrac{1}{10}$

$u_n = u_{n-1} \cdot \dfrac{1}{10}$ met $u_1 = 3$

of $u_n = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$

4 $1, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \ldots$

meetkundig met $q = -\dfrac{1}{3}$

$u_n = u_{n-1} \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)$ met $u_1 = 1$

of $u_n = 1 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

5 $4, 4, 4, 4, 4, \ldots$

meetkundig met $q = 1$

$u_n = u_{n-1}$ met $u_1 = 4$

of $u_n = 4$

6 $8, \dfrac{12}{5}, \dfrac{18}{25}, \dfrac{27}{125}, \ldots$

meetkundig met $q = \dfrac{\frac{3}{2}}{5} = \dfrac{3}{10}$

$u_n = u_{n-1} \cdot \dfrac{3}{10}$ met $u_1 = 8$

of $u_n = 8 \cdot \left(\dfrac{3}{10}\right)^{n-1}$

Opdracht 20 bladzijde 243

Bereken het gevraagde bij de gegevens van een meetkundige rij.

1 $u_1 = \frac{3}{2}$ en $q = -7$, u_3 ?

$$u_3 = \frac{3}{2} \cdot (-7)^2 = \frac{147}{2}$$

2 $u_1 = 5$ en $q = \frac{3}{2}$, u_{10} ?

$$u_{10} = 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \frac{98415}{512}$$

3 $u_1 = -2$ en $q = \frac{3}{4}$, u_5 ?

$$u_5 = (-2) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = -\frac{162}{256} = -\frac{81}{128}$$

4 $u_1 = 3$ en $q = \sqrt{2}$, u_{21} ?

$$u_{21} = 3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{20} = 3 \cdot 2^{10} = 3072$$

5 $u_1 = 125$ en $u_3 = 5$, q ?

$$u_3 = u_1 \cdot q^2$$
$$5 = 125 \cdot q^2$$
$$q^2 = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}$$
$$q = \frac{1}{5} \text{ of } q = -\frac{1}{5}$$

6 $u_4 = \frac{135}{8}$ en $q = \frac{3}{2}$, u_1 ?

$$u_4 = u_1 \cdot q^3$$
$$\frac{135}{8} = u_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$$
$$u_1 = \frac{135}{8} \cdot \frac{8}{27} = 5$$

Opdracht 21 bladzijde 243

De volgende anekdote gebeurde in 1786, in een basisschool in Braunschweig.
Op een dag geeft de onderwijzer zijn leerlingen als taak alle natuurlijke getallen van 1 tot en met 60 op te tellen.
Na enkele ogenblikken legt de negenjarige Friedrich Gauss het juiste resultaat voor aan zijn verbouwereerde meester.
Hoe hij precies te werk is gegaan, weet men niet met zekerheid.

Vermoedelijk redeneerde hij als volgt:

$$\begin{array}{rccccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 58 & + & 59 & + & 60 \\ + & 60 & + & 59 & + & 58 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 61 & + & 61 & + & 61 & + & \dots & + & 61 & + & 61 & + & 61 \end{array}$$

Hoe zou jij nu verder rekenen om de gevraagde som te vinden?

Oplossing

$$2s = 60 \cdot 61$$
$$s = 1830$$

Opdracht 22 bladzijde 245

Bereken de gevraagde som bij de gegevens van een rekenkundige rij.

$\boxed{1 \quad u_1 = 5 \text{ en } v = 2,\ s_{10}\ ?}$

$$u_{10} = 5 + 9 \cdot 2 = 5 + 18 = 23$$
$$s_{10} = 10 \cdot \frac{5+23}{2} = 140$$

$\boxed{2 \quad u_1 = -3{,}5 \text{ en } v = -1,\ s_{25}\ ?}$

$$u_{25} = -3{,}5 + 24 \cdot (-1) = -27{,}5$$
$$s_{25} = 25 \cdot \frac{-3{,}5 - 27{,}5}{2} = -387{,}5$$

$\boxed{3 \quad 2, 6, 10, \dots ;\ s_{100}\ ?}$

$$u_{100} = 2 + 99 \cdot 4 = 398$$
$$s_{100} = 100 \cdot \frac{2+398}{2} = 20000$$

$\boxed{4 \quad 140, 130, 120, \dots ;\ s_{123}\ ?}$

$$u_{123} = 140 + 122 \cdot (-10) = -1080$$
$$s_{123} = 123 \cdot \frac{140 - 1080}{2} = -57810$$

Opdracht 23 bladzijde 245

Bepaal de som van alle natuurlijke getallen van 2 cijfers.

Oplossing

$$10+11+12+...+99$$

$$\text{dus } u_1 = 10,\ v = 1$$

$$u_n = 99$$

$$\text{zodat } 99 = 10 + (n-1)\cdot 1$$

$$89 = n - 1$$

$$n = 90$$

$$s_{90} = 90\cdot\frac{10+99}{2} = 4905$$

Opdracht 24 bladzijde 245

Bereken het gevraagde bij de gegevens van een rekenkundige rij.

1 $\boxed{u_1 = 6 \text{ en } s_6 = 66,\ v\,?}$

$$u_1 = 6 \text{ en } s_6 = 66$$

$$s_6 = 6\cdot\frac{u_1+u_6}{2}$$

$$66 = 6\cdot\frac{6+(6+5\cdot v)}{2}$$

$$11 = \frac{12+5v}{2}$$

$$12+5v = 22$$

$$5v = 10$$

$$v = 2$$

2 $\boxed{u_4 = -\frac{3}{2},\ u_7 = \frac{3}{2} \text{ en } s_n = -\frac{25}{2},\ v\,?\ \ n\,?}$

$$u_4 = -\frac{3}{2},\ u_7 = \frac{3}{2} \text{ en } s_n = -\frac{25}{2}$$

$$\begin{cases} u_4 = u_1 + 3v \\ u_7 = u_1 + 6v \end{cases}$$

$$\text{dus } \begin{cases} u_1 + 3v = -\frac{3}{2} & (1) \\ u_1 + 6v = \frac{3}{2} & (2) \end{cases}$$

$$(2)-(1) \text{ geeft: } 3v = 3$$
$$v = 1$$

$$\text{Invullen in } (1) \text{ geeft: } u_1 + 3\cdot 1 = -\frac{3}{2}$$
$$u_1 = -\frac{3}{2} - 3 = -\frac{9}{2}$$

$$s_n = n\cdot\frac{u_1+u_n}{2}$$
$$-\frac{25}{2} = n\cdot\frac{-\frac{9}{2}+\left(-\frac{9}{2}+(n-1)\cdot 1\right)}{2}$$
$$-25 = n\cdot(-9+n-1)$$
$$-25 = n\cdot(-10+n)$$
$$n^2 - 10n + 25 = 0$$
$$(n-5)^2 = 0$$
$$n = 5$$

3 $u_1 = 23$, $v = -2$ en $s_n = 140$, n? u_n?

$$u_1 = 23,\ v = -2 \text{ en } s_n = 140$$

$$s_n = n\cdot\frac{u_1+u_n}{2}$$
$$140 = n\cdot\frac{23+\left(23+(n-1)\cdot(-2)\right)}{2}$$
$$280 = n\cdot(46-2n+2)$$
$$280 = n\cdot(48-2n)$$
$$2n^2 - 48n + 280 = 0$$
$$n^2 - 24n + 140 = 0 \qquad D = (-24)^2 - 4\cdot 1\cdot 140 = 16$$
$$n = \frac{24\pm 4}{2}$$
$$n = 10 \text{ of } n = 14$$

$$u_{10} = 23 + 9\cdot(-2) = 5$$
$$u_{14} = 23 + 13\cdot(-2) = -3$$

$$\text{Controle: } s_{10} = 10\cdot\frac{23+5}{2} = 140$$
$$s_{14} = 14\cdot\frac{23-3}{2} = 140$$

Opdracht 25 bladzijde 245

Stukken boomstammen van gelijke lengte worden gestapeld in de vorm van een driezijdig prisma.

1 Hoeveel stukken bevat zo'n stapel als er onderaan 21 stammen liggen?

$$21+20+19+...+1=21\cdot\frac{21+1}{2}=231$$

2 Iemand wil op deze manier 105 boomstammen op elkaar stapelen. Hoeveel moet hij er dan onderaan leggen?

$s_n=105$

dus: $105=n\cdot\frac{n+1}{2}$

$210=n^2+n$

$n^2+n-210=0 \qquad D=1^2-4\cdot1\cdot(-210)=841$

$n=\frac{-1\pm29}{2}$

$n=14$ of $\cancel{n=-15}$ $(n\in\mathbb{N}_0)$

3 164 boomstammen op deze manier stapelen, lukt niet. Hoeveel kunnen er bij dergelijke stapeling maximaal onderaan liggen en hoeveel blijven er dan over?

$164=n\cdot\frac{n+1}{2}$

$328=n^2+n$

$n^2+n-328=0 \qquad D=1^2-4\cdot1\cdot(-328)=1313$

$n=\frac{-1\pm36,24}{2}$

$n=17,6$ of $\cancel{n=-18,6}$ $(n\in\mathbb{N}_0)$

Omdat n een natuurlijk getal moet zijn, kan n hoogstens 17 zijn.

$s_{17}=17\cdot\frac{17+1}{2}=153$

Er kunnen maximaal 17 boomstammen onderaan liggen.

Er blijven dan $164-153=11$ boomstammen over.

4 Bepaal alle aantallen boomstammen tussen 100 en 200 die je op deze manier kunt stapelen zonder dat er boomstammen overblijven.

$s_{14} = 105 \quad \text{(zie 2)}$

$s_{15} = 105 + 15 = 120 \quad \text{of } s_{15} = 15 \cdot \dfrac{15+1}{2} = 120$

$s_{16} = 120 + 16 = 136$

$s_{17} = 136 + 17 = 153$

$s_{18} = 153 + 18 = 171$

$s_{19} = 171 + 19 = 190$

De gevraagde aantallen zijn : 105, 120, 136, 153, 171, 190.

V **Opdracht 26 bladzijde 246**

Bereken de gevraagde sommen.

1 $\displaystyle\sum_{i=1}^{100}(2i-1)$

$$\sum_{i=1}^{100}(2i-1) = 1+3+5+\ldots+199$$
$$= 100 \cdot \frac{1+199}{2}$$
$$= 10000$$

2 $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} 5j$

$$\sum_{j=1}^{10} 5j = 5+10+15+\ldots+50$$
$$= 10 \cdot \frac{5+50}{2}$$
$$= 275$$

3 $\displaystyle\sum_{m=1}^{14}\left(7-\frac{m}{5}\right)$

$$\sum_{m=1}^{14}\left(7-\frac{m}{5}\right) = \left(7-\frac{1}{5}\right)+\left(7-\frac{2}{5}\right)+\ldots+\left(7-\frac{14}{5}\right)$$
$$= 14 \cdot \frac{7-\frac{1}{5}+7-\frac{14}{5}}{2}$$

$$= 14 \cdot \frac{11}{2}$$
$$= 77$$

4 $\sum_{i=0}^{20} (5i + 2)$

$$\sum_{i=0}^{20} (5i + 2) = 2 + 7 + 12 + ... + 102$$
$$= 21 \cdot \frac{2 + 102}{2}$$
$$= 1092$$

5 $\sum_{k=2}^{12} (-1 - 3k)$

$$\sum_{k=2}^{12} (-1 - 3k) = -7 - 10 - 13 - ... - 37$$
$$= 11 \cdot \frac{-7 - 37}{2}$$
$$= -242$$

6 $\sum_{n=5}^{13} \left(-3 + \frac{3n}{4}\right)$

$$\sum_{n=5}^{13} \left(-3 + \frac{3n}{4}\right) = \left(-3 + \frac{15}{4}\right) + \left(-3 + \frac{18}{4}\right) + ... + \left(-3 + \frac{39}{4}\right)$$
$$= 9 \cdot \frac{-3 + \frac{15}{4} - 3 + \frac{39}{4}}{2}$$
$$= \frac{135}{4}$$

V Opdracht 27 bladzijde 246

Noteer de gegeven sommen met het Σ-teken. Bereken nadien deze sommen.

1 $\left(3 + \frac{1}{3}\right) + \left(3 + \frac{2}{3}\right) + \left(3 + \frac{3}{3}\right) + ... + \left(3 + \frac{30}{3}\right)$

$$\left(3+\frac{1}{3}\right)+\left(3+\frac{2}{3}\right)+\left(3+\frac{3}{3}\right)+\ldots+\left(3+\frac{30}{3}\right)=\sum_{i=1}^{30}\left(3+\frac{i}{3}\right)$$
$$=30\cdot\frac{3+\frac{1}{3}+3+\frac{30}{3}}{2}$$
$$=245$$

$\boxed{2 \quad 4+8+12+16+\ldots+80}$

$$4+8+12+16+\ldots+80=\sum_{i=1}^{20}4i$$
$$=20\cdot\frac{4+80}{2}$$
$$=840$$

$\boxed{3 \quad 10+13+16+19+\ldots+106}$

$$10+13+16+19+\ldots+106=\sum_{i=0}^{32}(10+3i)$$
$$=33\cdot\frac{10+106}{2}$$
$$=1914$$

$\boxed{4 \quad -10-8-6-4-\ldots+12}$

$$-10-8-6-4-\ldots+12=\sum_{i=0}^{11}(-10+2i)$$
$$=12\cdot\frac{-10+12}{2}$$
$$=12$$

Er zijn meestal meerdere manieren om een som met een Σ-teken te noteren.

Voorbeeld

$$-10-8-6-4-\ldots+12=\sum_{i=0}^{11}(-10+2i)$$

$$-10-8-6-4-\ldots+12=\sum_{j=-5}^{6}2j$$

Omdat de termen een rekenkundige rij vormen, kunnen we ook het voorschrift van die rij gebruiken: $u_n=u_1+(n-1)\cdot v$

$$u_n=-10+(n-1)\cdot 2=-12+2n$$

dus: $-10-8-6-4-\ldots+12=\sum_{n=1}^{12}(-12+2n)$

V Opdracht 28 bladzijde 247

1 Bereken de som van de eerste 10 oneven getallen. Schrijf de opgave met het Σ-teken.

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=\sum_{i=1}^{10}(2i-1)\quad\left(=\sum_{j=0}^{9}(2j+1)\right)$$
$$=10\cdot\frac{1+19}{2}$$
$$=100$$

2 Bereken de som van de eerste n oneven getallen. Schrijf de opgave met het Σ-teken.

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$
$$=n\cdot\frac{1+2n-1}{2}$$
$$=n^2$$

Opdracht 29 bladzijde 248

Bereken de gevraagde som bij de gegevens van een meetkundige rij.

1 $u_1=5$ en $q=2$, s_{10} ?

$$s_{10}=5\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1}=5115$$

2 $u_1=4096$ en $q=-0{,}5$; s_{16} ?

$$s_{16}=4096\cdot\frac{(-0{,}5)^{16}-1}{-0{,}5-1}=2730{,}625$$

3 $\frac{1}{9},\frac{1}{3},1,\ldots;s_9$?

$$u_1=\frac{1}{9}\text{ en }q=3$$
$$s_9=\frac{1}{9}\cdot\frac{3^9-1}{3-1}=\frac{9841}{9}$$

4 $u_7=4096$ en $u_8=16384$, s_8 ?

$$u_7=4096\text{ en }u_8=16384$$
$$\begin{cases}u_7=u_1\cdot q^6\\u_8=u_1\cdot q^7\end{cases}$$
$$\text{dus }\begin{cases}u_1\cdot q^6=4096 & (1)\\u_1\cdot q^7=16384 & (2)\end{cases}$$
$$(2):(1)\text{ geeft: }q=\frac{16384}{4096}=4$$
$$\text{Invullen in }(1)\text{ geeft: }u_1\cdot4^6=4096$$
$$u_1=\frac{4096}{4^6}=1$$
$$s_8=1\cdot\frac{4^8-1}{4-1}=21845$$

Opdracht 30 bladzijde 248

Voor welke meetkundige rijen geldt de formule $s_n = u_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ niet?

Hoe kun je s_n dan toch berekenen?

Oplossing

Voor meetkundige rijen met $q = 1$ geldt de somformule niet.
In dat geval is $s_n = \underbrace{u_1 + u_1 + \ldots + u_1}_{\text{n termen}} = n \cdot u_1$.

Opdracht 31 bladzijde 248

Bereken de gevraagde sommen.

1 $\quad 1 + 7 + 49 + \ldots + 7^8$

$$1 + 7 + 49 + \ldots + 7^8 = 7^0 + 7^1 + 7^2 + \ldots + 7^8 \qquad \text{dus } u_1 = 7^0 = 1,\ q = 7,\ n = 9$$

$$= 1 \cdot \frac{7^9 - 1}{7 - 1}$$

$$= 6725601$$

2 $\quad \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{64}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \qquad \text{dus } u_1 = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2},\ n = 6$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= \frac{63}{64}$$

Opdracht 32 bladzijde 248

Bereken het gevraagde bij de gegevens van een meetkundige rij.

1 $q = 4$ en $s_5 = 2728$, u_1 ?

$q = 4$ en $s_5 = 2728$

$$s_5 = u_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$$

$$2728 = u_1 \cdot \frac{4^5 - 1}{4 - 1}$$

$$2728 = u_1 \cdot 341$$

$$u_1 = 8$$

2 $u_1 = 4$, $u_n = 324$ en $s_n = 484$; n? q?

$u_1 = 4$, $u_n = 324$ en $s_n = 484$

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

$$324 = 4 \cdot q^{n-1}$$

$$q^{n-1} = 81$$

$$q^{n-1} = 3^4 \quad \text{of} \quad q^{n-1} = 9^2$$

$$q = 3 \text{ en } n = 5 \quad \text{of} \quad q = 9 \text{ en } n = 3$$

Controle aan de hand van het bijkomende gegeven: $s_n = 484$

- $s_5 = 4 \cdot \dfrac{3^5 - 1}{3 - 1} = 484$ Dus $q = 3$ en $n = 5$ is een mogelijke oplossing.
- $s_3 = 4 \cdot \dfrac{9^3 - 1}{9 - 1} = 364 \neq 484$ Dus $q = 9$ en $n = 3$ is geen mogelijke oplossing.

Besluit: $n = 5$ en $q = 3$

Opdracht 33 bladzijde 248

Toen, volgens de legende, Sissa Dahir het schaakspel had uitgevonden, was koning Hindoe Shiras zo enthousiast, dat hij Sissa zelf de beloning liet bepalen. De knecht dacht even na en vroeg het volgende: “Sire, geef me één graankorrel voor het eerste vak van het schaakbord, twee voor het tweede, vier voor het derde, acht voor het vierde, enz… tot het laatste.”

Hoeveel ton graan vroeg de knecht als je weet dat 20 graankorrels ongeveer 1 g wegen? (Ter vergelijking: de wereldproductie graan in 2007 was ongeveer 2,1 miljard ton.)

Oplossing

Een schaakbord telt 64 vakjes.

$u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 8, \ldots$

dus $u_n = 2^{n-1}$

Het aantal gevraagde graankorrels is $s_{64} = 1 \cdot \dfrac{2^{64} - 1}{2 - 1}$

$$= 2^{64} - 1$$

$$\approx 2^{64}$$

Het gevraagde gewicht is $\dfrac{2^{64}}{20}\,\text{g} = \dfrac{2^{64}}{20 \cdot 1000}\,\text{kg}$

$$= \frac{2^{64}}{20 \cdot 1000 \cdot 1000}\,\text{ton}$$

$$= \frac{2^{64}}{2 \cdot 10^7}\,\text{ton}$$

$$= 922 \text{ miljard ton}$$

Opdracht 34 bladzijde 249

Karel heeft een bosperceel waarop 1000 kerstbomen staan. Hij besluit om geen nieuwe bomen meer aan te planten. Elk jaar in december laat hij 100 bomen kappen.

1 Vul de tabel in.

na … jaar	0	1	2	3	4
is het aantal bomen eind december	1000				

na … jaar	0	1	2	3	4
is het aantal bomen eind december	1000	900	800	700	600

2 Geef een expliciet voorschrift voor het aantal kerstbomen u_n eind december na n jaar.

$u_n = 1000 - n \cdot 100$

3 Welk soort rij vormen deze aantallen u_n?

een rekenkundige rij met $u_1 = 1000$ en $v = -100$

Wilfried heeft ook een bosperceel met 1000 kerstbomen en besluit eveneens om geen nieuwe bomen meer aan te planten. Hij laat elk jaar in december 10 % van zijn bomen kappen.

4 Vul de tabel in.

na … jaar	0	1	2	3	4
is het aantal bomen eind december	1000				

na … jaar	0	1	2	3	4
is het aantal bomen eind december	1000	900	810	729	656

5 Geef een expliciet voorschrift voor het aantal kerstbomen v_n eind december na n jaar.

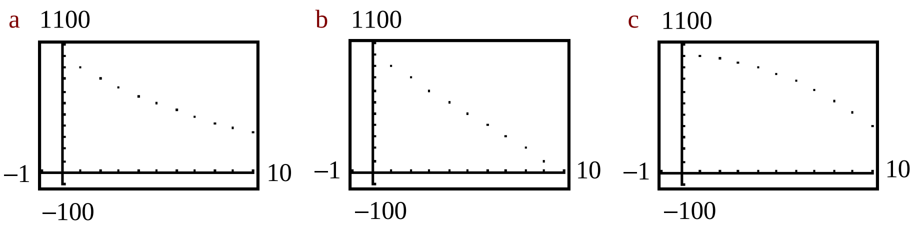
$v_n = 1000 \cdot 0,90^n$

6 Welk soort rij vormen deze aantallen v_n?

een meetkundige rij met $v_1 = 1000$ en $q = 0,90$

Met een grafisch rekentoestel kunnen rijen ook *grafisch* voorgesteld worden.
De grafiek bestaat uit een opeenvolging van geïsoleerde punten; we spreken van **discrete punten**.

7 Welke schermafdruk hoort bij de rij u_n? En welke bij de rij v_n?



b hoort bij u_n en a hoort bij v_n.

Opdracht 35 bladzijde 252

Een bepaalde insectensoort neemt jaarlijks met 15 % in aantal af. Op 1 juli 2008 waren er 50000 insecten.

1 Bereken het aantal insecten op 1 juli 2009 en op 1 juli 2010.

aantal insecten op 1 juli 2009: $50000 \cdot 0{,}85 = 42500$

aantal insecten op 1 juli 2010: $50000 \cdot 0{,}85^2 = 36125$

2 Geef een recursief voorschrift van de rij die het aantal insecten op 1 juli geeft en waarbij $u_0 = 50000$.

$u_n = u_{n-1} \cdot 0{,}85$ met $u_0 = 50000$

3 Geef een expliciet voorschrift van deze rij.

$u_n = 50000 \cdot 0{,}85^n$

4 Hoeveel insecten zijn er van deze soort op 1 juli 2040?

$u_{32} = 50000 \cdot 0{,}85^{32} = 275{,}66 \approx 276$

Opdracht 36 bladzijde 254

Geef voor de volgende rijen telkens de twee volgende termen.
Bepaal ook een expliciet voorschrift.

1 $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$

$\frac{16}{81}, \frac{32}{243}$ $\quad u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

2 $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \ldots$

$-\frac{4}{5}, -\frac{5}{6}$ $\quad u_n = -\frac{n}{n+1}$

3 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \ldots$

of $\frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}, \ldots$

$\frac{7}{6}, \frac{8}{6}$ $\quad u_n = \frac{n+2}{6}$

4 $4, 8, 12, 16, \ldots$

$20, 24$ $\quad u_n = 4n$

5 $0, 3, 8, 15, 24, \ldots$

$35, 48$ $\quad u_n = n^2 - 1$

6 $-1, 2, -3, 4, \ldots$

$-5, 6$ $\quad u_n = (-1)^n \cdot n$

Opdracht 37 bladzijde 254

De volgende rijen zijn gegeven door een expliciet voorschrift.
Bepaal de eerste vijf termen.

1 $u_n = 3n - 1$

$2, 5, 8, 11, 14$

2 $u_n = n^2 + 3n$

$4, 10, 18, 28, 40$

3 $u_n = 5 \cdot (-2)^n$

$-10, 20, -40, 80, -160$

4 $u_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

$1, 2, 6, 24, 120$

Opdracht 38 bladzijde 254

De volgende rijen zijn gegeven door een recursief voorschrift.
Bepaal de eerste vijf termen.

1 $u_n = u_{n-1} - 2$ en $u_1 = 100$

$100, 98, 96, 94, 92$

2 $u_n = -u_{n-1}$ en $u_1 = -3$

$-3, 3, -3, 3, -3$

3 $u_n = u_{n-1}^2$ en $u_1 = 2$

$2, 4, 16, 256, 65536$

4 $u_n = u_{n-1} \cdot n$ en $u_1 = 1$

$1, 2, 6, 24, 120$

Merk op dat 37.4 en 38.4 dezelfde rij beschrijven.

Opdracht 39 bladzijde 254

In de rij …, w, x, y, z, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … is elke term de som van de vorige twee termen.
Dan is w gelijk aan

A -3 B -2 C -1 D 2 E 3

Oplossing

..., w, x, y, z, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Omdat elke term de som is van de vorige twee termen, zal

$z = 1$

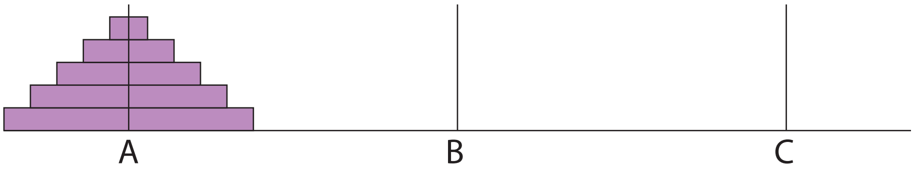
$y = -1$

$x = 2$

$w = -3$ (antwoord A)

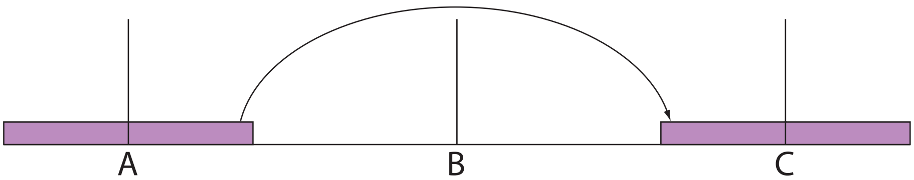
Merk op dat deze rij is opgebouwd volgens het principe van de rij van Fibonacci.

Opdracht 40 bladzijde 255

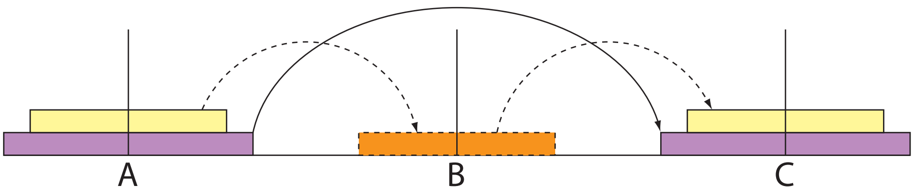


Een ‘toren van Hanoi’ bestaat uit een aantal schijven die over een naald (*A*) geschoven zijn zodanig dat de diameters van de schijven naar boven toe afnemen.
De schijven moeten nu naar naald *C* gebracht worden, waarbij naald *B* als tussenstand gebruikt mag worden.
De volgende regels moeten in acht genomen worden:
– nooit mag meer dan één schijf terzelfder tijd worden verplaatst,
– nooit mag een grotere schijf op een kleinere worden gelegd.

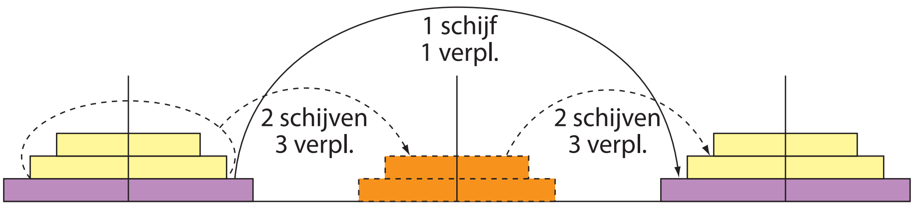
Op de onderstaande figuren zie je dat het aantal verplaatsingen bij 1, 2, 3 schijven respectievelijk 1, 3 en 7 bedraagt.



1 schijf: 1 verplaatsing



2 schijven: 3 verplaatsingen



3 schijven: 7 verplaatsingen

1 Hoeveel verplaatsingen zijn er nodig bij een toren van Hanoi met 4, 5, 6 schijven?

aantal verplaatsingen bij

$4 \text{ schijven}: \quad 7+1+7=15$

$5 \text{ schijven}: \quad 15+1+15=31$

$6 \text{ schijven}: \quad 31+1+31=63$

2 Stellen we het aantal schijven voor door n, dan vormt het aantal verplaatsingen een rij u_n.

a Geef een recursief voorschrift voor deze rij.

b Geef een expliciet voorschrift voor deze rij.

a $u_n = 2 \cdot u_{n-1} + 1$ met $u_1 = 1$

b $u_n = 2^n - 1$

3 Volgens een legende bevindt zich in een tempel in Hanoi een toren met 64 schijven. Dag en nacht zijn de priesters bezig met het verplaatsen van de schijven. Als hun werk beëindigd is, zal de wereld vergaan.
Hoe lang zijn ze hiermee bezig als ze (met het nodige ceremonieel) één minuut nodig hebben om een schijf te verleggen?

$$\begin{aligned} u_{64} &= 2^{64} - 1 \\ &= 1{,}845 \cdot 10^{19} \text{ minuten} \\ &= 3{,}074 \cdot 10^{17} \text{ uren} \\ &= 1{,}281 \cdot 10^{16} \text{ dagen} \\ &= 3{,}510 \cdot 10^{13} \text{ jaren} \end{aligned}$$

Opdracht 41 bladzijde 256

Geef voor de volgende rijen een expliciet voorschrift.

1 $\boxed{2, 1, \frac{8}{9}, 1, \frac{32}{25}, \ldots}$

of $\frac{2}{1}, \frac{4}{4}, \frac{8}{9}, \frac{16}{16}, \frac{32}{25}, \ldots$ $\quad u_n = \frac{2^n}{n^2}$

2 $\boxed{0, 2, 0, 2, 0, \ldots}$

$u_n = 1 + (-1)^n$

3 $\boxed{2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \ldots}$

of $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \ldots$ $\quad u_n = \frac{2}{n}$

4 $\boxed{\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \ldots}$

of $\frac{1}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{7}, \frac{4}{8}, \frac{5}{9}, \ldots$ $\quad u_n = \frac{n}{n+4}$

5 $\boxed{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \ldots}$

of $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 6}, \ldots$ $\quad u_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$

6 $\boxed{0, 1, 3, 6, 10, \ldots}$

of $\frac{0}{2}, \frac{2}{2}, \frac{6}{2}, \frac{12}{2}, \frac{20}{2}, \ldots$

of $\frac{1 \cdot 0}{2}, \frac{2 \cdot 1}{2}, \frac{3 \cdot 2}{2}, \frac{4 \cdot 3}{2}, \frac{5 \cdot 4}{2}, \ldots$ $\quad u_n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

Opdracht 42 bladzijde 256

Welk getal komt niet voor in de rij 1, 6, 4, 9, 7, … die ontstaat door afwisselend 5 op te tellen en 2 af te trekken?

A 3333 B 4444 C 5555 D 6666 E 7777

Oplossing

1, 6, 4, 9, 7, 12, 10, 15, 13, 18, 16, 21, ... opsplitsen in 2 rijen :

1, 4, 7, 10, 13, 16, ... $u_n = 3n - 2$

6, 9, 12, 15, 18, 21, ... $v_n = 3(n+1)$

4444 en 7777 horen bij u_n

3333 en 6666 horen bij v_n

5555 komt niet voor in deze rij (antwoord C)

Opdracht 43 bladzijde 256

Bepaal de rij van de verschillen v_n tussen de opeenvolgende termen van de rij van Fibonacci:
$v_n = u_{n+1} - u_n$ waarbij u_n de n-de term is van de rij 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
Wat stel je vast? Heb je daar een verklaring voor?

Oplossing

u_n : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

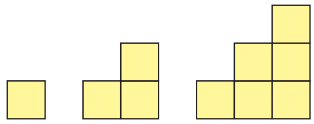
$v_n = u_{n+1} - u_n$: 0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

- Vaststelling : vanaf de tweede term bekomt men opnieuw de rij van Fibonacci.
- Verklaring :

  $v_n = u_{n+1} - u_n$ met $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$
  dus $v_n = u_n + u_{n-1} - u_n$
  zodat $v_n = u_{n-1}$

Opdracht 44 bladzijde 256

Om de eerste figuur te maken zijn er 4 lucifers nodig.
Om de tweede figuur te maken zijn er 10 lucifers nodig.
Om de derde figuur te maken zijn er 18 lucifers nodig.



Hoeveel lucifers zijn er nodig om de dertigste figuur te maken, als dat patroon wordt verdergezet?

A 900 B 990 C 1080 D 2700 E 3000

Oplossing

$$\begin{aligned} u_1 &= 4 = 1 \cdot 4 \\ u_2 &= 10 = 2 \cdot 5 \\ u_3 &= 18 = 3 \cdot 6 \\ &\vdots \\ u_n &= n \cdot (n+3) \end{aligned}$$

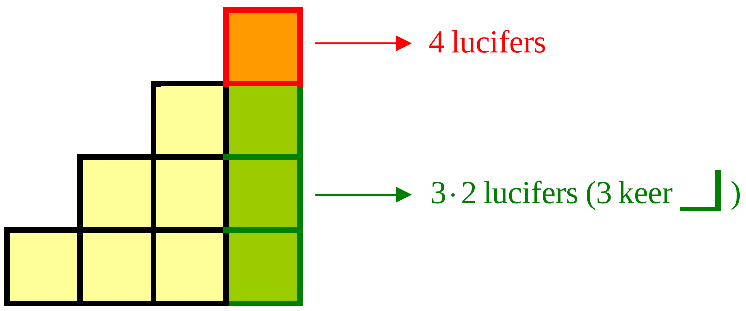
zodat $u_{30} = 30 \cdot 33 = 990$ (antwoord B)

De formule $u_n = n \cdot (n+3)$ kan bewezen worden door 'volledige inductie'.

1 De formule is waar voor $n = 1$,
want bij de eerste figuur zijn er $4 = 1 \cdot (1+3)$ lucifers nodig.

2 We veronderstellen dat de formule waar is voor n en tonen aan dat ze dan ook waar is voor $n+1$.

$u_{n+1} = u_n + 2n + 4$,
want :



dus : $u_4 = u_3 + 2 \cdot 3 + 4$

analoog : $u_{n+1} = u_n + 2 \cdot n + 4$

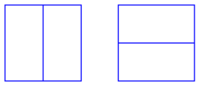
$$\begin{aligned} \text{zodat : } u_{n+1} &= n \cdot (n+3) + 2n + 4 \\ &= n^2 + 3n + 2n + 4 \\ &= n^2 + 5n + 4 \\ &= (n+1)(n+4) \\ &= (n+1)((n+1)+3) \end{aligned}$$

3 Door toepassing van de inductiehypothese is de formule bewezen.

Opdracht 45 bladzijde 256

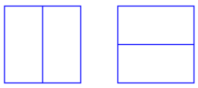
Voor de gemeenteraadsverkiezingen stelt de gemeente een houten wand ter beschikking van de kandidaten om hun verkiezingspropaganda op aan te brengen.
De wand wordt opgebouwd met rechthoekige panelen van 2 m op 1 m.

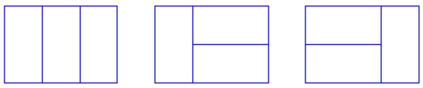
Als de wand 1 m lang moet zijn, heeft men slechts één mogelijkheid. 

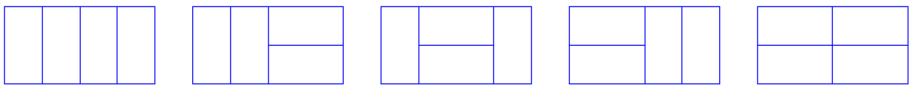
Als de wand 2 m lang moet zijn, heeft men twee mogelijkheden. 

1 Bereken hoeveel mogelijkheden men heeft voor een wand met een lengte van 3 m, 4 m, 5 m, 6 m, 7 m.

Bij 1 m  1 mogelijkheid

Bij 2 m  2 mogelijkheden

Bij 3 m  3 mogelijkheden

Bij 4 m  5 mogelijkheden

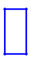
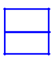
Bij 5 m 8 mogelijkheden

Bij 6 m 13 mogelijkheden

Bij 7 m 21 mogelijkheden

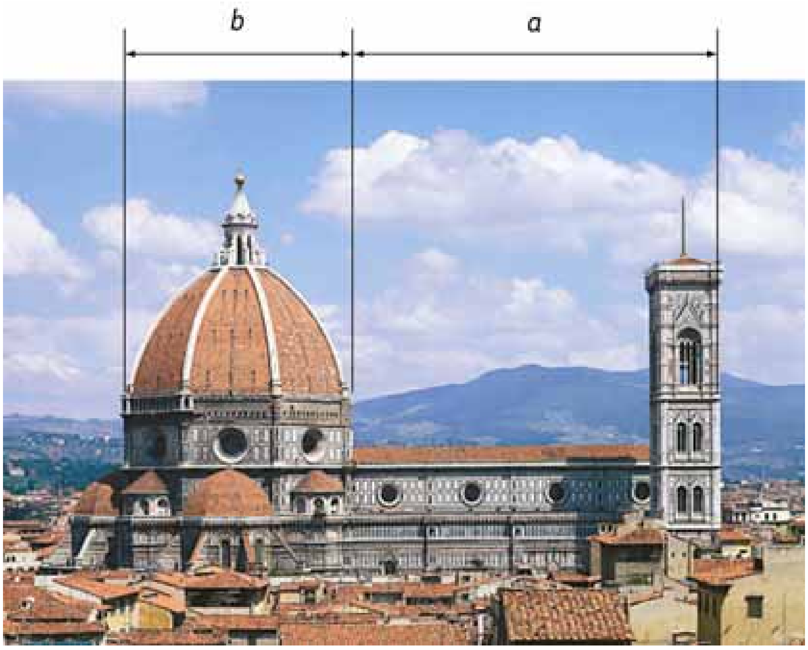
2 Geef een formule om te bepalen hoeveel mogelijkheden er zijn voor een muur met een lengte van *n* m.

Aantal mogelijkheden voor een muur met lengte n :

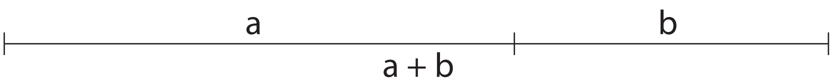
- Bij alle mogelijkheden voor een muur met lengte $n-1$ kan men links een verticaal paneel  voorzetten.
- Bij alle mogelijkheden voor een muur met lengte $n-2$ kan men links een dubbel paneel  plaatsen.

Dit geeft : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ met $u_1 = 1$ en $u_2 = 2$.

Opdracht 46 bladzijde 257



Bij de **gulden snede**, die in de architectuur en in de beeldende kunsten een grote rol speelt, wordt een lijnstuk zo in twee gedeeld dat het grootste deel zich verhoudt tot het kleinste zoals het hele lijnstuk zich verhoudt tot het grootste deel (zie ook hoofdstuk 3, opdracht 72).



$$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$$

Men noemt $\varphi=\frac{a}{b}$ de **gulden verhouding**.

1 Toon aan dat $\varphi=\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$ een oplossing is van $\varphi^2-\varphi-1=0$.

$$\varphi=\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}\quad\Rightarrow\quad\varphi^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a+b}{a}=\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+1=\varphi+1$$

Bijgevolg is φ een oplossing van $\varphi^2-\varphi-1=0$.

2 Bereken daaruit φ. Geef φ exact weer en rond daarna af op 10 cijfers na de komma.

$$\varphi^2-\varphi-1=0$$

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)=5$$

$$\varphi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\notin\mathbb{R}^+\quad\text{of}\quad\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{dus: }\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\text{exact})$$

$$\varphi=1{,}6180339887\ (\text{afronding})$$

3 Onderzoek in de rij van Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... de verhouding $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ voor $n = 10$, $n = 20$, $n = 30$. Rond telkens af op 10 cijfers na de komma. Wat merk je op?

$\frac{u_{11}}{u_{10}} = \frac{89}{55} = 1,6181818182$ $\frac{u_{21}}{u_{20}} = \frac{10946}{6765} = 1,6180339985$ $\frac{u_{31}}{u_{30}} = \frac{1346269}{832040} = 1,6180339888$

De verhouding $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ nadert tot de gulden verhouding.

Opdracht 47 bladzijde 258

De volgende rijen zijn rekenkundig of meetkundig. Bereken de gevraagde term.

1 $5, 12, 19, 26, \ldots ; u_{120}$?

rekenkundige rij met $u_1 = 5$ en $v = 7$

$u_{120} = 5 + 119 \cdot 7 = 838$

2 $0,5 ; 0,25 ; 0,125 ; \ldots ; u_7$?

meetkundige rij met $u_1 = 0,5$ en $q = 0,5$

$u_7 = 0,5 \cdot (0,5)^6 = 0,0078125$

of $u_7 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{128}$

3 $-12, 36, -108, \ldots ; u_{19}$?

meetkundige rij met $u_1 = -12$ en $q = -3$

$u_{19} = -12 \cdot (-3)^{18} = -4649045868$

4 $199, 150, 101, \ldots ; u_{10}$?

rekenkundige rij met $u_1 = 199$ en $v = -49$

$u_{10} = 199 + 9 \cdot (-49) = -242$

Opdracht 48 bladzijde 258

Bereken het gevraagde bij de gegevens van een rekenkundige rij.

1 $u_1 = 44$ en $v = -4$, u_{11} ?

$u_{11} = 44 + 10 \cdot (-4) = 4$

2 $u_1 = -72$ en $u_{13} = 72$, v ?

$u_{13} = u_1 + 12 \cdot v$

$72 = -72 + 12v$

$144 = 12v$

$v = 12$

3 $u_{23} = 68$ en $v = -5$, u_1 ?

$u_{23} = u_1 + 22 \cdot v$

$68 = u_1 + 22 \cdot (-5)$

$u_1 = 178$

4 $u_1 = 271$, $u_n = 15$ en $v = -8$, n ?

$u_n = u_1 + (n-1) \cdot v$

$15 = 271 + (n-1) \cdot (-8)$

$-256 = (n-1) \cdot (-8)$

$n - 1 = 32$

$n = 33$

Opdracht 49 bladzijde 258

Bereken het gevraagde bij de gegevens van een meetkundige rij.

1 $u_1 = 64$ en $u_3 = 4$, q?

$$u_3 = u_1 \cdot q^2$$
$$4 = 64 \cdot q^2$$
$$q^2 = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$
$$q = \frac{1}{4} \quad \text{of} \quad q = -\frac{1}{4}$$

2 $u_{10} = 4096$ en $q = -2$, u_1?

$$u_{10} = u_1 \cdot q^9$$
$$4096 = u_1 \cdot (-2)^9$$
$$u_1 = \frac{4096}{(-2)^9}$$
$$u_1 = -8$$

3 $u_3 = 1944$ en $u_5 = 864$, u_8?

$$\begin{cases} u_3 = u_1 \cdot q^2 \\ u_5 = u_1 \cdot q^4 \end{cases}$$

$$\text{dus} \begin{cases} u_1 \cdot q^2 = 1944 & (1) \\ u_1 \cdot q^4 = 864 & (2) \end{cases}$$

$$(2):(1) \text{ geeft: } q^2 = \frac{864}{1944} = \frac{4}{9}$$
$$q = \frac{2}{3} \text{ of } q = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Invullen in (1) geeft: } u_1 \cdot \frac{4}{9} = 1944$$
$$u_1 = 1944 \cdot \frac{9}{4} = 4374$$

$$u_8 = u_1 \cdot q^7 = 4374 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 256$$

$$\text{of } u_8 = u_1 \cdot q^7 = 4374 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^7 = -256$$

4 $u_1 = 3$, $u_n = \frac{32}{81}$ en $q = \frac{2}{3}$, n?

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$
$$\frac{32}{81} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$\frac{32}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$n - 1 = 5$$
$$n = 6$$

Opdracht 50 bladzijde 258

Beschouw de rekenkundige rij 56, 47, 38, …

1 Bepaal een recursief en expliciet voorschrift van deze rij.

$\text{recursief voorschrift: } u_n = u_{n-1} - 9 \text{ met } u_1 = 56$

$\text{expliciet voorschrift: } u_n = 56 + (n-1)\cdot(-9) = 65 - 9n$

2 Bereken u_{60}.

$u_{60} = 65 - 9\cdot 60 = -475$

3 Behoren -709 en 0 tot deze rij?
Geef het volgnummer van de term indien die tot de rij behoort.

$$\begin{aligned} -709 &= 65 - 9n \\ -774 &= -9n \\ n &= 86 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 65 - 9n \\ 9n &= 65 \\ n &= \frac{65}{9} \notin \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Dus 0 behoort niet tot deze rij.

Opdracht 51 bladzijde 258

Beschouw de meetkundige rij 11, 33, 99, …

1 Bepaal een recursief en expliciet voorschrift van deze rij.

$\text{recursief voorschrift: } u_n = u_{n-1}\cdot 3 \text{ met } u_1 = 11$

$\text{expliciet voorschrift: } u_n = 11\cdot 3^{n-1}$

2 Bereken u_{15}.

$u_{15} = 11\cdot 3^{14} = 52612659$

3 Behoren 770 en 2673 tot deze rij?
Geef het volgnummer van de term indien die tot de rij behoort.

$$\begin{aligned} 770 &= 11\cdot 3^{n-1} \\ 3^{n-1} &= \frac{770}{11} = 70 \end{aligned}$$

Dit kan niet voor $n \in \mathbb{N}_0$, dus 770 behoort niet tot deze rij.

$$\begin{aligned} 2673 &= 11\cdot 3^{n-1} \\ 3^{n-1} &= \frac{2673}{11} = 243 \\ n - 1 &= 5 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Opdracht 52 bladzijde 258

Bewijs dat de volgende getallen een rekenkundige rij vormen.

1 $a, b, 2b - a$

$$b = a + (b - a)$$
$$2b - a = b + (b - a)$$

Dus elke term is de som van de vorige met een constant getal, nl. $b - a$.

2 $2x, x + y, 2y$

$$x + y = 2x + (-x + y)$$
$$2y = x + y + (-x + y)$$

Dus elke term is de som van de vorige met een constant getal, nl. $-x + y$.

Opdracht 53 bladzijde 259

Bewijs dat de volgende getallen een rekenkundige rij vormen.

1 $\frac{a^2 + b^2}{2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, ab$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + v$$
$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{2a^2+2b^2}{4} + v$$
$$v = \frac{-a^2+2ab-b^2}{4} \qquad (1)$$

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + v$$
$$\frac{4ab}{4} = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} + v$$
$$v = \frac{-a^2+2ab-b^2}{4} \qquad (2)$$

Omdat $(1) = (2)$ is elke term de som van de vorige met een constant getal.

2 $\frac{a}{a-1}, \frac{a+1}{2a}, \frac{1}{a-a^2}$

$$\frac{a+1}{2a} = \frac{a}{a-1} + v$$
$$v = \frac{(a+1)(a-1)}{2a(a-1)} - \frac{a \cdot 2a}{2a(a-1)}$$
$$v = \frac{a^2-1-2a^2}{2a(a-1)}$$

$$\frac{1}{a-a^2} = \frac{a+1}{2a} + v$$
$$v = \frac{1}{a(1-a)} - \frac{a+1}{2a}$$
$$v = \frac{-2}{2a(a-1)} - \frac{(a+1)(a-1)}{2a(a-1)}$$

$$v = \frac{-a^2-1}{2a(a-1)} \quad (1)$$

$$v = \frac{-2-(a^2-1)}{2a(a-1)}$$

$$v = \frac{-1-a^2}{2a(a-1)} \quad (2)$$

Omdat $(1)=(2)$ is elke term de som van de vorige met een constant getal.

Opdracht 54 bladzijde 259

Bewijs de volgende eigenschap:

a, b en c zijn opeenvolgende termen in een rekenkundige rij $\Leftrightarrow$ $b = \dfrac{a+c}{2}$

In een rekenkundige rij is elke term dus het rekenkundig gemiddelde van de vorige en de volgende term, wat de naam van de rij verklaart.

Oplossing

a, b en c zijn opeenvolgende termen van een rekenkundige rij

$$\Updownarrow$$

$$b = a + v \text{ en } c = b + v$$

$$\Updownarrow \quad v = c - b$$

$$b = a + c - b$$

$$\Updownarrow$$

$$2b = a + c$$

$$\Updownarrow$$

$$b = \frac{a+c}{2}$$

Opdracht 55 bladzijde 259

Als $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{a+b}$ een rekenkundige rij vormen, dan is ook a^2, b^2, c^2 een rekenkundige rij.

Bewijs dit.

Oplossing

$\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{a+b}$ vormen een rekenkundige rij

dus:

$$v = \frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} \text{ en } v = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}$$

zodat:

$$\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}$$

$$\frac{(a+b)(b+c)-(a+b)(a+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}=\frac{(a+c)(b+c)-(a+b)(b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$(a+b)(b+c)-(a+b)(a+c)=(a+c)(b+c)-(a+b)(b+c)$$

$$ab+ac+b^2+bc-a^2-ac-ab-bc=ab+ac+bc+c^2-ab-ac-b^2-bc$$

$$b^2-a^2=c^2-b^2$$

$$2b^2=a^2+c^2$$

$$b^2=\frac{a^2+c^2}{2}$$

Omwille van de eigenschap uit opdracht 54 kunnen we nu besluiten dat a^2, b^2, c^2 een rekenkundige rij vormen.

Opdracht 56 bladzijde 259

De hoeken van een vijfhoek vormen een rekenkundige rij waarvan het verschil 15° bedraagt. Bereken die hoeken.

Oplossing

- Stel: kleinste hoek = x
  dan zijn de andere hoeken: $x+15, x+30, x+45, x+60.$
- De som van de hoeken van een vijfhoek: $3\cdot 180° = 540°.$
- $x+(x+15)+(x+30)+(x+45)+(x+60)=540$
  $$5x = 540-15-30-45-60$$
  $$5x = 390$$
  $$x = 78$$
- De gevraagde hoeken zijn 78°, 93°, 108°, 123° en 138°.

Ofwel:

- Stel: middelste hoek = x
  dan zijn de andere hoeken: $x-30, x-15, x+15, x+30.$
- De som van de hoeken van een vijfhoek: $3\cdot 180° = 540°.$
- $(x-30)+(x-15)+x+(x+15)+(x+30)=540$
  $$5x = 540$$
  $$x = 108$$
- De gevraagde hoeken zijn 78°, 93°, 108°, 123° en 138°.

Opdracht 57 bladzijde 259

In een rekenkundige rij geldt: $u_n = u_k + (n-k)\cdot v$.
Bewijs dit.

Oplossing

$u_n = u_1 + (n-1)\cdot v \qquad (1)$

$u_k = u_1 + (k-1)\cdot v \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_k - (k-1)\cdot v \qquad (2)$

(2) invullen in (1) geeft: $u_n = u_k - (k-1)\cdot v + (n-1)\cdot v$

$= u_k + (-k+1+n-1)\cdot v$

$= u_k + (n-k)\cdot v$

Opdracht 58 bladzijde 259

Bepaal telkens u_1 en v bij de rekenkundige rij met

1 $u_{10} = 37$ en $u_{21} = -40$

$u_{21} = u_{10} + 11\cdot v$	$u_{10} = u_1 + 9\cdot v$
$-40 = 37 + 11\cdot v$	$37 = u_1 + 9\cdot(-7)$
$-77 = 11\cdot v$	$u_1 = 63 + 37$
$v = -7$	$u_1 = 100$

Ofwel:

$$\begin{cases} u_{10} = u_1 + 9v \\ u_{21} = u_1 + 20v \end{cases}$$

$$\text{dus} \begin{cases} u_1 + 9v = 37 & (1) \\ u_1 + 20v = -40 & (2) \end{cases}$$

$(2)-(1)$ geeft: $11v = -77$

$v = -7$

Invullen in (1) geeft: $u_1 + 9\cdot(-7) = 37$

$u_1 = 37 + 63$

$u_1 = 100$

$\boxed{2 \quad u_{15} = 325 \text{ en } u_{25} = 375}$

$$u_{25} = u_{15} + 10v \qquad u_{15} = u_1 + 14v$$
$$375 = 325 + 10v \qquad 325 = u_1 + 14 \cdot 5$$
$$50 = 10v \qquad u_1 = 325 - 70$$
$$v = 5 \qquad u_1 = 255$$

$\boxed{3 \quad u_{17} = 27 \text{ en } u_{41} = 57}$

$$u_{41} = u_{17} + 24v \qquad u_{17} = u_1 + 16v$$
$$57 = 27 + 24v \qquad 27 = u_1 + 16 \cdot \frac{5}{4}$$
$$30 = 24v \qquad u_1 = 27 - 20$$
$$v = \frac{30}{24} = \frac{5}{4} \qquad u_1 = 7$$

$\boxed{4 \quad u_{12} = -29 \text{ en } u_{37} = -\frac{183}{2}}$

$$u_{37} = u_{12} + 25v \qquad u_{12} = u_1 + 11v$$
$$-\frac{183}{2} = -29 + 25v \qquad -29 = u_1 + 11 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)$$
$$-\frac{125}{2} = 25v \qquad u_1 = -29 + \frac{55}{2}$$
$$v = -\frac{5}{2} \qquad u_1 = -\frac{3}{2}$$

Opdracht 59 bladzijde 259

Bewijs de volgende eigenschap:

a, b en c zijn opeenvolgende termen in een meetkundige rij $\Leftrightarrow$ $b^2 = a \cdot c$

In een meetkundige rij met positieve termen is elke term gelijk aan het meetkundig gemiddelde (of de middelevenredige) van de vorige en de volgende term, wat de naam van de rij verklaart.

a, b en c zijn opeenvolgende termen van een meetkundige rij

$$\Updownarrow$$

$$b = a \cdot q \text{ en } c = b \cdot q$$

$$\Updownarrow \quad q = \frac{c}{b}$$

$$b = a \cdot \frac{c}{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$b^2 = a \cdot c$$

Opdracht 60 bladzijde 259

Als a, b, c, d een meetkundige rij vormen, dan geldt: $(b-c)^2 = ac + bd - 2ad$.
Bewijs dit.

Oplossing

$$\begin{aligned}(b-c)^2 &= b^2 - 2bc + c^2 \\ &= ac - 2bc + bd \\ &= ac + bd - 2bc \qquad (1)\end{aligned}$$

a, b, c, d vormen een meetkundige rij, zie eigenschap opdracht 59

Er geldt:

$b = a \cdot q \qquad (2)$

$c = a \cdot q^2 \qquad (3)$

$d = a \cdot q^3 \qquad (4)$

Uit (2) en (3) volgt: $b \cdot c = a^2 \cdot q^3$.

Uit (4) volgt: $a \cdot d = a^2 \cdot q^3$

Dus: $bc = ad$

Invullen in (1) geeft: $(b-c)^2 = ac + bd - 2ad$

Opdracht 61 bladzijde 259

In elke meetkundige rij geldt: $u_n = u_k \cdot q^{n-k}$.
Bewijs dit.

Oplossing

$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \qquad (1)$

$u_k = u_1 \cdot q^{k-1} \Rightarrow u_1 = \dfrac{u_k}{q^{k-1}} \qquad (2)$

(2) invullen in (1) geeft:

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{u_k}{q^{k-1}} \cdot q^{n-1} \\ &= u_k \cdot q^{n-1-k+1} \\ &= u_k \cdot q^{n-k}\end{aligned}$$

Opdracht 62 bladzijde 260

In een meetkundige rij geldt: $u_2 = 12$ en $u_3 \cdot u_5 = 36864$.
Bepaal u_7.

Oplossing

- $u_3 \cdot u_5 = (u_2 \cdot q) \cdot (u_2 \cdot q^3) = u_2^2 \cdot q^4$

  $36864 = 12^2 \cdot q^4$

  $$q^4 = \frac{36864}{144} = 256$$

  $q = 4$ of $q = -4$

- $u_7 = u_2 \cdot q^5 = 12 \cdot 4^5 = 12288$

  of $u_7 = u_2 \cdot q^5 = 12 \cdot (-4)^5 = -12288$

Ofwel:

$$\begin{cases} u_2 = u_1 \cdot q \\ u_3 \cdot u_5 = u_1 \cdot q^2 \cdot u_1 \cdot q^4 = u_1^2 \cdot q^6 \end{cases}$$

$$\text{dus } \begin{cases} u_1 \cdot q = 12 & (1) \\ u_1^2 \cdot q^6 = 36864 & (2) \end{cases}$$

Uit (1) volgt: $u_1 = \dfrac{12}{q}$ (3)

Invullen in (2) geeft: $\left(\dfrac{12}{q}\right)^2 \cdot q^6 = 36864$

$$q^4 = \frac{36864}{144} = 256$$

$$q = 4 \text{ of } q = -4$$

Invullen in (3) geeft: $u_1 = 3$ of $u_1 = -3$

$u_7 = u_1 \cdot q^6 = 3 \cdot 4^6 = 12288$

of $u_7 = u_1 \cdot q^6 = (-3) \cdot (-4)^6 = -12288$

Opdracht 63 bladzijde 260

1 Interpoleer tussen 1 en 4096 vijf getallen zodat een rekenkundige rij ontstaat met 7 termen.

$$1, 1+v, 1+2v, 1+3v, 1+4v, 1+5v, 1+6v$$

$$\begin{aligned} \text{met } 1+6v &= 4096 \\ 6v &= 4095 \\ v &= 682,5 \end{aligned}$$

Besluit: $1 ; 683,5 ; 1366 ; 2048,5 ; 2731 ; 3413,5 ; 4096$

2 Interpoleer tussen 1 en 4096 vijf getallen zodat een meetkundige rij ontstaat met 7 termen.

$$1, q, q^2, q^3, q^4, q^5, q^6$$

$$\text{met } q^6 = 4096$$

$$q = 4 \text{ of } q = -4$$

Besluit: $1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096$

of

$1, -4, 16, -64, 256, -1024, 4096$

Opdracht 64 bladzijde 260

Een blad papier is 0,1 mm dik. Men snijdt dit blad in twee en legt de twee delen op elkaar zodat de totale dikte 0,2 mm bedraagt. Onderstel dat men daarna nog 13 keer het hele pak in twee snijdt en telkens de twee delen op elkaar legt. Hoe dik is het uiteindelijke pak?

A $1,4$ mm B $1,4$ cm C $1,4$ dm D $1,4$ m E meer dan $1,4$ m

Oplossing

meetkundige rij met $u_1 = 0,1$ en $q = 2$

Het blad papier wordt 14 keer in twee gesneden.

$$u_{15} = u_1 \cdot q^{14} = 0,1 \cdot 2^{14} = 1638,4$$

De dikte is dus $1638,4$ mm $= 1,64$ m (antwoord E)

Opdracht 65 bladzijde 260

In elke meetkundige rij geldt: $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_n = \sqrt{(u_1 \cdot u_n)^n}$. Bewijs dit.

- ofwel is n even, stel dan $n = 2n'$

$$\begin{aligned}
& u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_n \\
&= u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_{2n'-2} \cdot u_{2n'-1} \cdot u_{2n'} \\
&= u_1 \cdot (u_1 \cdot q) \cdot (u_1 \cdot q^2) \cdot \ldots \cdot (u_{2n'} \cdot q^{-2}) \cdot (u_{2n'} \cdot q^{-1}) \cdot u_{2n'} \\
&= u_1 \cdot u_1 \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_{2n'} \cdot u_{2n'} \cdot u_{2n'} \\
&= u_1^{\,n'} \cdot u_{2n'}^{\,n'} \\
&= (u_1 \cdot u_{2n'})^{n'} \\
&= (u_1 \cdot u_{2n'})^{\frac{2n'}{2}} \\
&= \left((u_1 \cdot u_{2n'})^{2n'}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{(u_1 \cdot u_{2n'})^{2n'}} \\
&= \sqrt{(u_1 \cdot u_n)^n}
\end{aligned}$$

zodat $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_n = \sqrt{(u_1 \cdot u_n)^n}$

- ofwel is n oneven, stel dan $n = 2n'+1$

$$\begin{aligned}
& u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_n \\
&= u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_{2n'-1} \cdot u_{2n'} \cdot u_{2n'+1} \\
&= u_1 \cdot (u_1 \cdot q) \cdot (u_1 \cdot q^2) \cdot \ldots \cdot (u_1 \cdot q^{n'}) \cdot \ldots \cdot (u_{2n'+1} \cdot q^{-2}) \cdot (u_{2n'+1} \cdot q^{-1}) \cdot u_{2n'+1} \\
&= u_1 \cdot u_1 \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot (u_1 \cdot q^{n'}) \cdot \ldots \cdot u_{2n'+1} \cdot u_{2n'+1} \cdot u_{2n'+1} \\
&= u_1^{\,n'} \cdot u_{2n'+1}^{\,n'} \cdot (u_1 \cdot q^{n'}) \\
&= (u_1 \cdot u_{2n'+1})^{n'} \cdot (u_1^{\,2} \cdot q^{2n'})^{\frac{1}{2}} \\
&= (u_1 \cdot u_{2n'+1})^{\frac{2n'}{2}} \cdot (u_1 \cdot u_1 \cdot q^{2n'})^{\frac{1}{2}} \\
&= \left((u_1 \cdot u_{2n'+1})^{2n'}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (u_1 \cdot u_{2n'+1})^{\frac{1}{2}} \\
&= \left((u_1 \cdot u_{2n'+1})^{2n'+1}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{(u_1 \cdot u_{2n'+1})^{2n'+1}} \\
&= \sqrt{(u_1 \cdot u_n)^n}
\end{aligned}$$

zodat $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_n = \sqrt{(u_1 \cdot u_n)^n}$

Opdracht 66 bladzijde 260

Welk getal moeten we optellen bij 3, 19 en 67 opdat de drie sommen opeenvolgende termen van een meetkundige rij zouden vormen?

Oplossing

Stel: gevraagde getal = x

dan:

$3+x, 19+x, 67+x$ vormen een meetkundige rij

$$\Updownarrow \quad \text{eigenschap opdracht 59}$$

$$(19+x)^2 = (3+x)(67+x)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + 38x + 361 = x^2 + 70x + 201$$

$$\Updownarrow$$

$$32x = 160$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 5$$

Controle

$3+5=8, 19+5=24, 67+5=72$

8, 24, 72 vormen een meetkundige rij met $q = 3$.

Opdracht 67 bladzijde 260

Een rechthoekige driehoek, waarvan de zijden een rekenkundige rij vormen, is gelijkvormig met de rechthoekige driehoek waarvan de zijden 3, 4 en 5 zijn. Bewijs dit.

Oplossing

Noem de zijden van de rechthoekige driehoek $x-v$, x en $x+v$, met $v > 0$.

Volgens de stelling van Pythagoras zal:

$$(x-v)^2 + x^2 = (x+v)^2$$

$$x^2 - 2vx + v^2 + x^2 = x^2 + 2vx + v^2$$

$$x^2 - 4vx = 0$$

$$x(x-4v) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{of} \quad x = 4v$$

$x = 0$ is onmogelijk, omdat $-v, 0, v$ geen zijden van een driehoek kunnen zijn.

Besluit

De gevraagde zijden zijn 3v, 4v, 5v.

De rechthoekige driehoek is gelijkvormig met de rechthoekige driehoek waarvan de zijden 3, 4 en 5 zijn.

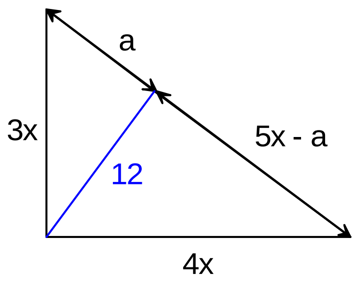
Opdracht 68 bladzijde 260

In een rechthoekige driehoek vormen de zijden een rekenkundige rij en is de hoogte op de schuine zijde 12 cm. Bereken de drie zijden.

Aanwijzing: gebruik de vorige opdracht.

Oplossing

- Noem de zijden van de rechthoekige driehoek 3x, 4x en 5x. (zie opdracht 67)
  $5x = \text{schuine zijde}$
- De hoogtelijn op de schuine zijde verdeelt deze zijde in 2 delen; noem deze a en $5x - a$.
- De hoogte op de schuine zijde is middelevenredig tussen de stukken waarin ze de schuine zijde verdeelt (eigenschap in een rechthoekige driehoek).



$$\text{Dus: } \frac{5x-a}{12} = \frac{12}{a}$$

$$(5x-a)\cdot a = 144$$

$$a^2 - 5ax + 144 = 0 \quad (1)$$

- $a^2 + 144 = 9x^2$ (stelling van Pythagoras in rechthoekige deeldriehoek)
  $a^2 = 9x^2 - 144 \quad (2)$
- Uit (1) en (2) volgt:

$$9x^2 - 144 - 5ax + 144 = 0$$

$$9x^2 - 5ax = 0$$

$$x\cdot(9x - 5a) = 0$$

$$\cancel{x = 0} \text{ of } a = \frac{9}{5}x \quad (3)$$

- (3) invullen in (1) geeft:

$$\frac{81}{25}x^2 - 9x^2 + 144 = 0$$

$$81x^2 - 225x^2 = -3600$$

$$x^2 = \frac{-3600}{-144} = 25$$

$$x = 5 \text{ of } \cancel{x = -5}$$

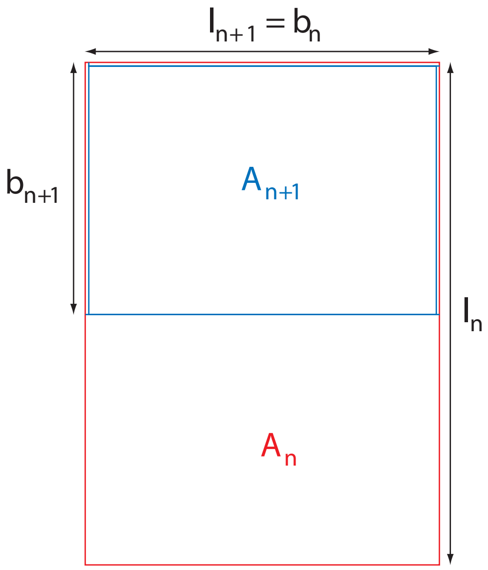
Besluit

De gevraagde zijden zijn 15 cm, 20 cm en 25 cm.

Opdracht 69 bladzijde 261

De DIN-papierformaten zijn geconstrueerd volgens de volgende regels:

- als je een blad van formaat A_n in twee vouwt, krijg je een blad van formaat A_{n+1};
- alle bladen zijn gelijkvormig, dus $\dfrac{l_n}{b_n} = \dfrac{l_{n+1}}{b_{n+1}}$;
- het grootste formaat A_0 heeft een oppervlakte van 1 m^2.



1 Vul de tabel in.

type	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
lengte						
breedte						

- $A_0 = l_0 \cdot b_0 = 1 \quad (1)$ $\qquad l_1 = b_0 \quad (2)$

  $A_1 = l_1 \cdot b_1 = \dfrac{1}{2}$ $\qquad b_1 = \dfrac{1}{2} l_0 \quad (3)$

  $A_2 = l_2 \cdot b_2 = \dfrac{1}{4}$

  $A_3 = l_3 \cdot b_3 = \dfrac{1}{8}$

  $A_4 = l_4 \cdot b_4 = \dfrac{1}{16}$

  $A_5 = l_5 \cdot b_5 = \dfrac{1}{32}$

- Uit $\dfrac{l_0}{b_0} = \dfrac{l_1}{b_1}$ volgt $l_0 \cdot b_1 = l_1 \cdot b_0$.

  Substitutie van (2) en (3) geeft:

  $$l_0 \cdot \frac{1}{2} l_0 = b_0 \cdot b_0$$
  $$l_0^2 = 2 \cdot b_0^2 \quad (4)$$

  Uit (1) volgt: $b_0 = \dfrac{1}{l_0}$.

  Invullen in (4) geeft: $l_0^2 = 2 \cdot \dfrac{1}{l_0^2}$

  $$l_0^4 = 2$$
  $$l_0 = \sqrt[4]{2}$$

  zodat $b_0 = \dfrac{1}{l_0} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Uit de gegevens volgt: $l_n = \frac{1}{2} \cdot l_{n-2}$ en $b_n = \frac{1}{2} \cdot b_{n-2}$

zodat: $l_n = l_{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ en $b_n = b_{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- $l_0 = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}189$ $\qquad$ $b_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0{,}841$

$l_1 = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}841$ $\qquad$ $b_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}595$

$l_2 = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1}{2} \approx 0{,}595$ $\qquad$ $b_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{1}{2} \approx 0{,}420$

$l_3 = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}420$ $\qquad$ $b_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}297$

$l_4 = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1}{4} \approx 0{,}297$ $\qquad$ $b_4 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{1}{4} \approx 0{,}210$

$l_5 = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} \approx 0{,}210$ $\qquad$ $b_5 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} \approx 0{,}149$

type	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
lengte	1,189	0,841	0,595	0,420	0,297	0,210
breedte	0,841	0,595	0,420	0,297	0,210	0,149

2 Welk soort rijen zijn $l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$ en $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$?

meetkundige rijen met $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3 Geef voor beide rijen een expliciet voorschrift.

$l_n = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ $\qquad$ $b_n = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

4 Bepaal ook een expliciet voorschrift voor de rij u_n waarvan de termen de opeenvolgende oppervlaktes van een blad van het type $A_0, A_1, A_2, \ldots$ zijn.

$u_n = l_n \cdot b_n = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{2^n}$, dus: $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ofwel: $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n$ met $u_0 = 1$

$$u_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Opdracht 70 bladzijde 262

De volgende rijen zijn meetkundig of rekenkundig. Bepaal telkens de gevraagde som.

1 $4, 7, 10, 13, \ldots ; s_{20}$?

rekenkundige rij met $u_1 = 4$ en $v = 3$

$$u_{20} = 4 + 19 \cdot 3 = 61$$

$$s_{20} = 20 \cdot \frac{4+61}{2} = 650$$

2 $\frac{1}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \ldots ; s_8$?

meetkundige rij met $u_1 = \frac{1}{16}$ en $q = -2$

$$s_8 = \frac{1}{16} \cdot \frac{(-2)^8 - 1}{-2-1} = -\frac{85}{16}$$

3 $0,5 ; 0,25 ; 0,125 ; \ldots ; s_7$?

meetkundige rij met $u_1 = 0,5$ en $q = 0,5$

$$s_7 = 0,5 \cdot \frac{(0,5)^7 - 1}{0,5-1} = \frac{127}{128}$$

4 $1000, 950, 900, 850, \ldots ; s_{100}$?

rekenkundige rij met $u_1 = 1000$ en $v = -50$

$$u_{100} = 1000 + 99 \cdot (-50) = -3950$$

$$s_{100} = 100 \cdot \frac{1000 - 3950}{2} = -147500$$

Opdracht 71 bladzijde 262

Bereken de som van de eerste n natuurlijke getallen verschillend van 0.

Oplossing

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n \cdot \frac{1+n}{2}$$ (rekenkundige rij)

Opdracht 72 bladzijde 262

Bereken $1 - 5 + 5^2 - 5^3 + 5^4 - \ldots - 5^9$

Oplossing

$$1 - 5 + 5^2 - 5^3 + 5^4 - \ldots - 5^9$$

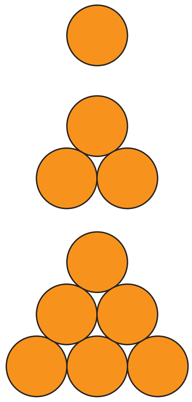
$$= 5^0 - 5^1 + 5^2 - 5^3 + 5^4 - \ldots - 5^9$$ (meetkundige rij met $u_1 = 1$ en $q = -5$)

$$= 1 \cdot \frac{(-5)^{10} - 1}{-5-1}$$

$$= -1627604$$

Opdracht 73 bladzijde 262

Een efficiënte manier om bijvoorbeeld sinaasappels te stapelen is in de vorm van een piramide met een driehoekig grondvlak.
Op de tekening hiernaast zie je een bovenaanzicht van de eerste (bovenste) laag, tweede en derde laag.
Noem het aantal sinaasappels op de n-de laag u_n .



1 Vul de tabel in:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
1	3				

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
1	3	6	10	15	21

2 Geef een recursief voorschrift van deze rij.

$u_n = u_{n-1} + n$ met $u_1 = 1$

3 Geef een expliciet voorschrift van deze rij.

$$u_n = 1 + 2 + \ldots + n = n \cdot \frac{1+n}{2}$$

4 Hoeveel sinaasappels liggen op de 10e rij?

$$u_{10} = 10 \cdot \frac{1+10}{2} = 55$$

5 Het totaal aantal sinaasappels in een stapel met n lagen is $\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$.

Controleer deze formule voor een stapel met 10 lagen.

$1+3+6+10+15+21+28+36+45+55 = 220$ en

$$\frac{1}{6} \cdot 10 \cdot (10+1) \cdot (10+2) = \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 220$$

De formule $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ kan bewezen worden door volledige inductie.

1 De formule is waar voor $n = 1$,

want het totaal aantal sinaasappels is dan $1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$.

2 We veronderstellen dat de formule waar is voor n en tonen aan dat ze dan ook waar is voor $n+1$.

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + u_{n+1} \\ &= \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) + (n+1) \cdot \frac{1+n+1}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) + (n+1) \cdot \frac{n+2}{2}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) + \frac{3}{6}(n+1) \cdot (n+2)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot (n+2)(n+3)$$

3 Door toepassing van de inductiehypothese is de formule bewezen.

Opdracht 74 bladzijde 263

Bepaal de som van de eerste n even getallen verschillend van 0.

Oplossing

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n \cdot \frac{2+2n}{2} = n(n+1)$$

Opdracht 75 bladzijde 263

1 Bepaal de som van alle natuurlijke getallen van 3 cijfers.

Gevraagd : $100 + 101 + 102 + ... + 999$.

We bepalen het aantal termen in deze som : $999 = 100 + (n-1) \cdot 1$

$$899 = n - 1$$

$$n = 900$$

Bijgevolg is $100 + 101 + 102 + ... + 999 = 900 \cdot \frac{100+999}{2} = 494550$.

2 Bepaal de som van alle natuurlijke getallen van 3 cijfers die deelbaar zijn door 7.

Gevraagd : $105 + 112 + 119 + ... + 994$.

We bepalen het aantal termen in deze som : $994 = 105 + (n-1) \cdot 7$

$$889 = (n-1) \cdot 7$$

$$n - 1 = 127$$

$$n = 128$$

Bijgevolg is $105 + 112 + 119 + ... + 994 = 128 \cdot \frac{105+994}{2} = 70336$.

3 Bepaal de som van alle natuurlijke getallen van 3 cijfers die eindigen op 5.

Gevraagd: $105+115+125+...+995$.

We bepalen het aantal termen in deze som: $995 = 105+(n-1)\cdot 10$

$$890 = (n-1)\cdot 10$$
$$n-1 = 89$$
$$n = 90$$

Bijgevolg is $105+115+125+...+995 = 90\cdot\dfrac{105+995}{2} = 49500$.

Opdracht 76 bladzijde 263

Schrijf de opgaven uit de vorige opdracht met het Σ-teken.

1 $100+101+102+...+999 = \sum_{i=100}^{999} i$

2 $105+112+119+...+994 = \sum_{i=0}^{127}(105+7i) = \sum_{j=1}^{128}(105+(j-1)\cdot 7) = \sum_{j=1}^{128}(98+7j)$

3 $105+115+125+...+995 = \sum_{i=0}^{89}(105+10i) = \sum_{j=1}^{90}(105+(j-1)\cdot 10) = \sum_{j=1}^{90}(95+10j)$

Opdracht 77 bladzijde 263

Bereken de gevraagde sommen.

1 $\boxed{\sum_{i=1}^{10} 3^i}$

$$\sum_{i=1}^{10} 3^i = 3^1+3^2+3^3+...+3^{10}$$
$$= 3+9+27+...+59049$$
$$= 3\cdot\frac{3^{10}-1}{3-1}$$
$$= 88572$$

2 $\boxed{\sum_{m=1}^{10} 11m}$

$$\sum_{m=1}^{10} 11m = 11+22+33+...+110$$
$$= 10\cdot\frac{11+110}{2}$$
$$= 605$$

3 $\sum_{k=3}^{20}\left(2\cdot(-1)^k\right)$

$$\sum_{k=3}^{20}\left(2\cdot(-1)^k\right)=-2+2-2+\ldots+2$$
$$=-2\cdot\frac{(-1)^{18}-1}{-1-1}$$
$$=0$$

4 $\sum_{n=0}^{7}(2n-21)$

$$\sum_{n=0}^{7}(2n-21)=-21-19-17-\ldots-7$$
$$=8\cdot\frac{-21-7}{2}$$
$$=-112$$

5 $\sum_{n=0}^{8}\frac{1}{2^n}$

$$\sum_{n=0}^{8}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{256}$$
$$=1\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9-1}{\frac{1}{2}-1}$$
$$=\frac{511}{256}$$

6 $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2^n}+2^n\right)$

$$\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2^n}+2^n\right)=\frac{1}{2}+2+\frac{1}{4}+4+\frac{1}{8}+8+\ldots+\frac{1}{2^{10}}+2^{10}$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{10}}\right)+\left(2+4+8+\ldots+2^{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-1}{\frac{1}{2}-1}+2\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1}$$
$$=0,99902+2046$$
$$=2046,999$$

Opdracht 78 bladzijde 263

Bereken $2009-2007+2005-2003+\ldots-3+1$.

Oplossing

$$\begin{aligned}2009-2007+2005-2003+\ldots-3+1&=(2009-2007)+(2005-2003)+\ldots+(5-3)+1\\&=2+2+\ldots+2+1\\&=502\cdot 2+1\\&=1005\end{aligned}$$

want
$$\begin{aligned}5&=2009+(n-1)\cdot(-4)\\-2004&=(n-1)(-4)\\n-1&=501\\n&=502\end{aligned}$$

Ofwel:

$$\begin{aligned}2009-2007+2005-2003+\ldots-3+1&=(2009+2005+2001+\ldots+1)-(2007+2003+1999+\ldots+3)\\&=503\cdot\frac{2009+1}{2}-502\cdot\frac{2007+3}{2}\\&=505515-504510\\&=1005\end{aligned}$$

want :
$$\begin{aligned}1&=2009+(n-1)\cdot(-4)\\-2008&=(n-1)\cdot(-4)\\n-1&=502\\n&=503\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3&=2007+(n-1)\cdot(-4)\\-2004&=(n-1)\cdot(-4)\\n-1&=501\\n&=502\end{aligned}$$

Opdracht 79 bladzijde 263

Bereken het gevraagde bij de gegevens van een rekenkundige rij.

1 $u_5=5$ en $s_5=55$, u_1? v?

$$\begin{aligned}s_5&=5\cdot\frac{u_1+u_5}{2}\\55&=5\cdot\frac{u_1+5}{2}\\11&=\frac{u_1+5}{2}\\22&=u_1+5\\u_1&=17\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_5&=u_1+4\cdot v\\5&=17+4\cdot v\\-12&=4\cdot v\\v&=-3\end{aligned}$$

2 $s_8 = 156$ en $u_8 - u_1 = 35$, u_1 ? v ?

$$u_8 - u_1 = 35$$
$$u_1 + 7 \cdot v - u_1 = 35$$
$$7v = 35$$
$$v = 5$$

$$s_8 = 8 \cdot \frac{u_1 + u_8}{2}$$
$$156 = 8 \cdot \frac{u_1 + u_1 + 7 \cdot 5}{2}$$
$$39 = 2u_1 + 35$$
$$4 = 2u_1$$
$$u_1 = 2$$

Opdracht 80 bladzijde 263

Bereken het gevraagde bij de gegevens van een meetkundige rij.

$u_1 = 3$, $q = \frac{2}{3}$ en $u_n = \frac{32}{81}$, n ? s_n ?

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$
$$\frac{32}{81} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{32}{243}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$$
$$n - 1 = 5$$
$$n = 6$$

$$s_6 = 3 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6 - 1}{\frac{2}{3} - 1}$$
$$s_6 = \frac{665}{81}$$

Opdracht 81 bladzijde 263

Een bol rolt van een hellend vlak dat 100 m lang is. Tijdens de eerste seconde legt hij 1 m af, tijdens de tweede 3 m, tijdens de derde 5 m, enzovoort.

In hoeveel tijd legt de bol de hellende weg af?

1, 3, 5, ... rekenkundige rij met $u_1 = 1$ en $v = 2$

$$s_n = 100 \text{ dus } n \cdot \frac{1 + \left(1 + (n-1) \cdot 2\right)}{2} = 100$$
$$n \cdot \frac{2n}{2} = 100$$
$$n^2 = 100$$
$$n = 10 \text{ of } \cancel{n = -10}$$

De bol legt de afstand af in 10 seconden.

Opdracht 82 bladzijde 263

In een herenclub is het de gewoonte dat vóór de vergadering iedereen mekaar de hand geeft.

1 Hoeveel handdrukken worden er gegeven als de vereniging 75 leden telt?

Laat de heren één voor één binnenkomen en een handdruk geven aan alle aanwezigen.

bij 2 personen : 1 handdruk

bij 3 personen : $1+2=3$ handdrukken

bij 4 personen : $1+2+3=6$ handdrukken

$\vdots$

bij 75 personen : $1+2+3+...+74 = 74\cdot\dfrac{1+74}{2} = 2775$ handdrukken

2 Als het aantal handdrukken gelijk is aan 1770, hoeveel leden telt de vereniging dan?

$$1+2+3+...+(n-1)=1770$$
$$(n-1)\cdot\frac{1+(n-1)}{2}=1770$$
$$(n-1)\cdot\frac{n}{2}=1770$$
$$(n-1)\cdot n=3540$$
$$n^2-n-3540=0 \qquad D=14161$$
$$\cancel{n=-59} \quad \text{of} \quad n=60$$

De vereniging telt 60 leden.

Opdracht 83 bladzijde 264

Honderd koffers bevatten elk een gelijk aantal munten. Men neemt een zeker aantal munten uit de eerste koffer, het dubbele aantal uit de tweede, driemaal zoveel uit de derde, enz…, tot honderd maal zoveel uit de honderdste. Er liggen in totaal 14950 munten in de koffers wanneer er nog één enkele munt in de laatste koffer overblijft.

Hoeveel waren er oorspronkelijk in elke koffer?

A 151 B 201 C 251 D 301 E 351

Oplossing

Stel : x = oorspronkelijk aantal munten in elke koffer

a = aantal munten genomen uit de eerste koffer

$$100x-a-2a-3a-...-100a=14950 \quad (1)$$

en

$$x-100a=1 \quad (2)$$

Uit (2) volgt: $x = 1 + 100a.$

Ingevuld in (1) geeft dit:

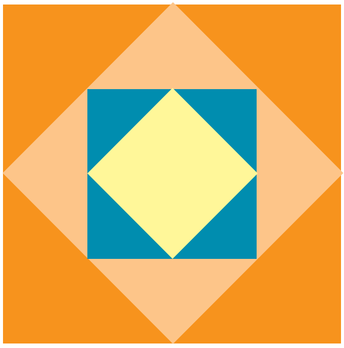
$$\begin{aligned} 100\cdot(1+100a) - a\cdot(1+2+3+\ldots+100) &= 14950 \\ 100 + 10000a - a\cdot 100\cdot\frac{1+100}{2} &= 14950 \\ 10000a - 5050a &= 14850 \\ 4950a &= 14850 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Substitutie in (2) geeft: $x = 1 + 100\cdot 3 = 301$

In elke koffer lagen oorspronkelijk 301 munten. (antwoord D)

Opdracht 84 bladzijde 264

Neem een vierkant met zijde 10 cm. De middens van de zijden van dit vierkant bepalen een tweede vierkant, de middens hiervan een derde vierkant, enzovoort.



1 Schrijf de rij $A_1, A_2, A_3, \ldots$ op van de oppervlakten van de opeenvolgende vierkanten.

$100\,;\,50\,;\,25\,;\,12{,}5\,;\,\ldots$

Dit is een meetkundige rij met $u_1 = 100$ en $q = \frac{1}{2}$.

2 Bepaal de som van de oppervlakten van de eerste 5, 10, 20, 50 vierkanten.

$$s_5 = 100\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 193{,}75 \qquad s_{20} = 100\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 199{,}9998$$

$$s_{10} = 100\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 199{,}80 \qquad s_{50} = 100\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{50} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 200$$

3 Hoe meer vierkanten we nemen, hoe meer de som van de oppervlakten van de vierkanten nadert naar een vast getal. Welk getal is dit? Kun je dit verklaren?

De sommen naderen 200.

Verklaring

- Als n heel groot wordt, wordt $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ verwaarloosbaar klein, zodat $\left(\frac{1}{2}\right)^n \approx 0.$

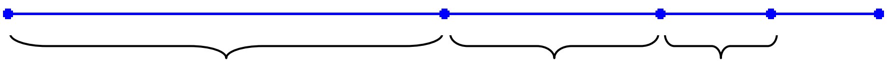
  Hierdoor is $s_n \approx 100 \cdot \dfrac{-1}{\frac{1}{2}-1} = 100 \cdot \dfrac{-1}{-\frac{1}{2}} = 200.$

  ofwel:

- $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots A_n$

  $= 1 \cdot A_1 + \frac{1}{2} \cdot A_1 + \frac{1}{4} \cdot A_1 + \frac{1}{8} \cdot A_1 + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot A_1$

  $= A_1 + A_1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

  $\approx A_1 + A_1 \qquad \underbrace{\tfrac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{4}} + \underbrace{\tfrac{1}{8}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \approx 1$

  $\approx 2 \cdot A_1$ met $A_1 = 100$ als n heel groot is

Opdracht 85 bladzijde 264

Wat is de som van de getallen in het gegeven rooster?

A 63750

B 100000

C 122500

D 125000

E 250000

1	2	3	...	49	50
2	3	4	...	50	51
3	4	5	...	51	52
...	...	...	...	...	...
49	50	51	...	97	98
50	51	52	...	98	99

Oplossing

- som eerste rij $= 1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = 50 \cdot \dfrac{1+50}{2} = 1275$

  som tweede rij $= 2 + 3 + 4 + \ldots + 51 = 50 \cdot \dfrac{2+51}{2} = 1325$

  som derde rij $= 3 + 4 + 5 + \ldots + 52 = 50 \cdot \dfrac{3+52}{2} = 1375$

  $\vdots$

  som vijftigste rij $= 50 + 51 + 52 + \ldots + 99 = 50 \cdot \dfrac{50+99}{2} = 3725$

- totale som $= 50 \cdot \dfrac{1275 + 3725}{2} = 125000$ (antwoord D)

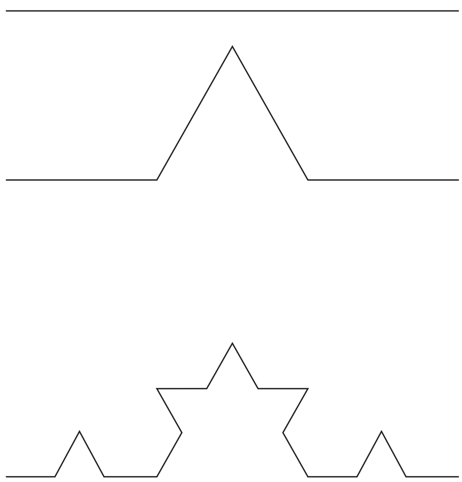
Ofwel:

- $\text{som eerste rij} = 1 + 2 + 3 + ... + 50 = 50 \cdot \frac{1+50}{2} = 1275 = s_1$

  De som van de volgende rij is telkens 50 meer dan de vorige,
  zodat: $\text{som vijftigste rij} = 1275 + 49 \cdot 50 = 3725$

- $\text{totale som} = 50 \cdot \frac{1275 + 3725}{2} = 125000$ (antwoord D)

Opdracht 86 bladzijde 265 : De kromme van Koch



– Neem een lijnstuk met lengte 1.

– Verdeel in stap 1 het lijnstuk in drie gelijke delen, construeer op het middelste stuk een gelijkzijdige driehoek en laat daarna het middelste lijnstuk weg.
Zo onstaat het zogenaamde 'model':
een gebroken lijn van vier gelijke lijnstukjes.

– Op elk van deze vier lijnstukjes herhalen we de constructies uit de eerste stap:
  - verdeel in drie gelijke delen,
  - teken een gelijkzijdige driehoek op het middelste stuk,
  - laat de basis van deze gelijkzijdige driehoek weg.

– Dit proces wordt voortdurend herhaald. Zo onstaat een **kromme van Koch**.

1 Het aantal lijnstukjes na stap n vormt een rij $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$
Bepaal een voorschrift van deze rij.

$a_n = a_{n-1} \cdot 4 \text{ met } a_1 = 4$
$\text{of } a_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$

2 Hoeveel lijnstukjes (a_{10}) werden er getekend na 10 stappen?

$a_{10} = 4^{10} = 1048576$

3 De totale lengte van deze lijnstukjes na stap n vormt een rij $l_1, l_2, l_3, ..., l_n, ...$
Bepaal een voorschrift van deze tweede rij.

$\text{oorspronkelijke lengte} = 1$

$\text{na stap 1: lengte } l_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

na stap 2 : lengte $l_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

$\vdots$

na stap n : lengte $l_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

4 Wat is de totale lengte (l_{10}) van alle lijnstukjes na 10 stappen?

$l_{10} = \left(\frac{4}{3}\right)^{10} = 17{,}758$

5 Als we een Koch-kromme construeren op elke zijde van een gelijkzijdige driehoek, dan ontstaat een zogenaamde **sneeuwvlokkromme van Koch**.

a Wat is de lengte van deze sneeuwvlokkromme van Koch na 10 stappen, als de zijde van de gelijkzijdige startdriehoek 3 cm bedraagt?

b Controleer dat na 70 stappen deze lengte ongeveer 50113 km bedraagt, ruimschoots de omtrek van de aarde.

a • oorspronkelijke lengte van één zijde = 3

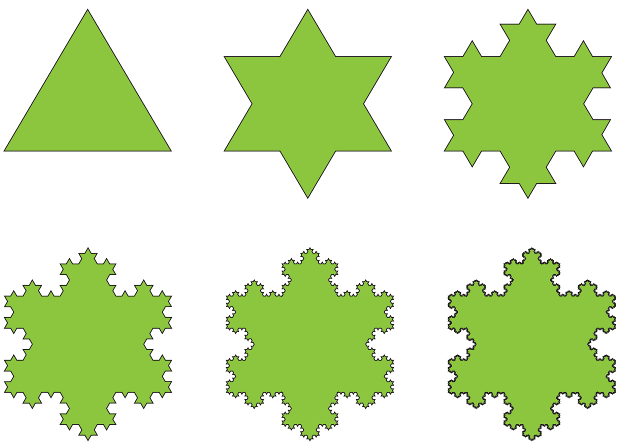
• totale lengte van alle lijnstukjes op deze zijde na 10 stappen $= 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{10}$

• Er zijn drie zijden in de startdriehoek, dus is de lengte van de sneeuwvlokkromme van Koch na 10 stappen $= 3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{10} = 159{,}820$.

b • gevraagde lengte na 70 stappen $= 3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{70}$

$= 5011342343$

• 5011342343 cm = 50113,4 km



Opdracht 87 bladzijde 266

Wanneer een kapitaal van € 1000 wordt uitgezet op *enkelvoudige* intrest tegen 7 %, dan brengt dit kapitaal elk jaar eenzelfde bedrag op, namelijk:

$$€\,\frac{7}{100}\cdot 1000 = €\,70.$$

Wanneer een kapitaal echter uitgezet wordt op *samengestelde* intrest, dan wordt de intrest elk jaar bij het kapitaal gevoegd en brengt vanaf dan ook intrest op.

1 Bereken de eindwaarde van een bedrag van € 2500 dat gedurende 10 jaar uitgezet wordt op enkelvoudige intrest tegen 7 %.

$$2500 + 10\cdot\left(\frac{7}{100}\cdot 2500\right) = 2500 + 10\cdot 175 = 4250$$

2 Bereken de eindwaarde van een bedrag van € 2500 dat eveneens gedurende 10 jaar uitgezet wordt tegen 7 %, maar nu op samengestelde intrest.

$$2500\cdot\left(\frac{107}{100}\right)^{10} = 2500\cdot(1{,}07)^{10} = 4917{,}88$$

3 Bereken hoeveel jaar men € 2500 moet uitzetten tegen 7 % op enkelvoudige intrest om minstens dezelfde eindwaarde te hebben als € 2500 uitgezet gedurende 10 jaar tegen 7 % op samengestelde intrest.

$$\begin{aligned} 2500 + 175x &\geq 4918 \\ 175x &\geq 2418 \\ x &\geq 13{,}8 \end{aligned}$$

Het kapitaal moet minstens 14 jaar tegen 7 % op enkelvoudige intrest uitgezet worden.

4 Wat is het verband met lineaire en exponentiële groei?

Een kapitaal dat uitgezet wordt op enkelvoudige intrest groeit lineair.

Een kapitaal dat uitgezet wordt op samengestelde intrest groeit exponentieel.

Opdracht 88 bladzijde 266

Een kasteelheer heeft in zijn kelder een vat wijn van 100 liter. Een trouweloze knecht tapt elke dag 1 liter af van het vat, voegt daarna 1 liter water toe en mengt alles.

1 Hoeveel echte wijn zit er in het mengsel na n dagen?

$100 \cdot (0,99)^n$ liter

2 Van zodra meer dan één derde van het vat uit water bestaat, zal de kasteelheer iets merken. Na hoeveel dagen is dit?

$$100 \cdot (0,99)^n < \frac{2}{3} \cdot 100$$

$$(0,99)^n < \frac{2}{3}$$

1e mogelijkheid

enkele waarden van n uittesten:

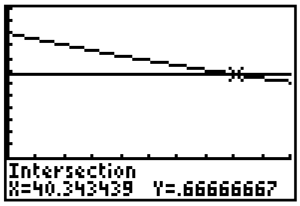
$(0,99)^{40} = 0,669 > \frac{2}{3}$

$(0,99)^{41} = 0,662 < \frac{2}{3}$

2e mogelijkheid

snijpunt zoeken van $f(x) = (0,99)^x$ en $g(x) = \frac{2}{3}$ met grafische rekenmachine:

$x = 40,34$



Besluit

Na 41 dagen zal de kasteelheer iets merken.

Herhalingsopdracht 89 bladzijde 267

Bereken het gevraagde bij de gegevens van een rekenkundige rij.

1 $u_5 = 13$ en $u_8 + u_9 = 40$, u_1? v?

$$\begin{cases} u_5 = 13 \\ u_8 + u_9 = 40 \end{cases}$$

$$\text{dus } \begin{cases} u_1 + 4 \cdot v = 13 \\ (u_1 + 7 \cdot v) + (u_1 + 8 \cdot v) = 40 \end{cases}$$

$$\text{zodat } \begin{cases} u_1 + 4 \cdot v = 13 & (1) \\ 2u_1 + 15 \cdot v = 40 & (2) \end{cases}$$

$$(2) - 2 \cdot (1) \text{ geeft: } 7 \cdot v = 14$$
$$v = 2$$

$$\text{Invullen in } (1) \text{ geeft: } u_1 + 4 \cdot 2 = 13$$
$$u_1 = 5$$

2 $u_5 = 26$ en $s_{10} = 275$, u_1? v?

$$\begin{cases} u_5 = 26 \\ s_{10} = 275 \end{cases}$$

$$\text{dus } \begin{cases} u_1 + 4 \cdot v = 26 \\ 10 \cdot \dfrac{u_1 + (u_1 + 9 \cdot v)}{2} = 275 \end{cases}$$

$$\text{zodat } \begin{cases} u_1 + 4 \cdot v = 26 & (1) \\ 2u_1 + 9 \cdot v = 55 & (2) \end{cases}$$

$$(2) - 2 \cdot (1) \text{ geeft: } v = 3$$

$$\text{Invullen in } (1) \text{ geeft: } u_1 + 4 \cdot 3 = 26$$
$$u_1 = 14$$

3 $u_1 = 105$, $u_n = 0$ en $s_n = 840$, n? v?

$$\begin{cases} u_n = 0 \\ s_n = 840 \end{cases}$$

$$\text{dus } \begin{cases} u_1 + (n-1) \cdot v = 0 \\ n \cdot \dfrac{u_1 + u_n}{2} = 840 \end{cases}$$

$$\text{zodat}\begin{cases}105+(n-1)\cdot v=0 & (1)\\ n\cdot\dfrac{105+0}{2}=840 & (2)\end{cases}$$

Uit (2) volgt: $n=16$

Invullen in (1) geeft: $105+15\cdot v=0$

$$v=-7$$

Herhalingsopdracht 90 bladzijde 267

Bereken het gevraagde bij de gegevens van een meetkundige rij.

1 $u_5=8$ en $u_7=18$, u_{10} ?

$$u_7=u_5\cdot q^2$$
$$18=8\cdot q^2$$
$$q^2=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}$$
$$q=\frac{3}{2}\ \text{of}\ q=-\frac{3}{2}$$

$$u_{10}=u_7\cdot q^3=18\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{243}{4}$$
$$\text{of}\ u_{10}=18\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3=-\frac{243}{4}$$

2 $u_2=\frac{2}{9}$ en $u_4=\frac{8}{81}$, u_1 ? q ?

$$u_4=u_2\cdot q^2$$
$$\frac{8}{81}=\frac{2}{9}\cdot q^2$$
$$q^2=\frac{4}{9}$$
$$q=\frac{2}{3}\ \text{of}\ q=-\frac{2}{3}$$

$$u_2=u_1\cdot q$$
$$\frac{2}{9}=u_1\cdot\frac{2}{3}$$
$$u_1=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$$
$$\text{of}\ u_1=\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus: } u_1=\frac{1}{3}\ \text{en}\ q=\frac{2}{3}\quad\text{of}\quad u_1=-\frac{1}{3}\ \text{en}\ q=-\frac{2}{3}$$

3 $s_5=2728$ en $q=\frac{1}{4}$, u_5 ?

$$s_5=u_1\cdot\frac{q^5-1}{q-1}$$
$$2728=u_1\cdot\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5-1}{\frac{1}{4}-1}$$
$$u_1=2048$$

$$u_5=u_1\cdot q^4=2048\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4=8$$

Herhalingsopdracht 91 bladzijde 267

Bereken s_{10} bij de volgende rijen.

$\boxed{1 \quad u_n = 6n + 7}$

rekenkundige rij met $u_1 = 13$ en $v = 6$

$u_{10} = 13 + 9 \cdot 6 = 67$

$$s_{10} = 10 \cdot \frac{13+67}{2} = 400$$

$\boxed{2 \quad u_n = \frac{500}{2^n}}$

meetkundige rij met $u_1 = 250$ en $q = \frac{1}{2}$

$$s_{10} = 250 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{127875}{256}$$

$\boxed{3 \quad u_n = \frac{3}{4} u_{n-1} \text{ en } u_1 = 65536}$

meetkundige rij met $u_1 = 65536$ en $q = \frac{3}{4}$

$$s_{10} = 65536 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{10} - 1}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{989527}{4}$$

$\boxed{4 \quad u_n = u_{n-1} - 123 \text{ en } u_1 = 124}$

rekenkundige rij met $u_1 = 124$ en $v = -123$

$u_{10} = 124 + 9 \cdot (-123) = -983$

$$s_{10} = 10 \cdot \frac{124 - 983}{2} = -4295$$

Herhalingsopdracht 92 bladzijde 267

Bepaal vier opeenvolgende termen van de rij 2, 8, 14, 20, … waarvan de som 284 is.

Oplossing

2, 8, 14, 20, ... rekenkundige rij met $u_1 = 2$ en $v = 6$

Vier opeenvolgende termen zijn $x,\ x+6,\ x+12,\ x+18$.

Hun som is 284 indien $x+(x+6)+(x+12)+(x+18)=284$.

$$\begin{aligned} x+(x+6)+(x+12)+(x+18) &= 284 \\ 4x &= 284-36 \\ 4x &= 248 \\ x &= 62 \end{aligned}$$

De gevraagde termen zijn: 62, 68, 74, 80.

Herhalingsopdracht 93 bladzijde 267

In het onderstaande rooster staat in elk vakje het dubbel van de som van de cijfers in het vorige vakje.

2009	22	8	…

Welk getal staat in het 2009e vakje?

A 4 B 8 C 10 D 14 E 16

Oplossing

$2009,\ 22,\ \underbrace{8, 16, 14, 10, 2, 4}, \underbrace{8, 16, 14, 10, 2, 4}, 8, ...$

$$\begin{aligned}
&8 \text{ staat in vakje } 3, 9, 15, ... &&: 3+6n \\
&16 \text{ staat in vakje } 4, 10, 16, ... &&: 4+6n \\
&14 \text{ staat in vakje } 5, 11, 17, ... &&: 5+6n \\
&10 \text{ staat in vakje } 6, 12, 18, ... &&: 6+6n \\
&2 \text{ staat in vakje } 7, 13, 19, ... &&: 7+6n \\
&4 \text{ staat in vakje } 8, 14, 20, ... &&: 8+6n
\end{aligned}$$

$2009 = 5 + 6 \cdot 334$

In het 2009e vakje staat het getal 14. (antwoord D)

Herhalingsopdracht 94 bladzijde 267

Als $\frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b-c}$ drie opeenvolgende termen van een rekenkundige rij zijn, dan zijn a, b, c drie opeenvolgende termen van een meetkundige rij. Bewijs dit.

Oplossing

$\frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b-c}$ zijn drie opeenvolgende termen van een rekenkundige rij

$$\Downarrow \quad \text{eigenschap opdracht 54}$$

$$\frac{1}{2b} = \frac{\frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{b} = \frac{b-c+b-a}{(b-a)(b-c)}$$

$$\Downarrow$$

$$(b-a)(b-c) = b(2b-a-c)$$

$$\Downarrow$$

$$b^2 \cancel{-bc} \cancel{-ab} + ac = 2b^2 \cancel{-ab} \cancel{-bc}$$

$$\Downarrow$$

$$b^2 = ac$$

$$\Downarrow \quad \text{eigenschap opdracht 59}$$

a, b, c zijn drie opeenvolgende termen van een meetkundige rij

Herhalingsopdracht 95 bladzijde 267

Het Griekse theater in Epidauros heeft 55 rijen zitplaatsen. Op de eerste (onderste) rij kunnen 96 mensen zitten. Op elke rij zijn er 6 plaatsen meer dan op de vorige rij (zie opdracht 12).

1 Hoeveel mensen kunnen in dit theater zitten?

De rij 96, 102, 108, ... is rekenkundig met $u_1 = 96$ en $v = 6$.

$$u_{55} = 96 + 54 \cdot 6 = 420$$

$$s_{55} = 55 \cdot \frac{96+420}{2} = 14190$$

In dit theater kunnen 14190 mensen zitten.

2 Veronderstel dat men de rijen van onder naar boven volledig bezet.
Hoeveel rijen zijn dan volledig bezet als 8000 toeschouwers een voorstelling bijwonen ?
En hoeveel mensen blijven er dan over ?

- $$8000 = n \cdot \frac{96+96+(n-1)\cdot 6}{2}$$
  $$16000 = n\cdot(186+6n)$$
  $$6n^2+186n-16000=0$$
  $$3n^2+93n-8000=0 \qquad D=104649$$
  $$n=38,42 \text{ of } \cancel{n=-69,42}$$
- $s_{38} = 38\cdot\frac{96+96+37\cdot 6}{2} = 7866$
- $8000-7866=134$

Antwoord
38 rijen zijn volledig bezet en er blijven 134 mensen over.

Herhalingsopdracht 96 bladzijde 268

Een kippenboer start met 8192 kippen. In het begin van elke maand verhandelt hij 25 % van zijn voorraad, maar op het einde van de maand komen er telkens 1024 kippen bij.

1 Zal hij na 6 maanden minder of meer kippen hebben ?

Hij verhandelt telkens $\frac{1}{4}$ van zijn voorraad.
Gedurende de eerste maanden wordt dit niet gecompenseerd door de 1024 kippen die er telkens bijkomen. Na 6 maanden zal de kippenboer minder kippen hebben.

2 Stel een voorschrift (expliciet of recursief) op om te bepalen hoeveel kippen hij heeft na n maanden.

- recursief
  $u_n = u_{n-1}\cdot\frac{3}{4}+1024$ met $u_1 = 8192$
- expliciet
  $u_1 = 8192$
  $u_2 = u_1\cdot\frac{3}{4}+1024$

$$u_3 = u_2 \cdot \frac{3}{4} + 1024$$

$$= \left(u_1 \cdot \frac{3}{4} + 1024 \right) \cdot \frac{3}{4} + 1024$$

$$= u_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1024 \cdot \frac{3}{4} + 1024$$

$$u_4 = u_3 \cdot \frac{3}{4} + 1024$$

$$= u_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 1024 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1024 \cdot \frac{3}{4} + 1024$$

$$\vdots$$

$$u_n = u_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 1024 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + 1024 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} + \ldots + 1024$$

$$= u_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 1024 \cdot \Bigg(\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} + \ldots + 1}_{\substack{\| \\ s_{n-1} \text{ bij een meetkundige} \\ \text{rij met } u_1 = 1 \text{ en } q = \frac{3}{4}}} \Bigg)$$

$$\text{zodat } u_n = 8192 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 1024 \cdot 1 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{4} - 1}$$

$$= 8192 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 4096 \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 1 \right)$$

3 Bereken hiermee hoeveel kippen hij heeft na 6 maanden.

- recursief

$$u_1 = 8192$$

$$u_2 = 8192 \cdot \frac{3}{4} + 1024 = 7168$$

$$u_3 = 7168 \cdot \frac{3}{4} + 1024 = 6400$$

$$u_4 = 6400 \cdot \frac{3}{4} + 1024 = 5824$$

$$u_5 = 5824 \cdot \frac{3}{4} + 1024 = 5392$$

$$u_6 = 5392 \cdot \frac{3}{4} + 1024 = 5068$$

$$u_7 = 5068 \cdot \frac{3}{4} + 1024 = 4825$$

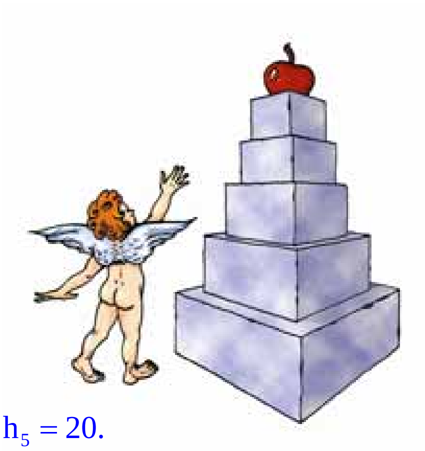
- expliciet

$$u_7 = 8192 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 - 4096 \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^6 - 1 \right)$$

$$= 1458 + 3367$$

$$= 4825$$

Herhalingsopdracht 97 bladzijde 268



Een sokkel bestaat uit vijf op elkaar geplaatste vierkante marmeren blokken. Het onderste blok heeft een hoogte van 36 cm en een vierkant grondvlak met 80 cm als zijde. Het bovenste blok is een kubus met een ribbe van 20 cm.

Hoeveel m³ marmer heeft men hiervoor nodig als de hoogten van de blokken een rekenkundige en de zijden van de grondvlakken een meetkundige rij vormen?

Oplossing

- De hoogten vormen een rekenkundige rij met $h_1 = 36$ en $h_5 = 20$.

$$\begin{aligned} h_5 &= h_1 + 4 \cdot v \\ 20 &= 36 + 4 \cdot v \\ -16 &= 4 \cdot v \\ v &= -4 \end{aligned}$$

De hoogten zijn: 36, 32, 28, 24, 20.

- De zijden van de grondvlakken vormen een meetkundige rij met $z_1 = 80$ en $z_5 = 20$.

$$\begin{aligned} z_5 &= z_1 \cdot q^4 \\ 20 &= 80 \cdot q^4 \\ q^4 &= \frac{1}{4} \\ q &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

De zijden zijn: $80,\ 40\sqrt{2},\ 40,\ 20\sqrt{2},\ 20.$

- Tesamen:

z_n	80	$40\sqrt{2}$	40	$20\sqrt{2}$	20
h_n	36	32	28	24	20

- Hoeveelheid marmer:

$$80^2 \cdot 36 + \left(40\sqrt{2}\right)^2 \cdot 32 + 40^2 \cdot 28 + \left(20\sqrt{2}\right)^2 \cdot 24 + 20^2 \cdot 20$$
$$= 230400 + 102400 + 44800 + 19200 + 8000$$
$$= 404800$$

dus $404800\ cm^3 = 0,4048\ m^3 \qquad \left(1\ m^3 = 10^6\ cm^3\right)$

Herhalingsopdracht 98 bladzijde 268

In de rekenkundige rij 3, 11, 19, 27, 35 voegt men drie getallen tussen elke twee opeenvolgende termen, zodat een nieuwe rekenkundige rij ontstaat.

Bepaal de som van de termen van de nieuwe rij.

Oplossing

$3, 11, 19, 27, 35$

Men voegt 4 keer 3 getallen toe; er zijn dus in totaal $5+12=17$ getallen.

$$s_{17}=17\cdot\frac{3+35}{2}=323$$

Herhalingsopdracht 99 bladzijde 268

In een rekenkundige rij van 17 termen is de som van die termen 425. Tussen elke twee opeenvolgende termen van de rij worden k termen tussengevoegd, waardoor een nieuwe rekenkundige rij ontstaat. De som van alle termen van de nieuwe rij is 2425.

Bepaal k.

Oplossing

$$s_{17}=17\cdot\frac{u_1+u_n}{2}=425 \quad\Rightarrow\quad \frac{u_1+u_n}{2}=25 \qquad (1)$$

$$s_{17+16k}=(17+16k)\cdot\frac{u_1+u_n}{2}=2425 \qquad (2)$$

Substitutie van (1) in (2) geeft:

$$\begin{aligned}(17+6k)\cdot 25&=2425\\ 17+16k&=97\\ 16k&=80\\ k&=5\end{aligned}$$

Herhalingsopdracht 100 bladzijde 268

Gegeven is de volgende rij breuken:

$\frac{1}{1},$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2},$

$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3},$

$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4},$

...

Bepaal de 2010e term van deze rij.

Oplossing

$\frac{1}{1},$	$u_1,$
$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2},$	$u_2, u_3, u_4,$
$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3},$	$u_5, u_6, u_7, u_8, u_9,$
$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4},$	$u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16},$
...	...

$$\text{dus} \quad u_1 = \frac{1}{1}$$

$$u_4 = \frac{1}{2}$$

$$u_9 = \frac{1}{3}$$

$$u_{16} = \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$u_{n^2} = \frac{1}{n}$$

$$2025 = 45^2, \text{ dus } u_{2025} = \frac{1}{45}$$

$$u_{2024} = \frac{2}{45}$$

$$u_{2023} = \frac{3}{45}$$

$$\vdots$$

$$u_{2010} = \frac{16}{45}$$