Hoofdstuk 7

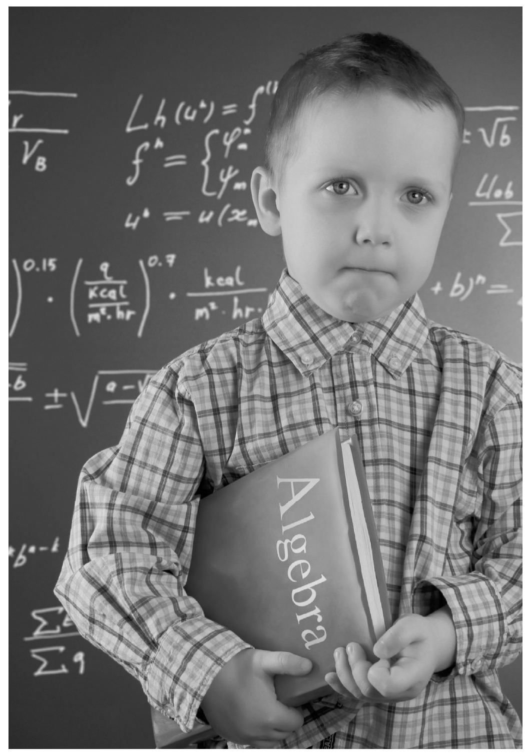
Rekenen met veeltermen

7.1 Veeltermen

7.2 Euclidische deling van veeltermen

7.3 Deelbaarheid door x − a

7.4 Twee nieuwe merkwaardige producten



Oplossingen van de opdrachten

Opdracht 1 bladzijde 56

Herleid en rangschik de volgende veeltermen volgens dalende machten van x.
Geef de graad van de veelterm en bepaal de getalwaarde voor x = a.

$$\boxed{1 \quad u(x) = x^2 - 4x^3 + 2x^2 - 3x + 5 - 7x \ \text{ met } a = 1}$$

$$u(x) = -4x^3 + 3x^2 - 10x + 5$$

$$\text{gr}(u(x)) = 3$$

$$u(1) = -4 + 3 - 10 + 5 = -6$$

$$\boxed{2 \quad v(x) = 3x^4 + 5x^2 + 4x - 3x^4 - 4x^2 - 9 - x^2 \ \text{ met } a = 2}$$

$$v(x) = 4x - 9$$

$$\text{gr}(v(x)) = 1$$

$$v(2) = 4 \cdot 2 - 9 = -1$$

$$\boxed{3 \quad w(x) = 3x^2 - 5x + x + 2 - x^2 + 4x - 2x^2 - 2 \ \text{ met } a = 0}$$

$$w(x) = 0$$

$$\text{gr}(w(x)) \text{ bestaat niet}$$

$$w(0) = 0$$

Opdracht 2 bladzijde 56

Bepaal a, b, c en d zodat de volgende veeltermen gelijk zijn.

$$\boxed{1 \quad ax^3 - 4x^2 + bx + 1 = 5x^3 + cx^2 + d}$$

$$ax^3 - 4x^2 + bx + 1 = 5x^3 + cx^2 + d$$

$$\Updownarrow$$

$$a = 5 \text{ en } -4 = c \text{ en } b = 0 \text{ en } 1 = d$$

$$\Updownarrow$$

$$a = 5,\ b = 0,\ c = -4 \text{ en } d = 1$$

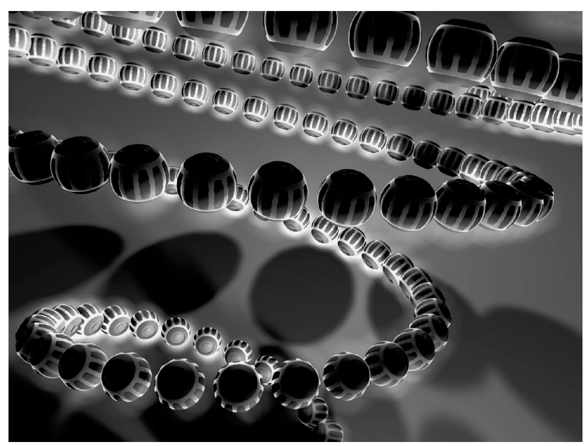
$\boxed{2 \quad ax^4 + 2bx^3 + cx^2 + 6b = -6x^3 + 3bx^2 - 3dx + 2c}$

$$ax^4 + 2bx^3 + cx^2 + 6b = -6x^3 + 3bx^2 - 3dx + 2c$$
$$\Updownarrow$$
$$a = 0 \text{ en } 2b = -6 \text{ en } c = 3b \text{ en } 0 = -3d \text{ en } 6b = 2c$$
$$\Updownarrow$$
$$a = 0,\ b = -3,\ c = -9 \text{ en } d = 0$$

$$\text{controle: } \left.\begin{aligned} 6b &= -18 \\ 2c &= -18 \end{aligned}\right\} \quad 6b = 2c$$

$\boxed{3 \quad (a+3)x^3 + (c+2)x^2 + bx + 4a = bx^3 + ax^2 + 2x - d}$

$$(a+3)x^3 + (c+2)x^2 + bx + 4a = bx^3 + ax^2 + 2x - d$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} a + 3 = b & (1) \\ c + 2 = a & (2) \\ b = 2 & (3) \\ 4a = -d & (4) \end{cases}$$



(3) in (1): $\quad a = b - 3$
$a = 2 - 3$
$a = -1$

in (2): $\quad c = a - 2$
$c = -1 - 2$
$c = -3$

(4): $\quad d = -4a$
$d = 4$

$a = -1,\ b = 2,\ c = -3 \text{ en } d = 4$

Opdracht 3 bladzijde 57

1 Opa wil € 250 gelijk verdelen onder zijn vier kleinkinderen. Hoeveel krijgt elk kleinkind?

$$\frac{250}{4} = 62,5$$

Elk kleinkind krijgt € 62,5.

2 Een afstand van 1000 m moet in 9 gelijke delen verdeeld worden. Hoe groot is elke afstand?

$$\frac{1000}{9} = 111,111\ldots$$

Elke afstand is $111,111\ldots$ m.

Opdracht 4 bladzijde 57

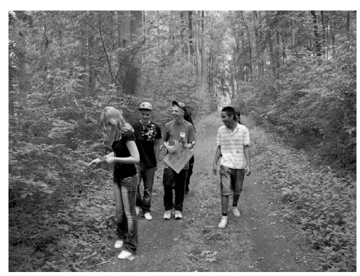
Voor een bosspel moeten 97 deelnemers in groepjes van 7 worden verdeeld.

1 Hoeveel groepjes kan de spelleider vormen?

$$\frac{97}{7} = 13,85...$$

De spelleider kan 13 groepjes van 7 personen vormen.

2 Hoeveel deelnemers blijven er dan over?



$13 \cdot 7 = 91$

Er blijven 6 deelnemers over.

3 Vul aan: $97 = 7 \cdot ... + ...$

$97 = 7 \cdot 13 + 6$

Opdracht 5 bladzijde 58

1 Vul aan. a $x^3 + x^2 = x^2(...)$ b $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(...)$ c $x^2 + 4x + 5 = (x+1)(...) + ...$

a $x^3 + x^2 = x^2(x+1)$

b $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$

c $x^2 + 4x + 5 = (x+1)(x+3) + 2$

2 Geef het resultaat, indien mogelijk. a $(x^3 + x^2) : x^2$ b $(x^2 + 4x + 3) : (x+1)$ c $(x^2 + 4x + 5) : (x+1)$

a $(x^3 + x^2) : x^2 = x + 1$

b $(x^2 + 4x + 3) : (x+1) = (x+3)$

c $(x^2 + 4x + 5) : (x+1) = \quad ? \qquad \left(x + 3 + \dfrac{2}{x+1}\right)$

Opdracht 6 bladzijde 59

Bepaal het quotiënt q(x) en de rest r(x) van de volgende delingen.

1 deeltal $D(x) = 6x^4$ deler $d(x) = 3x^3$

$$6x^4 = 3x^3 \cdot 2x \quad \Rightarrow \quad q(x) = 2x \text{ en } r(x) = 0$$

2 deeltal $D(x) = x + 5$ deler $d(x) = x + 2$

$$x + 5 = (x+2) \cdot 1 + 3 \quad \Rightarrow \quad q(x) = 1 \text{ en } r(x) = 3$$

3 deeltal $D(x) = x^2 - 3x + 6$ deler $d(x) = x - 1$

$$x^2 - 3x + 6 = (x-1) \cdot (x-2) + 4 \quad \Rightarrow \quad q(x) = x - 2 \text{ en } r(x) = 4$$

Opdracht 7 bladzijde 59

Bij de meeste delingen is het niet zo eenvoudig om het quotiënt en de rest te bepalen, zoals bijvoorbeeld bij de deling van $4x^3 - 2x^2 - 10x + 3$ door $2x + 3$.
Hiertoe moeten we $4x^3 - 2x^2 - 10x + 3$ kunnen schrijven als $(2x+3) \cdot q(x) + r(x)$.
Omdat $gr(4x^3 - 2x^2 - 10x + 3) = 3$ en $gr(2x+3) = 1$, zal $gr(q(x)) = 2$ en $gr(r(x)) = 0$ of $r(x) = 0$.
We stellen daarom $q(x) = ax^2 + bx + c$ en $r(x) = d$, zodat
$4x^3 - 2x^2 - 10x + 3 = (2x+3)(ax^2 + bx + c) + d$
$4x^3 - 2x^2 - 10x + 3 = ax^2(2x+3) + bx(2x+3) + c(2x+3) + d$

1	De hoogstegraadsterm moet in beide leden gelijk zijn. Bepaal a.

$a = 2$

2	Aan welke veelterm moet dan $bx(2x+3) + c(2x+3) + d$ gelijk zijn? Breng daartoe $ax^2(2x+3)$, waarbij je a vervangt door de gevonden waarde, over naar het linkerlid.

$4x^3 - 2x^2 - 10x + 3 - 2x^2(2x+3)$
$= 4x^3 - 2x^2 - 10x + 3 - 4x^3 - 6x^2$
$= -8x^2 - 10x + 3$

3	Vergelijk nu weer de hoogstegraadsterm in beide leden en bepaal b.

$b = -4$

4	Aan welke veelterm moet nu $c(2x+3) + d$ gelijk zijn? Werk analoog zoals bij 2.

$-8x^2 - 10x + 3 - (-4x) \cdot (2x+3)$
$= -8x^2 - 10x + 3 + 8x^2 + 12x$
$= 2x + 3$

5	Bepaal tenslotte c en d.

$c = 1$ en $d = 0$

6	Wat is het quotiënt en de rest bij de euclidische deling van $4x^3 - 2x^2 - 10x + 3$ door $2x + 3$?

$q(x) = 2x^2 - 4x + 1$
$r(x) = 0$

Opdracht 8 bladzijde 61

Bereken het quotiënt q(x) en de rest r(x) van de volgende delingen.

1 $D(x)=4x^3+4x^2-5x-3$	$d(x)=2x^2-x-1$

$$\begin{array}{rrrr|l} 4x^3 & +4x^2 & -5x & -3 & 2x^2-x-1 \\ \hline \underline{-4x^3} & \underline{\pm 2x^2} & \underline{\pm 2x} & & 2x+3 \\ & 6x^2 & -3x & -3 & \\ & \underline{-6x^2} & \underline{\pm 3x} & \underline{\pm 3} & \\ & & & 0 & \end{array}$$

$q(x)=2x+3$

$r(x)=0$

2 $D(x)=x^3-8$	$d(x)=x+2$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +0x^2 & +0x & -8 & x+2 \\ \hline \underline{-x^3} & \underline{\mp 2x^2} & & & x^2-2x+4 \\ & -2x^2 & +0x & -8 & \\ & \underline{\pm 2x^2} & \underline{\pm 4x} & & \\ & & 4x & -8 & \\ & & \underline{-4x} & \underline{\mp 8} & \\ & & & -16 & \end{array}$$

$q(x)=x^2-2x+4$

$r(x)=-16$

3 $D(x)=x^5-3x^3+2x-7$	$d(x)=x^2+3$

$$\begin{array}{rrrrrr|l} x^5 & +0x^4 & -3x^3 & +0x^2 & +2x & -7 & x^2+3 \\ \hline \underline{-x^5} & & \underline{\mp 3x^3} & & & & x^3-6x \\ & & -6x^3 & +0x^2 & +2x & -7 & \\ & & \underline{\pm 6x^3} & & \underline{\pm 18x} & & \\ & & & & 20x & -7 & \end{array}$$

$q(x)=x^3-6x$

$r(x)=20x-7$

4 $D(x)=2x-7$	$d(x)=x^2-3x+5$

$$\begin{array}{r|l} 2x-7 & x^2-3x+5 \\ \hline & \end{array}$$

$q(x)=0$

$r(x)=2x-7$

Opdracht 9 bladzijde 61

Bij deling van $v(x)$ door $x^2 - 3x + 2$ is het quotiënt $7x - 5$ en de rest $4x + 1$. Bepaal $v(x)$.

Oplossing

$$v(x) = (x^2 - 3x + 2)\cdot(7x - 5) + 4x + 1$$
$$v(x) = 7x^3 - 5x^2 - 21x^2 + 15x + 14x - 10 + 4x + 1$$
$$v(x) = 7x^3 - 26x^2 + 33x - 9$$

Opdracht 10 bladzijde 61

Bij het delen van twee veeltermen is het quotiënt $3x^2 - x + 2$ en de rest $2x + 3$.
Het deeltal is $3x^4 + 5x^3 + 15x^2 + x + 13$. Bepaal de deler.

Oplossing

$$3x^4 + 5x^3 + 15x^2 + x + 13 = d(x)\cdot(3x^2 - x + 2) + 2x + 3$$
$$\Downarrow$$
$$d(x)\cdot(3x^2 - x + 2) = 3x^4 + 5x^3 + 15x^2 + x + 13 - (2x + 3)$$
$$d(x)\cdot(3x^2 - x + 2) = 3x^4 + 5x^3 + 15x^2 - x + 10$$
$$d(x) = (3x^4 + 5x^3 + 15x^2 - x + 10) : (3x^2 - x + 2)$$

$$\begin{array}{r|l}
3x^4 + 5x^3 + 15x^2 - x + 10 & 3x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^4 \pm x^3 \mp 2x^2 } & x^2 + 2x + 5 \\
6x^3 + 13x^2 - x + 10 & \\
\underline{-6x^3 \pm 2x^2 \mp 4x } & \\
15x^2 - 5x + 10 & \\
\underline{-15x^2 \pm 5x \mp 10} & \\
0 &
\end{array}$$

$$d(x) = x^2 + 2x + 5$$

Merk op dat deze opdracht ook op te lossen is m.b.v. de methode van de onbepaalde coëfficiënten.

Opdracht 11 bladzijde 62

Bepaal a en b zodat $x^2 - 5x + 2$ een deler is van $3x^3 + ax^2 + 31x + b$.

Oplossing

$$\begin{aligned} 3x^3 + ax^2 + 31x + b &= \left(x^2 - 5x + 2\right)\cdot\left(q_1 \cdot x + q_0\right) \\ &= q_1 \cdot x^3 + q_0 \cdot x^2 \\ &\qquad - 5q_1 \cdot x^2 - 5q_0 \cdot x \\ &\qquad\qquad + 2q_1 \cdot x + 2q_0 \\ &= q_1 \cdot x^3 + \left(q_0 - 5q_1\right)x^2 + \left(-5q_0 + 2q_1\right)x + 2q_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = 3 & (1) \\ q_0 - 5q_1 = a & (2) \\ -5q_0 + 2q_1 = 31 & (3) \\ 2q_0 = b & (4) \end{cases}$$

(1) in (3):

$$\begin{aligned} -5q_0 &= 31 - 2q_1 \\ -5q_0 &= 31 - 6 \\ -5q_0 &= 25 \\ q_0 &= -5 \end{aligned}$$

in (2):

$$\begin{aligned} a &= q_0 - 5q_1 \\ a &= -5 - 5 \cdot 3 \\ a &= -20 \end{aligned}$$

in (4):

$$\begin{aligned} b &= 2q_0 \\ b &= 2 \cdot (-5) \\ b &= -10 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad a = -20$ en $b = -10$

Opdracht 12 bladzijde 62

Bepaal a, b en het quotiënt van de deling van $x^4 + ax^2 + bx + 3$ door $x^2 - 2x + 3$ zodat de rest gelijk is aan $x + 3$.

Oplossing

$$\begin{aligned}
x^4 + ax^2 + bx + 3 &= \left(x^2 - 2x + 3\right)\cdot\left(q_2 \cdot x^2 + q_1 \cdot x + q_0\right) + x + 3 \\
&= q_2 \cdot x^4 + q_1 \cdot x^3 + q_0 \cdot x^2 \\
&\qquad - 2q_2 \cdot x^3 - 2q_1 \cdot x^2 - 2q_0 \cdot x \\
&\qquad\qquad + 3q_2 \cdot x^2 + 3q_1 \cdot x + 3q_0 \\
&\qquad\qquad\qquad + x + 3 \\
&= q_2 x^4 + \left(q_1 - 2q_2\right)x^3 + \left(q_0 - 2q_1 + 3q_2\right)x^2 + \left(-2q_0 + 3q_1 + 1\right)x + 3q_0 + 3
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_2 = 1 & (1) \\ q_1 - 2q_2 = 0 & (2) \\ q_0 - 2q_1 + 3q_2 = a & (3) \\ -2q_0 + 3q_1 + 1 = b & (4) \\ 3q_0 + 3 = 3 & (5) \end{cases}$$

(1) in (2): $\quad q_1 = 2q_2$

$q_1 = 2$

(5): $\quad q_0 = 0$

(3): $\quad a = q_0 - 2q_1 + 3q_2$

$a = 0 - 4 + 3$

$a = -1$

(4): $\quad b = -2q_0 + 3q_1 + 1$

$b = 0 + 6 + 1$

$b = 7$

$a = -1$ en $b = 7$

$q(x) = x^2 + 2x$

Opdracht 13 bladzijde 63

Vul de tabel aan voor de deling van $v(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ door de gegeven deler.

	deler	definitie euclidische deling	getalwaarde
1	$x-1$	$v(x) = (x-1)\ldots + \ldots$	$v(1) = \ldots$
2	$x-2$	$v(x) = (x-2)\ldots + \ldots$	$v(2) = \ldots$
3	$x+1$	$v(x) = (x+1)\ldots + \ldots$	$v(-1) = \ldots$
4	$x+3$	$v(x) = (x+3)\ldots + \ldots$	$v(-3) = \ldots$

Oplossing van 1

$$\begin{array}{rl}
2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 & \underline{\big|\ x-1\quad} \\
\underline{-2x^3 \pm 2x^2\qquad\qquad} & \ 2x^2 + 5x - 3 \\
5x^2 - 8x + 3 & \\
\underline{-5x^2 \pm 5x\quad} & \\
-3x + 3 & \\
\underline{\pm 3x \mp 3} & \\
0 &
\end{array}$$

$v(1) = 2 + 3 - 8 + 3 = 0$

	deler	definitie euclidische deling	getalwaarde
1	$x-1$	$v(x) = (x-1)(2x^2 + 5x - 3) + 0$	$v(1) = 0$

Oplossing van 2

$$\begin{array}{rl}
2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 & \underline{\big|\ x-2\quad} \\
\underline{-2x^3 \pm 4x^2\qquad\qquad} & \ 2x^2 + 7x + 6 \\
7x^2 - 8x + 3 & \\
\underline{-7x^2 \pm 14x\quad} & \\
6x + 3 & \\
\underline{-6x \pm 12} & \\
15 &
\end{array}$$

$v(2) = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 3 = 15$

	deler	definitie euclidische deling	getalwaarde
2	$x-2$	$v(x) = (x-2)(2x^2 + 7x + 6) + 15$	$v(2) = 15$

Oplossing van 3

$$
\begin{array}{rl}
2x^3+3x^2-8x+3 & \big|\; x+1 \\
\underline{-2x^3\mp 2x^2} & \quad 2x^2+x-9 \\
x^2-\;8x+3 & \\
\underline{-x^2\mp\;\;x} & \\
-9x+3 & \\
\underline{\pm 9x\pm 9} & \\
12 &
\end{array}
$$

$v(-1)=-2+3+8+3=12$

	deler	definitie euclidische deling	getalwaarde
3	$x+1$	$v(x)=(x+1)(2x^2+x-9)+12$	$v(-1)=12$

Oplossing van 4

$$
\begin{array}{rl}
2x^3+3x^2-8x+3 & \big|\; x+3 \\
\underline{-2x^3\mp 6x^2} & \quad 2x^2-3x+1 \\
-3x^2-\;8x+3 & \\
\underline{\pm 3x^2\pm\;\;9x} & \\
x+3 & \\
\underline{-x\mp 3} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
v(-3)&=2\cdot(-27)+3\cdot 9-8\cdot(-3)+3\\
&=-54+27+24+3\\
&=0
\end{aligned}
$$

	deler	definitie euclidische deling	getalwaarde
4	$x+3$	$v(x)=(x+3)(2x^2-3x+1)+0$	$v(-3)=0$

Opdracht 14 bladzijde 64

Onderzoek of de volgende delingen opgaand zijn of niet.

1 $\quad v(x) = 3x^2 - 4x^2 - 8 \qquad d(x) = x - 2$

$$\begin{aligned} v(2) &= 3 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 8 \\ &= 24 - 16 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

De deling is opgaand.

2 $\quad v(x) = 7x^3 - 4x^2 - 5x + 5 \qquad d(x) = x + 1$

$$\begin{aligned} v(-1) &= 7 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 5 \\ &= -7 - 4 + 5 + 5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

De deling is niet opgaand.

3 $\quad v(x) = 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6 \qquad d(x) = x - 3$

$$\begin{aligned} v(3) &= 3 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 - 6 \\ &= 81 - 45 - 30 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

De deling is opgaand.

Opdracht 15 bladzijde 64

Bepaal k zodat de volgende delingen de gegeven rest hebben.

1 $\quad v(x) = 4x^4 + kx^3 - x^2 + 2x + 1 \qquad d(x) = x - 1 \qquad r(x) = 0$

$$v(1) = 0$$
$$4 \cdot 1^4 + k \cdot 1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 0$$
$$4 + k - 1 + 2 + 1 = 0$$
$$k = -6$$

2 $\quad v(x) = -4x^4 - 6x^3 + 2x + k \qquad d(x) = x + 1 \qquad r(x) = 1$

$$v(-1) = 1$$
$$-4 \cdot (-1)^4 - 6 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1) + k = 1$$
$$-4 + 6 - 2 + k = 1$$
$$k = 1$$

Opdracht 16 bladzijde 64

$v(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ is deelbaar door $x - 2$ en heeft bij deling door $x + 1$ rest 3.
Bepaal a en b.

Oplossing

$$\begin{cases} v(2) = 0 \\ v(-1) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 + 4 + 2a + b = 0 \\ -1 + 1 - a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -12 & (1) \\ -a + b = 3 & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2)$: $3a = -15 \Rightarrow a = -5$

(2): $b = 3 + a \Rightarrow b = 3 - 5 = -2$

$a = -5$ en $b = -2$

Opdracht 17 bladzijde 64

1	Er geldt :
	$(x-3)(x+5) = x^2 + 2x - 15$
	$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
	$(x-2)(x+2)(2x+3)(3x-4) = 6x^4 + x^3 - 36x^2 - 4x + 48$
	Vul, zonder het product volledig uit te werken, de constante term aan.
	a $(2x-5)(3x+2) = 6x^2 - 11x$ ...
	b $(x-2)(x-3)(x+4) = x^3 - x^2 - 14x$ ...
	c $(x-1)(x+1)(x-4)(x+4)(x-4) = x^5 - 4x^4 - 17x^3 + 68x^2 + 16x$ ...

a $(2x-5)(3x+2) = 6x^2 - 11x - 10$

b $(x-2)(x-3)(x+4) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

c $(x-1)(x+1)(x-4)(x+4)(x-4) = x^5 - 4x^4 - 17x^3 + 68x^2 + 16x - 64$

2 Eén van de volgende ontbindingen is die van $v(x) = 2x^3 - 3x^2 - 29x + 60$. Welke?

a $(x-3)(x+4)(2x+5)$

b $(x-3)(2x-5)(x+4)$

c $(2x-3)(x+3)(x-5)$

a $\quad -3 \cdot 4 \cdot 5 = -60$

b $\quad -3 \cdot (-5) \cdot 4 = \boxed{60}$

c $\quad -3 \cdot 3 \cdot (-5) = 45$

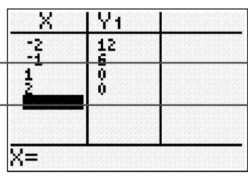
$\Rightarrow$ ontbinding b

Opdracht 18 bladzijde 67

Bepaal van de volgende veeltermen alle delers van de vorm x − a, met a een geheel getal.

1 $x^2 - 3x + 2$

$x-1$ en $x-2$ zijn delers van $x^2 - 3x + 2$

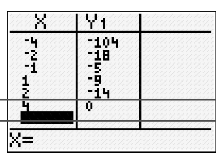


X	Y1
-2	12
-1	6
1	0
2	0

X=

2 $x^3 - 3x^2 - 3x - 4$

$x-4$ is een deler van $x^3 - 3x^2 - 3x - 4$

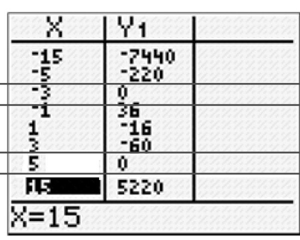


X	Y1
-4	-104
-2	-18
-1	-5
1	-9
2	-14
4	0

X=

3 $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$

$x+3$ en $x-5$ zijn delers van $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$



X	Y1
-15	-7440
-5	-220
-3	0
-1	36
1	-16
3	-60
5	0
15	5220

X=15

$\boxed{4 \quad x^4 - 37x^2 + 36}$

$x+6,\ x+1,\ x-1$ en $x-6$ zijn delers van $x^4 - 37x^2 + 36$

X	Y1	
-36	1.63E6	
-18	93024	
-12	15444	
-9	3600	
-6	0	
-4	-300	
-3	-216	
-2	-96	
-1	0	
1	0	
2	-96	
3	-216	
4	-300	
6	0	
9	3600	
12	15444	
18	93024	
36	1.63E6	

X=

V **Opdracht 19 bladzijde 67**

Toon aan dat $v(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8$ deelbaar is door $(x-2)(x-1)$.

Oplossing

$$\begin{aligned} v(2) &= 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2 + 8 \\ &= 16 - 56 + 72 - 40 + 8 \\ &= 0 \\ &\Rightarrow \quad x - 2 \mid v(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(1) &= 1 - 7 + 18 - 20 + 8 \\ &= 0 \\ &\Rightarrow \quad x - 1 \mid v(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (x-2)(x-1) \mid v(x)$$

Opdracht 20 bladzijde 69

Bepaal het quotiënt en de rest van de volgende delingen met de regel van Horner.

1 $v(x) = 4x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 7x + 3 \qquad d(x) = x - 2$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 4 & -3 & -5 & -7 & 3 \\ 2 & & 8 & 10 & 10 & 6 \\ \hline & 4 & 5 & 5 & 3 & 9 \end{array}$$

quotiënt $= 4x^3 + 5x^2 + 5x + 3$

rest $= 9$

2 $v(x) = x^3 + 3x + 4 \qquad d(x) = x - 1$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & & 1 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 8 \end{array}$$

quotiënt $= x^2 + x + 4$

rest $= 8$

3 $v(x) = 2x^4 - 1 \qquad d(x) = x - 2$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & & 4 & 8 & 16 & 32 \\ \hline & 2 & 4 & 8 & 16 & 31 \end{array}$$

quotiënt $= 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$

rest $= 31$

4 $v(x) = 4x^3 - 10x^2 - 2x + 6 \qquad d(x) = x + \dfrac{1}{2}$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 4 & -10 & -2 & 6 \\ -\dfrac{1}{2} & & -2 & 6 & -2 \\ \hline & 4 & -12 & 4 & 4 \end{array}$$

quotiënt $= 4x^2 - 12x + 4$

rest $= 4$

Opdracht 21 bladzijde 69

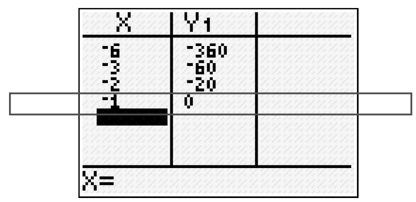
Ontbind in factoren van de eerste graad.

$\boxed{1 \quad x^3+4x^2+4x}$

$$\begin{aligned} & x^3+4x^2+4x \\ &= x\left(x^2+4x+4\right) \\ &= x\left(x+2\right)^2 \end{aligned}$$

$\boxed{2 \quad x^3-4x^2+x+6}$

- $x+1 \mid x^3-4x^2+x+6$



- $$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

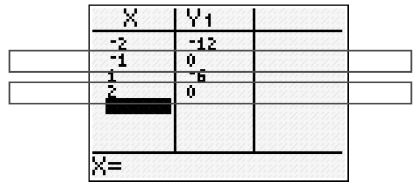
- $x^3-4x^2+x+6=\left(x+1\right)\underbrace{\left(x^2-5x+6\right)}_{\left.\begin{array}{l} s=5 \\ p=6 \end{array}\right\} \; 2 \text{ en } 3}$

$\Rightarrow \quad x^3-4x^2+x+6=\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)$

Opdracht 22 bladzijde 71

Ontbind de volgende veeltermen in factoren van de eerste graad en/of onontbindbare factoren van de tweede graad.

$\boxed{1 \quad 2x^3 - x^2 - 5x - 2}$



- $x+1$ en $x-2$ zijn delers van $2x^3 - x^2 - 5x - 2$.
-

	2	−1	−5	−2	
−1		−2	3	2	
	2	−3	−2	0	
2		4	2		
	2	1	0		

$\Rightarrow \quad 2x^3 - x^2 - 5x - 2 = (x+1)(x-2)(2x+1)$

$\boxed{2 \quad x^3 - 27x + 54}$

- $x+6$ en $x-3$ zijn delers van $x^3 - 27x^2 + 54$ (via grafisch rekentoestel).
-

	1	0	−27	54
−6		−6	36	−54
	1	−6	9	0
3		3	−9	
	1	−3	0	

$$\Rightarrow \quad x^3 - 27x + 54 = (x+6)(x-3)(x-3)$$
$$= (x+6)(x-3)^2$$

$\boxed{3 \quad 8x^3 - 14x^2 - 7x + 15}$

- $x + 1$ is een deler van $8x^3 - 14x^2 - 7x + 15$ (via grafisch rekentoestel).
-

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 8 & -14 & -7 & 15 \\ -1 & & -8 & 22 & -15 \\ \hline & 8 & -22 & 15 & 0 \end{array}$$

- $8x^3 - 14x^2 - 7x + 15 = (x+1)(8x^2 - 22x + 15)$

$$\downarrow$$

$$D = 4$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \text{ en } x_2 = \frac{5}{4}$$

$$= (x+1) \cdot 8 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{4}\right)$$

$\Rightarrow \quad 8x^3 - 14x^2 - 7x + 15 = (x+1)(2x-3)(4x-5)$

$\boxed{4 \quad x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 19x + 30}$

- $x - 2$ en $x - 3$ zijn delers van $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 19x + 30$ (via grafisch rekentoestel).
-

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & -4 & 6 & -19 & 30 \\ 2 & & 2 & -4 & 4 & -30 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -15 & 0 \\ 3 & & 3 & 3 & 15 & \\ \hline & 1 & 1 & 5 & 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 19x + 30 = (x-2)(x-3)(x^2 + x + 5)$

$$\downarrow$$

$$D < 0, \text{ niet ontbindbaar}$$

Opdracht 23 bladzijde 72

Los de volgende veeltermvergelijkingen op.

$\boxed{1 \quad x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0}$

- $x + 3,\ x + 2$ en $x - 1$ zijn delers van $x^3 + 4x^2 + x - 6$ en $\text{gr}\left(x^3 + 4x^2 + x - 6\right) = 3$.
- $(x+3)(x+2)(x-1) = 0$

$x = -3$ of $x = -2$ of $x = 1$

$\boxed{2 \quad x^3 - 3x^2 + 4 = 0}$

- $x + 1$ en $x - 2$ zijn delers van $x^3 - 3x^2 + 4$.
-

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & -3 & 0 & 4 \\
-1 & & -1 & 4 & -4 \\
\hline
 & 1 & -4 & 4 & 0 \\
2 & & 2 & -4 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 0 &
\end{array}
$$

$(x+1)(x-2)(x-2) = 0$

$x = -1$ of $x = 2$

$\boxed{3 \quad x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10 = 0}$

- $x + 2$ en $x - 1$ zijn delers van $x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10$.
-

$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & -1 & 1 & 9 & -10 \\
-2 & & -2 & 6 & -14 & 10 \\
\hline
 & 1 & -3 & 7 & -5 & 0 \\
1 & & 1 & -2 & 5 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 5 & 0 &
\end{array}
$$

$$(x+2)(x-1)\underbrace{\left(x^2 - 2x + 5\right)}_{\downarrow \atop D<0,\ \text{niet ontbindbaar}} = 0$$

$x = -2$ of $x = 1$

$\boxed{4 \quad x^3 - 6x + 4 = 0}$

- $x-2$ is een deler van $x^3 - 6x + 4$.
- $$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -6 & 4 \\ 2 & & 2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

$(x-2)(x+2x-2)=0$

$\downarrow$

$D = 12$

$x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{2}$ en $x_2 = \dfrac{-2-2\sqrt{3}}{2}$

$x = 2$ of $x = -1-\sqrt{3}$ of $x = -1+\sqrt{3}$

Opdracht 24 bladzijde 73

Bepaal het quotiënt en de rest van de volgende delingen.

$\boxed{1 \quad v(x) = x^3 - 1 \qquad d(x) = x-1}$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

quotiënt $= x^2 + x + 1$

rest $= 0$

$\boxed{2 \quad v(x) = x^3 - 3^3 \qquad d(x) = x-3}$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 0 & -27 \\ 3 & & 3 & 9 & 27 \\ \hline & 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}$$

quotiënt $= x^2 + 3x + 9$

rest $= 0$

3 $\quad v(x) = x^3 + 2^3 \qquad d(x) = x - 3$

	1	0	0	8
–2		–2	4	–8
	1	–2	4	0

quotiënt $= x^2 - 2x + 4$

rest $= 0$

Opdracht 25 bladzijde 74

Ontbind in factoren.

1 $\quad 125a^3 - 8$

$$\begin{aligned} 125a^3 - 8 &= (5a)^3 - 2^3 \\ &= (5a - 2)(25a^2 + 10a + 4) \end{aligned}$$

2 $\quad 64y^3 + \frac{1}{27}$

$$\begin{aligned} 64y^3 + \frac{1}{27} &= (4y)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ &= \left(4y + \frac{1}{3}\right)\left(16y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

3 $\quad 8x^3 - \frac{1}{8}y^3$

$$\begin{aligned} 8x^3 - \frac{1}{8}y^3 &= (2x)^3 - \left(\frac{1}{2}y\right)^3 \\ &= \left(2x - \frac{1}{2}y\right)\left(4x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2\right) \end{aligned}$$

4 $\quad 32x^5 + 108x^2$

$$\begin{aligned} 32x^5 + 108x^2 &= 4x^2(8x^3 + 27) \\ &= 4x^2\left((2x)^3 + 3^3\right) \\ &= 4x^2(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) \end{aligned}$$

Opdracht 26 bladzijde 74

1 Ontbind $a^6 - b^6$
a als een verschil van twee kwadraten,
b als een verschil van twee derdemachten.

a $$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2$$
$$= (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$$
$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

b $$a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3$$
$$= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$$
$$= (a - b)(a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$$

2 Welke ontbinding verkies je? Waarom?

Het ontbinden als een verschil van twee kwadraten want de ontbinding bevat een factor meer dan de ontbinding als een verschil van twee derdemachten.

Opdracht 27 bladzijde 78

Vul de tabel aan.

	veelterm $v(x)$	$gr(v(x))$	getalwaarde $v(...)$
1	$x^3 - 2x + 1$		$v(-1) =$
2	5		$v(2) =$
3	$-x^4 - x^5 + 4$		$v(0) =$
4	$2x^6 - 3x^4 + 5x^3 - x^6 + 2x - x^6$		$v(1) =$

Oplossing

	veelterm $v(x)$	$gr(v(x))$	getalwaarde $v(...)$
1	$x^3 - 2x + 1$	3	$v(-1) = 2$
2	5	0	$v(2) = 5$
3	$-x^4 - x^5 + 4$	5	$v(0) = 4$
4	$2x^6 - 3x^4 + 5x^3 - x^6 + 2x - x^6$	4	$v(1) = 4$

Opdracht 28 bladzijde 78

Gegeven : $a(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $b(x) = -2x^2 + 3x - 1$, $c(x) = -2x^2 - 5x + 2$ en $d(x) = 3x - 2$

1 Bepaal $a(x) + b(x)$

$$\begin{aligned} a(x) + b(x) &= 2x^2 - 3x + 1 - 2x^2 + 3x - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2 Bepaal $c(x) - 3d(x)$

$$\begin{aligned} c(x) - 3d(x) &= -2x^2 - 5x + 2 - 3(3x - 2) \\ &= -2x^2 - 5x + 2 - 9x + 6 \\ &= -2x^2 - 14x + 8 \end{aligned}$$

3 Bepaal $a(x) \cdot d(x)$

$$\begin{aligned} a(x) \cdot d(x) &= (2x^2 - 3x + 1) \cdot (3x - 2) \\ &= 6x^3 - 4x^2 - 9x^2 + 6x + 3x - 2 \\ &= 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2 \end{aligned}$$

$\boxed{4 \quad \text{Bepaal } a(x)\cdot\left(b(x)+c(x)\right)}$

$$\begin{aligned}
a(x)\cdot\left(b(x)+c(x)\right) &= \left(2x^2-3x+1\right)\cdot\left(-2x^2+3x-1-2x^2-5x+2\right)\\
&= \left(2x^2-3x+1\right)\cdot\left(-4x^2-2x+1\right)\\
&= -8x^4-4x^3+2x^2\\
&\qquad\quad +12x^3+6x^2-3x\\
&\qquad\qquad\qquad -4x^2-2x+1\\
&= -8x^4+8x^3+4x^2-5x+1
\end{aligned}$$

Opdracht 29 bladzijde 78

Bepaal a, b, c en d zodat de volgende veeltermen gelijk zijn.

$\boxed{1 \quad (a-1)x^3+(b+2)x^2-8x+4d=-2x^3+5x^2+(c-3)x-12}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=-2\\ b+2=5\\ -8=c-3\\ 4d=-12 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad a=-1,\ b=3,\ c=-5,\ d=-3$

$\boxed{2 \quad (2a+1)x^3+5x^2+(2c+3)x+2a=-5x^3+(2b-1)x^2-7x+d}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+1=-5\\ 5=2b-1\\ 2c+3=-7\\ 2a=d \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad a=-3,\ b=3,\ c=-5,\ d=-6$

$\boxed{3 \quad 3x^3+2ax^2-3bx-\frac{1}{2}c=ax^3+bx^2+cx+d}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3=a\\ 2a=b\\ -3b=c\\ -\frac{1}{2}c=d \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad a=3,\ b=6,\ c=-18,\ d=9$

$\boxed{4 \quad 5ax^3 + cx^2 + ax + d = bx^3 + 2ax^2 - x + 4a}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a = b & (1) \\ c = 2a & (2) \\ a = -1 & (3) \\ d = 4a & (4) \end{cases}$$

(3) in (2): $\quad c = -2$

(3) in (1): $\quad b = -5$

(3) in (4): $\quad d = -4$

$\Rightarrow \quad a = -1, b = -5, c = -2, d = -4$

$\boxed{5 \quad (ax^3 - 2x^2 + bx) - (3x^3 + cx^2 + 4x - 7) = 6x^3 + 3x^2 - 8x + d}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 3 = 6 \\ -2 - c = 3 \\ b - 4 = -8 \\ 7 = d \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad a = 9, b = -4, c = -5, d = 7$

$\boxed{6 \quad (ax^3 - bx^2 + 3x - 4) + (3x^3 + 4x^2 + cx + d) = dx^3 + ax^2 + bx}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 3 = d & (1) \\ -b + 4 = a & (2) \\ 3 + c = b & (3) \\ -4 + d = 0 & (4) \end{cases}$$

(4): $\quad d = 4$

in (1): $\quad a = d - 3 = 4 - 3 = 1$

in (2): $\quad b = 4 - a = 4 - 1 = 3$

in (3): $\quad c = b - 3 = 3 - 3 = 0$

$\Rightarrow \quad a = 1, b = 3, c = 0, d = 4$

Opdracht 30 bladzijde 79

Als $gr(a(x)) = 2$, $gr(b(x)) = 1$ en $gr(c(x)) = 4$, bepaal dan de graad van de volgende veeltermen.

$\boxed{1 \quad d(x) = a(x) + b(x) + c(x)}$

$gr(d(x)) = 4 \qquad \left(x^2 \mid x \mid x^{\boxed{4}}\right)$

$\boxed{2 \quad e(x) = a(x) \cdot b(x) \cdot c(x)}$

$gr(e(x)) = 7 \qquad \left(x^2 \cdot x \cdot x^4 \quad \Rightarrow \quad x^{\boxed{7}}\right)$

$\boxed{3 \quad f(x) = a(x) - b(x) - c(x)}$

$gr(f(x)) = 4 \qquad \left(x^2 \mid x \mid x^{\boxed{4}}\right)$

$\boxed{4 \quad g(x) = a(x) \cdot b(x) + c(x)}$

$gr(g(x)) = 4 \qquad \left(\underbrace{x^2 \cdot x}_{x^3} \mid x^{\boxed{4}}\right)$

$\boxed{5 \quad h(x) = a(x) + b(x) \cdot c(x)}$

$gr(h(x)) = 5 \qquad \left(x^2 \mid \underbrace{x \cdot x^4}_{x^5}\right)$

$\boxed{6 \quad i(x) = a(x) \cdot (b(x) + c(x))}$

$gr(i(x)) = 6 \qquad \underbrace{\left(x^2 \left(x + x^4\right)\right)}_{x^{\boxed{6}}}$

Opdracht 31 bladzijde 79

Gegeven : $v(x) = a(x) + b(x)$, $gr(a(x)) = 3$ en $gr(b(x)) = 3$

Geef een voorbeeld van een veelterm $a(x)$ en $b(x)$ zodat

$\boxed{1 \quad gr(v(x)) = 3}$

$a(x) = x^3 + x^2$

$b(x) = 2x^3 - x + 1$

$v(x) = a(x) + b(x) \quad \Rightarrow \quad v(x) = 3x^3 + x^2 - x + 1$

$\Rightarrow \quad gr(v(x)) = 3$

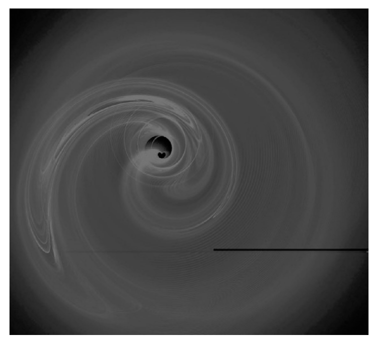
$\boxed{2 \quad gr(v(x)) = 2}$

$a(x) = x^3 + x^2$

$b(x) = -x^3 - x + 1$

$v(x) = a(x) + b(x) \quad \Rightarrow \quad v(x) = x^2 - x + 1$

$\Rightarrow \quad gr(v(x)) = 2$



$\boxed{3 \quad gr(v(x)) = 0}$

$a(x) = x^3 + x^2$

$b(x) = -x^3 - x^2 + 1$

$v(x) = a(x) + b(x) \quad \Rightarrow \quad v(x) = 1$

$\Rightarrow \quad gr(v(x)) = 0$

Opdracht 32 bladzijde 79

Bepaal van de veelterm $v(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$\boxed{1 \quad v(0)}$

$v(0) = a_0$

$\boxed{2 \quad v(1)}$

$v(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$

(= som van de coëfficiënten)

$\boxed{3 \quad v(-1)}$

$v(-1) = a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (-1)^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0$

voor n even geldt : $\quad v(-1) = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots + a_2 - a_1 + a_0$

voor n oneven geldt : $\quad v(-1) = -a_n + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$

Opdracht 33 bladzijde 80

Bepaal het quotiënt en de rest van de volgende delingen.

1	$D(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$	$d(x) = 2x - 1$

$$
\begin{array}{rl}
2x^3 + 3x^2 + 0x - 1 & \underline{|\; 2x - 1 \quad} \\
\underline{-2x^3 \pm x^2 \qquad\quad} & x^2 + 2x + 1 \\
4x^2 + 0x - 1 & \\
\underline{-4x^2 \pm 2x \quad} & \\
2x - 1 & \\
\underline{-2x \pm 1} & \\
0 &
\end{array}
$$

quotiënt = $x^2 + 2x + 1$

rest = 0

2	$D(x) = 3x^4 - 2x + 5$	$d(x) = x^2 + 2x + 2$

$$
\begin{array}{rl}
3x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 5 & \underline{|\; x^2 + 2x + 2 \quad} \\
\underline{-3x^4 \mp 6x^3 \mp 6x^2 \qquad\qquad} & 3x^2 - 6x + 6 \\
-6x^3 - 6x^2 - 2x + 5 & \\
\underline{\pm 6x^3 \pm 12x^2 \pm 12x \quad} & \\
6x^2 + 10x + 5 & \\
\underline{-6x^2 \mp 12x \mp 12} & \\
-2x - 7 &
\end{array}
$$

quotiënt = $3x^2 - 6x + 6$

rest = $-2x - 7$

3	$D(x) = x^5 + 3x$	$d(x) = x^3 - 1$

$$
\begin{array}{rl}
x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 3x & \underline{|\; x^3 - 1 \quad} \\
\underline{-x^5 \qquad\qquad\quad \pm x^2 \qquad} & x^2 \\
x^2 + 3x &
\end{array}
$$

quotiënt = x^2

rest = $x^2 + 3x$

4 $D(x)=7x^3-x^2+5x-1$	$d(x)=2x^2$

$$\begin{array}{l|l}
7x^3-x^2+5x-1 & 2x^2 \\ \hline
\underline{-7x^3} & \frac{7}{2}x-\frac{1}{2} \\
-x^2+5x-1 & \\
\underline{\pm x^2} & \\
5x-1 &
\end{array}$$

quotiënt = $\frac{7}{2}x-\frac{1}{2}$

rest = $5x-1$

5 $D(x)=4x^6+2x^2-x+1$	$d(x)=2x^3-3$

$$\begin{array}{l|l}
4x^6+0x^5+0x^4+0x^3+2x^2-x+1 & 2x^3-3 \\ \hline
\underline{-4x^6\qquad\qquad\pm 6x^3\qquad\qquad} & 2x^3+3 \\
\qquad\qquad 6x^3+2x^2-x+1 & \\
\qquad\qquad \underline{-6x^3\qquad\quad\pm 9} & \\
\qquad\qquad\qquad 2x^2-x+10 &
\end{array}$$

quotiënt = $2x^3+3$

rest = $2x^2-x+10$

6 $D(x)=6x^5+2x^3-5x^2+2x-1$	$d(x)=x^2+1$

$$\begin{array}{l|l}
6x^5+0x^4+2x^3-5x^2+2x-1 & x^2+1 \\ \hline
\underline{-6x^5\qquad\mp 6x^3\qquad\qquad} & 6x^3-4x-5 \\
\qquad -4x^3-5x^2+2x-1 & \\
\qquad \underline{\pm 4x^3\qquad\quad\pm 4x} & \\
\qquad\qquad -5x^2+6x-1 & \\
\qquad\qquad \underline{\pm 5x^2\qquad\pm 5} & \\
\qquad\qquad\qquad 6x+4 &
\end{array}$$

quotiënt = $6x^3-4x-5$

rest = $6x+4$

7 $D(x) = 3x^3 + 4x^2 - 19x + 10 \qquad d(x) = 3x - 2$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & +4x^2 & -19x & +10 & 3x-2 \\
\cline{5-5}
-3x^3 & \pm 2x^2 & & & x^2+2x-5 \\
\cline{1-4}
 & 6x^2 & -19x & +10 & \\
 & -6x^2 & \pm 4x & & \\
\cline{2-4}
 & & -15x & +10 & \\
 & & \pm 15x & \mp 10 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

quotiënt = $x^2 + 2x - 5$

rest = 0

8 $D(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3 \qquad d(x) = x + \frac{1}{2}$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -2x^2 & +x & -3 & x+\frac{1}{2} \\
\cline{5-5}
-x^3 & \mp \frac{1}{2}x^2 & & & x^2-\frac{5}{2}x+\frac{9}{4} \\
\cline{1-4}
 & -\frac{5}{2}x^2 & +x & -3 & \\
 & \pm \frac{5}{2}x^2 & \pm \frac{5}{4}x & & \\
\cline{2-4}
 & & \frac{9}{4}x & -3 & \\
 & & -\frac{9}{4}x & \mp \frac{9}{8} & \\
\cline{3-4}
 & & & -\frac{33}{8} &
\end{array}
$$

quotiënt = $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{9}{4}$

rest = $-\frac{33}{8}$

Opdracht 34 bladzijde 80

Vul de tabel aan.

	deeltal	deler	quotiënt	rest
1		$3x^2-2$	x^3-2x+5	$6x+1$
2	$-4x^4+2x^3-8x^2+10x-3$		$2x^3+4x-3$	0

Oplossing van 1

$$\begin{aligned} D(x) &= \left(3x^2-2\right)\left(x^3-2x+5\right)+6x+1 \\ &= 3x^5-6x^3+15x^2 \\ &\qquad -2x^3 \qquad +4x-10 \\ &\qquad\qquad\qquad +6x+\ \ 1 \\ &= 3x^5-8x^3+15x^2+10x-9 \end{aligned}$$

	deeltal	deler	quotiënt	rest
1	$3x^5-8x^3+15x^2+10x-9$	$3x^2-2$	x^3-2x+5	$6x+1$

Oplossing van 2

$$d(x)=\left(-4x^4+2x^3-8x^2+10x-3\right):\left(2x^3+4x-3\right)$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} -4x^4 & +2x^3 & -8x^2 & +10x & -3 & 2x^3+4x-3 \\ \cline{6-6} \pm 4x^4 & & \pm 8x^2 & \mp 6x & & -2x+1 \\ \cline{1-5} & 2x^3 & +0x^2 & +\ 4x & -3 & \\ & -2x^3 & & \mp 4x & \pm 3 & \\ \cline{2-5} & & & & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad d(x)=-2x+1$$

	deeltal	deler	quotiënt	rest
2	$-4x^4+2x^3-8x^2+10x-3$	$-2x+1$	$2x^3+4x-3$	0

Je kunt de oplossing ook vinden via de methode van de onbepaalde coëfficiënten.

Opdracht 35 bladzijde 80

We ontbinden de veelterm $x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ in 2 factoren.
Als de ene factor x^2+x+1 is, dan is de tweede factor

A x^6+1
B x^6+x^3+1
C $x^6+x^4+x^2+1$
D $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$
E $x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3$

Oplossing

$$\begin{array}{r|l}
x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^8\mp x^7\mp x^6\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & x^6+x^3+1 \\
+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 & \\
\underline{-x^5\mp x^4\mp x^3\qquad\qquad\quad} & \\
x^2+x+1 & \\
\underline{-x^2\mp x\mp 1} & \\
0 &
\end{array}$$

andere werkwijze:

$$\begin{aligned}
x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 &= x^6\left(x^2+x+1\right)+x^3\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)\\
&=\left(x^2+x+1\right)\left(x^6+x^3+1\right)
\end{aligned}$$

Antwoord B is het juiste antwoord.

Opdracht 36 bladzijde 81

Door uit te rekenen, kun je nagaan dat $2x^3-3x^2+10x=\left(x^2-2x+3\right)\left(2x+1\right)+6x-3$.

1 Bepaal hieruit het quotiënt en de rest van de deling van $2x^3-3x^2+10x$ door x^2-2x+3.

$$2x^3-3x^2+10x=\left(x^2-2x+3\right)\underbrace{\left(2x+1\right)}_{\text{quotiënt}}+\underbrace{6x-3}_{\text{rest}}$$

want $\operatorname{gr}\left(6x-3\right)<\operatorname{gr}\left(x^2-2x+3\right)$

2	Je kunt hieruit niet rechtstreeks het quotiënt en de rest van de deling van $2x^3 - 3x^2 + 10x$ door $2x + 1$ aflezen. a Verklaar waarom niet. b Bepaal het quotiënt en de rest van deze deling.

a $6x - 3$ kan bij deze deling niet de rest zijn omdat $\text{gr}\left(6x-3\right)$ niet kleiner is dan $\text{gr}\left(2x+1\right)$.

b

$$
\begin{array}{rrr|l}
2x^3 & -3x^2 & +10x & \; 2x+1 \\
\cline{4-4}
\underline{-2x^3} & \underline{\mp x^2} & & \; x^2 - 2x + 6 \\
 & -4x^2 & +10x & \\
 & \underline{\pm 4x^2} & \underline{\pm 2x} & \\
 & & 12x & \\
 & & \underline{-12x \mp 6} & \\
 & & -6 &
\end{array}
$$

quotiënt = $x^2 - 2x + 6$

rest = -6

Opdracht 37 bladzijde 81

Bij deling van $2x^4+ax^3-9x^2+bx-4$ door $-2x^2+4x-3$ is de rest gelijk aan $-15x+2$.
Bepaal a en b.

Oplossing

$$\begin{aligned}
2x^4+ax^3-9x^2+bx-4 &= \left(-2x^2+4x-3\right)\left(q_2x^2+q_1x+q_0\right)-15x+2\\
&= -2q_2x^4-2q_1x^3-2q_0x^2\\
&\qquad +4q_2x^3+4q_1x^2+4q_0x\\
&\qquad\qquad -3q_2x^2-3q_1x-3q_0\\
&\qquad\qquad\qquad -15x\ +\ 2\\
&= -2q_2x^4+\left(-2q_1+4q_2\right)x^3+\left(-2q_0+4q_1-3q_2\right)x^2+\left(4q_0-3q_1-15\right)x-3q_0+2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}
2=-2q_2 & (1)\\
a=-2q_1+4q_2 & (2)\\
-9=-2q_0+4q_1-3q_2 & (3)\\
b=4q_0-3q_1-15 & (4)\\
-4=-3q_0+2 & (5)
\end{cases}$$

(1): $q_2=-1$

(5): $q_0=2$

in (3): $\begin{aligned}4q_1&=-9+2q_0+3q_2\\&=-9+4-3\\&=-8\\q_1&=-2\end{aligned}$

in (2): $\begin{aligned}a&=-2q_1+4q_2\\&=4-4\\&=0\end{aligned}$

in (4): $\begin{aligned}b&=4q_0-3q_1-15\\&=8+6-15\\&=-1\end{aligned}$

$\Rightarrow\ a=0$ en $b=-1$

Opdracht 38 bladzijde 81

Als $x^2 - x - 1$ een deler is van $ax^3 + bx^2 + 1$, dan is b gelijk aan

A -2 B -1 C 0 D 1 E 2

Oplossing

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + 1 &= \left(x^2 - x - 1\right)\left(q_1 x + q_0\right) \\ &= q_1 x^3 + q_0 x^2 \\ &\qquad - q_1 x^2 - q_0 x \\ &\qquad\qquad - q_1 x - q_0 \\ &= q_1 x^3 + \left(q_0 - q_1\right) x^2 + \left(-q_0 - q_1\right) x - q_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = q_1 \\ b = q_0 - q_1 \\ 0 = -q_0 - q_1 \\ 1 = -q_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_0 = -1 \\ q_1 = -q_0 = 1 \\ a = 1 \\ b = -1 - 1 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad b = -2$$

Antwoord A is het juiste antwoord.

Opdracht 39 bladzijde 81

Bepaal a, b en het quotiënt van de deling van $x^4 - ax^3 + 3x^2 + bx - 4$ door $(x-2)^2$ zodat de deling opgaand is.

Oplossing

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + 3x^2 + bx - 4 &= (x-2)^2\left(q_2x^2 + q_1x + q_0\right) \\ &= \left(x^2 - 4x + 4\right)\left(q_2x^2 + q_1x + q_0\right) \\ &= q_2x^4 + q_1x^3 + q_0x^2 \\ &\qquad -4q_2x^3 - 4q_1x^2 - 4q_0x \\ &\qquad\qquad +4q_2x^2 + 4q_1x + 4q_0 \\ &= q_2x^4 + (q_1 - 4q_2)x^3 + (q_0 - 4q_1 + 4q_2)x^2 + (-4q_0 + 4q_1)x + 4q_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = q_2 & (1) \\ -a = q_1 - 4q_2 & (2) \\ 3 = q_0 - 4q_1 + 4q_2 & (3) \\ b = -4q_0 + 4q_1 & (4) \\ -4 = 4q_0 & (5) \end{cases}$$

(5): $q_0 = -1$

in (3): $3 = -1 - 4q_1 + 4$

$\Rightarrow$ $q_1 = 0$

in (2): $-a = 0 - 4$

$\Rightarrow$ $a = 4$

in (4): $b = 4 + 0$

$\Rightarrow$ $b = 4$

$\Rightarrow$ $a = 4$ en $b = 4$

Het quotiënt is $x^2 - 1$.

Opdracht 40 bladzijde 81

Als $ax^3 - 16x^2 - 5x + b$ deelbaar is door $(2x+1)(3x-1)$, bepaal dan a, b en het quotiënt.

Oplossing

$$\begin{aligned} ax^3 - 16x^2 - 5x + b &= (2x+1)(3x-1)(q_1x + q_0) \\ &= (6x^2 + x - 1)(q_1x + q_0) \\ &= 6q_1x^3 + 6q_0x^2 \\ &\qquad\quad + q_1x^2 + q_0x \\ &\qquad\qquad\quad - q_1x - q_0 \\ &= 6q_1x^3 + (6q_0 + q_1)x^2 + (q_0 - q_1)x - q_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 6q_1 & (1) \\ -16 = 6q_0 + q_1 & (2) \\ -5 = q_0 - q_1 & (3) \\ b = -q_0 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &(2)+(3): \quad -21 = 7q_0 \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \quad q_0 = -3 \end{aligned}$$

$$\text{in } (4): \quad b = 3$$

$$\begin{aligned} \text{in } (3): \quad q_1 &= q_0 + 5 \\ &= -3 + 5 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{in } (1): \quad a = 12$$

$\Rightarrow \quad a = 12$ en $b = 3$

Het quotiënt is $2x - 3$.

Opdracht 41 bladzijde 81

Bij deling van de veelterm $x^3+x^5+x^7+x^{11}+x^{13}+x^{17}+x^{19}+x^{23}+x^{29}$ door de veelterm x^2-1 is er een rest. De getalwaarde van die rest voor $x=2$ is

A 2 B 3 C 9 D 18 E 27

Oplossing

$$x^{29}+x^{23}+x^{19}+x^{17}+x^{13}+x^{11}+x^7+x^5+x^3$$
$$=\left(x^2-1\right)\cdot q(x)+\underbrace{r(x)}_{ax+b} \qquad \left(\text{want } gr\left(r(x)\right)<gr\left(x^2-1\right)\right)$$

Voor het deeltal $v(x)$ geldt :

$$v(1)=9=a\cdot 1+b \quad \Rightarrow \quad a+b=9 \qquad (1)$$
$$v(-1)=-9=-a+b \quad \Rightarrow \quad -a+b=-9 \qquad (2)$$

$(1)+(2)$: $2b=0 \quad \Rightarrow \quad b=0$

in (1): $a=9$

Dus $r(x)=9x$ zodat $r(2)=18$

Antwoord D is het juiste antwoord.

Opdracht 42 bladzijde 82

Bepaal het quotiënt en de rest van de volgende delingen met de regel van Horner.

1	$v(x)=3x^3+2x^2-6x+1$	$d(x)=x-2$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 2 & & 6 & 16 & 20 \\ \hline & 3 & 8 & 10 & 21 \end{array}$$

quotiënt $=3x^2+8x+10$

rest $=21$

2 $v(x)=x^3+2x^2-4x+3$	$d(x)=x+3$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & -4 & 3 \\ -3 & & -3 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 6 \end{array}$$

quotiënt $=x^2-x-1$

rest $=6$

3 $v(x)=x^4-3x^2+2x-6$	$d(x)=x-3$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & -3 & 2 & -6 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & 60 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 20 & 54 \end{array}$$

quotiënt $=x^3+3x^2+6x+20$

rest $=54$

4 $v(x)=x^5+6x^4-2x-12$	$d(x)=x+6$

$$\begin{array}{r|rrrrr|r} & 1 & 6 & 0 & 0 & -2 & -12 \\ -6 & & -6 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

quotiënt $=x^4-2$

rest $=0$

5 $v(x)=-x^3+2x+1$	$d(x)=x+\frac{3}{2}$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{3}{8} \\ \hline & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{11}{8} \end{array}$$

quotiënt $=-x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$

rest $=\frac{11}{8}$

Opdracht 43 bladzijde 82

Bepaal k zodat de volgende delingen de gegeven rest hebben.

1	$v(x)=3x^3-kx^2+2x+6$	$d(x)=x+3$	$r=0$

$$v(-3)=0$$
$$3\cdot(-3)^3-k\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)+6=0$$
$$-81-9k-6+6=0$$
$$-9k=81$$
$$k=-9$$

2	$v(x)=kx^3-3x-2$	$d(x)=x-2$	$r=-3$

$$v(2)=-3$$
$$k\cdot 2^3-3\cdot 2-2=-3$$
$$8k=5$$
$$k=\frac{5}{8}$$

3	$v(x)=x^5+kx^3+2x^2+5x$	$d(x)=x+2$	$r=4$

$$v(-2)=4$$
$$(-2)^5+k\cdot(-2)^3+2\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)=4$$
$$-32-8k+8-10=4$$
$$-8k=38$$
$$k=-\frac{38}{8}$$
$$k=-\frac{19}{4}$$

4	$v(x)=kx^3-3x^2+x+6$	$d(x)=x+1$	$r=0$

$$v(-1)=0$$
$$k\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)^2-1+6=0$$
$$-k-3-1+6=0$$
$$-k=-2$$
$$k=2$$

Opdracht 44 bladzijde 82

1 Bepaal het quotiënt en de rest van de deling van $2x^3+3x^2-4x+5$ door $x-4$.

	2	3	–4	5
4		8	44	160
	2	11	40	165

quotiënt $=2x^2+11x+40$

rest $=165$

2 Leid uit het vorige resultaat het quotiënt en de rest af van de deling van $2x^3+3x^2-4x+5$ door $4-x$.

$$2x^3+3x^2-4x+5=(x-4)(2x^2+11x+40)+165 \qquad (\text{vraag } 1)$$

$$\Rightarrow \quad 2x^3+3x^2-4x+5=(4-x)(-2x^2-11x-40)+165$$

quotiënt $=-2x^2-11x-40$

rest $=165$

Opdracht 45 bladzijde 82

1 Bepaal p zodat de deling van $v(x)=px^3+2px^2+3x+7p$ door $x+3$ als rest p heeft.

$v(-3)=p$

$p\cdot(-3)^3+2p\cdot(-3)^2+3\cdot(-3)+7p=p$

$-27p+18p-9+7p=p$

$-3p=9$

$p=-3$

2 Bepaal p zodat de deling van $v(x)=x^4+px^3-px^2-4px+4$ door $x+1$ als rest $-p$ heeft.

$v(-1)=-p$

$(-1)^4+p\cdot(-1)^3-p\cdot(-1)^2-4p\cdot(-1)+4=-p$

$1-p-p+4p+4=-p$

$3p=-5$

$p=-\frac{5}{3}$

Opdracht 46 bladzijde 83

Bepaal van de volgende veeltermen alle delers van de vorm x – a, met a een geheel getal.

De delers van de vorm $x-a$ worden bepaald m.b.v. het grafisch rekentoestel.

$\boxed{1 \quad -2x^3-3x^2+6x-9}$

$x+3$

$\boxed{2 \quad x^4+x^3-7x^2-x+6}$

$x+3,\ x+1,\ x-1$ en $x-2$

$\boxed{3 \quad x^5-4x^4+x^3-2x^2+x+30}$

$x-2$

$\boxed{4 \quad 2x^4-3x^3-17x^2-10x-8}$

$x+2$ en $x-4$

Opdracht 47 bladzijde 83

Ontbind de volgende veeltermen in factoren van de eerste graad en/of onontbindbare factoren van de tweede graad.

$\boxed{1 \quad x^4-2x^3+x^2}$

$$\begin{aligned} x^4-2x^3+x^2 &= x^2\left(x^2-2x+1\right) \\ &= x^2\left(x-1\right)^2 \end{aligned}$$

$\boxed{2 \quad x^3-x^2-4x+4}$

$$\begin{aligned} x^3-x^2-4x+4 &= x^2\left(x-1\right)-4\left(x-1\right) \\ &= \left(x-1\right)\left(x^2-4\right) \\ &= \left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right) \end{aligned}$$

$\boxed{3 \quad x^3-4x^2-11x+30}$

- $x+3,\ x-2$ en $x-5$ zijn delers en $\mathrm{gr}\left(x^3-4x^2-11x+30\right)=3$.
- $x^3-4x^2-11x+30=\left(x+3\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right)$

$\boxed{4 \quad 3x^3-6x^2+75x-150}$

$$\begin{aligned} 3x^3-6x^2+75x-150 &= 3\left(x^3-2x^2+25x-50\right) \\ &= 3\left(x^2\left(x-2\right)+25\left(x-2\right)\right) \\ &= 3\left(x-2\right)\left(x^2+25\right) \end{aligned}$$

$\boxed{5 \quad x^3 + 13x^2 + 48x + 36}$

- $x + 6$ en $x + 1$ zijn delers.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 13 & 48 & 36 \\ -6 & & -6 & -42 & -36 \\ \hline & 1 & 7 & 6 & 0 \\ -1 & & -1 & -6 & \\ \hline & 1 & 6 & 0 & \end{array}$$

- $x^3 + 13x^2 + 48x + 36 = (x+6)(x+1)(x+6)$

$$= (x+1)(x+6)^2$$

$\boxed{6 \quad 2x^3 - 6x^2 - 18x + 54}$

$$\begin{aligned} 2x^3 - 6x^2 - 18x + 54 &= 2\left(x^3 - 3x^2 - 9x + 27\right) \\ &= 2\left(x^2(x-3) - 9(x-3)\right) \\ &= 2(x-3)\left(x^2 - 9\right) \\ &= 2(x-3)^2(x+3) \end{aligned}$$

$\boxed{7 \quad 12x^3 - 43x^2 - 22x + 8}$

- $x - 4$ is een deler.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 12 & -43 & -22 & 8 \\ 4 & & 48 & 20 & -8 \\ \hline & 12 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

- $12x^3 - 43x^2 - 22x + 8 = (x-4)\left(12x^2 + 5x - 2\right)$

$$\downarrow$$

$$D = 121$$

$$x_1 = \frac{1}{4} \text{ en } x_2 = -\frac{2}{3}$$

$$= (x-4) \cdot 12\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

$$= (x-4)(4x-1)(3x+2)$$

$\boxed{8 \quad -x^3 + 6x^2 - 3x - 10}$

- $x+1$, $x-2$ en $x-5$ zijn delers en $\text{gr}\left(-x^3+6x^2-3x-10\right)=3$.
- $-x^3+6x^2-3x-10=-(x+1)(x-2)(x-5)$

$\boxed{9 \quad x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8}$

- $x+2$ en $x-2$ zijn delers.

$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 1 & -2 & -4 & -8 \\
-2 & & -2 & 2 & 0 & 8 \\
\hline
 & 1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\
2 & & 2 & 2 & 4 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

- $x^4+x^3-2x^2-4x-8=(x+2)(x-2)\left(x^2+x+2\right)$

$$\downarrow$$

$D<0$ niet ontbindbaar

$\boxed{10 \quad 4x^4 - 28x^3 + 45x^2 + 28x - 49}$

- $x+1$ en $x-1$ zijn delers.

$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 4 & -28 & 45 & 28 & -49 \\
-1 & & -4 & 32 & -77 & 49 \\
\hline
 & 4 & -32 & 77 & -49 & 0 \\
1 & & 4 & -28 & 49 & \\
\hline
 & 4 & -28 & 49 & 0 &
\end{array}
$$

- $4x^4-28x^3+45x^2+28x-49=(x+1)(x-1)\left(4x^2-28x+49\right)$

$$\downarrow$$

$$D=0$$

$$x=\frac{7}{2}$$

$$=(x+1)(x-1)\cdot 4\left(x-\frac{7}{2}\right)^2$$

$$=(x+1)(x-1)(2x-7)^2$$

Opdracht 48 bladzijde 83

Los op.

$\boxed{1 \quad x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 30x = 0}$

$$x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 30x = 0$$
$$x\left(x^3 - 4x^2 - 11x + 30\right) = 0$$

$x+3,\ x-2$ en $x-5$ zijn delers en $\mathrm{gr}\left(x^3 - 4x^2 - 11x + 30\right) = 3$.

$$x\left(x+3\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right) = 0$$
$$x = 0 \text{ of } x = -3 \text{ of } x = 2 \text{ of } x = 5$$

$\boxed{2 \quad 14x^3 + 11x^2 - 5x - 2 = 0}$

$$14x^3 + 11x^2 - 5x - 2 = 0$$

$x+1$ is een deler.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 14 & 11 & -5 & -2 \\ -1 & & -14 & 3 & 2 \\ \hline & 14 & -3 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\left(x+1\right)\left(14x^2 - 3x - 2\right) = 0$$
$$x = -1 \text{ of } 14x^2 - 3x - 2 = 0$$
$$\rightarrow \quad D = 121$$
$$x = -1 \text{ of } x = -\frac{2}{7} \text{ of } x = \frac{1}{2}$$

$\boxed{3 \quad x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0}$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$x+1$ is een deler.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\left(x+1\right)\left(x^2 + 2x + 1\right) = 0$$
$$\left(x+1\right)\left(x+1\right)^2 = 0$$
$$\left(x+1\right)^3 = 0$$
$$x = -1$$

$\boxed{4 \quad 6x^4+11x^3-16x^2-11x+10=0}$

$6x^4+11x^3-16x^2-11x+10=0$

$x+1$ en $x-1$ zijn delers.

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 6 & 11 & -16 & -11 & 10 \\
-1 & & -6 & -5 & 21 & -10 \\
\hline
 & 6 & 5 & -21 & 10 & 0 \\
1 & & 6 & 11 & -10 & \\
\hline
 & 6 & 11 & -10 & 0 &
\end{array}$$

$(x+1)(x-1)(6x^2+11x-10)=0$

$\rightarrow \quad D=361$

$x=-1$ of $x=1$ of $x=\dfrac{2}{3}$ of $x=-\dfrac{5}{2}$

$\boxed{5 \quad 2x^3-x^2-2x+1=0}$

$2x^3-x^2-2x+1=0$

$x^2(2x-1)-(2x-1)=0$

$(2x-1)(x^2-1)=0$

$x=\dfrac{1}{2}$ of $x=-1$ of $x=1$

$\boxed{6 \quad 2x^4+13x^3+17x^2-12x=0}$

$2x^4+13x^3+17x^2-12x=0$

$x(2x^3+13x^2+17x-12)=0$

$x+4$ en $x+3$ zijn delers.

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & 13 & 17 & -12 \\
-4 & & -8 & -20 & 12 \\
\hline
 & 2 & 5 & -3 & 0 \\
-3 & & -6 & 3 & \\
\hline
 & 2 & -1 & 0 &
\end{array}$$

$x(x+4)(x+3)(2x-1)=0$

$x=0$ of $x=-4$ of $x=-3$ of $x=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{7 \quad -9x^4-15x^3+80x^2-20x-16=0}$

$-9x^4-15x^3+80x^2-20x-16=0$

$x+4$ en $x-2$ zijn delers.

$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & -9 & -15 & 80 & -20 & -16 \\
-4 & & 36 & -84 & 16 & 16 \\
\hline
 & -9 & 21 & -4 & -4 & 0 \\
2 & & -18 & 6 & 4 & \\
\hline
 & -9 & 3 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

$(x+4)(x-2)(-9x^2+3x+2)=0$

$\rightarrow \quad D=81$

$x=-4$ of $x=2$ of $x=\dfrac{2}{3}$ of $x=-\dfrac{1}{3}$

$\boxed{8 \quad 2x^5+4x^4-17x^3-34x^2-9x-18=0}$

$2x^5+4x^4-17x^3-34x^2-9x-18=0$

$x+3$, $x+2$ en $x-3$ zijn delers.

$$
\begin{array}{r|rrrrr|r}
 & 2 & 4 & -17 & -34 & -9 & -18 \\
-3 & & -6 & 6 & 33 & 3 & 18 \\
\hline
 & 2 & -2 & -11 & -1 & -6 & 0 \\
-2 & & -4 & 12 & -2 & 6 & \\
\hline
 & 2 & -6 & 1 & -3 & 0 & \\
3 & & 6 & 0 & 3 & & \\
\hline
 & 2 & 0 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

$(x+3)(x+2)(x-3)(2x^2+1)=0$

$\downarrow$

niet ontbindbaar

$x=-3$ of $x=-2$ of $x=3$

$\boxed{9 \quad x^5 + 16x^3 - 225x = 0}$

$$x^5 + 16x^3 - 225x = 0$$

$$x\left(x^4 + 16x^2 - 225\right) = 0$$

$\rightarrow$ bikwadratische vergelijking

Stel $x^2 = t$

$$t^2 + 16t - 225 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} s = -16 \\ p = -225 \end{array}\right\} \quad -25 \text{ en } 9$$

$$\left(t + 25\right)\left(t - 9\right) = 0$$

$$x\left(x^2 + 25\right)\left(x^2 - 9\right) = 0$$

$\downarrow$

niet ontbindbaar

$$x\left(x^2 + 25\right)\left(x + 3\right)\left(x - 3\right) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -3 \text{ of } x = 3$$

Je kunt de oplossing ook vinden door delers van de vorm $x - a$, met a een geheel getal, te zoeken. Je vindt dan dat $x + 3$ en $x - 3$ delers zijn. Met het rekenschema van Horner vind je dan ook dat $x^4 + 16x^2 - 225 = \left(x - 3\right)\left(x + 3\right)\left(x^2 + 25\right)$.

$\boxed{10 \quad x^4 + 5x^2 + 4 = 0}$

$$x^4 + 5x^2 + 4 = 0$$

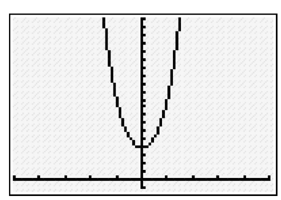
Stel $x^2 = t$

$$t^2 + 5t + 4 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} s = -5 \\ p = 4 \end{array}\right\} \quad -4 \text{ en } -1$$

$$\left(t + 4\right)\left(t + 1\right) = 0$$

$\left(x^2 + 4\right)\left(x^2 + 1\right) = 0 \quad \rightarrow \quad$ er zijn geen oplossingen



Ook met het grafisch rekentoestel vinden we geen delers van de vorm $x - a$, met a een geheel getal. We zien dat de grafiek volledig boven de x-as ligt.

Opdracht 49 bladzijde 83

Bij deling van de veelterm $v(x) = 3x^3 + ax^2 - 5x + 2$ door $x - 1$ is de rest gelijk aan -4.
Bepaal de waarde van a en ontbind de veelterm in factoren.

Oplossing

- $v(1) = -4$

  $3 + a - 5 + 2 = -4$
  $a = -4$

- $3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$

  $x + 1$ en $x - 2$ zijn delers.

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 3 & -4 & -5 & 2 \\
-1 & & -3 & 7 & -2 \\
\hline
 & 3 & -7 & 2 & 0 \\
2 & & 6 & -2 & \\
\hline
 & 3 & -1 & 0 &
\end{array}
$$

$3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = (x + 1)(x - 2)(3x - 1)$

Opdracht 50 bladzijde 83

Bij deling van de veelterm $v(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 6$ door $x - 1$ is de rest gelijk aan -6, bij deling door $x + 2$ is de rest gelijk aan 0.
Bepaal a en b en los daarna de vergelijking $ax^3 - 3x^2 + bx + 6 = 0$ op.

Oplossing

- $\begin{cases} v(1) = -6 \\ v(-2) = 0 \end{cases}$

  $\begin{cases} a - 3 + b + 6 = -6 \\ -8a - 12 - 2b + 6 = 0 \end{cases}$

  $\begin{cases} a + b = -9 \\ -8a - 2b = 6 \end{cases}$

  $\begin{cases} a + b = -9 & (1) \\ 4a + b = -3 & (2) \end{cases}$

  $(2) - (1): \quad 3a = 6$

  $\qquad\qquad\quad a = 2$

  in (1): $\quad b = -9 - a$

  $\qquad\qquad b = -9 - 2 = -11$

  $\Rightarrow \quad a = 2$ en $b = -11$

- $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$

  $x + 2$ is een deler (gegeven).

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -3 & -11 & 6 \\ -2 & & -4 & 14 & -6 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & 0 \end{array}$$

$(x + 2)(2x^2 - 7x + 3) = 0$

$\rightarrow \quad D = 25$

$x = -2$ of $x = \dfrac{1}{2}$ of $x = 3$

Opdracht 51 bladzijde 83

Bepaal a en b zodat $x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx - 8$ deelbaar is door $(x-2)^2$.

Oplossing

Eerste oplossingsmethode

$$\begin{aligned}
x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx - 8 &= (x-2)^2\left(q_2x^2 + q_1x + q_0\right) \\
&= \left(x^2 - 4x + 4\right)\left(q_2x^2 + q_1x + q_0\right) \\
&= q_2x^4 + q_1x^3 + q_0x^2 \\
&\qquad -4q_2x^3 - 4q_1x^2 - 4q_0x \\
&\qquad\qquad + 4q_2x^2 + 4q_1x + 4q_0 \\
&= q_2x^4 + \left(q_1 - 4q_2\right)x^3 + \left(q_0 - 4q_1 + 4q_2\right)x^2 + \left(-4q_0 + 4q_1\right)x + 4q_0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_2 = 1 \\ q_1 - 4q_2 = -3 \\ q_0 - 4q_1 + 4q_2 = a \\ -4q_0 + 4q_1 = b \\ 4q_0 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_0 = -2 \\ q_1 = -3 + 4 \cdot 1 = 1 \\ q_2 = 1 \\ a = -2 - 4 + 4 = -2 \\ b = 8 + 4 = 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad a = -2$ en $b = 12$

Tweede oplossingsmethode

	1	-3	a	b	-8
2		2	-2	$2a-4$	$2b+4a-8$
	1	-1	$a-2$	$b+2a-4$	$4a+2b-16$
2		2	2	$2a$	
	1	1	a	$4a+b-4$	

Omdat $(x-2)^2 \mid x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx - 8$ moet

$$\begin{cases} 4a + 2b - 16 = 0 \\ 4a + b - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 8 & (1) \\ 4a + b = 4 & (2) \end{cases}$$

$(2)-(1)$: $\quad 2a = -4$

$\qquad a = -2$

in (1): $\quad b = 8 - 2 \cdot (-2) = 12$

$\Rightarrow \quad a = -2$ en $b = 12$

Opdracht 52 bladzijde 83

Toon aan dat een veelterm $v(x)$, waarvan de som van de coëfficiënten gelijk is aan 0, deelbaar is door $x - 1$.

Oplossing

$$v(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$(x-1) \mid v(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$v(1) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 = 0$$

Opdracht 53 bladzijde 84

Bepaal p en q in functie van a zodat $x^3 + px + q$ deelbaar is door $(x-a)^2$.

Oplossing

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & p & q \\
a & & a & a^2 & a^3 + ap \\
\hline
 & 1 & a & a^2 + p & a^3 + ap + q \\
a & & a & 2a^2 & \\
\hline
 & 1 & 2a & 3a^2 + p &
\end{array}$$

Omdat $(x-a)^2 \mid x^3 + px + q$ moet

$$\begin{cases} a^3 + ap + q = 0 & (1) \\ 3a^2 + p = 0 & (2) \end{cases}$$

Uit (2): $p = -3a^2$

in (1): $q = -a^3 - ap$

$q = -a^3 + 3a^3 = 2a^3$

$\Rightarrow \quad p = -3a^2 \text{ en } q = 2a^3$

Opdracht 54 bladzijde 84

Men deelt een veelterm $v(x)$ achtereenvolgens door $x+1$ en $x-2$.
De resten zijn 6, respectievelijk 9.
Wat is de rest van de deling van $v(x)$ door $(x+1)(x-2)$?

Oplossing

Uit het gegeven volgt dat $\begin{cases} v(-1)=6 \\ v(2)=9 \end{cases}$.

Dus kunnen we $v(x)$ schrijven als

$$v(x)=(x+1)(x-2)q(x)+\underbrace{ax+b}_{r(x)} \text{ want } \mathrm{gr}(ax+b)<\mathrm{gr}\big((x+1)(x-2)\big)$$

Er geldt : $\begin{cases} v(-1)=-a+b=6 & (1) \\ v(2)=2a+b=9 & (2) \end{cases}$

$$\begin{aligned} (2)-(1):&\quad 3a=3 \\ &\quad a=1 \\ \text{in } (1):&\quad b=6+a \\ &\quad b=7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad r(x)=ax+b=x+7$$

Opdracht 55 bladzijde 84

Men deelt een veelterm $v(x)$ achtereenvolgens door $x-2$, $x-3$ en $x-4$.
De resten zijn respectievelijk -9, -5 en 3.
Wat is de rest van de deling van $v(x)$ door $(x-2)(x-3)(x-4)$?

Oplossing

We kunnen $v(x)$ schrijven als

$$v(x)=(x-2)(x-3)(x-4)q(x)+\underbrace{ax^2+bx+c}_{r(x)} \quad \text{want} \quad gr(r(x))<gr((x-2)(x-3)(x-4))$$

Er geldt:

$$\begin{cases} v(2)=4a+2b+c=-9 & (1) \\ v(3)=9a+3b+c=-5 & (2) \\ v(4)=16a+4b+c=3 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&(2)-(1): && 5a+b=4 && (4)\\
&(3)-(2): && 7a+b=8 && (5)\\
&(5)-(4): && 2a=4 &&\\
& && a=2 &&\\
&\text{in } (4): && b=4-5a &&\\
& && b=4-10 &&\\
& && b=-6 &&\\
&\text{in } (1): && c=-9-4a-2b &&\\
& && c=-9-8+12 &&\\
& && c=-5 &&
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad r(x)=ax^2+bx+c$$
$$r(x)=2x^2-6x-5$$

Opdracht 56 bladzijde 85

Ontbind in factoren.

$\boxed{1 \quad x^3 - 64}$

$$\begin{aligned} x^3 - 64 &= x^3 - 4^3 \\ &= (x-4)(x^2+4x+16) \end{aligned}$$

$\boxed{2 \quad x^3 + 125}$

$$\begin{aligned} x^3 + 125 &= x^3 + 5^3 \\ &= (x+5)(x^2-5x+25) \end{aligned}$$

$\boxed{3 \quad x^3 - 8y^3}$

$$\begin{aligned} x^3 - 8y^3 &= x^3 - (2y)^3 \\ &= (x-2y)(x^2+2xy+4y^2) \end{aligned}$$

$\boxed{4 \quad 1000x^3 + 27y^3}$

$$\begin{aligned} 1000x^3 + 27y^3 &= (10x)^3 + (3y)^3 \\ &= (10x+3y)(100x^2-30xy+9y^2) \end{aligned}$$

$\boxed{5 \quad a^3b^3 - 1}$

$$\begin{aligned} a^3b^3 - 1 &= (ab)^3 - 1^3 \\ &= (ab-1)(a^2b^2+ab+1) \end{aligned}$$

$\boxed{6 \quad 216a^3 - 343b^3}$

$$\begin{aligned} 216a^3 - 343b^3 &= (6a)^3 - (7b)^3 \\ &= (6a-7b)(36a^2+42ab+49b^2) \end{aligned}$$

Opdracht 57 bladzijde 85

Ontbind in factoren.

$\boxed{1 \quad x^3 - 2\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} x^3 - 2\sqrt{2} &= x^3 - \left(\sqrt{2}\right)^3 \\ &= \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}\,x+2\right) \end{aligned}$$

$\boxed{2 \quad x^6 - 64}$

$$\begin{aligned} x^6 - 64 &= (x^2)^3 - 4^3 \\ &= (x^2-4)(x^4+4x^2+16) \\ &= (x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16) \end{aligned}$$

ofwel

$$\begin{aligned} x^6 - 64 &= (x^3)^2 - 8^2 \\ &= (x^3-8)(x^3+8) \\ &= (x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4) \end{aligned}$$

$\boxed{3 \quad 729x^6+1}$

$$\begin{aligned} 729x^6+1 &= \left(9x^2\right)^3+1^3 \\ &= \left(9x^2+1\right)\left(81x^4-9x^2+1\right) \end{aligned}$$

$\boxed{4 \quad 8x^3+\left(x-1\right)^3}$

$$\begin{aligned} 8x^3+\left(x-1\right)^3 &= \left(2x\right)^3+\left(x-1\right)^3 \\ &= \left(2x+x-1\right)\left(\left(2x\right)^2-2x\left(x-1\right)+\left(x-1\right)^2\right) \\ &= \left(3x-1\right)\left(4x^2-2x^2+2x+x^2-2x+1\right) \\ &= \left(3x-1\right)\left(3x^2+1\right) \end{aligned}$$

$\boxed{5 \quad 27a^3-\left(a-2\right)^3}$

$$\begin{aligned} 27a^3-\left(a-2\right)^3 &= \left(3a\right)^3-\left(a-2\right)^3 \\ &= \left(3a-a+2\right)\left(\left(3a\right)^2+3a\left(a-2\right)+\left(a-2\right)^2\right) \\ &= \left(2a+2\right)\left(9a^2+3a^2-6a+a^2-4a+4\right) \\ &= 2\left(a+1\right)\left(13a^2-10a+4\right) \end{aligned}$$

$\boxed{6 \quad \left(2x-1\right)^3+\left(3x+1\right)^3}$

$$\begin{aligned} \left(2x-1\right)^3+\left(3x+1\right)^3 &= \left(2x-1+3x+1\right)+\left(\left(2x-1\right)^2-\left(2x-1\right)\left(3x+1\right)+\left(3x+1\right)^2\right) \\ &= 5x\left(4x^2-4x+1-6x^2+x+1+9x^2+6x+1\right) \\ &= 5x\left(7x^2+3x+3\right) \end{aligned}$$

Opdracht 58 bladzijde 85

Gegeven de veeltermen $x^2+1,\ x^3+1,\ x^4+1,\ x^5+1,\ x^6+1$. Hoeveel van deze veeltermen kunnen ontbonden worden als een product van veeltermen met een lagere graad en met reële coëfficiënten?

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

Oplossing

- x^2+1 kan niet ontbonden worden als een product van veeltermen met een lagere graad en met reële coëfficiënten.
- $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$
- $$\begin{aligned} x^4+1 &= \left(x^2+1\right)^2-2x^2 \\ &= \left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}\,x\right)^2 \\ &= \left(x^2+1-\sqrt{2}\,x\right)\left(x^2+1+\sqrt{2}\,x\right) \\ &= \left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right) \end{aligned}$$
- $x^5+1=(x+1)\cdot q(x)$ want $(-1)^5+1=0$
- $x^6+1=\left(x^2\right)^3+1^3=\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$

Vier van deze veeltermen kunnen ontbonden worden als een product van veeltermen met een lagere graad en met reële coëfficiënten.

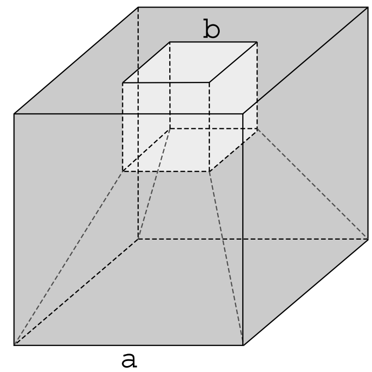
Antwoord E is het juiste antwoord.

Opdracht 59 bladzijde 85

De inhoud van een afgeknotte piramide wordt gegeven door de formule $\frac{1}{3}h\left(G+B+\sqrt{GB}\right)$, met h, G en B respectievelijk de hoogte, de oppervlakte van het grondvlak en de oppervlakte van het bovenvlak.

In de nevenstaande figuur liggen de bovenvlakken van de kubus met ribbe a en de kubus met ribbe b in eenzelfde vlak.

Toon aan dat de inhoud van de kubus met ribbe a verminderd met de inhoud van de kubus met ribbe b gelijk is aan driemaal de inhoud van de getekende afgeknotte piramide.



Oplossing

- We moeten aantonen dat $a^3-b^3=\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\cdot h\left(G+B+\sqrt{GB}\right)$
- Nu is $h=a-b,\ G=a^2,\ B=b^2$ en $\sqrt{GB}=\sqrt{a^2b^2}=ab$ $\quad$ (want a en b zijn positief)

  zodat $h\left(G+B+\sqrt{GB}\right)=(a-b)\left(a^2+b^2+ab\right)$

  $=a^3-b^3$

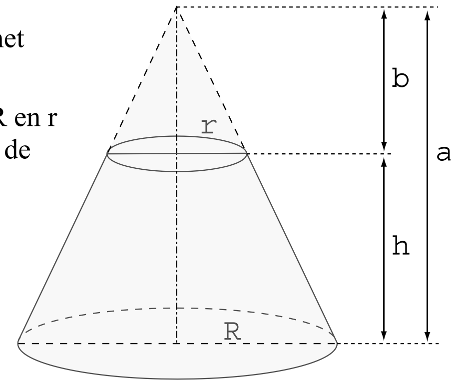
  $\Rightarrow\quad a^3-b^3=h\left(G+B+\sqrt{GB}\right)$

Opdracht 60 bladzijde 86

Door een kegel te snijden met een vlak evenwijdig met het grondvlak ontstaat een afgeknotte kegel.

Toon aan dat de inhoud van de afgeknotte kegel met h, R en r respectievelijk de hoogte, de straal van het grondvlak en de straal van het bovenvlak, gelijk is aan

$\frac{1}{3}h\left(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r\right)$.



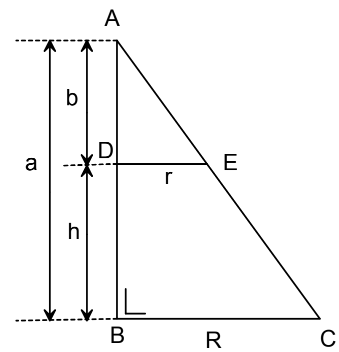
Oplossing

Inhoud afgeknotte kegel

= inhoud grote kegel (straal R , hoogte a) − inhoud kleine kegel (straal r, hoogte b)

$$= \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot a - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot b$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(R^2 a - r^2 b\right)$$



$$\Delta ADE \sim \Delta ABC \qquad (HH)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R}{r} = \frac{a}{b}$$

$$\Downarrow \quad b = a - h$$

$$\frac{R}{r} = \frac{a}{a-h}$$

$$\Downarrow$$

$$aR - Rh = ar$$

$$\Downarrow$$

$$a\left(R - r\right) = Rh$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{Rh}{R-r}$$

$$\begin{aligned} b &= a - h \\ &= \frac{Rh}{R-r} - h \\ &= \frac{\cancel{Rh} - \cancel{hR} + rh}{R-r} \\ &= \frac{rh}{R-r} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(R^2 \cdot \frac{Rh}{R-r} - r^2 \cdot \frac{rh}{R-r}\right)$$

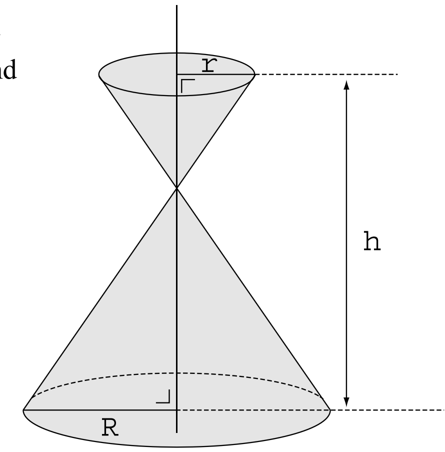
$$= \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \frac{1}{R-r}\left(R^3 - r^3\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \frac{1}{\cancel{R-r}}\left(\cancel{R-r}\right)\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}h\left(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r\right)$$

Opdracht 61 bladzijde 86

Toon aan dat de inhoud van het lichaam ontstaan door het wentelen van de twee rechthoekige driehoeken rond de gemeenschappelijke rechthoekszijde gelijk is aan $\frac{1}{3}h\left(\pi R^2+\pi r^2-\pi R r\right)$.



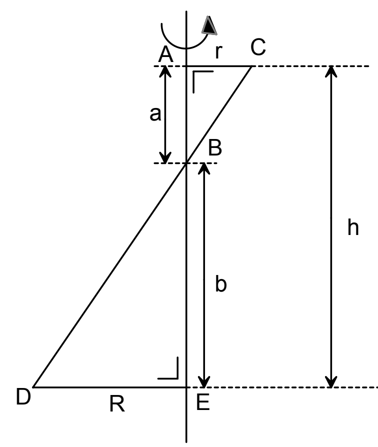
Oplossing

Inhoud

$$= \text{inhoud onderste kegel} + \text{inhoud bovenste kegel}$$

$$=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot b+\frac{1}{3}\pi r^2\cdot a$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(R^2 b+r^2 a\right)$$



$$\Delta ABC \sim \Delta BED \qquad (HH)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R}{r}=\frac{b}{a}$$

$$aR=br$$

$$aR=(h-a)r$$

$$a(R+r)=hr$$

$$a=\frac{hr}{R+r}$$

$$b=h-a$$

$$=h-\frac{hr}{R+r}$$

$$=\frac{hR}{R+r}$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(R^2\cdot\frac{hR}{R+r}+r^2\cdot\frac{hr}{R+r}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{h}{R+r}\left(R^3+r^3\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{h}{\cancel{R+r}}\left(\cancel{R+r}\right)\left(R^2-Rr+r^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}h\left(\pi R^2+\pi r^2-\pi R r\right)$$

Herhalingsopdracht 62 bladzijde 87

Bij het delen van twee veeltermen is het quotiënt $3x^2 - x + 2$ en de rest $2x + 3$.
Bepaal de deler als $3x^4 + 5x^3 + 15x^2 + x + 13$ het deeltal is.

Eerste oplossingsmethode

$$\begin{aligned} 3x^4 + 5x^3 + 15x^2 + x + 13 &= \left(3x^2 - x + 2\right)\left(d_2x^2 + d_1x + d_0\right) + 2x + 3 \\ &= 3d_2x^4 + 3d_1x^3 + 3d_0x^2 \\ &\qquad -d_2x^3 - d_1x^2 - d_0x \\ &\qquad + 2d_2x^2 + 2d_1x + 2d_0 \\ &\qquad + 2x + 3 \\ &= 3d_2x^4 + \left(3d_1 - d_2\right)x^3 + \left(3d_0 - d_1 + 2d_2\right)x^2 + \left(-d_0 + 2d_1 + 2\right)x + 2d_0 + 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3d_2 = 3 & (1) \\ 3d_1 - d_2 = 5 & (2) \\ 3d_0 - d_1 + 2d_2 = 15 & (3) \\ -d_0 + 2d_1 + 2 = 1 & (4) \\ 2d_0 + 3 = 13 & (5) \end{cases}$$

$(5) \quad d_0 = 5$
$(1) \quad d_2 = 1$
$(2) \quad d_1 = 2$
Controle $(3) \quad 15 - 2 + 2 = 15$
Controle $(4) \quad -5 + 4 + 2 = 1$

$\Rightarrow$ deler $= x^2 + 2x + 5$

Tweede oplossingsmethode

$$3x^4 + 5x^3 + 15x^2 + x + 13 - 2x - 3 = \left(3x^2 - x + 2\right) \cdot q(x)$$

$q(x)$ vinden we uit de volgende Euclidische deling.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & +5x^3 & +15x^2 & -x & +10 & 3x^2 - x + 2 \\ \cline{6-6} -3x^4 & \pm x^3 & \mp 2x^2 & & & x^2 + 2x + 5 \\ \cline{1-5} & 6x^3 & +13x^2 & -x & +10 & \\ & -6x^3 & \pm 2x^2 & \mp 4x & & \\ \cline{2-5} & & 15x^2 & -5x & +10 & \\ & & -15x^2 & \pm 5x & \mp 10 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ deler $= x^2 + 2x + 5$

Herhalingsopdracht 63 bladzijde 87

Bepaal k zodat de deling van $v(x) = -2x^2 + x + k$ door $x + 3$ als rest 10 heeft.

Oplossing

$$\begin{aligned} & v(-3) = 10 \\ \Rightarrow \quad & -2 \cdot (-3)^2 + (-3) + k = 10 \\ & -18 - 3 + k = 10 \\ & k = 31 \end{aligned}$$

Herhalingsopdracht 64 bladzijde 87

Bepaal a en b zodat de deling van $3x^3 + ax^2 - 9x + b$ door $x^2 - 3x + 1$ opgaand is.

Oplossing

$$\begin{aligned} 3x^3 + ax^2 - 9x + b &= (x^2 - 3x + 1)(q_1 x + q_0) \\ &= q_1 x^3 + q_0 x^2 \\ &\quad -3q_1 x^2 - 3q_0 x \\ &\quad + q_1 x + q_0 \\ &= q_1 x^3 + (q_0 - 3q_1) x^2 + (-3q_0 + q_1) x + q_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = 3 & (1) \\ q_0 - 3q_1 = a & (2) \\ -3q_0 + q_1 = -9 & (3) \\ q_0 = b & (4) \end{cases}$$

$$(1) \text{ in } (3): \quad -3q_0 + 3 = -9$$
$$q_0 = 4$$

$$(4): \quad b = 4$$
$$(2): \quad a = 4 - 9 = -5$$

$$\Rightarrow \quad a = -5 \text{ en } b = 4$$

Herhalingsopdracht 65 bladzijde 87

Bij deling van $v(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 3$ door $x + 1$ en door $x + 3$ is de rest telkens 1.
Bepaal a en b.

Oplossing

$$\begin{cases} v(-1) = 1 \\ v(-3) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 + a - b - 3 = 1 \\ -54 + 9a - 3b - 3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = 6 \\ 9a - 3b = 58 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} a = b + 6 & \\ \Rightarrow \quad 9(b+6) - 3b = 58 & a = b + 6 \\ \quad 9b + 54 - 3b = 58 & a = \dfrac{2}{3} + 6 \\ \quad 6b = 4 & a = \dfrac{20}{3} \\ \quad b = \dfrac{2}{3} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{20}{3} \text{ en } b = \frac{2}{3}$$

Herhalingsopdracht 66 bladzijde 87

Los de volgende veeltermvergelijkingen op.

$\boxed{1 \quad x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0}$

$x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$

$x + 4,\ x - 1$ en $x - 2$ zijn delers en $gr(x^3 + x^2 - 10x + 8) = 3$.

$(x+4)(x-1)(x-2) = 0$

$x = -4$ of $x = 1$ of $x = 2$

$\boxed{2 \quad 2x^3 + 7x^2 - 5x - 4 = 0}$

$2x^3 + 7x^2 - 5x - 4 = 0$

$x + 4$ en $x - 1$ zijn delers.

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & 7 & -5 & -4 \\
-4 & & -8 & 4 & 4 \\
\hline
 & 2 & -1 & -1 & 0 \\
1 & & 2 & 1 & \\
\hline
 & 2 & 1 & 0 &
\end{array}$$

$(x+4)(x-1)(2x+1) = 0$

$x = -4$ of $x = 1$ of $x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{3 \quad 2x^6 - 128 = 0}$

$2x^6 - 128 = 0$

$2(x^6 - 64) = 0$

$2(x^3 - 8)(x^3 + 8) = 0$

$2(x-2)(x^2 + 2x + 4)(x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$

$x = 2$ of $x = -2$

$\boxed{4 \quad x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0}$

$x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$

$x - 1$ en $x - 2$ zijn delers.

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & -7 & 18 & -20 & 8 \\
1 & & 1 & -6 & 12 & -8 \\
\hline
 & 1 & -6 & 12 & -8 & 0 \\
2 & & 2 & -8 & 8 & \\
\hline
 & 1 & -4 & 4 & 0 &
\end{array}$$

$(x-1)(x-2)(x^2 - 4x + 4) = 0$

$(x-1)(x-2)(x-2)^2 = 0$

$(x-1)(x-2)^3 = 0$

$x = 1$ of $x = 2$

Herhalingsopdracht 67 bladzijde 87

Welke veelterm is geen deler van $(x-1)^2(x^3+x)$?

A x^3-x^2+x-1 B x^2-2x+1 C x^2-x

D x^3-x E $x^4-2x^2(x-1)-2x+1$

Oplossing

- $x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)$

  $=(x-1)(x^2+1)$ is een deler van $(x-1)^2\underbrace{(x^3+x)}_{x(x^2+1)}$.

- $x^2-2x+1=(x-1)^2$ is een deler.
- $x^2-x=x(x-1)$ is een deler.
- $x^3-x=x(x^2-1)$ is geen deler.
- $x^4-2x^2(x-1)-2x+1=x^4-2x^3+2x^2-2x+1=v(x)$

  $v(1)=1-2+2-2+1=0$

	1	−2	2	−2	1	
1		1	−1	1	−1	
	1	−1	1	−1	0	$\rightarrow$ som van de coëfficiënten $=0$
1		1	0	1		
	1	0	1	0		

$\rightarrow$ $x^4-2x^2(x-1)-2x+1=(x-1)^2(x^2+1)$ is een deler

Antwoord D is het juiste antwoord.

Herhalingsopdracht 68 bladzijde 87

Een veelterm $v(x)$ is deelbaar door $x+1$ en $v(0)=-3$. Bovendien is de rest bij deling van $v(x)$ door $x-4$ gelijk aan 5.
Bepaal de rest bij deling van de veelterm $v(x)$ door x^3-3x^2-4x.

Oplossing

Uit het gegeven volgt dat $v(-1)=0$, $v(0)=-3$ en $v(4)=5$.

We stellen $v(x)=\underbrace{\left(x^3-3x^2-4x\right)}_{\underbrace{x\left(x^2-3x-4\right)}_{x(x+1)(x-4)}}\cdot q(x)+\underbrace{ax^2+bx+c}_{r(x)}$ $\quad\left(\text{gr } r(x)<\text{gr }\left(x^3-3x^2-4x\right)\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(-1)=0=a-b+c & (1)\\ v(0)=-3=c & (2)\\ v(4)=5=16a+4b+c & (3)\end{cases}$$

(2) in (1): $\quad a-b=3 \qquad (4)$

(2) in (3): $\quad 16a+4b=8$

$\qquad\qquad 4a+b=2 \qquad (5)$

$(4)+(5)$: $\quad 5a=5$

$\qquad\qquad a=1$

in (4): $\quad b=-2$

$\Rightarrow \quad \text{rest}=x^2-2x-3$

Herhalingsopdracht 69 bladzijde 87

Ontbind in factoren.

$\boxed{1 \quad \frac{1}{1000}x^3+125}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1000}x^3+125 &= \left(\frac{1}{10}x\right)^3+5^3\\ &= \left(\frac{1}{10}x+5\right)\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{2}x+25\right)\end{aligned}$$

$\boxed{2 \quad x^3-3\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}x^3-3\sqrt{3} &= x^3-\left(\sqrt{3}\right)^3\\ &= \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x^2+\sqrt{3}\,x+3\right)\end{aligned}$$

$\boxed{3 \quad 64a^3+(a-2)^3}$

$$\begin{aligned}64a^3+(a-2)^3 &= (4a)^3+(a-2)^3\\ &= (4a+a-2)\left(16a^2-4a(a-2)+(a-2)^2\right)\\ &= (5a-2)\left(16a^2-4a^2+8a+a^2-4a+4\right)\\ &= (5a-2)\left(13a^2+4a+4\right)\end{aligned}$$

$\boxed{4 \quad (1-3x)^3-(3-2x)^3}$

$$\begin{aligned}(1-3x)^3-(3-2x)^3 &= (1-3x-3+2x)\left((1-3x)^2+(1-3x)(3-2x)+(3-2x)^2\right)\\ &= (-2-x)\left(1-6x+9x^2+3-11x+6x^2+9-12x+4x^2\right)\\ &= -(x+2)\left(19x^2-29x+13\right)\end{aligned}$$