

**GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI****1. Fungsi Trigonometri Sinus, Kosinus, dan Tangen**

Fungsi yang memetakan himpunan sudut  $x^\circ$  ke himpunan bilangan real  $\sin x^\circ$  disebut fungsi sinus.

Dilambangkan :

$$f : x^\circ \rightarrow$$

$$\sin x^\circ \quad (f \text{ memetakan } x^\circ \text{ ke sinus } x^\circ).$$

Jadi, rumus untuk fungsi sinus adalah  $f(x^\circ) = \sin x^\circ$  atau  $f(x) = \sin x$  untuk  $x$  dalam ukuran radian.

Fungsi  $f$  memetakan himpunan sudut  $x^\circ$  ke himpunan bilangan real  $\cos x^\circ$  disebut fungsi kosinus.

Dilambangkan :

$$f : x^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos x^\circ \quad (f \text{ memetakan } x^\circ \text{ ke kosinus } x^\circ).$$

Jadi, rumus untuk fungsi kosinus adalah  $f(x^\circ) = \cos x^\circ$  atau  $f(x) = \cos x$  untuk  $x$  dalam ukuran radian.

Fungsi  $f$  memetakan himpunan sudut  $x^\circ$  ke himpunan bilangan real  $\tan x^\circ$  disebut fungsi tangen.

Dilambangkan :

$$f : x^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow \tan x^\circ \quad (f \text{ memetakan } x^\circ \text{ ke tangen } x^\circ).$$

Jadi, rumus untuk fungsi tangen adalah  $f(x^\circ) = \tan x^\circ$  atau  $f(x) = \tan x$  untuk  $x$  dalam ukuran radian.

**Contoh :**

Hitunglah nilai fungsi trigonometri berikut.

$$a. f(x) = \sin x, \text{ untuk } x = \frac{\pi}{3}$$

$$b. f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}, \text{ untuk } x = \frac{\pi}{6}$$

**Jawab :**

$$a. f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{180^\circ}{3} = \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$b. f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{180^\circ}{6}\right) = f(30^\circ) = \frac{1 + \sin 30^\circ}{\cos^2 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2} \sqrt{3}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$



Gambar 1

Berdasarkan gambar di atas, diperoleh :

$$\sin \alpha^\circ = \frac{y}{r} = \frac{y}{1}$$

$= y$ , nilai  $\sin \alpha^\circ$  ditentukan oleh ordinat  $y$ .

$$\cos \alpha^\circ = \frac{x}{r} = \frac{x}{1}$$

$= x$ , nilai  $\cos \alpha^\circ$  ditentukan oleh absis  $x$ .

$$\tan \alpha^\circ$$

$= \frac{y}{x}$ , nilai  $\tan \alpha^\circ$  ditentukan oleh absis  $x$  dan ordinat  $y$ .

Jika titik P berputar (dimulai dari titik A) berlawanan arah jarum jam sepanjang lintasan lingkaran satuan, maka besar sudut  $\alpha^\circ = \angle XOP$  bertambah secara kontinu dari  $0^\circ$  sampai  $360^\circ$ . Dengan pertambahan besar sudut  $\alpha^\circ$ , maka nilai-nilai fungsi trigonometri  $\sin \alpha^\circ$ ,  $\cos \alpha^\circ$ , dan  $\tan \alpha^\circ$  akan mengalami perubahan. Perubahan nilai-nilai fungsi trigonometri diperlihatkan pada table di bawah ini.

	Perubahan sudut $\alpha^\circ$			
	$0^\circ$ ke $90^\circ$	$90^\circ$ ke $180^\circ$	$180^\circ$ ke $270^\circ$	$270^\circ$ ke $360^\circ$
$\sin \alpha^\circ$	bertambah dari 0 ke 1	berkurang dari 1 ke 0	bertambah dari 0 ke -1	bertambah dari -1 ke 0
$\cos \alpha^\circ$	berkurang dari 1 ke 0	berkurang dari 0 ke -1	bertambah dari -1 ke 0	bertambah dari 0 ke 1
$\tan \alpha^\circ$	bertambah dari 0 ke positif tak berhingga	bertambah dari negatif tak berhingga ke 0	bertambah dari 0 ke positif tak berhingga	bertambah dari negatif tak berhingga ke 0

Tabel 1

**2. Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi Sinus dan Kosinus**

Perubahan nilai fungsi trigonometri (sinus, kosinus, dan tangen) dapat diamati dengan menggunakan lingkaran satuan, yaitu lingkaran trigonometri yang berjari-jari satu satuan.

Berdasarkan tabel 1 di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Nilai maksimum  $\sin \alpha^\circ$  sama dengan 1, dicapai untuk  $\alpha^\circ = 90^\circ + n \cdot 360^\circ$   
 Nilai minimum  $\sin \alpha^\circ$  sama dengan -1, dicapai untuk  $\alpha^\circ = 270^\circ + n \cdot 360^\circ$

- Jadi,  $-1 \leq \sin \alpha^\circ \leq 1$  untuk setiap sudut  $\alpha^\circ$ .
2. Nilai maksimum  $\cos \alpha^\circ$  sama dengan 1, dicapai untuk  $\alpha^\circ = n \cdot 360^\circ$   
 Nilai minimum  $\cos \alpha^\circ$  sama dengan  $-1$ , dicapai untuk  $\alpha^\circ = 180^\circ + n \cdot 360^\circ$   
 Jadi,  $-1 \leq \cos \alpha^\circ \leq 1$  untuk setiap sudut  $\alpha^\circ$ .
  3.  $\tan \alpha^\circ$  tidak mempunyai nilai maksimum maupun nilai minimum.

**Contoh :**

Carilah nilai minimum dan nilai maksimum dari :  $y = \sin x^\circ - 1$ .

**Jawab :**

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin x^\circ \leq 1 \\ -1 - 1 &\leq \sin x^\circ - 1 \leq 1 - 1 \\ -2 &\leq \sin x^\circ - 1 \leq 0 \\ -2 &\leq y \leq 0 \end{aligned}$$

$$y_{\text{minimum}} = -2 \text{ dan } y_{\text{maksimum}} = 0$$

Jadi,  $y = \sin x^\circ - 1$  mempunyai nilai minimum  $-2$  dan nilai maksimum  $0$ .

**3. Grafik Fungsi Trigonometri**

Fungsi-fungsi trigonometri  $f(x) = \sin x^\circ, f(x) = \cos x^\circ, \text{ dan } f(x) = \tan x^\circ$  mempunyai persamaan grafik berturut-turut adalah  $y = \sin x^\circ, y = \cos x^\circ, \text{ dan } y = \tan x^\circ$ . Grafik fungsi trigonometri itu dapat digambarkan dengan dua cara yaitu ;

- a. Dengan menggunakan tabel,
- b. Dengan menggunakan lingkaran satuan.

**a. Menggambar Grafik Fungsi Trigonometri dengan Menggunakan Tabel**

Untuk menggambar grafik fungsi trigonometri dengan menggunakan tabel diperlukan langkah-langkah sebagai berikut ;

**Langkah I :**

Buatlah tabel yang menyatakan hubungan antara  $x$  dengan  $y = f(x^\circ)$ . Pilihan nilai sudut  $x$  sehingga nilai  $y = f(x^\circ)$  dengan mudah dapat ditentukan. Sudut  $x$  yang bersifat demikian adalah sudut-sudut khusus dan sudut-sudut batas kuadran.

**Langkah II :**

Titik-titik  $(x, y)$  yang diperoleh pada langkah 1 digambar pada bidang cartecius agar skala pada sumbu  $x$  dan pada sumbu  $y$  sama, maka nilai 360 pada sumbu  $x$  dibuat mendekati nilai 6,28 satuan (mengapa ?).

Misalkan skala pada sumbu  $y$  ditetapkan 1 cm maka nilai 360 pada sumbu  $x$  dibuat kira-kira mendekati nilai 6,28 cm.

**Langkah III :**

Hubungkan titik-titik yang telah digambarkan pada bidang cartecius pada langkah 2 tersebut dengan kurva yang mulus sehingga diperoleh sketsa grafik fungsi trigonometri  $y = f(x^\circ)$ .

Berikut ini akan dijelaskan cara menggambar sketsa grafik fungsi trigonometri  $y = \sin x^\circ, y = \cos x^\circ$ , dan  $y = \tan x^\circ$  dengan menggunakan langkah – langkah yang telah dibicarakan diatas.

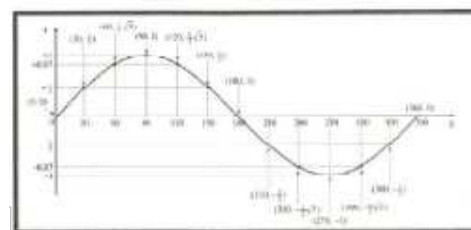
1. Grafik fungsi  $y = \sin x^\circ$  ( $0 \leq x \leq 360$ )  
 Pilihan sudut-sudut  $x$  ; 0, 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 360 ; kemudian dicari  $y = \sin x^\circ$ . Hubungan antara  $x$  dengan  $y = \sin x^\circ$  dibuat tabel seperti diperlihatkan pada tabel 2 berikut;

$x$	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
$y = \sin x^\circ$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Tabel 2

Catatan ; untuk selanjutnya diadakan pendekatan nilai  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$  dengan 0,87

Titik – titik  $(x, y)$  pada tabel 2 digambarkan pada bidang cartecius, kemudian titik – titik itu dihubungkan dengan kurva yang mulus sehingga diperoleh grafik fungsi  $y = \sin x^\circ$  (perhatikan gambar 2).



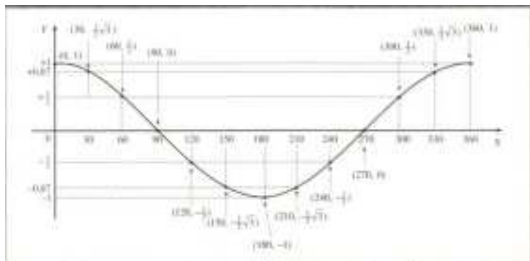
Gambar 2

2. Grafik fungsi  $y = \cos x^\circ$  ( $0 \leq x \leq 360$ )  
 Sudut – sudut yang dipilih seperti pada grafik  $y = \sin x^\circ$ . Hubungan antara  $x$  dengan  $y = \cos x^\circ$  diperlihatkan pada table 3.

$x$	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
$y = \cos x^\circ$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Tabel 3

Titik –titik  $(x, y)$  pada tabel 3 digambarkan pada bidang cartecius. Kemudian titik-titik itu dihubungkan dengan kurva yang mulus sehingga diperoleh grafik fungsi  $y = \cos x^\circ$  (diperhatikan gambar 3).



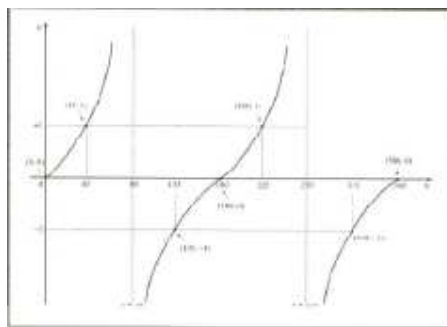
Gambar 3

3. Grafik fungsi  $y = \tan x^\circ$  ( $0 \leq x \leq 360$ )  
Pilihan sudut-sudut  $x$  ; 0, 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315, 360 ; kemudian dicari nilai  $y = \tan x^\circ$ . Hubungan antara  $x$  dengan  $y = \tan x^\circ$  diperlihatkan pada tabel 4 berikut ini.

$x$	0	45	90	135	180	225	270	315	360
$y = \tan x^\circ$	0	1	-	-1	0	1	-	-1	0

Catatan : untuk  $x = 90$  dan  $x = 270$ , nilai  $y = \tan x^\circ$  tidak didefinisikan.

Titik –titik  $(x, y)$  pada tabel 4 diatas digambarkan pada bidang cartecius. Kemudian titik-titik itu dihubungkan dengan kurva yang mulus sehingga diperoleh grafik fungsi  $y = \tan x^\circ$  (diperhatikan gambar 4 berikut ini ).



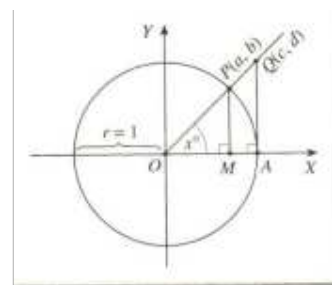
Gambar 4

Berdasarkan grafik fungsi sinus  $y = \sin x^\circ$  pada gambar diatas, grafik fungsi kosinus  $y = \cos x^\circ$ , dan grafik fungsi tangen  $y = \tan x^\circ$  dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut .

1. Fungsi-fungsi trigonometri sinus, kosinus dan tangen merupakan fungsi periodik atau fungsi berkala.
  - a. Fungsi sinus  $y = \sin x^\circ$  dan fungsi kosinus  $y = \cos 180^\circ$  mempunyai periode  $360^\circ$
  - b. Fungsi tangen  $y = \tan x^\circ$  mempunyai periode  $180^\circ$
2. Fungsi sinus  $y = \sin x^\circ$  dan fungsi kosinus  $y = \cos x^\circ$  mempunyai nilai minimum -1 dan nilai maksimum +1, sedangkan fungsi tangen  $y = \tan x^\circ$  tidak mempunyai nilai minimum maupun nilai maksimum.
3. Khusus untuk fungsi tangen  $y = \tan x^\circ$  :
  - a. Untuk  $x$  mendekati 90 atau 270 dari arah kanan, nilai  $\tan x^\circ$  menuju ke negatif tak berhingga.
  - b. Untuk  $x$  mendekati 90 atau 270 dari arah kiri, nilai  $\tan x^\circ$  menuju ke positif tak berhingga.
  - c. Garis-garis  $x = 90$  dan  $x = 270$  disebut garis asimtot.
  - d. Fungsi tangen  $y = \tan x^\circ$  dikatakan diskontinu atau tak sinambung di  $x = 90$  dan  $x = 270$ .

#### b. Menggambar Grafik Fungsi Trigonometri dengan Menggunakan Lingkaran Satuan.

Lingkaran satuan adalah lingkaran trigonometri yang berjari-jari satu satuan seperti diperlihatkan pada gambar 5 berikut.



Gambar 5

Dalam segitiga OMP, diperoleh ;  $\sin x^\circ = \frac{MP}{OP} = \frac{b}{1} = b$ ,  $b$  merupakan ordinat titik p  $\cos x^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{1} = a$ ,  $a$  merupakan absis titik P.

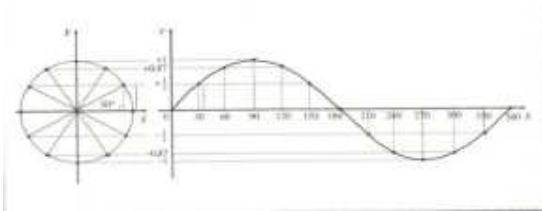
Dalam segitiga OAQ, didapat :

$$\tan x^\circ = \frac{AQ}{OA} = \frac{d}{1} \text{ d, d merupakan ordinat titik Q.}$$

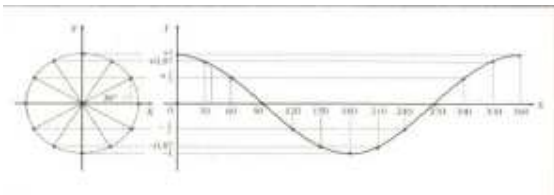
Jadi, pada suatu lingkaran satuan dapat ditetapkan sebagai berikut .

- Nilai fungsi trigonometri  $y = \sin x^\circ$  ditentukan oleh ordinat titik P
- Nilai fungsi trigonometri  $y = \cos x^\circ$  ditentukan oleh absis titik P
- Nilai fungsi trigonometri  $y = \tan x^\circ$  ditentukan oleh ordinat titik Q.

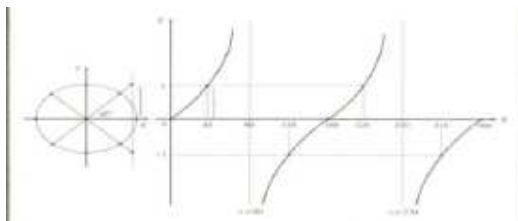
Berdasarkan analisis diatas, grafik trigonometri  $y = \sin x^\circ$ ,  $y = \cos x^\circ$ , dan  $y = \tan x^\circ$  ( $0 \leq x \leq 360$ ) dapat digambarkan dengan menggunakan bantuan lingkaran satuan perhatikan gambar 6, 7, dan 8 berikut ini.



Gambar 6



Gambar 7



Gambar 8