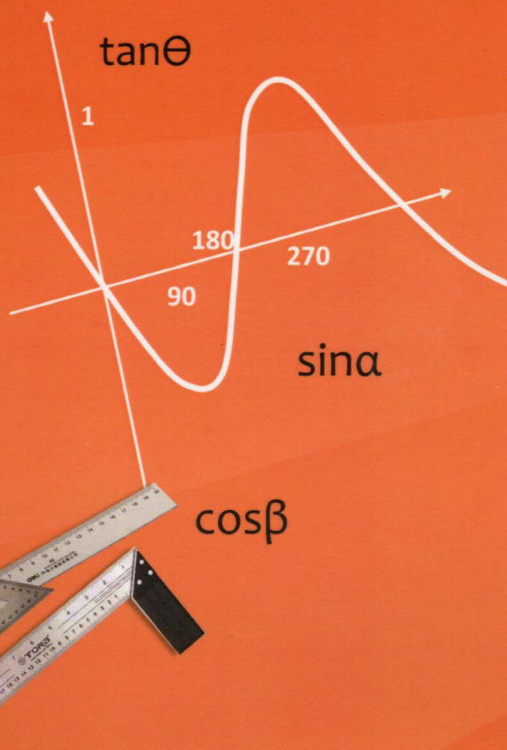


Dr. Kristayulita, M.SI

Buku Ajar

$\pi$   
 $\beta$   
 $\alpha$



# TRIGONOMETRI

# TRIGONOMETRI



Dr. Kristayulita, M.Si

# TRIGONOMETRI



# TRIGONOMETRI

© Sanabil 2020

Penulis : Dr. Kristayulita, M.Si  
Editor : Dr. Al Kusaeri, M.Pd  
Layout : Tim FTK  
Desain Cover : Sanabil Creative

*All rights reserved*

Hak Cipta dilindungi Undang Undang  
Dilarang memperbanyak dan menyebarkan sebagian  
atau keseluruhan isi buku dengan media cetak, digital  
atau elektronik untuk tujuan komersil tanpa izin tertulis  
dari penulis dan penerbit.

ISBN : 978-623-7881-99-5  
Cetakan 1 : November 2020

Penerbit:  
Sanabil  
Jl. Kerajinan 1 Blok C/13 Mataram  
Telp. 0370- 7505946, Mobile: 081-805311362  
Email: sanabilpublishing@gmail.com  
www.sanabil.web.id

## DAFTAR ISI

COVER .....	i
DAFTAR ISI .....	ii
DAFTAR GAMBAR .....	vii
DAFTAR TABEL .....	x
DAFTAR SINGKATAN .....	xi
KATA PENGANTAR DEKAN .....	xii
PRAKATA PENULIS .....	xv
RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS) .....	xvi
SEJARAH SINGKAT TRIGONOMETRI .....	1
BAB I      PERBANDINGAN TRIGONOMETRI .....	8
A. Pendahuluan .....	8
B. Uraian Materi .....	10
1. Ukuran Sudut .....	10
2. Perbandingan Trigonometri .....	19
3. Koordinat Kutub (Koordinat Polar) .....	31
C. Rangkuman .....	33
D. Tugas .....	36
E. Penilaian .....	37
F. Rujukan .....	38
BAB II      RUMUS-RUMUS TRIGONOMETRI .....	39

A. Pendahuluan .....	39
B. Uraian Materi .....	41
1. Rumus-Rumus Trigonometri Jumlah Dan Selisih Dua Sudut.....	41
2. Rumus Trigonometri Sudut Ganda.....	46
3. Rumus Perkalian Sinus Dan Kosinus.....	49
4. Rumus Jumlah Dan Selisih Pada Sinus Dan Kosinus .....	51
5. Identitas Trigonometri .....	52
C. Rangkuman .....	53
D. Tugas .....	54
E. Penilaian .....	56
F. Rujukan .....	57
<b>BAB III    PERSAMAAN    DAN    PERTIDAKSAMAAN</b>	
<b>TRIGONOMETRI .....</b>	<b>59</b>
A. Pendahuluan .....	59
B. Uraian Materi .....	61
1. Persamaan Trigonometri .....	61
2. Pertidaksamaan Trigonometri .....	64
C. Rangkuman .....	68
D. Tugas .....	68
E. Penilaian .....	69
F. Rujukan .....	69

BAB IV	FUNGSI TRIGONOMETRI .....	71
A.	Pendahuluan .....	71
B.	Uraian Materi .....	73
1.	Fungsi Trigonometri Sinus, Kosinus, dan Tangen .....	73
2.	Nilai Maksimum Dan Minimum Fungsi Sinus dan Kosinus .....	74
3.	Grafik Fungsi Trigonometri .....	76
4.	Invers Fungsi Trigonometri .....	83
5.	Aplikasi dalam Maple .....	84
C.	Rangkuman .....	89
D.	Tugas .....	90
E.	Penilaian .....	90
F.	Rujukan .....	91
BAB V	LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI .....	92
A.	Pendahuluan .....	92
B.	Uraian Materi .....	93
1.	Pengertian Limit Fungsi .....	93
2.	Limit Fungsi Trigonometri .....	101
C.	Rangkuman .....	102
D.	Tugas .....	103
E.	Penilaian .....	104



F. Rujukan .....	105
<b>BAB VI   TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI .....</b>	<b>107</b>
A. Pendahuluan .....	107
B. Uraian Materi .....	109
1. Pengertian Turunan Fungsi .....	109
2. Rumus-Rumus       Turunan       Fungsi Trigonometri .....	115
C. Rangkuman .....	128
D. Tugas .....	129
E. Penilaian .....	129
F. Rujukan .....	130
<b>BAB VII   INTEGRAL TRIGONOMETRI .....</b>	<b>132</b>
A. Pendahuluan .....	132
B. Uraian Materi .....	133
1. Integral Tak Tentu .....	134
2. Integral Tentu .....	141
C. Rangkuman .....	152
D. Tugas .....	153
E. Penilaian .....	156
F. Rujukan .....	156
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>158</b>
<b>DAFTAR ISTILAH .....</b>	<b>159</b>

LAMPIRAN ..... 160

BIODATA PENULIS ..... 170

## DAFTAR GAMBAR

Gambar1 .....	5
Gambar 2 .....	7
Gambar 1.1 .....	10
Gambar 1.2 .....	11
Gambar 1.3 .....	11
Gambar 1.4 .....	14
Gambar 1.5 .....	16
Gambar 1.6 .....	19
Gambar 1.7 .....	20
Gambar 1.8 .....	20
Gambar 1.9 .....	23
Gambar 1.10 .....	23
Gambar 1.11 .....	25
Gambar 1.12 .....	26
Gambar 1.13 .....	27
Gambar 1.14 .....	29
Gambar 1.15 .....	30
Gambar 1.16 .....	31
Gambar 1.17 .....	31
Gambar 1.18 .....	32

Gambar 1.19 .....	32
Gambar 2.1 .....	42
Gambar 4.1 .....	74
Gambar 4.2 .....	78
Gambar 4.3 .....	79
Gambar 4.4 .....	80
Gambar 4.5 .....	81
Gambar 4.6 .....	82
Gambar 4.7 .....	82
Gambar 4.8 .....	82
Gambar 4.9 (a) .....	83
Gambar 4.9 (b) .....	83
Gambar 4.10 (a) .....	84
Gambar 4.10 (b) .....	84
Gambar 5.1 (a) .....	94
Gambar 5.1 (b) .....	94
Gambar 5.2 .....	95
Gambar 5.3 (a) .....	96
Gambar 5.3 (b) .....	96
Gambar 5.4 (a) .....	97
Gambar 5.4 (b) .....	97
Gambar 5.5 .....	98

Gambar 5.6 ..... 98

Gambar 5.7 ..... 98

Gambar 6.1 ..... 111

Gambar 7.1 ..... 142

## DAFTAR TABEL

Tabel 1.1. Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istemewa .....	21
Tabel 1.2. Perbandingan trigonometri sudut-sudut di semua kuadran .....	25
Tabel 4.1. Perubahan Nilai-Nilai Fungsi Trigonometri .....	75
Tabel 4.2. Tabel nilai $y = \sin x^o$ .....	78
Table 4.3. Tabel nilai $y = \cos x^o$ .....	78
Tabel 4.4. Tabel nilai $y = \tan x^o$ . .....	79
Tabel 5.1. Nilai limit .....	99
Tabel 5.2. Nilai limit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ .....	100
Tabel 7.1. Rumus-rumus integral trigonometri .....	137
Tabel 7.2. Rumus-rumus integral trigonometri .....	138

## DAFTAR SINGKATAN

$^{\circ}$	: Derajat
rad	: Radian
sin	: Sinus
cos	: Kosinus
tan	: Tangen
sec	: Sekan
cosec	: Kosekan
cotan	: Kotangen
=	: Sama dengan
<	: Kurang dari
>	: Lebih dari
$\leq$	: Kurang dari sama dengan
$\geq$	: Lebih dari sama dengan
$\angle$	: Sudut
$\frac{df}{dx}$	: Turunan fungsi $f$ terhadap $x$
$\int$	: Integral
lim	: Limit
TM	: Tidak memenuhi

## KATA PENGANTAR DEKAN

*Alhamdulillah*, segala puji hanya milik Allah SWT. Shalawat & Salam semoga senantiasa terlimpah pada teladan agung Nabi Muhammad SAW, beserta keluarga, sahabat dan pengikutnya sampai hari kebangkitan kelak. Berkat rahmat dan hidayah Allah SWT, program penulisan buku ajar dan referensi telah dapat dirampungkan.

Kewajiban dosen untuk menulis dan memproduksi buku, baik buku ajar maupun buku referensi sejatinya sudah diatur dalam UU Nomor 12 tahun 2012 tentang perguruan tinggi dan UU Nomor 14 tahun 2005 tentang Guru dan Dosen dan sejumlah regulasi lainnya. Pasal 12 UU No.12 tahun 2012 dengan tegas menyebutkan bahwa dosen secara perseorangan atau kelompok wajib menulis buku ajar atau buku teks yang diterbitkan oleh perguruan tinggi sebagai salah satu sumber belajar.

Kompetisi Buku Ajar dan Referensi (KOBAR) Fakultas Tarbiyah dan Keguruan (FTK) UIN Mataram tahun 2020 adalah upaya Fakultas untuk berkontribusi dalam implelementasi undang-undang di atas, dimana secara kuantitatif, grafik riset dan publikasi dosen PTKI masih harus terus ditingkatkan. Tujuan lainnya adalah meningkatkan mutu pembelajaran dengan mewujudkan suasana akademik yang kondusif dan proses pembelajaran yang efektif, efisien dengan kemudahan akses sumber belajar bagi dosen dan mahasiswa. Publikasi ini juga diharapkan *men-support* peningkatan karir dosen dalam konteks kenaikan jabatan fungsional dosen yang ujungnya berdampak pada peningkatan status dan peringkat akreditasi program studi dan perguruan tinggi.

Secara bertahap, Fakultas terus berikhtiar meningkatkan kuantitas dan kualitas penerbitan buku. Pada tahun 2019 berjumlah 10 judul buku dan meningkat cukup signifikan tahun 2020 menjadi 100 judul yang terdistribusi dalam 50 judul buku ajar dan 50 judul buku referensi. Ikhtiar Fakultas tidak berhenti pada level publikasi, namun berlanjut pada pendaftaran Hak Kekayaan Intelektual (HKI) dosen di



Direktorat Jenderal Kekayaan Intelektual (DJKI) Kementerian Hukum dan Hak Asasi Manusia RI, sehingga tahun 2020 menghasilkan 100 HKI dosen.

Kompetisi buku ajar dan referensi tahun 2020 berorientasi interkoneksi-integrasi antara agama dan sains, berspirit Horizon Ilmu UIN Mataram dengan inter-multi-transdisiplin ilmu yang mendialogkan metode dalam *Islamic studies* konvensional berkarakteristik deduktif-normatif-teologis dengan metode *humanities studies* kontemporer seperti sosiologi, antropologi, psikologi, ekonomi, hermeneutik, fenomenologi dan juga dengan metode ilmu eksakta (*natural sciences*) yang berkarakter induktif-rasional. Dari 100 judul buku, terdapat 10 judul tematik yang menjawab problem epistemologis pendidikan Islam, terutama terkait misi Kementerian Agama RI seperti moderasi Islam (Islam *washathiyah*), pendidikan inklusi, pendidikan anti korupsi, pendidikan karakter, pendidikan multikultural, etno-pedagogik, pembelajaran DARING (dalam jaringan), pendidikan & isu gender, ragam pesantren (pesisir, enterprenuer), dan tema teraktual yaitu merdeka belajar dan kampus merdeka.

Mewakili Fakultas, saya berterima kasih atas kebijakan dan dukungan Rektor UIN Mataram Prof. Dr. H Mutawali, M.Ag dan jajarannya, kepada 100 penulis yang telah berkontribusi dalam tahapan kompetisi buku tahun 2020, dan tak terlupakan juga editor dari dosen sebidang dan penerbit yang tanpa sentuhan *zauqnya*, *performace* buku tak akan semenarik ini. Tak ada gading yang tak retak; tentu masih ada kurang, baik dari substansi maupun teknis penulisan, di 'ruang' inilah kami harapkan saran kritis dari khalayak pembaca. Semoga agenda ini menjadi *amal jariyah* dan hadirkan keberkahan bagi sivitas akademika UIN Mataram dan ummat pada umumnya.

Mataram, 29 Oktober 2020 M  
12 Rabi'ul Awal 1442 H  
Dekan



**Dr. Hj. Lubna, M.Pd.**  
NIP. 196812311993032008

## **PRAKATA PENULIS**

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT karena atas berkat rahmat dan hidayah-Nya sehingga buku Trigonometri dapat penulis rampungkan tepat pada waktunya.

Trigonometri merupakan matakuliah yang wajib ditempuh oleh mahasiswa Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Mataram. Hal ini yang menjadi syarat penulis untuk menulis buku Trigonometri sebagai salah satu referensi yang digunakan oleh mahasiswa dalam menempuh matakuliah Trigonometri.

Penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada Dekan Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Mataram yang telah memfasilitasi terbitnya buku ini. Dalam penyusunan bahan ajar ini penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan. Sehingga penulis sangat mengharapkan sumbangan pemikiran dari pembaca. Baik itu berupa saran dan kritik yang sifatnya membangun untuk dapat menyempurnakan buku seperti ini di masa-masa yang akan datang.

Penulis sangat berharap buku Trigonometri ini dapat bermanfaat bagi kami khususnya dan mahasiswa-mahasiswa Tadris Matematika pada umumnya demi peningkatan kemampuan kita dalam memahami matematika

Mataram, 29 Oktober 2020

Penulis



**KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MATARAM  
FAKULTAS TARBIYAH DAN KEGURUAN**

Jln Gajah Mada No.100 Jempong Baru, Mataram. Telp. (0370) 620783/620784 Fax.  
(0370)620784,.

<http://www.uinmataram.ac.id/> email: [ftk@uinmataram.ac.id](mailto:ftk@uinmataram.ac.id)

**RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS)**

**(Berdasarkan Permen Ristekdikti Nomor 44 Tahun 2015 Pasal 12)**

No. Dokumen :		No. Revisi:		Tanggal Penyusunan:07 Agustus 2020	
Matakuliah :Trigonometri		Semester : II	Bobot (Sks) : 2		Kode MK :MAT2221
Program Studi :S1 Tadris Matematika			Dosen Pengampu : Dr. Kristayulita, M.Si		
Capaian Pembelajaran Lulusan (CPL)		1. Sikap dan Tata Nilai: Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidangkeahliannya secara mandiri (S9) 2. Penguasaan Pengetahuan: Menguasai konsep, metode keilmuan, substansi materi, struktur, dan pola pikir keilmuan matematika (P21). 3. Keterampilan Khusus: Mampu menyelenggarakan pembelajaran yang			

	<p>mendidik bidang matematika (K2) dan Mampu memanfaatkan teknologi informasi dan komunikasi secara efektif dan berdaya guna untuk pembelajaran bidang matematika (K3).</p> <p>4. <b>Keterampilan Umum</b>: Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya (U1) dan Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur (U2).</p>
<p><b>Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK)</b></p>	<p>Dengan mempelajari matakuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Memahami sejarah singkat tentang trigonometri</li> <li>2. Memahami dalam menentukan ukuran sudut</li> <li>3. Memahami perbandingan trigonometri</li> <li>4. Memahami koordinat kutub (polar)</li> <li>5. Memahami rumus-rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut</li> <li>6. Memahami rumus trigonometri sudut ganda</li> <li>7. Memahami rumus perkalian sinus dan kosinus</li> <li>8. Memahami jumlah dan selisih pada sinus dan kosinus</li> <li>9. Memahami identitas trigonometri</li> <li>10. Memahami persamaan trigonometri</li> <li>11. Memahami pertidaksamaan trigonometri</li> <li>12. Memahami fungsi trigonometri sinus, kosinus, kosinus dan tangen</li> </ol>

	13. Menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi sinus dan kosinus 14. Menggambarkan grafik fungsi trigonometri 15. Memahami invers fungsi trigonometri 16. Menggunakan aplikasi dalam Maple 17. Memahami pengertian limit fungsi 18. Memahami limit fungsi trigonometri 19. Memahami pengertian turunan fungsi 20. Memahami rumus-rumus turunan fungsi trigonometri 21. Memahami integral tak tentu fungsi trigonometri 22. Memahami integral tentu fungsi trigonometri
<b>Deskripsi Matakuliah</b>	<p>Dalam kuliah ini dibahas tentang trigonometri yang berkaitan dengan sejarah trigonometri, perbandingan trigonometri, rumus-rumus trigonometri, persamaan dan pertidaksamaan terigonometri, fungsi trigonometri, limit fungsi terigonometri, turunan trigonometri, dan integral trigonometri.</p>

## MATRIKS PEMBELAJARAN

(1) Minggu Ke-	(2) Kemampuan Akhir Tiap Tahap Pembelajaran (Kompetensi Dasar)	(3) Bahan Kajian (Materi)	(4) Metode Pembelajaran	(5) Alokasi Waktu	(6) Pengalaman Belajar Siswa (Deskripsi Tugas)	(7) Kriteria Penilaian (Indikator)	(8) Daftar Referensi
1	Memahami rancangan RPS yang diberikan	Kontrak perkuliahan dan Rencana perkuliahan semester (RPS)	Diskusi dan tanya jawab	100 menit	Tanya jawab dan sharing	Keseriusan dan kesungguhan	
2 – 3	<ul style="list-style-type: none"> <li>Memahami sejarah singkat tentang trigonometri</li> <li>Memahami dalam menentukan ukuran sudut</li> <li>Memahami perbandingan trigonometri</li> <li>Memahami koordinat kutub</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Sejarah Trigonometri</li> <li>Perbandingan Sudut</li> </ul>	Ceramah, studi kasus	100 menit	Memperhatikan, membuat catatan, bertanya, dan mengerjakan tugas	Mahasiswa mengerti sejarah trigonometri Mahasiswa mengerti perbandingan trigonom	1 – 12

	(polar)					etri	
4 – 6	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Memahami rumus-rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut</li> <li>• Memahami rumus trigonometri sudut ganda</li> <li>• Memahami rumus perkalian sinus dan kosinus</li> <li>• Memahami jumlah dan selisih pada sinus dan kosinus</li> <li>• Memahami identitas trigonometeri</li> </ul>	Rumus-rumus trigonometri	Ceramah, studi kasus	3×100 menit	Memperhatikan, membuat catatan, bertanya, dan mengerjakan tugas	Mahasiswa mengerti rumus-rumus trigonometri	1 – 12
7	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Memahami persamaan trigonometri</li> <li>• Memahami pertidaksamaan trigonometri</li> </ul>	Persamaan dan pertidaksamaan trigonometri	Ceramah, studi kasus	100 menit	Memperhatikan, membuat catatan, bertanya, dan mengerjakan tugas	Mahasiswa mengerti persamaan dan pertidaksamaan	1 – 12



						trigonometri	
8	UJIAN TENGAH SEMESTER						
9 – 11	<ul style="list-style-type: none"> <li>Memahami fungsi trigonometri sinus, kosinus, kosinus dan tangen</li> <li>Menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi sinus dan kosinus</li> <li>Menggambarkan grafik fungsi trigonometri</li> <li>Memahami invers fungsi trigonometri</li> <li>Menggunakan aplikasi dalam Maple</li> </ul>	Fungsi trigonometri	Ceramah, studi kasus	3×100 menit	Memperhatikan, membuat catatan, bertanya, dan mengerjakan tugas	Mahasiswa mengerti fungsi trigonometri	1 – 12
12	<ul style="list-style-type: none"> <li>Memahami pengertian limit fungsi</li> <li>Memahami limit</li> </ul>	Limit fungsi trigonometri	Ceramah, studi kasus	100 menit	Memperhatikan, membuat catatan, bertanya, dan	Mahasiswa mengerti limit	1 – 12

	fungsi trigonometr				mengerjakan tugas	fungsi trigonometri	
13	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Memahami pengertian turunan fungsi</li> <li>• Memahami rumus-rumus turunan fungsi trigonometri</li> </ul>	Turunan trigonometri	Ceramah, studi kasus	100 menit	Memperhatikan, membuat catatan, bertanya, dan mengerjakan tugas	Mahasiswa mengerti turunan fungsi trigonometri	1 – 12
14	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Memahami integral tak tentu</li> <li>• Memahami integral tentu</li> </ul>	Integral trigonometri	Ceramah, studi kasus	100 menit	Memperhatikan, membuat catatan, bertanya, dan mengerjakan tugas	Mahasiswa mengerti integral fungsi trigonometri	1 – 12
15	Pengayaan-pengayaan	Soal-soal trigonometri	Ceramah, studi kasus	100 menit	Mengerjakan tugas	Mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal	1 – 12

						trigonometri	
16	Ujian Akhir Semester						

## DAFTAR REFERENSI

1. Corliss, J.J., Berglund, V.W. 1958. *Plane Trigonometri*. Boston: The Riverside Press Cambridge.
2. Budiarta, M. T. 2004. *Trigonometri*. Bagian Proyek Pengembangan Kurikulum Direktorat Pendidikan Menengah Kejuruan Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah Departemen Pendidikan Nasional.
3. George B. Thomas JR dan Ross L. Finney. 1993. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Penerbit: Airlangga.
4. Gunawan, J. 1996. *100 Soal dan Pembahasan Trigonometri*. Grasindo, Jakarta.
5. John A. Graham and Robert H. Sorgenfrey. 1986. *Trigonometry with application*. Boston: Houghton Mifflin Company.
6. Kariadinata, R. 2013. *Trigonometri Dasar*. Penerbit: Pustaka Setia Bandung.
7. Larson and Hostetler. 2007. *Algebra and Trigonometry. Seventh Edition*. Boston, New York.
8. Noormandiri, B.K dan Scipto, E. 2000. *Buku Pelajaran Matematika untuk SMU Jilid 2 Kelas 2 Kurikulum 1994, Suplemen GBPP 1999*. Penerbit: Airlangga
9. Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 1. Penerbit: Erlangga.
10. Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 2. Penerbit: Erlangga

11. Wirodikromo, S. 2006. *Matematika Jilid 2 IPA untuk Kelas XI*. Penerbit: Erlangga
12. Zen Fathurin, 2012. *Trigonometri*. Penerbit: Alfabeta Bandung.

## **PENILAIAN**

### **1. Aspek Penilaian**

- a) Sikap
- b) Pengetahuan
- c) Keterampilan

### **2. Bobot Penilaian**

- a) Bobot Nilai Harian (NH) : 10%
- b) Bobot Nilai Tugas (NT) : 30%
- c) Bobot Nilai Ujian Tengah Semester (UTS) : 30%
- d) Bobot Nilai Ujian Akhir Semester (UAS) : 30%
- e) Nilai Akhir (NA)

Untuk menetapkan nilai akhir digunakan pedoman sebagai berikut.

$$Nilai = (0,1 \times NH) + (0,3 \times NT) + (0,3 \times UTS) + (0,3 \times UAS)$$

## VERIFIKASI RPS

Mengetahui

Mataram, 07 Agustus 2020

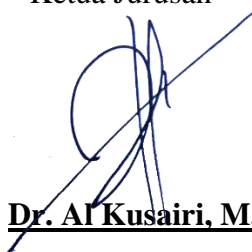
Wakil Dekan 1 FTK



**Dr. Abdul Quddus, M.A**

NIP. 197811112005011009

Ketua Jurusan



**Dr. Al Kusairi, M.Pd**

NIP. 198008022006041003

Dosen Pengampu



**Dr. Kristayulita, M.Si**

NIP. 198107282008012012

## **SEJARAH SINGKAT TRIGONOMETRI**

Berbicara tentang trigonometri tidak terlepas dari konsep segitiga. Trigonometri berasal dari bahasa Yunani yang terdiri dua kata “trigonom” berarti segitiga dan “metron” berarti ukuran. Jadi trigonometri adalah sebuah cabang matematika yang berhadapan dengan sudut segitiga dan fungsi trigonometrik, seperti sinus, kosinus dan tangen. Menurut asalnya trigonometri cabang dari ilmu yang menyelidiki gerak benda-benda angkasa seperti matahari, bulan, dan bintang-bintang termasuk menghitung/ memperkirakan posisinya. Awal trigonometri dapat dilacak hingga zaman Mesir Kuno, Babilonia, dan peradaban Lembah Indus, lebih dari 3.000 tahun yang lalu.

Dalam usaha menggunakan trigonometri sebagai dasar penyelidikan dan perhitungan dikenal dua tokoh Astronomi bangsa Yunani bernama Hipparchus dari Nicaca (abad ke-2 SM) dan Claudius Ptolemy (abad ke-2 SM). Pada perkembangannya selama 2.000 tahun trigonometri banyak digunakan dalam bidang-bidang astronomi, navigasi, dan penyelidikan-penyelidikan lainnya. Pada saat ini trigonometri bukan hanya studi tentang segitiga dan sudut-sudut, tetapi juga merupakan cabang dari matematika modern yang membahas tentang sirkulasi dan fungsi. Matematikawan India adalah perintis perhitungan variabel aljabar yang digunakan untuk menghitung astronomi dan juga trigonometri.

### **Matematika dan Kejayaan Islam**

Masa kejayaan Islam tempo dulu, antara lain ditandai dengan maraknya tradisi ilmu pengetahuan. Para sarjana muslim, khususnya yang berada di Baghdad dan Andalusia, memainkan peran cukup penting bagi tumbuh dan kembangnya ilmu kedokteran, matematika, kimia, dan bidang ilmu lain yang ada sekarang. Selama berabad-abad sarjana-sarjana muslim menuangkan buah pikiran dan hasil

penelitiannya ke dalam kitab-kitab pengetahuan untuk kemudian menjadi rujukan ilmu pengetahuan modern. Kini, dunia telah mengambil manfaat dari pengembangan ilmu yang dirintis oleh para ilmuwan serta sarjana muslim tersebut.

Abul Wafa Muhammad Ibnu Muhammad Ibnu Yahya Ibnu Ismail Al Buzjani adalah satu di antara sekian banyak ilmuwan muslim yang turut mewarnai khazanah pengetahuan masa lalu. Dia tercatat sebagai seorang ahli di bidang ilmu matematika dan astronomi. Kota kecil bernama Bujzana, Nishapur adalah tempat kelahiran ilmuwan besar ini, tepatnya pada tahun 940 M. Sejak masih kecil, kecerdasannya sudah mulai tampak dan hal tersebut ditunjang dengan minatnya yang besar di bidang ilmu alam. Masa sekolahnya dihabiskan di kota kelahirannya.

Setelah berhasil menyelesaikan pendidikan dasar dan menengah, Abul Wafa lantas memutuskan untuk meneruskan ke jenjang lebih tinggi di ibukota Baghdad tahun 959 M. Di sana, dia pun belajar ilmu matematika. Sejarah mencatat, di kota inilah Abul Wafa kemudian menghabiskan masa hidupnya. Tradisi dan iklim keilmuan Baghdad bedar-benar sangat kondusif bagi perkembangan pemikiran Abul Wafa. Berkat bimbingan sejumlah ilmuwan terkemuka pada masa itu, tidak berapa lama dia pun menjelma menjadi seorang pemuda yang memiliki otak cemerlang.

Dia pun lantas banyak membantu para ilmuwan serta secara pribadi mengembangkan beberapa teori penting di bidang matematika, terutama geometri dan trigonometri. Di bidang ilmu geometri, Abul Wafa memberikan kontribusi signifikan bagi pemecahan soal-soal deometri dengan menggunakan kompas; konstruksi ekuivalen untuk semua bidang, polyhedral umum; konstruksi hexagon setengah sisi dari segitiga sama kaki; konstruksi parabola dari titik dan solusi geometri bagi persamaan. Konstruksi bangunan trigonometri versi Abul Wafa hingga kini diakui sangat besar manfaatnya. Dia adalah yang pertama menunjukkan adanya teori relatif segitiga parabola. Tidak hanya itu, dia juga mengembangkan metode baru tentang konstruksi segiempat serta

perbaikan nilai sinus 30 dengan memakai delapan desimal. Abul Wafa pun mengembangkan hubungan sinus dan formula:

$$2 \sin^2 \left( \frac{a}{2} \right) = 1 - \cos a \text{ dan juga } \sin a = 2 \sin \left( \frac{a}{2} \right) \cos a$$

Di samping itu, Abul Wafa membuat studi khusus menyangkut teori tangen dan tabel perhitungan tangen. Dia memperkenalkan secan dan cosecan untuk pertama kalinya, berhasil mengetahui relasi antara garis-garis trigonometri yang berguna untuk memetakannya, serta meletakkan dasar bagi keberlanjutan studi teori *conic*. Abul Wafa bukan hanya ahli matematika, namun juga piawai dalam bidang astronomi. Beberapa tahun dihabiskannya untuk mempelajari perbedaan pergerakan bulan dan menemukan variasi. Dia pun tercatat sebagai salah satu dari penerjemah bahasa Arab dan komentator karya-karya Yunani.

Banyak buku dan karya ilmiah telah dihasilkannya dan mencakup banyak bidang ilmu. Namun, tidak banyak karyannya yang tertinggal hingga saat ini. Sejumlah karyanya hilang, sedangkan yang masih ada sudah dimodifikasi. Kontribusinya dalam bentuk karya ilmiah, antara lain dalam bentuk kitab Ilm Al-Hisab (buku Praktis Aritmatika), Al-Kitab Al-Kamil (buku Lengkap), dan Kitab Al-Handsah (Geometri Terapan). Abul Wafa pun banyak menuangkan karya tulisnya di jurnal ilmiah Euclid, Diophantos, dan Al-Khawarizmi, tetapi sayangnya banyak yang telah hilang.

Meskipun demikian, sumbangsinya bagi teori trigonometri sangat signifikan, terutama pengembangan pada rumus tangen serta penemuan awal terhadap rumus secan dan cosecan. Oleh karena itu, sejumlah besar rumus trigonometri tidak terlepas dari nama Abul Wafa. Seperti disebutkan dalam Al Quran dan Al Hadis, agama Islam menganjurkan kepada umatnya untuk senantiasa belajar dan mengembangkan ilmu pengetahuan. Inilah yang dihayati oleh sang ilmuwan muslim Abul Wafa Muhammad. Seluruh kehidupannya diaabdikan demi kemajuan ilmu. Dia meninggal di Baghdad pada tahun



997 M. **Sumber:** Republika Online (Selasa, 14 Oktober 2008) dalam buku Trigonometri Dasar oleh Rahayu Kariadinata.

## **Matematikawan lainnya**

Studi tentang trigonometri sebagai cabang matematika, terlepas dari astronomi pertama kali diberikan oleh Nashiruddin At-Tusi (1201 – 1274), melalui bukunya *Treatise on the Quadrilateral*. Dalam buku ini, untuk pertama kalinya ia memperlihatkan keenam perbandingan trigonometri lewat sebuah segitiga siku-siku (hanya masih dalam trigonometri sferis). Menurut O’Connors dan Robertson, mungkin ia pula yang pertama kali memperkenalkan aturan sinus (di bidang datar).

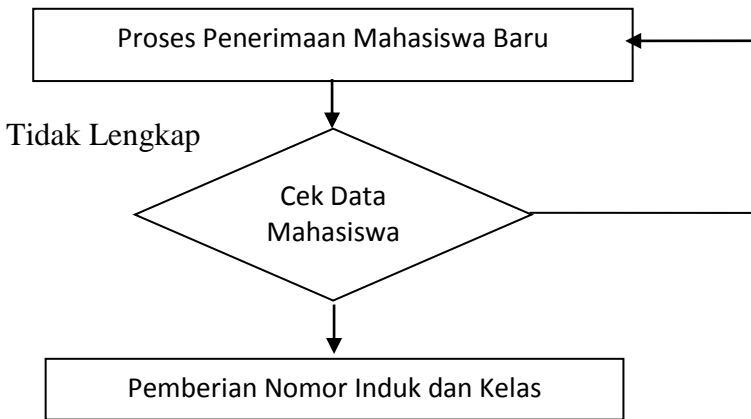
Matematikawan lain adalah Lagadha dikenal sampai sekarang karena menggunakan geometri dan trigonometri untuk perhitungan astronomi dalam bukunya *Vedanga Jyotisha*. Namun, sebagian besar hasil kerjanya hancur oleh penjajah India.

Matematikawan lainnya, di antaranya Abdullah Muhammad Ibnu Musa Al-Khawarizmi, seorang ahli matematika dari Uzbekistan. Di literatur Barat, beliau lebih terkenal dengan sebutan *Algorism*. Panggilan inilah yang kemudian digunakan untuk menyebut konsep algoritma yang ditemukannya. Abdullah Muhammad Ibnu Musa Al-Khawarizmi (770 – 840) lahir di Khawarizmi (Kheva), kota di selatan Sungai Oxus (sekarang Uzbekistan) tahun 770 Masehi. Kedua orang tuanya kemudian pindah ke sebuah tempat di selatan kota Baghdad (Irak), ketika ia masih kecil. Khawarizmi dikenal sebagai orang yang memperkenalkan konsep algoritma dalam matematika, konsep yang diambil dari nama belakangnya.

Kata algoritma mempunyai sejarah yang agak aneh. Orang hanya menemukan kata *algorism* yang berarti proses menghitung dengan angka Arab. Seseorang dikatakan *algorist* jika menghitung menggunakan angka Arab. Para ahli bahasa berusaha menemukan asal kata ini, namun hasilnya kurang memuaskan. Akhirnya, para ahli

sejarah matematika menemukan asal kata tersebut berasal dari nama penulis buku Arab terkenal, yaitu Abdullah Muhammad Ibnu Musa Al-Khawarizmi, yang dibaca orang barat menjadi Algorism.

Algoritma adalah langkah-langkah logis penyelesaian masalah yang disusun secara sistematis dan logis. Algoritma umumnya digunakan untuk membuat diagram alur (flowchart) dalam ilmu komputer/informatika. Contoh sederhana adalah penyusunan pendaftaran mahasiswa baru, seperti bagan berikut ini.



Gambar 1. Contoh algoritma dengan menggunakan diagram alur

Al-Khawarizmi adalah juga penemu dari beberapa cabang ilmu matematika yang dikenal sebagai astronom dan geografer. Ia adalah salah satu ilmuwan matematika terbesar yang pernah hidup, dan tulisan-tulisannya sangat berpengaruh pada zamannya. Teori aljabar adalah juga penemuan dan buah pikiran AL-Khawarizmi. Nama aljabar diambil dari bukunya yang terkenal dengan judul Al-Jabr Wa Al-Muqabillah. Ia mengembangkan tabel perincian trigonometri yang memuat fungsi sinus, kosinus, dan cotangen, serta konsep diferensiasi. Sumber: Ilmu Komputer dalam buku Trigonometri Dasar oleh Rahayu Kariadinata.

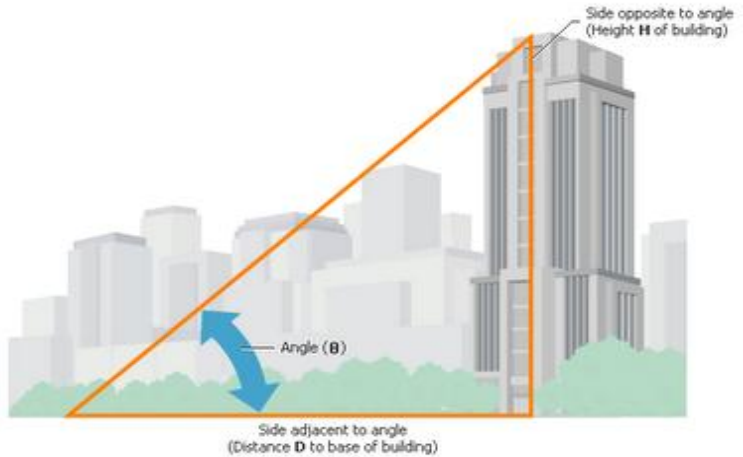
### **Aplikasi Trigonometri**

Aplikasi trigonometri, terutama pada bidang teknik digunakan dalam astronomi untuk menghitung jarak ke bintang-bintang terdekat, dalam geografi untuk menghitung antara titik tertentu, dan dalam sistem navigasi satelit.

Bidang lainnya yang menggunakan trigonometri, misalnya teori musik, akustik, optik, analisis pasar finansial, elektronik, teori probabilitas, statistika, biologi, farmasi, kimia, teori angka (dan termasuk kriptologi), seismologi, meteorologi, oseanografi, berbagai cabang dalam ilmu fisika, survei darat dan geodesi, ekonomi, teknik elektro, teknik mekanik, teknik sipil, grafik komputer, dan sebagainya.

Di Arab dan kebanyakan daerah muslim, trigonometri berkembang dengan pesat tidak hanya karena alasan astronomi, tetapi juga untuk kebutuhan ibadah. Seperti diketahui, seorang muslim jika melakukan ibadah shalat, harus menghadap ke arah qiblat, suatu bangunan di kota Makkah. Para matematikawan muslim lalu membuat tabel trigonometri untuk kebutuhan tersebut.

Seseorang yang ingin mengukur tinggi sebuah pohon, menara, gedung bertingkat, ataupun sesuatu yang memiliki ketinggian tertentu, tidak mungkin secara fisik akan mengukur bangunan dari bawah ke atas (puncak) dengan menggunakan meteran. Pada kasus yang berbeda, seseorang ingin mengukur berapa jarak antara kapal laut yang bersandar di laut yang dekat dengan tepi pantai, tinggi kapal laut yang bersandar, tidak akan dapat dilakukan pengukuran secara manual dengan alat-alat ukur yang ada. Untuk mengukur hal-hal tersebut diperlukan keterampilan ataupun ilmu yang mampu menyelesaikan beberapa masalah tersebut. Pada matematika memiliki cabang khusus yang dapat menyelesaikan segala permasalahan baik permasalahan matematika maupun permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu cabang matematika yang dapat dipakai dalam membantu permasalahan tersebut adalah trigonometri. Ilustrasi permasalahan matematika yang menggunakan teori trigonometri terdapat pada Gambar 2.



Gambar 2. Contoh Aplikasi Trigonometri

Sumber: Kariadinata, R. 2013. *Trigonometri Dasar*. Penerbit: Pustaka Setia Bandung

# **BAB I**

## **PERBANDINGAN TRIGONOMETRI**

### **A. Pendahuluan**

Perbandingan trigonometri merupakan salah satu konsep yang dibahas dalam trigonometri. Perbandingan trigonometri merumuskan tentang ukuran sudut dalam bentuk derajat maupun radian. Selain itu, perbandingan trigonometri dalam bentuk sinus, kosinus maupun tangen serta mengubah koordinat titik ke dalam bentuk koordinat polar (kutub).

Dalam bahan ajar BAB I Perbandingan Trigonometri, anda akan mempelajari perbandingan trigonometri yang mencakup materi-materi bahasan seperti:

- a. Ukuran sudut
- b. Perbandingan trigonometri
- c. Koordinat kutub (polar)

Setelah mempelajari bahan ajar BAB I Perbandingan Trigonometri ini anda diharapkan dapat:

- a. Memahami dalam menentukan ukuran sudut
- b. Memahami perbandingan trigonometri
- c. Memahami koordinat kutub (polar)

Sebagai penjabaran dari tujuan di atas, setelah mempelajari bahan ajar BAB I Perbandingan Trigonometri, anda diharapkan dapat:

- a. Memahami ukuran sudut dalam trigonometri dalam bentuk derajat
- b. Memahami ukuran sudut dalam trigonometri dalam bentuk radian
- c. Menentukan ukuran sudut dalam bentuk derajat ke radian
- d. Menentukan ukuran sudut dalam bentuk radian ke derajat
- e. Menentukan sudut pusat, panjang busur, dan jari-jari lingkaran
- f. Memahami pengertian perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku
- g. Menentukan nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa
- h. Menentukan nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut disemua kuadran (wialyah dalam sistem koordinat)
- i. Menentukan rumus perbandingan trigonometri sudut berelasi
- j. Memahami koordinat kartesius dengan koordinat kutub
- k. Mengubah koordinat titik menjadi koordinat kutub (polar)
- l. Mengubah koordinat kutub (polar) menjadi koordinat titik.

Agar anda berhasil dengan baik dalam mempelajari bahan ajar ini, ikutilah petunjuk belajar berikut:

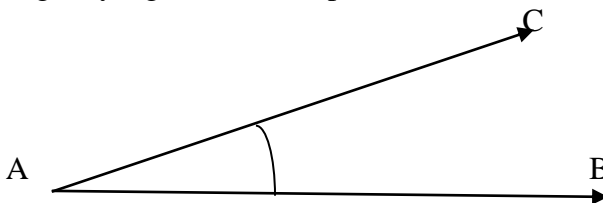
- a. Bacalah dengan cermat pendahuluan bahan ajar ini sehingga anda memahami tujuan mempelajari bahan ajar ini dan bagaimana mempelajarinya
- b. Bacalah bagian demi bagian materi dalam bahan ajar ini, tandailah kata-kata penting yang merupakan kata kunci. Ucapkan pengertian kata-kata kunci tersebut dengan kalimat anda sendiri.
- c. Pahamiilah pengertian demi pengertian dari isi bahan ajar ini dengan mempelajari contoh-contohnya, dengan pemahaamn sendiri, tukar pikiran (diskusi) dengan awan mahasiswa atau dengan tutor.
- d. Buatlah ringkasan isi bahan ajar bab 1 ini dengan kata-kata sendiri

- e. Kerjakan soal-soal tugas dalam bahan ajar bab 1 ini tanpa melihat kunci jawabannya lebih dahulu. Apabila mendapatkan jawaban buntu, barulah anda melihat kunci jawaban.
- f. Kerjakan soal-soal dalam penilaian jika ragu-ragu menjawabnya lihatlah kembali pada uraian materi yang berkenaan dengan soal tersebut

## B. Uraian Materi

### 1. Ukuran Sudut

Sudut dapat dibentuk oleh dua buah sinar garis yang memiliki titik pangkal yang sama (berimpit).



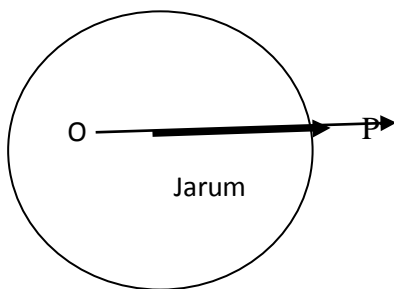
Gambar 1.1

Pada Gambar 1.1, sudut A tersebut dibentuk oleh sinar AB dan AC dengan titik pangkal A. Dalam trigonometri, ada dua macam ukuran sudut yang sering digunakan, yaitu ukuran sudut dalam derajat dan ukuran sudut dalam radian.

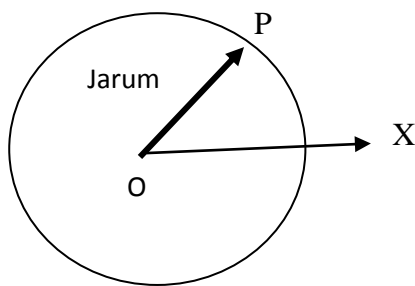
#### 1.1. Ukuran Sudut dalam Derajat

Ukuran derajat adalah ukuran yang dapat dibentuk pada bidang datar dengan satuan ( $^{\circ}$ ) menggambarkan  $1/360$  dari putaran penuh. Besar suatu sudut dalam ukuran derajat dapat dijelaskan dengan menggunakan konsep sudut sebagai jarak putar. Perhatikan Gambar 1.2 dan Gambar 1.3.

Perhatikan Gambar 1.2, misalnya titik ujung jarum mula-mula berada pada titik P. Titik P terdapat pada garis OX, sehingga sudut yang dibentuk oleh jarum terhadap OX sama dengan nol derajat ( $0^\circ$ ). Selanjutnya jarum diputar berlawanan arah jarum jam sehingga diperoleh hasil seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.3. Sudut antara jarum dengan garis OX merupakan jarak putar. Jika jarak putarnya diperbesar, sudut tersebut akan semakin besar. Ukuran besar sudut ditentukan oleh jarak putar jari-jari lingkaran terhadap garis OX. Jika jarum digerakan dari titik P berlawanan arah jarum jam sampai ke titik P lagi, dikatakan jarum ini bergerak satu putaran. Panjang lintasan yang ditelusuri oleh titik ujung jarum sama dengan keliling lingkaran dan besar sudut yang disapu oleh jarum sama dengan  $360^\circ$ .



Gambar 1.2



Gambar 1.3

### Definisi 1.1

Satu derajat ( $1^\circ$ ) didefinisikan sebagai ukuran besar sudut yang disapu oleh jari-jari lingkaran dalam jarak putar sejauh  $\frac{1}{360}$  putaran atau dapat ditulis sebagai  $1^\circ = \frac{1}{360}$ .

Berdasarkan definisi tersebut, jelas bahwa 1 putaran =  $360^\circ$  dan untuk sudut-sudut yang kurang dari satu putaran dapat ditentukan



besar sudutnya jika diketahui seperberapa jarak putarannya terhadap satu kali putaran penuh.

**Sebagai contoh:**

Setengah putaran  $= \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$  disebut garis lurus

Seperempat putaran  $= \frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$  disebut sudut siku-siku, dan seterusnya.

Selain itu, ada ukuran-ukuran yang lebih kecil dari ukuran derajat. Ukuran-ukuran tersebut adalah ukuran menit dan ukuran detik. Ukuran sudut dalam menit dilambangkan dengan ' dan ukuran sudut dalam detik dilambangkan dengan ''.

1 derajat = 60 menit, ditulis  $1^\circ = 60'$  atau 1 menit  $= \frac{1}{60}$  derajat, ditulis

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$$

1 menit = 60 detik, ditulis  $1' = 60''$  atau 1 detik  $= \frac{1}{60}$  menit, ditulis  $1''$

$$= \left(\frac{1}{60}\right)''$$

**Contoh 1.1**

Diketahui besar sudut  $\alpha = 129^\circ 20'$

- Nyatakan besar sudut  $\alpha$  tersebut dalam notasi desimal
- Nyatakan yang berikut ini dalam ukuran derajat, menit, dan detik.

(i)  $\frac{1}{3}\alpha$                       (ii)  $\frac{2}{5}\alpha$

**Jawab**

a.  $20' = 20 \times 1' = 20 \times \left(\frac{1}{60}\right)^\circ = \left(\frac{20}{60}\right)^\circ = 0,33^\circ$ .

Jadi  $129^\circ 20' = 129^\circ + 0,33^\circ = 129,33^\circ$

b. (i)  $\frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{3} \times 129^\circ 20' = \frac{1}{3} \times 129^\circ 18' 120'' = 43^\circ 6' 40''$

(ii)  $\frac{2}{5}\alpha = \frac{2}{5} \times 129^\circ 20' = \frac{2}{5} \times 125^\circ 260' = 25^\circ 52'$ .

## 1.2. Ukuran Sudut dalam Radian

Radian adalah satuan pengukuran yang didefinisikan sebagai  $180/x^\circ$  atau kira-kira  $57,2958^\circ$  dan disingkat rad atau sebagai subscript c, yang biasa digunakan untuk “ukuran melingkar”. Radian adalah satuan standar dari pengukuran untuk sudut dalam matematika.

Radian pertama kali disusun dari matematikawan Inggris Roger Cotes pada tahun 1714, meskipun ia tidak menyebutkan nama satuan pengukuran ini. Kata radian pertama kali muncul di media cetak pada tahun 1873.

Awalnya radia itu, dianggap satuan tambahan dalam Sistem Satuan Internasional (SI) tapi satuan tabahan ini dihapuskan pada tahun 1995 dan sekarang dieknl sebagai satuan turunan. Radian yang diturunkan dari satuan dasar SI meter (m), yang sama dengan  $m \cdot m^{-1}$ , atau m/m. karena meter saling menghilangkan satuan sama lain dalam definisi radian tersebut, radian dianggap tidak berdimensi, dan untuk alasan ini, radian sering hanya ditulis sebagai angka, tanpa simbol satuan.

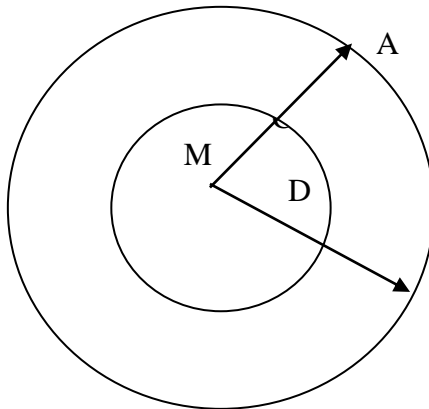
Radian adalah sudut yang dibentuk oleh dua jari-jari dari pusat ke keliling luar lingkaran, dimana busur yang terbentuk adalah sama dengan jari-jari. Sebuah sudut dalam radian dapat dihitung dengan membagi panjang busur sudut yang memotong dengan jari-jari lingkaran (s/r). ada  $360^\circ$  disetiap lingkaran, sama dengan  $2\pi$  radian. Sistem lain untuk pengukuran sudut adalah grad atau gradian, membagi lingkaran menjadi 400 grad.  $200/\pi$  grad sama dengan satu radian.

Dalam matematika, radian lebih disukai untuk satuan untuk pengukuran sudut lain, seperti derajat dan grad., karena kealamian mereka, atau kemampuan mereka untuk menghasilkan hasil yang segan dan sederhana, terutama di bidang trigonometri. selain itu, semua satuan SI, radian digunakan secara universal, sehingga mereka memungkinkan matematikawan dan ilmuwan untuk emmahami perhitungan masing-masing dengan mudah tanpa kesulitan konversi.

Satuan lain SI yang masih berhubungan dengan radian adalah steradian (sr), atau radian persegi, yang mengukur sudut ruang. Sudut ruang dapat divisualisasikan sebagai bagian kerucut dari sebuah bola. Steradian adalah satuan pengukuran lain yang berdimensi, sama dengan  $\text{m} \cdot \text{m}^{-2}$ . Steradian dapat dihitung dengan membagi luas daerah tertutup pada permukaan bola dengan jari-jari kuadrat ( $\text{s/r}^2$ ).

Ukuran sudut dalam radian dapat dijelaskan menggunakan Gambar 1.4. Pada gambar 1.5, titik M adalah pusat dari kedua lingkaran tersebut. MD dan MB berturut-turut merupakan jari-jari lingkaran kecil dan jari-jari lingkaran besar. Berdasarkan gambar tersebut, tampak bahwa juring atau sektor BMA diperoleh dari juring DMC sebagai akibat perbesaran (dilatasi) yang berpusat di M. Oleh karena itu, juring DMC sebangun dengan juring BMA. Kesebangunan ini memberikan hubungan:

$$\frac{\text{panjang busur } DC}{MD} = \frac{\text{panjang busur } BA}{MB}$$



Gambar 1.4

Hubungan ini menunjukkan bahwa perbandingan bahwa perbandingan tersebut tidak dipengaruhi oleh panjang jari-jari lingkaran, tetapi semata-mata oleh besarnya  $\angle DMC$ . Nilai perbandingan =  $\frac{\text{panjang busur } DC}{MD}$  merupakan ukuran sudut DMC yang dinyatakan dalam ukuran radian.

Jika  $MA = MB = r$  maka nilai perbandingan:

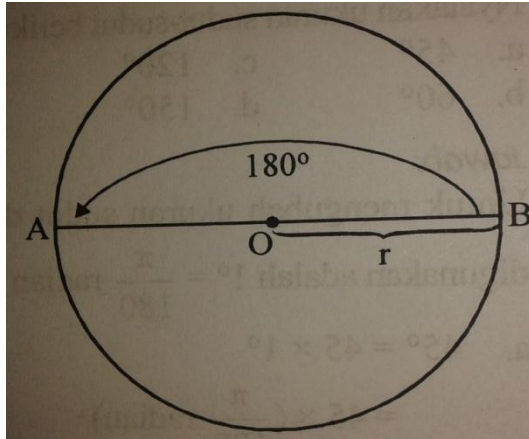
$$\frac{\text{panjang busur } AB}{MB} = \frac{r}{r} = 1$$

### **Definisi 1.2**

Satu radian (ditulis: 1 rad) didefinisikan sebagai ukuran sudut pada bidang datar yang berada di antara dua jari-jari lingkaran dengan panjang busur sama dengan panjang jari-jari lingkaran tersebut.

#### **1.2.1. Mengubah Ukuran Sudut dari Derajat ke Radian dan Sebaliknya**

Untuk mencari hubungan antara besar suatu sudut yang dinyatakan dalam ukuran derajat dengan besar sudut yang dinyatakan dalam ukuran radian. Kita dapat melakukan langkah sebagai berikut. Pertama-tama kita membuat sudut yang besarnya setengah putaran penuh sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 1.5.



Gambar 1.5

Besar sudut BOA dalam ukuran derajat:  $\angle BOA = 180^\circ$ , sebab  $\angle BOA$  adalah sudut setengah putaran .....(\*)

Besar sudut BOA dalam ukuran radian:

$$\angle BOA = \frac{\text{panjang busur } AB}{OB}$$

$$\Leftrightarrow \angle BOA = \frac{\pi r}{r}, (\text{panjang busur } AB = \text{setengah lingkaran})$$

$$\Leftrightarrow \angle BOA = \pi \text{ radian} .....(**)$$

Berdasarkan \*) dan \*\*) diperoleh hubungan

$$\angle BOA = 180^\circ = \pi \text{ radian}$$

$$\text{Jadi } 180^\circ = \pi \text{ radian} .....(***)$$

Berdasarkan \*\*\*) diperoleh

$$\blacksquare 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ radian}$$

$$\blacksquare 1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Kadang-kadang apabila dilakukan pendekatan  $\pi = 3,14159$

$$\blacksquare 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ radian} \cong \frac{3,14159}{180} \text{ radian} = 0,017453 \text{ radian}$$

$$\blacksquare 1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi} \cong \frac{180^\circ}{3,14159} = 57,296^\circ$$

Tanda  $\cong$  menyatakan nilai tersebut merupakan nilai pendekatan.

### Contoh 1.3

Nyatakan ukuran sudut-sudut  $60^\circ$  dan  $25^\circ 30'$  dalam ukuran radian.

#### Jawab

Untuk mengubah ukuran sudut dari derajat ke radian, hubungan yang digunakan adalah  $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$  radian atau  $1^\circ = 0,017453$  radian.

- $60^\circ = 60 \times 1^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ radian} = \frac{\pi}{3} \text{ radian}$
- $25^\circ 30' = 25^\circ + \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = 25^\circ + 0,5^\circ = 25,5^\circ = 25,5 \times 1^\circ$   
 $= 25,5^\circ \times 0,017453 \text{ radian} = 0,445 \text{ radian.}$

### Contoh 1.4

Nyatakanlah sudut  $\frac{\pi}{9}$  radian dan  $\frac{7\pi}{10}$  radian dalam ukuran derajat.

#### Jawab

- $\frac{\pi}{9} \text{ radian} = \frac{\pi}{9} \times 1 \text{ radian} = \frac{\pi}{9} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 20^\circ$
- $\frac{7\pi}{10} \text{ radian} = \frac{7\pi}{10} \times 1 \text{ radian} = \frac{7\pi}{10} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 126^\circ$

## 1.2.2. Sudut Pusat, Panjang Busur, dan Jari-jari lingkaran

Sudut pusat lingkaran adalah daerah sudut yang dibatasi oleh dua jari-jari lingkaran yang titik sudutnya merupakan titik pusat lingkaran. Pada Gambar 1.7 lingkaran dengan pusat titik O, terdapat  $\angle AOB$  yang dibatasi oleh dua jari-jari yaitu OA dan OB,  $\angle AOB$  disebut sudut pusat.

Busur lingkaran adalah garis lengkung bagian dari keliling lingkaran yang menghubungkan dua titik pada lingkaran. Pada Gambar 1.7, lingkaran berpusat di titik O, terdapat titik A dan B di

keliling lingkaran. Garis lengkung yang menghubungkan titik A dan B disebut busur lingkaran.

Busur BA membatasi sudut pusat BOA yang besarnya  $\beta$  (dalam radian). Sebelumnya, telah dijelaskan bahwa ukuran suatu sudut dalam radian merupakan perbandingan antara panjang busur terhadap jari-jari lingkaran. Dengan memerhatikan gambar di bawah, maka

$$\angle BOA = \beta = \frac{\text{panjang busur BA}}{OB}$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{\text{panjang busur BA}}{r}$$

$$\Leftrightarrow \text{panjang busur BA} = \beta r.$$

Persamaan terakhir ini menunjukkan hubungan antara panjang busur, jari-jari lingkaran, dan sudut pusat yang dinyatakan dalam radian.

*Jika diketahui sebuah lingkaran dengan jari-jari  $r$  satuan, dan sebuah busur dengan panjang  $s$  membatasi sudut pusat sebesar  $\beta$  radian, berlaku  $s = \beta r$ .*

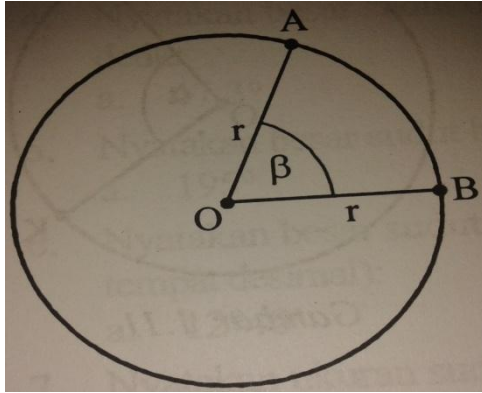
### Contoh 1.5

Jari-jari sebuah lingkaran adalah 6 cm, sudut pusat sebesar  $\frac{1}{2} \pi$  radian yang terdapat pada lingkaran dibatasi busur yang panjangnya  $s$ . Hitunglah  $s$ !

### Jawab

Jari-jari lingkaran = 6 cm dan sudut pusat ( $\alpha$ ) =  $\frac{1}{2} \pi$  radian, sehingga panjang busur  $s$  adalah

$$s = \alpha r = \frac{1}{2} \pi = 6 \text{ cm} = 2\pi \text{ cm} = 2 \times 3,14159 \text{ cm} = 6,28318 \text{ cm}.$$



Gambar 1.6

## 2. Perbandingan Trigonometri

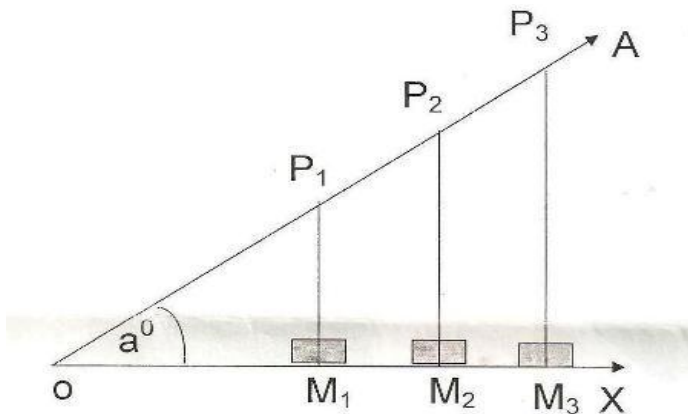
### 2.1. Pengertian Perbandingan Trigonometri Pada Segitiga Siku-Siku

Istilah perbandingan trigonometri dapat diartikan sebagai perbandingan panjang sisi-sisi pada segitiga siku-siku. Pada bahasan ini, akan lebih banyak membicarakan tentang segitiga siku-siku, terutama unsur-unsur pada segitiga siku-siku yang berkaitan langsung dengan perbandingan trigonometri. Untuk lebih mengenal tentang konsep segitiga siku-siku, perhatikan Gambar 1.7.

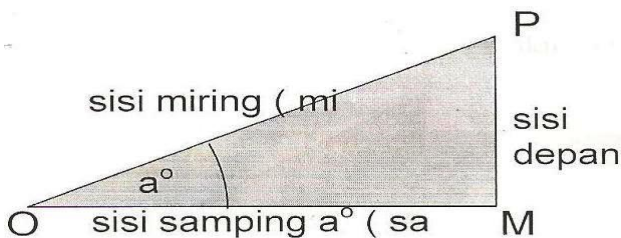
Pada Gambar 1.7, titik  $P_1$ ,  $P_2$ , dan  $P_3$  terletak pada garis  $OA$ . Titik  $M_1$ ,  $M_2$ , dan  $M_3$  terletak pada garis  $OX$ . Jika titik-titik  $P_1$ ,  $P_2$ , dan  $P_3$  dihubungkan dengan  $M_1$ ,  $M_2$ , dan  $M_3$  sedemikian sehingga  $P_1M_1$ ,  $P_2M_2$ , dan  $P_3M_3$  tegak lurus pada  $OX$ , maka akan terbentuk tiga buah segitiga siku-siku, yaitu  $\triangle OP_1M_1$ ,  $\triangle OP_2M_2$ , dan  $\triangle OP_3M_3$  yang sebangun. Akibatnya,

$$\frac{M_1P_1}{OP_1} = \frac{M_2P_2}{OP_2} = \frac{M_3P_3}{OP_3}, \quad \frac{OM_1}{OP_1} = \frac{OM_2}{OP_2} = \frac{OM_3}{OP_3}, \quad \text{dan} \quad \frac{M_1P_1}{OM_1} = \frac{M_2P_2}{OM_2} = \frac{M_3P_3}{OM_3}$$





Gambar 1.7



Gambar 1.8

Perbandingan-perbandingan tersebut dinamakan perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku. Dengan mengacu Gambar 1.8 berikut, maka ketiga perbandingan trigonometri dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$\sin a^\circ = \frac{\text{sisi depan } a^\circ}{\text{sisi miring}} = \frac{de}{mi}$$

$$\cos a^\circ = \frac{\text{sisi samping } a^\circ}{\text{sisi miring}} = \frac{sa}{mi}$$

$$\tan a^\circ = \frac{\text{sisi depan } a^\circ}{\text{sisi samping } a^\circ} = \frac{de}{sa}$$

Untuk secan, cosecan, dan cotangen rumus berikut ini.

$$\sec a^\circ = \frac{\text{sisi miring } a^\circ}{\text{sisi samping } a^\circ} = \frac{1}{\cos a^\circ}$$

$$\csc a^\circ = \frac{\text{sisi miring } a^\circ}{\text{sisi depan } a^\circ} = \frac{1}{\sin a^\circ}$$

$$\cotan a^\circ = \frac{\text{sisi samping } a^\circ}{\text{sisi depan } a^\circ} = \frac{1}{\tan a^\circ}$$

## 2.2. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut-Sudut Istimewa

Sudut khusus sering disebut sudut istimewa adalah suatu sudut di mana nilai perbandingan trigonometrinya dapat ditentukan tanpa menggunakan daftar/tabel matematika atau kalkulator. Sudut-sudut istimewa yang dimaksud adalah sudut yang besarnya  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ , dan  $90^\circ$ . Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa dapat dilihat pada tabel 1 berikut.

**Tabel 1.1.** Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa

$a^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin a^\circ$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos a^\circ$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan a^\circ$	0	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\sim$

**Contoh 1.6**

Hitunglah : a)  $\sin 45^\circ + \cos 30^\circ$       b)  $\sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

**Jawab**

$$\text{a) } \sin 45^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + 1) \end{aligned}$$

### 2.3. Perbandingan Trigonometri Sudut-Sudut di Semua Kuadran (Wilayah dalam Sistem Koordinat)

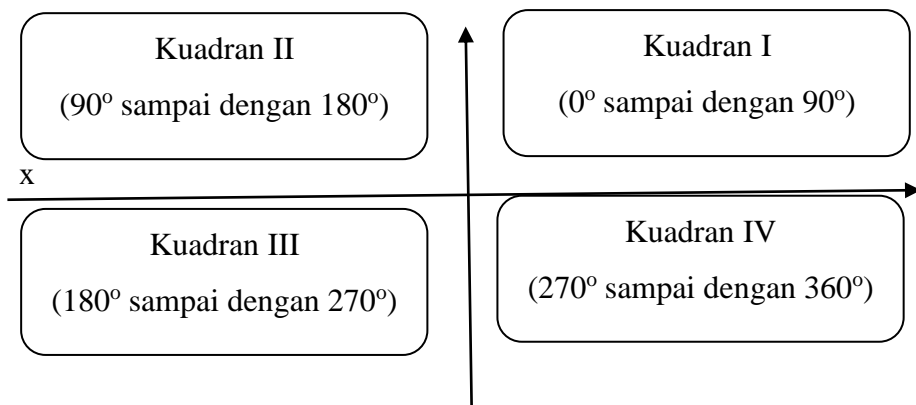
Sebelumnya, telah dibahas perbandingan-perbandingan trigonometri suatu sudut pada sebuah segitiga siku-siku. Namun, sudut-sudut yang terlibat di dalamnya merupakan sudut-sudut lancip, (yaitu sudut-sudut yang besarnya kurang dari  $90^\circ$ ). Pada pembahasan kali ini akan mempelajari perbandingan-perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut yang terletak di semua kudran, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara  $0^\circ$  sampai dengan  $360^\circ$ . Wilayah-wilayah atau kuadran beserta besar sudutnya apabila digambarkan akan tampak seperti pada Gambar 1.9.

Setiap kuadran memiliki kelompok masing dan memiliki nilai yang berbeda-beda.

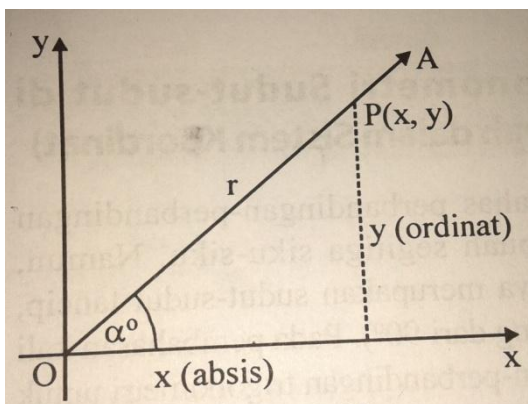
Berdasarkan Gambar 1.9, sudut-sudut dikelompokkan menjadi empat wilayah atau kuadran yang didasarkan pada besarnya sudut, yaitu:

1. Sudut-sudut yang terletak di kuadran I adalah sudut-sudut yang besarnya antara  $0^\circ$  sampai dengan  $90^\circ$  atau  $0^\circ < \alpha_1 < 90^\circ$ .
2. Sudut-sudut yang terletak di kuadran II adalah sudut-sudut yang besarnya antara  $90^\circ$  sampai dengan  $180^\circ$  atau  $90^\circ < \alpha_2 < 180^\circ$

3. Sudut-sudut yang terletak di kuadran III adalah sudut-sudut yang besarnya antara  $180^\circ$  sampai dengan  $270^\circ$  atau  $180^\circ < \alpha_3 < 270^\circ$
4. Sudut-sudut yang terletak di kuadran IV adalah sudut-sudut yang besarnya antara  $270^\circ$  sampai dengan  $360^\circ$  atau  $270^\circ < \alpha_4 < 360^\circ$ .



Gambar 1.9. Wilayah dan besar sudut



Gambar 1.10

Pada gambar 1.11,  $r$  menyatakan jarak dari  $O$  ke  $P$ , maka tanda dari  $r$  selalu positif ( $r > 0$ ). Akibatnya, perbandingan trigonometri berdasarkan tinjauan geometri analitis dapat didefinisikan sebagai berikut.

### Definisi 1.3

Perbandingan trigonometri berdasarkan tinjauan geometri analitis didefinisikan sebagai:

$$\sin \alpha = \frac{\text{ordinat}}{\text{jarak}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{absis}}{\text{jarak}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{ordinat}}{\text{absis}} = \frac{y}{x}$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{jarak}}{\text{absis}} = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{jarak}}{\text{ordinat}} = \frac{r}{y}$$

$$\cotan \alpha = \frac{\text{absis}}{\text{ordinat}} = \frac{x}{y}$$

Dengan memutar ruas garis  $OA$  sehingga  $\angle XOA$  terletak di kuadran I, II, III, dan IV, maka nilai-nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut di semua kuadran dapat ditentukan.

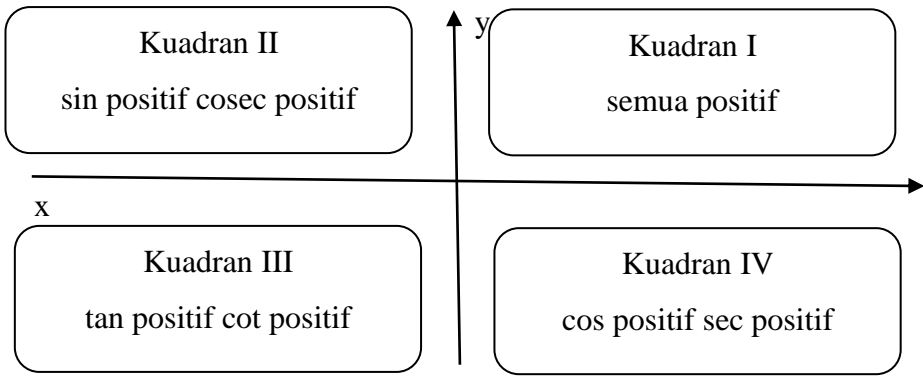
Berdasarkan definisi trigonometri berdasarkan tinjauan geometri analitis dan mengingat bahwa  $r = OP$  selalu positif, maka tanda-tanda (positif atau negatif) nilai perbandingan trigonometri ditentukan oleh tanda-tanda dari absis  $x$  dan ordinat  $y$ . Tanda-tanda perbandingan

trigonometri di kuadran I, II, III, dan IV dapat dilihat pada tabel berikut.

**Tabel 1.2.** Perbandingan trigonometri sudut-sudut di semua kuadran

Perbandingan Trigonometri	Sudut-sudut di Kuadran			
	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−
sec	+	−	−	+
cosec	+	+	−	−

Dari hasil yang terlihat pada Tabel 2, dapat disjikan dengan pada Gambar 1.11.



Gambar 1.11

## 2.4. Rumus Perbandingan Trigonometri Sudut Berelasi

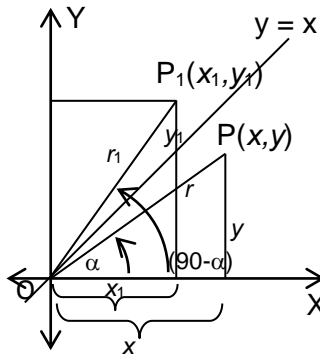
Sudut-sudut yang berelasi dengan sudut  $\alpha$  adalah sudut  $(90^\circ \pm \alpha)$ ,  $(180^\circ \pm \alpha)$ ,  $(360^\circ \pm \alpha)$ , dan  $-\alpha^\circ$ . Dua buah sudut yang berelasi ada yang diberi nama khusus, misalnya **penyiku** (komplemen) yaitu untuk sudut  $\alpha^\circ$  dengan  $(90^\circ - \alpha)$  dan **pelurus** (suplemen) untuk sudut  $\alpha^\circ$  dengan  $(180^\circ - \alpha)$ . Contoh: penyiku sudut  $50^\circ$  adalah  $40^\circ$ , pelurus sudut  $110^\circ$  adalah  $70^\circ$ .

### 1. Perbandingan trigonometri untuk sudut $\alpha$ dengan $(90^\circ - \alpha)$

Dari gambar 1.12 diketahui Titik  $P_1(x_1, y_1)$  bayangan dari  $P(x, y)$  akibat pencerminan garis  $y=x$ , sehingga diperoleh:

a.  $\angle XOP = \alpha$  dan  $\angle XOP_1 = 90^\circ - \alpha$

b.  $x_1 = y$ ,  $y_1 = x$  dan  $r_1 = r$



Gambar 1.12 sudut yang berelasi

Dengan menggunakan hubungan di atas dapat diperoleh:

a.  $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{x}{r} = \cos \alpha$

$$\text{b. } \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{y}{r} = \sin \alpha$$

$$\text{c. } \tan(90^\circ - \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{x}{y} = \cot \alpha$$

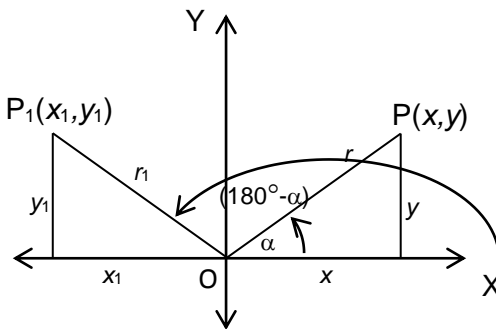
Dari perhitungan tersebut maka rumus perbandingan trigonometri sudut  $\alpha$  dengan  $(90^\circ - \alpha)$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\text{a. } \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \text{d. } \csc(90^\circ - \alpha) = \sec \alpha$$

$$\text{b. } \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \text{e. } \sec(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\text{c. } \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha \quad \text{f. } \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

2. Perbandingan trigonometri untuk sudut  $\alpha^\circ$  dengan  $(180^\circ - \alpha)$   
 Titik  $P_1(x_1, y_1)$  adalah bayangan dari titik  $P(x, y)$  akibat pencerminan terhadap sumbu  $y$ , sehingga  
 a.  $\angle XOP = \alpha$  dan  $\angle XOP_1 = 180^\circ - \alpha$   
 b.  $x_1 = -x$ ,  $y_1 = y$  dan  $r_1 = r$



Gambar. 1.13. sudut yang berelasi



Dari perhitungan tersebut maka rumus perbandingan trigonometri sudut  $\alpha$  dengan  $(180^\circ - \alpha)$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\text{a. } \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{y}{r} = \sin \alpha$$

$$\text{b. } \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{-x}{r} = -\cos \alpha$$

$$\text{c. } \tan(180^\circ - \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{-x} = -\tan \alpha$$

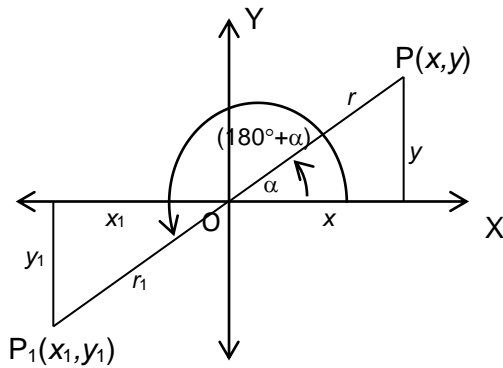
Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha & \text{d. } \csc(180^\circ - \alpha) = \csc \alpha \\ \text{b. } \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha & \text{e. } \sec(180^\circ - \alpha) = -\sec \alpha \\ \text{c. } \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha & \text{f. } \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha \end{array}$$

3. Perbandingan trigonometri untuk sudut  $\alpha^\circ$  dengan  $(180^\circ + \alpha)$   
 Dari Gambar 1.15 titik  $P_1(x_1, y_1)$  adalah bayangan dari titik  $P(x, y)$  akibat pencerminan terhadap garis  $y = -x$ , sehingga

$$\text{a. } \angle XOP = \alpha \text{ dan } \angle XOP_1 = 180^\circ + \alpha$$

$$\text{b. } x_1 = -x, y_1 = -y \text{ dan } r_1 = r$$



Gambar. 1.14. sudut yang berelasi

Maka diperoleh hubungan:

- $\sin(180^\circ + \alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{-y}{r} = -\sin \alpha$
- $\cos(180^\circ + \alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{-x}{r} = -\cos \alpha$
- $\tan(180^\circ + \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan \alpha$

Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

- |  |  |
|--|--|
| a. $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ | d. $\csc(180^\circ + \alpha) = -\csc \alpha$ |
| b. $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ | e. $\sec(180^\circ + \alpha) = -\sec \alpha$ |
| c. $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$  | f. $\cot(180^\circ + \alpha) = \cot \alpha$  |

4. Perbandingan trigonometri untuk sudut  $\alpha$  dengan  $(-\alpha)$

Dari Gambar 1.16 diketahui titik  $P_1(x_1, y_1)$  bayangan dari  $P(x, y)$  akibat pencerminan terhadap sumbu  $x$ , sehingga

a.  $\angle XOP = \alpha$  dan  $\angle XOP_1 = -\alpha$

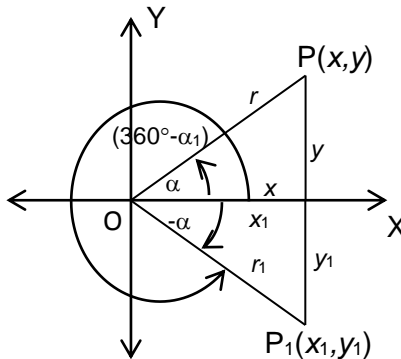
b.  $x_1 = x$ ,  $y_1 = -y$  dan  $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan

a.  $\sin(-\alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{-y}{r} = -\sin \alpha$

b.  $\cos(-\alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{x}{r} = \cos \alpha$

c.  $\tan(-\alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{x} = -\tan \alpha$



Gambar. 1.15. sudut yang berelasi

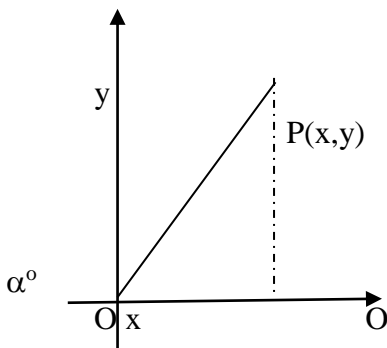
Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

a. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	d. $\csc(-\alpha) = -\csc \alpha$
b. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	e. $\sec(-\alpha) = \sec \alpha$
c. $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	f. $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

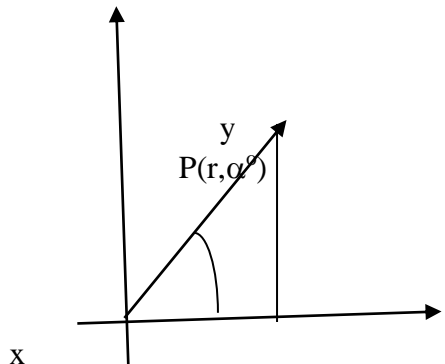
Untuk relasi  $\alpha$  dengan  $(-\alpha)$  tersebut identik dengan relasi  $\alpha$  dengan  $360^\circ - \alpha$ , misalnya  $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ .

### 3. Koordinat Kutub (Koordinat Polar)

Kedudukan atau letak sebuah titik pada bidang x-y dapat disajikan dengan menggunakan koordinat kartesius seperti gambar 1.16. Titik P mempunyai absis x dan ordinat y, maka koordinat kartesius titik P adalah (x,y). Letak titik P pada bidang x-y dapat pula disajikan dengan menggunakan koordinat kutub seperti gambar 1.17.



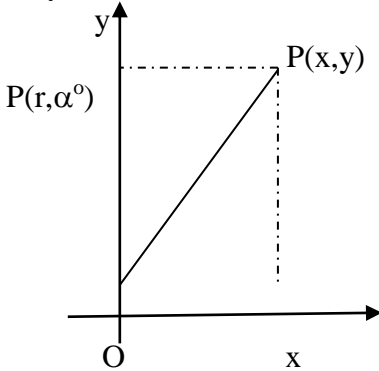
Gambar 1.16



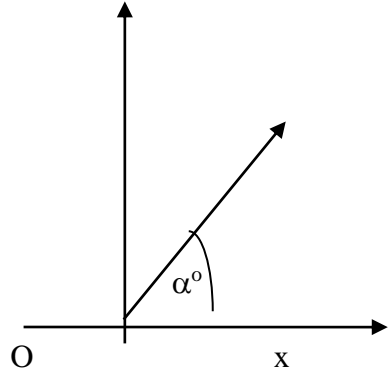
Gambar 1.17

### 3.1. Hubungan Koordinat Kartesius dengan Koordinat Kutub

Pada gambar 1.18 berikut ini, titik P dinyatakan dengan koordinat kartesius (x,y), sedangkan pada gambar 1.19 titik P dinyatakan dalam koordinat kutub (r,  $\alpha^\circ$ ).



Gambar 1.18



Gambar 1.19

Apabila koordinat kutub titik P(r,  $\alpha$ ) diketahui, maka koordinat kartesius P(x,y) ditentukan dengan rumus:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \sin \alpha^\circ \text{ dan } \cos \alpha = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cos \alpha^\circ$$

Sebaliknya, apabila koordinat titik P(x,y) diketahui, maka koordinat kutub titik P(r,  $\alpha^\circ$ ) dapat ditentukan dengan rumus:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ dan } \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa:

1. Jika diketahui koordinat titik P(r,  $\alpha^\circ$ ), maka koordinat kartesius titik P(x,y) dapat ditentukan dengan rumus:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \sin \alpha^\circ \quad \text{dan} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cos \alpha^\circ$$

2. Jika diketahui koordinat titik P(x,y), maka koordinat kutub titik P(r,  $\alpha^\circ$ ) dapat ditentukan dengan rumus:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ dan } \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

### Contoh 1.7

Koordinat kutub titik A adalah  $(8, 30^\circ)$ . Tentukan koordinat kartesius titik A tersebut

### Jawab

Diketahui  $A(8, 30^\circ)$  maka  $r = 8$  dan  $\alpha^\circ = 30^\circ$ . Kedudukan titik A di kuadran I. Dengan menggunakan hubungan  $x = r \cos \alpha^\circ$  dan  $y = r \sin \alpha^\circ$  diperoleh

$$x = 8 \cos 30^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = 4 \sqrt{3}$$

$$y = 8 \sin 30^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

Jadi koordinat kartesius titik A adalah  $(4 \sqrt{3}, 4)$ .

## C. Rangkuman

1. Ukuran sudut terdiri atas derajat dan radian
2. Ukuran derajat adalah ukuran yang dapat dibentuk pada bidang datar dengan satuan ( $^\circ$ ) menggambarkan  $1/360$  dari putaran penuh
3. Satu derajat ( $1^\circ$ ) didefinisikan sebagai ukuran besar sudut yang disapu oleh jari-jari lingkaran dalam jarak putar sejauh  $\frac{1}{360}$  putaran atau dapat ditulis sebagai  $1^\circ = \frac{1}{360}$ .
4. Radian adalah satuan pengukuran yang didefinisikan sebagai  $180/x^\circ$  atau kira-kira  $57,2958^\circ$  dan disingkat rad atau sebagai subscript c, yang biasa digunakan untuk “ukuran melingkar”. Radian adalah satuan standar dari pengukuran untuk sudut dalam matematika.
5. Satu radian (ditulis: 1 rad) didefinisikan sebagai ukuran sudut pada bidang datar yang berada di antara dua jari-jari lingkaran dengan panjang busur sama dengan panjang jari-jari lingkaran tersebut.
6.  $1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi} \cong \frac{180^\circ}{3,14159} = 57,296^\circ$

$$7. 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ radian}$$

8. Jika diketahui sebuah lingkaran dengan jari-jari  $r$  satuan, dan sebuah busur dengan panjang  $s$  membatasi sudut pusat sebesar  $\beta$  radian, berlaku  $s = \beta r$ .

9. Perbandingan-perbandingan tersebut dinamakan perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku

$$a. \sin a^\circ = \frac{\text{sisi depan } a^\circ}{\text{sisi miring}} = \frac{de}{mi}$$

$$b. \cos a^\circ = \frac{\text{sisi samping } a^\circ}{\text{sisi miring}} = \frac{sa}{mi}$$

$$c. \tan a^\circ = \frac{\text{sisi depan } a^\circ}{\text{sisi samping } a^\circ} = \frac{de}{sa}$$

10. Sudut-sudut dikelompokkan menjadi empat wilayah atau kuadran yang didasarkan pada besarnya sudut, yaitu:

a. Sudut-sudut yang terletak di kuadran I adalah sudut-sudut yang besarnya antara  $0^\circ$  sampai dengan  $90^\circ$  atau  $0^\circ < \alpha_1 < 90^\circ$ .

b. Sudut-sudut yang terletak di kuadran II adalah sudut-sudut yang besarnya antara  $90^\circ$  sampai dengan  $180^\circ$  atau  $90^\circ < \alpha_2 < 180^\circ$

c. Sudut-sudut yang terletak di kuadran III adalah sudut-sudut yang besarnya antara  $180^\circ$  sampai dengan  $270^\circ$  atau  $180^\circ < \alpha_3 < 270^\circ$

d. Sudut-sudut yang terletak di kuadran IV adalah sudut-sudut yang besarnya antara  $270^\circ$  sampai dengan  $360^\circ$  atau  $270^\circ < \alpha_4 < 360^\circ$ .

11. Rumus perbandingan trigonometri

a. Perbandingan trigonometri untuk sudut  $\alpha$  dengan  $(90^\circ - \alpha)$

a. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$	d. $\csc(90^\circ - \alpha) = \sec \alpha$
b. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	e. $\sec(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha$
c. $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$	f. $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$

b. Perbandingan trigonometri untuk sudut  $\alpha^\circ$  dengan  $(180^\circ - \alpha)$

a. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	d. $\csc(180^\circ - \alpha) = \csc \alpha$
b. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	e. $\sec(180^\circ - \alpha) = -\sec \alpha$
c. $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$	f. $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

c. Perbandingan trigonometri untuk sudut  $\alpha^\circ$  dengan  $(180^\circ + \alpha)$

a. $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	d.
$\csc(180^\circ + \alpha) = -\csc \alpha$	
b. $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	e.

d. Perbandingan trigonometri untuk sudut  $\alpha$  dengan  $(-\alpha)$

a. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	d. $\csc(-\alpha) = -\csc \alpha$
b. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	e. $\sec(-\alpha) = \sec \alpha$
c. $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	f. $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$



12. Jika diketahui koordinat titik  $P(r, \alpha^\circ)$ , maka koordinat kartesius titik  $P(x,y)$  dapat ditentukan dengan rumus:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \sin \alpha^\circ \text{ dan } \cos \alpha = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cos \alpha^\circ$$

13. Jika diketahui koordinat titik  $P(x,y)$ , maka koordinat kutub titik  $P(r, \alpha^\circ)$  dapat ditentukan dengan rumus:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ dan } \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

#### **D. Tugas**

##### **Kerjakan soal-soal berikut**

1. Ubahlah besar sudut dalam satuan derajat dibawah ini dalam satuan radian
  - a.  $30^\circ$
  - b.  $3^\circ$
  - c.  $2,5^\circ$
  - d.  $65^\circ$
2. Ubahlah besar sudut dalam satuan radian dibawah ini ke dalam satuan derajat
  - a. 2 rad
  - b.  $\frac{1}{4}$  rad
  - c.  $4\pi$  rad
  - d. 15 rad
3. Jika  $\cos A = \frac{2}{3}$  dengan A lancip. Tentukan  $\tan A$ ?
4. Tentukan sin, cos, dan tangen pada titik-titik berikut
  - a. (-3,-4)
  - b. (6,-8)
  - c. (-5,12)
  - d. 12,15)
5. Tentukan koordinat polar dari titik-titik berikut
  - a. A(2,3)
  - b. B(-5,12)

- c. C(6,-8)
- d. G(-12,-15)
- 6. Tentukan titik dari koordinat polar berikut
  - a. K(5,60°)
  - b. M(10, 45°)
  - c. L(25, 120°)
  - d. H(12, 315°)

## E. Penilaian

**Tes Essay:** Kerjakan soal-soal berikut

1. Ubahlah besar sudut dalam satuan derajat dibawah ini dalam satuan radian
  - a. 5°
  - b. 80°
2. Ubahlah besar sudut dalam satuan radian dibawah ini ke dalam satuan derajat
  - a.  $\frac{1}{2}$  rad
  - b.  $6\pi$  rad
3. Jika  $\cos A = \frac{3}{5}$  dengan A lancip. Tentukan  $\tan A$ ?
4. Tentukan sin, cos, dan tangen pada titik-titik berikut
  - a. (3,4)
  - b. (5,-12)
5. Tentukan koordinat polar dari titik-titik berikut
  - a. A (1,1)
  - b. C(-6,8)
6. Tentukan titik dari koordinat polar berikut
  - a. K(5,-60°)
  - b. H(10, 315°)

## F. Rujukan

- Corliss, J.J., Berglund, V.W. 1958. *Plane Trigonometri*. Boston: The Riverside Press Cambridge.
- Budiarta, M. T. 2004. *Trigonometri*. Bagian Proyek Pengembangan Kurikulum Direktorat Pendidikan Menengah Kejuruan Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah Departemen Pendidikan Nasional.
- George B. Thomas JR dan Ross L. Finney. 1993. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Penerbit: Airlangga.
- Gunawan, J. 1996. *100 Soal dan Pembahasan Trigonometri*. Grasindo, Jakarta.
- John A. Graham and Robert H. Sorgenfrey. 1986. *Trigonometry with application*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Kariadinata, R. 2013. *Trigonometri Dasar*. Penerbit: Pustaka Setia Bandung.
- Larson and Hostetler. 2007. *Algebra and Trigonometry. Seventh Edition*. Boston, New York.
- Noormandiri, B.K dan Scipto, E. 2000. *Buku Pelajaran Matematika untuk SMU Jilid 2 Kelas 2 Kurikulum 1994, Suplemen GBPP 1999*. Penerbit: Airlangga
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 1. Penerbit: Erlangga.
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 2. Penerbit: Erlangga
- Wirodikromo, S. 2006. *Matematika Jilid 2 IPA untuk Kelas XI*. Penerbit: Erlangga
- Zen Fathurin, 2012. *Trigonometri*. Penerbit: Alfabeta Bandung.

## **BAB II**

### **RUMUS-RUMUS TRIGONOMETRI**

#### **A. Pendahuluan**

Rumus-rumus trigonometri merupakan konsep yang dihasilkan dari perbandingan sudut pada trigonometri. rumus-rumus trigonometri yang dihasilkan seperti rumus-rumus trigonometri untuk dua sudut, sudut rangkap dan setengah sudut. Lebih lanjut, rumus-rumus tersebut diekspansi menjadi beberapa rumus yang dihasilkan seperti rumus perkalian sinus dan kosinus dan rumus selisih dan jumlah sinus dan kosinus serta identitas trigonometri.

Dalam bahan ajar BAB II Rumus-Rumus Trigonometri, anda akan mempelajari rumus-rumus trigonometri yang mencakup materi-materi bahasan seperti:

- a. Rumus-rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut
- b. Rumus trigonometri sudut ganda
- c. Rumus perkalian sinus dan kosinus
- d. Rumus jumlah dan selisih pada sinus dan kosinus
- e. Identitas trigonometri

Setelah mempelajari bahan ajar BAB II Rumus-Rumus Trigonometri ini anda diharapkan dapat:

- a. Memahami rumus-rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut
- b. Memahami rumus trigonometri sudut ganda
- c. Memahami rumus perkalian sinus dan kosinus
- d. Memahami jumlah dan selisih pada sinus dan kosinus
- e. Memahami identitas trigonometri

Sebagai penjabaran dari tujuan di atas, setelah mempelajari bahan ajar BAB II Rumus-Rumus Trigonometri, anda diharapkan dapat:

- a. Menentukan rumus kosinus jumlah dan selisih dua sudut
- b. Menentukan rumus sinus jumlah dan selisih dua sudut
- c. Menentukan rumus tangen jumlah dan selisih dua sudut
- d. Menentukan rumus kosinus sudut rangkap
- e. Menentukan rumus sinus sudut rangkap
- f. Menentukan rumus tangen sudut rangkap
- g. Menentukan rumus perkalian sinus dan kosinus
- h. Menentukan rumus perkalian kosinus dan sinus
- i. Menentukan rumus perkalian kosinus dan kosinus
- j. Menentukan rumus perkalian sinus dan sinus
- k. Menentukan rumus jumlah pada sinus dan kosinus
- l. Menentukan rumus selisih pada sinus dan kosinus
- m. Membuktikan identitas trigonometri

Agar anda berhasil dengan baik dalam mempelajari bahan ajar ini, ikutilah petunjuk belajar berikut:

- a. Bacalah dengan cermat pendahuluan bahan ajar ini sehingga anda memahami tujuan mempelajari bahan ajar ini dan bagaimana mempelajarinya
- b. Bacalah bagian demi bagian materi dalam bahan ajar ini, tandailah kata-kata penting yang merupakan kata kunci. Ucapkan pengertian kata-kata kunci tersebut dengan kalimat anda sendiri.

- c. Pahamiilah pengertian demi pengertian dari isi bahan ajar ini dengan mempelajari contoh-contohnya, dengan pemahaamn sendiri, tukar pikiran (diskusi) dengan awan mahasiswa atau dengan tutor.
- d. Buatlah ringkasan isi bahan ajar bab 2 ini dengan kata-kata sendiri
- e. Kerjakan soal-soal tugas dalam bahan ajar bab 2 ini
- f. Kerjakan soal-soal dalam penilaian jika ragu-ragu menjawabnya lihatlah kembali pada uraian materi yang berkenaan dengan soal tersebut

## **B. Uraian Materi**

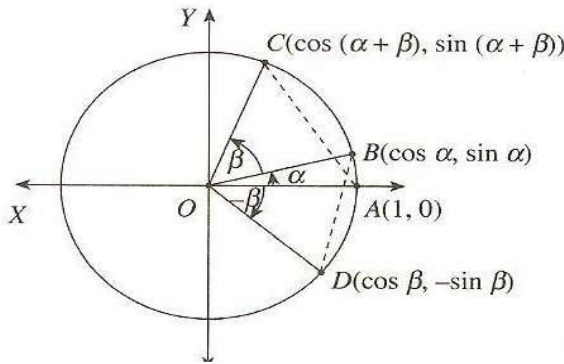
### **1. Rumus-Rumus Trigonometri Jumlah Dan Selisih Dua Sudut**

Trigonometri jumlah dan selisih dua sudut, yaitu  $\sin(\alpha \pm \beta)$ ,  $\cos(\alpha \pm \beta)$ , dan  $\tan(\alpha \pm \beta)$  mengikuti kaidah-kaidah tertentu yang dirangkum dalam rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut berikut.

#### **1.1. Rumus untuk $\cos(\alpha \pm \beta)$**

##### **a. Rumus untuk $\cos(\alpha + \beta)$**

Untuk memahami rumus trigonometri dari kosinus jumlah dua sudut perlu diilustrasikan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1

Pada gambar 2.1 diperlihatkan sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan (disebut lingkaran satuan), sehingga titik A mempunyai koordinat (1,0).

Misalkan  $\angle AOB = \alpha$  dan  $\angle BOC = \beta$  maka:

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = \alpha + \beta$$

Dengan demikian sudut pertolongan  $\angle AOD = -\beta$ , maka  $\triangle AOC$  kongruen dengan  $\triangle BOD$ .

Akibatnya

$$AC = BD \text{ atau } AC^2 = BD^2$$

Kita ingat bahwa koordinat Cartesius sebuah titik dapat dinyatakan sebagai  $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ , sehingga koordinat titik B adalah  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ , titik C adalah  $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$  dan titik D adalah  $(\cos \beta, -\sin \beta)$ .

Dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik diperoleh:

- Jarak titik A(1,0) dan C  $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$  adalah
 
$$\begin{aligned} AC^2 &= \{ \cos(\alpha+\beta) - 1 \}^2 + \{ \sin(\alpha+\beta) - 0 \}^2 \\ &= \cos^2(\alpha+\beta) - 2 \cos(\alpha+\beta) + 1 + \sin^2(\alpha+\beta) \\ &= \{ \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) \} + 1 - 2 \cos(\alpha+\beta) \\ &= 1 + 1 - 2 \cos(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

$$AC^2 = 2 - 2 \cos (\alpha + \beta)$$

- Jarak titik B  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  dan D  $(\cos \beta, -\sin \beta)$  adalah

$$\begin{aligned} BD^2 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (-\sin \beta - \sin \alpha)^2 \\ &= \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \alpha \\ &= (\cos^2 \beta + \cos^2 \alpha) + (\sin^2 \beta + \sin^2 \alpha) - 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \\ &= 1 + 1 - 2 (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ &= 2 - 2 (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

Karena  $AC^2 = BD^2$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} 2 - 2 \cos (\alpha + \beta) &= 2 - 2 (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ \cos (\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Jadi, rumus untuk  $\cos (\alpha + \beta)$  adalah

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

## b. Rumus untuk $\cos (\alpha - \beta)$

Rumus untuk  $\cos (\alpha - \beta)$  dapat diperoleh dari rumus  $\cos (\alpha + \beta)$  dengan cara mengganti sudut  $\beta$  dengan sudut  $(-\beta)$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \cos (\alpha - \beta) &= \cos (\alpha + (-\beta)) \\ &= \cos \alpha \cos (-\beta) - \sin \alpha \sin (-\beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha (-\sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Sehingga, rumus untuk  $\cos (\alpha - \beta)$  adalah

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Rumus di atas dapat dituliskan secara bersama sebagai berikut

$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$



### Contoh 2.1

Tanpa menggunakan tabel trigonometri atau kalkulator, hitunglah nilai eksak dari

- a.  $\cos 15^\circ$
- b.  $\cos 75^\circ$

### Jawab

$$\begin{aligned}\text{a. } 15^\circ &= 45^\circ - 30^\circ, \text{ sehingga} \\ \cos 15^\circ &= \cos (45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})\end{aligned}$$

Jadi, nilai eksak dari  $\cos 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

$$\text{b. } 75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$$

## 1.2. Rumus untuk $\sin(\alpha \pm \beta)$

### a. Rumus untuk $\sin(\alpha + \beta)$

Rumus  $\sin(\alpha + \beta)$  dapat ditentukan dengan menggunakan rumus-  
rumus yang pernah kita pelajari sebelumnya, yaitu:

1. Rumus sudut yang berelasi

$$\text{i. } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\text{ii. } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$2. \text{ Rumus } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Berdasarkan rumus 1) bagian ii), diperoleh hubungan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)\end{aligned}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Jadi, rumus untuk  $\sin(\alpha + \beta)$  adalah

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

## b. Rumus untuk $\sin(\alpha - \beta)$

Rumus untuk  $\sin(\alpha - \beta)$  dapat diperoleh dari rumus  $\sin(\alpha + \beta)$  dengan cara menggantikan sudut  $\beta$  dengan sudut  $(-\beta)$

Sehingga, rumus untuk  $\sin(\alpha - \beta)$  adalah

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Kedua rumus di atas dapat ditulis secara bersamaan sebagai berikut

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

## 1.3. Rumus untuk $\tan(\alpha \pm \beta)$

### a. Rumus untuk $\tan(\alpha + \beta)$

Berdasarkan rumus perbandingan  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , maka

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \times \frac{\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

Jadi, rumus  $\tan(\alpha + \beta)$  adalah

$$\tan (\alpha+\beta)=\frac{\tan \alpha+\tan \beta}{1-\tan \alpha \tan \beta}$$

### **b. Rumus untuk $\tan (\alpha-\beta)$**

Rumus untuk  $\tan (\alpha-\beta)$  dapat diperoleh dari rumus  $\tan (\alpha+\beta)$  dengan cara mengganti sudut  $\beta$  dengan sudut  $(-\beta)$ . Sehingga diperoleh rumus untuk  $\tan (\alpha-\beta)$  yaitu

$$\tan (\alpha-\beta)=\frac{\tan \alpha-\tan \beta}{1+\tan \alpha \tan \beta}$$

Kedua rumus di atas dapat ditulis secara bersama sebagai berikut

$$\tan (\alpha \pm \beta)=\frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

## **2. Rumus Trigonometri Sudut Ganda**

Misalkan  $\alpha$  adalah sebuah sudut tunggal, maka dua kali sudut  $\alpha$  (ditulis:  $2\alpha$ ) disebut juga sebagai sudut ganda atau sudut rangkap. Trigonometri sudut ganda, yaitu  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$ , dan  $\tan 2\alpha$  mengikuti kaidah-kaidah tertentu yang dirangkum dalam rumus-rumus trigonometri sudut ganda. Kajian diawali dengan pembuktian rumus bagi  $\sin 2\alpha$ .

### **2.1. Rumus untuk $\sin 2\alpha$**

Perhatikan kembali rumus untuk  $\sin (\alpha+\beta)$

$$\sin (\alpha+\beta)=\sin \alpha \cos \beta+\cos \alpha \sin \beta$$

Apabila sudut  $\beta$  diganti dengan sudut  $\alpha$  atau substitusi  $\beta=\alpha$ , maka rumus di atas menjadi:

$$\sin (\alpha+\alpha)=\sin \alpha \cos \alpha+\cos \alpha \sin \alpha$$

$\Leftrightarrow \sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$  (ingat  $\sin \alpha \cos \alpha = \cos \alpha \sin \alpha$ )

$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Jadi, rumus untuk  $\sin 2\alpha$  adalah

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

## 2.2. Rumus untuk $\cos 2\alpha$

Kita ingat kembali rumus untuk  $\cos (\alpha+\beta)$ .

$$\cos (\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Dengan mengganti sudut  $\beta$  dengan  $\alpha$  atau substitusi  $\beta = \alpha$ , maka rumus di atas menjadi

$$\cos (\alpha+\alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

jadi, rumus untuk  $\cos 2\alpha$  adalah

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

bentuk lain untuk rumus  $\cos 2\alpha$  adalah

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad \text{atau} \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

## 2.3. Rumus untuk $\tan 2\alpha$

Perhatikan kembali rumus untuk  $\tan (\alpha+\beta)$

$$\tan (\alpha+\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Dengan mengganti sudut  $\beta$  dengan  $\alpha$  atau substitusi  $\beta = \alpha$ , maka rumus di atas menjadi

$$\tan (\alpha+\alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

jadi, rumus untuk  $\tan 2\alpha$  adalah

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

## 2.4. Rumus Sinus, Kosinus, dan Tangen sudut $\frac{1}{2}\theta$

### a. Rumus untuk $\sin \frac{1}{2}\theta$

Perhatikan kembali rumus untuk  $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

dengan mengganti atau mensubstitusikan  $\alpha = \frac{1}{2}\theta$  ke persamaan di atas, diperoleh

$$\sin \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

jadi, rumus untuk  $\sin \frac{1}{2}\theta$  adalah

$$\sin \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

### b. Rumus untuk $\cos \frac{1}{2}\theta$

Perhatikan kembali rumus  $\cos 2\alpha$ , dengan cara yang sama untuk memperoleh rumus  $\sin \frac{1}{2}\theta$ . Maka rumus untuk  $\cos \frac{1}{2}\theta$  adalah

$$\cos \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

### c. Rumus untuk $\tan \frac{1}{2} \theta$

Dengan mensubstitusikan rumus  $\sin \frac{1}{2} \theta$  dan rumus  $\cos \frac{1}{2} \theta$  yang telah diperoleh sebelumnya pada  $\tan \frac{1}{2} \theta = \frac{\sin \frac{1}{2} \theta}{\cos \frac{1}{2} \theta}$ , diperoleh rumus  $\tan \frac{1}{2} \theta$  yaitu

$$\tan \frac{1}{2} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

dengan  $\tan \frac{1}{2} \theta$  di atas dapat diubah dalam bentuk lain dengan cara mengubah bagian pembilang atau penyebut sebagai berikut

$$\tan \frac{1}{2} \theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

atau

$$\tan \frac{1}{2} \theta = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

## 3. Rumus Perkalian Sinus dan Kosinus

Dalam bagian ini dipelajari rumus-rumus baru dalam trigonometri. Rumus-rumus baru ini merupakan perkalian sinus dan kosinus yang dinyatakan dalam bentuk jumlah atau selisih sinus atau kosinus.

### 3.1. Rumus-Rumus untuk $2 \sin \alpha \cos \beta$ dan $2 \cos \alpha \sin \beta$

#### a. Rumus untuk $2 \sin \alpha \cos \beta$

Perhatikan kembali rumus untuk  $\sin (\alpha \pm \beta)$ . Jika rumus  $\sin (\alpha + \beta)$  dan rumus  $\sin (\alpha - \beta)$  dijumlahkan maka diperoleh

$$\begin{aligned} \sin (\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin (\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \hline \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

Jadi,  $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)$

### **b. Rumus untuk $2 \cos \alpha \sin \beta$**

Jika rumus  $\sin (\alpha + \beta)$  dan rumus  $\sin (\alpha - \beta)$  dikurangkan maka diperoleh

$$\begin{array}{rcl} \sin (\alpha + \beta) & = & \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin (\alpha - \beta) & = & \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \hline \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) & = & 2 \cos \alpha \sin \beta \end{array}$$

Jadi,  $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)$$

## **3.2. Rumus-Rumus untuk $2 \cos \alpha \cos \beta$ dan $2 \sin \alpha \sin \beta$**

### **a. Rumus untuk $2 \cos \alpha \cos \beta$**

Perhatikan kembali rumus untuk  $\cos (\alpha \pm \beta)$ . Jika rumus  $\cos (\alpha + \beta)$  dan rumus  $\cos (\alpha - \beta)$  dijumlahkan maka diperoleh

$$\begin{array}{rcl} \cos (\alpha + \beta) & = & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos (\alpha - \beta) & = & \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \hline \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) & = & 2 \cos \alpha \cos \beta \end{array}$$

Jadi,  $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)$

### **b. Rumus untuk $2 \sin \alpha \sin \beta$**

Kalau rumus  $\cos (\alpha + \beta)$  dan rumus  $\cos (\alpha - \beta)$  dikurangkan maka diperoleh

$$\begin{array}{rcl} \cos (\alpha + \beta) & = & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos (\alpha - \beta) & = & \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \hline \end{array}$$

$$\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta) = - 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\text{Jadi, } 2 \sin \alpha \sin \beta = - \{ \cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta) \}$$

Berdasarkan pembahasan tersebut, kita peroleh rumus  $2 \cos \alpha \cos \beta$  dan  $2 \sin \alpha \sin \beta$  sebagai berikut

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = - \{ \cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta) \}$$

#### 4. Rumus Jumlah Dan Selisih Pada Sinus Dan Kosinus

Pada bagian 2.3 telah dipelajari bagaimana memanipulasi secara aljabar untuk mengubah:

- perkalian sinus dan kosinus menjadi jumlah atau selisih sinus
- perkalian kosinus dan kosinus menjadi jumlah kosinus, dan
- perkalian sinus dan sinus menjadi selisih kosinus.

Proses memanipulasi aljabar sebaliknya tentu saja dapat dilakukan, yaitu mengubah;

- jumlah atau selisih sinus menjadi perkalian sinus dan kosinus
- jumlah kosinus menjadi perkalian kosinus dan kosinus, dan
- selisih kosinus menjadi perkalian sinus dan sinus.

Sehingga diperoleh

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} (A - B)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2} (A + B) \sin \frac{1}{2} (A - B)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} (A - B)$$

$$\cos A - \cos B = - 2 \sin \frac{1}{2} (A + B) \sin \frac{1}{2} (A - B)$$

Berdasarkan rumus-rumus di atas tampak bahwa jumlah dan selisih pada sinus dan kosinus dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian dengan pola sebagai berikut.



- (a) Jumlah atau selisih sinus dinyatakan sebagai perkalian sinus dengan kosinus atau perkalian kosinus dengan sinus
- (b) Jumlah atau selisih kosinus dinyatakan sebagai perkalian kosinus dengan kosinus atau perkalian sinus dengan sinus.

## 5. Identitas Trigonometri

Dalam bagian ini dipelajari cara-cara membuktikan kebenaran suatu identitas trigonometri dengan menggunakan kembali rumus-rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut, rumus trigonometri sudut ganda dan rumus trigonometri untuk sudut  $\frac{1}{2}\alpha$ .

Selain itu, rumus-rumus trigonometri dasar yang akan sering digunakan adalah

- Rumus-rumus kebalikan  

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$
- Rumus-rumus perbandingan  

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$
- Rumus-rumus pythagoras  

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha, \text{ dan } 1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$
- Rumus-rumus trigonometri untuk sudut-sudut berelasi

Agar lebih memahami bagaimana membuktikan kebenaran identitas trigonometri, perhatikan contoh berikut.

### Contoh 2.2

Untuk setiap sudut  $\alpha$ , buktikan bahwa  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$

#### Jawab:

Jabarkan ruas kiri:

$$\begin{aligned} (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 &= \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$= 1 - \sin 2\alpha.$$

Jadi terbukti bahwa  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$

### Contoh 2.3

Buktikan bahwa  $(\sin 4x - \sin x)^2 + (\cos 4x + \cos x)^2 = 2(1 + \cos 5x)$

#### Jawab:

Jabarkan ruas kiri:

$$\begin{aligned} & (\sin 4x - \sin x)^2 + (\cos 4x + \cos x)^2 \\ &= \sin^2 4x - 2 \sin 4x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 4x + 2 \cos 4x \cos x + \cos^2 x \\ &= (\sin^2 4x + \cos^2 4x) + (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2(\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x) \\ &= 1 + 1 + 2 \cos (4x + x) \\ &= 2 + 2 \cos 5x \\ &= 2(1 + \cos 5x) \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $(\sin 4x - \sin x)^2 + (\cos 4x + \cos x)^2 = 2(1 + \cos 5x)$

### C. Rangkuman

1. Rumus untuk  $\cos(\alpha + \beta)$  adalah  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
2. rumus untuk  $\cos(\alpha - \beta)$  adalah  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
3. rumus untuk  $\sin(\alpha + \beta)$  adalah  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
4. rumus untuk  $\sin(\alpha - \beta)$  adalah  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
5. rumus  $\tan(\alpha + \beta)$  adalah  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
6. rumus untuk  $\tan(\alpha - \beta)$  yaitu  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

7. rumus untuk  $\sin 2\alpha$  adalah  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
8. rumus untuk  $\cos 2\alpha$  adalah  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
9. bentuk lain untuk rumus  $\cos 2\alpha$  adalah  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$   
atau  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
10. rumus untuk  $\tan 2\alpha$  adalah  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
11. rumus untuk  $\sin \frac{1}{2} \theta$  adalah  $\sin \frac{1}{2} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$
12. rumus untuk  $\cos \frac{1}{2} \theta$  adalah  $\cos \frac{1}{2} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$
13. rumus  $\tan \frac{1}{2} \theta$  yaitu  $\tan \frac{1}{2} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$
14. Rumus perkalian sinus dan kosinus adalah  $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)$
15. Rumus perkalian kosinus dan sinus adalah  $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)$
16. Rumus perkalian kosinus dan kosinus yaitu  $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)$
17. Rumus perkalian sinus dan sinus adalah  $2 \sin \alpha \sin \beta = - \{ \cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta) \}$
18. Jumlah dan selisih pada sinus dan kosinus dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian dengan pola sebagai berikut.
  - a. Jumlah atau selisih sinus dinyatakan sebagai perkalian sinus dengan kosinus atau perkalian kosinus dengan sinus
  - b. Jumlah atau selisih kosinus dinyatakan sebagai perkalian kosinus dengan kosinus atau perkalian sinus dengan sinus.

## D. Tugas

### Kerjakan soal-soal berikut

1. Tanpa menggunakan tabel trigonometri atau kalkulator, hitunglah nilai eksak dari
  - a.  $\tan 15^\circ$

- b.  $\sin 75^\circ$
  - c.  $\cos 345^\circ$
  - d.  $\sin 105^\circ$
2. Diketahui  $\alpha$  adalah sudut lancip dan  $\sin \alpha = 4/5$ . Hitunglah nilai dari
- a.  $\sin 2\alpha$
  - b.  $\cos 2\alpha$
  - c.  $\tan 2\alpha$
3. tunjukkan bahwa nilai eksak dari
- a.  $\tan (255^\circ) = (\sqrt{3} + 2)$
  - b.  $\sin (195^\circ) = -\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$
  - c.  $\cos (105^\circ) = \frac{1}{4}\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})$
4. diketahui  $A + B + C = \pi$ , maka tunjukkan bahwa  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$
5. nyatakan perbandingan trigonometri berikut dalam sudut  $4\alpha$ .
- a.  $\sin 2\alpha$
  - b.  $\cos 2\alpha$
  - c.  $\tan 2\alpha$
6. nyatakan bentuk-bentuk berikut ini sebagai jumlah atau selisih sinus.
- a.  $2 \sin x \cos y$
  - b.  $2 \sin 2a \cos b$
  - c.  $2 \sin 40^\circ \cos 9^\circ$
  - d.  $2 \cos x \sin y$
  - e.  $2 \cos a \sin 2b$
  - f.  $2 \cos 72^\circ \sin 26^\circ$
7. Tunjukkan bahwa:
- a.  $2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 1 + \sin 2\alpha$
  - b.  $2 \cos (x^\circ + 105^\circ) \sin (x^\circ + 75^\circ) = -(\frac{1}{2} + \sin 2x^\circ)$
8. Tunjukkan bahwa:
- a.  $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = \cos 10^\circ$

- b.  $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{6}$
- c.  $\cos 465^\circ + \cos 165^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{6}$
- 9. Buktikan setiap identitas trigonometri berikut.
  - a.  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$
  - b.  $(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) = \cos 2\alpha$
  - c.  $2 \sin^2 x = \sin 2x \tan x$
- 10. Buktikan bahwa
  - a.  $\sin 4x = 4 \sin x \cos x - 8 \sin^3 x \cos x$
  - b.  $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

## E. Penilaian

**Tes Essay:** Kerjakan soal-soal berikut

1. Tanpa menggunakan tabel trigonometri atau kalkulator, hitunglah nilai eksak dari
  - a.  $\tan 150^\circ$
  - b.  $\sin 120^\circ$
2. Diketahui  $\alpha$  adalah sudut lancip dan  $\sin \alpha = 5/12$ . Hitunglah nilai dari
  - a.  $\cos 1/2\alpha$
  - b.  $\tan 2\alpha$
3. tunjukkan bahwa nilai eksak dari
  - a.  $\tan (255^\circ) = (\sqrt{3} + 2)$
  - b.  $\sin (195^\circ) = -\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$
4. diketahui  $A + B + C = \pi$ , maka tunjukkan bahwa  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$
5. nyatakan perbandingan trigonometri berikut dalam sudut  $4\alpha$ .
  - a.  $\sin 2\alpha$
  - b.  $\cos 2\alpha$
  - c.  $\tan 2\alpha$
6. nyatakan bentuk-bentuk berikut ini sebagai jumlah atau selisih sinus.

- a.  $2 \sin x \cos y$
- b.  $2 \cos 72^\circ \sin 26^\circ$
- 7. Tunjukkan bahwa:
  - a.  $2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) = 1 + \sin 2\alpha$
  - b.  $2 \cos (x^\circ + 105^\circ) \sin (x^\circ + 75^\circ) = - \left( \frac{1}{2} + \sin 2x^\circ \right)$
- 8. Tunjukkan bahwa:
  - a.  $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = \cos 10^\circ$
  - b.  $\cos 465^\circ + \cos 165^\circ = - \frac{1}{2} \sqrt{6}$
- 9. Buktikan setiap identitas trigonometri berikut.
  - a.  $(\cos \alpha - \sin \alpha) (\cos \alpha + \sin \alpha) = \cos 2\alpha$
  - b.  $2 \sin^2 x = \sin 2x \tan x$
- 10. Buktikan bahwa
  - a.  $\sin 4x = 4 \sin x \cos x - 8 \sin^3 x \cos x$
  - b.  $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

## F. Rujukan

- Corliss, J.J., Berglund, V.W. 1958. *Plane Trigonometri*. Boston: The Riverside Press Cambridge.
- Budiarta, M. T. 2004. *Trigonometri*. Bagian Proyek Pengembangan Kurikulum Direktorat Pendidikan Menengah Kejuruan Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah Departemen Pendidikan Nasional.
- George B. Thomas JR dan Ross L. Finney. 1993. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Penerbit: Airlangga.
- Gunawan, J. 1996. *100 Soal dan Pembahasan Trigonometri*. Grasindo, Jakarta.
- John A. Graham and Robert H. Sorgenfrey. 1986. *Trigonometry with application*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Kariadinata, R. 2013. *Trigonometri Dasar*. Penerbit: Pustaka Setia Bandung.

- Larson and Hostetler. 2007. *Algebra and Trigonometry. Seventh Edition*. Boston, New York.
- Noormandiri, B.K dan Scipto, E. 2000. *Buku Pelajaran Matematika untuk SMU Jilid 2 Kelas 2 Kurikulum 1994, Suplemen GBPP 1999*. Penertbit: Airlangga
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 1. Penertbit: Erlangga.
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 2. Penertbit: Erlangga
- Wiroidikromo, S. 2006. *Matematika Jilid 2 IPA untuk Kelas XI*. Penerbit: Erlangga
- Zen Fathurin, 2012. *Trigonometri*. Penerbit: Alfabeta Bandung.

## **BAB III**

### **PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN TRIGONOMETRI**

#### **A. Pendahuluan**

Persamaan trigonometri merupakan konsep tentang persamaan pada trigonometri ditandai dengan “ $=$ ”. Sementara pertidaksamaan trigonometri konsep tentang persamaan pada trigonometri ditandai dengan “ $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ”. Pada bab ini, lebih dituntut untuk mencari nilai himpunan penyelesaian yang memenuhi persamaan trigonometri maupun pertidaksamaan trigonometri.

Dalam bahan ajar BAB III Persamaan dan Pertidaksamaan Trigonometri, anda akan mempelajari persamaan dan pertidaksamaan trigonometri yang mencakup materi-materi bahasan seperti:

- a. Persamaan trigonometri
- b. Pertidaksamaan trigonometri

Setelah mempelajari bahan ajar BAB III Persamaan dan Pertidaksamaan Trigonometri ini anda diharapkan dapat:

- a. Memahami persamaan trigonometri
- b. Memahami pertidaksamaan trigonometri



Sebagai penjabaran dari tujuan di atas, setelah mempelajari bahan ajar BAB III Persamaan dan Pertidaksamaan Trigonometri, anda diharapkan dapat:

- a. Menentukan himpunan penyelesaian persamaan sinus
- b. Menentukan himpunan penyelesaian persamaan kosinus
- c. Menentukan himpunan penyelesaian persamaan tangen
- d. Menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan sinus
- e. Menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan kosinus
- f. Menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan tangen

Agar anda berhasil dengan baik dalam mempelajari bahan ajar ini, ikutilah petunjuk belajar berikut:

- a. Bacalah dengan cermat pendahuluan bahan ajar ini sehingga anda memahami tujuan mempelajari bahan ajar ini dan bagaimana mempelajarinya
- b. Bacalah bagian demi bagian materi dalam bahan ajar ini, tandailah kata-kata penting yang merupakan kata kunci. Ucapkan pengertian kata-kata kunci tersebut dengan kalimat anda sendiri.
- c. Pahamiilah pengertian demi pengertian dari isi bahan ajar ini dengan mempelajari contoh-contohnya, dengan pemahaamn sendiri, tukar pikiran (diskusi) dengan awan mahasiswa atau dengan tutor.
- d. Buatlah ringkasan isi bahan ajar bab 3 ini dengan kata-kata sendiri
- e. Kerjakan soal-soal tugas dalam bahan ajar bab 3.
- f. Kerjakan soal-soal dalam penilaian jika ragu-ragu menjawabnya lihatlah kembali pada uraian materi yang berkenaan dengan soal tersebut

## B. Uraian Materi

### 1. Persamaan Trigonometri

Menyelesaikan persamaan trigonometri bentuk  $\sin x = a$ ,  $\cos x = b$ , dan  $\tan x = c$ . Misalkan:  $\sin x = a$ ; andaikan  $a$  suatu bilangan real positif di mana  $0 < a < 1$ , maka sudut  $x$  yang memenuhi ada di kuadran I dan II atau perputarannya.

$$\sin x = a$$

$$\sin x = \sin \alpha \text{ sehingga } x = \alpha.$$

$$\text{Di mana } \begin{aligned} x_1 &= \alpha + k \cdot 360^\circ, \text{ dengan } k \text{ bilangan bulat} \\ x_2 &= (180 - \alpha) + k \cdot 360^\circ. \end{aligned}$$

#### Contoh 3.1

Tentukan penyelesaian dari persamaan berikut

- $\sin x = \frac{1}{2}$  ; untuk  $0 < x < 360^\circ$ .
- $\sin 2x = \frac{1}{2}$  ; untuk  $0 < x < 360^\circ$ .

#### Jawab

a.  $\sin x = \frac{1}{2}$

$$\sin x = \sin 30$$

Sehingga:

$$x_1 = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x_2 = (180^\circ - 30^\circ) + k \cdot 360^\circ$$

$$k = 0 \text{ maka } x_1 = 30^\circ$$

$$x_2 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$k = 1 \text{ maka } x_1 = 390^\circ \text{ (TM)}$$

$$k = 0 \text{ maka } x_2 = 150^\circ$$

Catat: TM = tidak memenuhi  
(TM)

$$k = 1 \text{ maka } x_2 = 510^\circ$$

Jadi penyelesaiannya adalah  $\{ 30^\circ, 150^\circ \}$ .

- b. Penyelesaian soal  $\sin 2x = \frac{1}{2}$  diserahkan kepada pembaca.

Misalkan:  $\cos x = b$ ; andaikan  $b$  suatu bilangan real positif di mana  $0 < b < 1$ , maka sudut  $x$  yang memenuhi ada di kuadran I dan IV atau perputarannya.

$$\cos x = b$$

$$\cos x = \cos \beta \text{ sehingga } x = \beta.$$

Di mana  $x_1 = \beta + k \cdot 360^\circ$ , dengan  $k$  bilangan bulat

$$x_2 = -\beta + k \cdot 360^\circ.$$

### Contoh 3.2

Tentukan penyelesaian dari persamaan berikut ini

a.  $\cos 2x = \frac{1}{2}$  ; untuk  $0 < x < 360^\circ$ .

b.  $\cos x = \frac{1}{2}$  ; untuk  $0 < x < 360^\circ$

### Jawab

a.  $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$$\cos 2x = \cos 60^\circ \text{ . diperoleh}$$

Sehingga:

$$2x_1 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$k = 0 \text{ maka } x_1 = 60^\circ/2 = 30^\circ$$

$$k = 1 \text{ maka } x_1 = 420^\circ/2 = 210^\circ$$

$$k = 2 \text{ maka } x_1 = 780^\circ/2 = 390^\circ \text{ (TM)}$$

$$2x_2 = (-60^\circ) + k \cdot 360^\circ$$

$$2x_2 = -60^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$k = 0 \text{ maka } x_2 = -60^\circ/2 = -30^\circ$$

$$k = 1 \text{ maka } x_2 = 300^\circ/2 = 150^\circ$$

$$k = 2 \text{ maka } x_2 = 660^\circ/2 = 330^\circ$$

$$k = 3 \text{ maka } x_2 = 1020^\circ/2 = 510^\circ \text{ (TM)}$$

Catat: TM = tidak memenuhi

Jadi penyelesaiannya adalah  $\{ 30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ \}$ .

b. Penyelesaian soal  $\cos x = \frac{1}{2}$  diserahkan kepada pembaca.

Misalkan:  $\tan x = c$ ; andaikan  $c$  suatu bilangan real positif, maka sudut  $x$  yang berada di kuadran I dan III atau perputarannya.

$$\tan x = c$$

$$\tan x = \tan \delta \text{ sehingga } x = \delta.$$

Di mana  $x_1 = \delta + k \cdot 360^\circ$ , dengan  $k$  bilangan bulat

$$x_2 = (180^\circ + \delta) + k \cdot 360^\circ = \delta + 180^\circ + k \cdot 360^\circ.$$

sehingga penyelesaiannya sama saja dengan  $x = \delta + k \cdot 180^\circ$ .

### Contoh 3.3

Tentukan penyelesaian dari persamaan berikut ini

a.  $\tan x = 1$  ; untuk  $0 < x < 360^\circ$ .

b.  $\tan 2x = 1$  ; untuk  $0 < x < 360^\circ$

### Jawab

a.  $\tan x = 1$

$$\tan x = \tan 45^\circ \text{ . diperoleh}$$

Sehingga:

$$x_1 = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$k = 0 \text{ maka } x_1 = 45^\circ$$

$$k = 1 \text{ maka } x_1 = 225^\circ$$

$$k = 2 \text{ maka } x_1 = 405^\circ \text{ (TM)}$$

jadi penyelesaiannya adalah  $\{ 45^\circ, 225^\circ \}$

b. untuk soal b. bisa dikerjakan sendiri.





Menyelesaikan persamaan trigonometri bentuk  $a \cos x + b \sin x = k$   $\cos (x - \alpha)$ . Pada rumus di depan telah diberikan rumus nilai cosines dari selisih dua sudut yaitu:

$$\cos (x - \alpha) = \cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha$$

Misalkan  $\cos \alpha = a$  dan  $\sin \alpha = b$ , maka  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  sehingga persamaan di atas menjadi

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha) = \cos x \cdot a + \sin x \cdot b$$

$k \cos (x - \alpha) = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$ ; di mana  $k = \sqrt{a^2 + b^2}$   
 dengan  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ; di mana letak sudut  $\alpha$  sebagai berikut.

-   $\alpha$  di kuadran I, jika  $a > 0$  dan  $b > 0$
-   $\alpha$  di kuadran II, jika  $a < 0$  dan  $b > 0$
-   $\alpha$  di kuadran III, jika  $a < 0$  dan  $b < 0$
-   $\alpha$  di kuadran IV, jika  $a > 0$  dan  $b < 0$

Misalkan  $k \cos (x - \alpha) = c$ , maka persamaan di atas menjadi:

$$c = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$$

jadi penyelesaian bentuk  $a \cos x + b \sin x = k \cos (x - \alpha)$  adalah penyelesaian dari  $k \cos (x - \alpha) = c$ .

## 2. Pertidaksamaan Trigonometri

Pertidaksamaan trigonometri adalah suatu pertidaksamaan yang memuat fungsi-fungsi trigonometri dengan peubah sudutnya belum diketahui. Suatu pertidaksamaan trigonometri hanya berlaku untuk satu atau beberapa interval dari peubah yang disebut himpunan penyelesaian pertidaksamaan trigonometri. Pada prinsipnya, untuk menentukan himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan trigonometri hampir sama, seperti kita menyelesaikan pertidaksamaan linear, diantaranya dengan menggunakan pertolongan garis bilangan.

Penyelesaian pertidaksamaan trigonometri dapat dilakukan dengan salah satu cara berikut ini.

1. Dengan sketsa grafik fungsi trigonometri
2. Dengan garis bilangan

Untuk memahami pertidaksamaan trigonometri, perhatikan contoh berikut ini.

### Contoh 3.4

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut ini untuk  $0 \leq x \leq 360$

a.  $\sin x^\circ \leq \frac{1}{2}$

b.  $\cos 2x^\circ > \frac{1}{2}$

**Jawab**

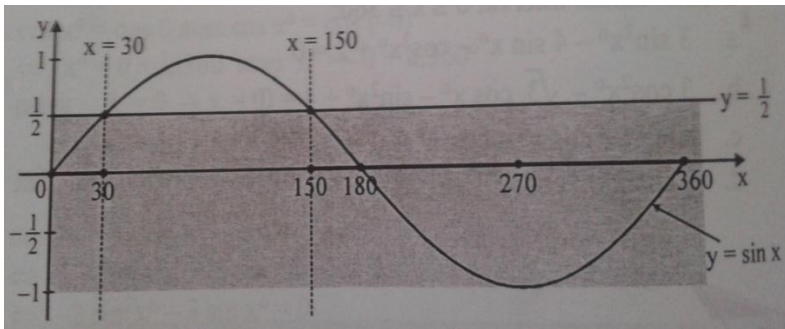
a.  $\sin x^\circ \leq \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin x^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^\circ = 30 + k \cdot 360^\circ \text{ atau } x^\circ = 150 + k \cdot 360^\circ.$$

Untuk  $k = 0 \rightarrow x = 30^\circ$  untuk  $k = 0 \rightarrow x = 150^\circ$

Sekarang, buatlah sketsa grafik  $y = \sin x^\circ$  untuk interval  $0 \leq x \leq 360$ .



Himpunan penyelesaian pertidaksamaan trigonometri  $\sin x^\circ \leq \frac{1}{2}$  untuk  $0 \leq x \leq 360$  adalah  $\{ x \mid 0^\circ \leq x \leq 30^\circ \}$  atau  $\{ x \mid 150^\circ \leq x \leq 360^\circ \}$

**Dengan garis bilangan**

$$\sin x^\circ \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x^\circ - \frac{1}{2} = 0$$

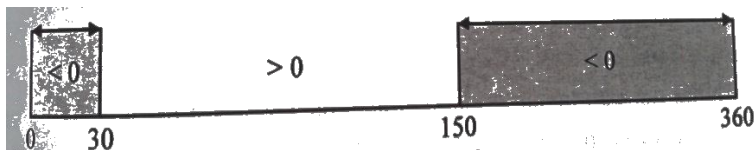
$$\Leftrightarrow \sin x^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^\circ = 30 + k \cdot 360^\circ \text{ atau } x^\circ = 150 + k \cdot 360^\circ.$$

Untuk  $k = 0 \rightarrow x = 30^\circ$  untuk  $k = 0 \rightarrow x = 150^\circ$

Dalam interval  $0 \leq x \leq 360$  nilai nol dicapai untuk  $x = 30$  dan  $x = 150$ .

Nilai nol dan tanda-tanda sekitar ( $\sin x^\circ = \frac{1}{2}$ ) dilukiska pada garis bilangan dalam interval  $0 \leq x \leq 360$ .



Himpunan penyelesaian pertidaksamaan trigonometri  $\sin x^\circ \leq \frac{1}{2}$  untuk  $0 \leq x \leq 360$  adalah  $\{ x \mid 0^\circ \leq x \leq 30^\circ \}$  atau  $\{ x \mid 150^\circ \leq x \leq 360^\circ \}$

b.  $\cos 2x > \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos 2x^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^\circ = 60 + k \cdot 360^\circ \text{ atau } 2x^\circ = 300 + k \cdot 360^\circ.$$

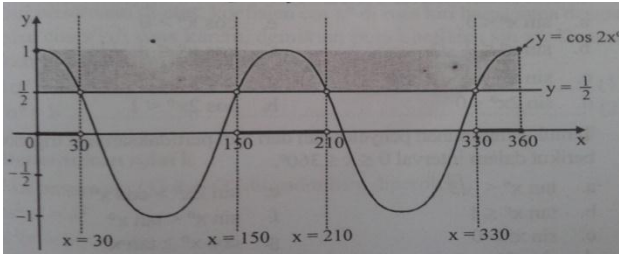
$$\Leftrightarrow x^\circ = 30^\circ + k \cdot 180^\circ \text{ atau } x^\circ = 150^\circ + k \cdot 180^\circ$$

Untuk  $k = 0 \rightarrow x = 30^\circ$  untuk  $k = 0 \rightarrow x = 150^\circ$

$k = 1 \rightarrow x = 210^\circ$  untuk  $k = 1 \rightarrow x = 330^\circ$

jadi penyelesaian persamaan  $\cos 2x^\circ = \frac{1}{2}$  dalam interval  $0 \leq x \leq 360$  adalah  $x = 30^\circ$ ,  $x = 150^\circ$ , dan  $x = 330^\circ$ .

Sekarang, buatlah sketsa grafik  $y = \cos 2x^\circ$  untuk interval  $0 \leq x \leq 360$



Jadi himpunan penyelesaian pertidaksamaan trigonometri  $\cos 2x > \frac{1}{2}$

Untuk  $0 \leq x \leq 360$  adalah  $\{ x \mid 0^\circ \leq x \leq 30^\circ \}$  atau  $\{ x \mid 150^\circ \leq x \leq 210^\circ \}$  atau  $\{ x \mid 330^\circ \leq x \leq 360^\circ \}$ .

***Dengan garis bilangan***

$$\cos 2x > \frac{1}{2}$$

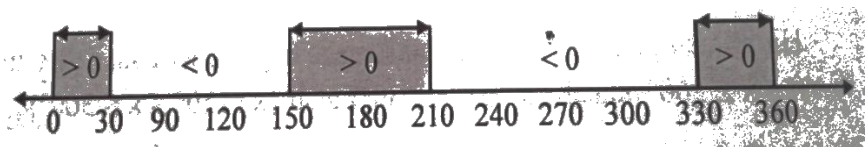
$$\Leftrightarrow \cos 2x - \frac{1}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

Dalam interval  $0 \leq x \leq 360$  nilai nol dicapai untuk  $x = 30$  dan  $x = 150^\circ$ ,  $x = 210^\circ$  dan  $x = 330^\circ$ .

Nilai nol dan tanda-tanda sekitar  $(\cos 2x - \frac{1}{2})$  dilukiska pada garis bilangan dalam interval  $0 \leq x \leq 360$ .



Jadi himpunan penyelesaian pertidaksamaan trigonometri  $\cos 2x > \frac{1}{2}$



Untuk  $0 \leq x \leq 360$  adalah  $\{ x \mid 0^\circ \leq x \leq 30^\circ \}$  atau  $\{ x \mid 150^\circ \leq x \leq 210^\circ \}$  atau  $\{ x \mid 330^\circ \leq x \leq 360^\circ \}$ .

### C. Rangkuman

1. Untuk persamaan kosinus dan sinus  
 $\sin x = \sin \alpha$  sehingga  $x = \alpha$ .  
Di mana  $x_1 = \alpha + k \cdot 360^\circ$ , dengan  $k$  bilangan bulat  
 $x_2 = (180 - \alpha) + k \cdot 360^\circ$ .  
 $\cos x = \cos \beta$  sehingga  $x = \beta$ .  
Di mana  $x_1 = \beta + k \cdot 360^\circ$ , dengan  $k$  bilangan bulat  
 $x_2 = -\beta + k \cdot 360^\circ$ .
2. Untuk persamaan tangen  
 $\tan x = \tan \delta$  sehingga  $x = \delta$ .  
Di mana  $x_1 = \delta + k \cdot 360^\circ$ , dengan  $k$  bilangan bulat  
 $x_2 = (180^\circ + \delta) + k \cdot 360^\circ = \delta + 180^\circ + k \cdot 360^\circ$ .  
sehingga penyelesaiannya sama saja dengan  $x = \delta + k \cdot 180^\circ$ .
3. pertidaksamaan trigonometri dapat dilakukan dengan salah satu cara berikut ini.
  - a. Dengan sketsa grafik fungsi trigonometri
  - b. Dengan garis bilangan

### D. Tugas

#### Kerjakan soal-soal berikut

1. Tentukan nilai  $x$  dari persamaan berikut
  - a.  $\sin 2x = \frac{1}{2}$ ,  $-360 < x < 360$
  - b.  $\cos (2x - 50) = 1$ ,  $-360 < x < 360$
  - c.  $\tan 3x = 0$ ,  $-180 < x < 180$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan trigonometri berikut dengan interval  $0 \leq x \leq 360$ 
  - a.  $\sin x^\circ < 0$
  - b.  $\sin x^\circ \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}$
  - c.  $\cos x^\circ + \frac{1}{2}\sqrt{2} > 0$
  - d.  $\cos 2x^\circ \geq 1$

### E. Penilaian

**Tes Essay:** Kerjakan soal-soal berikut

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri berikut dalam interval  $0 \leq x \leq 360^\circ$ 
  - a.  $\sin 4x + \sin 2x = 0$
  - b.  $\cos 4x + \cos 5x = 0$
  - c.  $\sin (x + 50) - \sin (x - 10) = \frac{1}{2}$
  - d.  $\cos (x + 110) - \cos (x - 70) = -\sqrt{3}$
  - e.  $4 \sin^2 x - 3 = 0$
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan trigonometri berikut dalam interval  $0 \leq x \leq 360^\circ$ 
  - a.  $\sin 2x^\circ < 0$
  - b.  $\cos 2x^\circ \geq \cos x^\circ$
  - c.  $\cos x^\circ \geq \tan x^\circ$
  - d.  $\sin 2x^\circ > \cos x^\circ$
  - e.  $\sin x^\circ < \tan x^\circ$

### F. Rujukan

Corliss, J.J., Berglund, V.W. 1958. *Plane Trigonometri*. Boston: The Riverside Press Cambridge.

- Budiarta, M. T. 2004. *Trigonometri*. Bagian Proyek Pengembangan Kurikulum Direktorat Pendidikan Menengah Kejuruan Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah Departemen Pendidikan Nasional.
- George B. Thomas JR dan Ross L. Finney. 1993. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Penerbit: Airlangga.
- Gunawan, J. 1996. *100 Soal dan Pembahasan Trigonometri*. Grasindo, Jakarta.
- John A. Graham and Robert H. Sorgenfrey. 1986. *Trigonometry with application*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Kariadinata, R. 2013. *Trigonometri Dasar*. Penerbit: Pustaka Setia Bandung.
- Larson and Hostetler. 2007. *Algebra and Trigonometry. Seventh Edition*. Boston, New York.
- Noormandiri, B.K dan Scipto, E. 2000. *Buku Pelajaran Matematika untuk SMU Jilid 2 Kelas 2 Kurikulum 1994, Suplemen GBPP 1999*. Penerbit: Airlangga
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 1. Penerbit: Erlangga.
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 2. Penerbit: Erlangga
- Wirodikromo, S. 2006. *Matematika Jilid 2 IPA untuk Kelas XI*. Penerbit: Erlangga
- Zen Fathurin, 2012. *Trigonometri*. Penerbit: Alfabeta Bandung.

## **BAB IV**

### **FUNGSI TRIGONOMETRI**

#### **A. Pendahuluan**

Fungsi trigonometri merupakan konsep yang memetakan himpunan sudut ke himpunan bilangan real. Pada bab ini, membahas tentang menggambar grafik pada fungsi trigonometri. Pembahasan fungsi trigonometri, lebih lanjut menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi sinus dan kosinus. Menggambar fungsi trigonometri dapat menggunakan tabel dan lingkaran satuan.

Dalam bahan ajar BAB IV Fungsi Trigonometri, anda akan mempelajari fungsi trigonometri yang mencakup materi-materi bahasan seperti:

- a. Persamaan trigonometri
- b. Pertidaksamaan trigonometri

Setelah mempelajari bahan ajar BAB IV Fungsi Trigonometri ini anda diharapkan dapat:

- a. Memahami fungsi trigonometri sinus, kosinus, kosinus dan tangen
- b. Menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi sinus dan kosinus
- c. Menggambarkan grafik fungsi trigonometri

- d. Memahami invers fungsi trigonometri
- e. Menggunakan aplikasi dalam Maple

Sebagai penjabaran dari tujuan di atas, setelah mempelajari bahan ajar BAB IV Fungsi Trigonometri anda diharapkan dapat:

- a. Memahami fungsi sinus
- b. Memahami fungsi kosinus
- c. Memahami fungsi tangen
- d. Menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi sinus
- e. Menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi kosinus
- f. Menggambar grafik fungsi sinus
- g. Menggambar grafik fungsi kosinus
- h. Menggambar grafik fungsi tangen
- i. Menentukan invers fungsi trigonometri
- j. Menggambar fungsi trigonometri dengan aplikasi Maple

Agar anda berhasil dengan baik dalam mempelajari bahan ajar ini, ikutilah petunjuk belajar berikut:

- a. Bacalah dengan cermat pendahuluan bahan ajar ini sehingga anda memahami tujuan mempelajari bahan ajar ini dan bagaimana mempelajarinya
- b. Bacalah bagian demi bagian materi dalam bahan ajar ini, tandailah kata-kata penting yang merupakan kata kunci. Ucapkan pengertian kata-kata kunci tersebut dengan kalimat anda sendiri.
- c. Pahamiilah pengertian demi pengertian dari isi bahan ajar ini dengan mempelajari contoh-contohnya, dengan pemahaamn sendiri, tukar pikiran (diskusi) dengan awan mahasiswa atau dengan tutor.
- d. Buatlah ringkasan isi bahan ajar bab 4 ini dengan kata-kata sendiri
- e. Kerjakan soal-soal tugas dalam bahan ajar bab 4 ini.

Kerjakan soal-soal dalam penilaian jika ragu-ragu menjawabnya lihatlah kembali pada uraian materi yang berkenaan dengan soal tersebut.

## B. Uraian Materi

### 1. Fungsi Trigonometri Sinus, Kosinus, dan Tangen

Fungsi yang memetakan himpunan sudut  $x^o$  ke himpunan bilangan real  $\sin x^o$  disebut fungsi sinus.

Dilambangkan :  $f : x^o \rightarrow \sin x^o$

*(f memetakan  $x^o$  ke  $\sin x^o$ ).*

Jadi, rumus untuk fungsi sinus adalah  $f(x^o) = \sin x^o$  atau  $f(x) = \sin x$  untuk  $x$  dalam ukuran radian.

Fungsi  $f$  memetakan himpunan sudut  $x^o$  ke himpunan bilangan real  $\cos x^o$  disebut fungsi kosinus.

Dilambangkan :  $f : x^o \rightarrow \cos x^o$

*(f memetakan  $x^o$  ke  $\cos x^o$ ).*

Jadi, rumus untuk fungsi kosinus adalah  $f(x^o) = \cos x^o$  atau  $f(x) = \cos x$  untuk  $x$  dalam ukuran radian.

Fungsi  $f$  memetakan himpunan sudut  $x^o$  ke himpunan bilangan real  $\tan x^o$  disebut fungsi tangen.

Dilambangkan :  $f : x^o \rightarrow \tan x^o$

*(f memetakan  $x^o$  ke  $\tan x^o$ ).*

Jadi, rumus untuk fungsi tangen adalah  $f(x^o) = \tan x^o$  atau  $f(x) = \tan x$  untuk  $x$  dalam ukuran radian.

#### Contoh 4.1

Hitunglah nilai fungsi trigonometri berikut.

a.  $f(x) = \sin x$  , untuk  $x = \frac{\pi}{3}$

b.  $f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$  , untuk  $x = \frac{\pi}{6}$

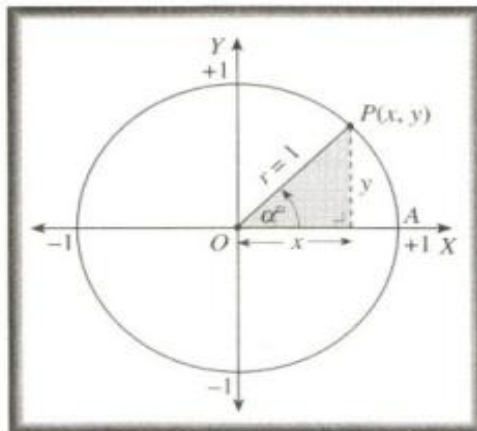
**Jawab :**

$$a. \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{180^\circ}{3} = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$b. \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{180^\circ}{6}\right) = f(30^\circ) = \frac{1 + \sin 30^\circ}{\cos^2 30^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{6} = 2.$$

## 2. Nilai Maksimum Dan Minimum Fungsi Sinus Dan Kosinus

Perubahan nilai fungsi trigonometri (sinus, kosinus, dan tangen) dapat diamati dengan menggunakan lingkaran satuan, yaitu lingkaran trigonometri yang berjari-jari satu satuan



— Gambar 4.1 —

Berdasarkan Gambar 4.1, diperoleh :

$$\sin \alpha^\circ = \frac{y}{r} = \frac{y}{1}$$

$= y$ , nilai  $\sin \alpha^\circ$  ditentukan oleh ordinat  $y$ .

$$\cos \alpha^\circ = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x, \text{ nilai } \cos \alpha^\circ \text{ ditentukan oleh absis } x.$$

$$\tan \alpha^\circ = \frac{y}{x}, \text{ nilai } \tan \alpha^\circ \text{ ditentukan oleh absis } x \text{ dan ordinat } y.$$

Jika titik P berputar (dimulai dari titik A) berlawanan arah jarum jam sepanjang lintasan lingkaran satuan, maka besar sudut  $\alpha^\circ = \angle XOP$  bertambah secara kontinu dari  $0^\circ$  sampai  $360^\circ$ . Dengan pertambahan besar sudut  $\alpha^\circ$ , maka nilai-nilai fungsi trigonometri  $\sin \alpha^\circ$ ,  $\cos \alpha^\circ$ , dan  $\tan \alpha^\circ$  akan mengalami perubahan. Perubahan nilai-nilai fungsi trigonometri diperlihatkan pada Tabel 4.1.

**Tabel 4.1.** Perubahan Nilai-Nilai Fungsi Trigonometri

	Perubahan sudut $\alpha^\circ$			
	$0^\circ$ ke $90^\circ$	$90^\circ$ ke $180^\circ$	$180^\circ$ ke $270^\circ$	$270^\circ$ ke $360^\circ$
$\sin \alpha^\circ$	bertambah dari 0 ke 1	berkurang dari 1 ke 0	berkurang dari 0 ke -1	bertambah dari -1 ke 0
$\cos \alpha^\circ$	berkurang dari 1 ke 0	berkurang dari 0 ke -1	bertambah dari -1 ke 0	bertambah dari 0 ke 1
$\tan \alpha^\circ$	bertambah dari 0 ke positif tak berhingga	bertambah dari negatif tak berhingga ke 0	bertambah dari 0 ke positif tak berhingga	bertambah dari negatif tak berhingga ke 0

Berdasarkan Tabel 4.1, dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Nilai maksimum  $\sin \alpha^\circ$  sama dengan 1, dicapai untuk  $\alpha^\circ = 90^\circ + n \cdot 360^\circ$   
 Nilai minimum  $\sin \alpha^\circ$  sama dengan -1, dicapai untuk  $\alpha^\circ = 270^\circ + n \cdot 360^\circ$   
 Jadi,  $-1 \leq \sin \alpha^\circ \leq 1$  untuk setiap sudut  $\alpha^\circ$ .



2. Nilai maksimum  $\cos \alpha^\circ$  sama dengan 1, dicapai untuk  $\alpha^\circ = n \cdot 360^\circ$   
 Nilai minimum  $\cos \alpha^\circ$  sama dengan  $-1$ , dicapai untuk  $\alpha^\circ = 180^\circ + n \cdot 360^\circ$   
 Jadi,  $-1 \leq \cos \alpha^\circ \leq 1$  untuk setiap sudut  $\alpha^\circ$ .
3. Nilai  $\tan \alpha^\circ$  tidak mempunyai nilai maksimum maupun nilai minimum

#### Contoh 4.2

Carilah nilai minimum dan nilai maksimum dari :  $y = \sin x^\circ - 1$ .

**Jawab :**

$$-1 \leq \sin x^\circ \leq 1$$

$$-1 - 1 \leq \sin x^\circ - 1 \leq 1 - 1$$

$$-2 \leq \sin x^\circ - 1 \leq 0$$

$$-2 \leq y \leq 0$$

$$y_{\text{minimum}} = -2 \text{ dan } y_{\text{maksimum}} = 0$$

Jadi,  $y = \sin x^\circ - 1$  mempunyai nilai minimum  $-2$  dan nilai maksimum  $0$

### 3. Grafik Fungsi Trigonometri

Fungsi-fungsi trigonometri  $f(x) = \sin x^\circ, f(x) = \cos x^\circ$ , dan  $f(x) = \tan x^\circ$  mempunyai persamaan grafik berturut-turut adalah  $y = \sin x^\circ, y = \cos x^\circ$ , dan  $y = \tan x^\circ$ . Grafik fungsi trigonometri itu dapat digambarkan dengan dua cara yaitu

- a. Dengan menggunakan tabel,
- b. Dengan menggunakan lingkaran satuan.

### 3.1. Menggambarkan Grafik Fungsi Trigonometri dengan Menggunakan Tabel

Untuk menggambarkan grafik fungsi trigonometri dengan menggunakan tabel diperlukan langkah-langkah sebagai berikut ;

#### Langkah I :

Buatlah tabel yang menyatakan hubungan antara  $x$  dengan  $y = f(x^\circ)$ . Pilihan nilai sudut  $x$  sehingga nilai  $y = f(x^\circ)$  dengan mudah dapat ditentukan. Sudut  $x$  yang bersifat demikian adalah sudut-sudut khusus dan sudut-sudut batas kuadran.

#### Langkah II :

Titik-titik  $(x, y)$  yang diperoleh pada langkah 1 digambar pada bidang cartecius agar skala pada sumbu  $x$  dan pada sumbu  $y$  sama, maka nilai 360 pada sumbu  $x$  dibuat mendekati nilai 6,28 satuan (mengapa ?).

Misalkan skala pada sumbu  $y$  ditetapkan 1 cm maka nilai 360 pada sumbu  $x$  dibuat kira-kira mendekati nilai 6,28 cm.

#### Langkah III :

Hubungkan titik-titik yang telah digambarkan pada bidang cartecius pada langkah 2 tersebut dengan kurva yang mulus sehingga diperoleh sketsa grafik fungsi trigonometri  $y = f(x^\circ)$

Berikut ini akan dijelaskan cara menggambar sketsa grafik fungsi trigonometri  $y = \sin x^\circ$ ,  $y = \cos x^\circ$ , dan  $y = \tan x^\circ$  dengan menggunakan langkah-langkah yang telah dibicarakan diatas.

1. Grafik fungsi  $y = \sin x^\circ$  ( $0 \leq x \leq 360$ )

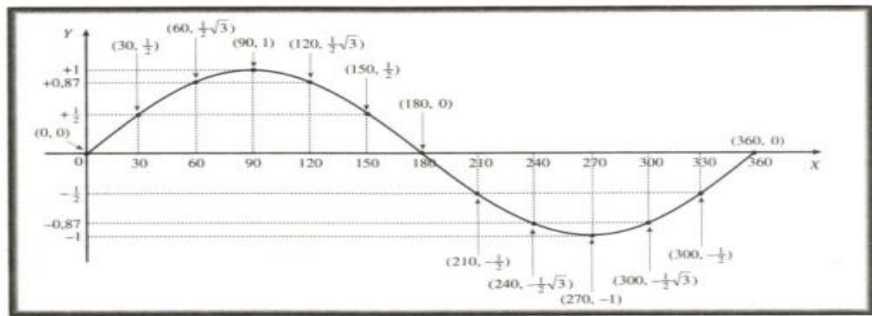
Pilihan sudut-sudut  $x$  ; 0, 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 360 ; kemudian dicari  $y = \sin x^\circ$ . Hubungan antara  $x$  dengan  $y = \sin x^\circ$  dibuat tabel seperti diperlihatkan pada Tabel 4.2.

**Tabel 4.2.** Tabel nilai  $y = \sin x^\circ$

$x$	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
$y = \sin x^\circ$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	0

Catatan ; untuk selanjutnya diadakan pendekatan nilai  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$  dengan 0,87

Titik – titik  $(x,y)$  pada tabel 2 digambarkan pada bidang cartecius, kemudian titik – titik itu dihubungkan dengan kurva yang mulus sehingga diperoleh grafik fungsi  $y = \sin x^\circ$  (perhatikan Gambar 4.2)



Gambar 4.2

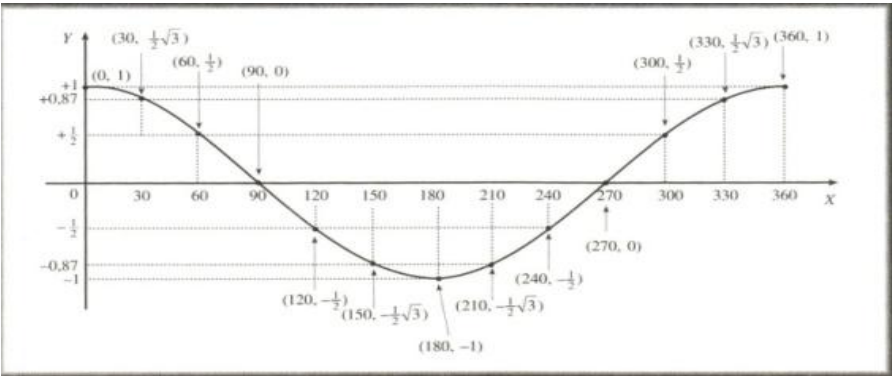
2. Grafik fungsi  $y = \cos x^\circ$  ( $0 \leq x \leq 360$ )

Sudut-sudut yang dipilih seperti pada grafik  $y = \sin x^\circ$ . Hubungan antara  $x$  dengan  $y = \cos x^\circ$  diperlihatkan pada Table 4.3.

**Table 4.3.** Tabel nilai  $y = \cos x^\circ$

$x$	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
$y = \cos x^\circ$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Titik –titik  $(x,y)$  pada tabel 3 digambarkan pada bidang cartecius. Kemudian titik-titik itu dihubungkan dengan kurva yang mulus sehingga diperoleh grafik fungsi  $y = \cos x^o$  (diperhatikan Gambar 4.3).



Gambar 4.3

### 3. Grafik fungsi $y = \tan x^o$ ( $0 \leq x \leq 360$ )

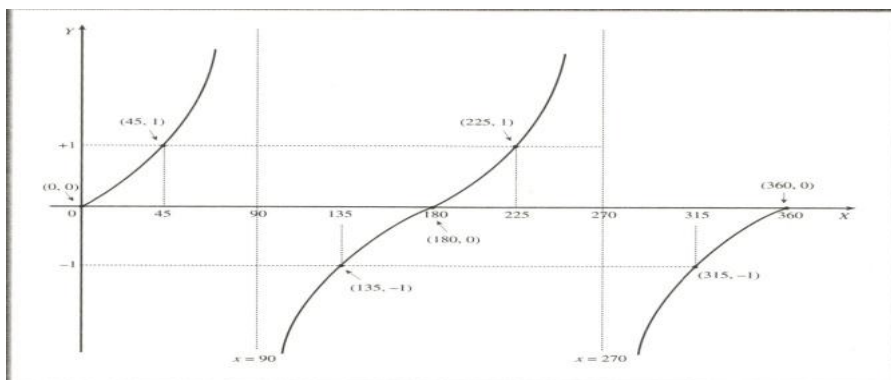
Pilihan sudut-sudut  $x$  ; 0, 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315, 360 ; kemudian dicari nilai  $y = \tan x^o$ . Hubungan antara  $x$  dengan  $y = \tan x^o$  diperlihatkan pada Tabel 4.4.

**Tabel 4.4.** Tabel nilai  $y = \tan x^o$ .

$x$	0	45	90	135	180	225	270	315	360
$y = \tan x^o$	0	1	-	-1	0	1	-	-1	0

Catatan : untuk  $x = 90$  dan  $x = 270$ , nilai  $y = \tan x^o$  tidak didefinisikan.

Titik –titik  $(x, y)$  pada tabel 4 diatas digambarkan pada bidang cartecius. Kemudian titik-titik itu dihubungkan dengan kurva yang mulus sehingga diperoleh grafik fungsi  $y = \tan x^o$  (diperhatikan Gambar 4.4).



Gambar 4.4

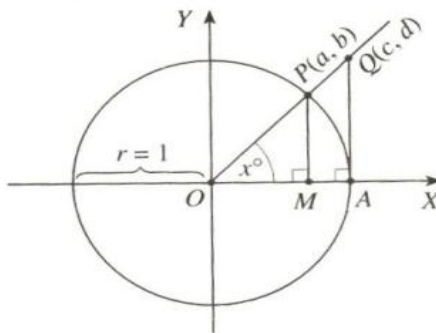
Berdasarkan grafik fungsi sinus  $y = \sin x^o$  pada gambar diatas, grafik fungsi kosinus  $y = \cos x^o$ , dan grafik fungsi tangen  $y = \tan x^o$  dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut .

1. Fungsi-fungsi trigonometri sinus, kosinus dan tangen merupakan fungsi periodik atau fungsi berkala.
  - a. Fungsi sinus  $y = \sin x^o$  dan fungsi kosinus  $y = \cos 180^o$  mempunyai periode  $360^o$
  - b. Fungsi tangen  $y = \tan x^o$  mempunyai periode  $180^o$
2. Fungsi sinus  $y = \sin x^o$  dan fungsi kosinus  $y = \cos x^o$  mempunyai nilai minimum -1 dan nilai maksimum +1, sedangkan fungsi tangen  $y = \tan x^o$  tidak mempunyai nilai minimum maupun nilai maksimum.
3. Khusus untuk fungsi tangen  $y = \tan x^o$  :
  - a. Untuk  $x$  mendekati 90 atau 270 dari arah kanan, nilai  $\tan x^o$  menuju ke negatif tak berhingga.
  - b. Untuk  $x$  mendekati 90 atau 270 dari arah kiri, nilai  $\tan x^o$  menuju ke positif tak berhingga.

c. Garis-garis  $x = 90$  dan  $x = 270$  disebut garis asimtot.  
Fungsi tangen  $y = \tan x^\circ$  dikatakan diskontinu atau tak sinambung di  $x = 90$  dan  $x = 270$

### 3.2. Menggambar Grafik Fungsi Trigonometri dengan Menggunakan Lingkaran Satuan.

Lingkaran satuan adalah lingkaran trigonometri yang berjari-jari satu satuan seperti diperlihatkan pada gambar 5 berikut.



Gambar 4.5

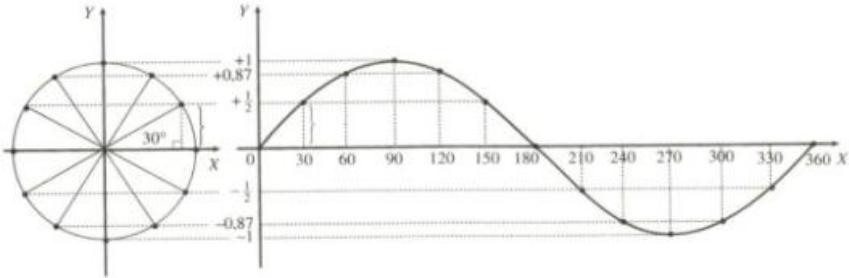
Dalam segitiga OMP, diperoleh ;  $\sin x^\circ = \frac{MP}{OP} = \frac{b}{1} = b$ ,  $b$  merupakan ordinat titik p  $\cos x^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{1} = a$ ,  $a$  merupakan absis titik P.

Dalam segitiga OAQ, didapat :  $\tan x^\circ = \frac{AQ}{OA} = \frac{d}{1} = d$ ,  $d$  merupakan ordinat titik Q.

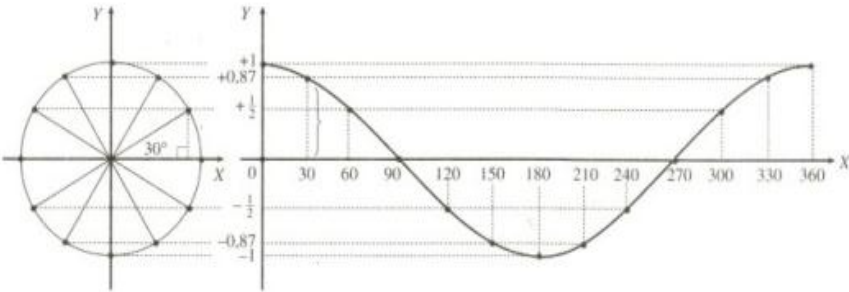
Jadi, pada suatu lingkaran satuan dapat ditetapkan sebagai berikut .

- Nilai fungsi trigonometri  $y = \sin x^\circ$  ditentukan oleh ordinat titik P
- Nilai fungsi trigonometri  $y = \cos x^\circ$  ditentukan oleh absis titik P
- Nilai fungsi trigonometri  $y = \tan x^\circ$  ditentukan oleh ordinat titik Q.

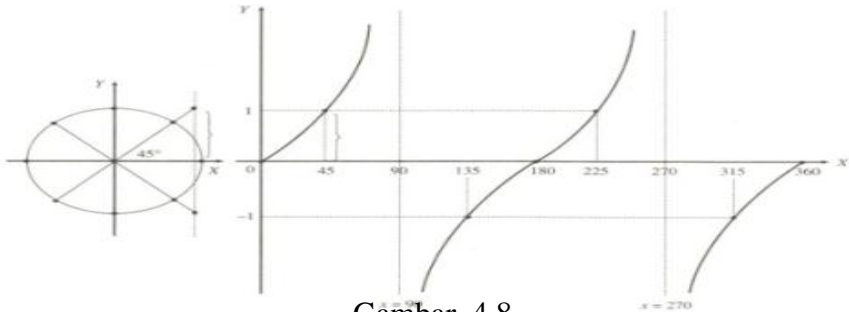
Berdasarkan analisis diatas, grafik trigonometri  $y = \sin x^\circ$ ,  $y = \cos x^\circ$ , dan  $y = \tan x^\circ$  ( $0 \leq x \leq 360$ ) dapat digambarkan dengan menggunakan bantuan lingkaran satuan perhatikan Gambar 4.6, 4.7, dan 4.8.



Gambar 4.6



Gambar 4.7



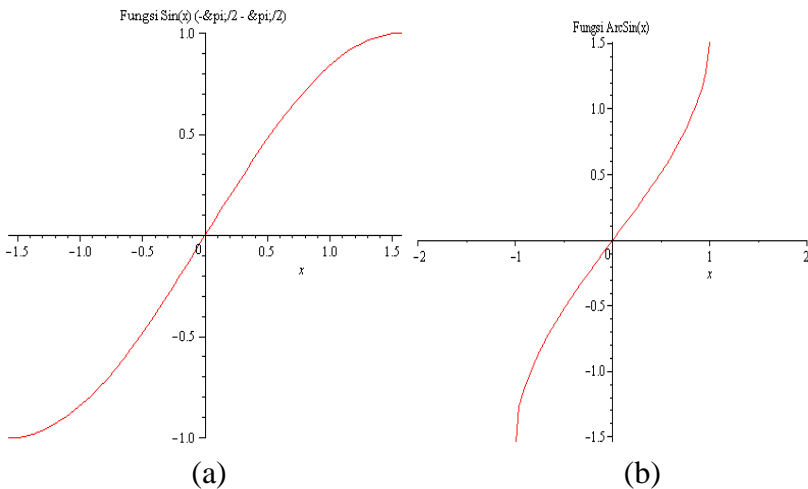
Gambar 4.8

#### 4. Invers Fungsi Trigonometri

Enam fungsi dasar trigonometri (sinus, kosinus, tangen, kosekan, sekan, dan kotangen) telah didefinisikan sebelumnya. Mengenai fungsi inversnya, ada yang rumit, sebab untuk tiap  $y$  dalam daerah nilainya, ada yang tak hingga banyaknya nilai  $x$  yang berpadanan dengan  $y$ . walaupun demikian dapat didefinisikan fungsi invers fungsi trigonometri. Hal ini, dapat dipersempit daerah definisi.

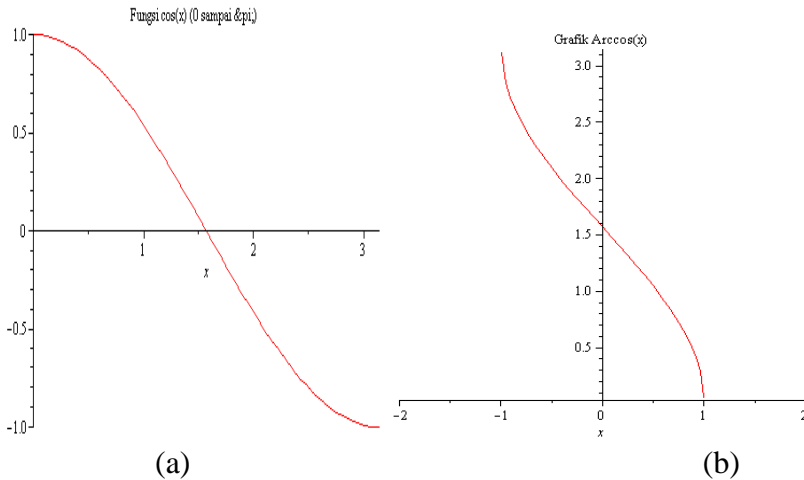
##### Fungsi balikan Sinus dan Kosinus

Dalam kasus sinus dan kosinus, akan dibatasi daerah definisi sedangkan daerah nilainya diambil seluas mungkin, asal fungsi itu memiliki invers. Hal ini dapat dilakukan dengan macam-macam jalan, seperti dapat dilihat pada gambar berikut. Diperlihatkan pula grafik fungsi balikkannya, yang diperoleh (seperti biasanya) dengan mencerminkannya terhadap garis  $y = x$ .



Gambar 4.9 (a) Fungsi Sinus (b) Fungsi Invers Sinus





Gambar 4.10 (a) Fungsi Kosinus (b) Fungsi Invers Kosinus

### Definisi

Untuk memperoleh invers dari sinus dan kosinus, dibatasi daerah asal fungsi-fungsi pada selang  $[-\pi/2, \pi/2]$  dan  $[0, \pi]$  sehingga

$$x = \sin^{-1} y \Leftrightarrow y = \sin x \text{ dan } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = \cos^{-1} y \Leftrightarrow y = \cos x \text{ dan } 0 \leq x \leq \pi$$

Lambang  $\sin^{-1}$  kerap kali ditulis arcsin dan  $\cos^{-1}$  sebagai arcos. Arcsin berarti “busur yang sinusnya adalah” atau sudut yang sinusnya adalah”.

## 5. Aplikasi Dalam Maple

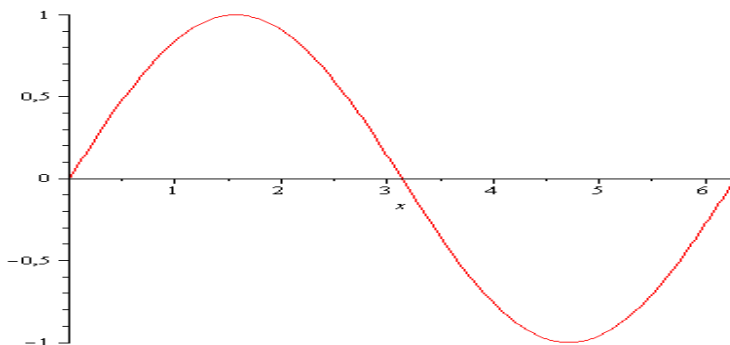
Dalam aplikasi software Maple, nilai  $\pi$  tidak dalam bentuk derajat yang berkisar antara  $0^\circ$  sampai  $360^\circ$  melainkan dalam bentuk

radian sebesar 3,14. Berikut akan ditampilkan sketsa/grafik dari fungsi-fungsi trigonometri.

### 1. Fungsi Sinus

```
> restart;
```

```
> plot(sin(x), x = 0 .. 2 · π);
```

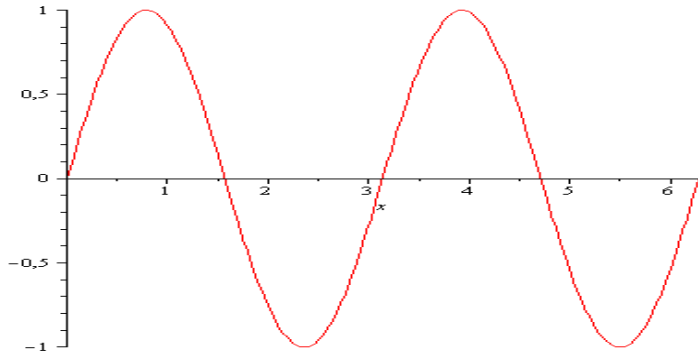


#### Keterangan:

Dari gambar di atas terlihat bahwa untuk fungsi  $f(x) = \sin x$  dengan batasan antara 0 sampai 360 memiliki satu puncak dan satu lembah dan disebut satu periode. Nilai maksimumnya 1 dan nilai minimum -1

```
> restart;
```

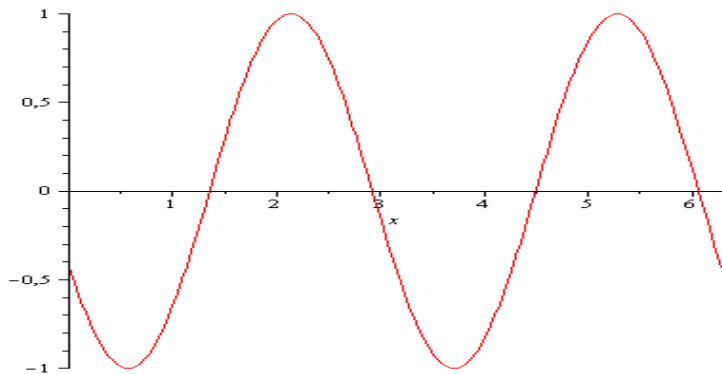
```
> plot(sin(2 · x), x = 0 .. 2 · π);
```



### Keterangan

Dari gambar di atas terlihat bahwa untuk fungsi  $f(x) = \sin 2x$  dengan batasan antara 0 sampai 360 memiliki dua puncak dan dua lembah dan disebut dua periode. Nilai maksimumnya 1 dan nilai minimum -1

```
> restart;
> plot(sin(2· x + 35), x = 0 .. 2· π);
```



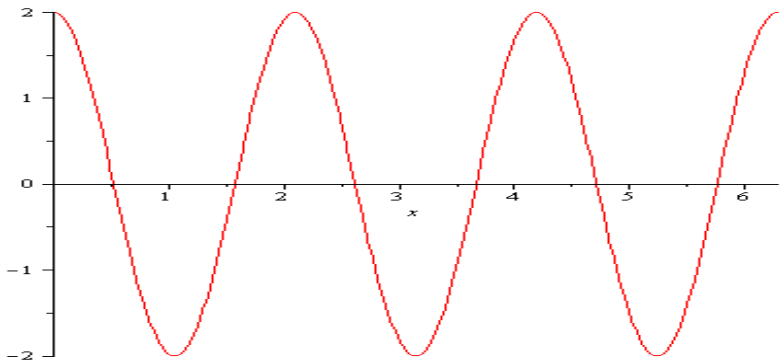
### Keterangan

Dari gambar di atas terlihat bahwa untuk fungsi  $f(x) = \sin (2x + 35)$  dengan batasan antara 0 sampai 360 memiliki

dua puncak dan dua lembah dan disebut dua periode. Nilai maksimumnya 1 dan nilai minimum -1

## 2. Fungsi Cosinus

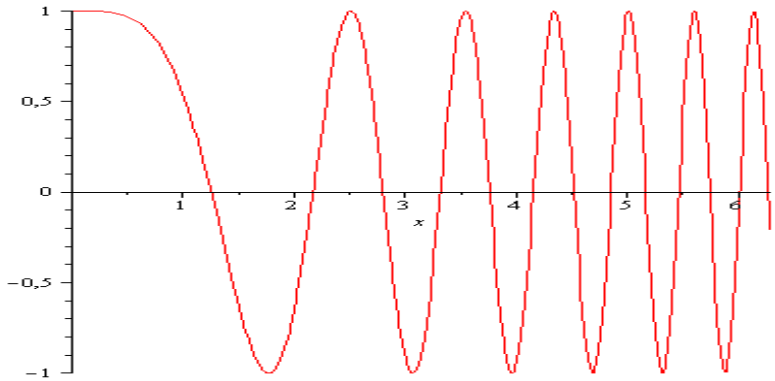
```
> restart;  
> plot(2 · cos(3 · x), x = 0 .. 2 · π);
```



### Keterangan

Dari gambar di atas terlihat bahwa untuk fungsi  $f(x) = 2\cos(3x)$  dengan batasan antara 0 sampai 360 memiliki tiga puncak dan tiga lembah dan disebut dua periode. Nilai maksimumnya 2 dan nilai minimum -2

```
> restart;  
> plot(cos(x^2), x = 0 .. 2 · π);
```



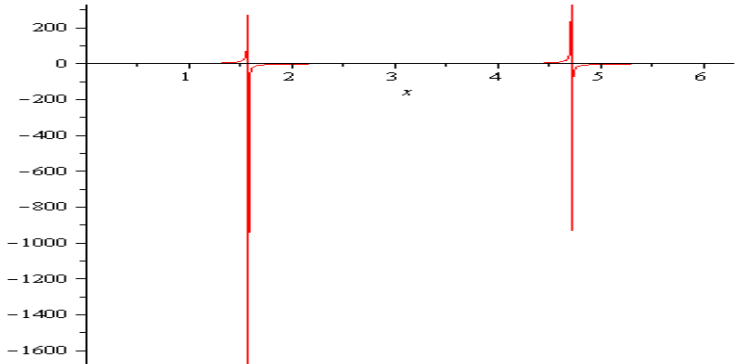
### Keterangan

Dari gambar di atas terlihat bahwa untuk fungsi  $f(x) = \cos(x^2)$  dengan batasan antara 0 sampai 360 memiliki puncak dan lembah lebih dari 1. Nilai maksimumnya 1 dan nilai minimum -1

### 3. Fungsi Tangen

```
>restart;
```

```
>plot(tan(x), x = 0 .. 2 · π);
```



### Keterangan

Dari gambar di atas terlihat bahwa untuk fungsi  $f(x) = \tan x$  dengan batasan antara 0 sampai 360 tidak memiliki puncak dan lembah. Tidak memiliki nilai maksimum dan minimum.

## C. Rangkuman

1. Perubahan nilai-nilai fungsi trigonometri
  - a. Nilai maksimum  $\sin \alpha^\circ$  sama dengan 1, dicapai untuk  $\alpha^\circ = 90^\circ + n \cdot 360^\circ$   
 Nilai minimum  $\sin \alpha^\circ$  sama dengan  $-1$ , dicapai untuk  $\alpha^\circ = 270^\circ + n \cdot 360^\circ$   
 Jadi,  $-1 \leq \sin \alpha^\circ \leq 1$  untuk setiap sudut  $\alpha^\circ$ .
  - b. Nilai maksimum  $\cos \alpha^\circ$  sama dengan 1, dicapai untuk  $\alpha^\circ = n \cdot 360^\circ$   
 Nilai minimum  $\cos \alpha^\circ$  sama dengan  $-1$ , dicapai untuk  $\alpha^\circ = 180^\circ + n \cdot 360^\circ$   
 Jadi,  $-1 \leq \cos \alpha^\circ \leq 1$  untuk setiap sudut  $\alpha^\circ$ .
  - c. Nilai  $\tan \alpha^\circ$  tidak mempunyai nilai maksimum maupun nilai minimum

2. Grafik fungsi trigonometri itu dapat digambarkan dengan dua cara yaitu
  - a. Dengan menggunakan tabel,
  - b. Dengan menggunakan lingkaran satuan.
3. Menggambar grafik fungsi trigonometri dapat menggunakan aplikasi Maple

#### **D. Tugas**

Gambarkan grafik dari fungsi tigonometri berikut

1.  $f(x) = \sin 2x, 0 \leq x \leq 360$
2.  $f(x) = 2 \tan x, 0 \leq x \leq 360$
3.  $f(x) = \cos x - 1, 0 \leq x \leq 360$
4.  $f(x) = 3 \sin (\frac{1}{2} x), 0 \leq x \leq 360$
5. Buatlah fungsi sekan, cosekan dan cotangen. Buatlah grafik dengan menggunakan Maple

#### **E. Penilaian**

**Tes Essay:** Kerjakan soal-soal berikut

1. Gambarlah grafik-grafik fungsi trigonometri berikut dalam interval,  $0 \leq x \leq 360$ 
  - a.  $y = 2 \tan x$
  - b.  $y = -2 \cos x - 1$
  - c.  $y = 2 \sin(x - 60) + 1$
  - d.  $y = 2 \tan x - 2$
  - e.  $y = -2 \cos(x + 45)$
2. Berdasarkan fungsi trgonometri pada soal nomor 1, tentukanlah nilai maksimum dan nilai minimum dari masing-masing grafik tersebut.

## F. Rujukan

- Corliss, J.J., Berglund, V.W. 1958. *Plane Trigonometri*. Boston: The Riverside Press Cambridge.
- Budiarta, M. T. 2004. *Trigonometri*. Bagian Proyek Pengembangan Kurikulum Direktorat Pendidikan Menengah Kejuruan Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah Departemen Pendidikan Nasional.
- George B. Thomas JR dan Ross L. Finney. 1993. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Penerbit: Airlangga.
- Gunawan, J. 1996. *100 Soal dan Pembahasan Trigonometri*. Grasindo, Jakarta.
- John A. Graham and Robert H. Sorgenfrey. 1986. *Trigonometry with application*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Kariadinata, R. 2013. *Trigonometri Dasar*. Penerbit: Pustaka Setia Bandung.
- Larson and Hostetler. 2007. *Algebra and Trigonometry. Seventh Edition*. Boston, New York.
- Noormandiri, B.K dan Scipto, E. 2000. *Buku Pelajaran Matematika untuk SMU Jilid 2 Kelas 2 Kurikulum 1994, Suplemen GBPP 1999*. Penerbit: Airlangga
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 1. Penerbit: Erlangga.
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 2. Penerbit: Erlangga
- Wirodikromo, S. 2006. *Matematika Jilid 2 IPA untuk Kelas XI*. Penerbit: Erlangga
- Zen Fathurin, 2012. *Trigonometri*. Penerbit: Alfabeta Bandung



## **BAB V**

### **LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI**

#### **A. Pendahuluan**

Limit fungsi trigonometri merupakan konsep yang limit dengan menggunakan fungsi trigonometri. Pada bab ini, membahas tentang limit fungsi di suatu titik, yakni melalui pengamatan grafik fungsi dan melalui perhitungan nilai-nilai fungsi di sekitar titik yang ditinjau.

Dalam bahan ajar BAB V Limit Fungsi Trigonometri, anda akan mempelajari limit fungsi trigonometri yang mencakup materi-materi bahasan seperti:

- a. Pengertian limit fungsi
- b. Limit fungsi trigonometri

Setelah mempelajari bahan ajar BAB V Limit Fungsi Trigonometri ini anda diharapkan dapat:

- a. Memahami pengertian limit fungsi
- b. Memahami limit fungsi trigonometri

Sebagai penjabaran dari tujuan di atas, setelah mempelajari bahan ajar BAB V Limit Fungsi Trigonometri anda diharapkan dapat:

- a. Memahami pengertian limit fungsi melalui pengamatan grafik
- b. Memahami pengertian limit fungsi melalui perhitungan nilai-nilai fungsi
- c. Memahami teorema limit
- d. Memahami limit fungsi trigonometri
- e. Menentukan nilai limit fungsi trigonometri

Agar anda berhasil dengan baik dalam mempelajari bahan ajar ini, ikutilah petunjuk belajar berikut:

- a. Bacalah dengan cermat pendahuluan bahan ajar ini sehingga anda memahami tujuan mempelajari bahan ajar ini dan bagaimana mempelajarinya
- b. Bacalah bagian demi bagian materi dalam bahan ajar ini, tandailah kata-kata penting yang merupakan kata kunci. Ucapkan pengertian kata-kata kunci tersebut dengan kalimat anda sendiri.
- c. Pahamiilah pengertian demi pengertian dari isi bahan ajar ini dengan mempelajari contoh-contohnya, dengan pemahaamn sendiri, tukar pikiran (diskusi) dengan awan mahasiswa atau dengan tutor.
- d. Buatlah ringkasan isi bahan ajar bab 5 ini dengan kata-kata sendiri
- e. Kerjakan soal-soal tugas dalam bahan ajar bab 5 ini.
- f. Kerjakan soal-soal dalam penilaian jika ragu-ragu menjawabnya lihatlah kembali pada uraian materi yang berkenaan dengan soal tersebut

## **B. Uraian Materi**

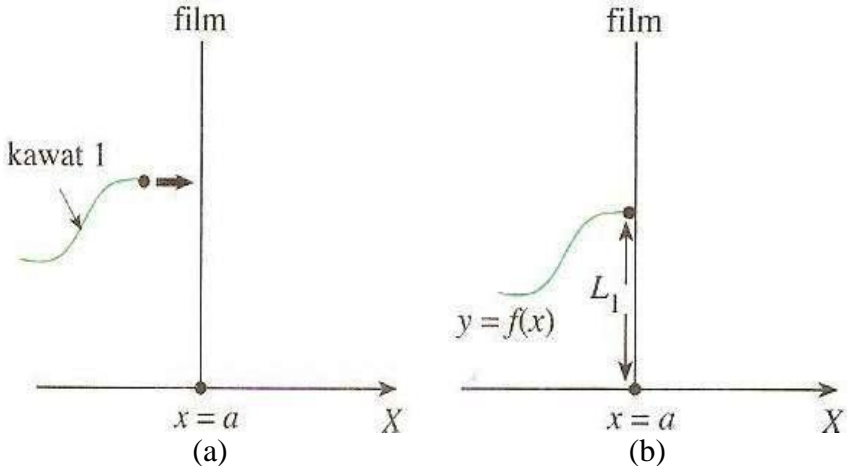
### **1. Pengertian Limit Fungsi**

Ada dua macam cara untuk memahami pengertian limit fungsi di suatu titik, yakni melalui pengamatan grafik fungsi dan melalui perhitungan nilai-nilai fungsi di sekitar titik yang ditinjau.

## 1.1. Pengertian Limit Fungsi Melalui Pengamatan Grafik Fungsi

Pengertian limit fungsi di sebuah titik melalui pengamatan grafik fungsi di sekitar titik itu, dapat dideskripsikan dengan menggunakan alat peraga dua buah potongan kawat dan satu lembar film tipis.

Misalkan kawat 1 dibentuk seperti Gambar 5.1(a). titik ujung kawat yang ditandai dengan noktah • digerakkan ke kanan secara terus menerus sehingga makin dekat dengan film. Dikatakan jarak antara titik ujung kawat dengan film mendekati nol.



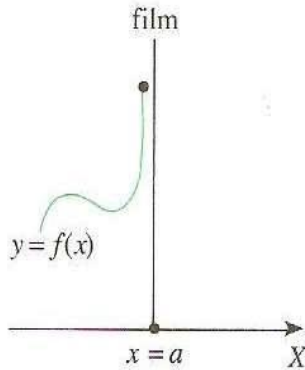
Gambar 5.1

Suatu ketika titik ujung kawat akan menyentuh film (Gambar 5.1(b)), sehingga dapat diperkirakan berapa tinggi titik ujung kawat terhadap sumbu  $X$ . Dalam matematika, perkiraan ketinggian titik ujung kawat terhadap sumbu  $X$  dikatakan *limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  dari arah kiri*. Misalkan ketinggian yang diperkirakan itu adalah  $L_1$ , maka notasi singkat untuk menuliskan pernyataan itu adalah:

$$f(x) \rightarrow L_1 \text{ untuk } x \rightarrow a \text{ atau } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$$

dan dibaca *limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  dari arah kiri sama dengan  $L_1$* <sup>1</sup>.

Apabila kawat 1 dibentuk seperti Gambar 5.2, maka titik ujung kawat tidak pernah menyentuh film. Dalam kasus demikian dikatakan bahwa limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  dari arah kiri tidak ada.

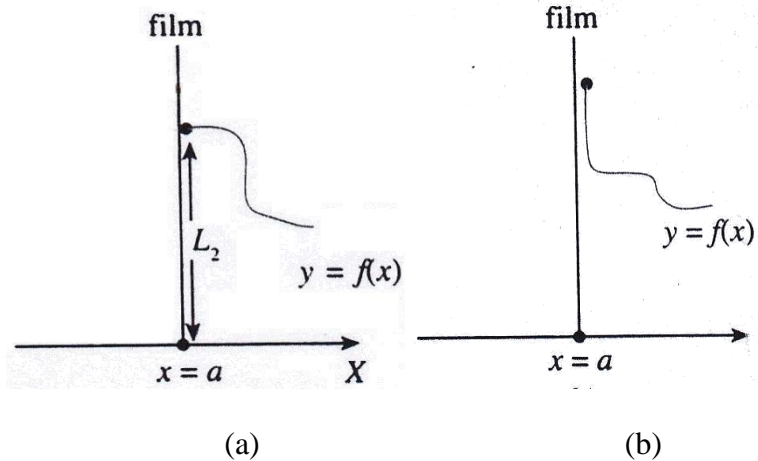


Gambar 5.2

Bagaimana halnya dengan kawat 2 yang berada di sebelah kanan film? Dengan menggunakan bentuk kawat yang berbeda-beda dan kawat digerakkan ke kiri mendekati film, maka berbagai kemungkinan kedudukan titik ujung kawat terhadap film diperlihatkan pada Gambar 5.3 berikut ini.

---

<sup>1</sup> Tanda  $-$  pada  $a^-$  dimaksudkan bahwa arah ketika mendekati  $x = a$  adalah dari arah kiri. Oleh karena itu,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$  disebut **limit kiri**



Gambar 5.3

Sumber: Wirodikromo, S. 2006. *Matematika Jilid 2 IPA untuk Kelas XI*. Penerbit: Erlangga

Untuk situasi pada gambar 5.3 dapat ditulis sebagai berikut

$$f(x) \rightarrow L_2 \text{ untuk } x \rightarrow a^+ \text{ atau } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$$

Dan dibaca sebagai limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  dari arah kanan sama dengan  $L_2$ .

Untuk situasi pada Gambar 5.3(b) dapat ditulis sebagai :

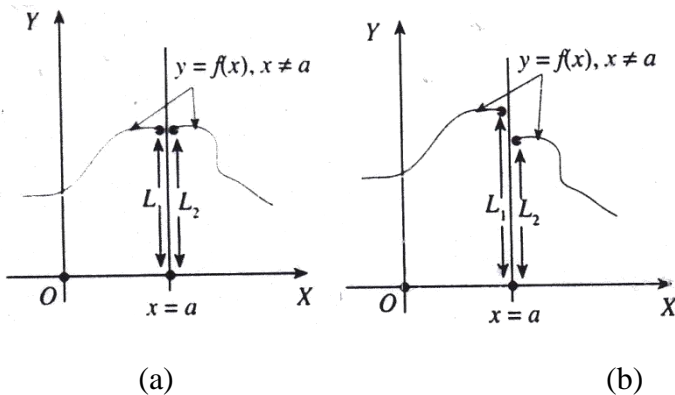
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ tidak ada}$$

<sup>2</sup> Tanda + pada  $a^+$  menunjukkan bahwa arah ketika mendekati  $x = a$  adalah dari arah kanan. Oleh sebab itu,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$  disebut limit kanan

Dari berbagai kemungkinan bentuk fungsi  $y = f(x)$  untuk  $x \neq a$ , dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut.

1. Jika  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ , dan  $L_1 = L_2 = L$ , maka dikatakan bahwa limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  ada dan nilai limit itu sama dengan  $L$ . perhatikan Gambar 5.4(a). pernyataan ini ditulis sebagai:  

$$f(x) \rightarrow L \text{ untuk } x \rightarrow a \text{ atau } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$
2. Jika  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ , tetapi  $L_1 \neq L_2$ , maka dikatakan bahwa limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  tidak ada. Perhatikan Gambar 5.4(b).

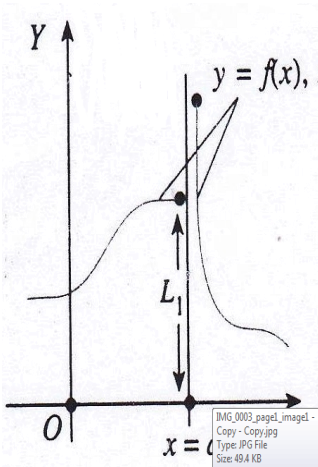


Gambar 5.4

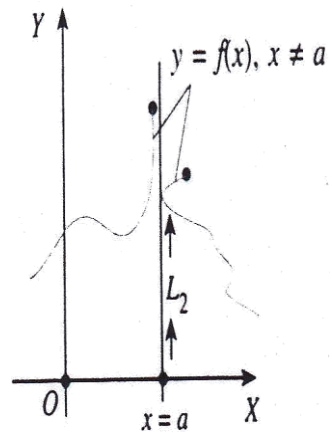
3. Jika  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$  tetapi  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  tidak ada, maka limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  tidak ada. Perhatikan Gambar 5.5
4. Jika  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  tidak ada dan  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ , maka limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  tidak ada. Perhatikan gambar 5.6

5. Jika  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  tidak ada dan  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  tidak ada, maka limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  tidak ada. Perhatikan gambar 5.7

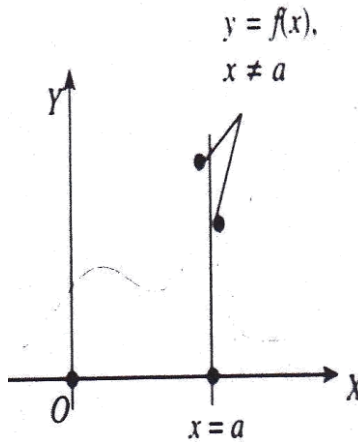
Sumber: Wirodikromo, S. 2006. *Matematika Jilid 2 IPA untuk Kelas XI*. Penerbit: Erlangga



Gambar 5.5



Gambar 5.6



Gambar 5.7

Sumber: Wirodikromo, S. 2006. *Matematika Jilid 2 IPA untuk Kelas XI*. Penerbit: Erlangga

Hasil-hasil tersebut dapat dirangkum seperti diperlihatkan pada Table 5.1.

**Tabel 5.1.** Nilai limit

No	Limit Kiri $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$	Limit Kanan $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ,		$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
1	ada, nilainya $L_1$	ada, nilainya $L_2$	$L_1 = L_2$ $= L$	ada, nilainya $L$
2	ada, nilainya $L_1$	ada, nilainya $L_2$	$L_1 \neq L_2$	tidak ada
3	ada, nilainya $L_1$	tidak ada		tidak ada
4	tidak ada	ada, nilainya $L_2$		tidak ada
5	tidak ada	tidak ada		tidak ada

Dari Table 5.1 diperoleh definisi sebagai berikut.

### Definisi



Suatu fungsi  $y = f(x)$  didefinisikan untuk  $x$  di sekitar  $a$ , maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  jika dan hanya jika  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

### 1.2. Pengertian Limit Fungsi Melalui Perhitungan Nilai-Nilai Fungsi

Fungsi  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  dengan daerah asal  $D_f = \{ x | x \in \mathbb{R} \}$ , memiliki nilai fungsi  $f(x)$ , jika  $x$  mendekati 0. Nilai-nilai fungsi  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  untuk  $x$  yang mendekati 0 dibuat daftar seperti pada Table 5.2.

**Tabel 5.2.** Nilai limit  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$x$	1,0	0,5	0,1	0,01	$\begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \leftarrow \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ 0,01 \end{matrix}$	-0,1	-0,5	-1,0
$\begin{matrix} f(x) \\ = \frac{\sin x}{x} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,84 \\ 14 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,95 \\ 88 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,99 \\ 83 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,99 \\ 99 \end{matrix}$	$\begin{matrix} .... \\ ?... \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,99 \\ 99 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,99 \\ 83 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,95 \\ 88 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,84 \\ 14 \end{matrix}$

Dari table 4.2 terlihat bahwa fungsi  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  mendekati nilai  $L = 1$ , jika  $x$  dmendekati 0, baik dari arah kiri maupun dari arah kanan. Dengan demikian, dapat dituliskan bahwa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dibaca: limit dari  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  sama dengan 1, jika  $x$  mendekati 0

### 1.3. Teorema Limit

Sifat-sifat limit fungsi dapat dirangkum dalam teorema limit sebagai berikut.

1. Jika  $f(x) = k$  maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$  (untuk setiap  $k$  konstan dan  $a$  bilangan real)
2. Jika  $f(x) = x$  maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$  (untuk setiap  $a$  bilangan real)
3. a)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
4. jika  $k$  suatu konstan maka  $\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
5. a)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  dengan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
6.  $\lim_{x \rightarrow a} \{g(x)\}^n = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\}^n$
7.  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  dengan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \geq 0$  untuk  $n$  genap

## 2. Limit Fungsi Trigonometri

Dalam beberapa kasus, penyelesaian limit fungsi trigonometri hamper sama dengan penyelesaian limit fungsi aljabar, misalnya dengan metode substitusi langsung atau dengan metode pemfaktoran. Rumus-rumus trigonometri dan teorema limit yang pernah dipelajari dapat membantu untuk menyelesaikan limit-limit fungsi trigonometri.

### Contoh 5.1.

Hitunglah nilai limit-limit fungsi trigonometri berikut ini

- a.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x$
- b.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x - \sin^2 x)$

**Jawab**

- a.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$  . jadi  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x = \frac{1}{2} \sqrt{2}$
- b.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 0 - \sin^2 0 = 1 - 0 = 1$ .      Jadi  
 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$

### Rumus-Rumus Limit Fungsi Trigonometri

Limit fungsi trigonometri dapat pula diselesaikan dengan menggunakan rumus. Rumus-rumus fungsi trigonometri yang dimaksudkan itu adalah

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

Rumus-rumus limit fungsi trigonometri dasar di atas dapat diperluas. Misalkan u adalah fungsi dari x dan jika  $x \rightarrow 0$  maka  $u \rightarrow 0$ , sehingga rumus-rumus tersebut dapat dituliskan menjadi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{\tan u} = 1$$

### Contoh 5.2

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 7x + 12) \sin(x-3)}{(x^2 - x - 6)^2}$

**Jawab**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 7x + 12) \sin(x-3)}{(x^2 - x - 6)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-3)(x-4) \sin(x-3)}{((x-3)(x+2))^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-4)}{(x+2)^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x-3)}{(x-3)} = \frac{(3-4)}{(3+2)^2} \cdot 1 \\ &= -\frac{1}{25}. \end{aligned}$$

### C. Rangkuman

1. Fungsi  $y = f(x)$  untuk  $x \neq a$ , dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut.
  - a. Jika  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ , dan  $L_1 = L_2 = L$ , maka dikatakan bahwa limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  ada dan nilai limit itu sama dengan  $L$ . Pernyataan ini ditulis sebagai:  
$$f(x) \rightarrow L \text{ untuk } x \rightarrow a \text{ atau } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$
  - b. Jika  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ , tetapi  $L_1 \neq L_2$ , maka dikatakan bahwa limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  tidak ada.
  - c. Jika  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$  tetapi  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  tidak ada, maka limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  tidak ada.
  - d. Jika  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  tidak ada dan  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ , maka limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  tidak ada.
  - e. Jika  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  tidak ada dan  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  tidak ada, maka limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  tidak ada.
2. Suatu fungsi  $y = f(x)$  didefinisikan untuk  $x$  di sekitar  $a$ , maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  jika dan hanya jika  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$
3. Sifat-sifat limit fungsi dapat dirangkum dalam teorema limit sebagai berikut.
  - a. Jika  $f(x) = k$  maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$  (untuk setiap  $k$  konstan dan  $a$  bilangan real)
  - b. Jika  $f(x) = x$  maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$  (untuk setiap  $a$  bilangan real)
  - c. a)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$   
b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
  - d. jika  $k$  suatu konstan maka  $\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

- e. a)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  dengan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$   
 f.  $\lim_{x \rightarrow a} \{g(x)\}^n = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\}^n$

## D. Tugas

### Kerjakan soal-soal berikut

- Hitunglah nilai limit-limit fungsi trigonometri berikut ini.
  - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$
  - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$
  - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2 \left( x - \frac{\pi}{3} \right)}{\left( x - \frac{\pi}{3} \right)}$
  - $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan(6x+12)}{(4x+8)}$
- Hitunglah nilai limit-limit fungsi trigonometri berikut ini
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{4x^2}$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+2) \sin(x-2)}{x^2-4}$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x+6) \tan(x-4)}{2x^2-7x-4}$
- Tentukan nilai dari:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  untuk fungsi-fungsi  $f(x)$  berikut ini.
  - $f(x) = \sin 3x$
  - $f(x) = \cos x$
  - $f(x) = 3 \cos x$
  - $f(x) = 3 \sin x + \cos x$

## E. Penilaian

**Tes Essay:** Kerjakan soal-soal berikut

1. Hitunglah nilai limit-limit fungsi trigonometri berikut ini

a.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$

b.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2 \left( x - \frac{\pi}{3} \right)}{\left( x - \frac{\pi}{3} \right)}$

c.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2 \left( x - \frac{\pi}{3} \right)}{\left( x - \frac{\pi}{3} \right)}$

d.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cos (6x+12)}{(4x+8)}$

2. Hitunglah nilai limit-limit fungsi trigonometri berikut ini

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 3x \cos 2x}{2x^3}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{6}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos^2(x-2)}{3x^2 - 12x + 12}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \tan 2x}$

3. Tentukan nilai dari:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  untuk fungsi-fungsi  $f(x)$  berikut ini.

a.  $f(x) = \cos 2x$

b.  $f(x) = \tan 2x$

c.  $f(x) = 3 \sin x$

d.  $f(x) = 3 \sin x + \cos x$ .

## F. Rujukan

- Corliss, J.J., Berglund, V.W. 1958. *Plane Trigonometri*. Boston: The Riverside Press Cambridge.
- Budiarta, M. T. 2004. *Trigonometri*. Bagian Proyek Pengembangan Kurikulum Direktorat Pendidikan Menengah Kejuruan Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah Departemen Pendidikan Nasional.
- George B. Thomas JR dan Ross L. Finney. 1993. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Penerbit: Airlangga.
- Gunawan, J. 1996. *100 Soal dan Pembahasan Trigonometri*. Grasindo, Jakarta.
- John A. Graham and Robert H. Sorgenfrey. 1986. *Trigonometry with application*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Kariadinata, R. 2013. *Trigonometri Dasar*. Penerbit: Pustaka Setia Bandung.
- Larson and Hostetler. 2007. *Algebra and Trigonometry. Seventh Edition*. Boston, New York.
- Noormandiri, B.K dan Scipto, E. 2000. *Buku Pelajaran Matematika untuk SMU Jilid 2 Kelas 2 Kurikulum 1994, Suplemen GBPP 1999*. Penerbit: Airlangga
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 1. Penerbit: Erlangga.
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 2. Penerbit: Erlangga
- Wirodikromo, S. 2006. *Matematika Jilid 2 IPA untuk Kelas XI*. Penerbit: Erlangga
- Zen Fathurin, 2012. *Trigonometri*. Penerbit: Alfabeta Bandung

**BAB VI**

**TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI**



## A. Pendahuluan

Turunan fungsi trigonometri merupakan konsep yang diajarkan setelah limit fungsi trigonometri. memahami turunan fungsi trigonometri tidak sulit, akan tetapi perlu trik-trik khusus dalam mencari turunannya. Sebelum memahami turunan pada suatu fungsi, perlu memahami laju perubahan rata-rata maupun laju perubahan sesaat. Turunan suatu fungsi memiliki formula yang cukup banyak sehingga perlu memiliki cara yang kreatif untuk dapat mengingat formula yang tepat untuk menyelesaikan masalah turunan fungsi trigonometri.

Dalam bahan ajar BAB VITurunan Fungsi Trigonometri, anda akan mempelajari turunan fungsi trigonometri yang mencakup materi-materi bahasan seperti:

- a. Pengertian turunan fungsi
- b. Rumu-rumus turunan fungsi trigonometri

Setelah mempelajari bahan ajar BAB VITurunan Fungsi Trigonometri ini anda diharapkan dapat:

- a. Memahami pengertian turunan fungsi
- b. Memahami rumus-rumus turunan fungsi trigonometri

Sebagai penjabaran dari tujuan di atas, setelah mempelajari bahan ajar BAB VITurunan Fungsi Trigonometri anda diharapkan dapat:

- a. Memahami laju perubahan rata-rata
- b. Memahami laju perubahan sesaat
- c. Memahami definisi turunan fungsi
- d. Memahami rumus umum turunan fungsi
- e. Memahami rumus-rumus turunan fungsi trigonometri
- f. Memahami turunan komposisi dengan aturan rantai
- g. Menentukan nilai turunan fungsi trigonometri

Agar anda berhasil dengan baik dalam mempelajari bahan ajar ini, ikutilah petunjuk belajar berikut:

- a. Bacalah dengan cermat pendahuluan bahan ajar ini sehingga anda memahami tujuan mempelajari bahan ajar ini dan bagaimana mempelajarinya
- b. Bacalah bagian demi bagian materi dalam bahan ajar ini, tandailah kata-kata penting yang merupakan kata kunci. Ucapkan pengertian kata-kata kunci tersebut dengan kalimat anda sendiri.
- c. Pahamiilah pengertian demi pengertian dari isi bahan ajar ini dengan mempelajari contoh-contohnya, dengan pemahaamn sendiri, tukar pikiran (diskusi) dengan awan mahasiswa atau dengan tutor.
- d. Buatlah ringkasan isi bahan ajar bab 6 ini dengan kata-kata sendiri
- e. Kerjakan soal-soal tugas dalam bahan ajar bab 6 ini.
- f. Kerjakan soal-soal dalam penilaian jika ragu-ragu menjawabnya lihatlah kembali pada uraian materi yang berkenaan dengan soal tersebut.

## **B. Uraian Materi**

Mempelajari turunan fungsi sebenarnya tidaklah terlalu sulit. Bahkan, jika kalian mengetahui trik-trik khusus pada turunan dari suatu fungsi ini, maka kalian akan lebih menyukai dan tertantang ketika menghadapi permasalahan yang berkaitan dengan turunan fungsi. Faktor terpenting adalah ketelitian dalam membaca soal dan menggunakan formula-formula yang ada dengan tepat. Hal ini disebabkan pada turunan fungsi, formula yang digunakan cukup banyak, sehingga kalian harus memiliki cara yang kreatif untuk dapat mengingat formula tersebut lebih tepat.

## 1. Pengertian Turunan Fungsi

Sebagai langkah awal untuk menyelesaikan konsep turunan fungsi, terlebih dahulu akan dibahas konsep laju perubahan nilai fungsi.

### 1.1. Laju Perubahan Nilai Fungsi

Dalam bahasa sehari-hari sering dijumpai ungkapan-ungkapan seperti laju pertumbuhan ekonomi, laju inflasi, laju perkembangan investasi, laju pertumbuhan penduduk, laju pembiakan bakteri, dan lain-lain. Istilah laju dalam bahasa sehari-hari itu dapat dirumuskan dalam bahasa matematika sebagai laju perubahan nilai fungsi. Ada 2 macam laju perubahan nilai fungsi yaitu laju perubahan rata-rata dan laju perubahan sesaat.

#### a. Laju Perubahan Rata-rata

Kecepatan gerak suatu benda dapat ditentukan apabila diketahui letak atau posisi benda sebagai fungsi waktu. Hal ini dapat dilakukan dengan cara mencatat letak benda dari waktu ke waktu secara terus menerus. Sebagai contoh, seorang mahasiswa mengendarai motor dari rumah ke kampus yang jaraknya 20 km. Ia berangkat dari rumah pukul 06.00 dan sampai di sekolah pada pukul 06.30. Berapa kecepatan rata-rata sepeda motornya. Untuk mencari kecepatan rata-rata mahasiswa itu mengendarai motor dari rumah ke kampusnya adalah

$$v_{rata-rata} = \frac{20 \text{ km}}{\frac{1}{2} \text{ jam}} = 40 \text{ km/jam}$$

Perhatikan bahwa kecepatan rata-rata ditentukan sebagai perbandingan antara perubahan jarak terhadap perubahan waktu, ditulis

$$v_{rata-rata} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

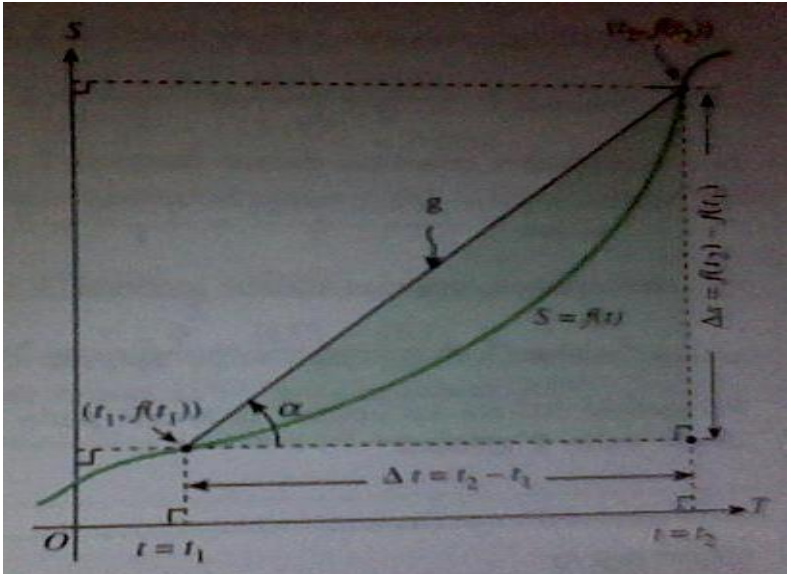
dengan  $\Delta s$  sebagai perubahan jarak dan  $\Delta t$  sebagai perubahan waktu.

Sekarang misalkan letak benda sebagai fungsi waktu diketahui dan dapat dinyatakan sebagai  $s = f(t)$ . ketika  $t = t_1$  benda berada di  $f(t_1)$  dan  $t = t_2$  berada di  $f(t_2)$ , sehingga perubahan jarak  $\Delta s = f(t_2) - f(t_1)$  dan perubahan waktunya  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Dengan demikian, kecepatan rata-rata dalam interval waktu  $t_1 \leq t \leq t_2$  adalah

$$v_{rata-rata} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Tafsiran geometri dari kecepatan rata-rata dapat diperlihatkan melalui gambar . dari gambar tampak bahwa kecepatan rata-rata  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  mempunyai tafsiran geometri sebagai koefisien arah garis lurus  $g$  yang menghubungkan titik  $(t_1, f(t_1))$  dan titik  $(t_2, f(t_2))$ . Koefisien arah garis  $g$  juga disebut gradient atau kemiringan garis  $g$ . nilai koefisien arah garis  $g$  sama dengan  $\tan \alpha$  dengan  $\alpha$  adalah sudut yang dibentuk oleh garis  $g$  dengan sumbu T positif.



Gambar. 6.1

### ***Laju perubahan rata-rata nilai fungsi***

Misalkan diketahui fungsi  $y = f(x)$ . jika  $x$  berubah dari  $x_1$  ke  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) maka nilai fungsi  $f(x)$  berubah dari  $f(x_1)$  menjadi  $f(x_2)$ . Jadi perubahan  $x$  sebesar  $\Delta x = x_2 - x_1$  mengakibatkan perubahan nilai fungsi  $y = f(x)$  sebesar  $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ . Dengan demikian, laju perubahan rata-rata nilai fungsi dapat didefinisikan sebagai berikut.

### **Definisi**

Misalkan diketahui fungsi  $y = f(x)$ . laju perubahan rata-rata fungsi  $y = f(x)$  dalam interval  $x_1 \leq x \leq x_2$  adalah

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

## b. Laju Perubahan Sesaat

Menentukan kecepatan sesaat sebagai limit dari kecepatan rata-rata, secara eksak dapat dirumuskan sebagai berikut.

Misalkan sebuah benda B bergerak sehingga jarak benda  $s$  sebagai fungsi waktu  $t$  ditentukan oleh persamaan:  $s = f(t)$

Pada waktu  $t = t_1$  benda B berada di  $f(t_1)$  dan pada waktu  $t = (t_1 + h)$  benda berada di  $f(t_1 + h)$ , sehingga kecepatan rata-rata gerak benda B dalam interval  $t_1 \leq t \leq t_1 + h$  adalah

$$v_{rata-rata} = \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{(t_1 + h) - t_1} = \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$

Kecepatan sesaat pada waktu  $t = t_1$  diperoleh apabila nilai  $h$  mendekati nol. Dengan demikian, kecepatan sesaat ditentukan dengan konsep limit sebagai berikut.

$$v_{rata-rata} t_1 = \lim_{h \rightarrow 0} v_{rata-rata} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$

## Laju Perubahan Sesaat Nilai Fungsi

Misalkan diketahui fungsi  $y = f(x)$  terdefinisi dalam interval  $a \leq x \leq (a + h)$ , dengan  $h$  konstanta positif.

- Nilai fungsi  $f(x)$  untuk  $x = a$  adalah  $f(a)$ , koordinat titik  $(a, f(a))$  diwakili oleh titik P.
- Nilai fungsi  $f(x)$  untuk  $x = (a + h)$  adalah  $f(a + h)$ , koordinat titik  $((a + h), f(a + h))$  diwakili oleh titik Q.

Grafik fungsi  $y = f(x)$ , titik P dan titik Q digambarkan dalam sebuah bidang cartesius. Laju perubahan rata-rata nilai fungsi  $f(x)$  terhadap  $x$  adalah

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Laju perubahan sesaat nilai fungsi  $f(x)$  terhadap  $x$  pada  $x = a$  diperoleh dari laju perubahan rata-rata nilai fungsi  $y = f(x)$  apabila nilai  $h$  mendekati nol, yang dapat didefinisikan sebagai berikut.

### Definisi

Misalkan diketahui fungsi  $y = f(x)$  yang terdefinisi untuk setiap nilai  $x = a$ . Laju perubahan sesaat nilai fungsi  $f(x)$  pada  $x = a$  ditentukan oleh

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

dengan catatan nilai limit itu ada.

## 6.1.2. Definisi Turunan Fungsi

Turunan fungsi  $y = f(x)$  pada  $x = a$  dapat didefinisikan sebagai berikut.

### Definisi

Misalkan diketahui fungsi  $y = f(x)$  terdefinisi untuk setiap nilai  $x$  disekitar  $x = a$ . jika  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  ada maka bentuk  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  dinamakan turunan dari fungsi  $f(x)$  pada  $x = a$ .

**Catatan:**

1. Jika limit itu ada atau mempunyai nilai, dikatakan fungsi  $f(x)$  diferensiabel (dapat didiferensialkan) pada  $x = a$ . bentuk limit itu selanjutnya dilambangkan dengan  $f'(a)$ . jadi

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2. Lambang  $f'(a)$  (dibaca:  $f$  aksen  $a$ ) disebut turunan atau derivative dari fungsi  $f(x)$  terhadap  $x$  pada  $x = a$ .
3. Misalkan fungsi  $f(x)$  mempunyai turunan  $f'(x)$ . jika  $f'(a)$  tidak terdefinisi maka dikatakan  $f(x)$  tidak diferensiabel pada  $x = a$ .

**1.2. Rumus Umum Turunan Fungsi**

Aturan umum turunan fungsi  $f(x)$  dapat didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi**

Misalkan diketahui fungsi  $y = f(x)$  yang terdefinisikan dalam daerah asal  $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ . turunan fungsi  $f(x)$  terhadap  $x$  ditentukan oleh

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

dengan catatan jika nilai limit ada.

**Bentuk lain notasi turunan**

Turunan fungsi  $y = f(x)$  dilambangkan dengan  $\frac{dy}{dx}$  atau  $\frac{df}{dx}$ , yang dikenal sebagai notasi Leibniz. Dalam ilmu-ilmu terapan



(Fisika, Kimia, Ekonomi, dan lain sebagainya), notasi Leibniz ini masih sering digunakan.

Notasi Leibniz  $\frac{dy}{dx}$  atau  $\frac{df}{dx}$  diperoleh dari hubungan

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dengan manipulasi aljabar sebagai berikut. Misalkan nilai  $h$  pada hubungan di atas diganti dengan  $\Delta x$ , maka hubungan itu menjadi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Untuk menyatakan turunan dari fungsi  $y = f(x)$  dapat digunakan satu diantara notasi-notasi berikut.

$$\frac{dy}{dx} \text{ atau } \frac{df}{dx} \text{ atau } y' \text{ atau } f'(x)$$

## 2. Rumus-Rumus Turunan Fungsi Trigonometri

### 2.1. Turunan Fungsi Sinus

Misalkan diketahui fungsi sinus  $f(x) = \sin x$ . Turunan fungsi sinus:  $f(x) = \sin x$  ditentukan sebagai berikut

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

$$= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

Berdasarkan perhitungan limit fungsi trigonometri, dapat ditunjukkan bahwa:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} = 0 \text{ dan } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Substitusika nilai-nilai tersebut ke  $f'(x)$ , diperoleh

$$f'(x) = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa

$$\text{Jika } f(x) = \sin x \text{ maka } f'(x) = \cos x$$

## 2.2. Turunan Fungsi Cosinus

Misalkan diketahui fungsi sinus  $f(x) = \cos x$ . Turunan fungsi sinus:  $f(x) = \cos x$  ditentukan sebagai berikut

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1)}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x \end{aligned}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa

$$\text{Jika } f(x) = \cos x \text{ maka } f'(x) = -\sin x$$

### 2.3. Turunan Fungsi Tangen

Misalkan diketahui fungsi  $f(x) = \tan x$ . oleh karena  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , maka fungsi  $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  dengan  $\cos x \neq 0$  merupakan hasil bagi fungsi  $f(x) = \sin x$  dengan fungsi  $f(x) = \cos x$

- $u(x) = \sin x$ , maka  $u'(x) = \cos x$
- $v(x) = \cos x$  maka  $v'(x) = -\sin x$

Dengan menggunakan rumus turunan fungsi sinus dan rumus turunan fungsi cosines, turunan fungsi  $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  dapat ditentukan dengan rumus hasil bagi fungsi-fungsi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa

$$\text{Jika } f(x) = \tan x \text{ maka } f'(x) = \sec^2 x$$

### 2.4. Turunan Fungsi-Fungsi Cotangen, Secan, dan Cosecan

Turunan fungsi cotangent:  $f(x) = \cotan x$ , fungsi secan:  $f(x) = \sec x$ , dan fungsi cosecant:  $f(x) = \operatorname{cosec} x$  masing-masing disajikan sebagai berikut:

1. Jika  $f(x) = \cotan x$  maka  $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
2. Jika  $f(x) = \sec x$  maka  $f'(x) = \sec x \cdot \tan x$
3. Jika  $f(x) = \operatorname{cosec} x$  maka  $f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \cotan x$

Konsep-konsep **turunan kedua**, **turunan ketiga**, **turunan keempat**, sampai dengan **turunan ke- $n$**  beserta notasi-notasi yang digunakan pada fungsi aljabar dapat diberlakukan juga pada fungsi trigonometri.

## 2.5. Turunan Fungsi Komposisi dengan Aturan Rantai

Misalkan diketahui fungsi komposisi:  $y = (f \circ g)(x)$ . Fungsi komposisi  $(f \circ g)(x)$  didefinisikan sebagai  $f(g(x))$ , sehingga:

$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$ , dengan  $u = g(x)$  jika mengalami perubahan sesaat sebesar  $\Delta x$  menjadi  $(x + \Delta x)$ , maka

- $u = g(x)$  mengalami perubahan sebesar  $\Delta g(x)$  menjadi  $g(x + \Delta x)$ , sehingga terdapat hubungan  $\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x)$  atau  $g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g(x)$
- $y = f(g(x))$  mengalami perubahan sebesar  $\Delta f(g(x))$  menjadi  $f(g(x) + \Delta x)$  sehingga terdapat hubungan  $\Delta f(g(x)) = f(g(x) + \Delta x) - f(g(x))$  atau  $f(g(x) + \Delta x) = f(g(x)) + \Delta f(g(x))$ .

Secara umum turunan fungsi komposisi dapat ditentukan dengan menggunakan teorema sebagai berikut.

## Teorema Turunan Fungsi Komposisi

Jika fungsi  $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$ , dengan  $u = g(x)$  maka turunan fungsi komposisi  $(f \circ g)(x)$  ditentukan oleh

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Rumus di atas dikenal sebagai dalil rantai atau aturan rantai untuk mencari turunan fungsi komposisi.

### Contoh 6.1

Carilah turunan pertama dari fungsi  $y = \sin^4 x$

**Jawab.**

$$y = \sin^4 x = (\sin x)^4 = u^4, \text{ dengan } u = \sin x$$

$$\frac{dy}{du} = 4u^3 = 4 \sin^3 x \quad \text{dan} \quad \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (4 \sin^3 x) (\cos x) = 4 \sin^3 x \cos x$$

### Perluasan Aturan Rantai

Aturan rantai yang telah dibicarakan sebelumnya digunakan untuk mencari turunan fungsi komposisi yang terbentuk dari dua komponen fungsi. Jika fungsi terbentuk dari tiga komponen fungsi atau lebih maka aturan rantai itu harus diperluas. Perluasan aturan rantai diungkapkan dalam teorema sebagai berikut.

#### **Teorema:**

Misalkan  $y = f(u)$ ,  $u = g(v)$ , dan  $v = h(x)$  membentuk fungsi komposisi  $y = (f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ .

Jika  $h$  mempunyai turunan terhadap  $x$ ,  $g$  mempunyai turunan terhadap  $v$ , dan  $f$  mempunyai turunan terhadap  $u$ , maka turunan  $y = (f \circ g \circ h)(x)$  terhadap  $x$  ditentukan oleh:

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

### Contoh 6.2

Carilah turunan pertama dari fungsi  $y = \cos^6 3x$

**Jawab.**

$y = \cos^6 3x = (\cos(3x))^6 = (\cos v)^6 = u^6$ , dengan  $u = \cos v$   
dan  $v = 3x$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \\ \frac{dy}{du} &= 6 \cos^5 3x, \quad \frac{du}{dv} = -\sin 3x, \quad \frac{dv}{dx} = 3 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = (6 \cos^5 3x)(-\sin 3x)(3) \\ &= -18 \cos^5 3x \sin 3x \end{aligned}$$

## Beberapa Contoh Limit Fungsi Aljabar dan Fungsi Trigonometri

### Contoh 6.3

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ !

**Jawab**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

#### Contoh 6.4

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} !$$

**Jawab**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 5} + 3}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4) \sqrt{x^2 + 5} + 3}{(x^2 + 5) - 9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4) \sqrt{x^2 + 5} + 3}{(x^2 - 4)} \\ &= \sqrt{x^2 + 5} + 3 \\ &= \sqrt{x^2 + 5} + 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = 6$$

#### Contoh 6.5

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5} !$$

**Jawab**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2} \\&= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} \\&= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(\sqrt{x-1}+2)} \\&= \frac{1}{(\sqrt{x-1}+2)} \\&= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$$

### Contoh 6.6

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{x^3+x^2-8}$  !

**Jawab**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{x^3+x^2-8} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{4}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} - \frac{8}{x^3}} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{8}{x^3}} \\&= \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{4}{\infty^3}}{1 + \frac{1}{\infty} - \frac{8}{\infty^3}}\end{aligned}$$



$$= \frac{0 - 0}{1 + 0 - 0} = 0$$

Jadi,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 - 8} = 0$

### Contoh 6.7

Hitunglah

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^2 + 5}{x^2 + 3x + 9} !$$

**Jawab**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^2 + 5}{x^2 + 3x + 9} &= \frac{\frac{2x^3}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{9}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 2 + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2}} \\ &= \frac{2 \cdot (\infty) - 2 + \frac{5}{\infty}}{1 + \frac{3}{\infty} + \frac{9}{\infty}} \\ &= \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Jadi,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^2 + 5}{x^2 + 3x + 9} = \infty$

### Contoh 6.8

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 3x^3 + 5x^2}{2x^4 + 3x^3 + 7x} !$

**Jawab**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 3x^3 + 5x^2}{2x^4 + 3x^3 + 7x} &= \frac{\frac{3x^4}{x^4} - \frac{3x^3}{3x^4} + \frac{5}{x^4}}{\frac{2x^4}{4} + \frac{3x^3}{x^4} + \frac{7x}{x^4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^3}} \\
 &= \frac{3 - \frac{3}{\infty} + \frac{6}{\infty^2}}{2 + \frac{3}{\infty} + \frac{7}{\infty^3}} \\
 &= \frac{3 - 0 + 0}{2 + 0 + 0} \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 3x^3 + 5x^2}{2x^4 + 3x^3 + 7x} = \frac{3}{2}$$

**Contoh 6.9**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 6x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{6x}{\sin 6x} \cdot \frac{3x}{6x} \\
 &= \frac{3}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin 6x} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 6x} = \frac{1}{2}$$

**Contoh 6.10**

Hitung nilai limit fungsi berikut  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2}$  !

**Jawab**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - 2 \sin^2 x) - 1}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^2 x}{x} \right)^2 \\
 &= -2 \cdot (1)^2 \\
 &= -2 \cdot 1 \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

Jadi,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2} = -2$

**Contoh 6.11**

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1) \sin 6x}{x^3 + 3x^2 + 2x}$  !

**Jawab**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1) \sin 6x}{x^3 + 3x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 1) \cdot (x - 1) \sin 6x}{x(x^2 + 3x + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 1) \cdot (x - 1) \sin 6x}{x(x + 2) \cdot (x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 1) \cdot \sin 6x}{x(x + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 1)}{(x + 2)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{x} \\
 &= \frac{(0 - 1)}{(0 + 2)} \cdot 6 \\
 &= \frac{-1}{2} \cdot 6 \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 6$$

$$= -3$$

Jadi,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - ) \sin 6x}{x^3 + 3x^2 + 2x} = -3$

### Contoh 6.12

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x \sin^2 x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{-(\cos x - \sin x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{-1}$$

$$= -\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= -\sqrt{2}$$

Jadi,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x \sin^2 x}{\sin x - \cos x} = -\sqrt{2}$

### Contoh 6.13

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)2(x - 1)}{-2 \sin(x - 1)}$

### Jawab

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)2(x - 1)}{-2 \sin(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)2(x - 1)}{-2 \sin^2(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x + 1)(x - 1)(x - 1)}{-2 \sin(x - 1) \sin(x - 1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+1)}{-2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{\sin(x-1)} \\
&\quad \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{\sin(x-1)} \\
&= \frac{2(x+1)}{-2} \cdot 1 \cdot 1 \\
&= -2
\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)2(x-1)}{-2 \sin(x-1)} = -2$$

### Contoh 6.14

$$\text{Hitunglah } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \sin \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}} !$$

### Jawab

$$\text{Dimisalkan } \frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} = t, \text{ maka } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} - t$$

$$\begin{aligned}
x &= 2 \left( \frac{\pi}{6} - t \right) \\
&= \frac{\pi}{3} - 2t
\end{aligned}$$

$$\text{Untuk } x = \frac{\pi}{3} - 2t \text{ dan } t \rightarrow 0, \text{ maka:}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \sin \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \left( \frac{\pi}{3} - 2t \right) \frac{1}{2}}{t} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{3} 2t + \sin \frac{\pi}{3} \sin 2t - \frac{1}{2}}{t} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin 2t - \frac{1}{2}}{t} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 t) + \frac{1}{2} \sqrt{3} (2 \sin t \cos t) - \frac{1}{2}}{t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} - \sin^2 t + \sqrt{3} \sin t \cos t - \frac{1}{2}}{t} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 t + \sqrt{3} \sin t \cos t}{t} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin t (-\sin t + \sqrt{3} \cos t)}{t} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot (-\sin t + \sqrt{3} \cos t) \\
&= 1 \cdot (-\sin 0 + \sqrt{3} \cdot \cos 0) \\
&= 1 \cdot (0 + \sqrt{3}) \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \sin \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

### C. Rangkuman

1. Misalkan diketahui fungsi  $y = f(x)$ . laju perubahan rata-rata fungsi  $y = f(x)$  dalam interval  $x_1 \leq x \leq x_2$  adalah

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

2. Misalkan diketahui fungsi  $y = f(x)$  yang terdefinisi untuk setiap nilai  $x = a$ . Laju perubahan sesaat nilai fungsi  $f(x)$  pada  $x = a$  ditentukan oleh

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

dengan catatan nilai limit itu ada.

3. Jika fungsi  $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$ , dengan  $u = g(x)$  maka turunan fungsi komposisi  $(f \circ g)(x)$  ditentukan oleh
 
$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \overset{\text{atau}}{\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

## D. Tugas

### Kerjakan soal-soal berikut

1. carilah turunan dari fungsi-fungsi trigonometri berikut
  - a.  $f(x) = 3 \sin x + 5 \cos x$
  - b.  $f(x) = 4 \sin x \cos x$
  - c.  $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$
  - d.  $f(x) = x^2 \cos x + x (\cos x + \sin x)$
2. carilah turunan pertama dari fungsi-fungsi trigonometri berikut ini dengan menggunakan aturan rantai
  - a.  $y = \sin (3x - 5)$
  - b.  $y = 3 \cos (2x + \pi)$
  - c.  $y = (2 + \cos x)^4$
  - d.  $y = \sqrt[5]{\sin^3 x}$
  - e.  $y = 4 - \cos^2 x$
  - f.  $y = \sqrt{\sin^3 (x^2 - x)}$
  - g.  $y = \tan^2 (2x - 1)$
  - h.  $y = \cot^4 (3x)$
  - i.  $y = \cos^4 (3 - 4x^2)$

## E. Penilaian

### Tes Essay: Kerjakan soal-soal berikut

1. carilah turunan dari fungsi-fungsi trigonometri berikut
  - c.  $f(x) = 5 \sin 3x$
  - d.  $f(x) = 2 \cos 3x \sin 2x$
  - e.  $f(x) = 2 \tan 2x$

- f.  $f(x) = 3 \tan 3x + \cos 4x$
2. carilah turunan pertama dari fungsi-fungsi trigonometri berikut ini dengan menggunakan aturan rantai
- $y = 3 \sin (2x + \pi)$
  - $y = (2 + \sin x)^4$
  - $y = \sqrt[5]{\cos^3 x}$
  - $y = 4 - \sin^2 x$
  - $y = \sqrt{\sin^4(x^2 - x)}$
  - $y = \tan^2 (2x - 1)$
  - $y = \operatorname{cosec}^4 (3x)$

## F. Rujukan

- Corliss, J.J., Berglund, V.W. 1958. *Plane Trigonometri*. Boston: The Riverside Press Cambridge.
- Budiarta, M. T. 2004. *Trigonometri*. Bagian Proyek Pengembangan Kurikulum Direktorat Pendidikan Menengah Kejuruan Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah Departemen Pendidikan Nasional.
- George B. Thomas JR dan Ross L. Finney. 1993. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Penerbit: Airlangga.
- Gunawan, J. 1996. *100 Soal dan Pembahasan Trigonometri*. Grasindo, Jakarta.
- John A. Graham and Robert H. Sorgenfrey. 1986. *Trigonometry with application*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Kariadinata, R. 2013. *Trigonometri Dasar*. Penerbit: Pustaka Setia Bandung.
- Larson and Hostetler. 2007. *Algebra and Trigonometry. Seventh Edition*. Boston, New York.



- Noormandiri, B.K dan Scipto, E. 2000. *Buku Pelajaran Matematika untuk SMU Jilid 2 Kelas 2 Kurikulum 1994, Suplemen GBPP 1999*. Penertbit: Airlangga
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 1. Penertbit: Erlangga.
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 2. Penertbit: Erlangga
- Wiroidikromo, S. 2006. *Matematika Jilid 2 IPA untuk Kelas XI*. Penerbit: Erlangga
- Zen Fathurin, 2012. *Trigonometri*. Penerbit: Alfabeta Bandung

## **BAB VII**

### **INTEGRAL TRIGONOMETRI**

#### **A. Pendahuluan**

Integral fungsi trigonometri merupakan kebalikan dari turunan fungsi trigonometri. dapat juga dikatakan sebagai anti turunan fungsi trigonometri. ada dua jenis integral yaitu integral tak tentu dan integral tentu. Integral tentu yaitu integral yang nilainya tertentu, sedangkan integral tak tentu, yaitu integral yang nilainya tak tentu. Pada integral tentu ada batas bawah dan batas atas yang nanti berguna untuk menentukan nilai integral tersebut.

Dalam bahan ajar BAB VIIIntegral Fungsi Trigonometri, anda akan mempelajari integral fungsi trigonometri yang mencakup materi-materi bahasan seperti:

- a. Integral tak tentu fungsi trigonometri
- b. Integral tentu fungsi trigonometri

Setelah mempelajari bahan ajar BAB VIIIntegral Fungsi Trigonometri ini anda diharapkan dapat:

- a. Memahami integral tak tentu fungsi trigonometri

b. Memahami integral tentu fungsi trigonometri

Sebagai penjabaran dari tujuan di atas, setelah mempelajari bahan ajar BAB VIIIntegral Fungsi Trigonometri anda diharapkan dapat:

- a. Memahami integral tak tentu
- b. Memahami integral tentu
- c. Memahami integral tak tentu fungsi trigonometri
- d. Menentukan integral tak tentu fungsi trigonometri
- e. Memahami integral tentu fungsi trigonometri
- f. Menentukan integral tentu fungsi trigonometri

Agar anda berhasil dengan baik dalam mempelajari bahan ajar ini, ikutilah petunjuk belajar berikut:

- a. Bacalah dengan cermat pendahuluan bahan ajar ini sehingga anda memahami tujuan mempelajari bahan ajar ini dan bagaimana mempelajarinya
- b. Bacalah bagian demi bagian materi dalam bahan ajar ini, tandailah kata-kata penting yang merupakan kata kunci. Ucapkan pengertian kata-kata kunci tersebut dengan kalimat anda sendiri.
- c. Pahamiilah pengertian demi pengertian dari isi bahan ajar ini dengan mempelajari contoh-contohnya, dengan pemahaamn sendiri, tukar pikiran (diskusi) dengan awan mahasiswa atau dengan tutor.
- d. Buatlah ringkasan isi bahan ajar bab 7 ini dengan kata-kata sendiri
- e. Kerjakan soal-soal tugas dalam bahan ajar bab 7 ini.
- f. Kerjakan soal-soal dalam penilaian jika ragu-ragu menjawabnya lihatlah kembali pada uraian materi yang berkenaan dengan soal tersebut

## **B. Uraian Materi**

Integral adalah suatu bentuk operasi matematika yang menjadi kebalikan (invers) dari suatu operasi turunan dan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu.

Integral adalah kebalikan dari turunan (diferensial). Oleh karena itu integral disebut juga anti diferensial. Ada 2 macam integral, yaitu integral tentu dan integral tak tentu. Integral tentu yaitu integral yang nilainya tertentu, sedangkan integral tak tentu, yaitu integral yang nilainya tak tentu. Pada integral tentu ada batas bawah dan batas atas yang nanti berguna untuk menentukan nilai integral tersebut. Kegunaan integral dalam kehidupan sehari-hari banyak sekali, diantaranya menentukan luas suatu bidang, menentukan volume benda putar, menentukan panjang busur dan sebagainya. Integral tidak hanya dipergunakan di matematika saja. Banyak bidang lain yang menggunakan integral, seperti ekonomi, fisika, biologi, teknik dan masih banyak lagi disiplin ilmu yang lain yang mempergunakannya

## 1. Integral Tak Tentu

Integral tak tentu adalah merupakan invers / kebalikan dari turunan. Turunan dari suatu fungsi, apabila di integralkan akan menghasilkan sebuah fungsi itu sendiri.

Karena integral merupakan kebalikan (invers) dari turunan, maka untuk menemukan rumus integral kita beranjak dari turunan.

Turunan suatu fungsi  $y = f(x)$  adalah  $y' = f'(x)$  atau  $\frac{dy}{dx}$ , sedangkan

notasi integral dari suatu fungsi  $y = f(x)$  adalah  $\int y \, dx = \int f(x) \, dx$  yang dibaca “integral  $y$  terhadap  $x$ ”.

Turunan suatu fungsi konstan adalah 0 atau integral 0 adalah suatu fungsi konstan, biasanya diwakili oleh notasi  $c$ .

Rumus umum integral dari  $y = ax^n$  adalah  $\frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$  atau ditulis :

$$\boxed{\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c} \quad \text{untuk } n \neq -1$$

### Contoh 7.1

Tentukan :

- $\int 2x^3 dx$
- $\int (5x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 7x - 2) dx$
- $\int \frac{8}{3x^4} dx$
- $\int 2x\sqrt{x} dx$

### Jawab

- $\int 2x^3 dx = \frac{2}{4}x^4 + c = \frac{1}{2}x^4 + c$
- $\int (5x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 7x - 2) dx = x^5 - \frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + c$
- $\int \frac{8}{3x^4} dx = \int \frac{8}{3}x^{-4} dx = \frac{8}{3(-3)}x^{-3} + c = -\frac{8}{9x^3} + c$
- $\int 2x\sqrt{x} dx = \int 2x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$

### 7.2.1. Pemakaian Integral Tak Tentu

Pada integral tak tentu terdapat nilai konstanta  $c$  yang tidak tentu nilainya. Untuk menentukan fungsi  $f$  dari suatu fungsi turunan, maka harus ada data yang lain sehingga harga  $c$  dapat diketahui.

#### Contoh 7.2

Diketahui  $f'(x) = 5x - 3$  dan  $f(2) = 18$ . Tentukan  $f(x)$  !

**Jawab**

$$f(x) = \int (5x - 3)dx = \frac{5}{2}x^2 - 3x + c$$

$$f(2) = 18 \Leftrightarrow \frac{5}{2}(2)^2 + 3 \cdot 2 + c = 18$$

$$\Leftrightarrow 10 + 6 + c = 18$$

$$\Leftrightarrow 16 + c = 18$$

$$\Leftrightarrow c = 2$$

$$\text{Jadi } f(x) = \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$$

#### Contoh 7.3

Jika gradien garis singgung di titik  $(x,y)$  pada sebuah kurva yang melalui titik  $(3,4)$  ditentukan  $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x + 5$ , maka tentukan persamaan kurva tersebut !

**Jawab**

$$f(x) = \int (3x^2 - 8x + 5)dx = x^3 - 4x^2 + 5x + c$$

$$f(3) = 4 \Leftrightarrow 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + c = 4$$

$$\Leftrightarrow 27 - 36 + 15 + c = 4$$

$$\Leftrightarrow c = -2$$

$$\text{Jadi } f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

## 1.1. Integral Fungsi Trigonometri

Kita telah mempelajari turunan fungsi trigonometri yang secara ringkas dapat digambarkan sebagai berikut :

$$\sin x \rightarrow \cos x \rightarrow -\sin x \rightarrow -\cos x \rightarrow \sin x$$

$$\tan x \rightarrow \sec^2 x$$

$$\cot x \rightarrow -\operatorname{cosec}^2 x$$

$\rightarrow$  artinya turunan.

Karena integral adalah invers dari turunan maka :

$$\text{Dari } \frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x \text{ diperoleh } \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\text{Dari } \frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x \text{ diperoleh } \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\text{Dari } \frac{d}{dx} (\tan x) = \sec^2 x \text{ diperoleh } \int \sec^2 x = \tan x + c$$

Rumus integral trigonometri secara singkat terdapat pada Tabel 7.1.

**Tabel 7.1.** Rumus – Rumus Integral Trigonometri

No.	Fungsi $f(x) = y$	Turunan $\frac{dy}{dx}$	Integral
1	$y = \sin x$	$\cos x$	$\int \cos x dx = \sin x$
2	$y = \cos x$	$-\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x$
3	$y = \tan x$	$\sec^2 x$	$\int \sec^2 x dx = \tan x$
4	$y = \cot x$	$-\csc^2 x$	$\int \csc^2 x dx = -\cot x$
5	$y = \sec x$	$\tan x \cdot \sec x$	$\int \tan x \cdot \sec x dx = \sec x$
6	$y = \csc x$	$-\cot x \cdot \csc x$	$\int \cot x \cdot \csc x dx = -\csc x$

Selain rumus tersebut, ada juga rumus yang lain dalam integral trigonometri yang biasa digunakan. Rumus terdapat pada Tabel 7.2.

**Tabel 7.2.** Rumus – Rumus Integral Trigonometri

Fungsi $f(x) = y$	Turunan $\frac{dy}{dx}$	Integral
$y = \frac{1}{a} \sin(ax + b)$	$\cos(ax + b)$	$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
$y = -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$	$\sin(ax + b)$	$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
$y = \frac{1}{a} \tan(ax + b)$	$\sec^2(ax + b)$	$\int \sec^2(ax + b) dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$
$y = -\frac{1}{a} \cot(ax + b)$	$\csc^2(ax + b)$	$\int \csc^2(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$
$y = \frac{1}{a} \sec(ax + b)$	$\tan(ax + b) \cdot \sec(ax + b)$	$\int \tan(ax + b) \cdot \sec(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sec(ax + b) + C$
$y = -\frac{1}{a} \csc(ax + b)$	$\cot(ax + b) \cdot \csc(ax + b)$	$\int \cot(ax + b) \cdot \csc(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \csc(ax + b) + C$

### Contoh 7.4

Tentukan :

a.  $\int (5 \sin x + 2 \cos x) dx$

b.  $\int (-2 \cos x - 4 \sin x + 3) dx$

**Jawab**



$$a. \int (5 \sin x + 2 \cos x) dx = -5 \cos x + 2 \sin x + c$$

$$b. \int (-2 \cos x - 4 \sin x + 3) dx = -2 \sin x + 4 \cos x + 3x + c$$

## 1.2. Integral dengan Substitusi

Cara menentukan integral dengan menggunakan cara substitusi-1 yaitu dengan mengubah bentuk integral tersebut ke bentuk lain dengan notasi lain yang lebih sederhana sehingga mudah menyelesaikannya. Cara ini digunakan jika bagian yang satu ada kaitan turunan dari bagian yang lain.

### Contoh 7.5

Tentukan integral dari :

$$a. \int 2x(4x^2 - 1)^{10} dx$$

$$b. \int 2 \sin^5 x \cos x dx$$

### Jawab

a. Misal :  $u = 4x^2 - 1$

Maka:

$$\frac{du}{dx} = 8x$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{8x}$$

Sehingga :

$$\int 2x(4x^2 - 1)^{10} dx = \int 2x.u^{10} \cdot \frac{du}{8x} = \int \frac{1}{4} u^{10} du = \frac{1}{4.11} u^{11} + c = \frac{1}{44} (4x^2 - 1)^{11} + c$$

b. Misal  $u = \sin x$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

Sehingga

$$\int 2 \sin^5 x \cos x dx = \int 2u^5 \cdot \cos x \frac{du}{\cos x} = \int 2u^5 du = \frac{2}{6} u^6 + c = \frac{1}{3} \sin^6 x + c$$

### 1.3. Integral Parsial

Bagaimana jika dua bagian pada suatu integral tidak ada kaitan turunan antara bagian yang satu dengan bagian lainnya ? Untuk itu perlu ada cara lain untuk menyelesaikannya yaitu dengan integral parsial.

Seperti telah kita ketahui pada turunan jika  $y = uv$  maka  $y' = u'v + uv'$ . Jika kita integralkan kedua ruas, maka akan didapat :

$$\int y' dx = \int u'v dx + \int uv' dx \Leftrightarrow \int uv' dx = y - \int u'v dx = uv - \int u'v dx$$

Rumus di atas sering disingkat dengan :

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

#### Contoh 7.6

Tentukan :

a.  $\int 2x(5x+1)^6 dx$

b.  $\int x \sin x dx$

### Jawab

a. Misal  $2x = u$  maka  $2 dx = du$

$$\text{Misal } dv = (5x+1)^6 dx \rightarrow v = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} (5x+1)^7 = \frac{1}{35} (5x+1)^7$$

$$\begin{aligned} \int 2x(5x+1)^6 dx &= 2x \cdot \frac{1}{35} (5x+1)^7 - \int \frac{1}{35} (5x+1)^7 \cdot 2 dx \\ &= \frac{2x}{35} (5x+1)^7 - \frac{2}{35} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} (5x+1)^8 + c \\ &= \frac{2x}{35} (5x+1)^7 - \frac{1}{700} (5x+1)^8 + c \end{aligned}$$

b. Misal  $x = u$  maka  $dx = du$

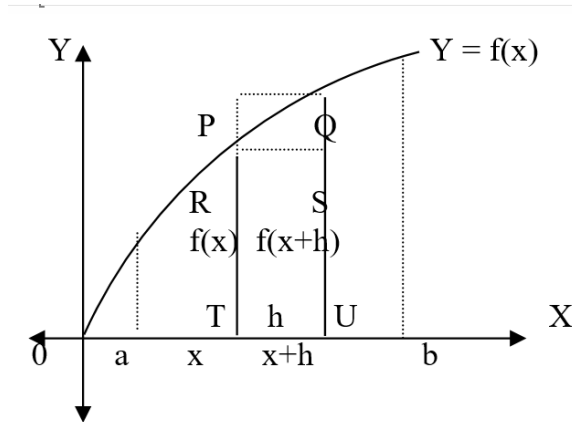
Misal  $dv = \sin x dx$  maka  $v = -\cos x$

$$\int x \sin x dx = x \cdot -\cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

## 2. Integral Tentu

Integral Tentu adalah sebuah bentuk integral yang variabel integrasinya mempunyai batasan. Batasan tersebut biasanya disebut dengan sebagai batas atas dan batas bawah. Batas variabel integrasi umumnya dapat ditulis pada bagian atas dan bawah.

Perhatikan Gambar 7.1 :



Gambar 7.1

Luas daerah dari  $x = a$  hingga  $x = b$  adalah  $L(b) - L(a) \dots (1)$

Luas RSUT < Luas RQUT < Luas PQUT

$$h \cdot f(x) < L(x+h) - L(x) < h \cdot f(x+h)$$

$$f(x) < \frac{L(x+h) - L(x)}{h} < f(x+h)$$

Untuk  $h \rightarrow 0$  maka :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x) < \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} < \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$$

$$f(x) < L'(x) < f(x) \rightarrow L'(x) = f(x)$$

$$L(x) = \int f(x) dx = F(x) + c$$

Dari (1) maka :

$$L = \int_a^b f(x) dx = L(b) - L(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

$$\text{Jadi : } \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

## Contoh 7.7

Tentukanlah sebuah nilai dari  $\int_0^{\pi/6} (\sin 3x + \cos 3x) dx$  adalah .....

**Jawab**

Dengan menggunakan rumus integral yang sama dengan soal nomor satu, maka hasilnya dapat ditentukan adalah

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/6} (\sin 3x + \cos 3x) dx \\ &= \int_0^{\pi/6} \sin 3x dx + \int_0^{\pi/6} \cos 3x dx \\ &= \left[ -\frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^{\pi/6} + \left[ \frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\pi/6} \\ &= \left[ -\frac{1}{3} \cos 3 \cdot \frac{\pi}{6} - \left( -\frac{1}{3} \cos 3 \cdot 0 \right) \right] + \left[ \frac{1}{3} \sin 3 \cdot \frac{\pi}{6} - \left( \frac{1}{3} \sin 3 \cdot 0 \right) \right] \\ &= 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

**Sal-Soal Integral yang Diselesaikan**

**Contoh 7.8**

Hitunglah:

1.  $\int 2 \sin x dx + 3 \cos x) dx$
2.  $\int \sin 3x dx$
3.  $\int \cos^2 x dx$
4.  $\int \cot 3x dx$
5.  $\int \cos x \cdot e^{\sin x} \cdot dx$
6.  $\int x \cdot \cos 2x dx$
7.  $\int \cos^4 2x \sin^3 2x dx$
8.  $\int \sin 3x \cos 5x dx$

**Jawab**

$$\begin{aligned} 1. \int 2 \sin x \, dx + 3 \cos x \, dx &= 2 \int \sin x \, dx + 3 \int \cos x \, dx \\ &= -2 \cos x + 3 \sin x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int \sin 3x \, dx &= \frac{1}{3} \int \sin 3x \, d(3x) \\ &= \frac{-1}{3} \cos 3x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \int \frac{1}{2} \, dx + \int \cos 2x \, dx \\ &= \int \frac{1}{2} \, dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, d(2x) \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \int \sin 2x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \int \cot 3x \, dx &= \frac{1}{3} \int \cot 3x \, d(3x) \\ &= \frac{1}{3} \ln |\sin 3x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \int \cos x \cdot e^{\sin x} \cdot dx &= \int e^{\sin x} \cdot d(\sin x) \\ &= e^{\sin x} + C \end{aligned}$$

$$6. \int x \cdot \cos 2x \, dx \dots \dots \dots \text{Gunakan rumus Integral Parsial}$$

$$\int U \cdot dV - \int V \cdot dU$$

Misalkan:

$$U = x \qquad dV = \cos 2x \, dx$$

$$dU = dx \qquad V = \frac{1}{2} \sin 2x \, dx$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } \int x \cdot \cos 2x \, dx &= x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \int \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \int \cos^4 2x \sin^3 2x \, dx &= \int \cos^4 2x \sin 2x \cdot \sin 2x \, dx \\ &= \int \cos^4 2x (1 - \cos^2 2x) \cdot \sin 2x \, dx \\ &= \int (\cos^4 2x - \cos^6 2x) \cdot \frac{-1}{2} d(\cos 2x) \\ &= \frac{-1}{2} \int (\cos^4 2x - \cos^6 2x) \cdot d(\cos 2x) \\ &= \frac{1}{14} \cos^7 2x - \frac{1}{10} \cos^5 2x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \int \sin 3x \cos 5x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(3 - 5)x + \sin(3 + 5)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \int [\sin 8x - \sin 2x] dx \\ &= \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C \end{aligned}$$

### Contoh 7.9

Hitunglah:

1.  $\int \arcsin \frac{x}{a} dx$
2.  $\int 3x \cdot \arcsin 4x dx$
3.  $\int \arcsin \cos 2x dx$

### Jawab

1.  $\int \arcsin \frac{x}{a} dx$

Gunakan rumus integral parsial  $\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU$

Misalkan kita mengintegrasikan  $y = \arcsin \frac{x}{a}$ , maka:

$\int \arcsin \frac{x}{a} dx$  ditulis menjadi  $\int 1 \cdot \arcsin \frac{x}{a} dx$  sehingga

$$U = \arcsin \frac{x}{a} \qquad dV = 1 \cdot dx$$

$$dU = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot dx$$

$$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \cdot \arcsin \frac{x}{a} + \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot dx$$

$$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \cdot \arcsin \frac{x}{a} + \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot x \cdot dx$$



$$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \cdot \arcsin \frac{x}{a} + \int \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}a^2\right)$$

$$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \cdot \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{2}a^2 \int \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \cdot \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{2}a^2 \cdot 2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \cdot \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{2}a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C$$

$$\text{Jadi, } \int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \cdot \arcsin \frac{x}{a} - a\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

2.  $\int 3x \cdot \sin 4x \, dx$

Misalkan

$$U = \arcsin 4x$$

$$dV = 3x \cdot dx$$

$$dU = \frac{4}{\sqrt{1-(4x)^2}} \cdot dx$$

$$V = \frac{3}{2}x^2$$

Gunakan rumus integral parsial  $\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU$

$$\int 3x \arcsin 4x \, dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 \cdot \arcsin 4x - \frac{3}{2} \int x^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{1-(4x)^2}} \cdot dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 \cdot \arcsin 4x - \int \frac{6x^2}{\sqrt{1-(4x)^2}} \cdot dx$$

$$= \frac{3}{2} x^2 \cdot \arcsin 4x - \int \frac{6x^2}{\sqrt{1-16x^2}} \cdot dx$$

Sekarang kita menyelesaikan  $\int \frac{6x^2}{\sqrt{1-16x^2}} \cdot dx$  dengan cara substitusi trigonometri.

Andaikan  $\sin t = 4x$  maka  $\cos t = \sqrt{1-16x^2}$  ;  $x = \frac{1}{4} \sin t$  ;

$dx = \frac{1}{4} \cos t \, dt$  dan  $x^2 = \frac{1}{16} \sin^2 t$  sehingga:

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2}{1-16x^2} &= \int 6 \cdot \frac{1}{16} \sin^2 t \cdot \frac{1}{\cos t} \frac{1}{4} \cos t \, dt \\ &= \int \frac{3}{32} \sin^2 t \, dt \\ &= \frac{3}{32} \int \left( \frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \frac{3}{64} \int (1 - \cos 2t) dt \\ &= \frac{3}{64} t + \frac{3}{64} \frac{1}{2} \sin 2t \\ &= \frac{3}{64} t + \frac{3}{64} \sin t \cdot \cos t \\ &= \frac{3}{64} \arcsin 4x \\ &\quad + \frac{3}{64} 4x \cdot \sqrt{1-16x^2} \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\int 3x \cdot \arcsin 4x \, dx = \frac{3}{2} x^2 \cdot \arcsin 4x$$

$$\begin{aligned}
& - \int \frac{6x^2}{\sqrt{1-16x^2}} \cdot dx = \frac{3}{2} x^2 \arcsin 4x \\
& - \left[ \frac{3}{64} \arcsin 4x + \frac{3}{64} 4x \cdot \sqrt{1-16x^2} \right] = \frac{3}{2} x^2 \arcsin 4x \\
& - \frac{3}{64} \arcsin 4x - \frac{3}{64} 4x \cdot \sqrt{1-16x^2} \\
& \int 3x \cdot \arcsin 4x \, dx = \frac{3}{2} x^2 \arcsin 4x \\
& - \frac{3}{64} \arcsin 4x - \frac{3}{16} x \cdot \sqrt{1-16x^2} + C
\end{aligned}$$

3.  $\int \arcsin \cos 2x \, dx$

Gunakan rumus integral parsial  $\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU$

Misalkan kita mengintegrasikan  $y = \arcsin \cos 2x$ , maka:

$\int \arcsin \cos 2x \, dx$  ditulis menjadi  $\int 1 \cdot \arcsin \cos 2x \, dx$  sehingga

$$U = \arcsin \cos 2x$$

$$dV = 1 \cdot dx$$

$$dU = \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$V = x$$

$$\int \arcsin \cos 2x \, dx = x \cdot \arcsin \cos 2x - \int \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot dx$$

$$\int \arcsin \cos 2x \, dx = x \cdot \arcsin \cos 2x + \int \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot dx$$

Sekarang kita menyelesaikan  $\int \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot dx$  dengan cara substitusi trigonometri.

Andaikan  $\sin t = 2x$  atau  $t = \arcsin 2x$ , maka  $\cos t = \sqrt{1-4x^2}$ ;  $x = \frac{1}{2} \sin t$  dan  $dx = \frac{1}{2} \cos t \, dt$ , sehingga:

$$\int \frac{2x}{1-4x^2} \cdot dx = \int \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{1}{2} \cos t \, dt$$

$$\int \frac{2x}{1-4x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \int \sin t \, dt$$

$$\int \frac{2x}{1-4x^2} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cos t + C$$

Dengan demikian,

$$\int \arccos 2x \, dx = x \cdot \arccos 2x - \frac{1}{2} \cos t + C$$

$$\int \arccos 2x \, dx = x \cdot \arccos 2x - \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C$$

### Contoh 7.10

Hitunglah:

1.  $\int_0^\pi \sin x \, dx$
2.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$
3.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$

**Jawab**

1.  $\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi$ 

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos \pi] - [-\cos 0]$$

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = [-(-1) - [-1]]$$

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = 2$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[ \sin \frac{\pi}{2} \right] - [\sin 0] = 1 - 0 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[ \sin \frac{\pi}{2} \right] - [\sin 0]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1 - 0 = 1$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = [\ln |\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \ln |\cos \frac{\pi}{4}| - \ln |\cos 0|$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \ln \frac{1}{2} \sqrt{2} - \ln 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \ln \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

### C. Rangkuman

1. Integral tak tentu adalah merupakan invers / kebalikan dari turunan.

2. Notasi integral dari suatu fungsi  $y = f(x)$  adalah  $\int y \, dx = \int f(x) \, dx$  yang dibaca “ integral y terhadap x ”.
3. Rumus umum integral dari  $y = ax^n$  adalah  $\frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$  atau ditulis :

$$\boxed{\int ax^n \, dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c} \quad \text{untuk } n \neq -1$$

4. Rumus integral parsial :

$$\boxed{\int u \, dv = uv - \int v \, du}$$

5. Integral Tentu adalah sebuah bentuk integral yang variabel integrasinya mempunyai batasan. Batasan tersebut biasanya disebut dengan sebagai batas atas dan batas bawah

## D. Tugas

### Kerjakan soal-soal berikut

1. Tentukan integral fungsi berikut !

- a.  $\int 5 \sin x \, dx$
- b.  $\int (\sin x - \cos x) \, dx$
- c.  $\int (8 \cos x - 6 \sin x) \, dx$
- d.  $\int (2 + x + \sin x) \, dx$
- e.  $\int (x^2 - 2 \sin x) \, dx$

2. Tentukan integral dari fungsi –fungsi berikut dengan menggunakan metode substitusi maupun metode parsial!

- a. Hasil dari  $\int \cos^4 2x \sin 2x \, dx = \dots$
- b. Hasil  $\int \sin^3 3x \cos 3x \, dx = \dots$
- c. Hasil  $\int (\sin^2 x - \cos^2 x) \, dx$  adalah ....
- d. Hasil  $\int 4 \sin 5x \cdot \cos 3x \, dx = \dots$
- e. Hasil dari  $\int \sin^2 x \cos x \, dx = \dots$
- f. Hasil dari  $\int (x^2 + 1) \cos x \, dx = \dots$
- g. Hasil dari  $\int x^2 \sin 2x \, dx = \dots$
- h. Hasil dari  $\int \cos^4 2x \sin 2x \, dx = \dots$
- i. Hasil  $\int \sin^3 3x \cos 3x \, dx = \dots$
- j. Hasil dari  $\int \sin^2 x \cos x \, dx = \dots$
- k. Hasil  $\int 4 \sin 5x \cdot \cos 3x \, dx = \dots$
- l. Hasil dari  $\int (3 - 6 \sin^2 x) \, dx = \dots$
- m. Hasil dari  $\int (x^2 - 3x + 1) \sin x \, dx = \dots$

3. Tentukan nilai integral tentu berikut

- a.  $\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = \dots$
- b.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x \sin x \, dx = \dots$

$$\text{c. } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x + \frac{\pi}{3}) dx = \dots$$

$$\text{d. } \int_0^1 \sin^2 \pi x \cos^2 \pi x dx = \dots$$

$$\text{e. } \int x \sin x dx = \dots$$

$$\text{f. } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x + \frac{\pi}{3}) dx = \dots$$

$$\text{g. } \int_0^1 \sin^2 \pi x \cos^2 \pi x dx = \dots$$

$$4. \text{ Hasil } \int_0^{\pi} (\sin 3x + \cos x) dx = \dots$$

$$5. \text{ Hasil } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x - \cos 2x) dx = \dots$$

$$6. \text{ Nilai dari } \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3x + \cos 3x) dx = \dots$$

$$7. \text{ Hasil dari } \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \cos(3x - \pi) dx = \dots$$

$$8. \text{ Nilai dari } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x - \pi) \sin(3x - \pi) dx =$$



9. Hasil dari  $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} 2 \sin^4 x - \cos^4 x) dx = \dots$

10. Nilai dari  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x - \pi) \sin(3x - \pi) dx =$

11. Tentukan nilai integral berikut ini :

a.  $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \, dx$

b.  $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} 2 \cos 2x \, dx$

c.  $\int_0^{\pi} \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) dx$

d.  $\int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x) \, dx$

e.  $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (4 \cos x - 1) \, dx$

## E. Penilaian

### Kerjakan soal berikut

1. Tentukan nilai integral berikut

- a.  $\int (\sin^2 x - \cos^2 x) dx$
  - b.  $\int 4 \sin 5x \cdot \cos 3x dx$
  - c.  $\int \sin^2 x \cos x dx$
  - d.  $\int (x^2 + 1) \cos x dx$
  - e.  $\int x^2 \sin 2x dx$
  - f.  $\int \cos^4 2x dx$
2. Tentukan integral berikut
- g.  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} 2 \sin t dt$
  - h.  $\int_0^{\pi/2} (4x + 3 + \cos x) dx$
  - i.  $\int_0^{\pi/2} \sin^2 3x \cos 3x dx$
  - j.  $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin x dx$

## F. Rujukan

- Corliss, J.J., Berglund, V.W. 1958. *Plane Trigonometri*. Boston: The Riverside Press Cambridge.
- Budiarta, M. T. 2004. *Trigonometri*. Bagian Proyek Pengembangan Kurikulum Direktorat Pendidikan Menengah Kejuruan Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah Departemen Pendidikan Nasional.
- George B. Thomas JR dan Ross L. Finney. 1993. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Penerbit: Airlangga.
- Gunawan, J. 1996. *100 Soal dan Pembahasan Trigonometri*. Grasindo, Jakarta.
- John A. Graham and Robert H. Sorgenfrey. 1986. *Trigonometry with application*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Kariadinata, R. 2013. *Trigonometri Dasar*. Penerbit: Pustaka Setia Bandung.
- Larson and Hostetler. 2007. *Algebra and Trigonometry. Seventh Edition*. Boston, New York.

- Noormandiri, B.K dan Scipto, E. 2000. *Buku Pelajaran Matematika untuk SMU Jilid 2 Kelas 2 Kurikulum 1994, Suplemen GBPP 1999*. Penertbit: Airlangga
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 1. Penertbit: Erlangga.
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 2. Penertbit: Erlangga
- Wiroidikromo, S. 2006. *Matematika Jilid 2 IPA untuk Kelas XI*. Penerbit: Erlangga
- Zen Fathurin, 2012. *Trigonometri*. Penerbit: Alfabeta Bandung

## DAFTAR PUSTAKA

- Corliss, J.J., Berglund, V.W. 1958. *Plane Trigonometri*. Boston: The Riverside Press Cambridge.
- Budiarta, M. T. 2004. *Trigonometri*. Bagian Proyek Pengembangan Kurikulum Direktorat Pendidikan Menengah Kejuruan Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah Departemen Pendidikan Nasional.
- George B. Thomas JR dan Ross L. Finney. 1993. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Penerbit: Airlangga.
- Gunawan, J. 1996. *100 Soal dan Pembahasan Trigonometri*. Grasindo, Jakarta.
- John A. Graham and Robert H. Sorgenfrey. 1986. *Trigonometry with application*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Kariadinata, R. 2013. *Trigonometri Dasar*. Penerbit: Pustaka Setia Bandung.
- Larson and Hostetler. 2007. *Algebra and Trigonometry. Seventh Edition*. Boston, New York.
- Noormandiri, B.K dan Scipto, E. 2000. *Buku Pelajaran Matematika untuk SMU Jilid 2 Kelas 2 Kurikulum 1994, Suplemen GBPP 1999*. Penerbit: Airlangga
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 1. Penerbit: Erlangga.
- Purcell E., J., & Varberg, D. 1984. *Calculus with Analytic Geometry*. Diterjemahkan Susila, I. N., Kartasasmita, B., Rawuh: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, jilid 2. Penerbit: Erlangga
- Wiroidikromo, S. 2006. *Matematika Jilid 2 IPA untuk Kelas XI*. Penerbit: Erlangga
- Zen Fathurin, 2012. *Trigonometri*. Penerbit: Alfabeta Bandung

## DAFTAR ISTILAH

Ukuran derajat	ukuran yang dapat dibentuk pada bidang datar dengan satuan ( $^{\circ}$ ) menggambarkan $1/360$ dari putaran penuh
Radian	satuan pengukuran yang didefinisikan sebagai $180/x^{\circ}$ atau kira-kira $57,2958^{\circ}$

# LAMPIRAN

## Lampiran 1

### Tabel Trigonometri

Tabel trigonometri ini hanya memuat sudut antara 0° sampai dengan 90° (sudut-sudut di kuadran I) dengan bentuk dasar berikut.

Untuk sinus:  $\sin a^\circ = x$

Untuk sinus:  $\cos a^\circ = y$

Untuk sinus:  $\tan a^\circ = z$

Cara membaca tabel trigonometri

$\sin 35,2^\circ = \dots\dots\dots$

$\sin 75,6^\circ = \dots\dots\dots$

**Tabel sinus**

a°	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0										
35			0,576							
75							0,969			

Jadi,  $\sin 35,2^\circ = 0,576$

$\sin 75,6^\circ = 0,969$

**Catatan:** Hal yang sama dilakukan untuk mencari nilai kosinus dan tangen pada tabel trionometri

Sin x ( x dalam derajat dan menit)

a°	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,000	0,002	0,003	0,005	0,007	0,009	0,010	0,012	0,014	0,016
1	0,017	0,019	0,021	0,023	0,024	0,026	0,028	0,030	0,031	0,033
2	0,035	0,037	0,038	0,040	0,042	0,044	0,045	0,047	0,049	0,051
3	0,052	0,054	0,056	0,058	0,059	0,061	0,063	0,065	0,066	0,068
4	0,070	0,071	0,073	0,075	0,077	0,078	0,080	0,082	0,084	0,085
5	0,087	0,089	0,091	0,092	0,094	0,096	0,098	0,099	0,101	0,103
6	0,105	0,106	0,108	0,110	0,111	0,113	0,115	0,117	0,118	0,120
7	0,122	0,124	0,125	0,127	0,129	0,131	0,132	0,134	0,136	0,137
8	0,139	0,141	0,143	0,144	0,146	0,148	0,150	0,151	0,153	0,155
9	0,156	0,158	0,160	0,162	0,163	0,165	0,167	0,168	0,170	0,172
10	0,174	0,175	0,177	0,179	0,181	0,182	0,184	0,186	0,187	0,189
11	0,191	0,193	0,194	0,196	0,198	0,199	0,201	0,203	0,204	0,206
12	0,208	0,210	0,211	0,213	0,215	0,216	0,218	0,220	0,222	0,223
13	0,225	0,227	0,228	0,230	0,232	0,233	0,235	0,237	0,239	0,240
14	0,242	0,244	0,245	0,247	0,249	0,250	0,252	0,254	0,255	0,257
15	0,259	0,261	0,262	0,264	0,266	0,267	0,269	0,271	0,272	0,274
16	0,276	0,277	0,279	0,281	0,282	0,284	0,286	0,287	0,289	0,291
17	0,292	0,294	0,296	0,297	0,299	0,301	0,302	0,304	0,306	0,307
18	0,309	0,311	0,312	0,314	0,316	0,317	0,319	0,321	0,322	0,324
19	0,326	0,327	0,329	0,331	0,332	0,334	0,335	0,337	0,339	0,340
20	0,342	0,344	0,345	0,347	0,349	0,350	0,352	0,353	0,355	0,357
21	0,358	0,360	0,362	0,363	0,365	0,367	0,368	0,370	0,371	0,373
22	0,375	0,376	0,378	0,379	0,381	0,383	0,384	0,386	0,388	0,389
23	0,391	0,392	0,394	0,396	0,397	0,399	0,400	0,402	0,404	0,405
24	0,407	0,408	0,410	0,412	0,413	0,415	0,416	0,418	0,419	0,421
25	0,423	0,424	0,426	0,427	0,429	0,431	0,432	0,434	0,435	0,437
26	0,438	0,440	0,442	0,443	0,445	0,446	0,443	0,449	0,451	0,452
27	0,454	0,456	0,457	0,459	0,460	0,462	0,463	0,465	0,466	0,468
28	0,469	0,471	0,473	0,474	0,476	0,477	0,479	0,480	0,482	0,483
29	0,485	0,486	0,488	0,489	0,491	0,492	0,494	0,495	0,497	0,498
30	0,500	0,502	0,503	0,505	0,506	0,508	0,509	0,511	0,512	0,514
31	0,515	0,517	0,518	0,520	0,521	0,522	0,524	0,525	0,527	0,528
32	0,530	0,531	0,533	0,534	0,536	0,537	0,539	0,540	0,542	0,543
33	0,545	0,546	0,548	0,549	0,550	0,552	0,553	0,555	0,556	0,558
34	0,559	0,561	0,562	0,564	0,565	0,566	0,568	0,569	0,571	0,572
35	0,574	0,575	0,576	0,578	0,579	0,581	0,582	0,584	0,585	0,586
36	0,588	0,589	0,591	0,592	0,593	0,595	0,596	0,598	0,599	0,600
37	0,602	0,603	0,605	0,606	0,607	0,609	0,610	0,612	0,613	0,614
38	0,616	0,617	0,618	0,620	0,621	0,623	0,624	0,625	0,627	0,628
39	0,629	0,631	0,632	0,633	0,635	0,636	0,637	0,639	0,640	0,641
40	0,643	0,644	0,645	0,647	0,648	0,649	0,651	0,652	0,653	0,655



n°	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
41	0,656	0,657	0,659	0,660	0,661	0,663	0,664	0,665	0,667	0,668
42	0,669	0,670	0,672	0,673	0,674	0,676	0,677	0,678	0,679	0,681
43	0,682	0,683	0,685	0,686	0,687	0,688	0,690	0,691	0,692	0,693
44	0,695	0,696	0,697	0,698	0,700	0,701	0,702	0,703	0,705	0,706
45	0,707	0,708	0,710	0,711	0,712	0,713	0,714	0,716	0,717	0,718
46	0,719	0,721	0,722	0,723	0,724	0,725	0,727	0,728	0,729	0,730
47	0,731	0,733	0,734	0,735	0,736	0,737	0,738	0,740	0,741	0,742
48	0,743	0,744	0,745	0,747	0,748	0,749	0,750	0,751	0,752	0,754
49	0,755	0,756	0,757	0,758	0,759	0,760	0,762	0,763	0,764	0,765
50	0,766	0,767	0,768	0,769	0,771	0,772	0,773	0,774	0,775	0,776
51	0,777	0,778	0,779	0,780	0,782	0,783	0,784	0,785	0,786	0,787
52	0,788	0,789	0,790	0,791	0,792	0,793	0,794	0,795	0,797	0,798
53	0,799	0,800	0,801	0,802	0,803	0,804	0,805	0,806	0,807	0,808
54	0,809	0,810	0,811	0,812	0,813	0,814	0,815	0,816	0,817	0,818
55	0,819	0,820	0,821	0,822	0,823	0,824	0,825	0,826	0,827	0,828
56	0,829	0,830	0,831	0,832	0,833	0,834	0,835	0,836	0,837	0,838
57	0,839	0,840	0,841	0,842	0,842	0,843	0,844	0,845	0,846	0,847
58	0,848	0,849	0,850	0,851	0,852	0,853	0,854	0,854	0,855	0,856
59	0,857	0,858	0,859	0,860	0,861	0,862	0,863	0,863	0,864	0,865
60	0,866	0,867	0,868	0,869	0,869	0,870	0,871	0,872	0,873	0,874
61	0,875	0,875	0,876	0,877	0,878	0,879	0,880	0,880	0,881	0,882
62	0,883	0,884	0,885	0,885	0,886	0,887	0,888	0,889	0,889	0,890
63	0,891	0,892	0,893	0,893	0,894	0,895	0,896	0,896	0,897	0,898
64	0,899	0,900	0,900	0,901	0,902	0,903	0,903	0,904	0,905	0,906
65	0,906	0,907	0,908	0,909	0,909	0,910	0,911	0,911	0,912	0,913
66	0,914	0,914	0,915	0,916	0,916	0,917	0,918	0,918	0,919	0,920
67	0,921	0,921	0,922	0,923	0,923	0,924	0,925	0,925	0,926	0,927
68	0,927	0,928	0,928	0,929	0,930	0,930	0,931	0,932	0,932	0,933
69	0,934	0,934	0,935	0,935	0,936	0,937	0,937	0,938	0,938	0,939
70	0,940	0,940	0,941	0,941	0,942	0,943	0,943	0,944	0,944	0,945
71	0,946	0,946	0,947	0,947	0,948	0,948	0,949	0,949	0,950	0,951
72	0,951	0,952	0,952	0,953	0,953	0,954	0,954	0,955	0,955	0,956
73	0,956	0,957	0,957	0,958	0,958	0,959	0,959	0,960	0,960	0,961
74	0,961	0,962	0,962	0,963	0,963	0,964	0,964	0,965	0,965	0,965
75	0,966	0,966	0,967	0,967	0,968	0,968	0,969	0,969	0,969	0,970
76	0,970	0,971	0,971	0,972	0,972	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974
77	0,974	0,975	0,975	0,976	0,976	0,976	0,977	0,977	0,977	0,978
78	0,978	0,979	0,979	0,979	0,980	0,980	0,980	0,981	0,981	0,981
79	0,982	0,982	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,984	0,985
80	0,985	0,985	0,985	0,986	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,987
81	0,988	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989	0,990	0,990	0,990
82	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992	0,992	0,992	0,992
83	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994
84	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996
85	0,996	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
86	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999
87	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
88	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
89	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Cos x ( x dalam derajat dan menit)

a°	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
2	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3	0,999	0,999	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
4	0,998	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,996	0,996
5	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
6	0,995	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,993	0,993	0,993	0,993
7	0,993	0,992	0,992	0,992	0,992	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991
8	0,990	0,990	0,990	0,990	0,989	0,989	0,989	0,988	0,988	0,988
9	0,988	0,987	0,987	0,987	0,987	0,986	0,986	0,986	0,985	0,985
10	0,985	0,985	0,984	0,984	0,984	0,983	0,983	0,983	0,982	0,982
11	0,982	0,981	0,981	0,981	0,980	0,980	0,980	0,979	0,979	0,979
12	0,978	0,978	0,977	0,977	0,977	0,976	0,976	0,976	0,975	0,975
13	0,974	0,974	0,974	0,973	0,973	0,972	0,972	0,972	0,971	0,971
14	0,970	0,970	0,969	0,969	0,969	0,968	0,968	0,967	0,967	0,966
15	0,966	0,965	0,965	0,965	0,964	0,964	0,963	0,963	0,962	0,962
16	0,961	0,961	0,960	0,960	0,959	0,959	0,958	0,958	0,957	0,957
17	0,956	0,956	0,955	0,955	0,954	0,954	0,953	0,953	0,952	0,952
18	0,951	0,951	0,950	0,949	0,949	0,948	0,948	0,947	0,947	0,946
19	0,946	0,945	0,944	0,944	0,943	0,943	0,942	0,941	0,941	0,940
20	0,940	0,939	0,938	0,938	0,937	0,937	0,936	0,935	0,935	0,934
21	0,934	0,933	0,932	0,932	0,931	0,930	0,930	0,929	0,928	0,928
22	0,927	0,927	0,926	0,925	0,925	0,924	0,923	0,923	0,922	0,921
23	0,921	0,920	0,919	0,918	0,918	0,917	0,916	0,916	0,915	0,914
24	0,914	0,913	0,912	0,911	0,911	0,910	0,909	0,909	0,908	0,907
25	0,906	0,906	0,905	0,904	0,903	0,903	0,902	0,901	0,900	0,900
26	0,899	0,898	0,897	0,896	0,896	0,895	0,894	0,893	0,893	0,892
27	0,891	0,890	0,889	0,889	0,888	0,887	0,886	0,885	0,885	0,884
28	0,883	0,882	0,881	0,880	0,880	0,879	0,878	0,877	0,876	0,875
29	0,875	0,874	0,873	0,872	0,871	0,870	0,869	0,869	0,868	0,867
30	0,866	0,865	0,864	0,863	0,863	0,862	0,861	0,860	0,859	0,858
31	0,857	0,856	0,855	0,854	0,854	0,853	0,852	0,851	0,850	0,849
32	0,848	0,847	0,846	0,845	0,844	0,843	0,842	0,842	0,841	0,840
33	0,839	0,838	0,837	0,836	0,835	0,834	0,833	0,832	0,831	0,830
34	0,829	0,828	0,827	0,826	0,825	0,824	0,823	0,822	0,821	0,820
35	0,819	0,818	0,817	0,816	0,815	0,814	0,813	0,812	0,811	0,810
36	0,809	0,808	0,807	0,806	0,805	0,804	0,803	0,802	0,801	0,800
37	0,799	0,798	0,797	0,795	0,794	0,793	0,792	0,791	0,790	0,789
38	0,788	0,787	0,786	0,785	0,784	0,783	0,782	0,780	0,779	0,778
39	0,777	0,776	0,775	0,774	0,773	0,772	0,771	0,769	0,768	0,767
40	0,766	0,765	0,764	0,763	0,762	0,760	0,759	0,758	0,757	0,756

$\alpha^\circ$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
41	0,755	0,754	0,752	0,751	0,750	0,749	0,748	0,747	0,745	0,744
42	0,743	0,742	0,741	0,740	0,738	0,737	0,736	0,735	0,734	0,733
43	0,731	0,730	0,729	0,728	0,727	0,725	0,724	0,723	0,722	0,721
44	0,719	0,718	0,717	0,716	0,714	0,713	0,712	0,711	0,710	0,708
45	0,707	0,706	0,705	0,703	0,702	0,701	0,700	0,698	0,697	0,696
46	0,695	0,693	0,692	0,691	0,690	0,688	0,687	0,686	0,685	0,683
47	0,682	0,681	0,679	0,678	0,677	0,676	0,674	0,673	0,672	0,670
48	0,669	0,668	0,667	0,665	0,664	0,663	0,661	0,660	0,659	0,657
49	0,656	0,655	0,653	0,652	0,651	0,649	0,648	0,647	0,645	0,644
50	0,643	0,641	0,640	0,639	0,637	0,636	0,635	0,633	0,632	0,631
51	0,629	0,628	0,627	0,625	0,624	0,623	0,621	0,620	0,618	0,617
52	0,616	0,614	0,613	0,612	0,610	0,609	0,607	0,606	0,605	0,603
53	0,602	0,600	0,599	0,598	0,596	0,595	0,593	0,592	0,591	0,589
54	0,588	0,586	0,585	0,584	0,582	0,581	0,579	0,578	0,576	0,575
55	0,574	0,572	0,571	0,569	0,568	0,566	0,565	0,564	0,562	0,561
56	0,559	0,558	0,556	0,555	0,553	0,552	0,550	0,549	0,548	0,546
57	0,545	0,543	0,542	0,540	0,539	0,537	0,536	0,534	0,533	0,531
58	0,530	0,528	0,527	0,525	0,524	0,522	0,521	0,520	0,518	0,517
59	0,515	0,514	0,512	0,511	0,509	0,508	0,506	0,505	0,503	0,502
60	0,500	0,498	0,497	0,495	0,494	0,492	0,491	0,489	0,488	0,486
61	0,485	0,483	0,482	0,480	0,479	0,477	0,476	0,474	0,473	0,471
62	0,469	0,468	0,466	0,465	0,463	0,462	0,460	0,459	0,457	0,456
63	0,454	0,452	0,451	0,449	0,448	0,446	0,445	0,443	0,442	0,440
64	0,438	0,437	0,435	0,434	0,432	0,431	0,429	0,427	0,426	0,424
65	0,423	0,421	0,419	0,418	0,416	0,415	0,413	0,412	0,410	0,408
66	0,407	0,405	0,404	0,402	0,400	0,399	0,397	0,396	0,394	0,392
67	0,391	0,389	0,388	0,386	0,384	0,383	0,381	0,379	0,378	0,376
68	0,375	0,373	0,371	0,370	0,368	0,367	0,365	0,363	0,362	0,360
69	0,358	0,357	0,355	0,353	0,352	0,350	0,349	0,347	0,345	0,344
70	0,342	0,340	0,339	0,337	0,335	0,334	0,332	0,331	0,329	0,327
71	0,326	0,324	0,322	0,321	0,319	0,317	0,316	0,314	0,312	0,311
72	0,309	0,307	0,306	0,304	0,302	0,301	0,299	0,297	0,296	0,294
73	0,292	0,291	0,289	0,287	0,286	0,284	0,282	0,281	0,279	0,277
74	0,276	0,274	0,272	0,271	0,269	0,267	0,266	0,264	0,262	0,261
75	0,259	0,257	0,255	0,254	0,252	0,250	0,249	0,247	0,245	0,244
76	0,242	0,210	0,239	0,237	0,235	0,233	0,232	0,230	0,228	0,227
77	0,225	0,223	0,222	0,220	0,218	0,216	0,215	0,213	0,211	0,210
78	0,208	0,206	0,204	0,203	0,201	0,199	0,198	0,196	0,194	0,193
79	0,191	0,189	0,187	0,186	0,184	0,182	0,181	0,179	0,177	0,175
80	0,174	0,172	0,170	0,168	0,167	0,165	0,163	0,162	0,160	0,158
81	0,156	0,155	0,153	0,151	0,150	0,148	0,146	0,144	0,143	0,141
82	0,139	0,137	0,136	0,134	0,132	0,131	0,129	0,127	0,125	0,124
83	0,122	0,120	0,118	0,117	0,115	0,113	0,111	0,110	0,108	0,106
84	0,105	0,103	0,101	0,099	0,098	0,096	0,094	0,092	0,091	0,089
85	0,087	0,085	0,084	0,082	0,080	0,078	0,077	0,075	0,073	0,071
86	0,070	0,068	0,066	0,065	0,063	0,061	0,059	0,058	0,056	0,054
87	0,052	0,051	0,049	0,047	0,045	0,044	0,042	0,040	0,038	0,037
88	0,035	0,033	0,031	0,030	0,028	0,026	0,024	0,023	0,021	0,019
89	0,017	0,016	0,014	0,012	0,010	0,009	0,007	0,005	0,003	0,002
90	0,000									

Tan x ( x dalam derajat dan menit)

a°	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,000	0,002	0,003	0,005	0,007	0,009	0,010	0,012	0,014	0,016
1	0,017	0,019	0,021	0,023	0,024	0,026	0,028	0,030	0,031	0,033
2	0,035	0,037	0,038	0,040	0,042	0,044	0,045	0,047	0,049	0,051
3	0,052	0,054	0,056	0,058	0,059	0,061	0,063	0,065	0,066	0,068
4	0,070	0,072	0,073	0,075	0,077	0,079	0,080	0,082	0,084	0,086
5	0,087	0,089	0,091	0,093	0,095	0,096	0,098	0,100	0,102	0,103
6	0,105	0,107	0,109	0,110	0,112	0,114	0,116	0,117	0,119	0,121
7	0,123	0,125	0,126	0,128	0,130	0,132	0,133	0,135	0,137	0,139
8	0,141	0,142	0,144	0,146	0,148	0,149	0,151	0,153	0,155	0,157
9	0,158	0,160	0,162	0,164	0,166	0,167	0,169	0,171	0,173	0,175
10	0,176	0,178	0,180	0,182	0,184	0,185	0,187	0,189	0,191	0,193
11	0,194	0,196	0,198	0,200	0,202	0,203	0,205	0,207	0,209	0,211
12	0,213	0,214	0,216	0,218	0,220	0,222	0,224	0,225	0,227	0,229
13	0,231	0,233	0,235	0,236	0,238	0,240	0,242	0,244	0,246	0,247
14	0,249	0,251	0,253	0,255	0,257	0,259	0,260	0,262	0,264	0,266
15	0,268	0,270	0,272	0,274	0,275	0,277	0,279	0,281	0,283	0,285
16	0,287	0,289	0,291	0,292	0,294	0,296	0,298	0,300	0,302	0,304
17	0,306	0,308	0,310	0,311	0,313	0,315	0,317	0,319	0,321	0,323
18	0,325	0,327	0,329	0,331	0,333	0,335	0,337	0,338	0,340	0,342
19	0,344	0,346	0,348	0,350	0,352	0,354	0,356	0,358	0,360	0,362
20	0,364	0,366	0,368	0,370	0,372	0,374	0,376	0,378	0,380	0,382
21	0,384	0,386	0,388	0,390	0,392	0,394	0,396	0,398	0,400	0,402
22	0,404	0,406	0,408	0,410	0,412	0,414	0,416	0,418	0,420	0,422
23	0,424	0,427	0,429	0,431	0,433	0,435	0,437	0,439	0,441	0,443
24	0,445	0,447	0,449	0,452	0,454	0,456	0,458	0,460	0,462	0,464
25	0,466	0,468	0,471	0,473	0,475	0,477	0,479	0,481	0,483	0,486
26	0,488	0,490	0,492	0,494	0,496	0,499	0,501	0,503	0,505	0,507
27	0,510	0,512	0,514	0,516	0,518	0,521	0,523	0,525	0,527	0,529
28	0,532	0,534	0,536	0,538	0,541	0,543	0,545	0,547	0,550	0,552
29	0,554	0,557	0,559	0,561	0,563	0,566	0,568	0,570	0,573	0,575
30	0,577	0,580	0,582	0,584	0,587	0,589	0,591	0,594	0,596	0,598
31	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,613	0,615	0,618	0,620	0,622
32	0,625	0,627	0,630	0,632	0,635	0,637	0,640	0,642	0,644	0,647
33	0,649	0,652	0,654	0,657	0,659	0,662	0,664	0,667	0,669	0,672
34	0,675	0,677	0,680	0,682	0,685	0,687	0,690	0,692	0,695	0,698
35	0,700	0,703	0,705	0,708	0,711	0,713	0,716	0,719	0,721	0,724
36	0,727	0,729	0,732	0,735	0,737	0,740	0,743	0,745	0,748	0,751
37	0,754	0,756	0,759	0,762	0,765	0,767	0,770	0,773	0,776	0,778
38	0,781	0,784	0,787	0,790	0,793	0,795	0,798	0,801	0,804	0,807
39	0,810	0,813	0,816	0,818	0,821	0,824	0,827	0,830	0,833	0,836
40	0,839	0,842	0,845	0,848	0,851	0,854	0,857	0,860	0,863	0,866

$\alpha^\circ$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
41	0,869	0,872	0,875	0,879	0,882	0,885	0,888	0,891	0,894	0,897
42	0,900	0,904	0,907	0,910	0,913	0,916	0,920	0,923	0,926	0,929
43	0,933	0,936	0,939	0,942	0,946	0,949	0,952	0,956	0,959	0,962
44	0,966	0,969	0,972	0,976	0,979	0,983	0,986	0,990	0,993	0,997
45	1,000	1,003	1,007	1,011	1,014	1,018	1,021	1,025	1,028	1,032
46	1,036	1,039	1,043	1,046	1,050	1,054	1,057	1,061	1,065	1,069
47	1,072	1,076	1,080	1,084	1,087	1,091	1,095	1,099	1,103	1,107
48	1,111	1,115	1,118	1,122	1,126	1,130	1,134	1,138	1,142	1,146
49	1,150	1,154	1,159	1,163	1,167	1,171	1,175	1,179	1,183	1,188
50	1,192	1,196	1,200	1,205	1,209	1,213	1,217	1,222	1,226	1,230
51	1,235	1,239	1,244	1,248	1,253	1,257	1,262	1,266	1,271	1,275
52	1,280	1,285	1,289	1,294	1,299	1,303	1,308	1,313	1,317	1,322
53	1,327	1,332	1,337	1,342	1,347	1,351	1,356	1,361	1,366	1,371
54	1,376	1,381	1,387	1,392	1,397	1,402	1,407	1,412	1,418	1,423
55	1,428	1,433	1,439	1,444	1,450	1,455	1,460	1,466	1,471	1,477
56	1,483	1,488	1,494	1,499	1,505	1,511	1,517	1,522	1,528	1,534
57	1,540	1,546	1,552	1,558	1,564	1,570	1,576	1,582	1,588	1,594
58	1,600	1,607	1,613	1,619	1,625	1,632	1,638	1,645	1,651	1,658
59	1,664	1,671	1,678	1,684	1,691	1,698	1,704	1,711	1,718	1,725
60	1,732	1,739	1,746	1,753	1,760	1,767	1,775	1,782	1,789	1,797
61	1,804	1,811	1,819	1,827	1,834	1,842	1,849	1,857	1,865	1,873
62	1,881	1,889	1,897	1,905	1,913	1,921	1,929	1,937	1,946	1,954
63	1,963	1,971	1,980	1,988	1,997	2,006	2,014	2,023	2,032	2,041
64	2,050	2,059	2,069	2,078	2,087	2,097	2,106	2,116	2,125	2,135
65	2,145	2,154	2,164	2,174	2,184	2,194	2,204	2,215	2,225	2,236
66	2,246	2,257	2,267	2,278	2,289	2,300	2,311	2,322	2,333	2,344
67	2,356	2,367	2,379	2,391	2,402	2,414	2,426	2,438	2,450	2,463
68	2,475	2,488	2,500	2,513	2,526	2,539	2,552	2,565	2,578	2,592
69	2,605	2,619	2,633	2,646	2,660	2,675	2,689	2,703	2,718	2,733
70	2,747	2,762	2,778	2,793	2,808	2,824	2,840	2,856	2,872	2,888
71	2,904	2,921	2,937	2,954	2,971	2,989	3,006	3,024	3,042	3,060
72	3,078	3,096	3,115	3,133	3,152	3,172	3,191	3,211	3,230	3,251
73	3,271	3,291	3,312	3,333	3,354	3,376	3,398	3,420	3,442	3,465
74	3,487	3,511	3,534	3,558	3,582	3,606	3,630	3,655	3,681	3,706
75	3,747	3,762	3,778	3,793	3,808	3,824	3,840	3,856	3,872	3,888
76	4,011	4,041	4,071	4,102	4,134	4,165	4,198	4,230	4,264	4,297
77	4,331	4,366	4,402	4,437	4,474	4,511	4,548	4,586	4,625	4,665
78	4,705	4,745	4,787	4,829	4,872	4,915	4,959	5,005	5,050	5,097
79	5,145	5,193	5,242	5,292	5,343	5,396	5,449	5,503	5,558	5,614
80	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243
81	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026
82	7,115	7,207	7,300	7,396	7,495	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028
83	8,144	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357
84	9,514	9,677	9,845	10,02	10,20	10,39	10,58	10,78	10,99	11,20
85	11,43	11,66	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27
88	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08
89	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0

## Lampiran 2

### Konversi Sudut

Tabel trigonometri hanya memuat sudut dalam satuan derajat. Jika sudut yang akan dicari nilai sinus, kosinus, atau tangen dalam satuan menit atau radian, maka harus dikonversikan ke satuan derajat dengan rumus:

$$1'(1 \text{ menit}) = \frac{1}{60}^\circ$$
$$1 \text{ radian} = 57,296^\circ$$

#### Contoh:

1.  $\sin 23^\circ 30' = \sin \left( 23 \times \frac{30}{60} \right)^\circ = \sin 23,5^\circ = 0,399$
2.  $\cos 1,03 \text{ rad} = \cos(1,03 \times 57,296)^\circ = \cos 74,5^\circ = 0,267$

## Lampiran 3

### Mencari Nilai Kosekan, Sekan, dan Cotangen Sudut Lancip

Nilai kosekan, sekan, dan kotangen sudut lancip dapat dicari dengan terlebih dahulu mengubahnya ke bentuk kebalikan perbandingan trigonometri:

$$\sec a^{\circ} = \frac{1}{\cos a^{\circ}}$$

$$\operatorname{cosec} a^{\circ} = \frac{1}{\sin a^{\circ}}$$

$$\cotan a^{\circ} = \frac{1}{\tan a^{\circ}}$$

Contoh:

$$1. \sec 35^{\circ} = \frac{1}{\cos 35^{\circ}} = \frac{1}{0,819} = 1,221$$

$$2. \operatorname{cosec} 47,3^{\circ} = \frac{1}{\sin 47,3^{\circ}} = \frac{1}{0,735} = 1,361$$

$$3. \cotan 74,5^{\circ} = \frac{1}{\tan 74,5^{\circ}} = \frac{1}{3,606} = 0,277$$

## BIODATA PENULIS



**Kristayulita** adalah dosen tetap program studi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Mataram, dengan mengampu matakuliah Trigonometri. Lahir di Kananga Bolo, Bima 28 Juli 1981. Menyelesaikan pendidikan sarjana strata S1 di Universitas Mandalika Mataram (IKIP Mataram), pendidikan strata S2 di Universitas Gajah Mada, dan pendidikan strata S3 (doktoral) di Universitas Negeri Malang. Rumpun bidang keilmuan yang ditekuni adalah Matematika dan Pendidikan Matematika. Sejak 2012 hingga saat ini, aktif sebagai penulis dan sebagai reviewer sejak tahun 2018 pada berbagai jurnal Ilmiah Nsional.Blog lecture:  
<https://kristayulita.lec.uinmataram.ac.id/>



**Sanabil**

Puri Bunga Amanah  
Jl. Kerajinan 1 Blok C/13 Mataram  
Telp. (0370) 7505946/ +6281805311362  
E-mail: sanabilpublishing@gmail.com  
[www.sanabil.web.id](http://www.sanabil.web.id)

ISBN 978-623-7881-99-5

