大学物理(上)

冯 波

电话：**18627014796**

email: bfeng@hust.edu.cn

作业：3 — T1-T3

请认真独立完成作业！

➢ 角动量定理 角动量守恒定律

$$\boxed{\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

当 $\vec{M} = 0$ 时，

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ 是恒矢量

➢ 力 $\vec{F}$ 将质点由 a 移动到 b 所做的总功

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b F \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \cos\alpha$$

三、动能定理

质点由 a运动到 b，合外力做的功为：

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b (F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k})\cdot(\vec{i}\mathrm{d}x+\vec{j}\mathrm{d}y+\vec{k}\mathrm{d}z)$$

$$=\int_a^b (F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z)$$

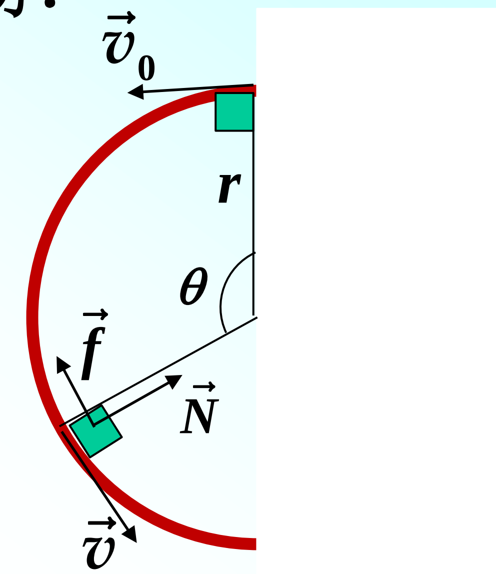
$$=\int_a^b \left(m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x+m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y+m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}z\right)$$

$$=m\int_a^b (v_x\mathrm{d}v_x+v_y\mathrm{d}v_y+v_z\mathrm{d}v_z)$$

$$=\frac{m}{2}\int_a^b \mathrm{d}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)=\frac{m}{2}\int_a^b \mathrm{d}v^2 \boxed{=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2}$$

$$\boxed{A_{ab}=E_{kb}-E_{ka}=\Delta E_k}$$ 质点的动能定理

例：在光滑水平桌面上，固定一半圆形屏障，一质量为m的滑块以速度v_0沿切线方向进入屏障一端，设滑块与屏障间的滑动摩擦系数为μ，求滑块由另一端滑出时摩擦力做的功？



解：滑块做减速圆周运动，受到切向的摩擦力和法向的支持力作用

法向：$N = m\dfrac{v^2}{r}$　　　切向：$f = -\mu N$

$$f = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = m\omega\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\Rightarrow m\omega\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = -\mu m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\mu\mathrm{d}\theta \Rightarrow \int_{v_0}^{v_f}\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta$$

得 $v_f = v_0 e^{-\mu\pi}$

由动能定理，摩擦力做的功为

$$A_f = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\ \ e^{-2\mu\pi} - 1$$

第7节　保守力 势能

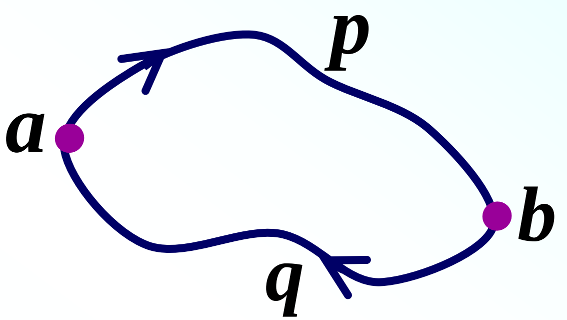
一、保守力与非保守力

保守力：　对质点做功的大小只与质点的始末位置有关，而与路径无关。

如：重力、弹性力、万有引力等。

非保守力：对质点做功的大小不但与质点的始末位置有关，而且还与路径有关。

如：摩擦力、粘滞力等。



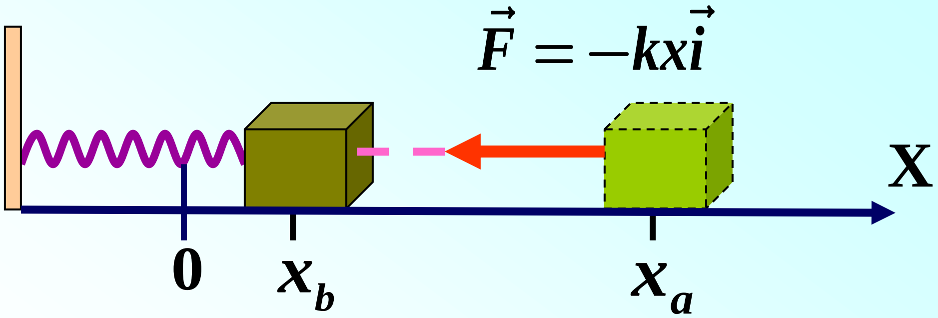
如图，当质点在保守力的作用下沿闭合路径 *apbqa*绕行一周时，

$$\oint \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{apb} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{bqa} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{apb} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int_{aqb} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

即，保守力沿任一闭合路径做功为零（保守力的环流为零）

二、势能

三种保守力的功

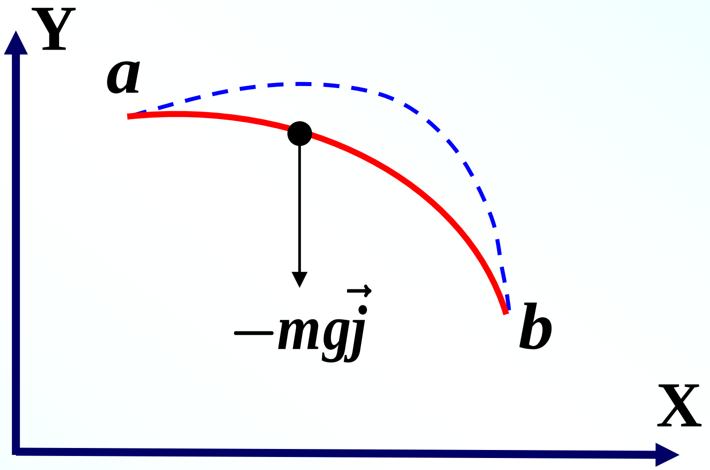


1. 弹力的功：

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = -k\int_a^b x\vec{i}\cdot dx\vec{i} = -k\int_{x_a}^{x_b} x dx$$

$$= -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right)$$

2. 重力的功：



$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_a^b mg\vec{j}\cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_a^b mg\vec{j}\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$= -\int_{y_a}^{y_b} mg dy = -mg(y_b - y_a)$$

3. 万有引力的功：

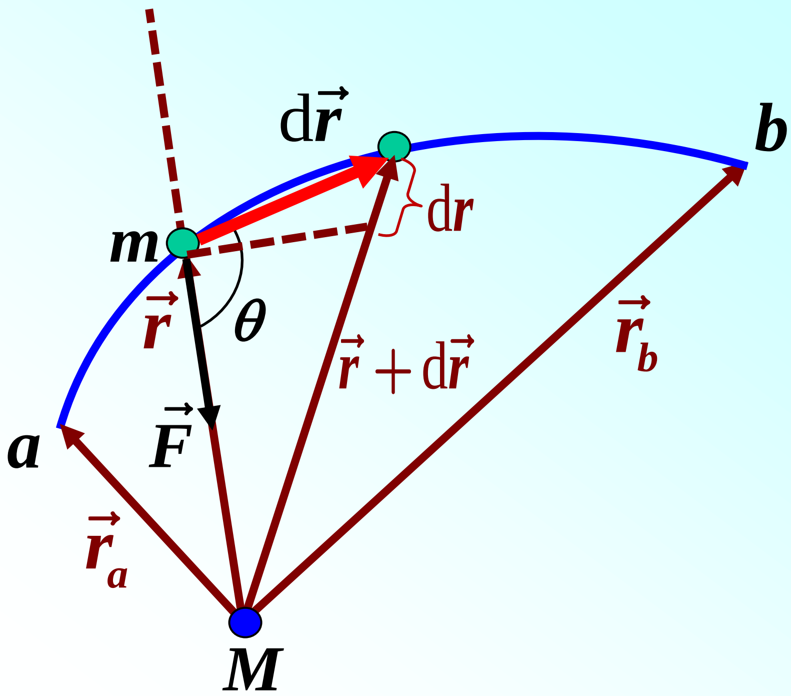
$$A_{ab}=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=-G\int_a^b \frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r\cdot d\vec{r}$$

$$=-G\int_a^b \frac{Mm}{r^2}\left|d\vec{r}\right|\cos(\pi-\theta)$$

$$=-G\int_a^b \frac{Mm}{r^2}dr$$

$$=G\frac{Mm}{r}\Bigg|_{r_a}^{r_b}$$

$$=-\left[\left(-G\frac{Mm}{r_b}\right)-\left(-G\frac{Mm}{r_a}\right)\right]$$



三种保守力的功

弹力的功： $A_{ab}=-\left(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2\right)$

重力的功： $A_{ab}=-mg(y_b-y_a)$

引力的功： $A_{ab}=-\left[\left(-G\frac{Mm}{r_b}\right)-\left(-G\frac{Mm}{r_a}\right)\right]$

$E_p=\frac{1}{2}kx^2$

$E_p=mgy$

$E_p=-\frac{GMm}{r}$

势能

由此可见，保守力做功的共同特点是与路径无关，只与初末态位置有关。我们在保守力作用的场中定义一个与位置相关的函数，称为势能。

$$\Rightarrow A_{ab}=-(E_{pb}-E_{pa})=-\Delta E_p$$

保守力所做的功等于势能增量的负值。

（1）保守力（如：重力、弹力和万有引力）的功与路无关，由此可引入势能的概念。

（2）质点在任一位置的势能，等于把质点由该位置移到势能为零的点的过程中，保守力所做的功：

$$A_{ab}=\int_a^b \vec{F}_{保}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=-(E_{pb}-E_{pa}) \qquad 设：E_{pb}=0$$

$$=-(0-E_{pa})=E_{pa}$$

原则上，势能零点可任选。

（3）势能是属于物体系统的，不为单个物体所具有。

如：重力势能属于由重物和地球所组成的系统。

（4）由势能函数可求保守力。

保守力所做的功，等于**势能增量的负值**：$A_{ab}=-\Delta E_p$

考虑质点在保守力$\vec{F}$的作用下移动$\mathrm{d}\vec{r}$，其势能的增量为$\mathrm{d}E_p$

$$\mathrm{d}A=-\mathrm{d}E_p$$

在直角坐标系中，

$$\mathrm{d}E_p=\frac{\partial E_p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial E_p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial E_p}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\left(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}\right)\cdot\left(\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k}\right)$$

$$=F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}+F_x\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial E_p}{\partial y}+F_y\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial E_p}{\partial z}+F_z\right)\mathrm{d}z=0$$

上式对任意dx，dy，dz都成立，则

$$F_x=-\frac{\partial E_p}{\partial x},\quad F_y=-\frac{\partial E_p}{\partial y},\quad F_z=-\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

第8节 功能原理 机械能守恒定律

一、质点系的动能定理

对质点系中任一质点 *i*应用质点的动能定理，得

$$A_{i外} + A_{i内} = \Delta E_{k,i}$$

对所有质点，有 $\sum_i A_{i外} + \sum_i A_{i内} = \sum_i \Delta E_{ki}$

$$\sum_i A_{i内} = \sum_i \vec{F}_{i内} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i \neq \left(\sum_i \vec{F}_{i内} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\boxed{A_{外} + A_{内} = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k}$$ 质点系的动能定理

内力可以改变系统的总动能，但不改变其总动量。

二、功能原理

质点系的动能定理：

$$\boxed{A_{外}+A_{内}=E_{kb}-E_{ka}}$$

$$\begin{cases} A_{外}+A_{保守内力}+A_{非保守内力}=E_{kb}-E_{ka} \\ A_{保守内力}=-(E_{pb}-E_{pa}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_{外}+A_{非保守内力}=E_{kb}+E_{pb}-E_{ka}+E_{pa}$$

$$\boxed{A_{外}+A_{非保守内力}=E_{b}-E_{a}}$$

机械能：$E=E_{k}+E_{p}$

质点系机械能的增量等于外力的功和非保守内力的功的总和。

——功能原理

三、机械能守恒定律

根据功能原理 $\boxed{A_{外} + A_{非保守内力} = E_b - E_a}$

若 $A_{外} + A_{非保守内力} = 0$

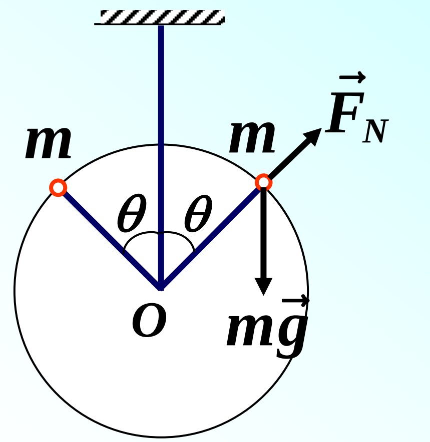
则 $\Delta E = E_b - E_a = 0$

即 $E = E_k + E_p$ = 恒量

当一个系统内只有保守内力做功，非保守内力和一切外力都不做功，或者非保守内力和一切外力的总功为零时，质点系的总机械能保持恒定。

——质点系的机械能守恒定律

例：如图所示，一质量为M的光滑圆环，半径为R，用细线悬挂在支点上，环上串有质量都是m的两个珠子，让两珠从环顶同时静止释放向两边下滑，问滑到何处（用θ表示）时环将开始上升？



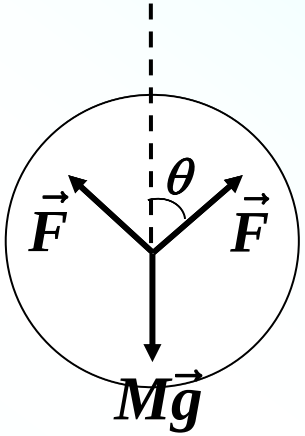
解：由于环对珠的支持力不做功，系统的机械能守恒。

当滑到图中位置时有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta)$$

珠子受的法向分力为 $f_n = mg\cos\theta - F_N = m\dfrac{v^2}{R}$

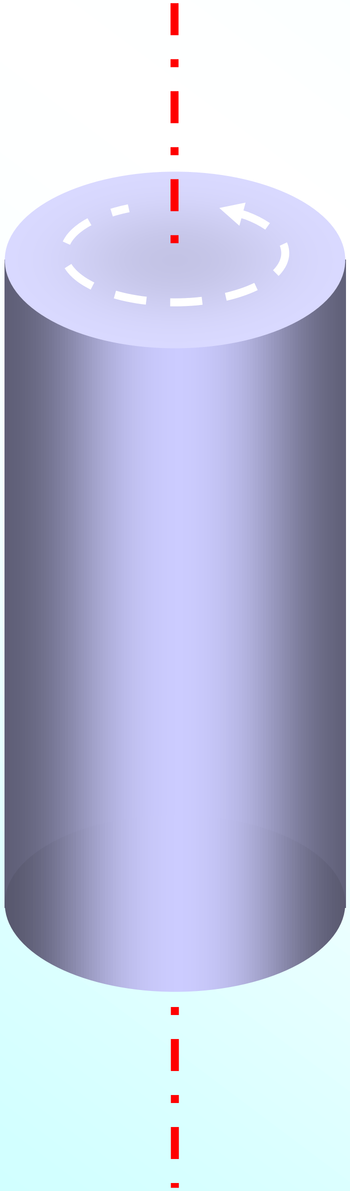
速度足够大时 $\vec{F}_N$将反向。

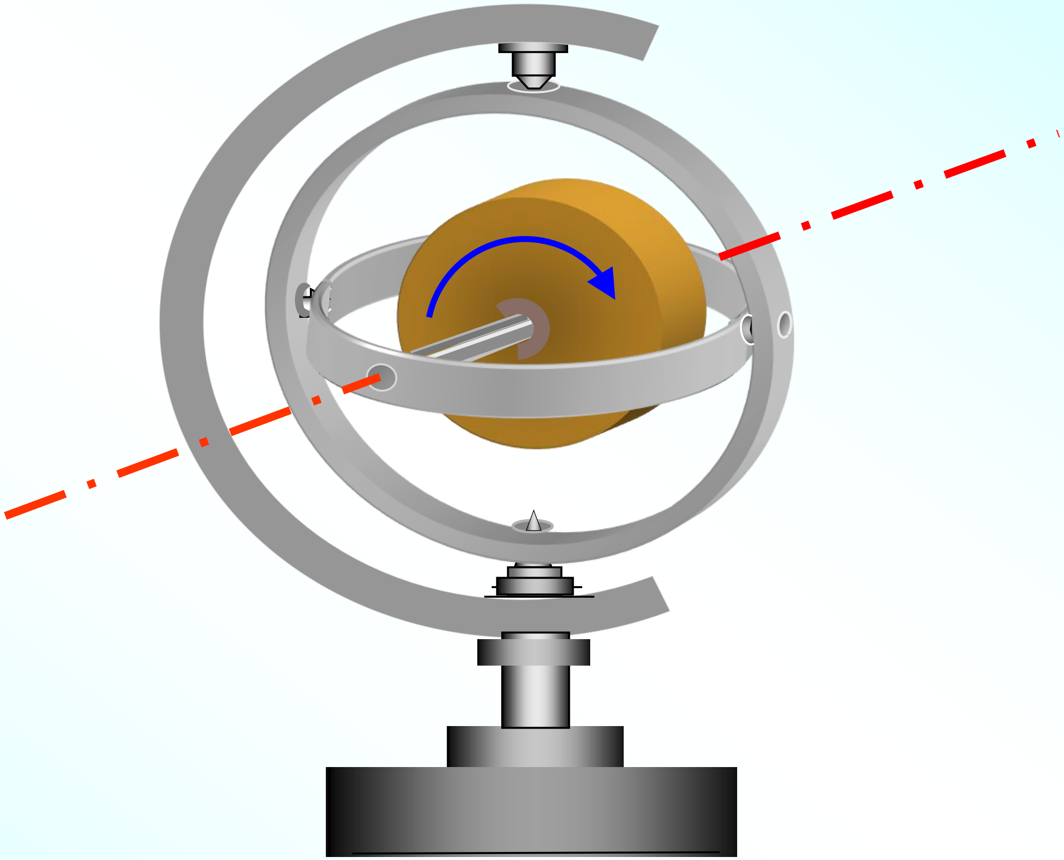


故，环开始上升时 $2F_N\cos\theta = Mg$

由以上三式解得 $(2-3\cos\theta)\cos\theta = \dfrac{M}{2m}$

第3章　刚体的定轴转动





什么是刚体?

物体的大小和形状可以忽略——质点

物体的大小和形状不能忽略；但物体的大小和形状的改变可以忽略——刚体

所谓刚体，就是在任何情况下，大小和形状都不会发生任何变化的物体；刚体是一种理想的物理模型。

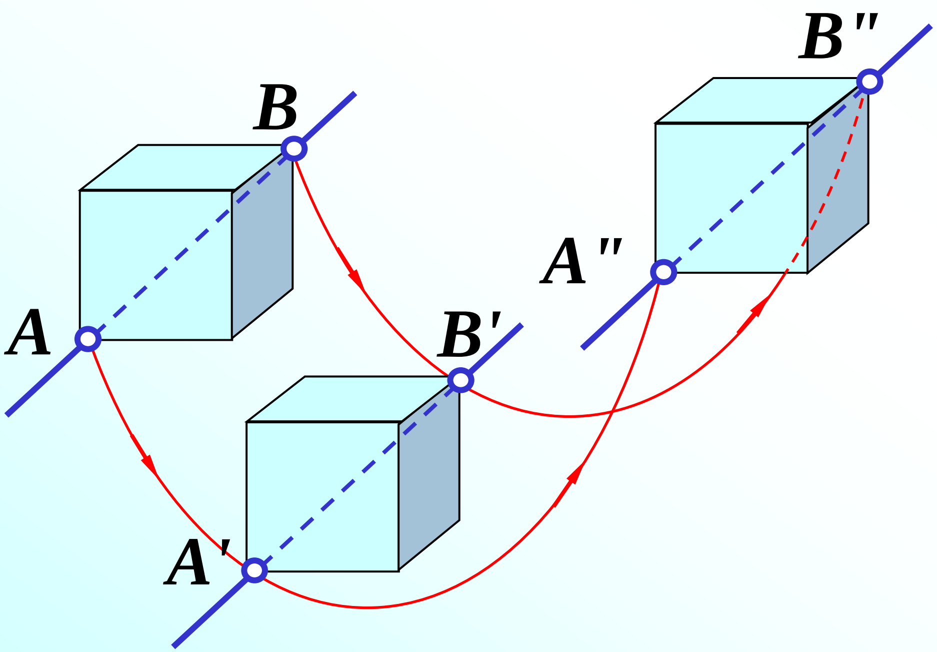
- ✓ 把刚体看成许多微小的质元组成，把每个质元看成质点，因此可把刚体看作是一个质点系；
- ✓ 刚体运动中大小和形状不变，任意两质点之间的距离保持不变，因此刚体可看成由无数相对位置不变的质点组成的特殊的质点系。

关于质点系的力学规律都可用于刚体 。

一、 刚体的运动

刚体的基本运动形式是平动和转动。

1. 刚体的平动：刚体中任意两点的连线保持方向不变。

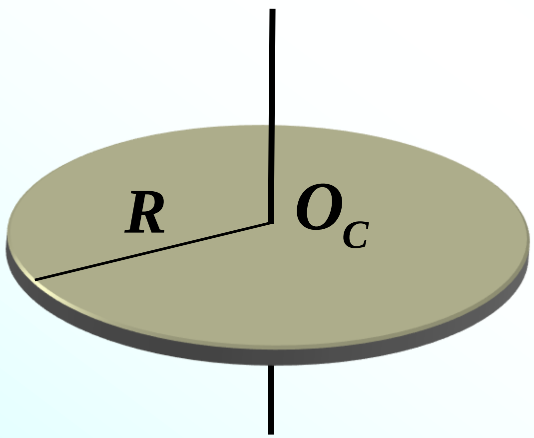


平动时，刚体内各质元的轨迹都一样；同一时刻，各质元的位移、速度、加速度相同，可用一点的运动代表整体的运动。

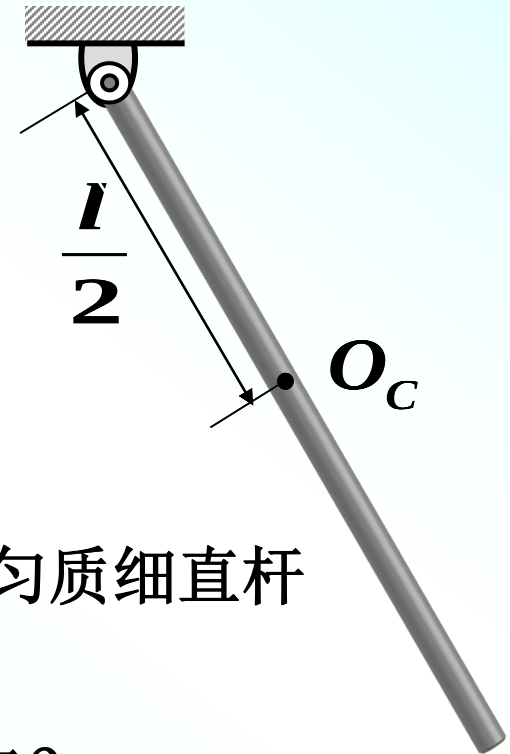
用质心运动来代表整体的运动。

质心（质点系质量分布的中心）

密度分布均匀、有规则几何形状的刚体，其质量中心与几何中心重合，**几何对称中心**即为该刚体的质心。



匀质薄圆盘



匀质细直杆

不均匀、不规则刚体的质心如何确定？

1）质心的位矢

设N个质点$m_1, m_2, \ldots, m_N$，对应的位矢为 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N$

定义：质心的位矢 $\vec{r}_c = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$ 或者 $\vec{r}_c = \dfrac{\int \vec{r} \cdot \mathrm{d}m}{M}$

因为 $\vec{r}_c = x_c \vec{i} + y_c \vec{j} + z_c \vec{k}$

所以，每个分量上有：

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{1}{M} \sum m_i x_i \\ y_c = \dfrac{1}{M} \sum m_i y_i \\ z_c = \dfrac{1}{M} \sum m_i z_i \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} x_c = \dfrac{1}{M} \int x \mathrm{d}m \\ y_c = \dfrac{1}{M} \int y \mathrm{d}m \\ z_c = \dfrac{1}{M} \int z \mathrm{d}m \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}}$$

2）质心运动定理

质心的速度：$\vec{v}_c = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t}$

质心的加速度：$\vec{a}_c = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_c}{\mathrm{d}t}$

设任一质元 m_i 受力 $\vec{F}_{i外}$、$\vec{f}_{i内}$，则有：

$$\sum_i \vec{F}_{i外} + \vec{f}_{i内} = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_{i外} = M\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \Rightarrow \vec{F}_{外} = M\vec{a}_c$$

（质心运动定理）

即：质心运动如同一质点，只是将质量全部集中于该点，所受的力是质点系受的所有外力之和。

注：质心上可能既无质量，又未受力。如：篮球中心

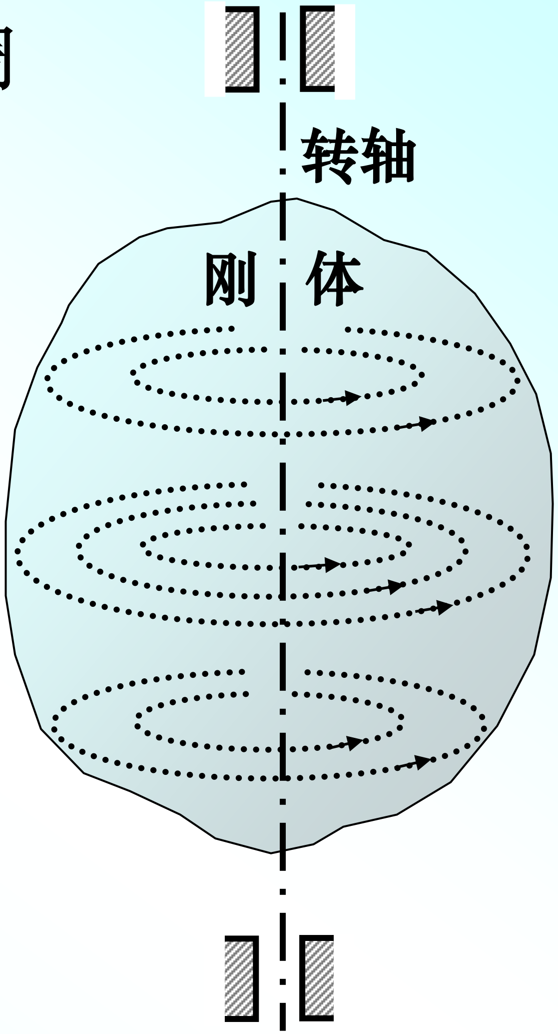
2. 刚体的（定轴）转动

刚体各点都绕同一直线（转轴）作圆周运动，称为转动。

最简单的情况是转轴的位置和方向都固定不变的转动，称为刚体的定轴转动。

本章仅研究刚体的定轴转动。

- ✓ 转轴上各点都保持静止
- ✓ 转轴外各点都在垂直于轴的平面作圆周运动。
- ✓ 在同一时间内，各点线速度不同，但对轴的转角相等。



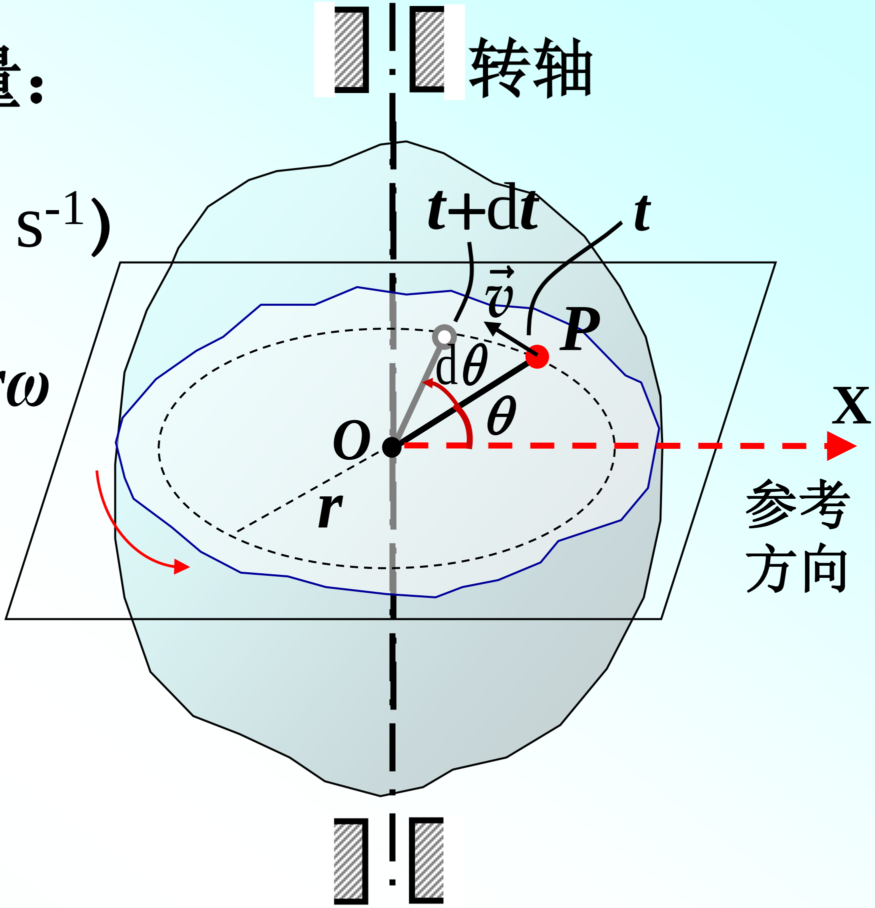
对于转动规律，用角量来描述较为方便。

✓ 描述刚体的定轴转动的物理量：

角速度大小：$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ $(\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1})$

线速度大小：$v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\omega$

矢量式 $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$



角加速度大小：$\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = v\omega$$

矢量式 $\boxed{\vec{a}_t = \vec{\alpha}\times\vec{r}}$ $\boxed{\vec{a}_n = \vec{\omega}\times\vec{v}}$