大学物理(上)

冯 波

电话：**18627014796**
email: bfeng@hust.edu.cn

- 牛顿运动定律在惯性参考系中的应用

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$ （对质点和质点系都成立）

m为常量时： $\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$

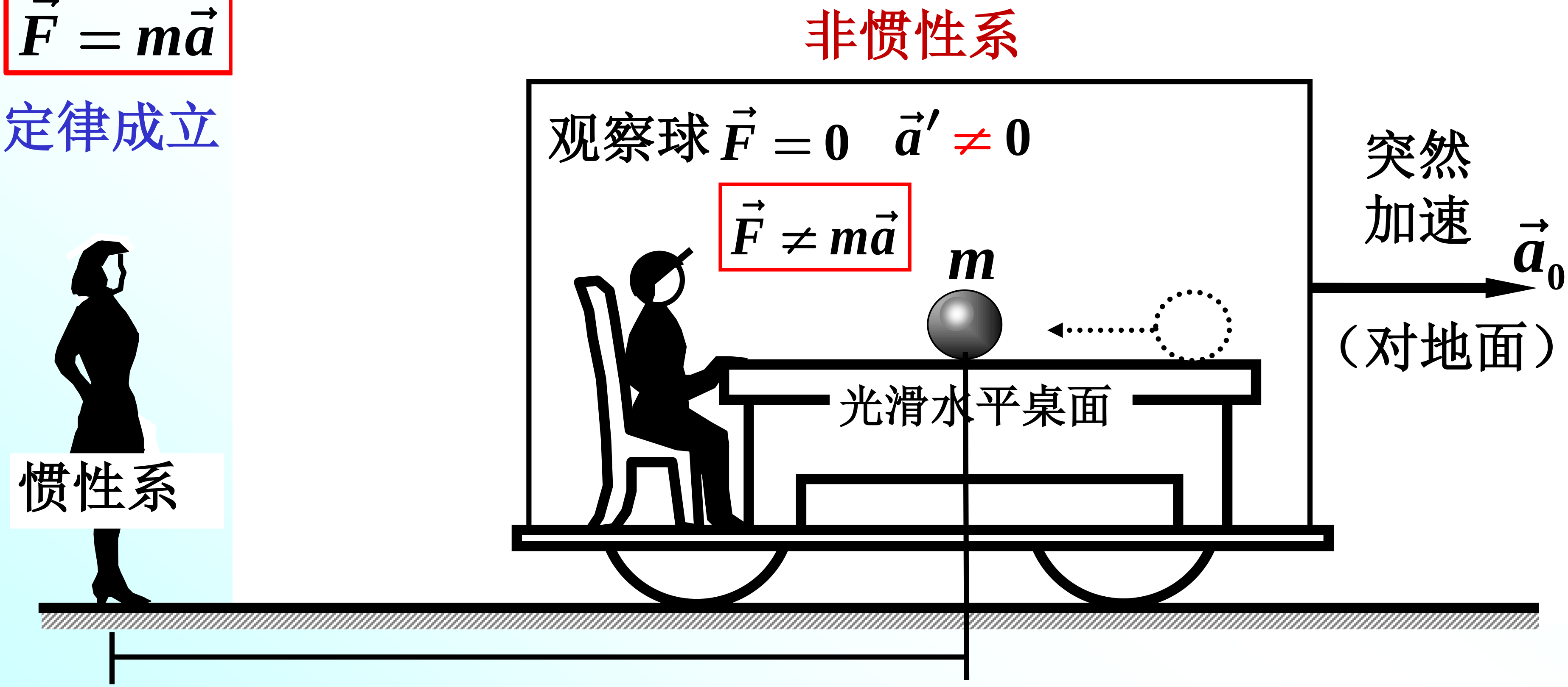
2. 在非惯性参考系中的应用

a. 加速平动参考系

观察球 $\vec{F}=0$ $\vec{a}=0$

$\boxed{\vec{F}=m\vec{a}}$

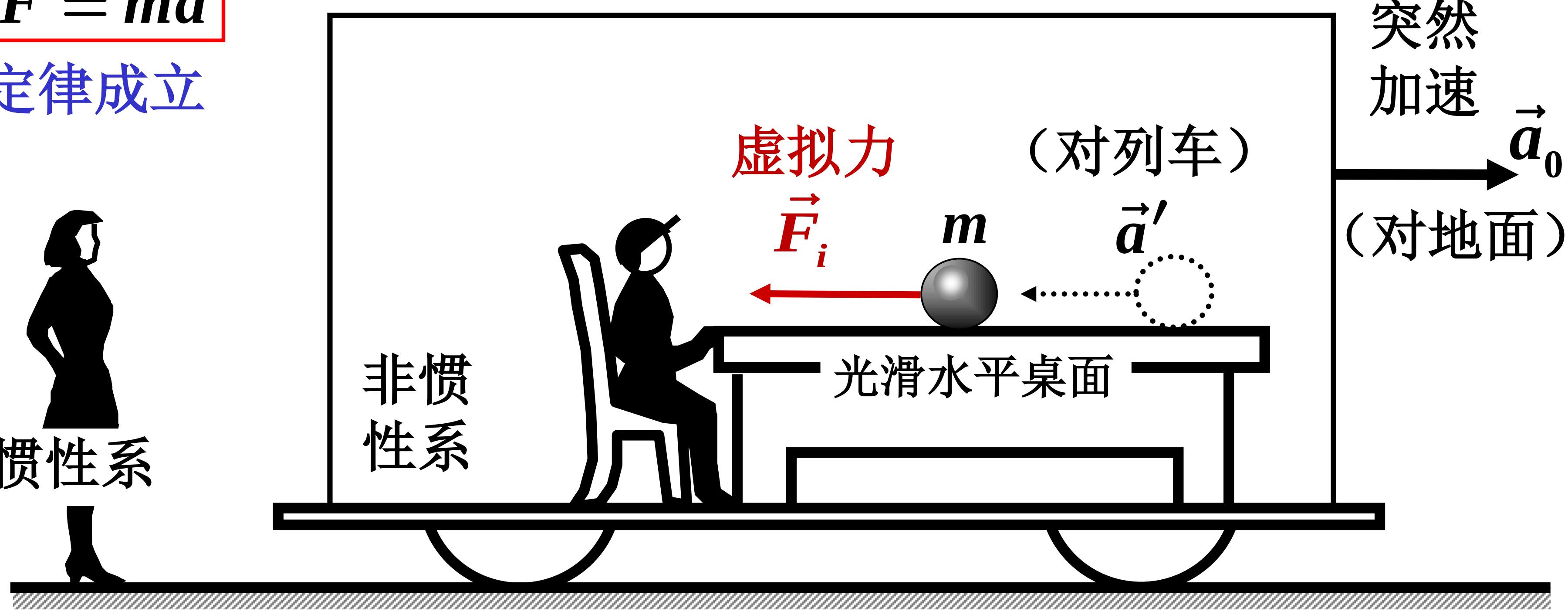
定律成立



能否使非惯性系中的观察者也能用牛顿第二定律的形式去求解力学问题？

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

定律成立



在惯性系：

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 \text{（相对运动）}$$

$$\Rightarrow 0 = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}' = -\vec{a}_0}$$

在非惯性系：定义虚拟力

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_0 \text{（惯性力）}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_i = m\vec{a}'$$

在非惯性系中，小球的运动定律形式上与牛顿第二定律一样

非惯性系中力学定律形式

$$\boxed{\vec{F} + \vec{F}_i = m\vec{a}'}$$

真实的合外力　　非惯性系虚设的惯性力　　非惯性系中的加速度

在加速平动参照系中：

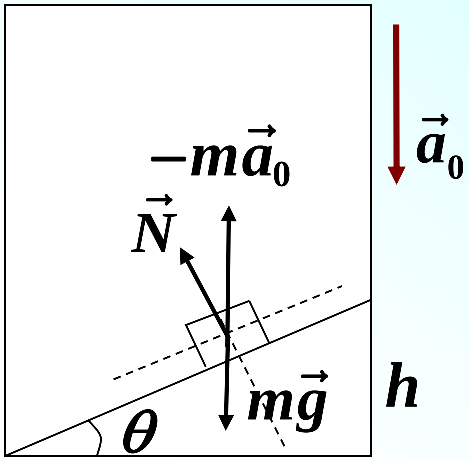
$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$$ （$\vec{a}_0$：非惯性系对惯性系）

- 惯性力是虚拟的，不是物体间的相互作用力，不能归结到自然界的四种基本力，不服从牛顿第三定律。
- 这种虚拟方法，给研究某些力学问题带来方便，对力学发展有重大影响。

例：升降机以加速度a_0=1.8 m·s^{-2}下降。升降机内有一与地板成$\theta = 30^{\circ}$角的光滑斜面，一物体从斜面顶端由相对静止下滑。设斜面顶端离地板高h=1 m. 求物体滑到斜面末端所需的时间。

解：选升降机为参考系，它是加速平动参考系（非惯性系）。

物体除受重力和斜面的支承力外，还受到惯性力的作用，如图所示。



设物体沿斜面下滑的加速度为a，

则在平行于斜面的方向上有：

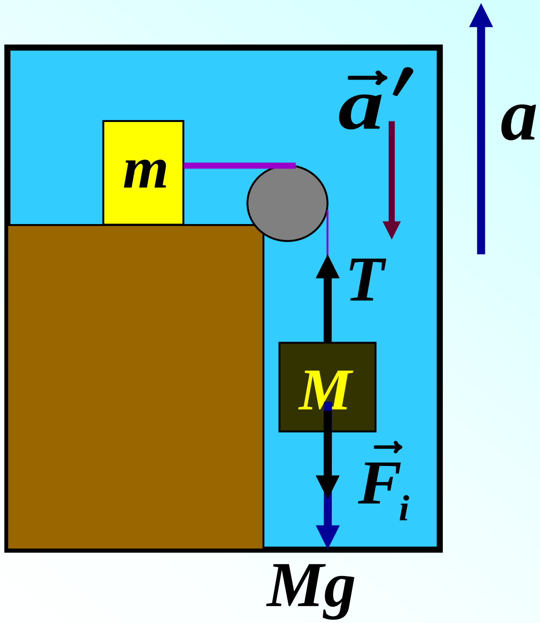
$$mg\sin\theta - ma_0\sin\theta = ma \Rightarrow a = (g - a_0)\sin\theta$$

斜面长为S：$S = \dfrac{h}{\sin\theta}$

所以物体沿斜面作匀加速直线运动

$$S = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g - a_0}} = \frac{1}{\sin 30^{\circ}}\sqrt{\frac{2\times 1}{9.8 - 1.8}} = 1\ \text{s}$$

例： 升降机内物体m=100克，M=0.2千克用滑轮连接，升降机以加速度a=0.5g上升。求（1）在机内观察者测得两物的加速度？（2）在地面的观察者测得的加速度？



解：（1）设M相对升降机的加速度为$\vec{a}'$

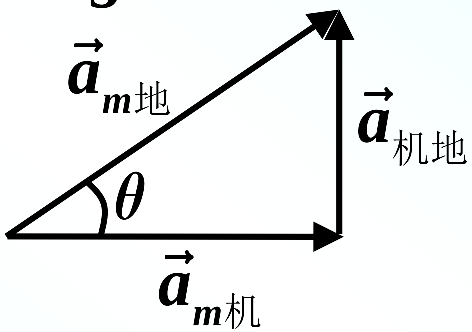
$$\begin{cases} \text{对}M\text{：} & Mg - T + Ma = Ma' \\ \text{对}m\text{：} & T = ma' \end{cases}$$

$$\Rightarrow a' = \frac{M}{m+M}\cdot\frac{3}{2}g = g$$

（2）在地面的观察者

对M：$\vec{a}_{M地} = \vec{a}_{M机} + \vec{a}_{机地}$　　$a_{M地} = a' - a = 0.5g$

对m：$\vec{a}_{m地} = \vec{a}_{m机} + \vec{a}_{机地}$

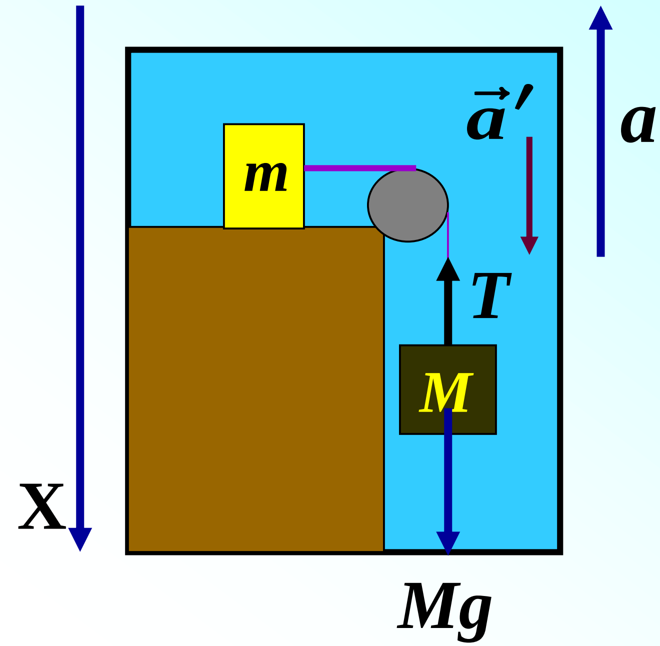


$$\begin{cases} \vec{a}_{m机}\text{为水平向右加速度} & a' = g \\ \vec{a}_{机地}\text{为竖直向上加速度} & a = 0.5g \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{m地} = \sqrt{a'^2 + a^2} = \sqrt{5}g/2 \qquad \theta = \tan^{-1} a/a' = 26^{\circ}34'$$

例：升降机内物体m=100克，M=0.2千克用滑轮连接，升降机以加速度a=0.5g上升。求（1）在机内观察者测得两物的加速度？（2）在地面的观察者测得的加速度？

另解：（2）



在地面参考系中，设m在水平和竖直方向上的加速度分别为a_1和a_2，则

$$\begin{cases} \text{对}m\text{：水平方向} \quad T = ma_1 \\ \qquad\quad \text{竖直方向} \quad a_2 = -a = -0.5g \\ \text{对}M\text{：} \quad Mg - T = Ma_{M\text{地}} \\ a_1 = a_{M\text{机}} = a_{M\text{地}} + a_{\text{地机}} = a_{M\text{地}} + a \end{cases}$$

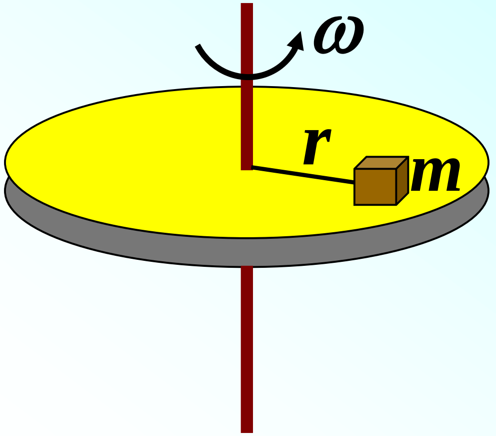
$$\Rightarrow Mg - m(a_{M\text{地}} + a) = Ma_{M\text{地}}$$

$$\Rightarrow a_{M\text{地}} = 0.5g \quad \Rightarrow a_1 = g$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

b. 匀速转动参考系

如图：在一个匀速转动的水平转盘上，一方块因受摩擦力而相对盘静止，转盘相对地面的角速度为ω.
求在转动参照系中方块受的惯性力。



在地面参照系：方块作匀速圆周运动

$$\vec{F}_{向心} = m\vec{a}_n = -mr\omega^2\vec{e}_r$$

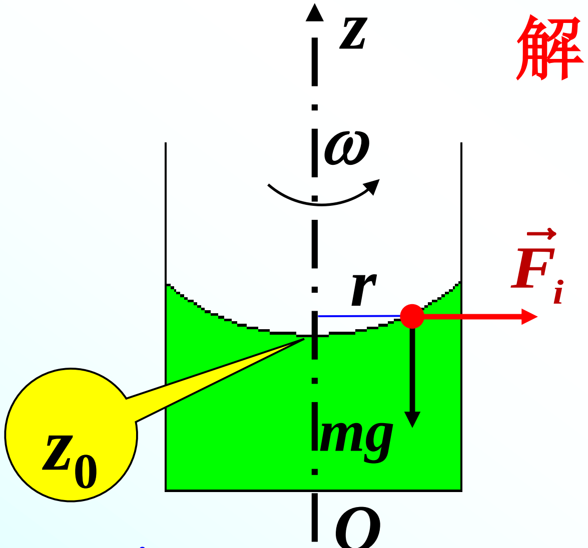
$$\vec{F}_{向心} = \vec{F}_{静摩擦}$$

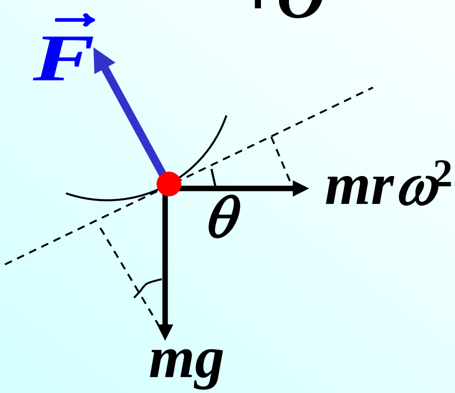
在转盘参考系：方块静止不动，即 $\vec{a}' = 0$

方块所受合力：$\vec{F}' = \vec{F}_{静摩擦} + \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{F}_i = -\vec{F}_{静摩擦}$

$$\Rightarrow \vec{F}_i = -m\vec{a}_n = \boxed{mr\omega^2\vec{e}_r}$$ （惯性离心力）

例： 水桶以角速度ω 旋转，求水面的形状？





$$\boxed{\vec{F}_i = mr\omega^2\vec{e}_r}$$

解： 水面关于z 轴对称。考虑水面任一质元m。

在水面参考系中看，质元m静止。

质元m周围的水对其的作用力方向为？

忽略水的切向应力，周围水对质元m的作用力垂直于液面。

于是，沿水面的切线方向有：

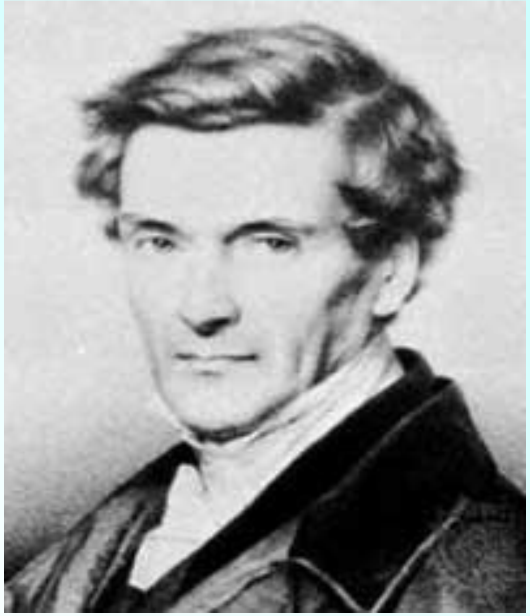
$$\begin{cases} mg\sin\theta - mr\omega^2\cos\theta = 0 \\ \quad \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{r\omega^2}{g} \\ \text{该点斜率为：} \tan\theta = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z = \frac{\omega^2}{g}\int_0^r r\mathrm{d}r \Rightarrow z = z_0 + \frac{r^2\omega^2}{2g}$$

所以，水面为抛物面

c. 科里奥利力（1835年）

当物体相对于转动参考系运动时，在此转动参考系内观察，物体所受到的惯性力除了惯性离心力之外，还有科里奥利力 (Coriolis force)



科里奥利（1792-1843）

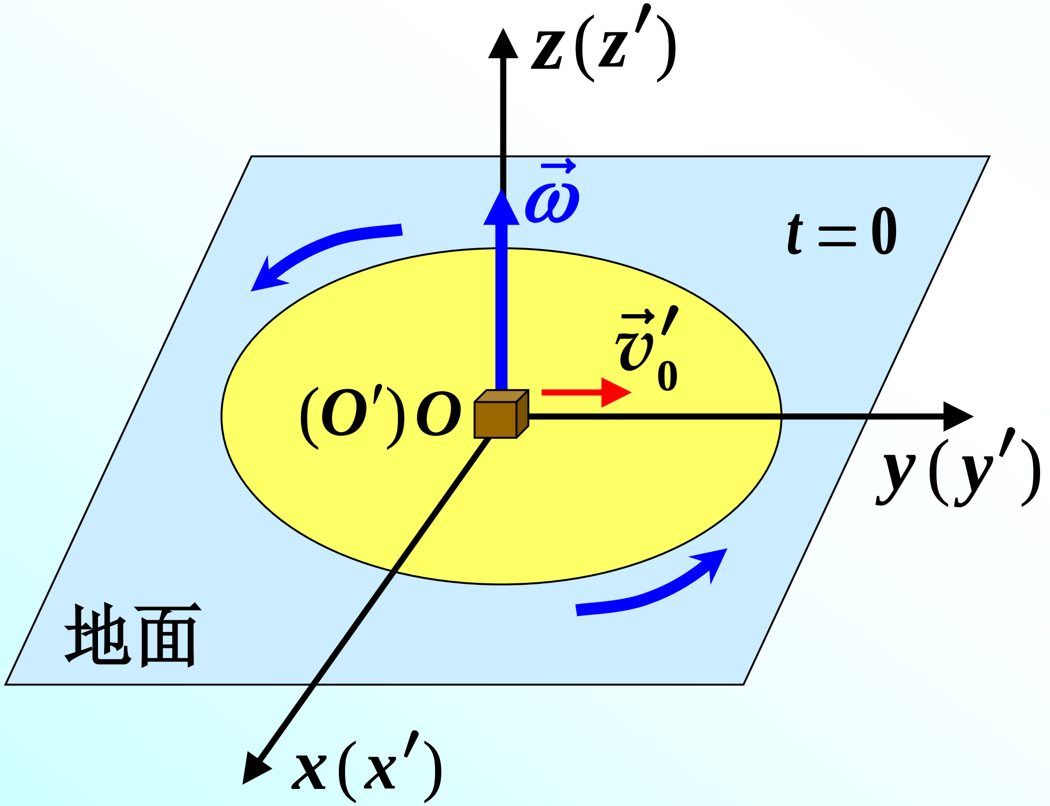
$$\boxed{\vec{F}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}}$$

*m*为物体的质量，$\vec{v}'$为物体相对于转动参考系的速度，$\vec{\omega}$为转动参考系相对惯性系转动的角速度。

对于转动参考系作变速转动和质点相对于转动参考系作变速运动的一般情况上式也适用。

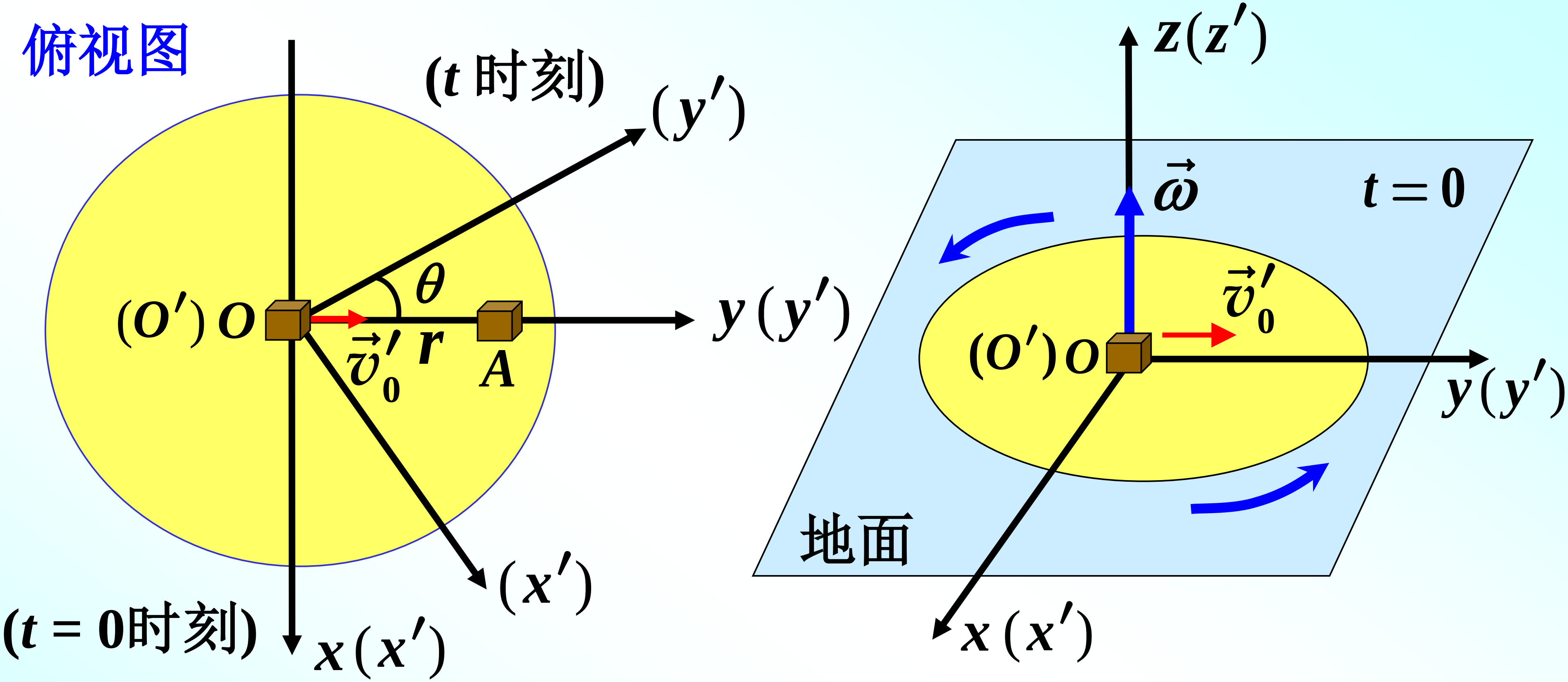
科里奥利力表达式的导出：

设地面上有一逆时针匀速旋转的光滑转盘。分别在地面（惯性系）上和转盘（非惯性系）上建立固定的坐标系*O-xyz*和 $O'-x'y'z'$，且$t=0$时两套坐标系重合。



在 $t=0$时，一质量为*m*的小滑块从坐标原点相对于转盘沿 y'轴以大小为 v_0' 的速度运动。

下面就此特例导出科里奥利力的表达式。



滑块相对地面沿 y 轴作匀速运动，在t 时刻

$$\overline{OA}=r=v_0' t,\qquad \theta=\omega t$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x'=v_0' t\sin(\omega t) \\ y'=v_0' t\cos(\omega t) \end{cases}$$

t 时刻圆盘坐标系中滑块的位置

t 时刻圆盘坐标系中滑块的位置 $x' = v'_0 t\sin(\omega t)$， $y' = v'_0 t\cos(\omega t)$

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = v'_0\sin(\omega t) + v'_0 t\omega\cos(\omega t) \\ v'_y = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} = v'_0\cos(\omega t) - v'_0 t\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{x'} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} = 2v'_0\omega\cos(\omega t) - v'_0 t\omega^2\sin(\omega t) \\ a_{y'} = \dfrac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t^2} = -2v'_0\omega\sin(\omega t) - v'_0 t\omega^2\cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{x'} = 2\omega\left[v'_0\cos(\omega t) - v'_0 t\omega\sin(\omega t)\right] + v'_0 t\omega^2\sin(\omega t)$$

$$= 2\omega v'_y + v'_0 t\omega^2\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow a_{y'} = -2\omega\left[v'_0\sin(\omega t) + v'_0 t\omega\cos(\omega t)\right] + v'_0 t\omega^2\cos(\omega t)$$

$$= -2\omega v'_x + v'_0 t\omega^2\cos(\omega t)$$

圆盘坐标系中，在t时刻

$$\begin{cases} a_{x'} = 2\omega v'_y + v'_0 t\omega^2 \sin(\omega t) \\ a_{y'} = -2\omega v'_x + v'_0 t\omega^2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

由非惯性系中力学定律形式 $\vec{F} + \vec{F}_i = m\vec{a}'$

得t时刻圆盘系中总的惯性力为

$$\vec{F}_i = m\vec{a}' = ma_{x'}\vec{i}' + ma_{y'}\vec{j}'$$

$$= m\left(2\omega v'_y + v'_0 t\omega^2 \sin(\omega t)\right)\vec{i}' + m\left(-2\omega v'_x + v'_0 t\omega^2 \cos(\omega t)\right)\vec{j}'$$

$$= 2m\left(\omega v'_y \vec{i}' - \omega v'_x \vec{j}'\right) + m\left(v'_0 t\omega^2 \sin(\omega t)\vec{i}' + v'_0 t\omega^2 \cos(\omega t)\vec{j}'\right)$$

$$= 2m\vec{v}' \times \vec{\omega} + mr\omega^2(\sin\theta\,\vec{i}' + \cos\theta\,\vec{j}')$$

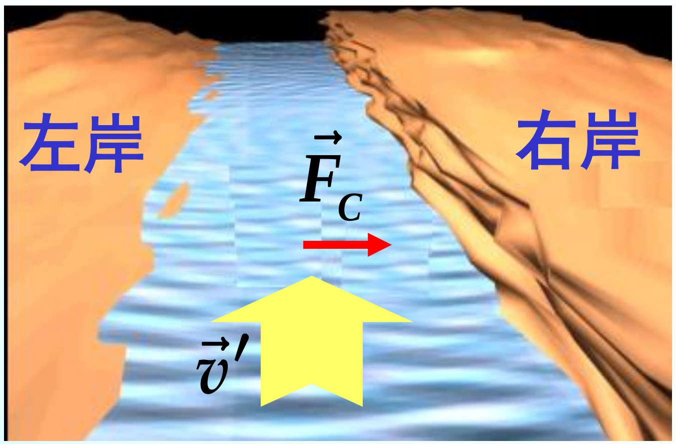
$$= \boxed{2m\vec{v}' \times \vec{\omega}} + \underline{mr\omega^2 \vec{e}_r}$$

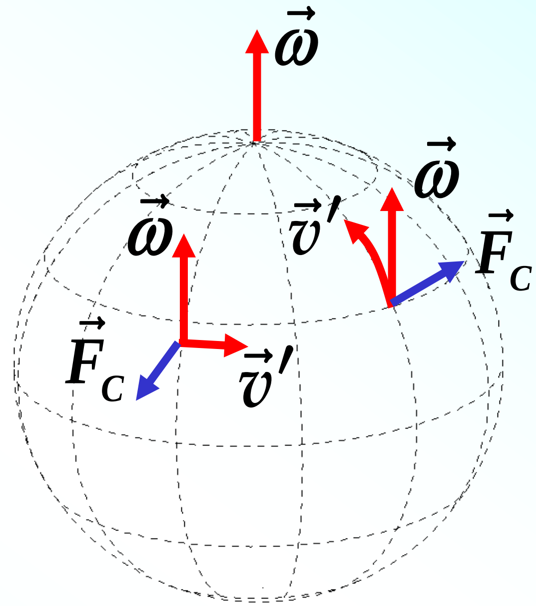
科里奥利力　　惯性离心力

d. 科里奥利力的例子

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

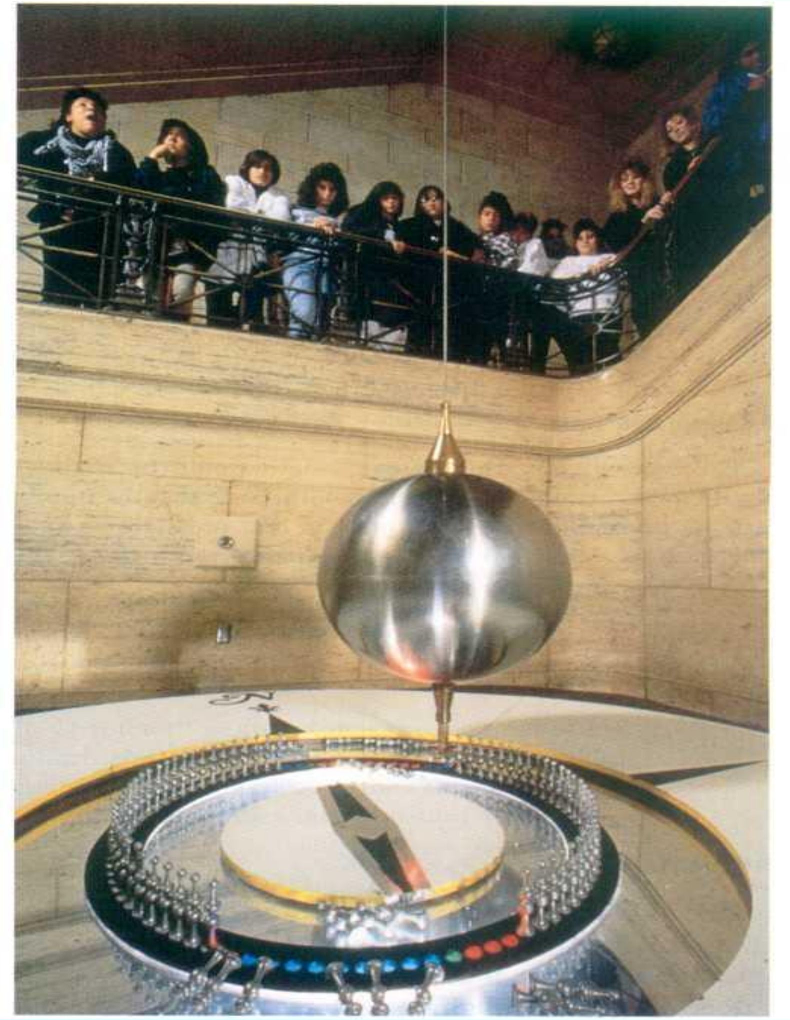
1. 贝尔定律：北半球河流右岸比较陡削，南半球则左岸比较陡峭。这是人们从实际观察中总结出来的。

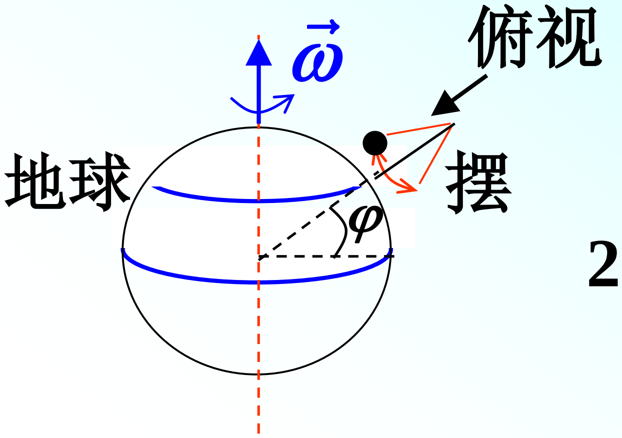


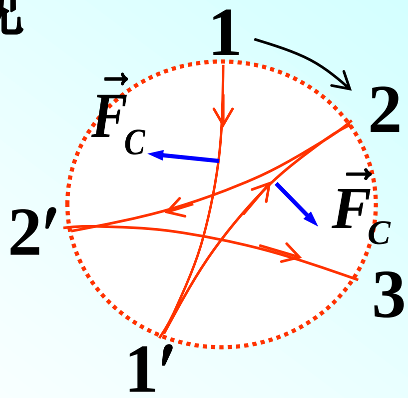


这是因为地球实际上是一个转动参考系，地球上的运动物体也受科里奥利力的影响。南半球的情况相反。

2. 傅科摆（摆平面转动）







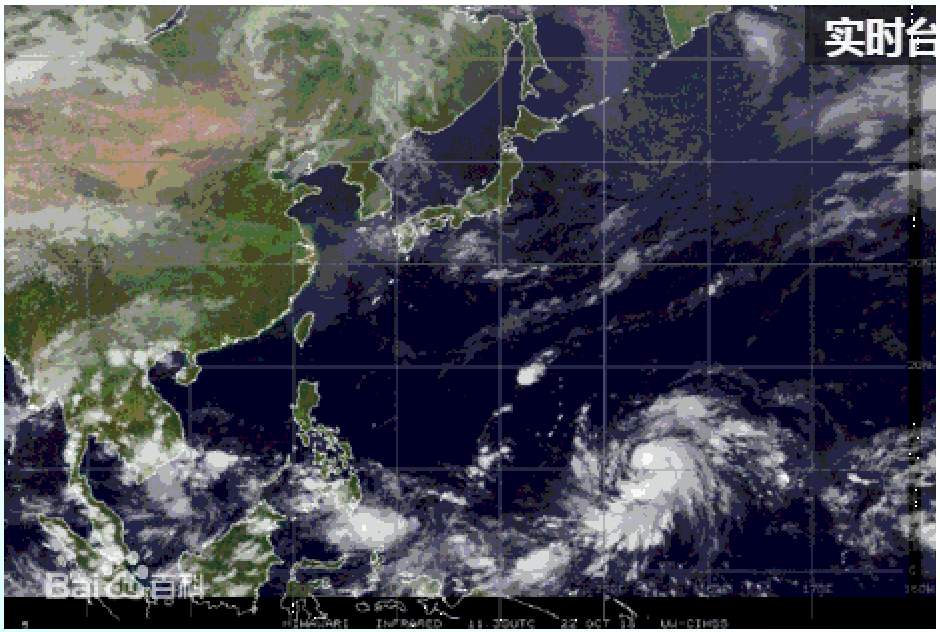
摆平面转动**周期** $\boxed{T = \dfrac{24\text{小时}}{\sin\varphi}}$

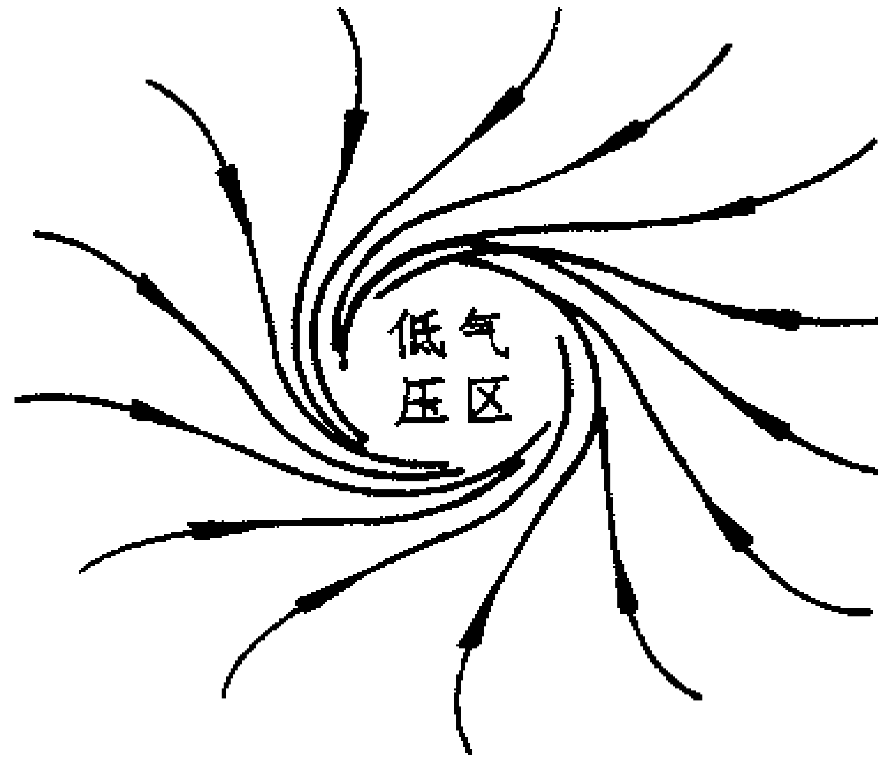
巴黎，$\varphi \approx 49^\circ$，$T = 31$小时52分

北京，$\varphi \approx 40^\circ$，$T = 37$小时15分

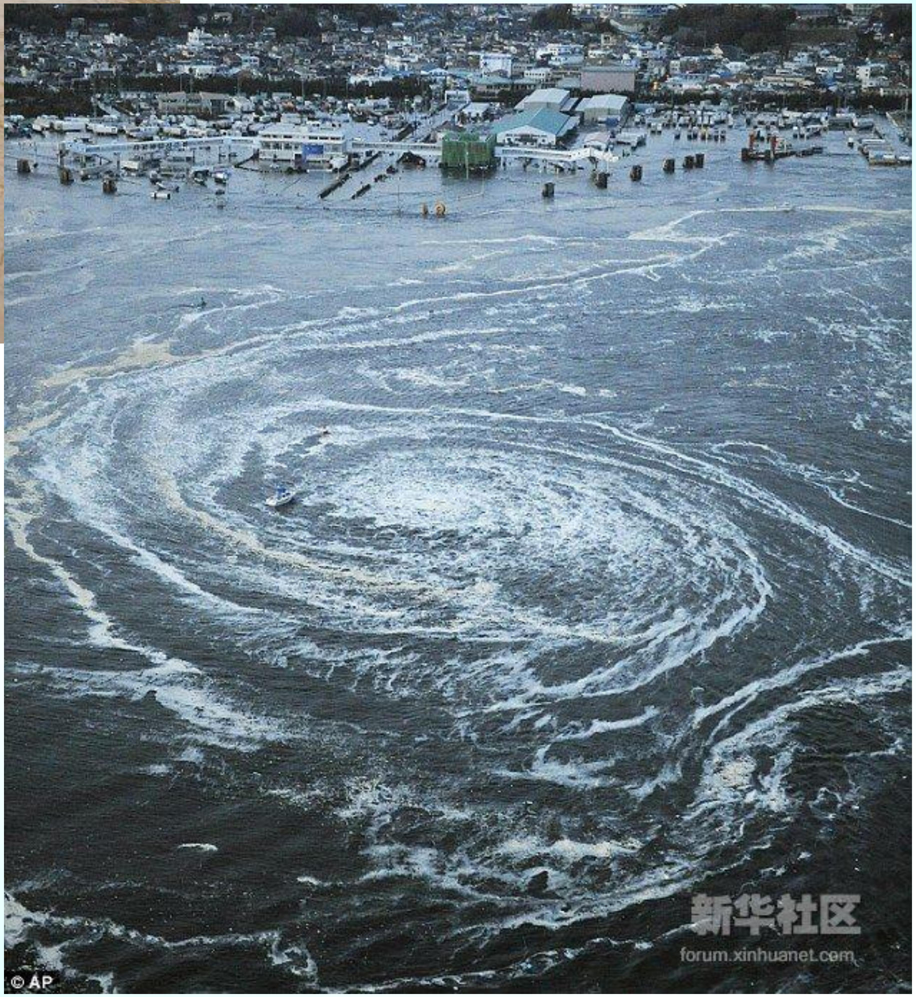
傅科做的这个著名实验在历史上第一次验证了地球的**自转**。（摆长67m，摆锤28kg）

3. 北半球的强热带风暴





北半球的强热带风暴是在热带低气压中心附近形成的，当外面的高气压空气向低气压中心涌入时，由于科氏力的作用，气流的方向将偏向气流速度的右方，从高空看是沿逆时针方向旋转的涡旋。在南半球则是顺时针方向。



2011-03-11
日本大地震
造成的
海面漩涡