大学物理(上)

冯 波

电话：**18627014796**

email: bfeng@hust.edu.cn

作业：2 —— T7-T11

请认真独立完成作业！

- 非惯性系中力学定律形式

$$\boxed{\vec{F}+\vec{F}_i=m\vec{a}'}$$

✓ 在加速平动参考系中：

$$\vec{F}_i=-m\vec{a}_0$$

✓ 在转动参考系中：

$$\vec{F}_i=mr\omega^2\vec{e}_r+2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$$

第4节 动量定理 动量守恒定律

对于质点
对于质点系 $\Bigg\}$ $\boxed{\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}$ 即，反映了力的瞬时效应。

（瞬时关系）

那么，力的持续作用将使物体的运动状态发生什么变化？

一、动量定理

对单个质点及质点系：$\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}$ （微分形式）

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1$$

定义：$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$ 冲量

$$\boxed{\vec{I}=\Delta\vec{p}}$$ （积分形式）

动量定理：在一段时间内，质点（系）所受的合外力的冲量等于这段时间内质点（系）动量的增量。

动量定理：在一段时间内，质点（系）所受的合外力的冲量等于这段时间内质点（系）动量的增量。

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1} \quad 或 \quad \boxed{\vec{I}=\Delta\vec{p}}$$

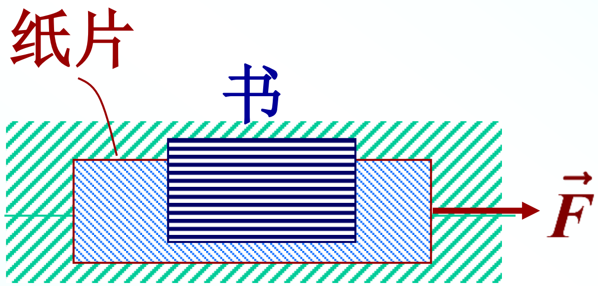
$$\begin{cases}\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t=I_x=p_{x,t_1}-p_{x,t_2}\\ \int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t=I_y=p_{y,t_1}-p_{y,t_2}\\ \int_{t_1}^{t_2}F_z\mathrm{d}t=I_z=p_{z,t_1}-p_{z,t_2}\end{cases}$$

质点或质点系所受合外力的冲量在某一个方向上的分量等于质点或质点系动量在该方向上的分量的增量。

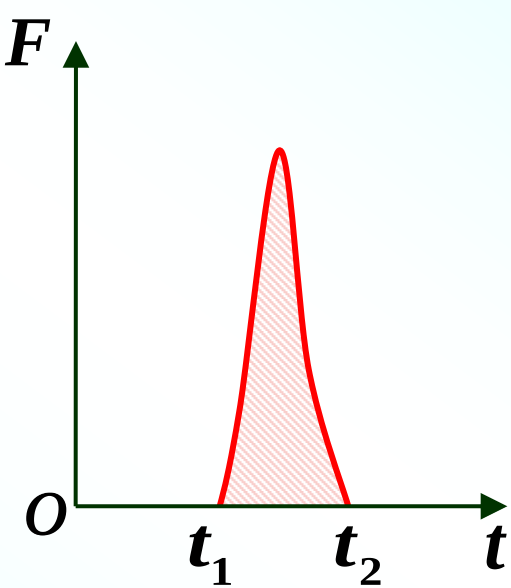
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

- 如果$\vec{F}$的大小有限，并且作用时间非常短促，则物体的动量（或运动状态）不会发生有限的变化。

（小实验） 桌上有一张纸，纸上放着一本书。



- 如果物体间的作用时间很短，而物体的动量发生了有限（可观）的变化，这种相互作用力称为冲击力。



平均冲力：

$$\overline{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

例： 飞机以$v=300\,\mathrm{m/s}$的速度飞行，撞到一只质量为 $m=2.0\,\mathrm{kg}$ 的鸟，鸟的长度为$l=0.3\,\mathrm{m}$ 。假设鸟撞上飞机后随同飞机一起运动，试估算它们相撞时的平均冲力的大小。

解： 由动量定理，

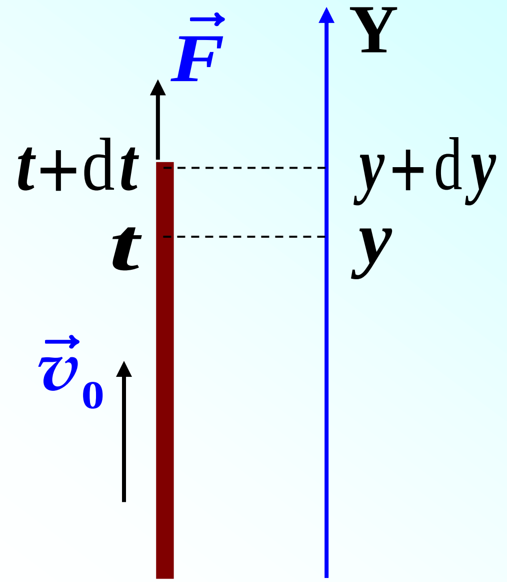
$$\vec{I}=\Delta\vec{p}\Rightarrow\overline{F}\Delta t=mv-mv_0$$

$$\Rightarrow\overline{F}=\frac{mv-mv_0}{\Delta t}=\frac{2.0\times300}{0.3/300}=6.0\times10^5\,\mathrm{N}$$

这个力相当于鸟所受的重力的三万多倍！并且，冲力的峰值要大于这个平均冲力。

例： 水平桌面上盘放着一根不能拉伸的均匀柔软的长绳，此绳单位长度的质量为λ。今用手将绳的一端以恒定速率 v_0竖直上提。试求当提起的绳长为 L时，手的提力的大小F 。

解： $F \cancel{=} mg = \lambda L g$



遗漏了下方绳子的拉力T $\Rightarrow F = mg + T$

设在任意 t时刻提起的绳长为 y，在 t+dt 时刻绳长为 y+dy。

取已经提起来的长度为 y+dy的这段绳子为研究对象（质点系）

$$\begin{cases} t\text{ 时刻动量为：} & y\lambda \cdot v_0 + \mathrm{d}y\lambda \cdot 0 \\ t+\mathrm{d}t\text{时刻动量为：} & (y + \mathrm{d}y)\lambda \cdot v_0 \end{cases}$$

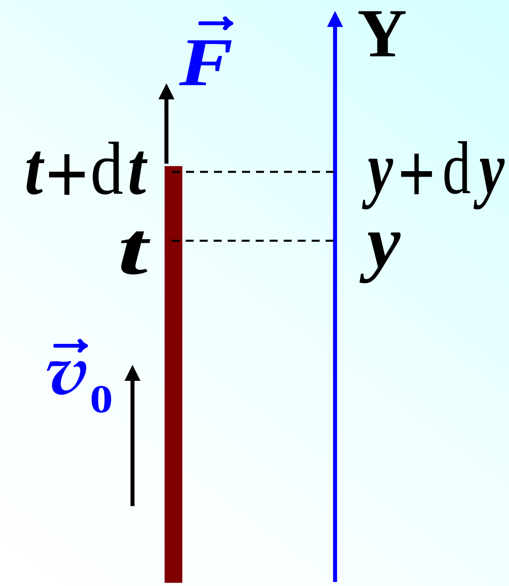
$$\Rightarrow \mathrm{d}p = (y + \mathrm{d}y)\lambda \cdot v_0 - y\lambda \cdot v_0 = v_0 \lambda \mathrm{d}y$$

dt时间内冲量为：$I = (F - mg)\mathrm{d}t$

例： 水平桌面上盘放着一根不能拉伸的均匀柔软的长绳，此绳单位长度的质量为λ。今用手将绳的一端以恒定速率 v_0竖直上提。试求当提起的绳长为 L时，手的提力的大小F 。

解：

$$\begin{cases} \mathrm{d}p = (y+\mathrm{d}y)\lambda \cdot v_0 - y\lambda \cdot v_0 = v_0 \lambda \mathrm{d}y \\ I = (F - mg)\mathrm{d}t \end{cases}$$



$$\begin{cases} \Rightarrow F = mg + v_0 \lambda \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = mg + \lambda v_0^2 \\ \text{而此时（提起的绳长为 } y+\mathrm{d}y \text{时）绳重为：} \\ mg = \lambda (y+\mathrm{d}y) g \approx \lambda y g \end{cases}$$

$$\Rightarrow F = \lambda y g + \lambda v_0^2$$

则当提起的绳长为L时，$F = \lambda L g + \lambda v_0^2$

还可以选择整根绳子（质点系）为研究对象

二、动量守恒定律

质点（系）的动量定理 $\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\Delta\vec{p}}$

$$\vec{F}=\sum_i \vec{F}_{i外},$$

$$\vec{p}=\sum_i \vec{p}_i$$

当 $\vec{F}=0$ 时，$\Delta\vec{p}=0$

$$\sum_i \vec{p}_i=\sum_i m_i\vec{v}_i=\text{恒矢量}$$

——动量守恒定律

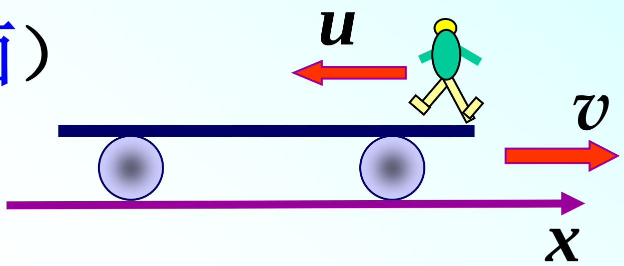
动量守恒定律在直角坐标系中的分量式：

$$\begin{cases} F_x=0\text{时，}\sum_i m_i v_{ix}=\text{常数} \\ F_y=0\text{时，}\sum_i m_i v_{iy}=\text{常数} \\ F_z=0\text{时，}\sum_i m_i v_{iz}=\text{常数} \end{cases}$$

例：水平光滑冰面上有一小车，长度为L，质量为M。车的一端有一质量为m的人，人和车原来均静止。若人从车的一端走到另一端。

求：人和车相对地面各移动的距离。

解：设人速为u，车速为v（相对地面）



系统在水平方向上动量守恒，

$$Mv + mu = 0 \Rightarrow v = -\frac{m}{M}u$$

$$\int_{t_0}^{t_f} v\mathrm{d}t = -\frac{m}{M}\int_{t_0}^{t_f} u\mathrm{d}t$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_{车地} &= -\frac{m}{M}\Delta x_{人地} \\ \Delta x_{人地} &= \Delta x_{人车} + \Delta x_{车地} \\ &= -L + \Delta x_{车地} \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta x_{人地} = -\frac{ML}{M+m}$$

$$\Delta x_{车地} = \frac{mL}{M+m}$$

三、变质量问题（例：火箭飞行）

设t时刻箭体质量为m，取为研究的质点系。

t 时刻动量： $\vec p_1 = m\vec v$

$t+\mathrm{d}t$ 时刻动量： $\vec p_2 = (m+\mathrm{d}m)(\vec v + \mathrm{d}\vec v) + (-\mathrm{d}m)\vec v'$

火箭受合外力为：$\vec F$

由动量定理得：$\vec F \mathrm{d}t = \vec p_2 - \vec p_1$

$$\Rightarrow \vec F \mathrm{d}t = (m+\mathrm{d}m)(\vec v + \mathrm{d}\vec v) + (-\mathrm{d}m)\vec v' - m\vec v$$

$$= m\vec v + m\mathrm{d}\vec v + \mathrm{d}m\cdot\vec v + \cancel{\mathrm{d}m\cdot\mathrm{d}\vec v} - \mathrm{d}m\cdot\vec v' - m\vec v$$

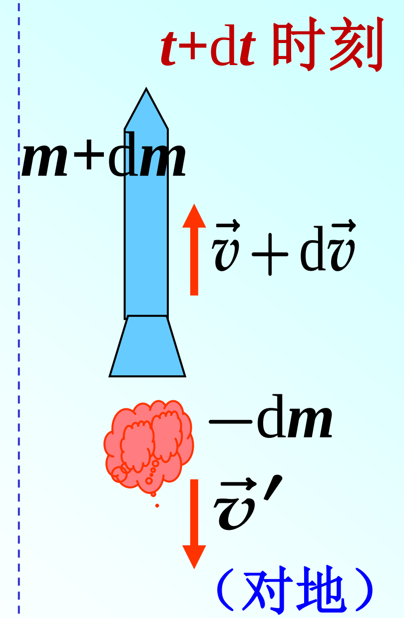
$$\Rightarrow \vec F = m\frac{\mathrm{d}\vec v}{\mathrm{d}t} + \vec v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + \cancel{\mathrm{d}\vec v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}} - \vec v'\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

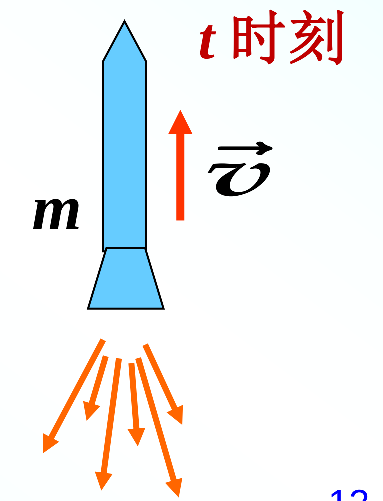
$$= m\frac{\mathrm{d}\vec v}{\mathrm{d}t} - \left[\vec v' - \vec v + \cancel{\mathrm{d}\vec v}\right]\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$\underbrace{\vec v'}_{\text{气地}} + \underbrace{-\vec v - \cancel{\mathrm{d}\vec v}}_{\text{地箭}} = \vec u$$

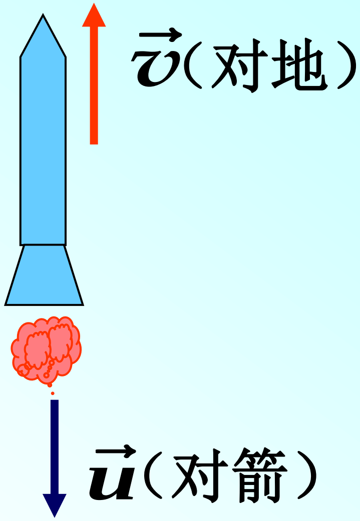
$$= m\frac{\mathrm{d}\vec v}{\mathrm{d}t} - \vec u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

喷出的气体相对箭体的速度





$$\boxed{\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$$ ——密歇尔斯基方程



若火箭在自由空间（不考虑重力）沿直线飞行，$F = 0$

$$\Rightarrow 0 = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$\vec{u}$与$\vec{v}$方向相反，取$\vec{v}$为正

$$\Rightarrow 0 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}v = -u\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

若喷出的气体相对火箭的速率u恒定，开始时火箭的质量为m_0，初速度为v_0，燃料耗尽时火箭的质量为m_f，速度为v_f，则

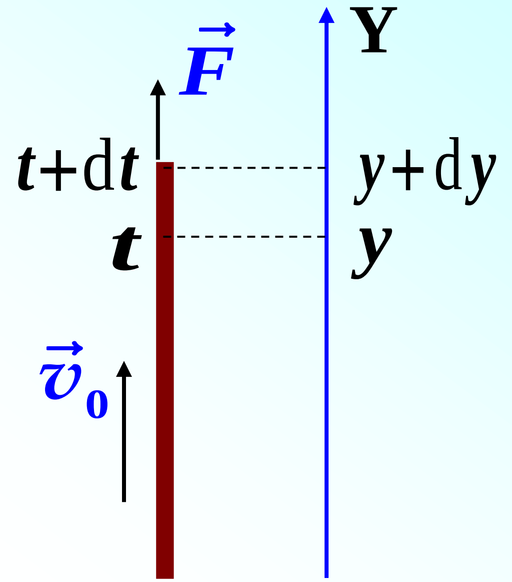
$$\int_{v_0}^{v_f}\mathrm{d}v = -u\int_{m_0}^{m_f}\frac{\mathrm{d}m}{m} \Rightarrow v_f = v_0 + u\ln\frac{m_0}{m_f}$$ 火箭最终速度

其奥尔可夫斯基方程

例: 水平桌面上盘放着一根不能拉伸的均匀柔软的长绳，此绳单位长度的质量为λ。今用手将绳的一端以恒定速率v_0竖直上提。**试求**当提起的绳长为L时，手的提力的大小F。

解: 设dt时间内提起的绳子的质量为dm

$\vec{u}$为dm在**并入前**相对于提起部分的速度，



$$\begin{cases} \vec{F}_{合} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\dfrac{dm}{dt} \\ \text{绳子的运动是一维的：} v = v_0 \quad u = -v_0 \\ F_{合} = F - mg = F - \lambda yg \\ \dfrac{dv_0}{dt} = 0, \quad \dfrac{dm}{dt} = \lambda\dfrac{dy}{dt} = \lambda v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F - \lambda yg = \lambda v_0^2 \ \Rightarrow F = \lambda v_0^2 + \lambda yg$$

$$\boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\frac{dm}{dt}}$$

（密歇尔斯基方程）

第5节 角动量定理 角动量守恒定律

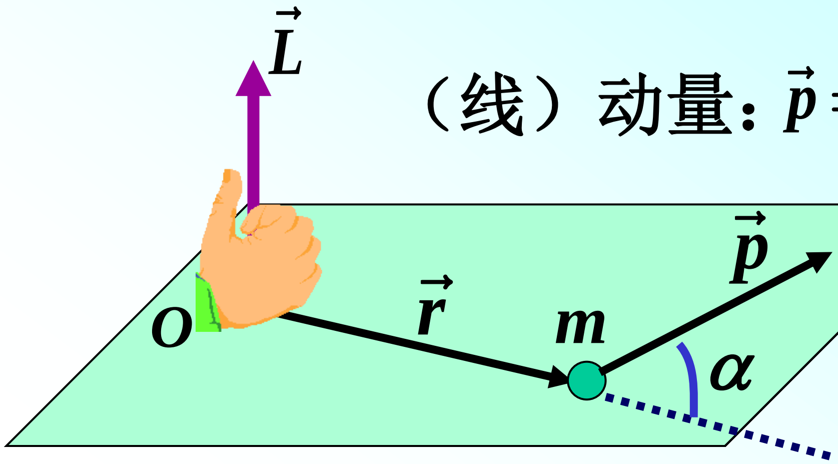
一、质点的角动量

（线）动量：$\vec{p} = m\vec{v}$

定义角动量：$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

大小：$rp\sin\alpha$

角动量单位：$\mathrm{kg\ m^2s^{-1}}$

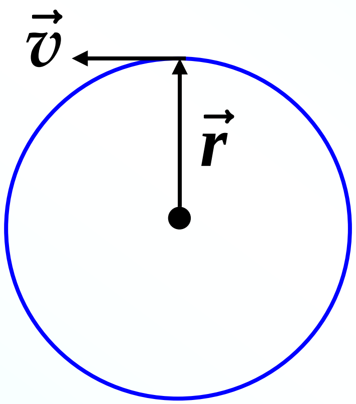


角动量也叫动量矩

注意：同一质点对不同定点的角动量是不同的。

质点作匀速圆周运动，动量一直在变化，其对圆心的角动量为：

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



角动量大小为：$L = mr^2\omega$

二、质点的角动量定理

质点的动量定理

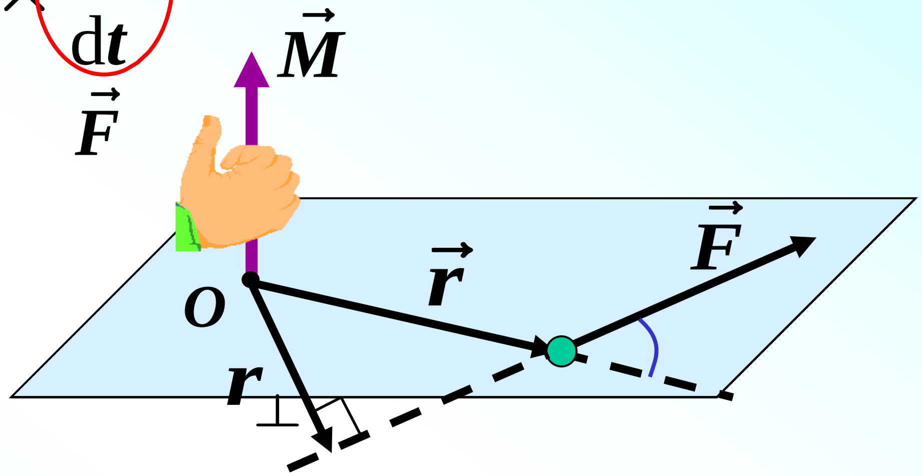
$$\boxed{\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1}$$

$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$ 对 $\vec{L}$ 求对时间的导数

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}}_{\vec{v} \times m\vec{v} = 0} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{F}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F}$$



定义力矩：$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

大小 $M = rF\sin\alpha = r_\perp F$

质点对任一固定点的角动量的时间变化率，等于质点所受合外力对该固定点的力矩 ——角动量定理

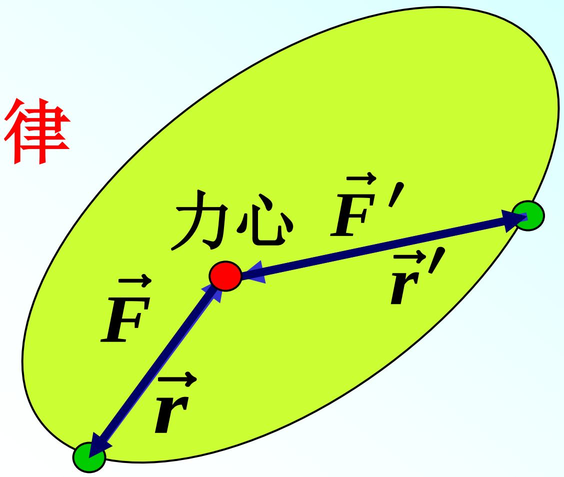
$$\vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2} \mathrm{d}\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

三、质点的角动量守恒定律

$$\boxed{\vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}} \qquad \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1}$$

若 $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L}_2 = \vec{L}_1$

即 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ 是恒矢量 ——角动量守恒定律



注意：

（1）$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \begin{cases} \vec{F} = 0,\ \vec{r} = 0 \\ \vec{r} /\!/ \vec{F},\ \ \vec{r} /\!/ -\vec{F} \end{cases}$

（2）有心力：运动质点所受的力总是通过一个固定点。

$\vec{r} /\!/ -\vec{F} \Longrightarrow$ 质点对力心的角动量守恒

（3）质点对某点的角动量守恒，对另一点不一定守恒。

（4）角动量守恒，不一定动量守恒。 如：匀速圆周运动

✓ 质点的角动量定理：

$$\boxed{\vec{M}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}} \quad \boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1}$$

角动量定理的分量式：

$$\begin{cases}\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_x\mathrm{d}t=\vec{L}_{x,t_2}-\vec{L}_{x,t_1}\\ \int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_y\mathrm{d}t=\vec{L}_{y,t_2}-\vec{L}_{y,t_1}\\ \int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_z\mathrm{d}t=\vec{L}_{z,t_2}-\vec{L}_{z,t_1}\end{cases}$$

✓ 质点的角动量守恒定律：

$\boxed{\text{若}\vec{M}=0,\quad \text{则}\ \vec{L}_2=\vec{L}_1}$ $\quad\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ 为恒矢量

角动量守恒定律的分量式：$M_i=0$ 时，L_i 守恒 $i=x,y,z$

当总角动量不守恒时，角动量在某些方向上的分量可以是守恒的。