大学物理(上)

冯 波

电话：**18627014796**
email: bfeng@hust.edu.cn

作业：2 —— T12-T16

请认真独立完成作业！

➢ 动量定理 动量守恒定律

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \Delta\vec{p}}$$

当 $\vec{F}=0$ 时，

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i\vec{v}_i = \text{恒矢量}$$

➢ 角动量定理 角动量守恒定律

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1}$$

当 $\vec{M}=0$ 时，

$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ 是恒矢量

✓ 质点的角动量定理:

$$\boxed{\vec{M}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}} \quad \boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1}$$

角动量定理的分量式:

$$\begin{cases}\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_x\mathrm{d}t=\vec{L}_{x,t_2}-\vec{L}_{x,t_1}\\ \int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_y\mathrm{d}t=\vec{L}_{y,t_2}-\vec{L}_{y,t_1}\\ \int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_z\mathrm{d}t=\vec{L}_{z,t_2}-\vec{L}_{z,t_1}\end{cases}$$

✓ 质点的角动量守恒定律:

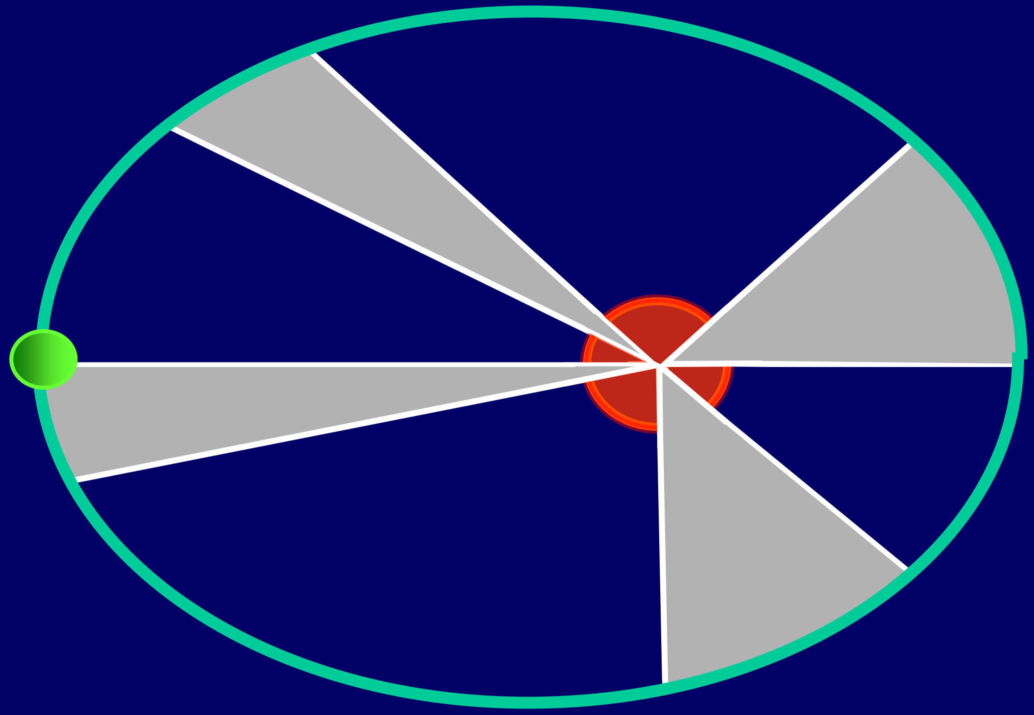
$$\boxed{\text{若}\vec{M}=0,\quad\text{则}\ \vec{L}_2=\vec{L}_1} \qquad \vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}\ \text{为恒矢量}$$

角动量守恒定律的分量式：$M_i=0$ 时，L_i 守恒 $i=x,y,z$

当总角动量不守恒时，角动量在某些方向上的分量可以是守恒的。

应用质点的角动量守恒定律可以证明

开普勒第二定律



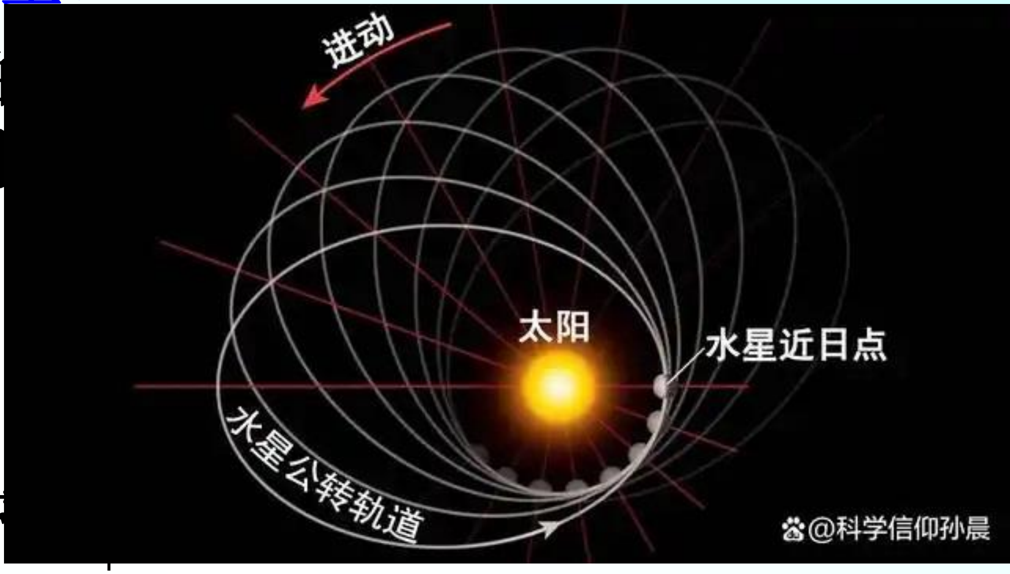
行星与太阳的连线在相同时间内扫过相等的面积

例： 用角动量守恒定律推导行星运动的开普勒第二定律。行星对太阳的位置矢量在相等的时间内扫过相等的面积：即行星的矢径的面积速度为恒量。

解： 在很短的时间dt内，行星

的面积可以近似地认为是

所示的三角形的面积，即



$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}r\vert\mathrm{d}\vec{r}\vert\sin\alpha=\frac{1}{2}\vert\vec{r}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{1}{2}\vert\vec{r}$$

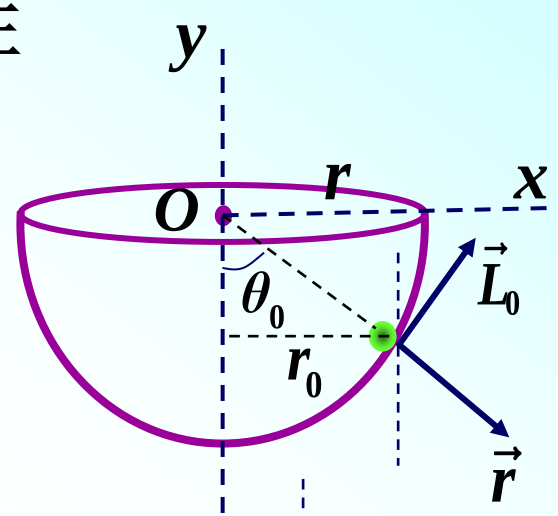
由于行星对太阳中心的角动量守恒，即$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=$恒矢量

$\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ 也是恒量。开普勒第二定律得证。

还可以推出出行星运行的另一个规律：角动量守恒，则角动量的方向不变，所以行星绕太阳的运动必然是平面运动（位置矢量和动量所决定的平面）。轨道闭合吗？

例： 将一个质点沿一个半径为r的光滑半球形碗的内面水平地投射，碗保持静止。设v_0是质点恰好能达到碗口所需要的初速度。试求出v_0作为θ_0的函数的表达式。

解： 取球心O为参考点，并设开始时质点在投影面内，且速度垂直向里。

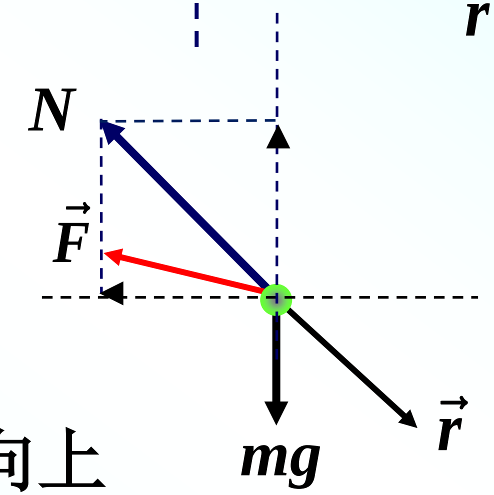


$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

力矩垂直投影面向内，故垂直于y轴

所以沿y轴方向的力矩 $M_y=0$

故角动量在y方向上的分量L_y守恒

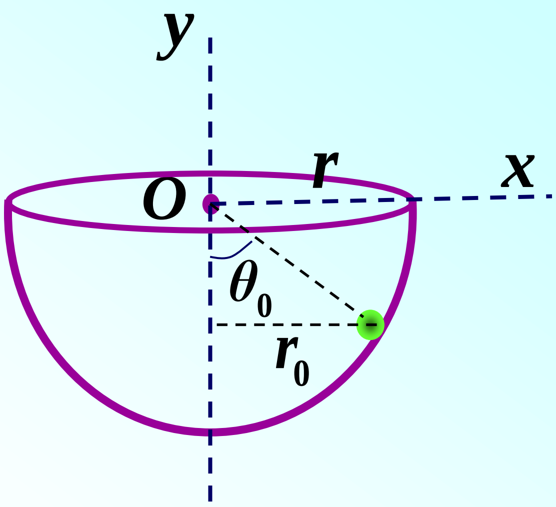


$$L_0 = rmv_0$$

$$L_{0y} = L_0 \sin\theta_0 = rmv_0 \sin\theta_0 = r_0 m v_0$$

恰好到达碗口时，球的角动量只有y方向上的分量，则 $mv_0 r_0 = mvr$

$$\begin{cases} \boxed{mv_0 r_0 = mvr} \\ r_0 = r\sin\theta_0 \\ \text{机械能守恒：} \\ \dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgr\cos\theta_0 \end{cases}$$



三式联立解得：

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gr}{\cos\theta_0}} \qquad v = \sin\theta_0\sqrt{\frac{2gr}{\cos\theta_0}}$$

四、质点系的角动量定理和角动量守恒定律

1. 质点系的角动量：质点系中的各个质点对给定参考点的角动量的矢量和

$$\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

对时间求导：

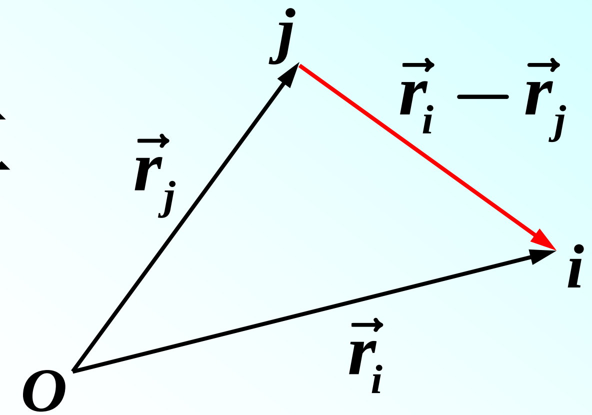
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}=\sum_i \vec{r}_i\times\left(\vec{F}_i+\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}\right)$$

第i个质点受到的质点系外物体的作用力

第i个质点受到的质点系内第j个质点的作用力

$$\sum_i \vec{r}_i\times\left(\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}\right)$$ 是各质点受到的内力矩的矢量和

$$\sum_i \vec{r}_i \times \left(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right)$$ 各质点受到的内力矩的矢量和



设质点系内任意两个质点*i*和*j*的相互作用力为 $\vec{F}_{ij}$ 和 $\vec{F}_{ji}$，根据牛顿第三定律有

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$\vec{M}_i + \vec{M}_j = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \ \vec{r}_i - \vec{r}_j \ \times \vec{F}_{ij}$$

$\vec{r}_i - \vec{r}_j$ 沿质点*i*和*j*的连线，而*i*对*j*的作用力$\vec{F}_{ij}$也必定在质点*i*和*j*的连线方向上，所以

$$\vec{M}_i + \vec{M}_j = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{r}_i \times \left(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right) = 0$$ 各质点受到的内力矩的矢量和为零

质点系的角动量对时间的导数：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_i\frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}=\sum_i\vec{r}_i\times\left(\vec{F}_i+\cancel{\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}}\right)$$

定义： $\vec{M}=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i$ 各质点受到的外力矩的矢量和

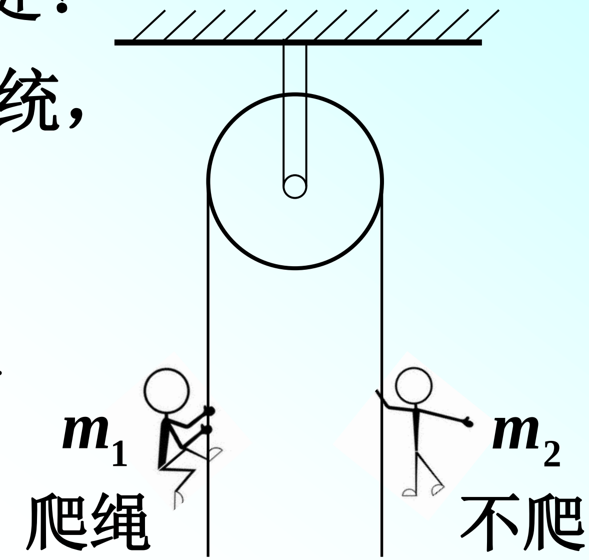
$$\Rightarrow\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$ 质点系的角动量定理

质点系对惯性系中某给定参考点的角动量的时间变化率，等于作用在该质点系上所有外力对同一参考点的总力矩。

$$\vec{M}=0\quad\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=0$$ 质点系的角动量守恒定律

因此，当质点系相对于某一给定参考点的合外力矩为零时，该质点系相对于该给定参考点的角动量不随时间变化。

例： 如图所示，两个人质量分别为 m_1 和 m_2，其中一个人沿着跨过定滑轮的轻绳从静止开始向上爬，另一个人抓着另一侧的轻绳不爬，忽略滑轮的质量和轴的摩擦，若 $m_1 > m_2$，且开始时两人处在同一高度，问哪个人先到达滑轮处？



解： 把滑轮、轻绳和两人一起看作一个系统，选 O 点为参考点

系统所受的总外力矩为

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2\vec{g} = Rm_1g\vec{e} - Rm_2g\vec{e}$$

$$= Rg(m_1 - m_2)\vec{e}$$

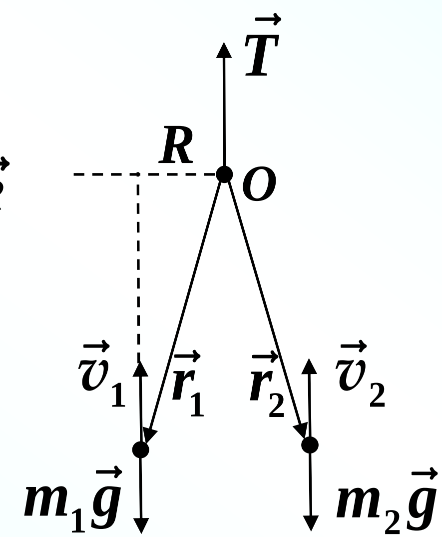
$\vec{e}$（垂直投影面向外的单位矢量）

系统的总角动量为

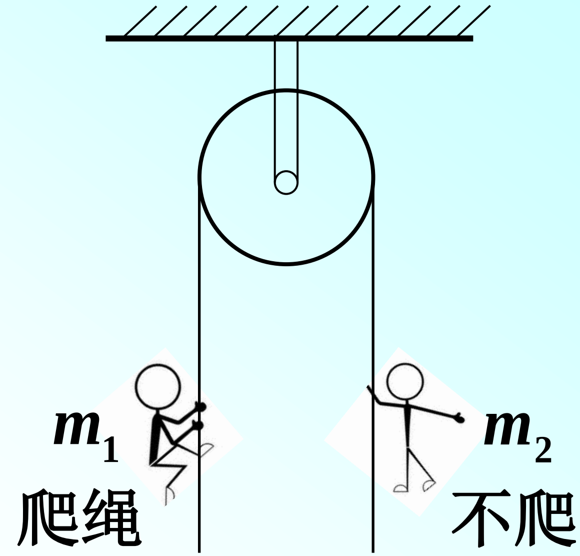
$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2 = -Rm_1v_1\vec{e} + Rm_2v_2\vec{e}$$

由质点系的角动量定理 $\vec{M} = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$

$$(m_1 - m_2)g = -m_1\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}$$



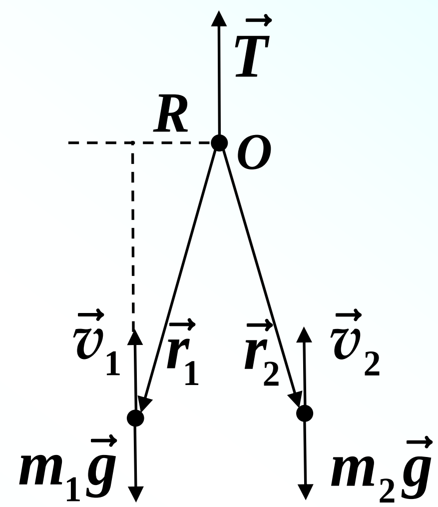
$$(m_1 - m_2)g = -m_1 \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} + m_2 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}$$
$$= -m_1 a_1 + m_2 a_2$$



因为 $m_1 > m_2$

所以 $m_2 a_2 - m_1 a_1 > 0$

$$\Rightarrow a_2 > \frac{m_1}{m_2} a_1 > a_1$$

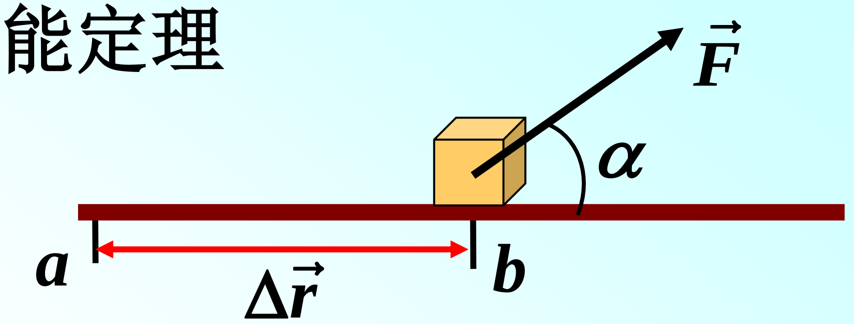


已知两人开始都静止，所以上式表明两人向上的速度关系为

$$v_2 > v_1$$

因为两个从同一高度开始爬，所以质量小的人先到达。且不管是谁在爬绳，结论都是如此。

第6节 功和动能定理

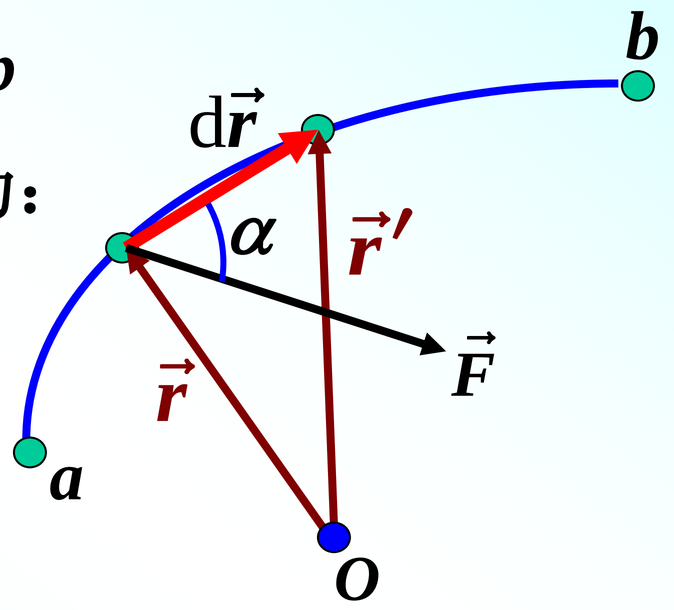


一、功（力的空间累积效应）

恒力的功：

$$A=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=F\,|\Delta\vec{r}\,|\cos\alpha$$

变力的功：变力 $\vec{F}$ 将质点由 a 移动到 b



在线元 $\mathrm{d}\vec{r}$ 上力 $\vec{F}$ 对质点所做的元功为：

$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

所做的总功：

$$A_{ab}=\int_a^b\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b F\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\alpha$$

一般来说，力对质点所做的功，不仅与始、末位置有关，而且往往与路径有关。功有正负，且与参考系有关。

二、功率（做功的快慢）

功率：力在单位时间内所做的功。

平均功率：$\bar{P}=\dfrac{\Delta A}{\Delta t}$

瞬时功率（功率）：

$$P=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\boxed{\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}$$

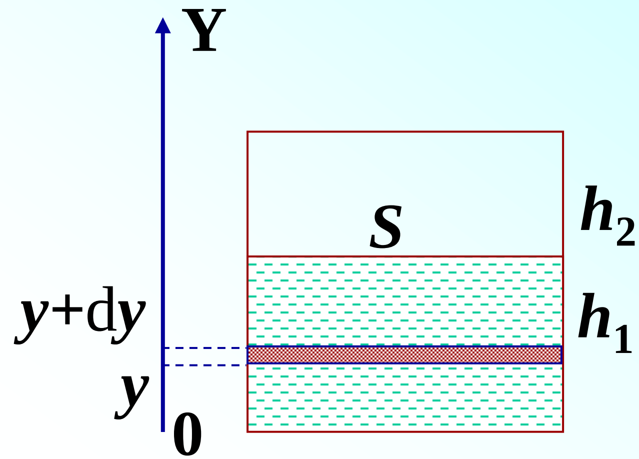
$$\boxed{P=\vec{F}\cdot\vec{v}}$$

瓦特（W）：$1\ \mathrm{W}=1\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

当额定功率一定时，负荷力越大，可达到的速率就越小；负荷力越小，可达到的速率就越大。这就是为什么汽车在上坡时走得慢，下坡时走得快的道理。

例：一长方体蓄水池，面积$S=50\ \mathrm{m}^2$，储水深度$h_1=1.5\mathrm{m}$。假定水表面低于地面的高度是$h_2=5\ \mathrm{m}$。若要将这池水全部抽到地面上来，抽水机需做多少功? 若抽水机的效率为80%。输入功率$P=35\ \mathrm{kW}$，则抽完这池水需要多长时间?

解：建立如图所示的坐标系y。



$$A=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$（适用于质点）

取什么为质点?

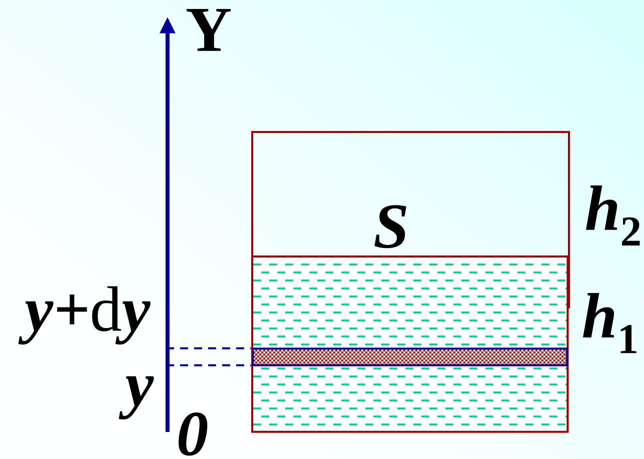
在任意位置 y 处取很薄一层水（可当做质点处理）

将y处这层水抽到地面需做功为

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{d}A=\int_y^{h_1+h_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\\
&\vec{F}=F\vec{j}=\mathrm{d}m\cdot g\vec{j}\\
&\qquad=\rho g S\mathrm{d}y\vec{j}\\
&\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}r\vec{j}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}\mathrm{d}A&=\int_y^{h_1+h_2}(\rho Sg\mathrm{d}y)\mathrm{d}r\\&=\rho Sg(h_1+h_2-y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

例： 一长方体蓄水池，面积$S=50\ \mathrm{m}^2$，储水深度$h_1=1.5\ \mathrm{m}$。假定水表面低于地面的高度是$h_2=5\ \mathrm{m}$。若要将这池水全部抽到地面上来，抽水机需做多少功? 若抽水机的效率为80%。输入功率$P=35\ \mathrm{kW}$，则抽完这池水需要多长时间?

解：



将y处这层水抽到地面需做功为

$$\mathrm{d}A=\rho Sg(h_1+h_2-y)\mathrm{d}y$$

则将全部水抽到地面需做功为

$$A=\int_0^{h_1}\rho gS\cdot(h_1+h_2-y)\mathrm{d}y$$

$$=\rho gS\left[(h_1+h_2)h_1-\frac{h_1^2}{2}\right]$$

$$\approx 4.2\times 10^6\ \mathrm{J}$$

$$A=P\cdot\Delta t\cdot 0.8$$

$$\Rightarrow \Delta t=\frac{A}{0.8P}\approx 151\ \mathrm{s}$$

三、动能定理

1. 质点的动能定理

质点由 a运动到 b，合外力做的功为：

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2$$

$$\boxed{A_{ab}=E_{kb}-E_{ka}=\Delta E_k}$$ 质点的动能定理

2. 质点系的动能定理

对质点系中任一质点 i应用质点的动能定理，得

$$A_{i外}+A_{i内}=\Delta E_{k,i}$$

对所有质点，有 $\sum_i A_{i外}+\sum_i A_{i内}=\sum_i \Delta E_{ki}$

即：$\boxed{A_{外}+A_{内}=E_{kb}-E_{ka}=\Delta E_k}$ 质点系的动能定理

内力可以改变系统的总动能，但不改变其总动量。

$$\boxed{F_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}}$$

质点由*a*运动到*b*，合外力做的功为:

$$A = \int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_a^b (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})\cdot(\vec{i}\mathrm{d}x + \vec{j}\mathrm{d}y + \vec{k}\mathrm{d}z)$$

$$= \int_a^b (F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z)$$

$$= \int_a^b (m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x + m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y + m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}z)$$

$$= m\int_a^b (v_x\mathrm{d}v_x + v_y\mathrm{d}v_y + v_z\mathrm{d}v_z)$$

$$= \frac{m}{2}\int_a^b \mathrm{d}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{m}{2}\int_a^b \mathrm{d}v^2 \boxed{= \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2}$$