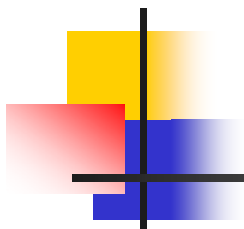


南京邮电大学  
Nanjing University of Posts and Telecommunications

# 数字图像与视频处理

吴聪





## 第3章 形态学图像处理

---

- 3.1 引言
- 3.2 二值形态学基本运算
- 3.3 二值图像的形态学处理
- 3.4 灰度形态学基本运算
- 3.5 灰度图像的形态学处理
- 3.6 MATLAB编程实例



## 3.1 引言

---

- **数学形态学的发展简史和基本思想**
  - 形态学(**Morphology**)是生物学的一个分支, 常用来处理动物和植物的形状与结构
  - 数学形态学(**Mathematical Morphology, MM**)是分析几何形状和结构的数学方法, 它是根据形态学概念发展而来具有严格数学理论基础的科学, 并在图像处理和模式识别领域得到了成功应用
  - 数学形态学是建立在集合代数的基础上, 用集合论方法定量描述集合结构的学科, 它包括一组基本的形态学算子(膨胀、腐蚀、开、闭等)及其组合



## 3.1 引言

---

### ■ 数学形态学的发展简史和基本思想

#### ■ 60年代

- **1964**诞生，法国学者**Serra**对铁矿石的岩相进行定量分析，以预测铁矿石的可轧性。同时，Matheron研究了多孔介质的几何结构、渗透性及二者的关系，二者的研究直接导致数学形态学雏形的形成。
- **1966**年命名**Mathematical Morphology**。
- **1968**年在法国成立枫丹白露(**Fontainebleau**)数学形态学研究中心

#### ■ 70年代

- **1973**年，Matheron的《随机集和积分几何》为数学形态学奠定了基础。



## 3.1 引言

---

- 数学形态学的发展简史和基本思想

- 80年代

- 1982年由Serra主编的专著《**Image Analysis and Mathematical Morphology**》的出版是数学形态学发展的重要里程碑，表明数学形态学在理论上趋于完备及应用上不断深入

- 90年代至今

- 数学形态学在文字识别，显微图像分析医学图像处理，图像编码压缩，工业检测，材料科学，机器人视觉，汽车运动情况监测等方面都取得了非常成功的应用



## 3.1 引言

---

### ■ 集合论基础

- 集合：具有某种性质的、确定的、有区别的事物的全体
- 元素：构成集合的每个事物
- 属于、不属于、空集
  - 令 $\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{Z}^2$ 中的一个集合，如果 $\mathbf{a}=(a_1, a_2)$ 是 $\mathbf{A}$ 中的一个元素，称 $\mathbf{a}$ 属于 $\mathbf{A}$ ，并记作： $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ ，否则，称 $\mathbf{a}$ 不属于 $\mathbf{A}$ ，记为： $\mathbf{a} \notin \mathbf{A}$ ，如 $\mathbf{A}$ 中没有任何元素，称 $\mathbf{A}$ 为空集： $\emptyset$
- 子集：当且仅当集合 $\mathbf{A}$ 中的元素都属于集合 $\mathbf{B}$ 时，称 $\mathbf{A}$ 为 $\mathbf{B}$ 的子集，记为 $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$



## 3.1 引言

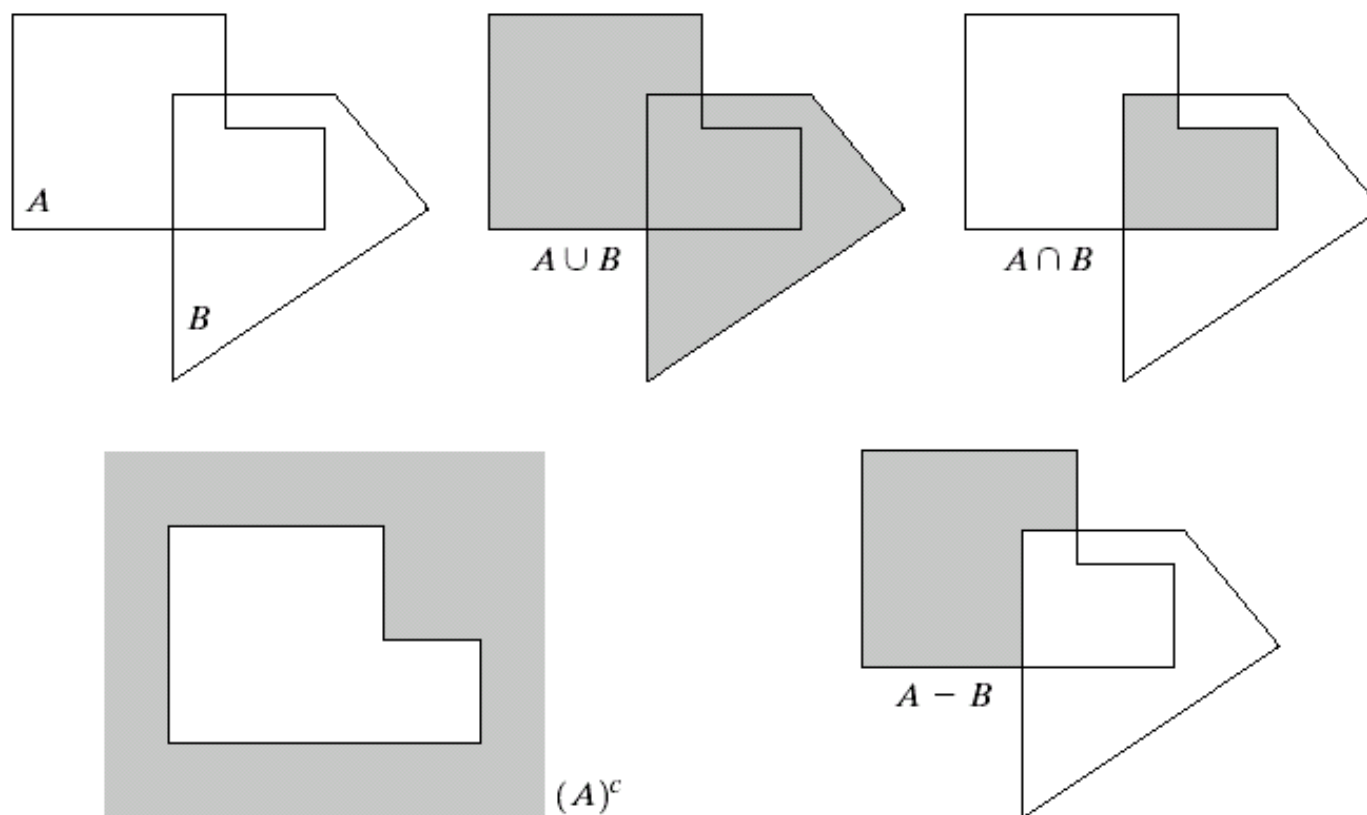
---

### ■ 集合论基础

- 并集：由**A**和**B**的所有元素组成的集合称为**A**和**B**的并集，记为 **$C = A \cup B$**
- 交集：由**A**和**B**的公共元素组成的集合称为**A**和**B**的交集，记为 **$D = A \cap B$**
- 补集：不包含于集合**A**的所有元素组成的集合，表示为 **$A^c = \{ w \mid w \notin A \}$**
- 差集：集合**A**和**B**的差表示为 **$A - B = \{ w \mid w \in A, w \notin B \} = A \cap B^c$**

## 3.1 引言

### ■ 集合论基础



a	b	c
d	e	

**FIGURE 9.1**

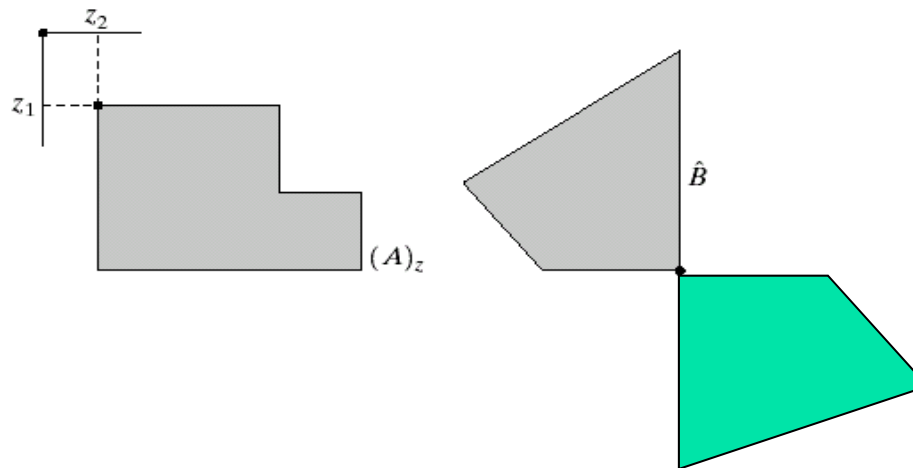
(a) Two sets  $A$  and  $B$ . (b) The union of  $A$  and  $B$ . (c) The intersection of  $A$  and  $B$ . (d) The complement of  $A$ . (e) The difference between  $A$  and  $B$ .



## 3.1 引言

### ■ 数学形态学中的基本概念

- 平移：集合**A**平移到点 $\mathbf{z}=(z_1, z_2)$ ，表示为 $(\mathbf{A})_z = \{ \mathbf{c} \mid \mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{z}, \mathbf{a} \in \mathbf{A} \}$
- 反射：集合**B**的反射表示为  $\hat{B} = \{ w \mid w = -b, b \in B \}$



a b

**FIGURE 9.2**

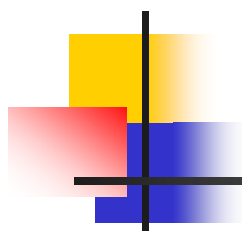
(a) Translation of  $A$  by  $\mathbf{z}$ .  
(b) Reflection of  $B$ . The sets  $A$  and  $B$  are from Fig. 9.1.



## 3.1 引言

---

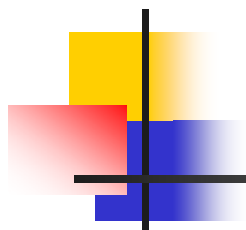
- **目标和结构元素(structure element)**
  - 二值形态学中的运算对象是集合。设A为图像集合，B为结构元素，数学形态学运算是用B对A进行操作
  - 结构元素本身也是一个图像集合。对每个结构元素必须指定一个**原点**，它是结构元素参与形态学运算的参考点
  - 在每个像素位置上，结构元素与二值图像对应的区域进行特定的逻辑运算，逻辑运算的结果为输出图像的相应像素。
  - 形态学运算的效果取决于结构单元的大小、内容以及运算的性质



## 3.1 引言

### 形态学图像处理中的集合论基本概念

基本概念	数学表示	含义
集合 $A$	$A = \{b \mid b = -w, w \in C\}$	$A$ 是元素 $b$ 的集合, $b$ 的坐标等于 $C$ 中元素的坐标乘-1
空集	$\emptyset$	不包含任何元素的集合
$b$ 属于 $A$	$b \in A$	$b$ 是 $A$ 集合中的一个元素
$b$ 不属于 $A$	$b \notin A$	$b$ 不是 $A$ 集合中的一个元素
$A$ 是 $B$ 的子集	$A \subseteq B$	$A$ 中的每个元素都是 $B$ 中的一个元素
$A$ 和 $B$ 的并集	$D = A \cup B$	$D$ 包含 $A$ 和 $B$ 中的所有元素
$A$ 和 $B$ 的交集	$D = A \cap B$	集合 $D$ 中的所有元素同时属于集合 $A$ 和 $B$
$A$ 和 $B$ 互斥	$A \cap B = \emptyset$	集合 $A$ 和 $B$ 没有共同元素
$A$ 的补集	$A^c = \{u \mid u \notin A\}$	不包含于集合 $A$ 的所有元素组成的集合
$A$ 和 $B$ 的差	$A - B = \{u \mid u \in A, u \notin B\} = A \cap B^c$	集合中的元素属于 $A$ 而不属于 $B$
集合 $A$ 的反射	$\hat{A} = \{u \mid u = -b, b \in A\}$	集合 $A$ 中的所有元素各乘上-1 后得到的新集合
集合 $A$ 的平移	$(A)_z = \{c \mid c = b + z, b \in A\}$	集合 $A$ 平移到点 $z = (z_x, z_y)$



## 第3章 形态学图像处理

---

- 3.1 引言
- **3.2 二值形态学基本运算**
- 3.3 二值图像的形态学处理
- 3.4 灰度形态学基本运算
- 3.5 灰度图像的形态学处理
- 3.6 MATLAB编程实例



## 3.2 二值形态学基本运算

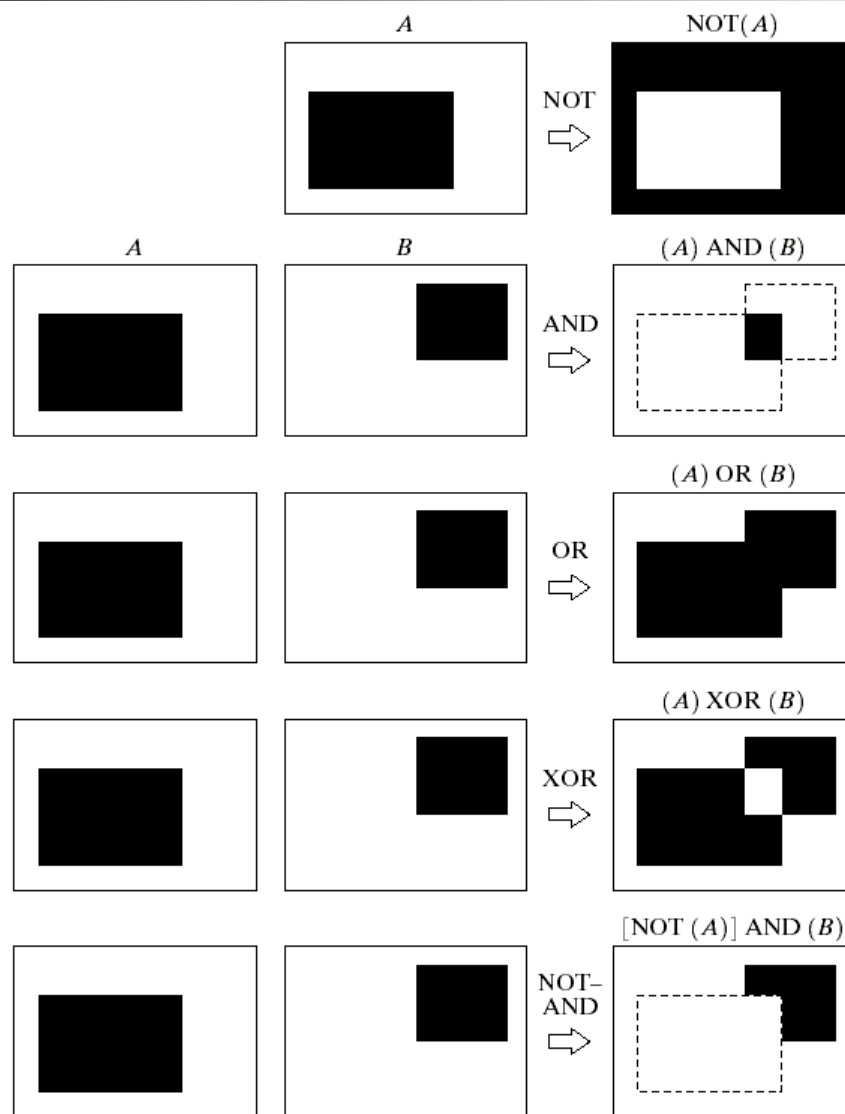
### ■ 二值图像的逻辑运算

- 对于二值图像而言，习惯上认为取值为**1**的点对应于景物（前景），而取值为**0**的点构成背景

三种基本的逻辑运算：与、或、非

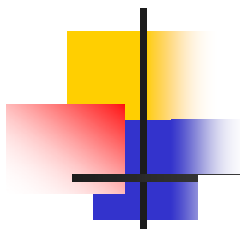
$p$	$q$	$p \text{ AND } q \text{ (also } p \cdot q)$	$p \text{ OR } q \text{ (also } p + q)$	$\text{NOT } (p) \text{ (also } \bar{p})$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

## 3.2 二值形态学基本运算



**FIGURE 9.3** Some logic operations between binary images. Black represents binary 1s and white binary 0s in this example.

二值图像的  
逻辑运算  
1表示黑色,  
0表示白色



## 3.2 二值形态学基本运算

结构元素B

1	1	1
1	1	1
1	1	1

结构元素

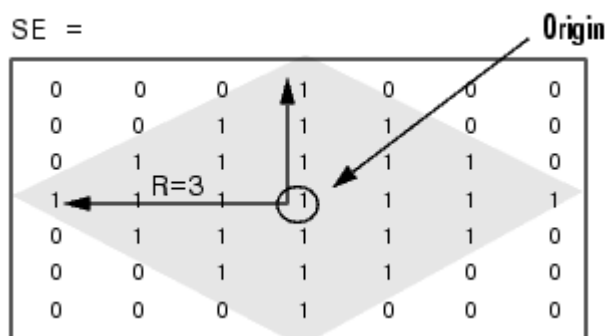
1	1	1				
1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1
	0	0	1	1	1	0

图像A

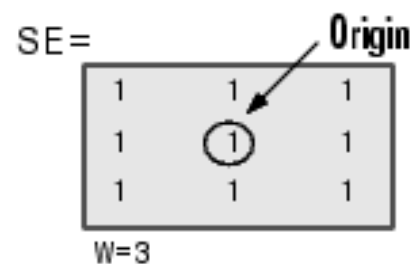
## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 结构元素

■  $SE = \text{strel}(\text{shape}, \text{parameters})$

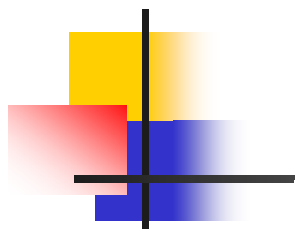


$SE = \text{strel}(\text{'diamond'}, 3)$

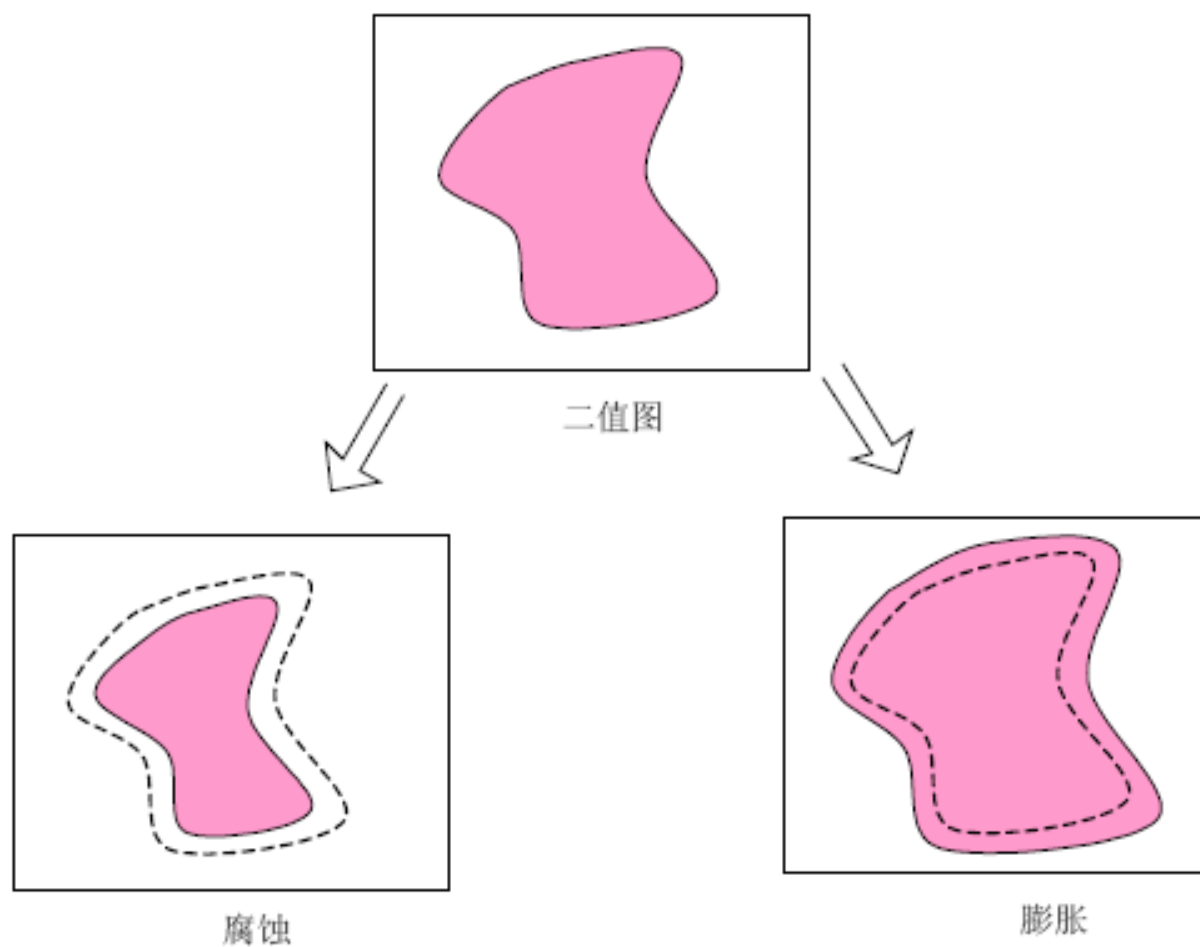


$SE = \text{strel}(\text{'square'}, 3)$





## 3.2 二值形态学基本运算





## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 腐蚀 (erosion)

- 假定A和B是 $Z^2$ 上的两个集合，把A被B腐蚀定义为

$$A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\}$$

- 腐蚀结果是这样一个由移位元素z组成的集合，以至B对这些元素移位操作的结果完全包含于A



## 3.2 二值形态学基本运算

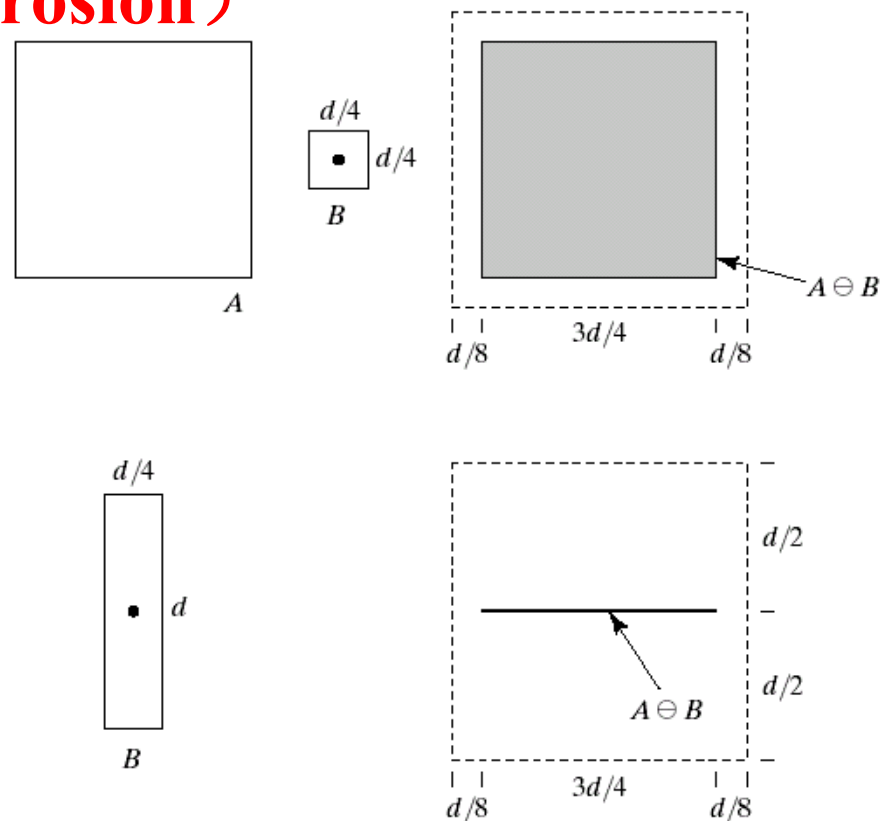
### ■ 腐蚀 (erosion)

- 意义：当结构元素原点移动为位置 $z$ 时，如果  $B_z$  完全包含于集合 $A$ ，则新图像相应位置 $z$ 的值为1，否则为0
- 算法
  - 用结构元素的扫描图像的每一个元素
  - 用结构元素与其覆盖的二值图像做与运算
  - 如果结果都为1，则结果图像对应像素点的值为1，否则为0
- 腐蚀与膨胀关于补集和反射操作呈对偶关系

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$

## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 腐蚀 (erosion)

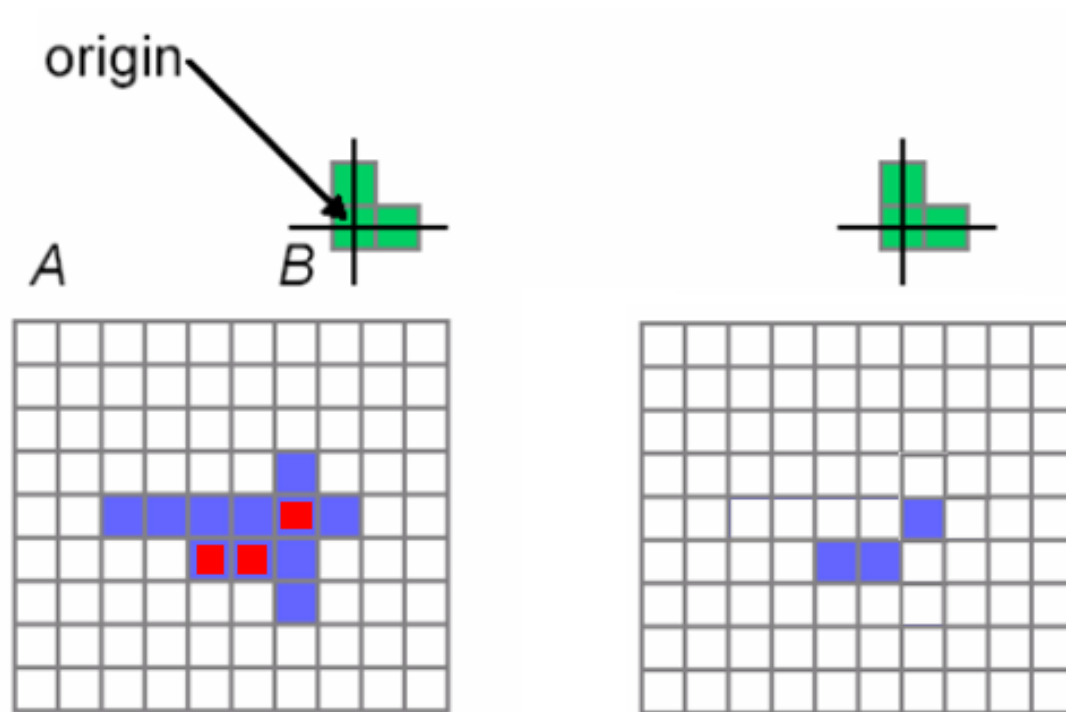


a	b	c
d		e

**FIGURE 9.6** (a) Set A. (b) Square structuring element. (c) Erosion of A by B, shown shaded. (d) Elongated structuring element. (e) Erosion of A using this element.

## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 腐蚀 (erosion)



## 3.2 二值形态学基本运算

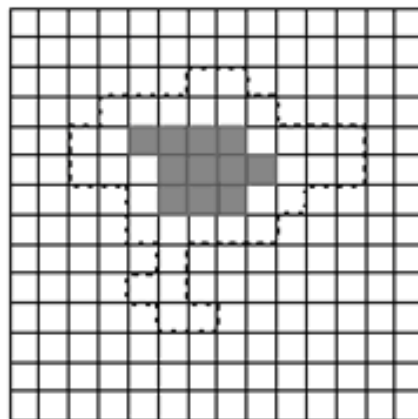
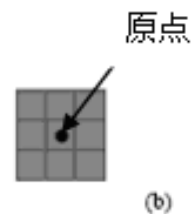
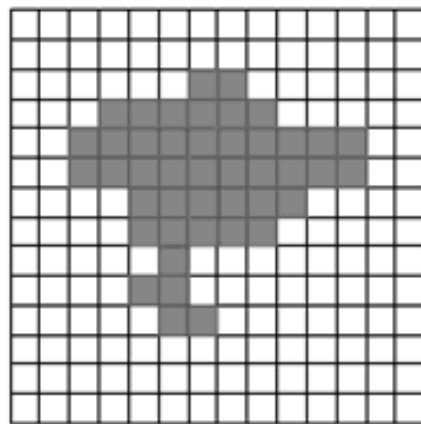
### ■ 腐蚀 (erosion)

0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
(a)							
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	<u>1</u>	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
(b)							
0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	<u>1</u>	<u>1</u>	1	0
0	1	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	1	0
0	0	1	<u>1</u>	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
(c)							

图 3.5 (a) 原图像用 0 和 1 来表示 (b) 十字形结构元素 (c) 经腐蚀处理后的图像

## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 腐蚀 (erosion)





## 3.2 二值形态学基本运算

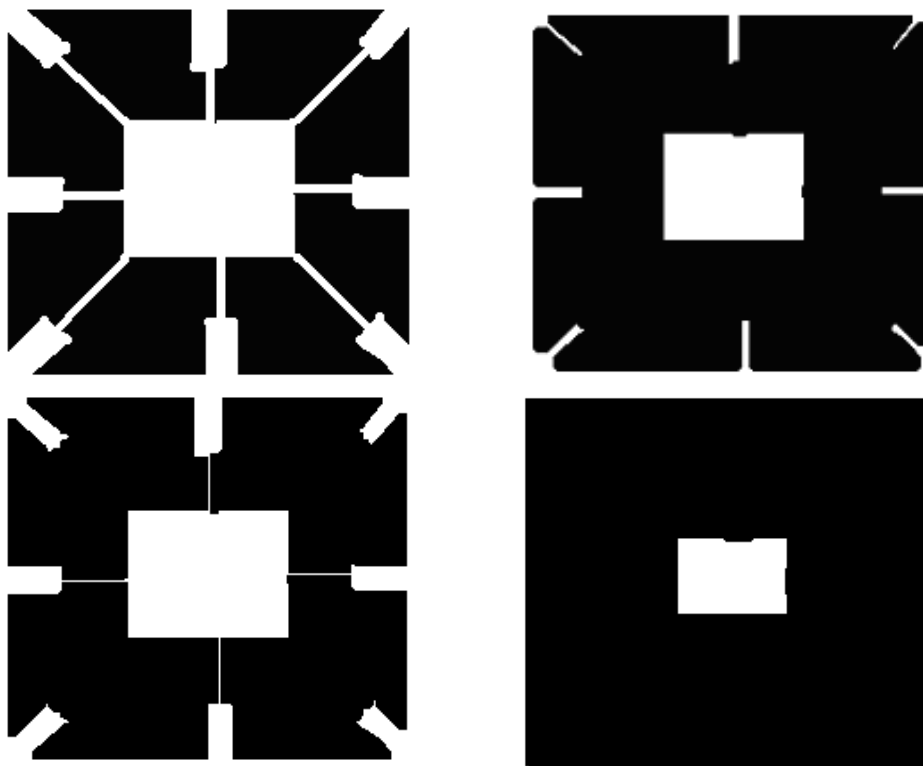
---

- 腐蚀 (erosion)
- 腐蚀的应用
  - 去掉小于结构元素的物体
  - 如果两个物体之间有细小的连通，当结构元素足够大时，可以将物体分开



## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 腐蚀 (erosion)



腐蚀的说明：(a) 原图像；(b) 用半径为8的圆盘腐蚀后的图像；  
(c) 用半径为3的圆盘腐蚀后的图像；(d) 用半径为18的圆盘腐蚀后的图像

## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 腐蚀 (erosion)

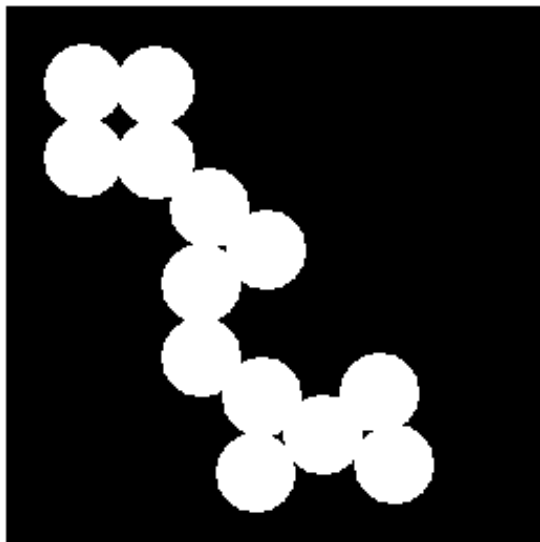


a b c

**FIGURE 9.7** (a) Image of squares of size 1, 3, 5, 7, 9, and 15 pixels on the side. (b) Erosion of (a) with a square structuring element of 1's, 13 pixels on the side. (c) Dilation of (b) with the same structuring element.

## 3.2 二值形态学基本运算

- 腐蚀 (erosion)
- $IM2 = \text{imerode}(IM, SE)$





## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 膨胀 (dilation)

- 假定A和B是 $Z^2$ 上的两个集合，把A被B（结构元素）膨胀定义为

$$A \oplus B = \left\{ z \mid (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset \right\}$$

$$A \oplus B = \left\{ z \mid [(\hat{B})_z \cap A] \subseteq A \right\}$$

- 膨胀结果是这样一个由移位元素 $z$ 组成的集合，以至B的反射对这些元素移位操作的结果与A至少重叠一个元素

$$A \oplus B = \{ w \in Z^2 \mid w = a + b, a \in A, b \in B \}$$



## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 膨胀 (dilation)

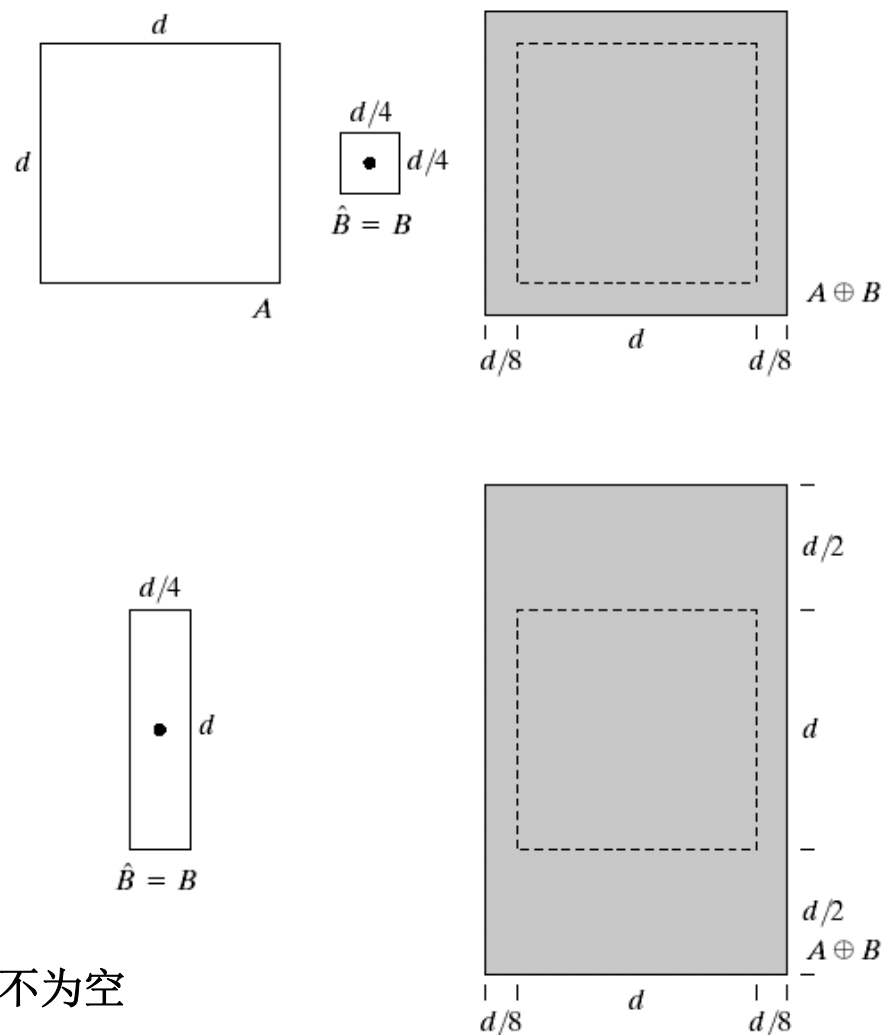
- 意义：当结构元素的反射 $\hat{B}$ 的原点移动到位置 $z$ 时，如果 $(\hat{B})_z$ 与物体 $A$ 相交时，则新图像相应位置 $z$ 的值为1，否则为0
- 算法
  - 用结构元素的反射扫描图像的每一个元素
  - 用结构元素与其覆盖的二值图像做与运算
  - 如果结果都为0，则结果图像对应像素点的值为0，否则为1

## 3.2 二值形态学基本运算

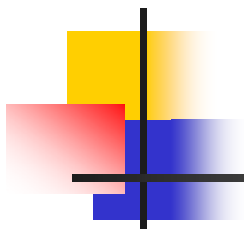
a	b	c
d		e

**FIGURE 9.4**

- (a) Set  $A$ .  
 (b) Square structuring element (dot is the center).  
 (c) Dilation of  $A$  by  $B$ , shown shaded.  
 (d) Elongated structuring element.  
 (e) Dilation of  $A$  using this element.

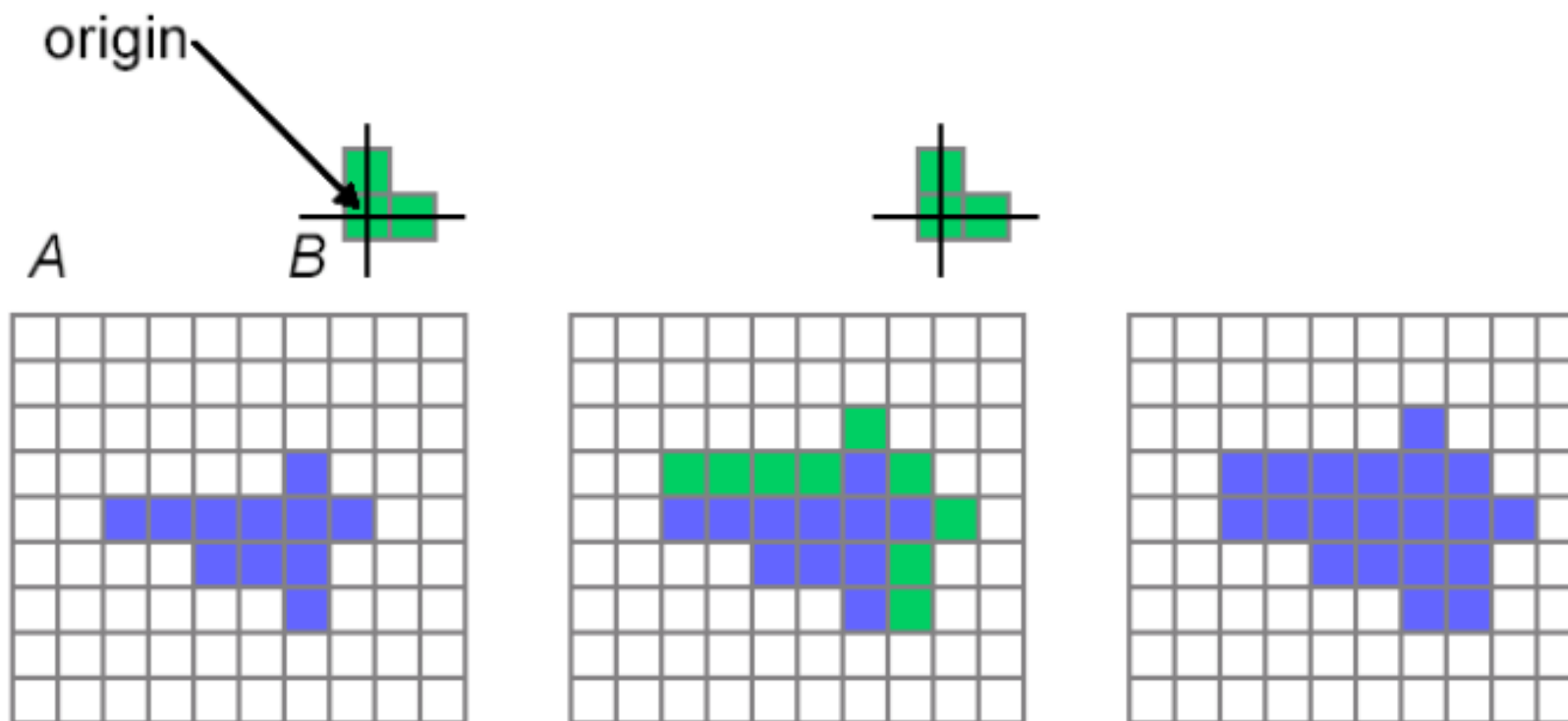


**B**的反射的平移与A的交集不为空



## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 膨胀 (dilation)



## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 膨胀 (dilation)

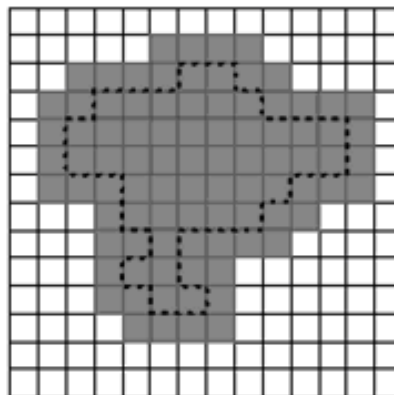
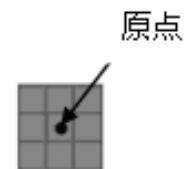
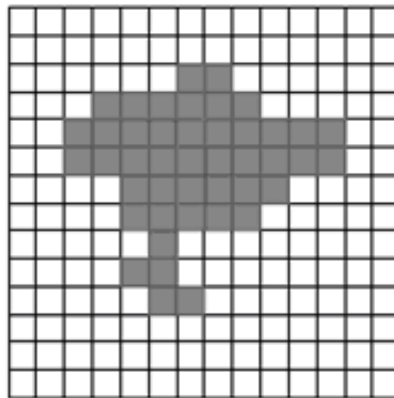
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
(a)							
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	<u>1</u>	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
(b)							
0	0	0	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	0	0
0	0	<u>1</u>	1	1	1	<u>1</u>	0
0	<u>1</u>	1	1	1	<u>1</u>	0	0
0	<u>1</u>	1	1	<u>1</u>	0	0	0
<u>1</u>	1	1	1	<u>1</u>	0	0	0
0	<u>1</u>	1	<u>1</u>	0	0	0	0
0	0	<u>1</u>	0	0	0	0	0
(c)							

图 3.3 (a) 原图像用 0 和 1 来表示 (b) 十字形结构元素 (c) 经膨胀处理后的图像



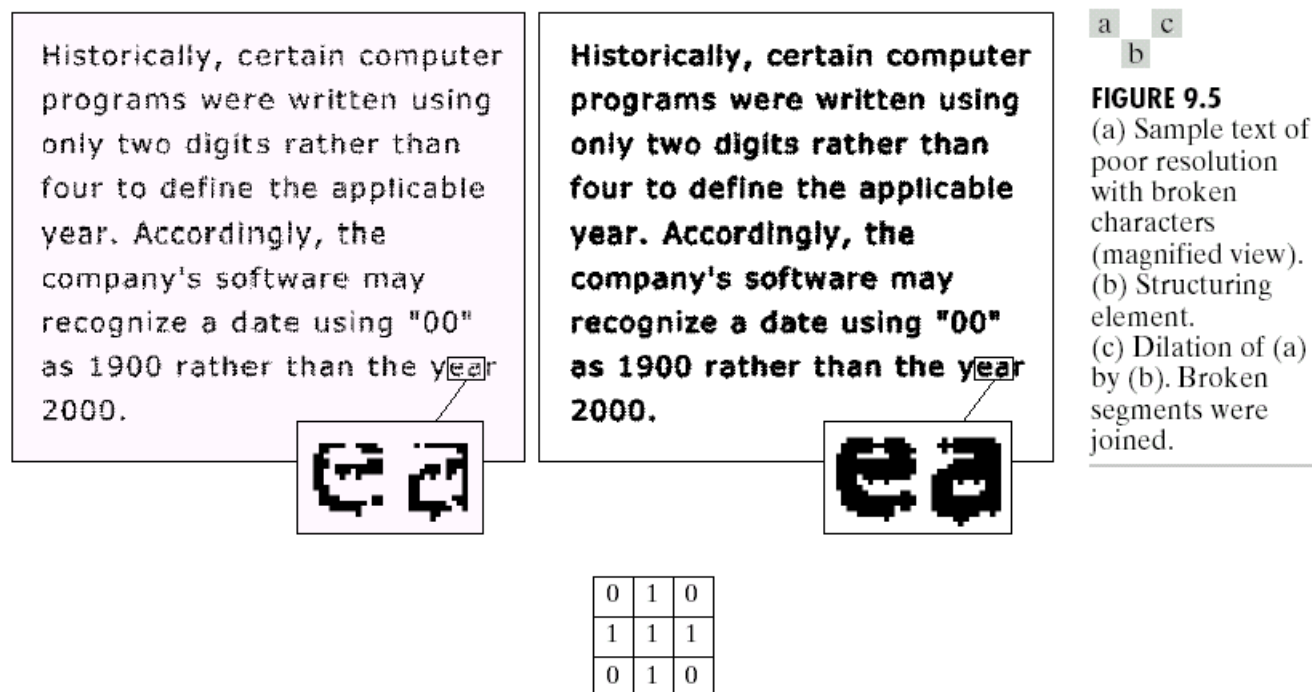
## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 膨胀 (dilation)



## 3.2 二值形态学基本运算

- 膨胀 (dilation)
  - 应用：连接图像中的邻近目标

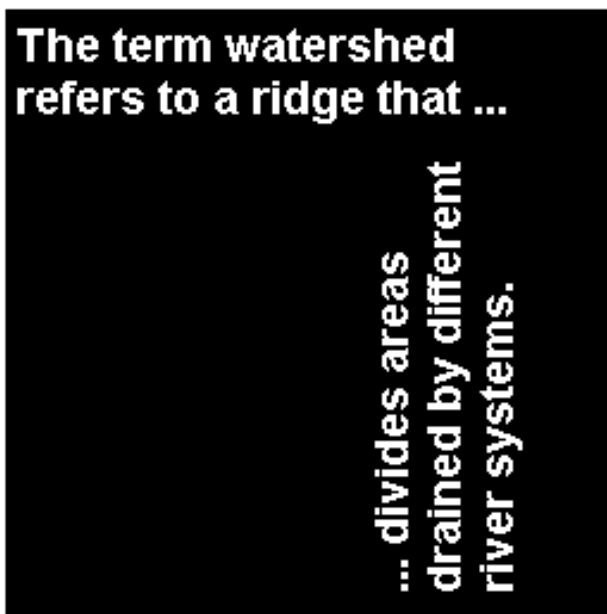


形态学方法对比低通滤波方法的优点：形态学方法可以在一幅二值图像中直接得到结果



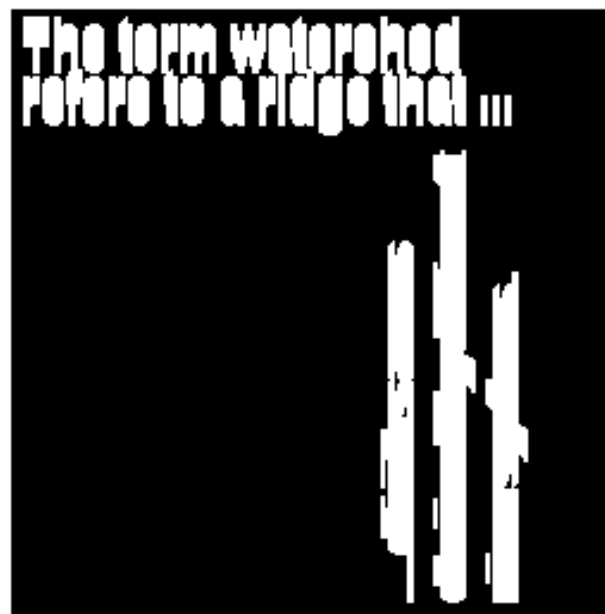
## 3.2 二值形态学基本运算

- 膨胀 (dilation)
  - $IM2 = \text{imdilate}(IM, SE)$



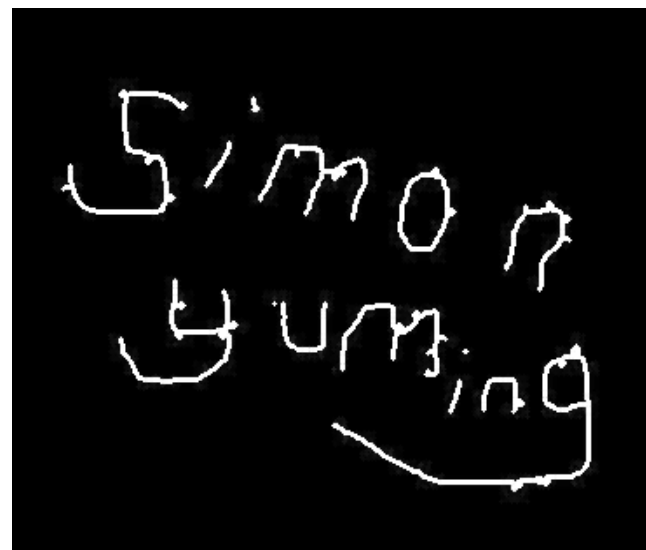
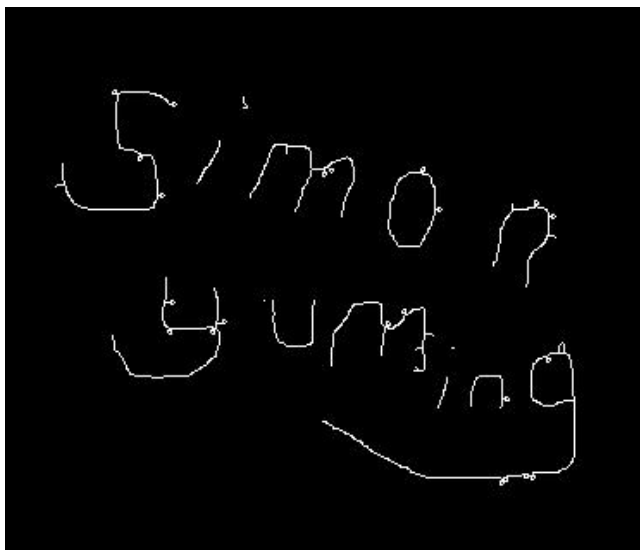
The term watershed  
refers to a ridge that ...

... divides areas  
drained by different  
river systems.



## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 膨胀 (dilation)



(a) 带有间断字符的低分辨率文本（放大图）； (b) 膨胀结果



## 3.2 二值形态学基本运算

---

- 开运算 (**opening**)

- 先腐蚀，后膨胀

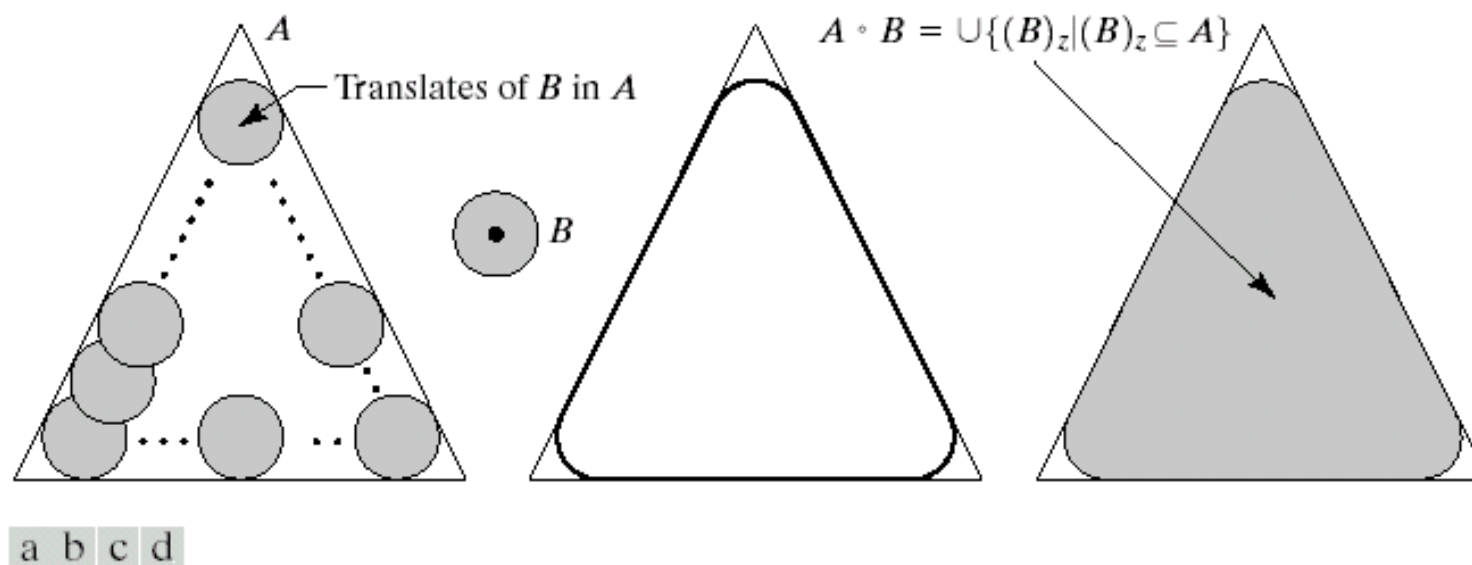
$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

- 作用

- 消除细小对象
- 在细小粘连处分离对象
- 在不明显改变形状的前提下，平滑对象的边缘

## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 开运算 (opening)



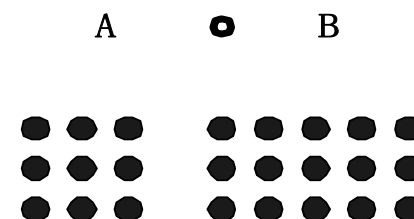
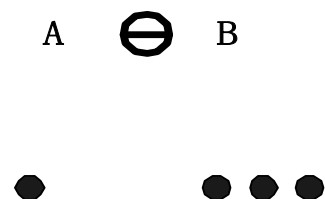
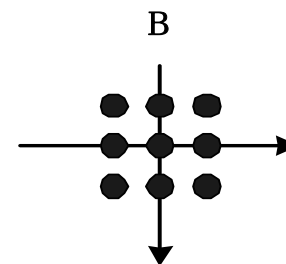
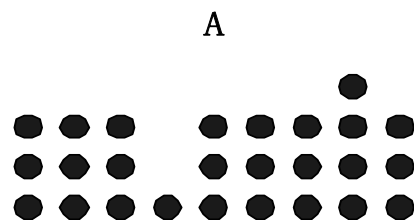
**FIGURE 9.8** (a) Structuring element  $B$  “rolling” along the inner boundary of  $A$  (the dot indicates the origin of  $B$ ). (c) The heavy line is the outer boundary of the opening. (d) Complete opening (shaded).

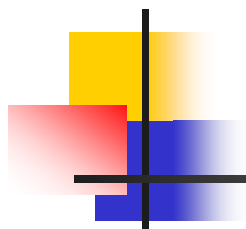
开运算的几何解释

## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 开运算 (opening)

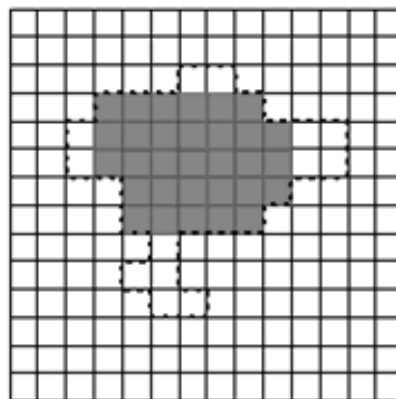
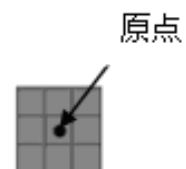
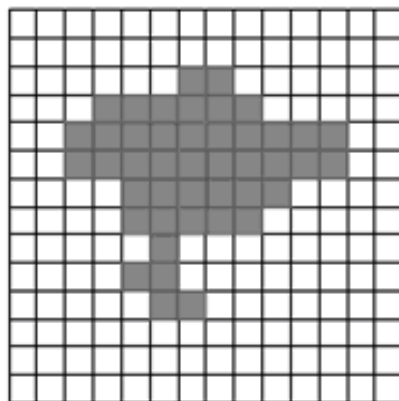
■  $IM2 = imopen(IM, SE)$





## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 开运算 (opening)







## 3.2 二值形态学基本运算

---

### ■ 开运算 (opening)

#### ■ 开运算的性质

- 开的结果是A的子集
- 如C是D的子集，则C与B开的结果是D与B开运算结果的子集
- 对同样的A，多次开运算的结果与一次开运算的结果是一样的



## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 闭运算 (closing)

- 先膨胀、后腐蚀

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

- 作用

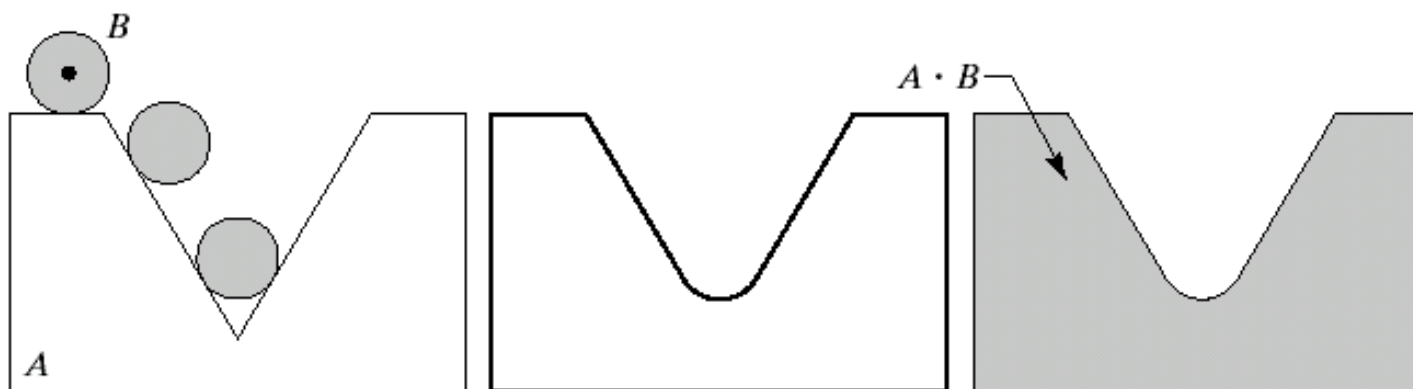
- 填充对象内细小空洞
- 连接邻近对象
- 在不明显改变面积的前提下，平滑对象边缘

- 闭运算和开运算也是一对关于集合求补和反射的对偶操作

$$(A \bullet B)^c = A^c \circ \hat{B}$$

## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 闭运算 (closing)



a b c

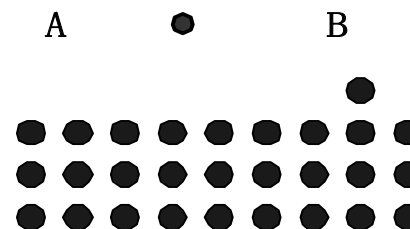
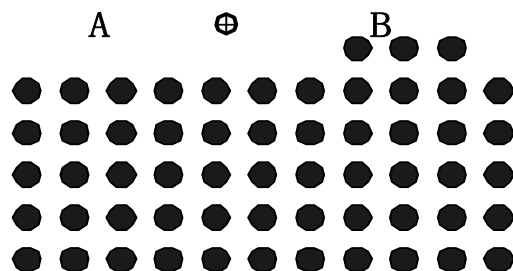
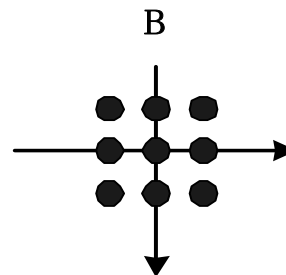
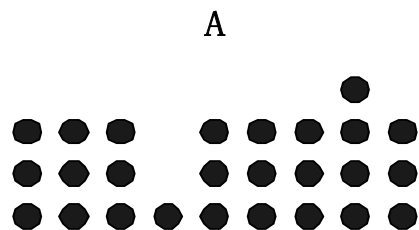
**FIGURE 9.9** (a) Structuring element  $B$  “rolling” on the outer boundary of set  $A$ . (b) Heavy line is the outer boundary of the closing. (c) Complete closing (shaded).

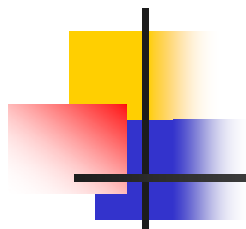
闭运算的几何解释

## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 闭运算 (closing)

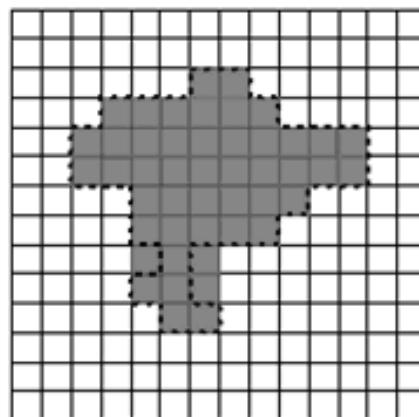
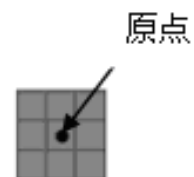
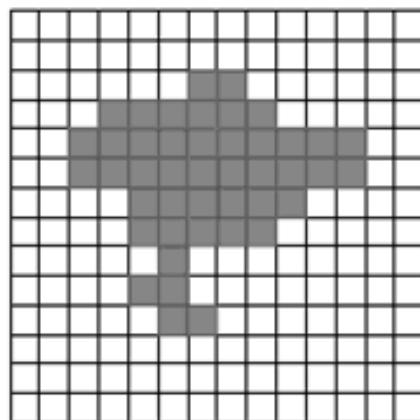
■  $IM2 = \text{imclose}(IM, SE)$





## 3.2 二值形态学基本运算

### ■ 闭运算 (closing)





## 3.2 二值形态学基本运算

---

- 闭运算 (**closing**)

- 闭运算的性质

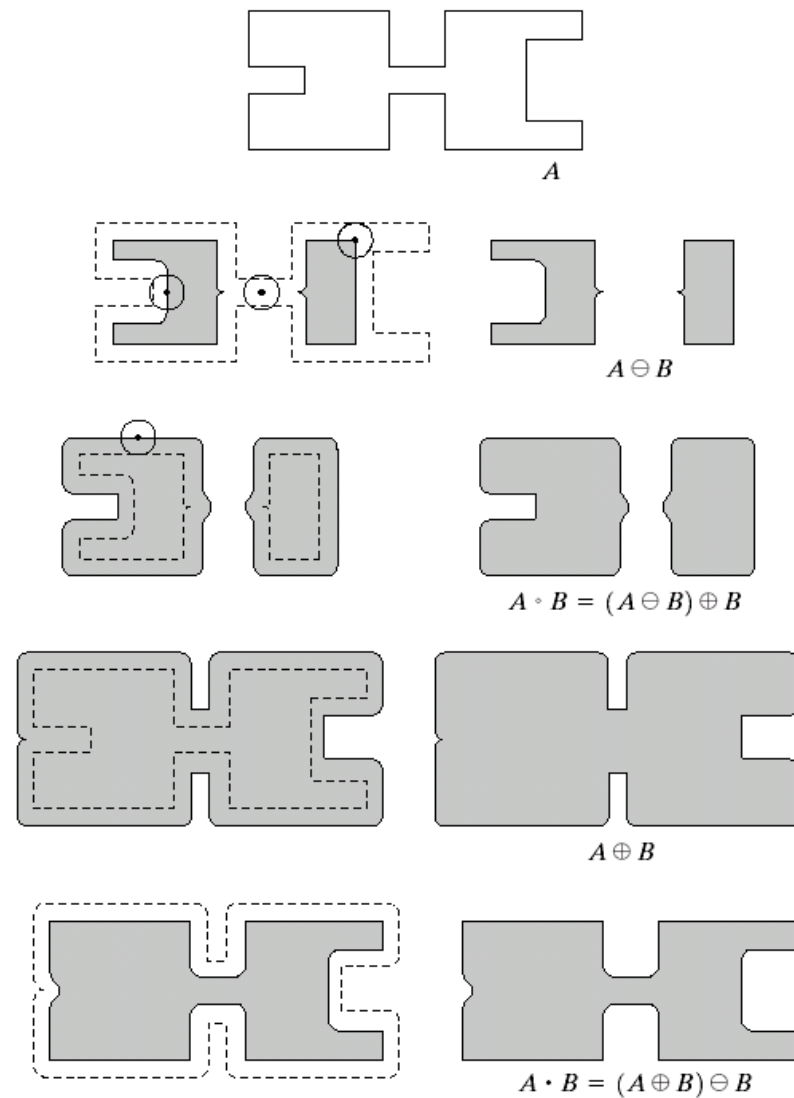
- $A$  是闭运算结果的子集
- 如  $C$  是  $D$  的子集, 则  $C$  与  $B$  闭运算结果是  $D$  与  $B$  闭运算结果的子集
- 对同样的  $A$ , 多次闭运算的结果与一次闭运算的结果是一样的

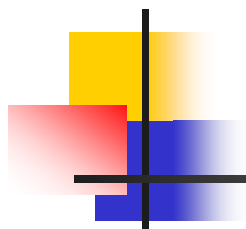
## 3.2 二值形态学基本运算

a
b c
d e
f g
h i

**FIGURE 9.10**

Morphological opening and closing. The structuring element is the small circle shown in various positions in (b). The dark dot is the center of the structuring element.





## 第3章 形态学图像处理

---

- 3.1 引言
- 3.2 二值形态学基本运算
- **3.3 二值图像的形态学处理**
- 3.4 灰度形态学基本运算
- 3.5 灰度图像的形态学处理
- 3.6 MATLAB编程实例





## 3.3 二值图像的形态学处理

---

- 二值图像的形态学处理
  - 边缘提取
  - 区域填充
  - 骨架抽取
  - 细化
  - 粗化
  - 形态滤波

### 3.3 二值图像的形态学处理

#### ■ 边缘提取



a b

**FIGURE 9.14**

(a) A simple binary image, with 1's represented in white. (b) Result of using Eq. (9.5-1) with the structuring element in Fig. 9.13(b).

1表示为白色，0表示为黑色

## 3.3 二值图像的形态学处理

### ■ 边缘提取

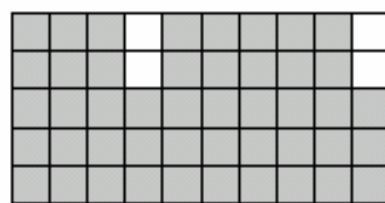
#### ■ 边缘提取的方法

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$

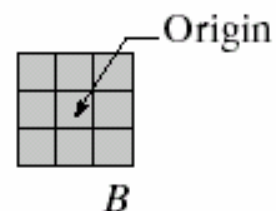
$$\begin{cases} \beta_1(A) = A - (A \ominus B) \\ \beta_2(A) = (A \oplus B) - A \\ \beta_3(A) = (A \oplus B) - (A \ominus B) \end{cases}$$

a b  
c d

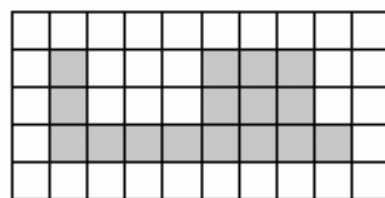
**FIGURE 9.13** (a) Set  $A$ . (b) Structuring element  $B$ . (c)  $A$  eroded by  $B$ . (d) Boundary, given by the set difference between  $A$  and its erosion.



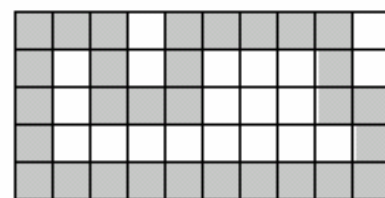
$A$



$B$



$A \ominus B$

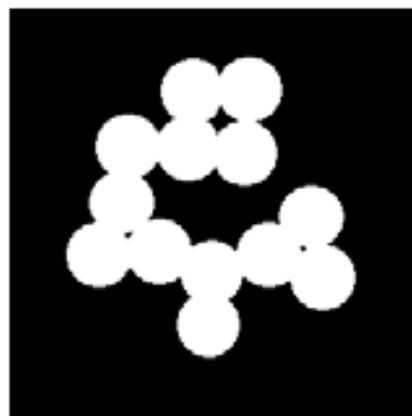


$\beta(A)$

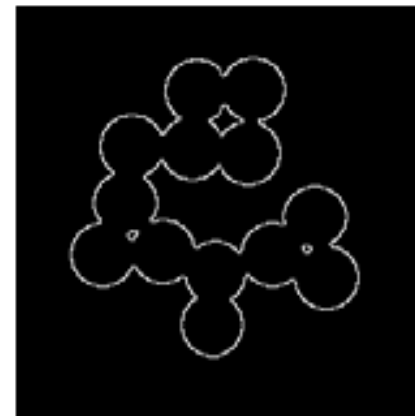
### 3.3 二值图像的形态学处理

- 边缘的类型
  - 内边缘
  - 外边缘
  - 形态学边缘

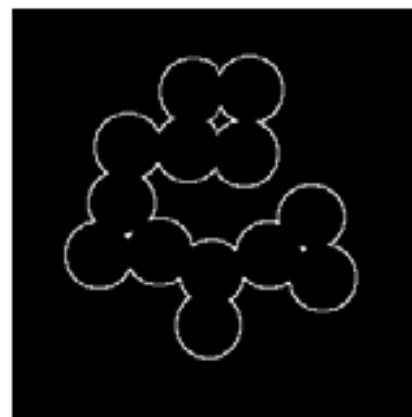
$$\begin{cases} \beta_1(A) = A - (A \ominus B) \\ \beta_2(A) = (A \oplus B) - A \\ \beta_3(A) = (A \oplus B) - (A \ominus B) \end{cases}$$



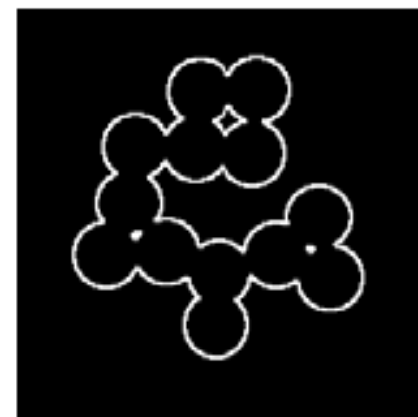
(a) 原图像



(b) 原图像的内边界



(c) 原图像的外边界



(d) 原图像的形态学边界



## 3.3 二值图像的形态学处理

### ■ 区域填充

- 使用迭代得到区域填充的结果

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c \quad k = 1, 2, 3, K$$

当 $X_k = X_{k-1}$ 时停止迭代，区域填充结果为 $X_k$

### ■ 条件膨胀

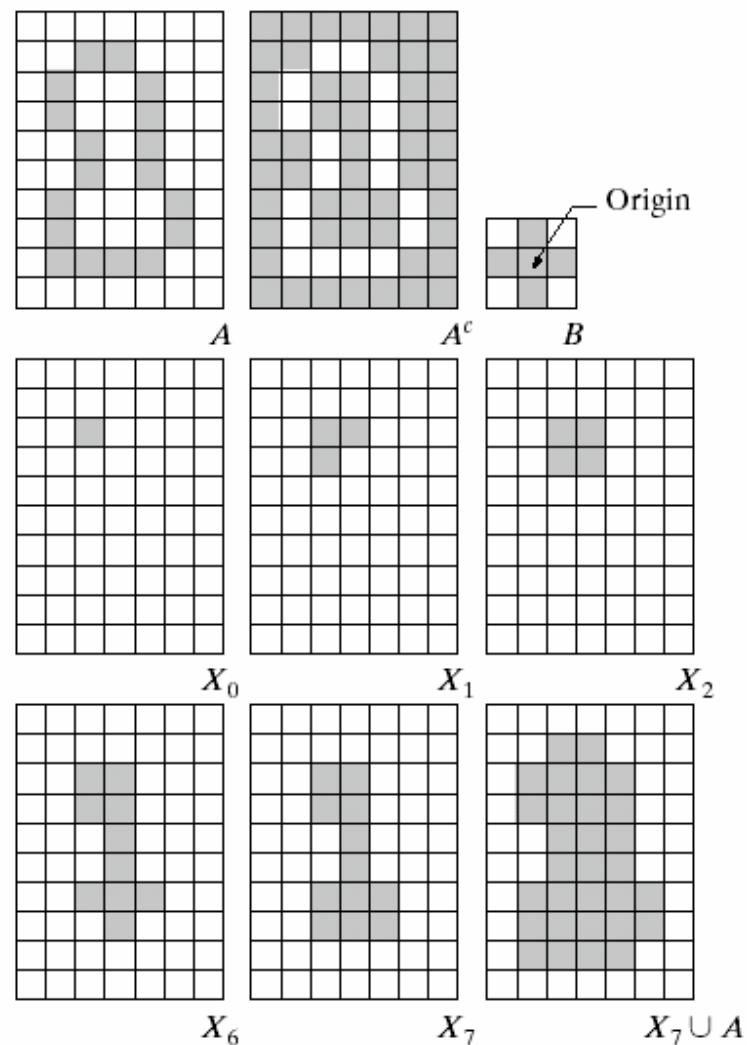
- 如果对膨胀的结果不加控制，就会超过目标边界，每一步与 $A^c$ 的交集可将结果限制在感兴趣区域内

### 3.3 二值图像的形态学处理

a	b	c
d	e	f
g	h	i

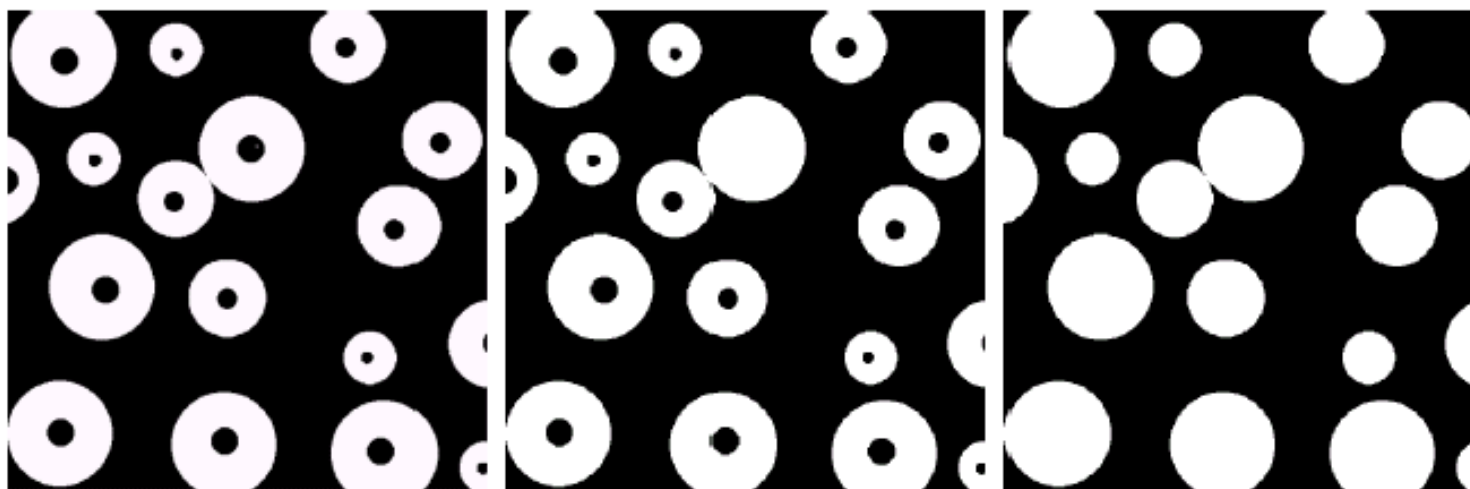
**FIGURE 9.15**

Region filling.  
 (a) Set  $A$ .  
 (b) Complement of  $A$ .  
 (c) Structuring element  $B$ .  
 (d) Initial point inside the boundary.  
 (e)–(h) Various steps of Eq. (9.5-2).  
 (i) Final result [union of (a) and (h)].



### 3.3 二值图像的形态学处理

#### ■ 区域填充



a b c

**FIGURE 9.16** (a) Binary image (the white dot inside one of the regions is the starting point for the region-filling algorithm). (b) Result of filling that region (c) Result of filling all regions.

### 3.3 二值图像的形态学处理

#### ■ 骨架抽取



图 3.11 骨架提取实例 (左)原图像 (右)提取的原图像的骨架图像



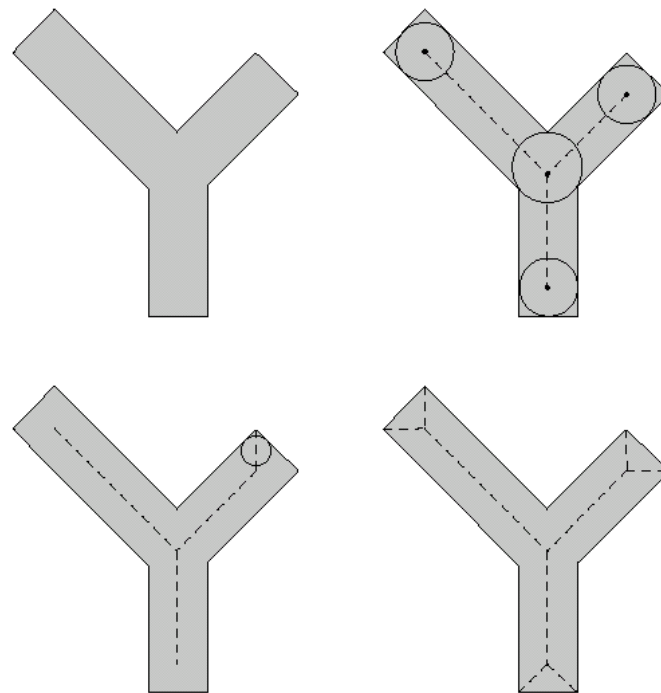
### 3.3 二值图像的形态学处理

#### ■ 骨架抽取

- 设 $D$ 为图像 $S$ 中的一个内切圆盘，即至少有2点与图像边界相切，如果 $D$ 不是图像 $S$ 内部任何其他圆盘的子集，则称为最大圆盘。
- 骨架可定义为图像内部所有最大圆盘圆心的集合

a b  
c d

**FIGURE 9.23**  
(a) Set  $A$ .  
(b) Various positions of maximum disks with centers on the skeleton of  $A$ .  
(c) Another maximum disk on a different segment of the skeleton of  $A$ .  
(d) Complete skeleton.





## 3.3 二值图像的形态学处理

### ■ 骨架抽取

- A 的骨架可以表示为

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A)$$

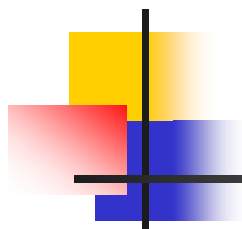
$$S_k(A) = (A \ominus kB) - (A \ominus kB) \circ B$$

$$(A \ominus kB) = (K((A \ominus B) \ominus B) \ominus K) \ominus B$$

$$K = \max \{k \mid A \ominus kB \neq \emptyset\}$$

- A 可以由骨架重构得到

$$A = \bigcup_{k=0}^K (S_k(A) \oplus kB)$$



## 3.3 二值图像的形态学处理

$k$	$A \ominus kB$	$(A \ominus kB) \circ B$	$S_k(A)$	$\bigcup_{k=0}^K S_k(A)$	$S_k(A) \oplus kB$	$\bigcup_{k=0}^K S_k(A) \oplus kB$
0						
1						
2						

$B$

**FIGURE 9.24** Implementation of Eqs. (9.5-11) through (9.5-15). The original set is at the top left, and its morphological skeleton is at the bottom of the fourth column. The reconstructed set is at the bottom of the sixth column.



## 3.3 二值图像的形态学处理

### ■ 细化

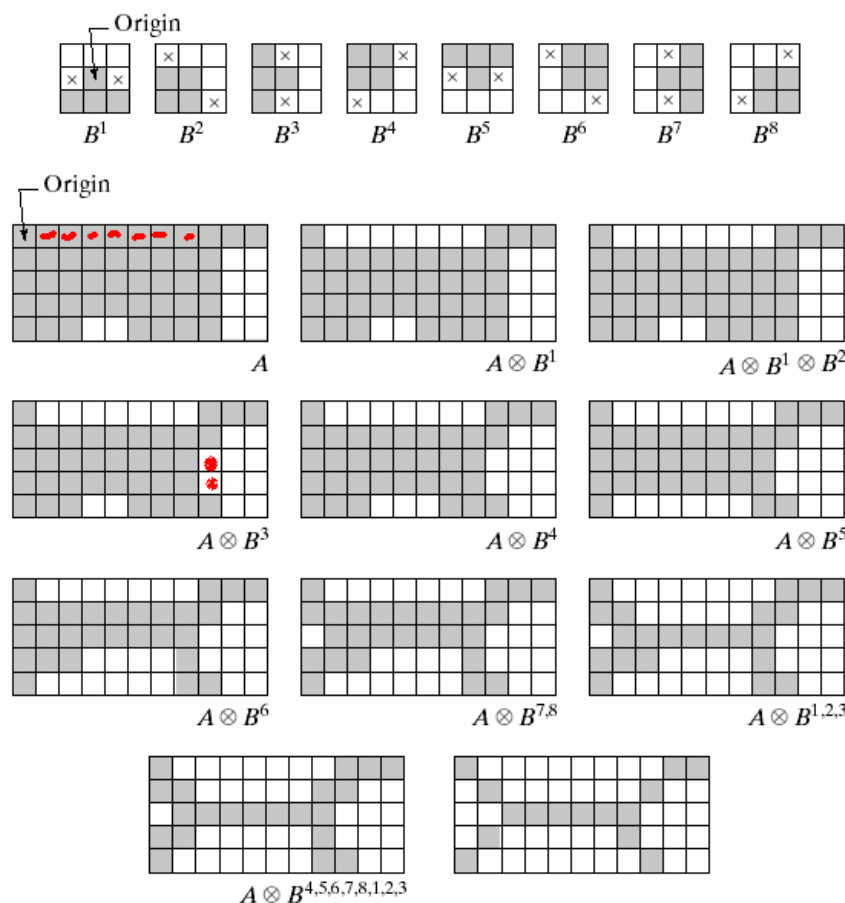
#### ■ 用结构元素序列定义

$$\{B\} = \{B^1, B^2, B^3, K, B^n\}$$

$$A \otimes \{B\} = \left( \left( K \left( \left( A \otimes B^1 \right) \otimes B^2 \right) K \right) \otimes B^n \right)$$

### 3.3 二值图像的形态学处理

#### ■ 细化



a
b c d
e f g
h i j
k l

**FIGURE 9.21** (a) Sequence of rotated structuring elements used for thinning. (b) Set  $A$ . (c) Result of thinning with the first element. (d)–(i) Results of thinning with the next seven elements (there was no change between the seventh and eighth elements). (j) Result of using the first element again (there were no changes for the next two elements). (k) Result after convergence. (l) Conversion to  $m$ -connectivity.



## 3.3 二值图像的形态学处理

### ■ 粗化

- 与细化在形态学上是对偶过程

$$A \ominus B = A \cup (A \circledast B)$$

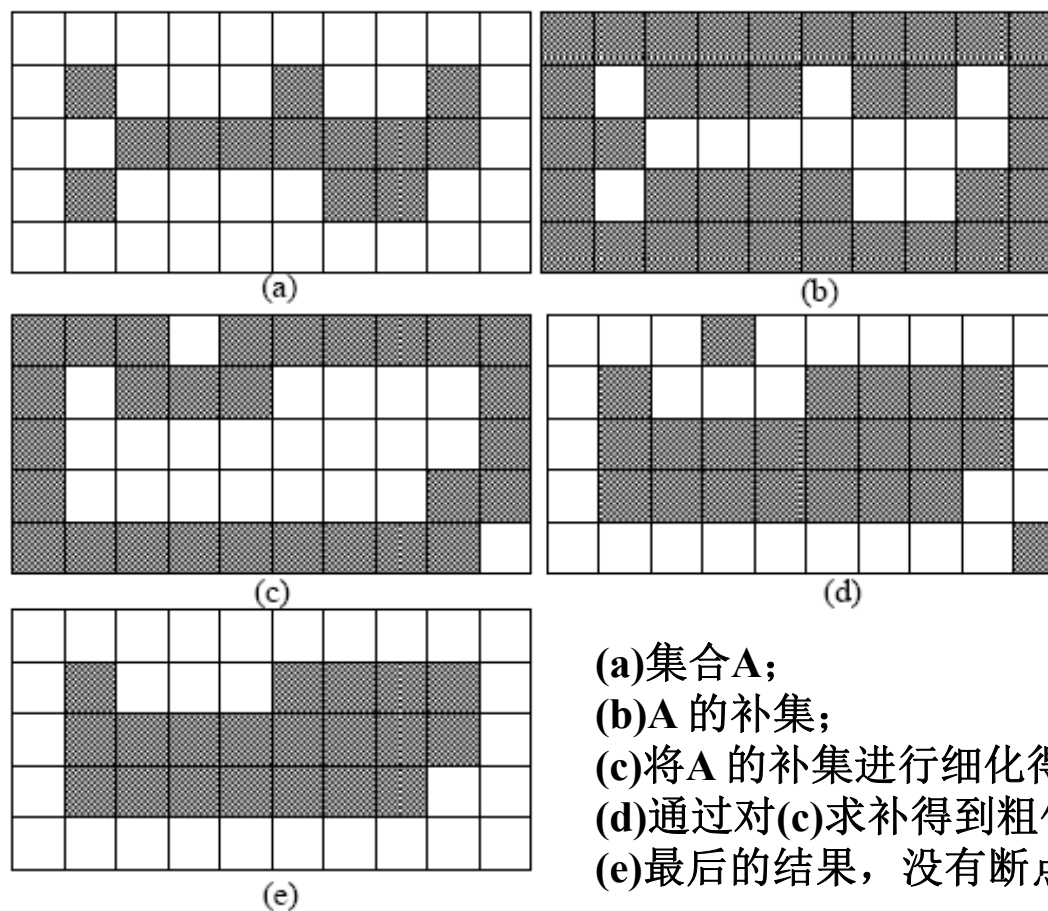
- 用结构元素序列定义

$$\{B\} = \{B^1, B^2, B^3, \dots, B^n\}$$

$$A \ominus \{B\} = (((\dots ((A \ominus B^1) \ominus B^2) \dots) \ominus B^n)$$

### 3.3 二值图像的形态学处理

#### ■ 粗化





## 3.3 二值图像的形态学处理

### ■ 形态滤波

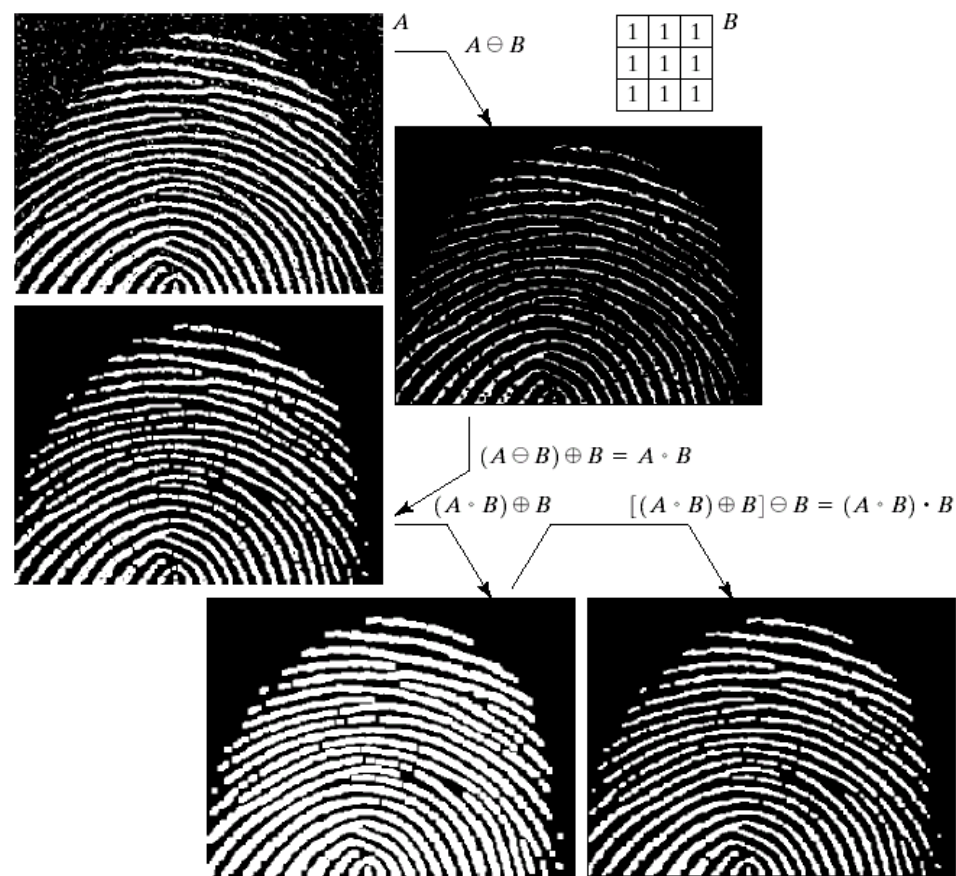
#### ■ 形态开-闭运算：先做开运算，再做闭运算

- 图9.11(a)是受噪声污染的指纹二值图像，噪声为黑色背景上的亮元素和亮指纹部分的暗元素
- (b)为结构元素
- (c)是使用结构元素对图(a)腐蚀的结果，黑色背景噪声消除了，指纹中的噪声尺寸增加
- (d)是结构元素对图(c)膨胀的结果，包含于指纹中的噪声分量的尺寸被减小或被完全消除，带来的问题是：在指纹纹路间产生了新的间断
- (e)是对(d)图膨胀的结果，图(d)的大部分间断被恢复，但指纹的纹路变粗了
- (f)是对(e)图腐蚀的结果，噪声消除的相当干净，但指纹纹路还有间断



### 3.3 二值图像的形态学处理

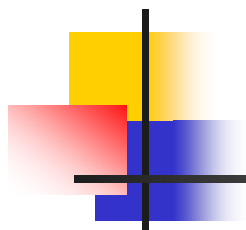
#### ■ 形态滤波



a b  
d c  
e f

FIGURE 9.11

(a) Noisy image.  
(c) Eroded image.  
(d) Opening of  $A$ .  
(e) Dilation of the opening.  
(f) Closing of the opening. (Original image for this example courtesy of the National Institute of Standards and Technology.)



## 第3章 形态学图像处理

---

- 3.1 引言
- 3.2 二值形态学基本运算
- 3.3 二值图像的形态学处理
- **3.4 灰度形态学基本运算**
- 3.5 灰度图像的形态学处理
- 3.6 MATLAB编程实例



## 3.4 灰度形态学基本运算

- 灰度形态学是二值形态学向灰度空间的自然扩展，也包括腐蚀、膨胀、开运算和闭运算等基本操作
- 灰度形态学中分别用图像函数  $f(x,y)$  和  $b(x,y)$  表示输入图像和结构元素
- 二值形态学中用到的求交和求并运算在灰度形态学中分别用求最小极值和求最大极值的运算来代替
- 描述中有时使用  $f$  和  $b$  来对  $f(x,y)$  和  $b(x,y)$  进行缩写表示

## 3.4 灰度形态学基本运算

### ■ 灰度腐蚀

$$(f \ominus b)(s, t) = \min \{ f(s+x, t+y) - b(x, y) \mid (s+x, t+y) \in D_f; (x, y) \in D_b \}$$

$$(f \ominus b)(s) = \min \{ f(s+x) - b(x) \mid (s+x) \in D_f; x \in D_b \}$$

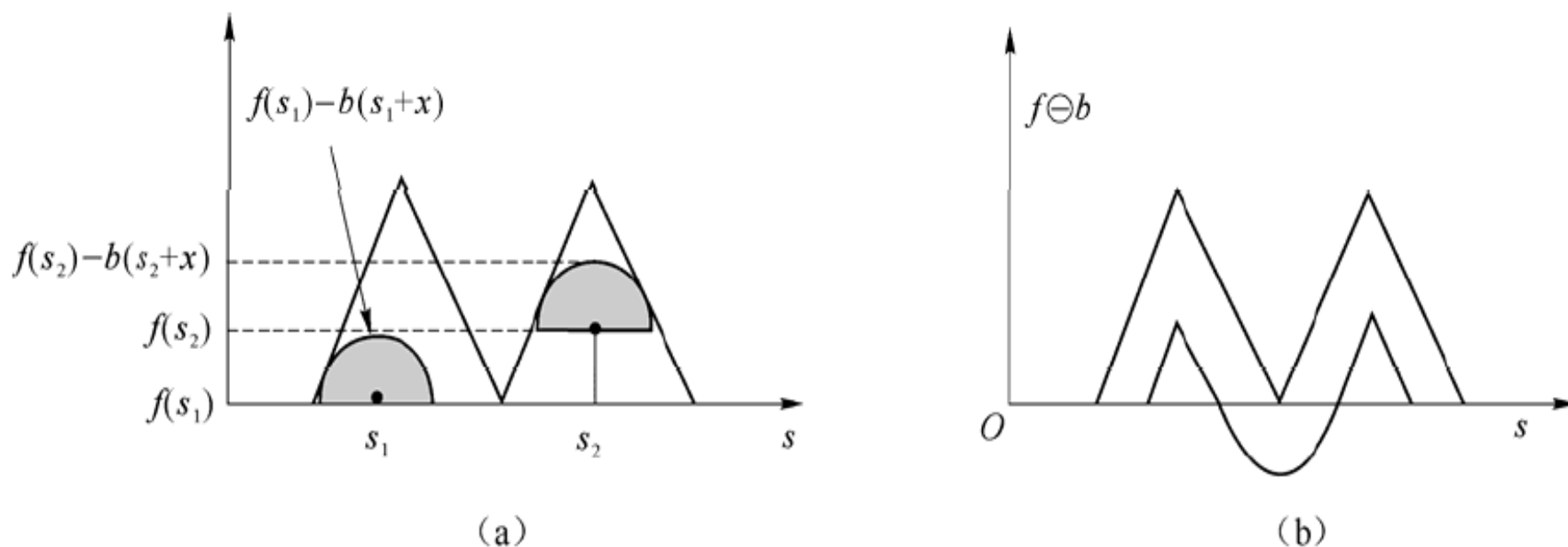
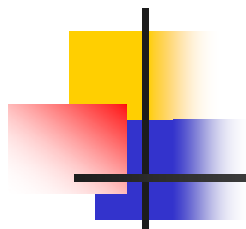


图 3.16 使用图 3.15 (b) 中显示的结构元素对图 3.15 (a) 中显示的函数进行腐蚀



## 3.4 灰度形态学基本运算

### ■ 灰度腐蚀

- 形式上与二维相关是相似的，只是用最小值运算代替了相关运算，用减法运算代替了相关乘积。
- 腐蚀运算是在结构元素形状定义的区间中选取的最小值为基础的。

### ■ 通常对灰度图像进行腐蚀有两个效果：

- **（1）** 如果所有的结构元素都为正，则输出图像会趋向于比输入图像更暗；
- **（2）** 在输入图像中亮的细节的面积如果比结构元素的面积小，则亮的效果将被消弱。消弱的程度取决于环绕于亮细节周围的灰度值和结构元素自身的形状与幅值。

## 3.4 灰度形态学基本运算

### ■ 灰度膨胀

$$(f \oplus b)(s, t) = \max \{f(s - x, t - y) + b(x, y) \mid (s - x, t - y) \in D_f; (x, y) \in D_b\}$$

$$(f \oplus b)(s) = \max \{f(s - x) + b(x) \mid (s - x) \in D_f; x \in D_b\}$$

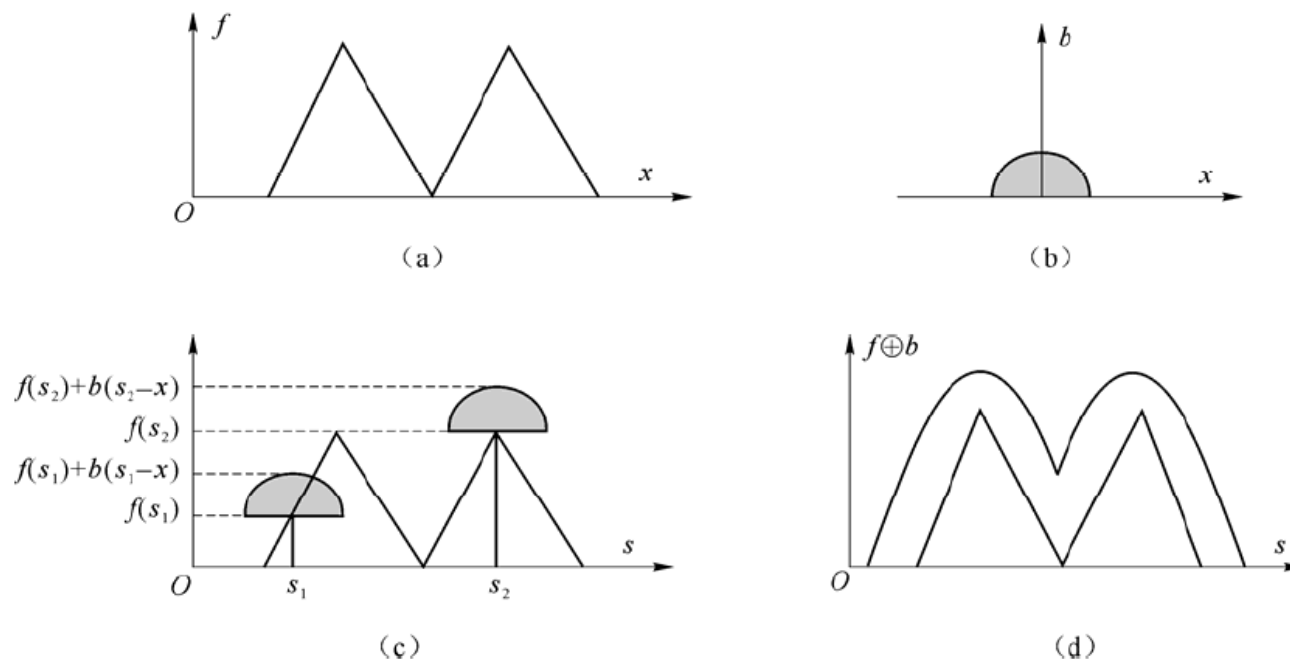


图 3.15 (a) 一个简单函数; (b) 结构元素; (c) 膨胀过程; (d) 膨胀结果 (曲线部分)



## 3.4 灰度形态学基本运算

### ■ 灰度膨胀

- 可以将灰度膨胀公式的处理理解成把  $b$  沿着  $f$  进行滑行所得的最大值所构成的曲线。
  - 从概念上讲，以  $b$  滑过函数  $f$  还是以  $f$  滑过  $b$  是没有区别的。
  - 注意，在每个结构元素的位置上，这一点的膨胀值是在跨度为  $b$  的区间内  $f$  与  $b$  之和的最大值。
- 通常对灰度图像进行膨胀处理的结果是两方面的：
- (1) 如果所有结构元素的值为正，则输出图像会趋向于比输入图像更亮；
  - (2) 暗的细节部分是减少了还是被消除了，取决于膨胀所用的结构元素的值和形状。

## 3.4 灰度形态学基本运算



(a)



(b)



(c)

图 3.17 (a) 摄影师照相的原图 (b) 膨胀后的结果图像 (c) 腐蚀后的结果图像





## 3.4 灰度形态学基本运算

### ■ 灰度开运算

- 开运算先用  $b$  对  $f$  进行简单的腐蚀运算，然后用  $b$  对得到的结果进行膨胀运算。

$$f \circ b = (f \ominus b) \oplus b$$

### ■ 灰度闭运算

- 开运算先用  $b$  对  $f$  进行简单的膨胀运算，然后用  $b$  对得到的结果进行腐蚀运算。

$$f \bullet b = (f \oplus b) \ominus b$$

- 灰度图像的开运算和闭运算对于求补和映射运算是对偶的

$$(f \bullet b)^c = f^c \circ \hat{b}$$

- 灰度的开运算和闭运算有时也称为开启运算和闭合运算。

### 3.4 灰度形态学基本运算

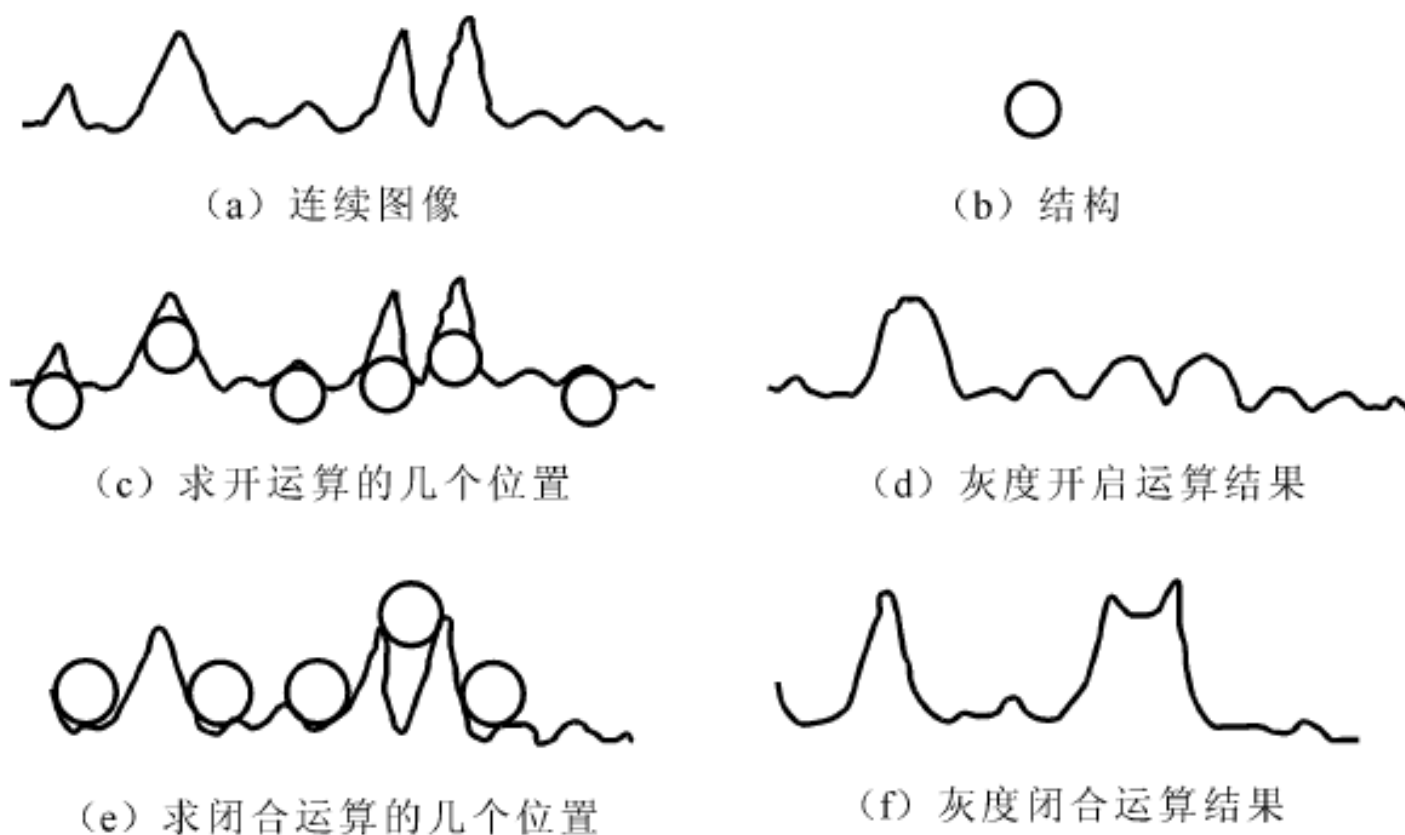
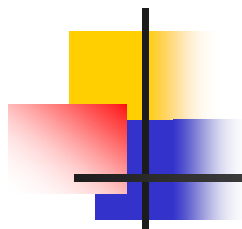


图 3.18 灰度开启运算和灰度闭合运算的原理示意



## 3.4 灰度形态学基本运算

### ■ 灰度开运算和闭运算的应用

- 开运算经常用于去除较小(相对于结构元素的大小而言)的明亮细节,同时相对地保持整体的灰度级和较大的明亮区域不变。先进行腐蚀运算可以除去小的图像细节,但这样做会使图像变暗。接下来进行膨胀运算又会增强图像的整体亮度,但不会将腐蚀运算除去的部分重新引入图像中。
- 闭运算经常用于除去图像中的暗细节部分,而相对地保持明亮部分不受影响。先通过膨胀除去图像中的暗细节,同时增加图像的亮度,接下来对暗图像进行腐蚀,而不会将膨胀运算除去的部分重新引入图像中。

### 3.4 灰度形态学基本运算

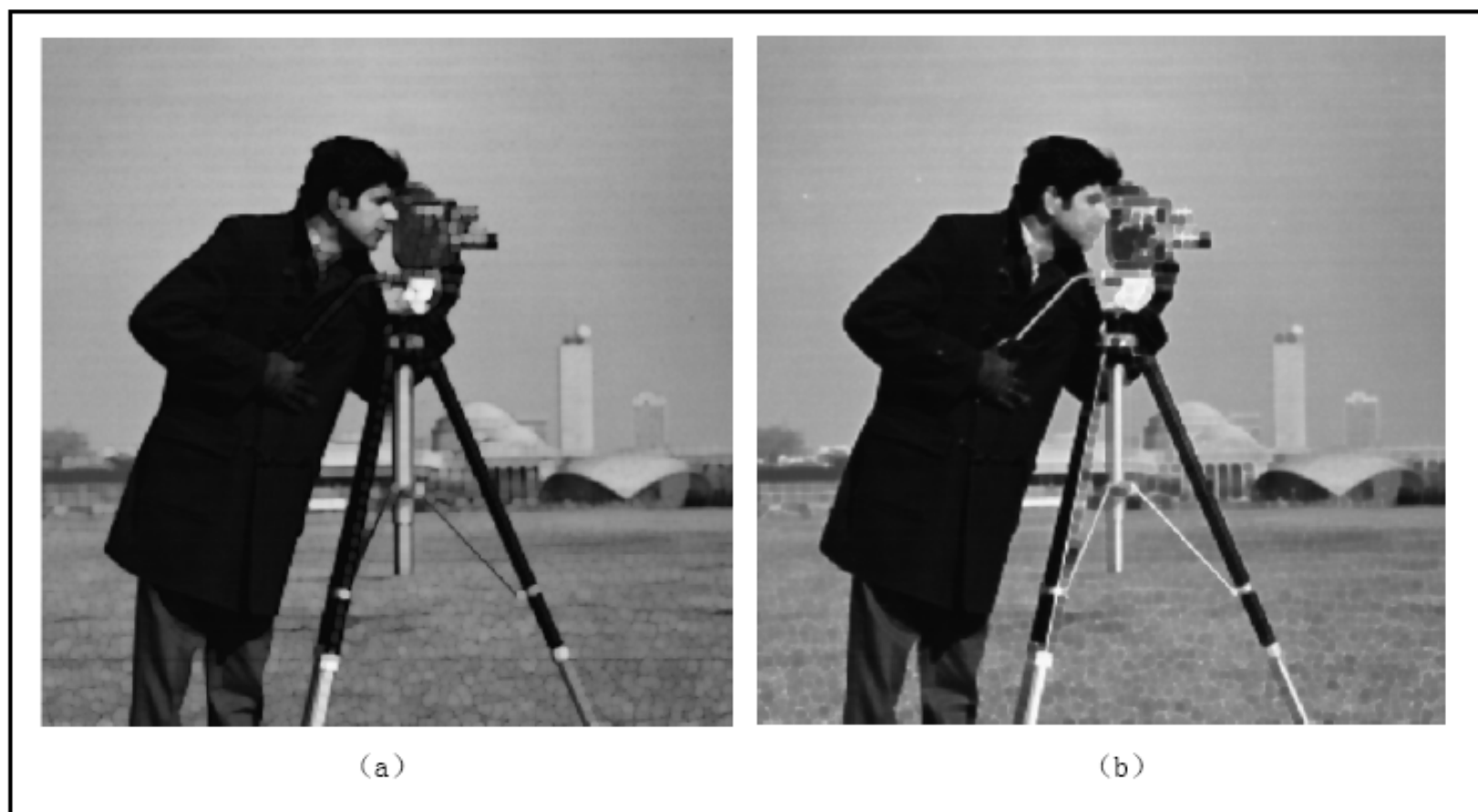
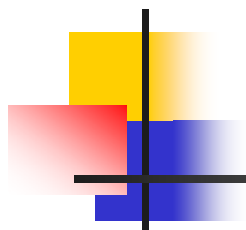


图 3.19 (a) 灰度开操作的结果; (b) 灰度闭操作的结果



## 第3章 形态学图像处理

---

- 3.1 引言
- 3.2 二值形态学基本运算
- 3.3 二值图像的形态学处理
- 3.4 灰度形态学基本运算
- **3.5 灰度图像的形态学处理**
- 3.6 MATLAB编程实例



## 3.5 灰度图像的形态学处理

- 实际应用中的灰度图像的开运算和闭运算

- 滤除图像的噪声

$$f' = (f \circ b) \bullet b$$

- 边缘检测

$$g = (f \oplus b) - (f \ominus b)$$

- 空间梯度算子与形态学梯度处理之间的区别

- 高帽 (top-hat) 变换

$$h = f - (f \circ b)$$

- 可以检测出图像中较尖锐的波峰。可以从较暗且平滑的背景中提取出较亮的细节；如增强图像阴影部分的细节、对灰度图像进行物体分割，检测灰度图像中波峰和波谷及细长图像等。