97 學年度數學科集訓 –– 多項式　970929

徐健策師

第一部份：專題：多項式的因式分解與高斯引理

"多項式與整數"在初等理論的內容與方法上有很多相似的地方，如除法、因式與倍式、輾轉相除法……等，而且兩者都討論"因式分解"這一重要問題，但多項式的因式分解與其係數所佈的數系有很密切的關聯。

給了多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$　$(n\in N, n\geq 1)$，如果 $f(x)$之各項係數（缺項之係數看做 0）都在 Q 內，我們就說 $f(x)$佈於 Q（其餘依此類推），記爲 $f(x)\in Q[x]$。

例如：四次多項式 $f(x)=x^4-4$ 之因式分解爲

$x^4-4=(x^2-2)(x^2+2)$　　（因式佈於 Z）

$=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$　　（因式佈於 R）

$=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$　　（因式佈於 C）

一、因式分解

設 K 表 Z,Q,R,C 中任一數系，一個係數分佈於數系 K 的多項式 $f(x)$，如果可以表成兩個多項式的乘積 $f(x)=p(x)\cdot q(x)$，其中 $p(x)$與 $q(x)$之係數亦佈於 K，且它們的次數都比 $f(x)$的次數低，那麼我們就說 "$f(x)$在 K 內可分解 "（或說 $f(x)$在 K 內可約），否則就稱 $f(x)$在 K 內是不可分解或不可約多項式。例如：

$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$在 R 內可約，在 Q 內不可約。

二、在複數範圍內分解

設複係數多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ $(n\in N, n\geq 1)$，代數基本定理告訴我們：$f(x)$至少有一個複數根 α_1（方程式 $f(x)=0$ 的根也稱爲多項式 $f(x)$的根），

再由因式定理，$f(x)$可被 $x-\alpha_1$ 整除，即

$f(x)=(x-\alpha_1)f_1(x)$　[其中 $f_1(x)$是複係數 $n-1$ 次多項式]　…………(1)

當 $n-1\geq 1$ 時，$f_1(x)$至少也有一個複數根 α_2，同樣的討論得

$f_1(x)=(x-\alpha_2)f_2(x)$　[其中 $f_2(x)$是複係數 $n-2$ 次多項式]　…………(2)

把(2)代入(1)，得 $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2(x)$　………………………………………(3)

對 $f_2(x)$繼續討論下去，最後可得 $f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$　…………(4)

其中 a_n是 $f(x)$的首項係數。故得下面結論：

(1) 每一個佈於 C 的 n 次($n\geqq 2$)多項式 $f(x)$都是可約的，而且可以分解成 n 個一次因式（係數佈於 C）的乘積。
(2) 若 k 次重根算成 k 個根，則 n 次多項式恰有 n 個複數根（含實根）。

三、在實數範圍內分解

設 $f(x) \in R[x]$，且 $f(x)$之次數 $n\geq 2$，令$\alpha = a + bi$（$a, b \in R$ 且 $b \neq 0$)，α之共軛複數記作

$\overline{\alpha} = a - bi$ ，經過計算可以得到：$\overline{f(\alpha)} = f(\overline{\alpha})$ ……………………………………… (5)

也就是說：實係數 n 次多項式 $f(x)$保有共軛性，即α, $\overline{\alpha}$ 共軛，則它們的函數值 $f(\alpha)$與 $f(\overline{\alpha})$ 仍保持共軛。由(5)式可以導出實係數 n 次方程式的虛根共軛成雙定理：

> **虛根共軛成雙定理**
>
> 實係數 n 次方程式 $f(x)=0$ 之虛根必共軛成雙出現。
>
> 即 $f(\alpha)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\overline{\alpha})=0$

於是當 $f(x)$的次數 n 為奇數時，由於虛根有偶數個（也許沒有），所以 $f(x)$至少有一個實根。

今假設 $f(x)$有 n 個根，分別為：

虛根：$\alpha_1, \overline{\alpha}_1, \alpha_2, \overline{\alpha}_2, \cdots\cdots, \alpha_k, \overline{\alpha}_k$ (計 $2k$ 個，此處$\alpha_j = a_j + b_j i$)

實根：$r_1, r_2, \cdots\cdots, r_s$ (計 s 個，此處 $n = 2k + s$)

則 $f(x)$在複數範圍內可以分解成（$f(x)$佈於 R，當然也佈於 C）

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\overline{\alpha}_1)(x-\alpha_2)(x-\overline{\alpha}_2)\cdots(x-\alpha_k)(x-\overline{\alpha}_k)(x-r_1)\cdots(x-r_s) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

因共軛因式的乘積：$(x-\alpha_j)(x-\overline{\alpha}_j) = (x-a_j)^2 + b_j^2$ 是一個實係數二次因式，故(6)式可以改寫成：

$$f(x) = \underbrace{[(x-a_1)^2+b_1^2][(x-a_2)^2+b_2^2]\cdots[(x-a_k)^2+b_k^2]}_{\text{二次因式}}\underbrace{(x-r_1)\cdots(x-r_s)}_{\text{一次因式}} \quad \cdots\cdots\cdots \ (7)$$

(7)式呈現一個重要的結論：

> (1) 實係數 n 次多項式 $f(x)$，當 $n \geqq 3$ 時，$f(x)$在 R 內可約，且 $f(x)$可分解成二次因式或一次因式(係數佈於 R)之乘積。
>
> (2) $n=2$ 時，$f(x) = ax^2 + bx + c$，當 $b^2 - 4ac \geqq 0$ 時，$f(x)$在 R 內可約。當 $b^2 - 4ac < 0$ 時，$f(x)$在 R 內不可約。

例 1：設 $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$，試在 C, R 內分解 $f(x)$。

(解) ：因 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$ （等比級數和）

故 $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$，於是 $f(x)$之四個複數根為

$\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$　　(此處 $\omega=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$)

(1) 在 C 內分解：

$x^4+x^3+x^2+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)$

(2) 在 R 內分解：

當 $|\alpha|=1$ 時，有 $\alpha\cdot\overline{\alpha}=|\alpha|^2=1$ ，今 $\omega^5=1$，故知

ω與ω^4共軛且ω^2與ω^3共軛

$$x^4+x^3+x^2+x+1=\{(x-\omega)(x-\omega^4)\}\{(x-\omega^2)(x-\omega^3)\}$$

$$=(x^2-2x\cos\frac{2}{5}\pi+1)(x^2-2x\cos\frac{4}{5}\pi+1)$$

(3) $x^4+x^3+x^2+x+1$ 在 Q 內不可約。

四、整係數多項式的分解問題：

我們都知道：Q , R , C 這三個集合中任何一個，都可以進行″加,減,乘,除″四則運算，唯一的限制是除數不可為 0。但在 Z 中，只能進行″加,減,乘″三種運算（因兩個整數相除之商數不一定是整數），正因為這一差別，對整係數多項式的分解問題，高斯（*C.F.Gauss*　1777~1855）提出了他的看法：

> 高斯引理：
>
> 如果整係數 n 次多項式 $f(x)$ 在 Q 內可分解，那麼 $f(x)$ 在 Z 內也可分解。

把整係數多項式 $f(x)$看作一個係數佈於 Q 中的多項式，再來考慮它的分解問題，高斯認為：
″$f(x)$能否在整數系 Z 範圍內分解，完全取決於 $f(x)$能否在有理數系 Q 範圍內分解″。
為了證明這一重要結論，先介紹一些相關概念。

【定義】設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ 是整係數多項式，若 $f(x)$之各項係數的最大公因數等於 1，即 $(a_n, a_{n-1},\cdots\cdots, a_1, a_0)=1$，則稱 $f(x)$為樸多項式或本原多項式（簡稱樸式）。

讓我們先證明下面引理：

【引理 1】設 $f(x), g(x), h(x)$都是整係數多項式且 $h(x)=f(x)\cdot g(x)$，如果質數 p 整除 $h(x)$的各項係數，則 $f(x)$與 $g(x)$中必有一個多項式，它的各項係數也都能被 p 整除。

[證明] 用反證法

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ 中至少有一個係數 a_i 不被 p 整除以及
$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots\cdots+b_1x+b_0$ 中至少有一個係數 b_j 不被 p 整除，
即 $p\nmid a_i$, $p\nmid b_j$ 且 i 和 j 是滿足此條件的最小指標，則 $p\nmid a_ib_j$ ，
考慮 $h(x)=f(x)\cdot g(x)$之 x^{i+j} 項係數 c_{i+j}：

$$c_{i+j}=a_{i+j}b_0+\cdots\cdots+a_ib_j+\cdots\cdots+a_0b_{i+j} \quad\cdots\cdots (8)$$

$(a_k=0, k=n+1, n+2,\cdots\cdots; b_l=0, l=m+1, m+2,\cdots\cdots)$

(8) 式右端除了 $a_i b_j$ 這一項外，其餘所有的項，包括 $a_{i+j} b_0, a_{i+j-1} b_1, \cdots\cdots, a_{i+1} b_{j-1}$, $a_{i-1} b_{j+1}, \cdots\cdots, a_0 b_{i+j}$ 都是 p 的倍數，($\because$ $p \mid a_k$, $k=0, 1, \cdots\cdots, i-1$；$p \mid b_l$, $l=0,1,\cdots\cdots, j-1$)，因而 $p \mid c_{i+j}$，這與題意不符。

【推論】兩個樸式 $f(x)$, $g(x)$之乘積 $h(x)=f(x)\cdot g(x)$仍是樸式。(推論與引理 1 是等價命題)

現在我們可以來證明高斯引理：

> 高斯引理：
>
> 如果整係數 n 次多項式 $f(x)$ 在有理數系 Q 內可約，那麼 $f(x)$ 在整數系 Z 內也可約。

【證明】把整係數多項式 $f(x)$ 看成佈於 Q 內的多項式，並假設 $f(x)$ 可以在 Q 內分解成次數較低的兩多項式乘積： $f(x)=p(x)\cdot q(x)$

因 $p(x)$是有理係數，先將 $p(x)$之各項係數（分數）通分，然後將分母提出，

其次將通分後的各項分子之最大公因數提出，

這樣一來，剩下一個整係數的樸式 $p_1(x)$，即 $p(x)=\dfrac{d_1}{m_1}p_1(x)$，

同理，對 $q(x)$做同樣的處理，得 $q(x)=\dfrac{d_2}{m_2}q_1(x)$，($q_1(x)$是樸式)，

於是有 $f(x)=p(x)\cdot q(x)=\dfrac{d_1 d_2}{m_1 m_2}p_1(x)\,q_1(x)=\dfrac{d}{m}p_1(x)\,q_1(x)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (9)

$$m\,f(x)=d\cdot p_1(x)\,q_1(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10)$$

根據上面引理的推論知：$p_1(x)\,q_1(x)$也是樸式。再由(10)式可知，

整數 m 可以除盡 $d\cdot p_1(x)\,q_1(x)$各項係數（但樸式 $p_1(x)\,q_1(x)$之所有係數互質），

因而 $m \mid d$， 即 $\dfrac{d}{m}$是一個整數，(9)式變成：

$$f(x)=\frac{d}{m}p_1(x)\,q_1(x)=(\text{整數})\cdot(\text{樸式})\cdot(\text{樸式})$$

故知：$f(x)$在 Z 內亦可分解。

高斯引理也可用等價命題來描述：

> 如果整係數多項式 $f(x)$在 Z 內不可約，則 $f(x)$在 Q 內亦不可約。

艾森斯坦（*Eisenstein*）對一個整係數多項式 $f(x)$ 在 Z 內是否可約，提出了一個有用的判別法：

> **艾森斯坦判別法：**
>
> 設 $f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+c_1x+c_0$ 是整係數多項式，並且存在一質數 p 滿足
>
> (1) $p\mid c_j$　$(j=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$　(2) $p\nmid c_n$　(3)　$p^2\nmid c_0$
>
> 則 $f(x)$ 在 Z 內不可約。

（證明）利用反證法

設 $f(x)$ 在 Z 內可分解成兩個次數較低的整係數多項式的乘積，即 $f(x)=p(x)\cdot q(x)$

其中 $p(x)=a_rx^r+a_{r-1}x^{r-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$，$q(x)=b_sx^s+b_{s-1}x^{s-1}+\cdots\cdots+b_1x+b_0$

且 $r+s=n$　,　$1\le r\le n-1$, $1\le s\le n-1$

由於 $p\mid c_0$ 且 $p^2\nmid c_0$　，所以 $p\mid a_0b_0$ 且 $p^2\nmid a_0b_0$，不妨設 $p\mid a_0$ 且 $p\nmid b_0$

由條件 $p\nmid c_n$　得 $p\nmid a_rb_s$，故 $p\nmid a_r$　$(p\nmid b_s)$

不妨設 a_k 是 $a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots,a_r$ 中，第一個不被 p 整除者，則 $1\le k\le r\le n-1$

現在考慮 $c_k=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots\cdots+a_0b_k$

該式右端除了第一項 a_kb_0 之外，其餘各項都能被 p 整除，

因而 $p\nmid c_k$　，此與定理中所予的條件矛盾。

第二部份：範例

一、多項式的基本性質(整除)：

1. 設整數 $n \geq 0$，證明：多項式 $(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$ 能被 x^2+x+1 整除。
   [解答]
   對 n 歸納。
   當 $n=0$ 時結論顯然成立。
   設結果在 $n-1$ 時成立，即 x^2+x+1 整除 $(x+1)^{2n-1} + x^{n+1}$，
   則 $(x+1)^{2n+1} + x^{n+1} = (x+1)^2(x+1)^{2n-1} + x\cdot x^{n+1} = (x^2+x+1)(x+1)^{2n-1} + x\,[(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}]$
   能被 x^2+x+1 整除，即結論對 n 也成立。

2. 設 $k \in N$, 求一切實係數多項式 $P(x)$, 使其滿足 $P(P(x)) = [P(x)]^k$ 。
   (1975 年 第七屆加拿大數學競試題)
   [解答]
   設 $degP(x) = n$ 則 $degP(P(x)) = n^2$, $deg[P(x)]^k = nk$
   於是, $n^2 = nk \;\Rightarrow\; n(n-k) = 0 \Rightarrow\; n = 0$ 或 $n = k \neq 0$ ，則
   (1) $n = 0$，若 $P(x) = c$ (常數) 則有 $c = c^k$
   (a) 當 k 是偶數時, $c = 0$ 或 $c = 1$
   (b) 當 k 是奇數時, $c = 0$ 或 $c = \pm 1$
   (2) $n = k \neq 0$ 若 $P(x)$ 不是常數, 且 $n = k \neq 0$, $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$
   則, $a_k \neq 0$ 且
   $a_k\,(a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0)^k + a_{k-1}\,(a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0)^{k-1} + \ldots$
   $+ a_1\,(a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0)^k + a_0 = (a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0)^k$
   比較兩邊首項, 冪 x^{k^2} 的係數得 $a_k^{\,k+1} = a_k^{\,k} \;\Rightarrow\; a^k = 1$
   於是, $a_{k-1}(a_kx^k + \ldots + a_0)^{k-1} + \ldots + a_1(a_kx^k + \ldots + a_0) + a_0 = 0$
   繼續考察兩邊首項, 依次得 $0 = a_{k-1} = a_{k-2} = \cdots = a_1 = a_0$
   所以 $P(x) = x^k$。

3. 求所有的正整數 m 與 n, 使 $1 + x^n + x^{2n} + \ldots + x^{mn}$ 被 $1 + x + x^2 + \ldots + x^m$ 整除 。
   (1977 年 美國數學競試賽題 / 建中專題)
   [解答]
   $\because\; f(x) = 1 + x^n + x^{2n} + \ldots + x^{mn} = \dfrac{(x^n)^{m+1}-1}{x^n-1} = \dfrac{(x^{m+1})^n-1}{x^n-1}$
   $g(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^m = \dfrac{x^{m+1}-1}{x-1}$
   $\therefore\; \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(x^{m+1})^n-1}{x^n-1}\cdot\dfrac{x-1}{x^{m+1}-1}$ ……………(*)
   $\because$ 對於所有正整數 m 與 n 而言, $x^{m+1} - 1$ 與 $x^n - 1$ 都能整除 $x^{(m+1)n} - 1$

且 $x^{(m+1)n}-1$ 的因式都不相同(無重因式)
∴ 只要 $x^{(m+1)}-1$ 與 x^n-1 沒有 $x-1$ 以外的公因式, 即可使得 (*) 成爲多項式
所以充要條件是使 m+1 與 n 互質的所有正整數 m 與 n 皆爲所求。

4. 設 $P(x), Q(x), R(x)$ 及 $S(x)$ 都是多項式, 且滿足：
$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$
求證 : $x-1$ 是 $P(x)$ 的一個因式。 (1976 年 美國數學競試賽題)
[解答]
∵ $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ ∴令 $\omega=cos\frac{2\pi}{5}+i\,sin\frac{2\pi}{5}$
則 $\omega^k\,(k=1, 2, 3, 4)$是 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的根, 且$\omega^5=1$
∵$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$
∴ 取 $x=\omega^k$ $(k=1, 2, 3, 4)$ 代入上式, 得
$P(1)+\omega^kQ(1)+\omega^{2k}R(1)=0$ …………….(1)
即 $P(1)+\omega Q(1)+\omega^2R(1)=0$
$P(1)+\omega^2Q(1)+\omega^4R(1)=0$
$P(1)+\omega^3Q(1)+\omega^6R(1)=0$
$P(1)+\omega^4Q(1)+\omega^8R(1)=0$
∴ $4P(1)+(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)Q(1)+(\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8)R(1)=0$ ……….(2)
(1)×ω^k, 得 $\omega^kP(1)+\omega^{2k}Q(1)+\omega^{3k}R(1)=0$ $(k=1, 2, 3, 4)$ …………….(3)
(2) – (3) 得 $5P(1)=0$ ∴ $P(1)=0$, 即 $x-1$ 是 $P(x)$ 的一個因式。

5. 證明$x^{k-1}+x^{k-2}+...+x+1\,\big|\,x^{ka_1}+x^{ka_2+1}+...+x^{ka_k+k-1}$，其中 k 是大於 1 的整數，$a_1,a_2,...,a_k$是任意正整數。 (建中專題)
[證明]：
己知公式$(x-1)(x^{k-1}+x^{k-2}+...+x+1)=x^k-1$且$x^k-1\,\big|\,x^{ka_i}-1$, $i=1,2,...,k$

因而$x^k-1\,\big|\,x^{i-1}(x^{ka_i}-1)$,則$(x^{k-1}+x^{k-2}+......+x+1)\,\big|\,x^{i-1}(x^{ka_i}-1)$

因$x^{ka_1}+x^{ka_2+1}+...+x^{ka_k+k-1}$
$=(x^{ka_1}-1)+x(x^{ka_2}-1)+...+x^{k-1}(x^{ka_k}-1)+(x^{k-1}+x^{k-2}+...+x+1)$

故$x^{k-1}+x^{k-2}+...+x+1\,\big|\,x^{ka_1}+x^{ka_2+1}+...+x^{ka_k+k-1}$ 。

二、整係數多項式

1. 如果整係數方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 有有理根，求證： a, b, c 中至少有一個是偶數。
(1938 年 波蘭數學競試賽題/ (建中專題))
[解答]

此方程式有有理根的充要條件是其判別式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 爲完全平方數，
假若 a, b, c 均爲奇數，爲了方便，令 $b = 2m+1$，則 $\Delta = 4[m(m+1)-ac] + 1$
$\because$ $m, m+1$ 中必有一偶數，$\therefore m(m+1)-ac$ 爲奇數，設爲 $2n+1$，
於是 $\Delta = 8n+5$，即 Δ 爲以 8 除之餘 5 之奇數，
但任一奇數 $2k+1$ 之平方爲 $4k(k+1)+1$，這是以 8 除之餘 1 之數，
故 Δ 不爲完全平方數。

2. 設整係數多項式 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$， $f(0)$ 與 $f(1)$ 爲奇數,
求證 : $f(x)$ 沒有整數根。 (1941 年 莫斯科數學競賽題)
[解答]
假定 $f(x_0) = 0, x_0 \in Z$
(1) 如果 x_0 是偶數, 則 $f(x_0) - f(0) = (a_nx_0^n + \cdots + a_1x_0 + a_0) - a_0$
$0 - f(0) = a_nx_0^n + \cdots + a_1x_0$
$f(0) = -(a_nx_0^n + \cdots + a_1x_0)$亦爲偶數, 這與已知矛盾。
(2) 如果 x_0 是奇數, 則 $f(x_0) - f(1) = (a_nx_0^n + \cdots + a_1x_0 + a_0) - (a_n + \cdots + a_1 + a_0)$
$0 - f(1) = a_n(x_0^n - 1) + \cdots + a_1(x_0 - 1)$
$f(1) = -[a_n(x_0^n - 1) + \cdots + a_1(x_0 - 1)]$亦爲偶數, 這與已知矛盾。
綜合 (1)(2) 知 $f(x)$沒有整數根 。

3. 設有兩個關於 x 的整係數多項式
它們的乘積是一個偶係數多項式, 但不是每個係數多可被 4 整除
求證 : 這兩個整係數多項式中, 有一個多項式的係數全是偶數, 而另一個多項式中至少有一個係數爲奇數。 (1939 年 莫斯科數學競試賽題)
[解答]
設 $f(x)g(x) \in Z[x]$, 且 $f(x)g(x)$ 是偶係數多項式, 但不是所有係數都是 4 的倍數
(1) 假定 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的係數中都有奇數，
用 $f_1(x)$ 和 $g_1(x)$ 分別表示由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中所有係數爲奇數的單項組成的多項式，
則 $f(x) \equiv f_1(x) \pmod 2$, $g(x) \equiv g_1(x) \pmod 2$
$\therefore$ $f(x)g(x) \equiv f_1(x)g_1(x) \equiv 0$
這裡表明： $f_1(x)g_1(x)$的所有係數均爲偶數
但是, 由假設可知 : $f_1(x)g_1(x)$ 的最高次項係數必爲奇數, 矛盾
故, $f(x)$ 和 $g(x)$ 中至少有一個的係數全爲偶數
(2) 假定 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的係數都爲偶數，
由多項式乘法可知 $f(x)g(x) \equiv 0 \pmod 4$
即 $f(x)g(x)$ 的所有係數都是四的倍數, 這與已知矛盾
綜合 (1)(2) 得出, $f(x)$與 $g(x)$中有一個的係數全是偶數, 另一個的係數至少有一個是奇數。

4. 設 p 爲質數，證明：多項式 $f(x) = x^p + px + (2p-1)$ 是一個 $Z[x]$中的不可約多項式。
[解答]
$p=2$ 時，$f(x) = x^2 + 2x + 3$，命題成立；

p=3 時，$f(x) = x^3 + 3x + 5$，若 $f(x)$可約，則 $f(x)$必有有理根，
但 $f(\pm 1) \neq 0$，$f(\pm 5) \neq 0$，所以 $f(x)$ 爲 $Z[x]$中的不可約多項式。

若 $p>3$，考慮 $g(x) = f(x+1) = (x+1)^p + p(x+1) + (2p-1) = x^p + C_1^p x^{p-1} + \ldots + C_{p-2}^p x^2 + 2px + 3p$

因爲 $p \nmid 1$，$p \mid C_k^p$ $(k=1, 2, \ldots, p-2)$，$p \mid 2p$，與 $p^2 \nmid 3p$

由**艾森斯坦判別法**則，可知 $g(x)$ 在 $Z[x]$中不可約。
則 $f(x)$ 在 $Z[x]$中不可約，命題成立。

5. 已知有整係數 $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ 的多項式 $F(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 且存在四個不同的整數 a, b, c, d 使得 $F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 5$
求證：不存在整數 k,滿足 $F(k) = 8$ 。 (1970 年加拿大中學生數學競賽題)
[解答]
依題意，令 $G(x) = F(x) - 5$，知 $G(x)$ 有四個不同的整數根 a, b, c, d
由因式定理，可記 $G(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)H(x)$ 其中 $H(x)$ 爲整係數多項式
假定存在整數 k 滿足 $F(k) = 8$
那麼 $G(k) = F(k) - 5 = 8 - 5 = 3$
即 $(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)H(k) = 3$
這表明四個互不相同的整數 $k-a, k-b, k-c, k-d$ 中至多有一個能等於 3 或 -3,
而其餘三個必定爲 ± 1
因此，其中有兩個相等，這與已知矛盾。
所以這樣的 k 是不存在的。

三、多項式的根

1. 已知 $f(x) \in R[x]$。證明：$f(x)$的根都是實數 $\Leftrightarrow [f(x)]^2$ 不能表示成兩個非零實係數多項式 $g(x)$ 與 $h(x)$ 的平方和，其中 $f(x)$ 不整除 $g(x)$。
[解答]
先證必要性 ($\Rightarrow$)：
若存在 $g(x)$，$h(x) \in R[x]$，使得 $f(x)^2 = g(x)^2 + h(x)^2$，$f(x) \nmid g(x)$
如果 $f(x)$的根都爲實數，則對 $f(x)$的任意一個根 α，均有 $g(\alpha)^2 + h(\alpha)^2 = 0$，
所以 $g(\alpha) = h(\alpha) = 0$。
則 $deg f \leq deg g$ (若 α 爲 $f(x)$的 k 重根，則 α 也會是 $g(x)$的 k 重根)
且 $f(x)$的根都是 $g(x)$的根，因此 $f(x) \mid g(x)$，矛盾！
再證充分性 ($\Leftarrow$)：
只需證明：若存在 $\alpha \notin R$，使得 $f(\alpha)=0$，則可將 $[f(x)]^2$ 表示爲滿足條件的多項式 $g(x)$ 與 $h(x)$ 的平方和。
由 $f(\alpha)=0$，可知 $f(\overline{\alpha})=0$，於是可設 $f(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})f_1(x)$，$f_1(x) \in R[x]$。
則 $[f(x)]^2 = |x-\alpha|^4 [f_1(x)]^2$，
所以取 $g(x) = [Re(x-\alpha)^2]\, f_1(x)$，$h(x) = [Im(x-\alpha)^2]\, f_1(x)$，

如此可得 $[f(x)]^2 = g(x)^2 + h(x)^2$，且 $f(x) \nmid g(x)$
因此命題成立。

【註】若 $f(x) \in C[x]$，則 $f(x) = g(x) + i\,h(x)$，其中 $g(x), h(x) \in R[x]$分別稱爲 $f(x)$的"實部"與"虛部"。記作 $Ref(x)$ 和 $Imf(x)$。

2. 如果方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 有三個成等差數列的實根，則實數 a, b, c 應滿足什麼樣的充要條件? (1952 年 波蘭數學競賽題)
[解答]
設方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的三根爲 x_1, x_2, x_3
由根與係數關係,
$x_1 + x_2 + x_3 = -a$ …….(1)
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b$ ……..(2)
$x_1 + x_3 = 2x_2$………(3)
把 (3) 代入 (1), 得 $3x_2 = -a$, $\therefore x_2 = -\dfrac{a}{3}$, 又 $\because$ $a \in R$ $\therefore$ $x_2 = -\dfrac{a}{3} \in R$
把 $x = -\dfrac{a}{3}$ 代入原方程式得 $(-\dfrac{a}{3})^3 + a\,(-\dfrac{a}{3})^2 + b\,(-\dfrac{a}{3}) + c = 0$
$\Rightarrow 2a^3 - 9ab + 27c = 0$ …………(4)
現在, 我們已求得實數 a, b, c 滿足 (4), 原方程式有實數根 $x_2 = -\dfrac{a}{3}$
接著, 我們還得求出原方程式的另二根 x_1, x_3 是實數的充要條件 :
由 (3) 有 $x_1 + x_3 = 2x_2 = 2(-\dfrac{a}{3}) = -\dfrac{2a}{3}$ ………….(5)
由 (2) 有 $x_1x_3 = b - x_2(x_1+x_3) = b - 2x_2^2 = b - 2(-\dfrac{a}{3})^2 = b - \dfrac{2}{9}a^2$ ……….(6)
可見, x_1 , x_3 是方程式 $x^2 + \dfrac{2}{3}ax + (b - \dfrac{2}{9}a^2) = 0$ 的兩根
此方程是有實根的充要條件爲 $\triangle = (\dfrac{2}{3}a)^2 - 4(b - \dfrac{2}{9}a^2) \ge 0$ $\Rightarrow a^2 - 3b \ge 0$ ……(7)
所以, 原方程式具有三個成等差數列實根的充要條件是 (4) 及 (7) 即
$2a^3 - 9ab + 27 = 0$ 及 $a^2 - 3b \ge 0$。

3. 設四次方程 $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$ 的四個根中, 有兩個根的乘積爲 -32，求 k？ (1984 年 美國數學競賽題)
[解答]
設方程式的四個根是 x_1, x_2, x_3, x_4 依根與係數的關係, 有
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ ………………………..….(1)
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = k$ ……..(2)
$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -200$…… …(3)

$x_1x_2x_3x_4 = -1984$ ………………………… …… …(4)
依題意，不妨設 $x_1x_2 = -32$ …………………..(5)

由 (4) 得 $x_3x_4 = \dfrac{-1984}{-32} = 62$ ………………….(6)

把(5)(6)代入(3)　$x_1x_2(x_3+x_4)+(x_1+x_2)x_3x_4 = -200 \Rightarrow \quad -32(x_3+x_4)+62(x_1+x_2) = -200$
得到 $31(x_1+x_2) - 16(x_3+x_4) = -100$ …………(7)

解(1)與(7)得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_3 + x_4 = 14 \end{cases}$

由(2)得 $k = x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1+x_2)(x_3+x_4)$
所以 $k = -32 + 62 + 4\cdot 14 = 86$。

4.　已知 $\dfrac{x^2}{2^2-1^2}+\dfrac{y^2}{2^2-3^2}+\dfrac{z^2}{2^2-5^2}+\dfrac{\omega^2}{2^2-7^2}=1$

$$\dfrac{x^2}{4^2-1^2}+\dfrac{y^2}{4^2-3^2}+\dfrac{z^2}{4^2-5^2}+\dfrac{\omega^2}{4^2-7^2}=1$$

$$\dfrac{x^2}{6^2-1^2}+\dfrac{y^2}{6^2-3^2}+\dfrac{z^2}{6^2-5^2}+\dfrac{\omega^2}{6^2-7^2}=1$$

$$\dfrac{x^2}{8^2-1^2}+\dfrac{y^2}{8^2-3^2}+\dfrac{z^2}{8^2-5^2}+\dfrac{\omega^2}{8^2-7^2}=1$$

求 $x^2+y^2+z^2+w^2$ 的值。 (1984 年 美國數學邀請賽題)
[解答]
x, y, z, w 能滿足給定的方程組等價於
$t = 4, 16, 36, 46$ 滿足方程式 $\dfrac{x^2}{t-1}+\dfrac{y^2}{t-9}+\dfrac{z^2}{t-25}+\dfrac{\omega^2}{t-49}=1$ ………(1)
當 $t \neq 1, 9, 25, 49$ 時, 去分母,
(1) 等價於 $(t-1)(t-9)(t-25)(t-49) - x^2(t-9)(t-25)(t-49) - y^2(t-1)(t-25)(t-49) - z^2(t-1)(t-9)(t-49)$
$- w^2(t-1)(t-9)(t-25) = 0$……….(2)
因此, (2) 是關於 t 的四次方程, 它的全部方根為 4, 16, 36, 64 它又等價於
$(t-4)(t-16)(t-36)(t-64) = 0$………(3)
∵ (2)(3) 為同解方程, 且 t^4 的係數都是 1
∴ 其餘各同次項的係數也應相等, 比較 t^3 項的係數, 即得:
$-1-9-25-49-x^2-y^2-z^2-w^2 = -4-16-36-64$
所以, $x^2+y^2+z^2+w^2 = 36$。

5.　設有一實係數多項式 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ ，

(1) 若 $f(x)$ 之根全部為實根，試證：對所有 $n \geq 2$ 時， $a_{n-1}^2 \geq 2a_{n-2}a_n$ 成立。

(2) 若對所有$n \geq 2$時，$a_{n-1}^2 \geq 2a_{n-2}a_n$成立時，試問：多項式$f(x)$之根是否全爲實根？若不真舉反例。 (建中專題)

[解答]：

(1) 若$a_n = 0$, 則$a_{n-1}^2 \geq 2a_{n-1}a_n$當然成立。

故可設$a_n \neq 0$， 令$r_1, \ldots\ldots, r_n$爲$f(x)$之根

若全爲實根，則$r_1^2 + \ldots\ldots + r_n^2 \geq 0$，但$\left(r_1^2 + \ldots\ldots + r_n^2\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} r_i r_j$

由根與係數間之關係，$\sum_{i=1}^{n} r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \sum_{i<j} r_i r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

代入得$\frac{a_{n-1}^2}{a_n^2} - \frac{2a_{n-2}}{a_n} \geq 0$，故$a_{n-1}^2 \geq 2a_{n-2}a_n$

(2) 敘述不真：反例：$x^2 + 4x + 5$。

6. 求證：實係數的多項式方程 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 不可能全是實數根。

(*Murray Klamkin, Crux Mathematicorum, Vol*.5, *No*.9, *November* 1979)

[解答]

設 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ 爲 $P(x) = 0$ 的根, 則 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ 都不是 0

在 $P(x) = 0$ 的兩邊同除以 x^n, 並令 $y = \frac{1}{x}$ 得

$Q(y) = y^n + y^{n-1} + y^{n-2} + a_3 y^{n-3} + \cdots + a_{n-1} y + a_n = 0$

注意到 $\frac{1}{r}$是 $Q(y) = 0$ 的根的 充要條件是 r 是 $P(x) = 0$ 的根

因此, $Q(y) = 0$ 的根是 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ 其中 $s_i = \frac{1}{r_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

由根與係數的關係, 知 $\sum_{i=1}^{n} s_i = -1$, $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} s_i s_j = 1$

於是, $\sum_{i=1}^{n} s_i^2 = (\sum_{i=1}^{n} s_i)^2 - 2\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} s_i s_j = (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1 < 0$

上式說明:

不是全體 s_i都是實數，也就是說，不是全體r_i都是實數。

7. 化簡：(1) $\sqrt[3]{2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{3\sqrt{3}}}$，(2) $\sqrt[3]{2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}}$ (建中專題)

[解答]：

令$\alpha=\sqrt[3]{2+\frac{10}{3\sqrt{3}}}$ ，　　$\beta=\sqrt[3]{2-\frac{10}{3\sqrt{3}}}$ ，

則$\alpha\beta=\frac{2}{3}$ ，令$\alpha+\beta=r$ ，則 $r^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$，

$r^3-2r-4=0$，則 $(r-2)(r^2+2r+2)=0$

此方程式唯一實根為 2　　$\therefore \alpha+\beta=r=2$……………………….(1)

以α,β為根之二次方程式為$t^2-2t+\frac{2}{3}=0$ ，

解得$t=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　$\because$　$\alpha>\beta$　　$\therefore$　$\alpha=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$…………(2)

8. 證明：不存在一個次數為 998 次的實係數多項式 $P(x)$，使得對任意的 $x\in C$，均有 $[P(x)]^2-1=P(x^2+1)$。

[解答]

設存在滿足條件的 $P(x)=a_{998}x^{998}+a_{997}x^{997}+\ldots+a_1x+a_0$ $(a_{998}\neq 0)$，代入 $[P(x)]^2-1=P(x^2+1)$

比較兩邊係數，得 $a_{997}=a_{995}=\ldots=a_3=a_1=0$，於是 $P(x)$ 是一個偶函數。

令 $Q(x)=P(x)-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right.$是方程式 $t^2-1=0$ 的根)，則 $Q(x)$也是一個 998 次的偶函數，且

滿足 $Q(x)\,[Q(x)+(1+\sqrt{5})]=Q(x^2+1)$ …………(1)

設 $Q(x)=R(x^2)$，則 $R(x)$是一個 499 次實係數的多項式，

由於虛根成對，可知 $R(x)=0$ 有一個實根，

因此存在 α ，$\alpha^2\in R$ 使得 $Q(\alpha)=0$，再由(1)中可得 α^2+1 是 $Q(x)=0$ 的實根。

由(1)式不斷疊代，可得

$$\alpha^2+1<(\alpha^2+1)^2+1<[(\alpha^2+1)^2+1]^2+1<\ldots\ldots\ldots$$

上是不等式中每一個數都是 $Q(x)=0$ 的實根，所以 $Q(x)=0$ 有無窮多個實根，

因此 $Q(x)$ 是零多項式，這與 $Q(x)$ 是一個 998 次的多項式矛盾！

所以，不存在滿足條件的多項式 $P(x)$。

9. 證明多項方程式 $x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\ldots-2nx+2n+1=0$ 沒有實根。

[解答]

由於 多項式 $f(x)=0$ 沒有實根等價於 $f(x)$ 在 $R[x]$上沒有一次因式，

即對於所有實數 x，$f(x)$恆為正，或恆為負。(所以此題實際上是一個不等式問題)

對於 $x\leq 0$，顯然 $f(x)>0$。

若 $x>0$，

則由 $xf(x)=x^{2n+1}-2x^{2n}+3x^{2n-1}-4x^{2n-2}+\ldots+(2n+1)x$， 所以

$(1+x)\,f(x)=f(x)+x\,f(x)=x^{2n+1}-x^{2n}+x^{2n-1}-x^{2n-2}+\ldots+x+2n+1=x\cdot\frac{x^{2n+1}+1}{x+1}+2n+1>0$

因此對於 $x>0$ 有 $f(x)>0$。

10. 給定 $2n$ 個互不相同的複數 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$，將他們按照下列規則填入 $n\times n$ 方格表中：第 i 行和第 j 列交處的方格內填 a_i+b_j $(i, j=1, 2, \ldots, n)$。證明：若各列的乘積相等，則各行數的乘積也相等。

[解答]

設各列數的乘積都等於 c，考慮多項式 $f(x)=(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)-c$。

已知 $f(b_i)=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$，由於 b_i 不相等，所以 n 次多項方程式 $f(x)=0$ 有 n 個不同的根。

所以 $f(x)=(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)$，即

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)-c=(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)$$

取 $x=-a_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$，得到 $(a_i+b_1)(a_i+b_2)\ldots(a_i+b_n)=(-1)^{n+1}c$，

所以，各行數的乘積都是 $(-1)^{n+1}c$。

第三部份：近兩年(95,96)全國各分區試題選

1. **(96 嘉義區)**

   $f(x)$及 $g(x)$ 均爲三次多項式。試證 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 不可能全爲 $f(g(x))=0$ 的解。

2. **(96 台南區)**

   設 a, b 爲異於 0 的整數，如果多項式 $ax^{17}+bx^{16}+1$ 能被 x^2-x-1 所整除，試求 a 值。

3. **(96 高屏區)**

   多項式 $P(x)=x^{1017}+13x^{1016}+1$ 有 1017 個相異的根 r_j，$j=1,\ldots,1017$，令多項式 $Q(x)$爲 1017 階多項式且 $Q\left(r_j+\dfrac{1}{r_j}\right)=0$，$j=1,\ldots,1017$。試求 $\dfrac{Q(1)}{Q(-1)}$。

4. **(95 全國)**

   設 $p(x)$爲整係數多項式。給定整數 a, b，令 $a_1=p(a)$，$a_2=p(a_1)$，…，$a_{2006}=p(a_{2005})$；$b_1=p(b)$，$b_2=p(b_1)$，…，$b_{2006}=p(b_{2005})$。已知 $a_{2006}=a$，$b_{2006}=b$，但 $a_{1003}\neq a$，$b_{1003}\neq b$。

   試證明：若 $a<b$，則 $a_{1003}>b_{1003}$。

5. **(95 全國獨研)**

   試求多項式不等式 $x^6+x^4+3>2x^3+x^2+2x$ 的所有實數解。

6. **(95 省一區)**

   設 $f(x)=x^3+2x^2-3x-1$，$g(x)=x^4+3x^3-x^2-5x-2$，且 α, β, γ 爲 $f(x)=0$ 的三根。

   (1) 試求 $g(\alpha)\cdot g(\beta)\cdot g(\gamma)$ 之值。 (2) 試求 $\dfrac{1}{g(\alpha)}+\dfrac{1}{g(\beta)}+\dfrac{1}{g(\gamma)}$ 之值。

7. **(95 台北市)**

   設 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_0$ 爲一整係數多項式，而且 $f(x)$ 可分解成 $f(x)=(x-1)(x-a_{n-1})(x-a_{n-2})\ldots(x-a_2)(x-a_0)$，其中的 $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_0$ 是 $f(x)$原有的係數。

   (1) 試求 $n=2$ 時的所有此種多項式。

   (2) 試求 $n=3$ 時的所有此種多項式。

   (3) 試求 $n=4$ 時的所有此種多項式。

8. **(95 嘉義區)**
   設 p, q, r 為實數。若三次方程式 $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ 所有的根皆相異且只可能是 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$，試求 $p + q + r$ 的最大值與最小值。
9. **(95 台南區)**
   證明：$(x^2+x+1) \mid [(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}]$，對所有的非負整數 n 都成立。

參考資料：

1. 奧數教程 / 單墫、熊斌 / 華東師範大學出版社(凡異)。
2. 數學奧賽導引(上) /.馮志剛 /.上海科技教育出版社。
3. 高中競賽試題選(Ⅱ) −多項式 / 蔡聰池(建國中學) / 國立中央大學數學系。
4. 談多項式的因子分解與高斯引理 / 徐正梅 / 208 期(87 年 3 月號) / 科學月刊。
5. 高中數學專題教材 −多項式 / 陳庭雄 / 建國中學。
6. 全國及各分區數學能力競賽/ 建國中學。