

# gcd\_lcm卷积

卷积是一种比较耗费计算资源的基础数学运算，在数学上我们处理卷积的一般方法都是通过各种变换或者转化，使得问题转化为比较容易计算的计算类型(比如序列点积)，想方设法加速计算的效率，当然这需要卷积本身具有一定的数学性质。

**gcd卷积**是说我们需要计算的卷积公式为：

$$c_k = \sum_{(i,j)=k} a_i * b_j$$

令  $A, B, C$  分别为  $a, b, c$  的类点值序列 (闭区间  $[1, n]$ , 下标超过  $n$  值为 0),

其中一个定义如下：

$$A_k = \sum_{k|d} a_d$$

那么即有：

$$\begin{aligned} C_k &= \sum_{k|d} c_d = \sum_{k|d} \sum_{(i,j)=d} a_i * b_j = \sum_{k|(i,j)} a_i * b_j \\ &= \sum_{k|i} \sum_{k|j} a_i * b_j = \left( \sum_{k|i} a_i \right) * \left( \sum_{k|i} b_i \right) = A_k * B_k \end{aligned}$$

我们得到：

$$C = A \bullet B$$

序列反演公式：

$$a_k = \sum_{k|d} A_d * \mu_{\frac{d}{k}}$$

**lcm卷积**是说我们需要计算的卷积公式为：

$$c_k = \sum_{[i,j]=k} a_i * b_j$$

令  $A, B, C$  分别为  $a, b, c$  的类点值序列，其中一个定义如下：

$$A_k = \sum_{d|k} a_d \Leftrightarrow A = a \circ I$$

那么即有：

$$\begin{aligned} C_k &= \sum_{d|k} c_d = \sum_{d|k} \sum_{[i,j]=d} a_i * b_j = \sum_{[i,j]|k} a_i * b_j \\ &= \sum_{i|k} \sum_{j|k} a_i * b_j = \left( \sum_{i|k} a_i \right) * \left( \sum_{i|k} b_i \right) = A_k * B_k \end{aligned}$$

我们得到：

$$C = A \bullet B$$

序列反演公式：

$$a_k = \sum_{d|k} A_d * \mu_{\frac{k}{d}} = \sum_{x*y=k} A_x * \mu_y \Leftrightarrow a = A \circ \mu$$