第 18 卷第 6 期 工 科 数 学 Vol. 18, №. 6
2002 年 12 月 JOURNAL OF MATHEMATICS FOR TECHNOLOGY Dec. 2002

关于线性子空间交的基

林 鹄
(徐汇区业余大学 经济管理系,上海 200032)

[摘 要] 给出求两个子空间交的基的一般方法.
[关键词] 子空间的交;基;维数
[中图分类号] O152.2 [文献标识码] C [文章编号] 1007-4120(2002)06-0087-03

1 引 言

设 V 为(数)域 P 上的有限维线性空间,用 $\dim_P V$ 表示 V 在 P 上的维数. 对于 V 的线性子空间 V_1 与 V_2,熟知交集 $V_1 \cap V_2$ 与子集

$$V_1+V_2=\{\nu_1+\nu_2 \mid \nu_i \in V_i\}$$

都是 V 的线性子空间,其中 $V_1 \cap V_2$ 是 V 的同时包含在 V_1 与 V_2 中的最大子空间,而 V_1+V_2 是 V 的包含 V_1 与 V_2 的最小子空间,也是 V_1 与 V_2 在 V 中生成的子空间. 众所周知,这四个线性子空间的维数之间有如下的关系

定理 1 $\dim_P V_1+\dim_P V_2=\dim_P(V_1+V_2)+\dim_P V_1 \cap V_2$.

上述公式通常被称为维数公式,是线性代数理论的重要核心定理之一. 在具体应用中,一般说来由 V_1 与 V_2 的各一组基出发可以较容易地得到 V_1+V_2 的一组基和维数,从而求得 $V_1 \cap V_2$ 的维数. 但是就笔者目前所知,现行的高等代数和线性代数教材中都没有给出由 V_1 与 V_2 的各一组基出发求 $V_1 \cap V_2$ 的一组基的一般方法,而对于上述定理的证明思路都是从 $V_1 \cap V_2$ 的一组基出发,先扩张成 V_1 的一组基,然后再扩张到 V_1+V_2 的一组基(可参见,例如文献[1,265-266 页]、[2,241-243 页]、[3,236-237 页]等给出的证明). 本文将给出定理 1 的另一种证明,同时也就给出了一种由 V_1 与 V_2 的各一组基出发求 $V_1 \cap V_2$ 的一组基的一般方法. 本文采用文献[1]的记号.

2 定理 1 的证明

不妨设

$$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r), \quad V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s),$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 均为 V 中的极大线性无关组. 则有

$$V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s).$$

不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的一个极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ $(t \leqslant s)$,则有

$$\dim_P V_1=r, \quad \dim_P V_2=s, \quad \dim_P(V_1+V_2)=r+t.$$

为了证明定理 1,只需要证明

$$\dim_P(V_1 \cap V_2)=s-t.$$

事实上,由于 β_j 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 唯一地线性表出,故可假设

[收稿日期] 2001-04-02

$$\beta_{t+1}=k_{t+1,1}\alpha_1+\cdots+k_{t+1,r}\alpha_r+l_{t+1,1}\beta_1+\cdots+l_{t+1,t}\beta_t,$$
$$\beta_{t+2}=k_{t+2,1}\alpha_1+\cdots+k_{t+2,r}\alpha_r+l_{t+2,1}\beta_1+\cdots+l_{t+2,t}\beta_t,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\beta_s=k_{s1}\alpha_1+\cdots+k_{sr}\alpha_r+l_{s1}\beta_1+\cdots+l_{st}\beta_t.$$

令

$$\beta'_{t+1}=\beta_{t+1}-l_{t+1,1}\beta_1-\cdots-l_{t+1,t}\beta_t,$$
$$\beta'_{t+2}=\beta_{t+2}-l_{t+2,1}\beta_1-\cdots-l_{t+2,t}\beta_t,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\beta'_s=\beta_s-l_{s1}\beta_1-\cdots-l_{st}\beta_t,$$

则 $\beta'_{t+1},\beta'_{t+2},\cdots,\beta'_s\in V_1\cap V_2$，且易见有

$$V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t,\beta'_{t+1},\beta'_{t+2},\cdots,\beta'_s).$$

因此 $\beta'_{t+1},\beta'_{t+2},\cdots,\beta'_s$线性无关.

此外，对于任意的 $\beta\in V_1\cap V_2$，有

$$\begin{aligned}\beta&=b_1\alpha_1+\cdots+b_r\alpha_r\\&=a_1\beta_1+\cdots+a_t\beta_t+a_{t+1}\beta'_{t+1}+\cdots+a_s\beta'_s\\&=a_1\beta_1+\cdots+a_t\beta_t+a_{t+1}(k_{t+1,1}\alpha_1+\cdots+k_{t+1,r}\alpha_r)+\cdots+a_s(k_{s1}\alpha_1+\cdots+k_{sr}\alpha_r).\end{aligned}$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关，所以 β 的上述表达式应是唯一的. 由此即得 $a_1=a_2=\cdots=a_t=0$. 所以 $V_1\cap V_2=L(\beta'_{t+1},\beta'_{t+2},\cdots,\beta'_s)$. 这样就证明了 $\beta'_{t+1},\beta'_{t+2},\cdots,\beta'_s$是 $V_1\cap V_2$ 的一组基，而且 $\beta'_{t+1},\beta'_{t+2},\cdots,\beta'_s$是由 V_2(与 V_1)的各一组基线性表出的.

3 例 子

例 1 设 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6)$与 $V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_5)$是向量空间 P^6 的子空间，其中

$$\alpha_1=(1,1,0,1,0,2),\quad \alpha_2=(1,0,1,1,0,1),\quad \alpha_3=(10,3,7,10,0,13),$$
$$\alpha_4=(1,1,1,1,0,1),\quad \alpha_5=(6,4,5,6,0,7),\quad \alpha_6=(13,12,13,13,0,18),$$
$$\beta_1=(1,1,2,2,1,0),\quad \beta_2=(5,2,7,7,2,3),\quad \beta_3=(7,6,9,11,4,5),$$
$$\beta_4=(8,6,9,9,1,7),\quad \beta_5=(2,1,2,0,-2,2),$$

求 $V_1\cap V_2$ 的一组基.

解 可以求出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6$ 的一个极大线性无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，而 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_5$ 的一个极大线性无关组. 考虑矩阵$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_4^T,\beta_1^T,\beta_2^T,\beta_3^T,\beta_4^T)$. 经过一系列初等行变换，此矩阵可化为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&2&0\\0&1&0&0&3&1&2\\0&0&1&0&0&0&5\\0&0&0&1&2&4&1\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由此矩阵的列向量之间的关系立即得到向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\beta_1$. 而且有

$$\beta_2=2\beta_1+3\alpha_2,\quad \beta_3=4\beta_1+\alpha_2+2\alpha_1,\quad \beta_4=\beta_1+2\alpha_2+5\alpha_4.$$

根据定理 1 的证明即得到 $V_1\cap V_2$ 的一组基

$$\beta_2-2\beta_1,\quad \beta_3-4\beta_1,\quad \beta_4-\beta_1.$$

[参　考　文　献]

[1] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组. 高等代数(第二版)[M]. 北京：高等教育出版社，1988.

[2] 周伯勋. 高等代数[M]. 北京：人民教育出版社，1978.

[3] 谢邦杰. 线性代数[M]. 北京：人民教育出版社，1978.

On the Basis of Intersection of Subspaces

LIN Hu

(Xuhui Local University, Shanghai　200032)

Abstract: This note gives an algorithm for computing a basis of the intersection of two subspaces from the given bases of the subspaces.

Key words: basis; intersection of subspaces; dimension