

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Informatyki i Matematyki Komputerowej

kierunek: Matematyka Komputerowa

Daniel Blok

**Algorytm znajdujący sympleksy pokolorowane
wszystkimi kolorami w kolorowaniu Spernera**

Promotor pracy licencjackiej: dr inż. Mateusz Przybylski

Kraków, 2023

Spis treści

1	Wprowadzenie	2
1.1	Wstęp	2
1.2	Definicje	2
2	Konstruktywny dowód Lematu Spernera	5
3	Algorytm	8
4	Eksperymenty i wnioski	11
4.1	Przypadek 2-wymiarowy	11
4.2	Przypadek 4-wymiarowy	13
4.3	Wnioski	13
5	Dodatki	13
5.1	Kod w C++	13

1 Wprowadzenie

1.1 Wstęp

W 1928 roku Emanuel Sperner udowodnił lemat mówiący o tym, że gdy mamy podział sympleksu oraz kolorowanie wierzchołków tego podziału takie, że każdy wierzchołek b podziału jest pokolorowany kolorem odpowiadającym pewnemu wierzchołkowi rozpinającemu najmniejszą ścianę wyjściowego sympleksu zawierającą b , to w tym podziale musi istnieć sympleks pokolorowany wszystkimi kolorami [1] (formalna wypowiedź tego lematu znajduje się na stronie 7).

Standardowy dowód przeprowadzany jest indukcyjnie ze względu na wymiar. Nie pokazuje on jednak w jaki sposób taki sympleks znaleźć. Problem ten rozwiązał prof. Marian Mrozek przedstawiając konstruktywny dowód Lematu Spernera [2]. Na podstawie tego dowodu, skonstruujemy algorytm wyszukujący sympleks pokolorowany wszystkimi kolorami w kolorowaniu Spernera.

Organizacja pracy jest następująca. W dalszej części Rozdziału 1 wprowadzimy kluczowe definicje. W Rozdziale 2 przytoczymy konstruktywny dowód Lematu Spernera. Dowody pomocniczych lematów 1,3,4 oraz konstruktywny dowód Lematu Spernera pochodzą z [2]. W Rozdziale 3 przedstawimy algorytm, który dla zadanego kolorowania Spernera podziału sympleksu znajduje sympleks pokolorowany wszystkimi kolorami oraz udowodnimy jego poprawność. W Rozdziale 4 zbadamy eksperymentalnie działanie tego algorytmu. W Rozdziale 5 przedstawimy przykładową implementację algorytmu z Rozdziału 3.

1.2 Definicje

Teraz wprowadzimy kilka pojęć, z których będziemy korzystać w dalszej części pracy.

Dla skończonego zbioru $V = \{v_0, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^d$ definiujemy *hiperpłaszczyznę* wyznaczoną przez V jako $\{\sum_{i=0}^{i \leq k} t_i v_i \mid t_0, \dots, t_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{i \leq k} t_i = 1\}$ oraz oznaczamy jako $\text{Hip } V$.

Mówimy, że skończony zbiór $V \subset \mathbb{R}^d$ jest *afinicznie niezależny*, gdy

$$\forall v \in V \ v \notin \text{Hip}(V \setminus \{v\}).$$

Obwiednią wypukłą zbioru $V \subset \mathbb{R}^d$ nazywamy przecięcie wszystkich domkniętych i wypukłych podzbiorów \mathbb{R}^d zawierających V . *Sympleksem* nazywamy obwiednię wypukłą afinicznie niezależnego, niepustego zbioru punktów w \mathbb{R}^d . Sympleks rozpięty na zbiorze $V = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$ oznaczamy jako $\langle a_0, a_1, \dots, a_d \rangle$ lub $\langle V \rangle$, a liczbę $\text{card } V - 1$ nazywamy *wymiarem sympleksu*. Sympleks o wymiarze k nazywamy *k-sympleksem*. *Ścianą* sympleksu $\langle V \rangle$ nazywamy sympleks $\langle W \rangle$ taki, że $W \subset V$. Jeśli $W \subsetneq V$, to $\langle W \rangle$ nazywamy *ścianą właściwą* sympleksu $\langle V \rangle$. *Kompleksem symplcjalnym* nazywamy zbiór sympleksów \mathcal{S} taki, że zachodzi:

- a) Dla każdego $\sigma \in \mathcal{S}$, każda ściana σ należy do \mathcal{S} .

- b) Dla każdych $\sigma, \tau \in \mathcal{S}$, jeśli część wspólna σ i τ jest niepusta, to jest ona ich wspólną ścianą.

Wymiarem kompleksu symplecjajalnego \mathcal{S} nazywamy liczbę $\max\{\dim \sigma \mid \sigma \in \mathcal{S}\}$. Dla kompleksu symplecjajalnego \mathcal{S} definiujemy zbiór jego k -wymiarowych sympleksów jako $\mathcal{S}_k := \{\sigma \in \mathcal{S} \mid \dim \sigma = k\}$. Kompleks symplecjajalny \mathcal{T} nazywamy *podziałem* kompleksu symplecjajalnego \mathcal{S} jeśli $\bigcup \mathcal{T} = \bigcup \mathcal{S}$ oraz

$$\forall \tau \in \mathcal{T} \exists \sigma \in \mathcal{S} \tau \subset \sigma.$$

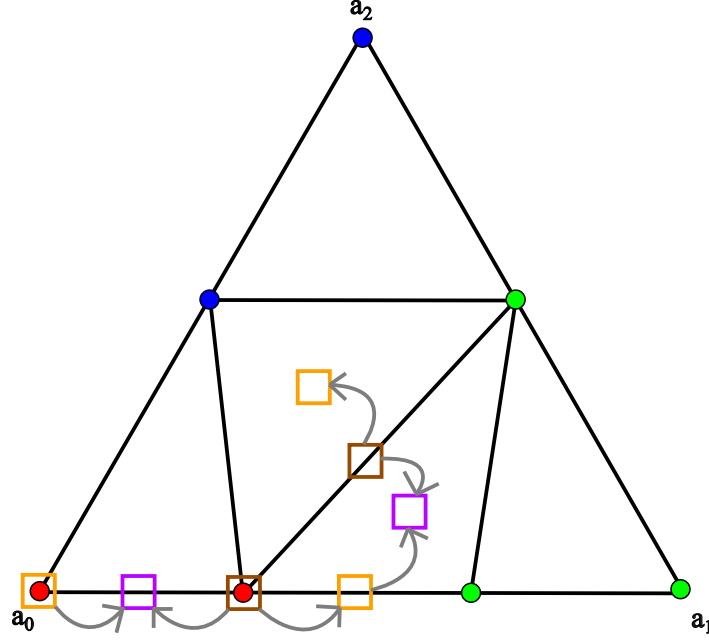
Kompleks symplecjajalny nazywamy podziałem sympleksu Δ jeżeli jest on podziałem kompleksu symplecjajalnego złożonego ze wszystkich ścian Δ . *Kolorowaniem* kompleksu symplecjajalnego \mathcal{S} nazywamy funkcję $v: \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$. Wartości funkcji v nazwiemy *kolorami*.

Ścianą główną sympleksu $\langle a_0, a_1, \dots, a_d \rangle$ nazywamy ścianę $\langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}_{d+1} = \{0, 1, \dots, d\}$. Zauważmy, że od przyjętego porządku elementów a_0, a_1, \dots, a_d zależy pojęcie ściany głównej oraz w konsekwencji wymiaru włożenia i jego deficytu. *Wymiarem włożenia* sympleksu σ nazywamy wymiar najmniejszej ściany głównej zawierającej σ oraz oznaczamy jako $\text{emb } \sigma$. *Deficytem włożenia* sympleksu σ nazywamy liczbę $\text{demb } \sigma := \text{emb } \sigma - \dim \sigma$. Sympleks o wymiarze k nazywamy *dobrze pokolorowanym*, gdy zbiór kolorów jego wierzchołków jest równy $\{0, 1, \dots, k\}$. Sympleks nazywamy *regularnie pokolorowanym*, gdy zbiór kolorów jego wierzchołków jest równy $\{0, 1, \dots, k\}$ dla pewnej liczby $k \in \mathbb{Z}_{d+1}$ - tę liczbę k oznaczamy jako $\text{col } \sigma$. *Deficytem koloru* regularnie pokolorowanego sympleksu σ nazywamy liczbę $\text{dcol } \sigma := \dim \sigma - \text{col } \sigma$. Sympleks σ nazwiemy *sympleksem istotnym*, jeżeli jest regularnie pokolorowany oraz $\text{demb } \sigma + \text{dcol } \sigma \leq 1$. Zbiór sympleksów istotnych w podziale \mathcal{S} sympleksu Δ oznaczmy jako \mathcal{S}_{ist} . Niech $\phi, \psi \in \mathcal{S}_{ist}$. Mówimy, że ϕ jest *podporządkowany* ψ jeżeli zachodzą warunki:

- (i) $\phi \subset \psi$
- (ii) $\dim \psi - \dim \phi = 1$
- (iii) $\text{demb } \psi = 0$
- (iv) $\text{dcol } \phi = 0$

oraz oznaczamy $\phi \rightarrow \psi$.

Na rysunku 1 zaznaczono sympleksy istotne ramkami wokół ich środków ciężkości. Sympleksy $\sigma \in \mathcal{S}_{ist}$ takie, że $\text{demb } \sigma = \text{dcol } \sigma = 0$ oznaczono pomarańczowymi ramkami. Jeśli $\text{demb } \sigma = 0$ oraz $\text{dcol } \sigma = 1$, to σ zaznaczono fioletową ramką. Jeżeli natomiast $\text{demb } \sigma = 1$ oraz $\text{dcol } \sigma = 0$, to σ oznaczono brązową ramką. Dodatkowo pary sympleksów istotnych w relacji podporządkowania oznaczono szarymi strzałkami.



Rysunek 1: Sympleksy istotne (oznaczone ramkami). Na pomarańczowo sympleksy σ takie, że $\text{demb } \sigma = \text{dcol } \sigma = 0$, na fioletowo sympleksy σ takie, że $\text{demb } \sigma = 0$ oraz $\text{dcol } \sigma = 1$, na brązowo sympleksy σ takie, że $\text{demb } \sigma = 1$ oraz $\text{dcol } \sigma = 0$.

W [2] podano dodatkowy warunek podporządkowania sympleksów istotnych, który wynika z pozostałych.

Uwaga (por.[2, warunek 5.25]). *Jeżeli ϕ jest podporządkowany ψ , to $\text{emb } \psi - \text{emb } \phi \leq 1$*

Dowód. $\text{emb } \psi - \text{emb } \phi = (\text{demb } \psi + \dim \psi) - (\text{demb } \phi + \dim \phi) = (\dim \psi - \dim \phi) - \text{demb } \phi = 1 - \text{demb } \phi \leq 1$

□

Dla $\sigma \in \mathcal{S}_{ist}$ zdefiniujmy zbiory:

$$U_\sigma := \{\tau \in \mathcal{S}_{ist} \mid \sigma \rightarrow \tau\}$$

$$L_\sigma := \{\tau \in \mathcal{S}_{ist} \mid \tau \rightarrow \sigma\}$$

W celu określenia liczebności zbiorów U_σ i L_σ , dla $\sigma \in \mathcal{S}_{ist}$ zdefiniujmy zbiory:

$$E_\sigma := \{\tau \in \mathcal{S}_{\dim \sigma + 1} \mid \sigma \subset \tau \wedge \text{emb } \tau \leq \dim \sigma + 1\}$$

$$K_\sigma := \{\tau \in \mathcal{S} \mid \tau \subsetneq \sigma \wedge v(\text{Vert}(\tau)) = \{0, 1, \dots, \dim \sigma - 1\}\}$$

Dla kompleksu \mathcal{S} definiujemy graf $G = (V, E)$ taki, że $V = \mathcal{S}_{ist}$ oraz $E = \{\{\sigma, \tau\} \mid \sigma \rightarrow \tau \vee \tau \rightarrow \sigma\}$.

Dla $\sigma \in \mathcal{S}_{ist}$ oznaczmy stopień σ w grafie G jako $\deg \sigma := \text{card}\{e \in E \mid \sigma \in e\}$. Definiujemy *ścieżkę* w grafie $G = (V, E)$ jako ciąg wierzchołków (v_0, \dots, v_k) taki, że dla każdego $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ zachodzi $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Ścieżkę (v_0, \dots, v_k) , w której wierzchołki są parami różne nazywamy *ścieżką prostą*.

2 Konstruktywny dowód Lematu Spernera

W dalszej części pracy, dla uproszczenia notacji, utożsammy sympleksy $\sigma \in \mathcal{S}$ ze zbiorami $\text{Vert}(\sigma)$. W konsekwencji będziemy pisać $v(\sigma)$, mając na myśli $v(\text{Vert} \sigma)$.

Założmy, że $\Delta := \langle a_0, a_1, \dots, a_d \rangle$ jest d -wymiarowym sympleksem o zbiorze wierzchołków $\text{Vert}(\Delta) = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$. Niech \mathcal{S} będzie podziałem sympleksu Δ , a $v: \mathcal{S}_0 \rightarrow \{0, 1, \dots, d\}$ niech będzie odwzorowaniem o tej własności, że dla każdego wierzchołka $b \in \mathcal{S}_0$ i ściany $\langle a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k} \rangle$ sympleksu Δ zachodzi

$$b \in \langle a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k} \rangle \implies v(b) \in \{i_0, i_1, \dots, i_k\}.$$

Lemat 1 (por.[2, Lemat 5.4,6, Lemat 5.4.7]). *Dla $\sigma \in \mathcal{S}_{ist}$ takiego, że $\text{dcol} \sigma = 0$ zachodzi*

$$U_\sigma = E_\sigma. \quad (1)$$

Dowód. Ustalmy $\sigma \in \mathcal{S}_{ist}$ takie, że $\text{dcol} \sigma = 0$. Niech $\tau \in U_\sigma$. Wtedy $\sigma \rightarrow \tau$, skąd wynika, że $\sigma \subset \tau$ oraz $\dim \tau = \dim \sigma + 1$. Dodatkowo $\text{demb} \tau = 0$, więc $\text{emb} \tau = \dim \tau = \dim \sigma + 1$. Oznacza to, że $\tau \in E_\sigma$, z czego dostajemy $U_\sigma \subset E_\sigma$.

Niech $\tau \in E_\sigma$. Mamy $\text{emb} \tau \leq \dim \sigma + 1$ oraz $\text{emb} \tau \geq \dim \tau = \dim \sigma + 1$, więc $\text{emb} \tau = \dim \sigma + 1$, z czego wynika, że $\text{demb} \tau = \text{emb} \tau - \dim \tau = (\dim \sigma + 1) - (\dim \sigma + 1) = 0$. Sympleks σ jest regularnie pokolorowany, $\text{dcol} \sigma = 0$ oraz $\tau \in \langle a_0, a_1, \dots, a_{\dim \sigma + 1} \rangle$, więc $\{0, 1, \dots, \dim \sigma\} = v(\sigma) \subset v(\tau) \subset \{0, 1, \dots, \dim \sigma + 1\}$, co oznacza, że $v(\tau) = \{0, 1, \dots, \dim \sigma\}$ lub $v(\tau) = \{0, 1, \dots, \dim \sigma + 1\}$, więc τ jest regularnie pokolorowany oraz $\text{dcol} \tau \in \{0, 1\}$. Mamy więc $\text{demb} \tau + \text{dcol} \tau \leq 0 + 1 = 1$, co oznacza, że $\tau \in \mathcal{S}_{ist}$. Zachodzi też $\sigma \subset \tau$, $\dim \tau - \dim \sigma = 1$, $\text{demb} \tau = 0$, oraz $\text{dcol} \sigma = 0$, więc $\sigma \rightarrow \tau$, czyli $\tau \in U_\sigma$, z czego dostajemy $E_\sigma \subset U_\sigma$. \square

Lemat 2 (por.[2, wniosek 5.4,8]). *Dla $\sigma \in \mathcal{S}_{ist}$ takiego, że $\text{dcol} \sigma = 0$ zachodzi*

$$\text{card} U_\sigma = \begin{cases} 1 + \text{demb} \sigma & \text{gdy } \dim \sigma < d \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \quad (2)$$

Dowód. Jeśli $\dim \sigma = d$, to $U_\sigma = \emptyset$. Założmy więc, że $\dim \sigma < d$. Żeby pokazać, że $\text{card} U_\sigma = 1 + \text{demb} \sigma$, na mocy Lematu 1 wystarczy, że pokażemy $\text{card} E_\sigma = 1 + \text{demb} \sigma$.

Jeśli $\text{demb } \sigma = 0$, to sympleks σ leży w ścianie $\langle a_0, a_1, \dots, a_{\dim \sigma} \rangle$ sympleksu $\langle a_0, a_1, \dots, a_{\dim \sigma + 1} \rangle$, z czego wynika, że σ jest ścianą dokładnie jednego $(\dim \sigma + 1)$ -wymiarowego sympleksu z \mathcal{S} leżącego w $\langle a_0, a_1, \dots, a_{\dim \sigma + 1} \rangle$, czyli $\text{card } E_\sigma = 1$.

Jeśli $\text{demb } \sigma = 1$, to z $\text{dcol } \sigma = 0$ wynika, że $v(\sigma) = \{0, 1, \dots, \dim \sigma\}$, więc gdyby sympleks σ leżał w pewnej ścianie właściwej sympleksu $\langle a_0, a_1, \dots, a_{\dim \sigma + 1} \rangle$, to musiałaby to być ściana $\langle a_0, a_1, \dots, a_{\dim \sigma} \rangle$, co jest niemożliwe, gdyż $\text{emb } \sigma = \dim \sigma + 1$. Sympleks σ nie leży więc w żadnej ścianie właściwej sympleksu $\langle a_0, a_1, \dots, a_{\dim \sigma + 1} \rangle$, z czego wynika, że sympleks σ jest ścianą dokładnie dwóch $(\dim \sigma + 1)$ -wymiarowych sympleksów z \mathcal{S} leżących w $\langle a_0, a_1, \dots, a_{\dim \sigma + 1} \rangle$, czyli $\text{card } E_\sigma = 2$. \square

Lemat 3 (por.[2, Lemat 5.4,9]). *Dla $\sigma \in \mathcal{S}_{ist}$ takiego, że $\text{demb } \sigma = 0$ zachodzi*

$$L_\sigma = K_\sigma. \quad (3)$$

Dowód. Ustalmy $\sigma \in \mathcal{S}_{ist}$ takie, że $\text{demb } \sigma = 0$. Jeśli $\dim \sigma = 0$, to $L_\sigma = \emptyset = K_\sigma$. Załóżmy więc, że $\dim \sigma > 0$. Niech $\tau \in L_\sigma$. Wtedy $\tau \rightarrow \sigma$. Mamy $\tau \subset \sigma$ oraz $\dim \tau = \dim \sigma - 1$, więc $\tau \subsetneq \sigma$. Dodatkowo τ jest regularnie pokolorowany, oraz $\text{dcol } \tau = 0$, więc $v(\tau) = \{0, 1, \dots, \dim \tau\} = \{0, 1, \dots, \dim \sigma - 1\}$. Oznacza to, że $\tau \in K_\sigma$, z czego dostajemy $L_\sigma \subset K_\sigma$.

Niech $\tau \in K_\sigma$. Wtedy $\dim \tau < \dim \sigma$, ponieważ $\tau \subsetneq \sigma$ oraz $\dim \tau \geq \dim \sigma - 1$, ponieważ v odwzorowuje surjektywnie τ na $\{0, 1, \dots, \dim \sigma - 1\}$. Oznacza to, że $\dim \tau = \dim \sigma - 1$. Zachodzi $v(\tau) = \{0, 1, \dots, \dim \sigma - 1\}$, więc τ jest regularnie pokolorowany oraz $\text{col } \tau = \dim \sigma - 1$. Zatem $\text{dcol } \tau = \dim \tau - \text{col } \tau = (\dim \sigma - 1) - (\dim \sigma - 1) = 0$. Mamy też $\text{emb } \tau \leq \text{emb } \sigma = \dim \sigma$, więc $\text{demb } \tau = \text{emb } \tau - \dim \tau \leq \dim \sigma - (\dim \sigma - 1) = 1$, skąd dostajemy $\text{demb } \tau + \text{dcol } \tau \leq 1 + 0 = 1$, co oznacza, że $\tau \in \mathcal{S}_{ist}$. Zachodzi też $\tau \subset \sigma$, $\dim \sigma - \dim \tau = 1$, $\text{demb } \sigma = 0$, oraz $\text{dcol } \tau = 0$, więc $\tau \rightarrow \sigma$, czyli $\tau \in L_\sigma$, z czego dostajemy $K_\sigma \subset L_\sigma$. \square

Lemat 4 (por.[2, Lemat 5.4,9]). *Dla $\sigma \in \mathcal{S}_{ist}$ takiego, że $\text{demb } \sigma = 0$ zachodzi*

$$\text{card } L_\sigma = \begin{cases} 1 + \text{dcol } \sigma & \text{gdy } \dim \sigma > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \quad (4)$$

Dowód. Jeśli $\dim \sigma = 0$, to $L_\sigma = \emptyset$. Załóżmy więc, że $\dim \sigma > 0$. Na mocy Lematu 3 wystarczy pokazać, że $\text{card } K_\sigma = 1 + \text{dcol } \sigma$. Ponieważ $\sigma \in \mathcal{S}_{ist}$, mamy $\text{dcol } \sigma \leq 1$.

Rozważmy przypadek $\text{dcol } \sigma = 0$. Wtedy $v(\sigma) = \{0, 1, \dots, \dim \sigma\}$. Elementy K_σ muszą być wymiaru $\dim \sigma - 1$. Wierzchołki σ są pokolorowane różnymi kolorami, więc warunek $v(\tau) = \{0, 1, \dots, \dim \sigma - 1\}$ dla $\tau \subsetneq \sigma$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\tau = \sigma \setminus \{b\}$ dla takiego $b \in \sigma$, że $v(b) = \dim \sigma$. Istnieje dokładnie jeden taki wierzchołek b , więc $\text{card } L_\sigma = \text{card } K_\sigma = 1 = 1 + \text{dcol } \sigma$.

Rozważmy przypadek $\text{dcol } \sigma = 1$. Wtedy $v(\sigma) = \{0, 1, \dots, \dim \sigma - 1\}$. Elementy K_σ muszą być wymiaru $\dim \sigma - 1$. Istnieje dokładnie jeden dubleton $\{b_1, b_2\} \subset \sigma$ taki, że $b_1 \neq b_2$ oraz $v(b_1) = v(b_2)$. Warunek $v(\tau) = \{0, 1, \dots, \dim \sigma - 1\}$ dla

$\tau \subsetneq \sigma$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\tau = \sigma \setminus \{b_1\}$ lub $\tau = \sigma \setminus \{b_2\}$, więc $\text{card } L_\sigma = \text{card } K_\sigma = 2 = 1 + \text{dcol } \sigma$. \square

Lemat 5 (por.[2, Lemat 5.4,10]). *Niech G będzie grafem zdefiniowanym dla kompleksu \mathcal{S} jak w Rozdziale 1.2. Dla każdego $\sigma \in \mathcal{S}_{\text{ist}}$ zachodzi*

$$\deg \sigma = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \text{dcol } \sigma = \text{demb } \sigma = 0 \wedge \dim \sigma \in \{0, d\} \\ 2 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \quad (5)$$

Dowód. Mamy $\deg \sigma = \text{card } L_\sigma + \text{card } U_\sigma$. Ponieważ σ jest sympleksem istotnym, zachodzi $\text{demb } \sigma + \text{dcol } \sigma \leq 1$. Rozważmy zatem trzy przypadki:

Przypadek pierwszy: $\text{demb } \sigma = \text{dcol } \sigma = 0$. Jeśli $\dim \sigma = 0$ to $\text{card } U_\sigma = 1$ z Lematu 2 oraz $\text{card } L_\sigma = 0$ z Lematu 4, więc $\deg \sigma = 1$. Natomiast jeśli $\dim \sigma > 0$ i $\dim \sigma < d$ to $\text{card } U_\sigma = 1$ z Lematu 2 oraz $\text{card } L_\sigma = 1$ z Lematu 4, więc $\deg \sigma = 2$. Przyjmując $\dim \sigma = d$, z Lematu 2 dostajemy $\text{card } U_\sigma = 0$ oraz $\text{card } L_\sigma = 1$ z Lematu 4. Zatem $\deg \sigma = 1$.

Przypadek drugi: $\text{demb } \sigma = 0$, $\text{dcol } \sigma = 1$. Jeśli $\dim \sigma = 0$ to $\text{dcol } \sigma = \dim \sigma - \text{col } \sigma \leq \dim \sigma = 0$. Otrzymujemy sprzeczność z $\text{dcol } \sigma = 1$, więc ten przypadek nigdy nie zachodzi. Jeśli $\dim \sigma > 0$ to $\text{card } L_\sigma = 2$ z Lematu 4 oraz $U_\sigma = \emptyset$ z uwagi na warunek (iv) relacji podporządkowania, więc $\deg \sigma = 2$.

Przypadek trzeci: $\text{demb } \sigma = 1$, $\text{dcol } \sigma = 0$. Jeśli $\dim \sigma < d$ to $\text{card } U_\sigma = 2$ z Lematu 2 oraz $L_\sigma = \emptyset$ z uwagi na warunek (iii) relacji podporządkowania, więc $\deg \sigma = 2$. Natomiast jeśli $\dim \sigma = d$ to $\text{emb } \sigma = \text{demb } \sigma + \dim \sigma = d + 1$, ale $\sigma \subset \langle a_0, a_1, \dots, a_d \rangle$, więc $\text{emb } \sigma \leq d$. Otrzymujemy sprzeczność, więc ten przypadek nigdy nie zachodzi. \square

Twierdzenie 1 (Lemat Spernera, por.[2, Lemat 5.4,1]). *Załóżmy, że $\Delta := \langle a_0, a_1, \dots, a_d \rangle$ jest d -wymiarowym sympleksem o zbiorze wierzchołków $\text{Vert}(\Delta) = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$. Niech \mathcal{S} będzie podziałem sympleksu Δ , a $v: \mathcal{S}_0 \rightarrow \{0, 1, \dots, d\}$ niech będzie odwzorowaniem o tej własności, że dla każdego wierzchołka $b \in \mathcal{S}_0$ i ściany $\langle a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k} \rangle$ sympleksu Δ zachodzi*

$$b \in \langle a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k} \rangle \implies v(b) \in \{i_0, i_1, \dots, i_k\}. \quad (6)$$

Wtedy istnieje co najmniej jeden sympleks $\sigma \in \mathcal{S}$ taki, że $v(\text{Vert } \sigma) = \{0, 1, \dots, d\}$.

Dowód. Jedynym zero-wymiarowym sympleksem istotnym, którego stopień w grafie G jest równy 1 jest $\sigma_0 := \{v_0\}$ dla $\mathcal{S}_0 \ni v_0 = a_0 \in \Delta$. Rozważmy najdłuższą ścieżkę prostą $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ rozpoczynającą się w wierzchołku σ_0 grafu G . Z Lematu 5 wnosimy, że jest ona wyznaczona jednoznacznie. Dodatkowo $\deg \sigma_0 = 1$, więc $k > 0$. Ponieważ ścieżka jest najdłuższa, $\deg \sigma_k = 1$. Dodatkowo $\sigma_0 \neq \sigma_k$, gdyż ścieżka jest prosta. Z Lematu 5 wynika, że $\dim \sigma_k = d$ oraz $\text{dcol } \sigma_k = \text{demb } \sigma_k = 0$, więc σ_k jest d -wymiarowym sympleksem pokolorowanym wszystkimi kolorami. \square

3 Algorytm

W tym rozdziale przedstawimy algorytm, który mając na wejściu podział sympleksu oraz jego kolorowanie spełniające założenia z Twierdzenia 1, zwraca sympleks pokolorowany wszystkimi kolorami. Następnie udowodnimy jego poprawność.

Data: Simplicial complex \mathcal{S} , coloring $v : \mathcal{S}_0 \rightarrow \{0, 1, \dots, d\}$

Result: Simplex σ such that $v(\text{Vert } \sigma) = \{0, 1, \dots, d\}$

$\sigma := \{a_0\};$

$r := a_0;$

while $\text{dcol } \sigma \neq 0$ *or* $\dim \sigma \neq \dim \mathcal{S}$ **do**

if $\text{dcol } \sigma = 1$ **then**

 Find vertex $b \in \sigma$ such that $b \neq r$ and $v(b) = v(r);$

$\sigma := \sigma \setminus \{b\};$

$r := b;$

end

else if $\text{demb } \sigma = 0$ *and* $r \notin \sigma$ **then**

 Find vertex $b \in \sigma$ such that $v(b) = \dim \sigma;$

$\sigma := \sigma \setminus \{b\};$

$r := b;$

end

else

 Find vertex $b \notin \sigma$ such that $\sigma \cup \{b\} \in \mathcal{S}, b \neq r$ and

$\text{emb}\{b\} \leq \dim \sigma + 1;$

$\sigma := \sigma \cup \{b\};$

$r := b;$

end

end

return $\sigma;$

Tabela 1: Algorytm odnajdywania dobrze pokolorowanego d -sympleksu.

Twierdzenie 2. Niech \mathcal{S} będzie podziałem sympleksu $\langle a_0, \dots, a_d \rangle$ oraz $v : \mathcal{S}_0 \rightarrow \{0, 1, \dots, d\}$ odwzorowaniem zadany jak w Twierdzeniu 1. Wtedy algorytm w Tabeli 1 się zatrzymuje i zwraca dobrze pokolorowany sympleks wymiaru $\dim \mathcal{S}$.

Dowód. Na podstawie przedstawionego dowodu Lematu Spernera wiemy, że każdy wierzchołek w grafie G dla kompleksu \mathcal{S} ma stopień co najwyżej 2 oraz że najdłuższa ścieżka w grafie G rozpoczynająca się w wierzchołku a_0 kończy się w wierzchołku, który jest dobrze pokolorowanym sympleksem wymiaru $\dim \mathcal{S}$. Wystarczy więc pokazać następujące fakty:

- (a) $\{a_0\}$ jest sympleksem istotnym.
- (b) Dla każdej trójki $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sympleksów w trzech kolejnych iteracjach pętli głównej mamy $\sigma_1 \neq \sigma_3$ (stwierdzamy tym samym, że nie cofamy się do poprzednio wybranych sympleksów).

- (c) W każdym przebiegu pętli mając na początku sympleks istotny σ będziemy w stanie znaleźć sympleks istotny τ taki, że $\sigma \rightarrow \tau$ lub $\tau \rightarrow \sigma$.

W celu udowodnienia faktu (a) zauważmy, że $v(a_0) = 0$, więc sympleks $\{a_0\}$ jest regularnie pokolorowany, $\text{demb}\{a_0\} = 0$ oraz $\text{dcol}\{a_0\} = 0$, więc $\{a_0\}$ jest istotny.

Żeby udowodnić fakt (b), oznaczmy jako $r_2 \in \mathcal{S}$ taki wierzchołek, że $\sigma_2 = \sigma_1 \cup \{r_2\}$ lub $\sigma_2 = \sigma_1 \setminus \{r_2\}$

Rozważmy trzy przypadki (każdy przypadek będzie odpowiadał jednemu blokowi warunkowemu algorytmu).

W przypadku pierwszym $\text{dcol}\sigma_2 = 1$. Przechodząc z sympleksu σ_2 do σ_3 , algorytm skorzysta z pierwszego bloku warunkowego. Wtedy $\sigma_3 = \sigma_2 \setminus \{b\}$ dla pewnego $b \in \sigma_2$ takiego, że $b \neq r_2$, a $\sigma_1 = \sigma_2 \setminus \{r_2\}$ lub $\sigma_1 = \sigma_2 \cup \{r_2\}$, więc $\sigma_1 \neq \sigma_3$.

W drugim przypadku $\text{dcol}\sigma_2 = 0 \wedge \text{demb}\sigma_2 = 0 \wedge r_2 \notin \sigma_2$. Przechodząc z sympleksu σ_2 do σ_3 , algorytm skorzysta z drugiego bloku warunkowego, ponieważ nie zachodzi warunek $\text{dcol}\sigma_2 = 1$ oraz jest spełniony warunek $\text{demb}\sigma_2 = 0 \wedge r_2 \notin \sigma_2$. Wtedy $\sigma_1 = \sigma_2 \cup \{r_2\}$ oraz $\sigma_3 = \sigma_2 \setminus \{b\}$ dla pewnego b , więc $\sigma_1 \neq \sigma_3$.

W trzecim przypadku zajdzie tylko $\text{dcol}\sigma_2 = 0 \wedge (\text{demb}\sigma_2 = 1 \vee r_2 \in \sigma_2)$. Przechodząc z sympleksu σ_2 do σ_3 , algorytm skorzysta z ostatniego bloku warunkowego, ponieważ nie zachodzą warunki $\text{dcol}\sigma_2 = 1$ oraz $\text{demb}\sigma_2 = 0 \wedge r_2 \notin \sigma_2$. Wtedy $\sigma_3 = \sigma_2 \cup \{b\}$ dla pewnego $b \notin \sigma_2$ takiego, że $b \neq r_2$, a $\sigma_1 = \sigma_2 \setminus \{r_2\}$ lub $\sigma_1 = \sigma_2 \cup \{r_2\}$, więc $\sigma_1 \neq \sigma_3$.

Dowód faktu (c) przeprowadzimy indukcyjnie.

Dla pierwszego przebiegu pętli mamy $\text{dcol}\sigma = 0$ oraz $r \in \sigma$. Z faktu (a) wynika $\sigma \in \mathcal{S}_{ist}$. Zachodzi $\text{dcol}\sigma = \text{demb}\sigma = \dim\sigma = 0$, więc na podstawie Lematu 2 możemy stwierdzić, że $\text{card}U_\sigma = 1$. Z Lematu 1 możemy stwierdzić, że istnieje dokładnie jeden wierzchołek $b \notin \sigma$ taki, że $\sigma \cup \{b\} \in \mathcal{S}$ i $\text{emb}(\sigma \cup \{b\}) \leq \dim\sigma + 1$ oraz jedyny sympleks należący do U_σ to $\sigma \cup \{b\}$. Zachodzi $\text{dcol}\sigma = 0$ oraz $r \in \sigma$, więc algorytm skorzysta z ostatniego bloku warunkowego. Rzeczywiście, mamy $\text{emb}\sigma = 0$ oraz dla każdego $c \in \mathcal{S}_0$ zachodzi $\text{emb}(\sigma \cup \{c\}) = \max(\text{emb}\sigma, \text{emb}\{c\})$, więc dla naszego σ zachodzi

$$\forall c \in \mathcal{S}_0 \text{ emb}(\sigma \cup \{c\}) \leq \dim\sigma + 1 \iff \text{emb}\{c\} \leq \dim\sigma + 1,$$

co oznacza, że istnieje dokładnie jeden wierzchołek $b \notin \sigma$ taki, że $\sigma \cup \{b\} \in \mathcal{S}$ oraz $\text{emb}\{b\} \leq \dim\sigma + 1$. Dodatkowo $\sigma \cup \{b\} \in U_\sigma$, więc w szczególności $\sigma \cup \{b\}$ jest sympleksem istotnym oraz $\sigma \rightarrow (\sigma \cup \{b\})$. Zauważmy, że $b \notin \sigma$ oraz $r \in \sigma$, więc $b \neq r$. Algorytm doda ten wierzchołek do σ .

Założmy, że fakt (c) jest spełniony dla poprzedniej iteracji. Wtedy $\sigma \cup \{r\} \in U_\sigma$ lub $\sigma \setminus \{r\} \in L_\sigma$. Rozważmy trzy przypadki (każdy przypadek będzie odpowiadał jednemu blokowi warunkowemu algorytmu):

W przypadku pierwszym $\text{dcol}\sigma = 1$. Algorytm skorzysta z pierwszego bloku warunkowego. Na podstawie dowodu Lematu 5 możemy stwierdzić, że $\text{card}L_\sigma = 2$. Z Lematu 3 oraz dowodu Lematu 4 możemy stwierdzić, że istnieje dokładnie

jedna para różnych wierzchołków b_1 oraz b_2 należących do σ o takim samym kolorze oraz jedyne sympleksy należące do L_σ to $\sigma \setminus \{b_1\}$ oraz $\sigma \setminus \{b_2\}$. Z założenia indukcyjnego wnosimy, że $\sigma \setminus \{r\} \in L_\sigma$, więc musi istnieć wierzchołek $b \in \sigma$ taki, że $b \neq r$ oraz $v(b) = v(r)$. Dodatkowo $\sigma \setminus \{b\} \in L_\sigma$, więc w szczególności $\sigma \setminus \{b\}$ jest sympleksem istotnym oraz $\sigma \rightarrow (\sigma \setminus \{b\})$. Algorytm w tym przypadku wybierze ten sympleks.

W drugim przypadku $\text{dcol } \sigma = 0 \wedge \text{demb } \sigma = 0 \wedge r \notin \sigma$. Algorytm skorzysta z drugiego bloku warunkowego, ponieważ nie zachodzi warunek $\text{dcol } \sigma = 1$ oraz jest spełniony warunek $\text{demb } \sigma = 0 \wedge r \notin \sigma$. Z faktu (b) wnosimy, że $\sigma \neq \{a_0\}$. Sympleks $\{a_0\}$ jest jedynym zero-wymiarowym sympleksem istotnym o deficycie włożenia równym 0, więc $\dim \sigma > 0$. Na podstawie Lematu 4 możemy stwierdzić, że $\text{card } L_\sigma = 1$. Z Lematu 3 oraz dowodu Lematu 4 możemy stwierdzić, że istnieje wierzchołek $b \in \sigma$ taki, że $v(b) = \dim \sigma$. Dodatkowo $\sigma \setminus \{b\} \in L_\sigma$, więc w szczególności $\sigma \setminus \{b\}$ jest sympleksem istotnym oraz $\sigma \rightarrow (\sigma \setminus \{b\})$. Algorytm w tym przypadku wybierze ten sympleks.

W trzecim przypadku zajdzie tylko $\text{dcol } \sigma = 0 \wedge (\text{demb } \sigma = 1 \vee r \in \sigma)$. Algorytm skorzysta z ostatniego bloku warunkowego, ponieważ nie zachodzą warunki $\text{dcol } \sigma = 1$ oraz $\text{demb } \sigma = 0 \wedge r \notin \sigma$. Jeśli zachodzi $\text{demb } \sigma = 1$, to na podstawie Lematu 2 możemy stwierdzić, że $\text{card } U_\sigma = 2$. Z Lematu 1 możemy stwierdzić, że istnieją dokładnie dwa różne wierzchołki $b_1 \notin \sigma$ oraz $b_2 \notin \sigma$ takie, że $\sigma \cup \{b_k\} \in \mathcal{S}$ i $\text{emb}(\sigma \cup \{b_k\}) \leq \dim \sigma + 1$ dla $k \in \{1, 2\}$ oraz jedyne sympleksy należące do U_σ to $\sigma \cup \{b_1\}$ oraz $\sigma \cup \{b_2\}$. Mamy $\text{emb } \sigma = \dim \sigma + 1$ oraz dla każdego $c \in \mathcal{S}_0$ zachodzi $\text{emb}(\sigma \cup \{c\}) = \max(\text{emb } \sigma, \text{emb}\{c\})$, więc dla naszego σ zachodzi

$$\forall c \in \mathcal{S}_0 \text{ emb}(\sigma \cup \{c\}) \leq \dim \sigma + 1 \iff \text{emb}\{c\} \leq \dim \sigma + 1.$$

Istnieją więc dokładnie dwa wierzchołki $b_1, b_2 \notin \sigma$ takie, że $\sigma \cup \{b_k\} \in \mathcal{S}$ oraz $\text{emb}\{b_k\} \leq \dim \sigma + 1$ dla $k \in \{1, 2\}$. Sympleksy $\sigma \cup \{b_1\}$ oraz $\sigma \cup \{b_2\}$ należą do U_σ , więc w szczególności są to sympleksy istotne oraz $\sigma \rightarrow (\sigma \cup \{b_k\})$ dla $k \in \{1, 2\}$. Jeden z wierzchołków b_1, b_2 musi być różny od r . Algorytm w tym przypadku doda ten wierzchołek do σ .

Jeżeli natomiast zachodzi $\text{demb } \sigma \neq 1$, to $\text{demb } \sigma = 0$ oraz $r \in \sigma$. Mamy $\dim \sigma < d$, ponieważ w przeciwnym wypadku pętla zakończyłaby się. Na podstawie Lematu 2 możemy stwierdzić, że $\text{card } U_\sigma = 1$. Z Lematu 1 możemy stwierdzić, że istnieje dokładnie jeden wierzchołek $b \notin \sigma$ taki, że $\sigma \cup \{b\} \in \mathcal{S}$ i $\text{emb}(\sigma \cup \{b\}) \leq \dim \sigma + 1$. Analogicznie jak we wcześniejszej części dowodu, dla naszego σ zachodzi

$$\forall c \in \mathcal{S}_0 \text{ emb}(\sigma \cup \{c\}) \leq \dim \sigma + 1 \iff \text{emb}\{c\} \leq \dim \sigma + 1.$$

Istnieje więc dokładnie jeden wierzchołek $b \notin \sigma$ taki, że $\sigma \cup \{b\} \in \mathcal{S}$ oraz $\text{emb}\{b\} \leq \dim \sigma + 1$. Sympleks $\sigma \cup \{b\}$ należy do U_σ , więc w szczególności $\sigma \cup \{b\}$ jest sympleksem istotnym oraz $\sigma \rightarrow (\sigma \cup \{b\})$. Dodatkowo $b \notin \sigma$ oraz $r \in \sigma$, więc $r \neq b$. Algorytm w tym przypadku doda ten wierzchołek do σ .

Fakty (a), (b) i (c) pokazują, że poruszamy się wzdłuż ścieżki w grafie G rozpoczynającej się w $\{a_0\}$. Na podstawie dowodu Twierdzenia 1, po skończonej ilości kroków, dojdziemy do sympleksu pokolorowanego wszystkimi kolorami ze zbioru $\{0, 1, \dots, d\}$, czyli inaczej sympleksu $\sigma \in \mathcal{S}_{ist}$ takiego, że $\dim \sigma = d$ oraz $dcol \sigma = 0$. Algorytm więc zatrzyma się i zwróci dobrze pokolorowany d-sympleks. \square

4 Eksperymenty i wnioski

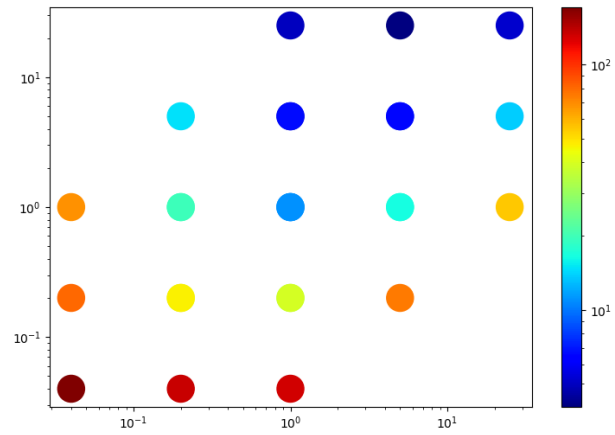
W tym rozdziale zbadamy zachowanie algorytmu z Tabeli 1 dla różnych danych wejściowych pod kątem szybkości osiągania dobrze pokolorowanego d-sympleksu w zależności od częstości występowania kolorów. W tym celu dla zadanego podziału \mathcal{S} d-sympleksu Δ rozważmy ciąg (w_0, w_1, \dots, w_d) - nazwijmy go *ciągami wag prawdopodobieństwa*, a elementy tego ciągu *wagami prawdopodobieństwa*. Dla każdego wierzchołka $b \in \mathcal{S}_{ist}$ takiego, że najmniejszą ścianą Δ , w której leży b jest $\langle a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k} \rangle$ będziemy losować kolor wierzchołka b spośród kolorów ze zbioru $\{i_0, i_1, \dots, i_k\}$ tak, że prawdopodobieństwo wylosowania koloru i_j będzie wynosiło $\frac{w_{i_j}}{\sum_{c \in \{i_0, i_1, \dots, i_k\}} w_c}$. Jak łatwo zauważyć, prawdopodobieństwa sumują się do 1.

4.1 Przypadek 2-wymiarowy

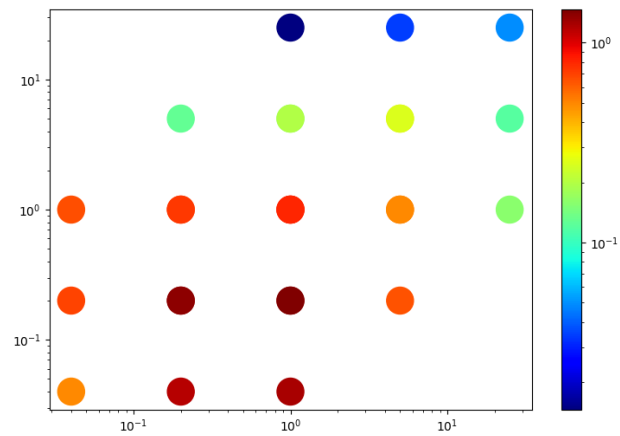
Jako Δ przyjmijmy 2-wymiarowy sympleks $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$. Jako \mathcal{S} przyjmijmy szósty podział barycentryczny Δ (czyli \mathcal{S} ma 140161 sympleksów). Dla każdego trzelementowego ciągu wag prawdopodobieństwa o wagach prawdopodobieństwa ze zbioru $\{1, 5, 25\}$ wygenerujemy 100 kolorowań \mathcal{S} .

Na Wykresie 1 przedstawiona została zależność średniej liczby kroków algorytmu z Tabeli 1 (jako liczbę kroków rozumiemy liczbę przejranych sympleksów) od ciągu wag prawdopodobieństwa. Pozioma oś odpowiada za wzrost stosunku wagi prawdopodobieństwa w_1 do wagi prawdopodobieństwa w_0 , pionowa oś odpowiada za wzrost stosunku w_2 do w_0 , a kolor punktu odpowiada za średnią liczbę kroków - im cieplejszy kolor, tym większa średnia liczba kroków.

Na Wykresie 2 przedstawiona została zależność stosunku średniej liczby kroków algorytmu z Tabeli 1 do średniej liczby kroków algorytmu losowego od ciągu wag prawdopodobieństwa. Im ten stosunek jest większy, tym kolor punktu na wykresie jest cieplejszy, a pozostałe osie są analogiczne do Wykresu 1. Przez algorytm losowy rozumiemy algorytm, który losuje sympleks z \mathcal{S} dopóki nie natrafi na sympleks pokolorowany wszystkimi kolorami. Wartość oczekiwaną liczby kroków takiego algorytmu losowego można wyznaczyć licząc stosunek ilości sympleksów w \mathcal{S} do ilości sympleksów pokolorowanych wszystkimi kolorami w \mathcal{S} .



Wykres 1: Zależność średniej liczby kroków algorytmu w zależności od ciągu wag prawdopodobieństwa.



Wykres 2: Zależność stosunku średniej liczby kroków algorytmu do średniej liczby kroków algorytmu losowego w zależności od ciągu wag prawdopodobieństwa.

4.2 Przypadek 4-wymiarowy

Jako Δ przyjmijmy 4-wymiarowy sympleks $\langle a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$. Jako \mathcal{S} przyjmijmy trzeci podział barycentryczny Δ (czyli \mathcal{S} ma 11066401 sympleksów). Dla każdego pięcioelementowego ciągu wag prawdopodobieństwa o wagach prawdopodobieństwa ze zbioru $\{1, 5, 25\}$ wygenerujmy 8 kolorowań \mathcal{S} .

Na Wykresie 3 przedstawiona została zależność średniej liczby kroków algorytmu z Tabeli 1 od ciągu wag prawdopodobieństwa. Pozioma oś w pojedynczym wykresie odpowiada za wzrost stosunku w_1 do w_0 , pionowa oś w pojedynczym wykresie odpowiada za wzrost stosunku w_2 do w_0 , kolejne rzędy wykresów odpowiadają za zmianę stosunku w_3 do w_0 (wykresy u góry odpowiadają za większą wartość tego stosunku), kolejne kolumny wykresów odpowiadają za zmianę stosunku w_4 do w_0 (wykresy z prawej strony odpowiadają za większą wartość tego stosunku), a kolor punktu odpowiada za średnią liczbę kroków - im cieplejszy kolor, tym większa średnia liczba kroków. Wykres został transponowany w celu zwiększenia przejrzystości.

Na Wykresie 4 przedstawiona została zależność stosunku średniej liczby kroków algorytmu z Tabeli 1 do średniej liczby kroków algorytmu losowego od ciągu wag prawdopodobieństwa. Im ten stosunek jest większy, tym kolor punktu na wykresie jest cieplejszy, a pozostałe osie są analogiczne do Wykresu 3. Algorytm losowy jest zdefiniowany tak, jak w przypadku 2-wymiarowym. Wykres został transponowany w celu zwiększenia przejrzystości.

4.3 Wnioski

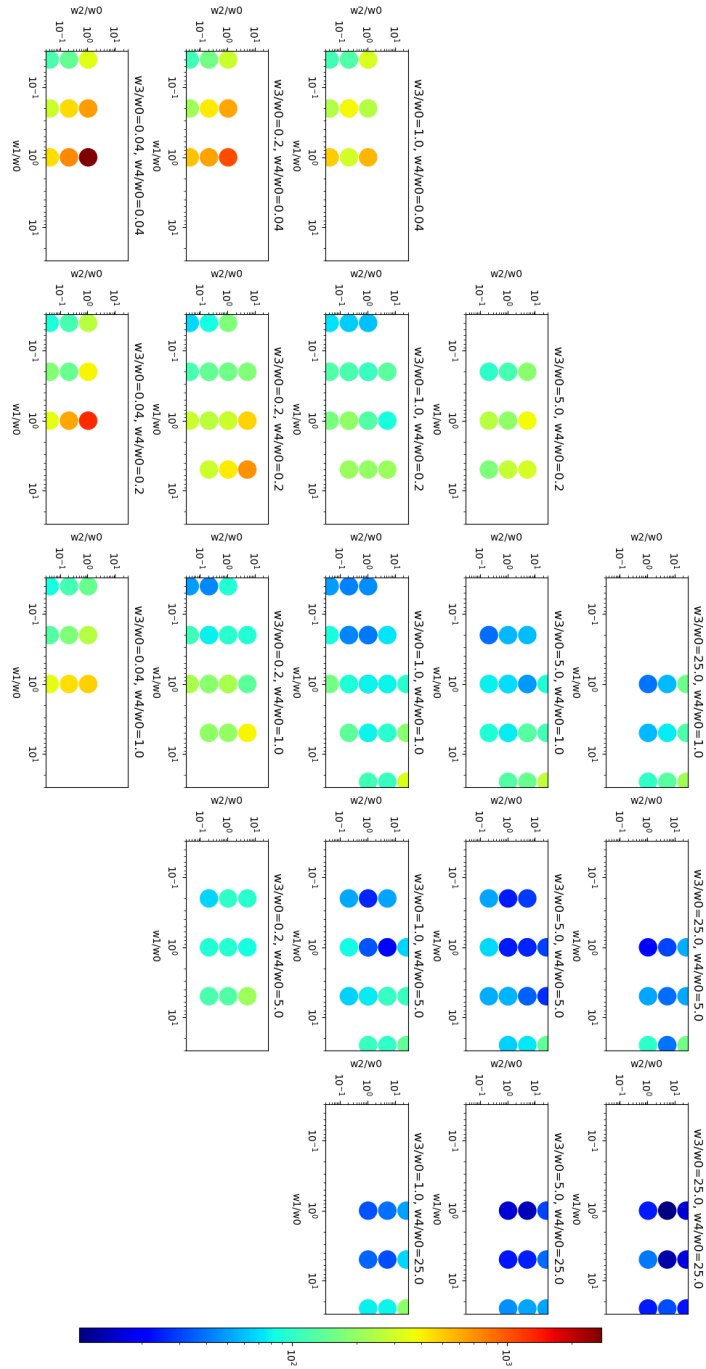
Z analizy wykresów z tego rozdziału można wywnioskować, że w przypadku równych wag prawdopodobieństwa, algorytm z Tabeli 1 wykonuje małą liczbę kroków, ale nie wypada znacząco lepiej od algorytmu losowego. Natomiast w przypadku różnych wag prawdopodobieństwa, można zauważyć, że algorytm z Tabeli 1 radzi sobie o wiele lepiej, gdy ciąg wag prawdopodobieństwa jest ciągiem rosnącym. Można więc oczekiwać, że w celu przyspieszenia algorytmu w sytuacji, gdy wiemy, że pewnych kolorów w \mathcal{S} jest więcej niż innych, należałoby najpierw ustawić kolejność wierzchołków sympleksu Δ i odpowiadających im kolorów w taki sposób, aby kolory częściej występujące miały większą wartość.

5 Dodatki

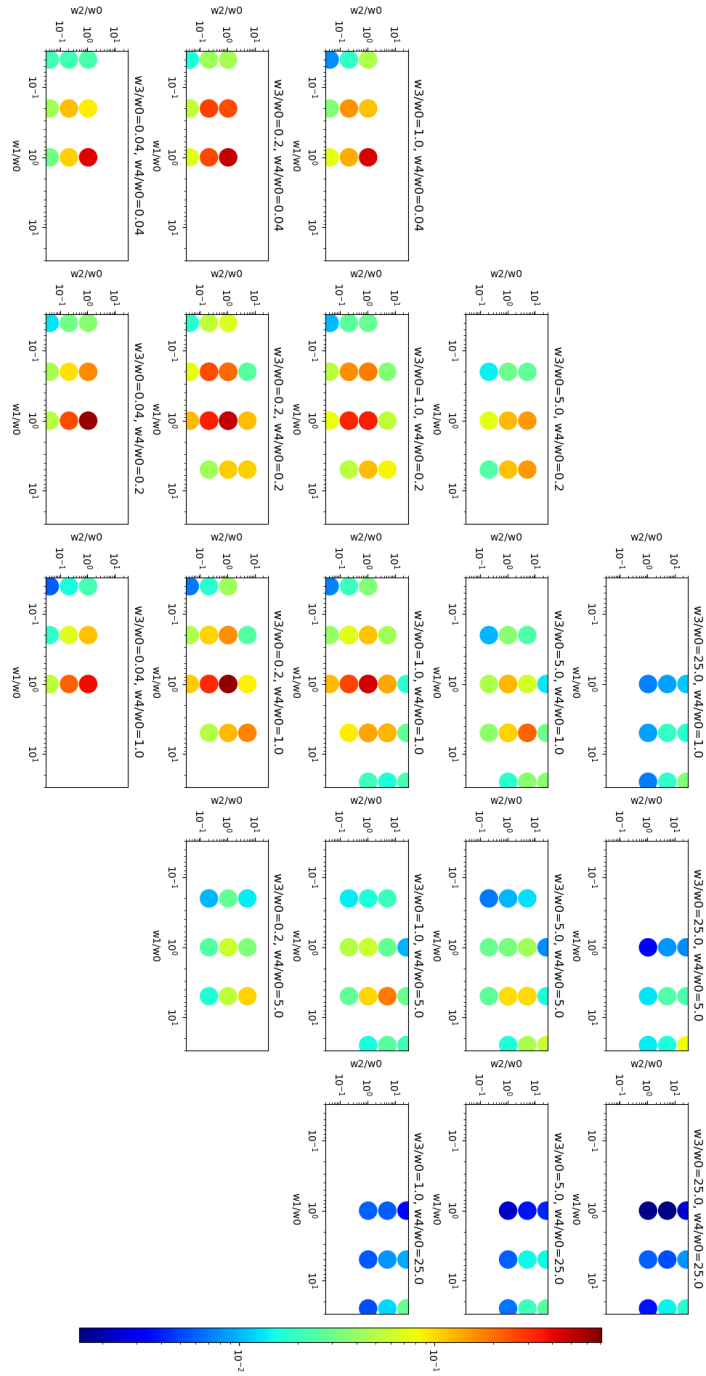
5.1 Kod w C++

Do kompilacji poniższego kodu potrzebny jest kompilator wspierający standard C++11.

Wierzchołki są kolejnymi liczbami całkowitymi. Liczba 0 jest wierzchołkiem startowym odpowiadającym wierzchołkowi $a_0 \in \Delta$.



Wykres 3: Zależność średniej liczby kroków algorytmu w zależności od ciągu wag prawdopodobieństw.



Wykres 4: Zależność stosunku średniej liczby kroków algorytmu do średniej liczby kroków algorytmu losowego w zależności od ciągu wag prawdopodobieństw.

Wejście do funkcji sperner:

adj - listy sąsiedztwa wierzchołków - $b \in \text{adj}[a]$, gdy $\{a, b\} \in \mathcal{S}$.

cols - wektor kolorów wierzchołków.

embs - wektor wymiarów włożenia wierzchołków.

dim - wymiar sympleksu Δ .

Wyjście z funkcji Sperner - wektor wierzchołków rozpinających sympleks pokolorowany wszystkimi kolorami.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <unordered_map>

using namespace std;

int nowy_emb(vector<int>& sympleks, vector<int>& embs){
    int emb=0;
    for(auto v: sympleks)
        emb=max(emb, embs[v]);
    return emb;
}

vector<int> sperner(vector<vector<int>>& adj, vector<int>& cols,
                    vector<int>& embs, int dim){
    //adj - listy sasiedztwa
    //cols - kolory wierzchołkow
    //embs - wymiar wlozenia wierzchołkow
    //(wymiar minimalnej sciany glownej zawierajacej dany wierzcholek)
    //dim - wymiar kompleksu
    vector<int> sympleks=vector<int>({0}); // aktualny sympleks
    // (przyjmujemy, ze 0 jest wierzchołkiem startowym)
    int s_dim=0, s_col=0, s_emb=0, roznica=0;
    // s_dim - wymiar aktualnego sympleksu
    // s_col - maksymalny kolor wierzchołkow aktualnego sympleksu
    // s_emb - wymiar minimalnej sciany glownej zawierajacej aktualny sympleks
    // roznica - wierzcholek, ktory ostatnio dodalismy lub usunelismy
    unordered_map<int, int> wspolne;
    for(auto x: adj[0])
        wspolne[x]=1;
    while(s_dim!=dim || s_dim!=s_col){
        if(s_col!=s_dim){
            //przypadek 1 - przechodzimy do sympleksu nizej wymiarowego,
            //gdzy mamy pare takich samych kolorow
            for(auto &v: sympleks)
                if(cols[v]==cols[roznica]&&v!=roznica){
                    roznica=v;
                    for(auto x: adj[v])
                        wspolne[x]--;
                    v=sympleks[sympleks.size()-1];
                    sympleks.pop_back();
                    s_dim--;
                    s_emb=nowy_emb(sympleks, embs);
                    break;
                }
        }
        else if(s_dim==s_emb&&sympleks[sympleks.size()-1]!=roznica){
            //przypadek 2 - przechodzimy do sympleksu nizej wymiarowego,
            //gdzy mamy parami rozne kolory
            for(int i=0; i<=s_dim; i++){
                if(cols[sympleks[i]]==s_dim){
                    if(sympleks[i]!=roznica){
                        roznica=sympleks[i];
                        for(auto x: adj[roznica])
                            wspolne[x]--;
                        sympleks[i]=sympleks[sympleks.size()-1];
                        sympleks.pop_back();
                        s_col--;
                    }
                }
            }
        }
    }
}
```

```

        s_dim--;
        s_emb=nowy_emb(sympleks, embs);
    }
    break;
}
}
}
else{
    //przypadek 3 - przechodzimy do sympleksu wyzej wymiarowego
    int ind_min=0;
    for(int i=1; i<=s_dim; i++)
        if(adj[sympleks[i]].size()<adj[sympleks[ind_min]].size())
            ind_min=i;
    for(auto v: adj[sympleks[ind_min]])
        if(wspolne[v]==s_dim+1&&v!=roznica&&embs[v]<=s_dim+1){
            sympleks.push_back(v);
            roznica=v;
            for(auto x: adj[v]){
                if(wspolne.find(x)!=wspolne.end())
                    wspolne[x]++;
                else
                    wspolne[x]=1;
            }
            s_dim++;
            s_emb=s_dim;
            s_col=max(s_col, cols[v]);
            break;
        }
    }
}
return sympleks;
}

```

Literatura

- [1] Emanuel Sperner, Ein Satz über Untermenger einer endlichen Menge, Math.Z. 27 (1928), 544–548.
- [2] Marian Mrozek, Wprowadzenie do Topologii i Topologia Obliczeniowa, Notatki do wykładu dla studentów Matematyki Komputerowej, (11 listopada 2022), 99-106.