Chap 2 - Tests d'hypothèse

Jordy Palafox

October 2, 2023

Statistiques Inférentielles
CY Tech - Ing 2 GSI 2023-2024

Motivations

- Une entreprise modèlise un phénomène par une loi de probabilité de paramètre θ (on va se dire que θ un réel).
- Sauf ... que la modélisation a été réalisée il y a 15 ans. Est-ce que le paramètre θ est-il encore valable ?
- Pour cela on va mettre en place un **test d'hypothèse**.
- Partant des mesures réalisées sur un échantillon, est-ce que la loi de paramètre θ est-elle valide ou une nouvelle valeur serait-elle plus appropriée ? (fixée ou une plage de valeur).

Généralités

Il existe deux familles de tests :

- les **tests paramétriques** : on se donne une famille de loi dans laquelle on va chercher celle qui correspond le mieux à notre phénomène : *par exemple, notre phénomène est modélisé par une loi Gaussienne, il y a donc deux paramétres : l'espérance et la variance, un seul ou les deux peuvent être estimé.*
- les **tests non paramétriques** : on ne fait pas d'hypothèse sur les lois qui suivent les phénomènes car on ne dispose d'informations suffisantes, on utilise uniquement les valeurs numériques issues de l'échantillon.

On s'intéressera surtout aux tests paramétriques dans ce cours.

Définir les hypothèses d'un test

Un test d'hypothèse se définit toujours de la même manière :

- l'**hypothèse nulle** (H_0) , qui correspond ce que l'on fait par habitude, on prend donc moins de risques que de changer.
- l'**hypothèse alternative** (H_1), on propose de changer ce que l'on fait, comme c'est inconnu, c'est probablement plus risqué!

Les hypothèses (H_0) et (H_1) doivent s'exclure l'une à l'autre, être complémentaires.

On rencontrera essentiellement les hypothèses suivantes :

- **simples** : $\theta = \theta_0$,
- **unilatérales** : $\theta > \theta_0$ ou $\theta < \theta_0$
- **bilatérales** : $\theta \neq \theta_0$.

Définir les hypothèses d'un test : applications

Exemples

1. Un laboratoire pharmaceutique commercialise un médicament depuis 15 ans mais il veut vérifier son efficacité contre un nouveau variant. Il définit donc le test :

$$\begin{cases} (H_0) & \text{le médicament est efficace.} \\ (H_1) & \text{le médicament n'est pas efficace.} \end{cases}$$

Exemples

2. Un fabricant de composants pour PC cherche à vérifier dans le cadre d'un contrôle qualité si la fréquence d'une gamme de ses processeurs est bien celle annoncée (3,6 GHz). Il observe sur un échantillon une fréquence moyenne de 3.4 GHz. Il peut réaliser donc l'un des deux tests suivant :

$$\begin{cases} (H_0) & \text{la fréquence moyenne est 3.6 GHz.} \\ (H_1) & \text{la fréquence moyenne est 3.4 GHz.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (H_0) & \text{la fréquence moyenne est 3.6 GHz.} \\ (H_1) & \text{la fréquence moyenne est inférieure à 3.6 GHz.} \end{cases}$$

Exercice

Depuis des années, la ville de Serres-Castet réalise des relevés du niveau de pluie X en mm et suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = 600$ et $\sigma = 40$.
Une entreprise annonce un procédé pour augmenter les niveaux de pluie de 50 mm pour améliorer la productivité des terres agricoles. Elle réalise son test de 2014 à 2022, suite auxquelles le procédé sera évalué en 2023:

2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
510	614	780	512	501	534	603	788	650

1. Calculer la moyenne sur l'échantillon.
2. proposer des hypothèses (H_0) et (H_1) du point de vue des responsables régionaux. Quelles seraient les hypothèses si l'entreprise réalisait le test ?
3. Dessiner les distributions des deux lois.

Le risque associé à ces hypothèses

Quand on définit un test d'hypothèse, on prend un risque : **celui de se tromper**.

Deux types de risque

- Le **risque de première espèce** α, c'est la probabilité de valider à tord (H_1) donc "d'accepter de la nouveauté à tout prix",
- Le **risque de deuxième espèce** β, c'est la probabilité de conserver à tord (H_0) donc "de rejeter de la nouveauté à tout prix".

On peut aussi définir la **puissance du test** $= 1 - \beta$, c'est la probabilité d'accepter (H_1) à raison.

Bien garder à l'esprit que α et β sont des probabilités, par exemple: $\alpha = \mathbb{P}(\textit{valider } (H_1) | (H_0) \textit{ vraie})$

Le risque associé à ces hypothèses

Exercice

Donner une interprétation des risques de première et deuxième espèces dans le cas de la pluviométrie. Que signifie $\alpha = 5\%$?

Variable de décision

"Définition"

La **variable de décision** est la variable aléatoire Y calculée sur l'échantillon qui permet de valider (H_0) ou (H_1).
C'est le plus souvent l'estimateur du paramètre donné pour (H_0).

Il faut impérativement connaître la loi de Y pour calculer α et β !

Exemple

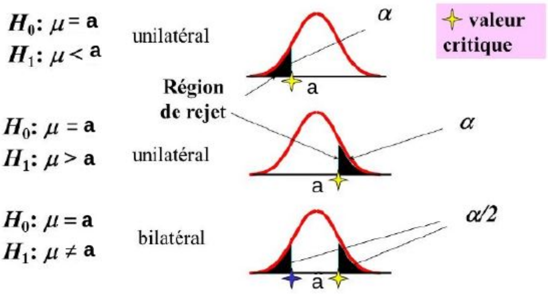
Si (H_0) : $\mu = \mu_0$, μ étant une espérance, on prendra $Y = \overline{X_n}$ et d'après le TCL, $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Exercice

Dans le cas de la pluviométrie, donner la variable de décision.

Définition

La **région critique** est l'ensemble $\mathcal{W}$ des valeurs de Y pour lesquels on rejette (H_0) (donc c'est la région d'acception de (H_1)).



Elle peut être de la forme $\{Y > C\}$ (1er cas), $\{Y < C\}$ (2ème), $\{Y < C_1 \text{ ou } Y > C_2\}$. La forme dépend de la nature du test et les valeurs de seuil C (C_1, C_2) dépendent des risques α et β.

Région critique

Exercice

- Dessiner la région critique dans le cas du test sur la pluviométrie.
- Pour un risque $\alpha = 5\%$ calculer le seuil.
- En déduire le risque β.

Règle de décision

Définition

La région critique permet de définir les **règles de décision**, pour départager (H_0) de (H_1):

- Si $Y \in \mathcal{W}$, on rejette (H_0) et on valide (H_1).
- Si $Y \notin \mathcal{W}$, on rejette (H_1) et on conserve (H_1).

Application

Enoncer les règles de décision pour l'exercice de la pluviométrie.

Construction d'un test d'hypothèse

Résumons

Pour réaliser un test d'hypothèse, il faut :

1. Définir les hypothèses (H_0) et (H_1).
2. Déterminer la variable de décison Y.
3. Donner la forme de la région critique $\mathcal{W}$.
4. Choix de la valeur du risque **ou** du seuil.
5. Si α est choisi, déterminer le(s) seuil(s).
   Si le seuil est donné, calculer α.
6. Si c'est un test d'hypothèse simple, calculer le risque de deuxième espèce β et la puissance.
7. Enoncer les règles de décision.

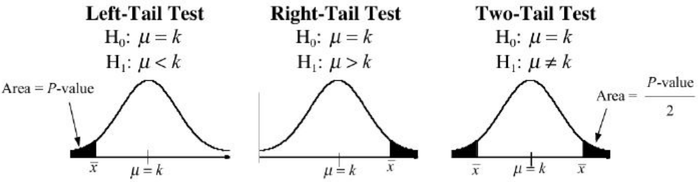
La p-valeur

Définition 1

On appelle **p-valeur** la plus petite valeur de α pour laquelle on rejette (H_0).

Définition 2

On appelle **p-valeur** la probabilité, sous (H_0) d'obtenir des valeurs plus extrêmes que la valeur donnée par l'échantillon.



La p-valeur

Exercice

Dans le cas de la pluviométrie, on rappelle que $\overline{x} = 610.22$.
Calculer la p-valeur.