§8. Обратная функция

$f: X \to Y,\ y=f(x)$

Опр. f обладает след. св-вом:

$\forall y_0 \in Y$ сущ. единств. т. $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0)=y_0$

то на Y сущ. обратная ф-ция $x=f^{-1}(y)$, которая каждому $y \in Y$ ставит в соответствие такое $x \in X$, что $y=f(x)$.

Замечание

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x) = x$

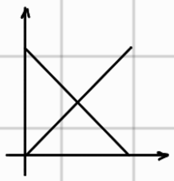
$f(f^{-1}(y)) = f \circ f^{-1}(y) = y$

Примеры

1. $y=x^2,\ X=[0,1],\ Y=[0,1]$

$x=\sqrt{y}$

2. $y=\tilde{D}(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ 1-x, & x\in\mathbb{I}\end{cases}$; $X=[0,1],\ Y[0,1]$



$x=\tilde{D}^{-1}(y)=\begin{cases} y, & y\in\mathbb{Q} \\ 1-y, & y\in\mathbb{I}\end{cases}$

Лемма

Если ф-ция $y=f(x)$ определена и строго монотонна на X, а Y её множество значений, то на Y определена и имеет тот же тип строгой монотонности, что и ф-ция f, определена обратная ф-ция $x=f^{-1}(y)$.

Д-во:

для f выполнено

$\forall y_0 \in Y$ сущ. единств т. $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0)=y_0$

т.к. $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 \neq x_2 \mapsto f(x_1)=y_1 \neq y_2 = f(x_2)$ в силу строгой монотонности

Пусть f возрастающая

Док-ть: $\forall y_1, y_2 \in Y: y_1 > y_2 \mapsto f^{-1}(y_1)=x_1 > x_2 = f^{-1}(y_2)$.

От противного: пусть $x_1 \leq x_2 \overset{f\text{ возр}}{\Rightarrow} f(x_1)=y_1 \leq y_2 = f(x_2)$ противоречие

Теорема [Об обратной ф-ции]

Пусть ф-ция $y=f(x)$ опред., непрерыв и возраст на $[a,b]$

$\alpha=f(a),\ \beta=f(b)$. Тогда на $[\alpha,\beta]$ определена, непрерывна и возрастает обратная ф-ция $x=f^{-1}(y)$.

Д-во:

f возрастает на $[a,b]$.

сущ. и возраст $x=f^{-1}(y)$ следует из леммы

Док-ть непр. f^{-1} $\forall y_0 \in [\alpha,\beta]$

1. $y_0 \in (a,b) \Rightarrow$ надо доказать $f^{-1}(y_0-0)=f^{-1}(y_0)=f^{-1}(y_0+0)$

От противного: пусть $f^{-1}(y_0-0) < f^{-1}(y_0)$

$\forall y \in [\alpha, y_0) \mapsto a \leq f(y) \leq f^{-1}(y_0-0) = \sup\limits_{[\alpha,y_0)} f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0)$

$\forall y \in [y_0, \beta] \mapsto f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y) \leq b$

$(f^{-1}(y_0-0), f^{-1}(y_0))$ не принадлежит мн-ву значений ф-ции f^{-1}.

противоречие

Для концов

$f^{-1}(\alpha+0)=f^{-1}(\alpha),\ f^{-1}(\beta-0)=f^{-1}(\beta)$

также от противного.

§9. Сравнение функций.

1°. б.м. ф-ции при $x\to\alpha$

$y=f(x)$, $y=g(x)$ определены $X=\{x: 0<|x-\alpha|<\delta\}$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\lim_{x\to\alpha} g(x)=0$$

Опр. ф-ция $y=f(x)$ имеет более высокий порядок малости (или б.м. более высокого порядка), чем ф-ция $y=g(x)$ при $x\to\alpha$, если $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

Обознач.

$f(x)=o(g(x))$, $x\to\alpha$

$f=o(g)$, $x\to\alpha$

Опр. ф-ции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ называются б.м. одного порядка при $x\to\alpha$, если $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$, $\beta\neq0$ & $\beta\neq1$

Опр. б.м. ф-ции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

Обознач. $f(x)\sim g(x)$, $x\to\alpha$

$f\sim g$, $x\to\alpha$

Св-ва символа „o" ($x\to\alpha$)

1) $o(g)\pm o(g)=o(g)$

2) $o(c\cdot g)=o(g)$; $c\cdot o(g)=o(g)$; $c=const$

3) $o(g)=o(o(g))$

4) $o(g)\pm o(o(g))=o(g)$

5) $[f=o(p)]\&[\varphi=o(q)]\Rightarrow f\cdot\varphi=o(p\cdot q)$

Д-во 3:

$f=o(g)$, $h=o(f)\Rightarrow h=o(g)$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=0,\quad \lim_{x\to\alpha}\frac{h(x)}{f(x)}=0\Rightarrow \lim_{x\to\alpha}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{h(x)}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

2°. Сравнение б.б. ф-ций

f,g опр. $X=\{x:0<|x-\alpha|<\delta\}$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\lim_{x\to\alpha} g(x)=\infty\,[+\infty][-\infty]$$

Опр. ф-ция $y=f(x)$ имеет более высокий порядок роста, чем $y=g(x)$ при $x\to\alpha$ если $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

Пример:

$x\to+0$ $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty$$

Опр. б.б. ф-ции f и g имеют одинаковый порядок роста, если при $x\to\alpha$, если

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta\in\mathbb{R},\ \beta\neq0.$$

§10. Равномерная непрерывность.

$f: X \to \mathbb{R},\ y=f(x)$

Опр. ф-ция $y=f(x)$ наз. равномерно непрерывной на мн-ве X, если

$[\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon): \forall x', x'' \in X: |x'-x''|<\delta \mapsto |f(x')-f(x'')|<\varepsilon]$

[f не явл. равномерно непр. на X] $\overset{def}{=} [\exists \varepsilon_0>0: \forall \delta\ \exists x'_\delta, x''_\delta: |x'_\delta - x''_\delta|<\delta: |f(x'_\delta)-f(x''_\delta)| \geqslant \varepsilon_0]$

Пример

$y=kx+b,\ X=\mathbb{R}$

$\forall x', x'' \in \mathbb{R}: |x'-x''|<\delta \mapsto |y(x')-y(x'')|=|k||x'-x''|<|k|\delta=\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\frac{\varepsilon}{|k|}: \forall x', x'' \in X: |x'-x''|<\delta \mapsto |y(x')-y(x'')|<\varepsilon$

Пример.

$y=x^2,\ X=(0,+\infty)$

$\varepsilon_0>0\ \forall \delta>0\ x'_\delta > \frac{\varepsilon_0}{\delta}$

$x''_\delta = x'_\delta + \frac{\delta}{2} \Rightarrow |x'_\delta - x''_\delta| = \frac{\delta}{2} < \delta$

$|y(x'_\delta)-y(x''_\delta)| = |x'^2_\delta - x''^2_\delta| = |x'_\delta - x''_\delta||x'_\delta + x''_\delta| = \left|2x' + \frac{\delta}{2}\right|\frac{\delta}{2} > \left(\frac{2\varepsilon_0}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} = \varepsilon_0 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 > \varepsilon_0.$

Опр. Модулем непрерывности ф-ции $y=f(x)$ называется ф-ция $\sup\limits_{\substack{x', x'' \in X \\ |x'-x''|<\delta}} |f(x')-f(x'')| = \omega_{f,x}(\delta)$

Пример $y=\sqrt{x},\ X=(0,+\infty)$

$x',\ x''=x'+c,\ 0<c<\delta,\ \forall \delta>0$

$|y(x')-y(x'')| = |\sqrt{x'}-\sqrt{x''}| = \frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'}+\sqrt{x'+c}} < \frac{c}{\sqrt{c}} = \sqrt{c} < \sqrt{\delta}$

$0<\omega(\delta)\leqslant\sqrt{\delta}$

Теорема Кантора

Если ф-ция $y=f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то равномерно непрерывна на $[a,b]$.

Д-во: от противного

$\exists \varepsilon_0>0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x'_n, x''_n \in [a,b]: |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}: |f(x'_n)-f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0$

$\{x'_n\}$ – огран. т.к. $\forall n \mapsto a \leqslant x'_n \leqslant b \overset{ТБВ}{\Rightarrow} \exists \{x'_{k_n}\}: x'_{k_n} \to c,\ c \in [a,b].$

$\Rightarrow |x''_{k_n} - x'_{k_n}| < \frac{1}{k_n} \Rightarrow x'_{k_n} - \frac{1}{k_n} \leqslant x''_{k_n} \leqslant x'_{k_n} + \frac{1}{k_n}$

$\Rightarrow x''_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} c$

$\Rightarrow f(x'_{k_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(c)$

$f(x''_{k_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(c)$

$\Rightarrow f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Противоречие