## Изменение общего уравнения при замене базиса

$P(x,y) = X^T A X + 2\vec{b}^* X + F$

$A = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ $\quad \vec{b}^* = (D, E)$, $X = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$

квадрат. часть ур-я (1)

Замена

$X = SX'$, $S$ - матрица перехода, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X^T = (X')^T S^T$

$$P = (X')^T \underbrace{(S^T \cdot A S)}_{A'} X' + 2\underbrace{(\vec{b} S)}_{\vec{b}'} X' + F = 0$$

## Поворот базиса на $\varphi$

$$S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A\cos\varphi + B\sin\varphi & B\cos\varphi + C\sin\varphi \\ -A\sin\varphi + B\cos\varphi & -B\sin\varphi + C\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi & -A\cos\varphi\sin\varphi - B\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi + C\sin\varphi\cos\varphi \\ -A\cos\varphi\sin\varphi - B\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi + C\sin\varphi\cos\varphi & A\sin^2\varphi - 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

$B' = (C-A)\sin\varphi\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$

$= \frac{1}{2}(C-A)\sin 2\varphi + B\cos 2\varphi$

$B' = 0 \Leftrightarrow$

$(C-A)\sin\varphi\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0 \quad (2)$

либо

$(C-A)\sin 2\varphi + 2B\cos 2\varphi = 0 \quad (2')$

Если $B = 0$, делать ничего не надо

Пусть $B \neq 0$

$(C-A)\sin\varphi\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0$

$$tg^2\varphi + \frac{(A-C)}{B} tg\,\varphi - 1 = 0$$

$$\left(\Delta = \left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 4 > 0\right)$$

$$(2')\ tg\,2\varphi = \frac{2B}{A-C} \quad \left(\text{при } A = C;\ \varphi = \frac{\pi}{4}\right)$$

После поворота:

$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0 \quad (1')$

Замечание:

Определитель $\delta$ не меняется при переходе к новому ортонормированному базису.

По формуле det произведения:

$$\delta' = |A|' = \underset{\pm 1}{|S^T|}\,|A|\,\underset{\pm 1}{|S|} = |A| = \delta$$

$\delta$ - ортогональный инвариант ур-я (1).

Случаи:

1) $\delta \neq 0 \Rightarrow A' \neq 0,\ C' \neq 0$

В ур (1') можно выделить полные квадраты

2) $\delta = 0 = A'C'$ б.о.о. можно считать $A' = 0$, квадрат выделять по $y'$

В результате ур-е (1) приведётся к виду:

$$A'\tilde{x}^2 + C'\tilde{y}^2 + F' = 0$$

либо

$$C'\tilde{y}^2 + F' + 2D'\tilde{x} = 0$$

Теорема

С помощью поворота и переноса начала координат (возм. доп преобраз ур-ий) исходное ур-е (1) приводится к одному и только одному из 9 типов канонических уравнений.

В частности

1) Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (окружность при $a=b$) иначе $a > b$

2) Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (всегда $a>0$, $b>0$)

3) Парабола $y^2 = 2px$ ($p>0$)

Аффинная спецификация

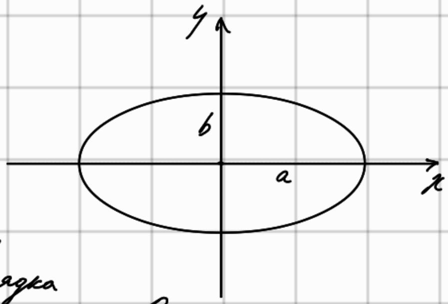
# § Геометрические свойства кривых, заданных каноническими уравнениями.

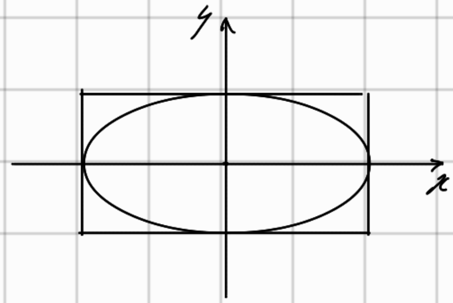
1) Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$

Симметричен относительно осей и начала координат

Эллипс - единственная ограниченная линия среди линий 2 порядка

$\delta = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2} > 0$



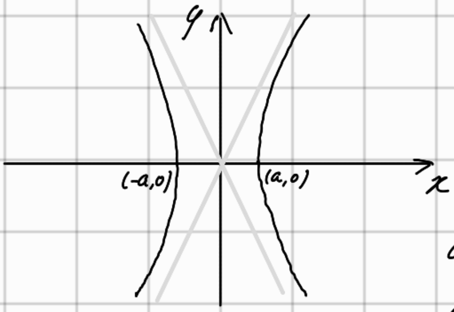

Вершины эллипса

$(\pm a;0), (0,\pm b)$

2) Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Симметрична относительно осей и начала координат

$\delta = \frac{1}{a^2}\cdot\left(-\frac{1}{b^2}\right)<0$




асимптоты

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

$\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}\geq 1$

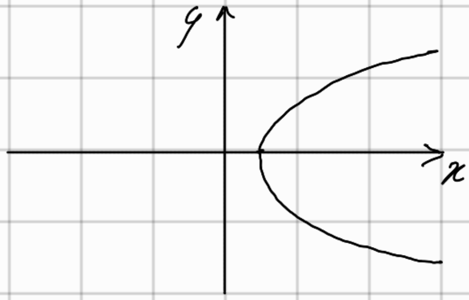
$\Rightarrow |x|\geq a$

Ox: действительная ось

Oy: мнимая ось

3) Парабола $y^2=2px$

Симметрична относительно оси Ox




1. Эллипс

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$

Опред $c=\sqrt{a^2-b^2}>0$

(фокусное расстояние)

$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$

- фокусы эллипса

Эксцентриситет: $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$

Теорема

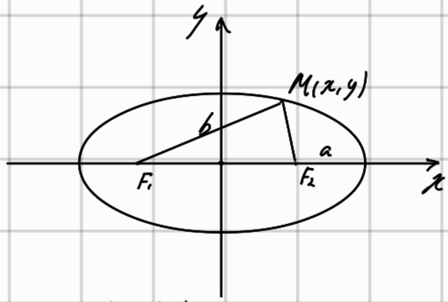
Для $\forall$ т $M(x,y)$ на эллипсе

$r_1+r_2=2A$ и обратное

г.м. точек $M(x,y)$ для которых

$|MF_1|+|MF_2|=2a$, есть эллипс с фокусами

$F_1, F_2$ и большой полуосью $2a$.




$r_{1,2}=|\overrightarrow{MF_{1,2}}|$ - фокальные радиусы т. $M(x,y)$

Лемма: $r_{1,2}=a\pm\varepsilon x$, если $M(x,y)$

$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$r_1^2=x^2+2xc+c^2+y^2$

$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$

$\Rightarrow r_1^2=x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)+2xc+c^2+b^2=$

$=x^2\varepsilon^2+2x\varepsilon a+a^2=(x\varepsilon+a)^2$

$r_1=|a+x\varepsilon|=a+\varepsilon x$

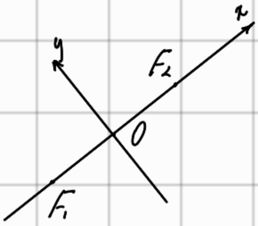
$r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\Rightarrow r_2=a-\varepsilon x$

Д-во: $\Rightarrow$

$$r_1 + r_2 = (a + \varepsilon x) + (a - \varepsilon x) = 2a$$

Обратно: даны точки $F_1, F_2$ и $a > 0$




Выбрать ось $Ox \uparrow\uparrow \vec{F_1F_2}$

$O$ - середина $F_1F_2$

$|F_1F_2| = 2c$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\frac{xc - a^2}{a} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\frac{x^2c^2 - 2xca^2 + a^4}{a^2} = (x-c)^2+y^2$$

$$\frac{x^2c^2}{a^2} - 2xc + a^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$x^2\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) - y^2 = -a^2 + c^2$$

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2$$

$$\frac{x^2 b^2}{a^2} + y^2 = b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ч.т.д.}$$

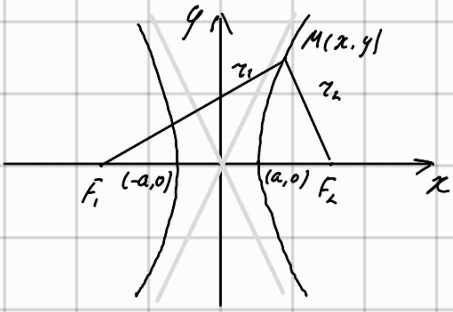
## 2. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$c = \sqrt{a^2+b^2} > a$

$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ - фокусы

Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$




**Теорема 2.** Для $\forall M(x,y) \in \Gamma$

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

и обратно

**Лемма:** Для любой точки $M(x,y) \in \Gamma$

$$r_{1,2} = |\pm a \pm \varepsilon x|$$

Д-во для случая $M$ на правой ветви

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + 2xc + c^2 - b^2$$

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

$$r_1^2 = x^2\varepsilon^2 + 2x\varepsilon a + a^2 = (a + \varepsilon x)^2$$

$$r_1 = |a + \varepsilon x| = a + \varepsilon x$$

$$r_2 = |a - \varepsilon x| = \varepsilon x - a$$