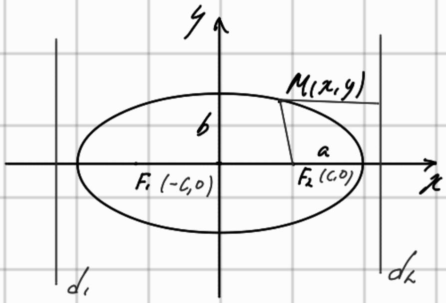
Директориальные свойства эллипса и гиперболы

Директрисы - прямые: $x = \mp \frac{a}{\varepsilon}$



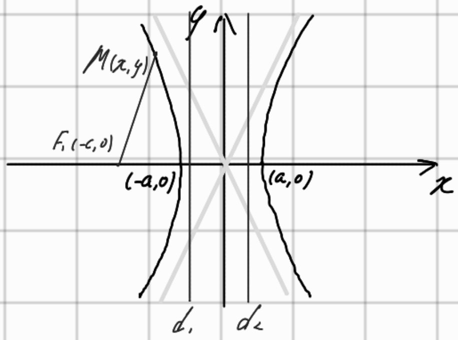
Теорема.

Точка $M(x,y) \in L\ (= Э, Г) \iff \frac{\rho(M,F_i)}{\rho(M,d_i)} = \varepsilon$

Д-во ($\Rightarrow$) Э:

Рассмотрим правый фокус и правую директрису

$$\frac{\rho(M,d_2)}{\rho(M,F_2)} = \frac{-x+\frac{a}{\varepsilon}}{a-\varepsilon x} = \frac{1}{\varepsilon}$$



Д-во ($\Rightarrow$) Г:

Рассмотрим левую ветвь и левую директрису.

$$\rho(M,F_1) = -a-\varepsilon x$$
$$\rho(M,d_1) = -x-\frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{\rho(M,F_1)}{\rho(M,d_1)} = \varepsilon$$

Парабола

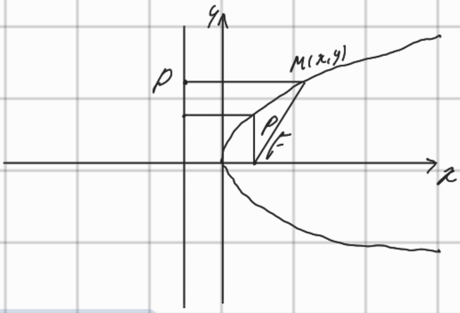
$y^2 = 2px$

$F(\frac{p}{2}, 0)$

p - фокальный параметр

$d: x = -\frac{p}{2}$

Опр. $\varepsilon = 1$



I. $\rho(M,F) = \rho(M,d) \iff M \in$ Пар.

$MP = x + \frac{p}{2}$

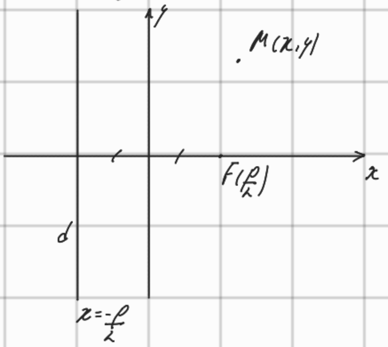
$$MF = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = x + \frac{p}{2}$$

ч.т.д.

Обратно:

Даны т. F и прямая d

Введём прямоугольную систему координат.



$$\rho^2(M,F) = \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$
$$\rho^2(M,d) = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$
$$y^2 = 2px$$

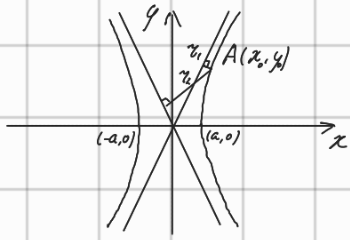
Асимптоты гиперболы

Т. Прямые $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ являются асимптотами гиперболы

Лемма

Произведение расстояний $\forall$т. Г до прямых $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ постоянно

$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$



$$r_1=\frac{\left|\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$$

$$r_2=\frac{\left|\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$$

$$r_1 r_2=\frac{\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{a^2b^2}{b^2+a^2}$$ ч.т.д.

Покажем что $\rho_1\to 0$, $x\to+\infty$

$\rho_1\rho_2=C$, $\rho_1=\frac{C}{\rho_2}\to 0$. ч.т.д.

„Очевидно" $\rho_2\to\infty$

Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе

Касательные в вершинах - вертикальные

Утв. Ур-ние касательной в т. $M(x_0,y_0)\in L$

для Э:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

для Г:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$$

для П:

$$yy_0=p(x+x_0)$$

Ур-е эллипса: $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$

кас $\parallel \vec{v}=\{x'_t, y'_t\}=\{-a\sin t, b\cos t\}$

$\vec{v}(M)=\{-a\sin t_0, b\cos t_0\}$

$\cos t_0=\frac{x_0}{a}$, $\sin t_0=\frac{y_0}{b}$

Ур-е касательной:

$b\cos t_0(x-x_0)+a\sin t_0(y-y_0)=0$

$\frac{bx_0}{a}(x-x_0)+\frac{ay_0}{b}(y-y_0)=0$

$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)=0$

$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$

Параметрические ур-я для гиперболы

$\begin{cases}x=a\,ch\,t\\ y=b\,sh\,t\end{cases}$ (правая ветвь) $\quad$ $\begin{cases}x=-a\,ch\,t\\ y=b\,sh\,t\end{cases}$ левая ветвь

$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=ch^2t-sh^2t=1$

Для параболы

(Касательная - предельное положение секущей)

Пусть $x=x_0+\alpha t$,
$y=y_0+\beta t$
секущая $(x_0,y_0)\in П$

Координаты точек пересечения для этой прямой находятся из уравнения $(y_0+\beta t)^2=2p(x_0+\alpha t)$

$$\beta^2 t^2 + 2(y_0 b - p\alpha)t + \underbrace{y_0^2 - 2px_0}_{=0} = 0$$

$$t_1 = 0 \overset{\text{кас}}{=} t_2$$

$$\beta^2 (t_1 + t_2) = 2(y_0 b - x_0 \alpha) = 0$$

$$y_0 b = p\alpha \mid \alpha = y_0,\ \beta = p$$

$$\begin{cases} x = x_0 + y_0 t \\ y = y_0 + pt \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{y_0} = \frac{y - y_0}{p}$$

$$p(x - x_0) = yy_0 - y_0^2$$

$$y_0^2 = 2px_0$$

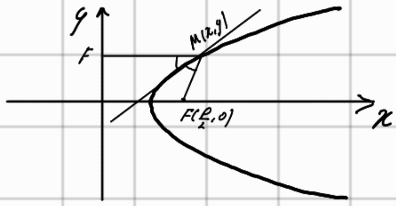
$$p(x + x) = yy_0$$

Оптические свойства:

Теорема:

Нормаль в точке эллипса или гиперболы делит пополам угол между фокальными радиус-векторами

Касательная в точке параболы делит пополам угол между фокальным радиус-вектором и вектором, $\perp$ директрисе.

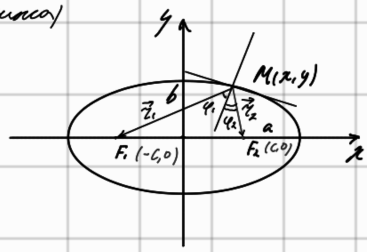


Д-во для эллипса: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

$-\vec{n}\left\{\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right\}$ - вектор нормали (направлен внутрь эллипса)

$\vec{r}_1 = \vec{MF_1} = \{x_0 + c, y_0\}$

$\vec{r}_2 = \vec{MF_2} = \{x_0 - c, y_0\}$



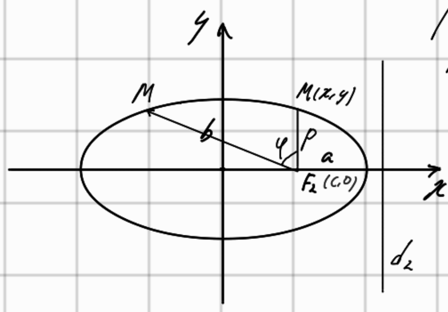
$$\frac{-\frac{x_0}{a^2}(x_0 + c) - \frac{y_0}{b^2} y_0}{a + \varepsilon x_0} = \frac{-\frac{x_0}{a^2}(x_0 - c) - \frac{y_0}{b^2} y_0}{a - \varepsilon x_0} \iff \cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$$

$$\frac{\frac{-cx_0}{a^2} - 1}{a + \varepsilon x_0} = \frac{\frac{-\varepsilon x_0}{a} - 1}{a + \varepsilon x_0} = -\frac{1}{a}$$

$$\frac{\frac{cx_0}{a^2} - 1}{a - \varepsilon x^2} = \frac{\frac{\varepsilon x_0}{a} - 1}{a - \varepsilon x^2} = -\frac{1}{a}$$

ч.т.д.

Уравнения кривых 2-го порядка в полярной системе координат



p - фокальный параметр

$$MF = r_2 = a - \varepsilon x = a - \varepsilon c = a(1 - \varepsilon^2) = p$$

$$\rho(d_2, F_2) = \frac{a}{\varepsilon} - c = \frac{a - \varepsilon c}{\varepsilon} = \frac{p}{\varepsilon}$$

Выберем правый фокус за начало полярной с.к.

$x = x' + c$ перенос в т. F_2

$$r = a - \varepsilon x = a - \varepsilon(x' + c) = \underbrace{a - \varepsilon c}_{p} - \varepsilon r\cos\varphi$$

$$r(1 + \varepsilon\cos\varphi) = p$$

Э: $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$

Г: $r = \dfrac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$, для правого фокуса

П: $r = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$