Часть 4. Алгебраические линии и поверхности (2-го порядка)

§ 1. Введение.

$P(x,y) = \sum a_{ij} x^i y^j$ – конечное число

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $i+j$ – степень одночлена

Степень многочлена $P(x,y) = \max$ степень его одночленов.

пример, $P(x,y) = x^{607} - 2xy^{906} + 3x^{191}y^{802}$

993

Опр.

Алгебраическая линия L на плоскости задана ур-ем $P(x,y)=0$ – это г.м. точек $M(x,y)$ таких что $P(x,y)=0$

Г.М.Т. – необходимое и достаточное усл. $M \in L$

Линия L может быть задана разными ур-ями (в фикс. системе координат.

Порядок линии L – наименьшая среди степеней ур-е зад. L.

Опр.

Алгебраическая поверхность S в пространстве – это геометрическое место точек $M(x,y,z)$, удовлетворяющее ур-ю $P(x,y,z)=0$

Теорема.

При замене декартовой системы координат на плоскости или в пространстве порядок алгебраической линии не изменяется.

Д-во для плоскости

Рассм. $P(x,y) = \ldots + a x^{i_1} y^{i_2} + \ldots$

$i_1 + i_2$ – наибольшая степень

Замена: $\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10} \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20} \end{cases}$ подставим в выбранный одночлен:

$a(a_{11}x' + a_{12}x'' + a_{10})^{i_1}(a_{21}x' + a_{22}x'' + a_{20})^{i_2}$

$\Rightarrow$ степень этого многочлена не больше $i_1 + i_2$

Ур-е $P(x,y)=0$ превратится в ур-е $\tilde{P}(x',y')=0$; а степень $\tilde{P}$ не больше, чем степень P.

Если сделать обратную замену, то степень $P(x,y)$ не больше степени $\tilde{P}$

$\Rightarrow$ они равны. ч.т.д.

§2. Линии 2-го порядка на плоскости.

Пусть на плоскости задана ортонормированная система координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

L задана общим ур-ем 2-го порядка:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad (1)$$

Цель - найти такую ор.с.к., в которой ур-е (1) приобретёт наиболее простой вид.

Запишем ур-е (1) в матричном виде:

обоз $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}A&B\\B&C\end{pmatrix}$. Левая часть ур-я (1) имеет вид:

$$(x,y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\underbrace{2(D,E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{\text{линейная часть}}+F=0$$, короче $X^TAX+2(D,E)X+F=0$ (2)

$$(x,y)\begin{pmatrix}A&B\\B&C\end{pmatrix}=(Ax+By,\ Bx+Cy)$$

$$(x,y)\begin{pmatrix}A&B\\B&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=Ax^2+Byx+Byx+Cy^2=Ax^2+2Byx+Cy^2$$

Опр.

Точка $O'(x_0,y_0)$ - центр симметрии линии L, если для любой точки $M(x,y)\in L$ также точка $M^*(x^*,y^*)$, симметричная с M относительно точки O' принадлежит L.

Это значит, что

$$\forall (x,y):\ P(x_0-x,\ y_0-y)\equiv P(x_0+x,\ y_0+y)$$

Заметим, что если начало координат перенести в точку (x_0,y_0):

$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0$$

$D'=E'=0$ (на ряду с исходным ур-ем, верно).

$P(-x',-y')=$ кв.ч. $-2D'x'-2E'y'+F'=0$

$\forall x',y'=0 \iff D'=E'=0$

Сделаем перенос в искомую точку $O'(x_0 y_0)$

$$\begin{cases}x=x'+x_0\\ y=y'+y_0\end{cases}$$ - подставим в ур-е

$$A(x'+x_0)^2+2B(x'+x_0)(y'+y_0)+C(y'+y_0)^2+2D(x'+x_0)+2E(y'+y_0)+F=$$

$$=Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+(2Ax_0+2By_0+2D)x'+(2Bx_0+2Cy_0+2E)y'+P(x_0,y_0)=0$$

Система ур-ий для нахождения координат (x_0,y_0) центра симметрии

$$\begin{cases}2Ax_0+2By_0+2D=0\\ 2Bx_0+2Cy_0+2E=0\end{cases}$$

$$P'_x\Big|_{y=const}=2Ax+2By+2D=0$$

$$P'_y\Big|_{x=const}=2Cy+2Bx+2E=0$$

$$\begin{cases} A x_0 + B y_0 + D = 0 \\ B x_0 + C y_0 + E = 0 \end{cases} \quad (3)$$

По правилу Крамера рассмотрим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = \delta$$

Если $\delta \neq 0$ то (3) имеет единственное решение

– центральная линия

Начало упрощения ур-я (1):

1. Если $\delta \neq 0$, решить систему (3) и перенести начало координат в т. (x_0, y_0)