Trabajo Práctico 1
Teoría de Colas

9 de septiembre de 2012

Ejercicio 1 El modelo elegido para este sistema es P/P/1. Las distribuciones Poisson de los arribos y las salidas concuerdan con las de este modelo, y además se explicita que no hay impaciencia. Se asumen también las siguientes hipótesis:

- El tipo de arribo responde a distribución Poisson; es dato.
- El tipo de proceso de servicio responde a distribución Poisson; también es dato, ya que el tiempo de servicio tiene distribución exponencial.
- Un único canal de atención; es dato.
- Sistema de capacidad infinita.
- Disciplina de atención FIFO.
- Población infinita.
- Cola única.
- Población sin impaciencia; es dato.
- Sistema en régimen permanente.

Los datos proporcionados son la velocidad de ingreso $\lambda = 24/h$ y el tiempo promedio de atención $t_s = 2min$, a partir del cual podemos calcular la tasa de atención $\mu = \frac{1}{t_s} = \frac{1}{2min} \frac{60min}{h} = \frac{30}{h}$.

1.a. El número promedio de clientes en la sección de sastrería equivale a la cantidad de clientes en nuestro sistema, L. De la combinación de la tabla de estados y la ecuación de estado para un sistema P/P/1 se obtiene la siguiente expresión para L:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{24h^{-1}}{30h^{-1} - 24h^{-1}} = \frac{24}{6} = 4$$

1.b. Equivale al tiempo promedio de permanencia en el sistema de un cliente. Puede obtenerse como el tiempo de permanencia en la cola más el tiempo de atención del cliente:

$$w = w_c + t_s = \frac{L_c}{\lambda} + t_s = \frac{\lambda^2}{\lambda\mu(\mu-\lambda)} + t_s = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + t_s$$

$$w = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + t_s = \frac{24h^{-1}}{30h^{-1}(30h^{-1}-24h^{-1})} + 2min = \frac{24h^{-1}}{30h^{-1}\,6h^{-1}} + 2min$$

$$w = \frac{2}{15}h\,\frac{60min}{h} + 2min = 8min + 2min$$

$$w = 10min$$

1.c. Corresponde a la probabilidad de que no haya clientes en el sistema, siendo para P/P/1:

$$p(0) = 1-\rho = 1-\frac{\lambda}{\mu} = 1-\frac{24h^{-1}}{30h^{-1}} = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

1.d. Lo que se pide es el número promedio de clientes en la cola:

$$L_c = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{24^2h^{-2}}{30h^{-1}(30h^{-1}-24h^{-1})} = \frac{576h^{-1}}{30\cdot 6h^{-1}} = \frac{576}{180} = \frac{16}{5} = 3{,}2$$

Ejercicio 2 El sistema en cuestión es similar al anterior, puede modelarse como P/P/1 con las mismas hipótesis. Los datos son $\lambda = 4h^{-1}$, $t_s = 6min \Rightarrow \mu = \frac{1}{6min}\,\frac{60min}{h} = 10h^{-1}$.

2.a. Corresponde a la probabilidad de que no haya clientes en el sistema, siendo para P/P/1:

$$p(0) = 1-\rho = 1-\frac{\lambda}{\mu} = 1-\frac{4h^{-1}}{10h^{-1}} = 1-\frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

2.b.

$$p(3) = \rho^3 p(0) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{3}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \frac{3}{5} = \frac{8\cdot 3}{125\cdot 5} = \frac{24}{625} = 0{,}0384$$

2.c. La probabilidad de encontrar al menos un cliente en el taller es la probabilidad de que haya entre uno e infinitos clientes: $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$. Teniendo en cuenta que $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = p(0) + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) = 1$ podemos concluir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = 1 - p(0) = 1-(1-\rho) = \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

2.d.

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{4h^{-1}}{10h^{-1} - 4h^{-1}} = \frac{4h^{-1}}{6h^{-1}} = \frac{2}{3} = 0.\overline{6}$$

2.e.

$$w = w_c + t_s = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} + 6min = \frac{4h^{-1}}{10h^{-1}(10h^{-1} - 4h^{-1})} + 6min$$

$$w = \frac{4}{10 \cdot 6h^{-1}} + 6min = \frac{h}{15}\frac{60min}{h} + 6min = 4min + 6min = 10min$$

2.f. Equivale a la longitud de la cola:

$$L_c = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{4^2h^{-2}}{10h^{-1}(10h^{-1} - 4h^{-1})} = \frac{16h^{-2}}{10 \cdot 6h^{-2}} = \frac{4}{15} = 0{,}2\overline{6}$$

2.g.

$$w_c = \frac{L_c}{\lambda} = \frac{4}{15}\frac{h}{4} = \frac{h}{15}\frac{60min}{h} = 4min$$

Ejercicio 3 Este problema también corresponde a un modelo P/P/1, ya que los tiempos entre arribos y de servicio con distribución exponencial corresponden a arribos y salidas con distribución Poisson. Se toman las mismas hipótesis que en los ejercicios anteriores. Los datos son: $t_a = 8min$, $t_s = 2min$.

3.a. La probabilidad de que un cliente tenga que esperar es la probabilidad de que el canal esté ocupado, es decir que haya más de un cliente en el sistema:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = 1 - p(0) = 1 - (1 - \rho) = \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{t_s}{t_a} = \frac{2min}{8min} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

3.b.

$$L_c = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\frac{1}{8^2}min^{-2}}{\frac{1}{2}min^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)min^{-1}}$$

$$L_c = \frac{1}{64} : \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{64} \cdot \frac{16}{3} = \frac{1}{12} = 0{,}08\overline{3}$$

3.c. Para averiguar la velocidad promedio de arribos $\overline{\lambda}$ que resultaría en tiempos de espera en la cola mayores a 4 minutos, se debe despejar dicha variable de la fórmula de espera promedio en la cola. En el modelo P/P/1 se cumple que $\lambda = \overline{\lambda}$, por lo tanto:

$$w_c = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} > 4min$$

Aplicando la función monótonamente decreciente $f(x) = x^{-1}$ resulta:

$$\frac{\mu(\mu - \lambda)}{\lambda} < \frac{1}{4min} \Rightarrow \mu(\mu - \lambda) < \frac{\lambda}{4min}$$

$$\mu^2 - \mu\lambda < \frac{\lambda}{4min} \Rightarrow \mu^2 < \lambda \left(\frac{1}{4min} + \mu \right)$$

$$\frac{\mu^2}{\frac{1}{4min} + \mu} < \lambda \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{2min}\right)^2}{\frac{1}{4min} + \frac{1}{2min}} < \lambda$$

$$\frac{1}{4min} \cdot \frac{4}{3} < \lambda$$

$$\frac{1}{3min} < \lambda$$

La velocidad promedio de arribos para que la espera supere los 4 minutos debería ser al menos de un cliente cada 3 minutos.