

teoria dei giochi

oggetto di studio:

le scelte di agenti razionali in un contesto di interazione strategica

un contesto di scelta è detto strategico quando le conseguenze di un'azione per un agente dipendono non soltanto dalle azioni da lui compiute, ma anche dalle azioni compiute da altri agenti

il termine gioco è utilizzato per definire un generico contesto di scelta strategica

gioco cooperativo

i giocatori possono comunicare e stabilire accordi vincolanti prima di iniziare a giocare.

gioco non cooperativo

ai giocatori è preclusa tale possibilità

i giocatori scelgono le proprie strategie indipendentemente (non agiscono in modo concertato)

descrizione di un gioco non cooperativo

forma normale o strategica

forma estesa

la descrizione in forma normale è caratterizzata da tre elementi:

- 1) un insieme di giocatori $N = \{1, 2, \dots, n\}$
- 2) un insieme di strategie pure (spazio delle strategie pure) S_i a disposizione di ciascun giocatore $i \in N$

$s_i \in S_i$ indica una generica strategia pura

$S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ indica l'insieme di tutte le possibili combinazioni di strategie pure

$s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$ indica una generica combinazione di strategie pure

- 3) una funzione di payoff $u_i : S \rightarrow \mathcal{R}$ per ciascun giocatore $i \in N$

$u_i(s)$ è il payoff del giocatore i se i giocatori scelgono la combinazione di strategie $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$

dilemma del prigionero

rappresentazione con una bimatrice

	tacere	confessare
tacere	-1, -1	-9, 0
confessare	0, -9	-6, -6

$N = \{1, 2\}$ insieme di giocatori

$S_1 = S_2 = \{tacere, confessare\}$

insieme di strategie pure (spazio delle strategie pure) a disposizione di entrambi i giocatori

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} u_1(\text{tacere}, \text{tacere}) = -1 \\ u_1(\text{tacere}, \text{confessare}) = -9 \\ u_1(\text{confessare}, \text{tacere}) = 0 \\ u_1(\text{confessare}, \text{confessare}) = -6 \end{cases}$$

funzione di payoff del giocatore 1 (giocatore di riga)

$$u_2(s_1, s_2) = \begin{cases} u_2(\text{tacere}, \text{tacere}) = -1 \\ u_2(\text{tacere}, \text{confessare}) = 0 \\ u_2(\text{confessare}, \text{tacere}) = -9 \\ u_2(\text{confessare}, \text{confessare}) = -6 \end{cases}$$

funzione di payoff del giocatore 2 (giocatore di colonna)

duopolio di Cournot e Bertrand

$N = \{1, 2\}$ insieme di giocatori (imprese)

$S_1 = S_2 = [0, \infty)$ insieme di strategie pure a disposizione di entrambi i giocatori

Cournot: generica strategia $s_i \in S_i$ indica un livello di output $q_i \geq 0$

funzione di payoff del giocatore i :

$$u_i(s_1, s_2) = u_i(q_1, q_2) = q_i \cdot p(q_1, q_2) - c(q_i)$$

Bertrand: generica strategia $s_i \in S_i$ indica un livello di prezzo $p_i \geq 0$

funzione di payoff del giocatore i :

$$u_i(s_1, s_2) = u_i(p_1, p_2) = p_i \cdot q_i(p_1, p_2) - c(q_i(p_1, p_2))$$

dilemma del prigioniero
modelli di Cournot e Bertrand

giochi statici con informazione completa

i giocatori scelgono le loro strategie
"simultaneamente" (è sufficiente che ciascun
giocatore scelga la propria strategia
senza conoscere la scelta dell'altro)

importanza della struttura informativa del gioco

Definizione. Un gioco G è caratterizzato da
informazione completa se tutti i
giocatori conoscono gli elementi
che caratterizzano il gioco

$$N = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$$

$$u_i : S \rightarrow \mathcal{R} \quad \forall i \in N$$

informazione completa nel dilemma del prigioniero: entrambi i giocatori conoscono la (bi)matrice del gioco

	tacere	confessare
tacere	-1, -1	-9, 0
confessare	0, -9	-6, -6

Predizione sull'esito del gioco

Procedura risolutiva: eliminazione iterata di strategie strettamente dominate

Notazioni

$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ generica combinazione di strategie pure degli avversari di i

$S_{-i} = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$ insieme di tutte le possibili combinazioni di strategie pure degli avversari di i

$s = (s_i, s_{-i}) = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$ indica una generica combinazione di strategie pure

Definizione. Siano $\bar{s}_i \in S_i$ e $\hat{s}_i \in S_i$ due strategie ammissibili per il giocatore i . La strategia \bar{s}_i è strettamente dominata da \hat{s}_i se

$$u_i(\bar{s}_i, s_{-i}) < u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \text{ per ogni } s_{-i} \in S_{-i}$$

La strategia \bar{s}_i è debolmente dominata da \hat{s}_i se

$$u_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \leq u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \text{ per ogni } s_{-i} \in S_{-i} \text{ e vale la disuguaglianza stretta per almeno un } s_{-i} \in S_{-i}$$

La procedura della eliminazione iterata di strategie strettamente dominate è basata sulla considerazione che

giocatori razionali non scelgono
strategie strettamente dominate

nessuna credenza da parte di un giocatore, relativa alle scelte degli avversari, è tale da rendere una strategia dominata una scelta ottima

Esempio 1

	tacere	confessare
tacere	-1, -1	-9, 0
confessare	0, -9	-6, -6

Esempio 2

	sinistra	centro	destra
su	1, 0	1, 2	0, 1
giù	0, 3	0, 1	2, 0

Esempio 3

	a_2	b_2	
a_1	4, 4, 4	3, 5, 3	a_3
b_1	5, 3, 3	5, 4, 1	

	a_2	b_2	
a_1	3, 3, 5	1, 5, 4	b_3
b_1	4, 1, 5	2, 2, 2	

La procedura della eliminazione iterata di strategie strettamente dominate è basata sulla considerazione che:

giocatori "razionali" non scelgono
strategie strettamente dominate

nessuna credenza da parte di un giocatore,
relativa alle scelte degli avversari, è tale da
rendere una strategia dominata una scelta ottima

l'applicazione del procedimento per un numero
arbitrario di passi richiede la seguente

Assunzione: la "razionalità" dei giocatori è
conoscenza comune (*common knowledge*)

tutti i giocatori sono razionali;

tutti i giocatori sanno che tutti sono razionali;

tutti i giocatori sanno che tutti i giocatori
sanno che tutti sono razionali;

.....*ad infinitum*

Esempio 4

imprese sul lago

	D	N D
D	4, 4	2, 11
N D	11, 2	3, 3

Esempio 5

	sinistra	centro	destra
alto	0, 4	4, 0	5, 3
medio	4, 0	0, 4	5, 3
basso	3, 5	3, 5	6, 6

problema

molti giochi non sono risolvibili attraverso la procedura della eliminazione iterata di strategie strettamente dominate

non si ha una predizione accurata sull'esito del gioco

Esempio 5

	sinistra	centro	destra
alto	0, 4	4, 0	5, 3
medio	4, 0	0, 4	5, 3
basso	3, 5	3, 5	6, 6

non ci sono strategie dominate da eliminare

il procedimento non fornisce alcuna predizione sull'esito del gioco

motivazioni per introdurre un differente concetto di soluzione

concetto di soluzione in grado di fornire
predizioni più accurate sull'esito di una classe
molto ampia di giochi

Equilibrio di Nash

Definizione. Una combinazione di strategie

$$s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$$

è un equilibrio di Nash se

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

per ogni giocatore i e per ogni strategia
ammissibile $s_i \in S_i$

un equilibrio di Nash richiede che la strategia di
ogni giocatore i sia ottimale rispetto alle strategie
ottimali degli avversari

Equilibrio di Nash

risolve il problema: $\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*)$

per ogni giocatore i la strategia s_i^* è la migliore risposta del giocatore i alle strategie prescritte per gli altri $n-1$ giocatori

nessun giocatore, preso singolarmente, desidera deviare dalla strategia prescritta

l'equilibrio di Nash è una predizione sull'esito del gioco strategicamente stabile o autovincolante
(self-enforcing)

Equilibrio di Nash

Prop. se l'eliminazione iterata di strategie strettamente dominate rimuove tutte le strategie tranne $s' = (s'_i, s'_{-i})$, allora queste strategie sono l'unico equilibrio di Nash

$$s' = (s'_i, s'_{-i}) = s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$$

Prop. le strategie corrispondenti ad un equilibrio di Nash sopravvivono alla eliminazione iterata di strategie strettamente dominate, ma non è vero il contrario

non è detto che una strategia che sopravvive alla eliminazione iterata di strategie strettamente dominate faccia parte di un equilibrio di Nash

Esempio 5

	sinistra	centro	destra
alto	0, 4	4, 0	5, 3
medio	4, 0	0, 4	5, 3
basso	3, 5	3, 5	6, 6

non ci sono strategie dominate da eliminare

per determinare l'equilibrio di Nash si procede per ispezione

si "marcano" le strategie pure di ciascun giocatore che sono risposte ottime alle strategie pure dell'avversario sottolineando il payoff corrispondente

se in una casella risultano sottolineati entrambi i payoff, allora è stata individuata una combinazione di strategie caratterizzata dal fatto che ciascuna è la risposta ottima all'altra (equilibrio di Nash)

osservazione

tutte le strategia sopravvivono alla eliminazione iterata di strategie strettamente dominate, ma solo la combinazione (basso, destra) soddisfa le seguenti condizioni:

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*)$$

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2)$$

Prop. se l'eliminazione iterata di strategie strettamente dominate rimuove tutte le strategie tranne $s' = (s'_i, s'_{-i})$, allora queste strategie sono l'unico equilibrio di Nash

$$s' = (s'_i, s'_{-i}) = s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$$

Esempio 2

	sinistra	centro	destra
su	1, 0	1, 2	0, 1
giù	0, 3	0, 1	2, 0

Esempio 6

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0, 3	2, 2	1, 3	1, 0
a_2	2, 1	3, 1	2, 3	2, 1
a_3	5, 1	1, 4	1, 0	2, 2
a_4	1, 0	0, 2	0, 2	3, 1

Esempio 7 (Battaglia dei sessi)

entrambi i giocatori desiderano trascorrere la serata insieme piuttosto che da soli, tuttavia "lui" preferisce la partita mentre "lei" preferisce il balletto

ciascun giocatore consegue:

un payoff pari a 2 se entrambi vanno allo spettacolo da lui/lei preferito

un payoff pari a 1 se entrambi vanno allo spettacolo preferito dall'altro

un payoff pari a 0 se ognuno trascorre la serata da solo

(Battaglia dei sessi)

	partita	balletto
partita	2, 1	0, 0
balletto	0, 0	1, 2

MORRA CINESE

esistenza dell'equilibrio di Nash

teorema. (Nash, 1950) Ogni gioco finito ammette almeno un equilibrio di Nash (eventualmente in strategie miste)

def. Un gioco è finito se il numero dei giocatori e quello delle strategie pure è finito.
Altrimenti è infinito

def. Sia $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{ik}\}$ l'insieme delle k strategie pure disponibili per il giocatore i . Una strategia mista per il giocatore i è una distribuzione di probabilità $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ik})$, con $0 \leq p_{ij} \leq 1$, $j=1, 2, \dots, k$, e $p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{ik} = 1$

teorema. (Glicksberg, 1952; Debreu, 1952)

Un gioco per il quale valgano le seguenti ipotesi:

- il numero dei giocatori è finito
- S_i è un sottoinsieme compatto e convesso di uno spazio euclideo per ogni giocatore $i \in N$
- u_i è una funzione continua in $s \in S$ per ogni $i \in N$

ammette almeno un equilibrio di Nash.

Se inoltre u_i è una funzione quasi-concava in s_i per ogni $i \in N$, allora ammette almeno un equilibrio di Nash in strategie pure.

Esempi: duopolio di Cournot

 duopolio di Bertrand

giochi dinamici con informazione completa

le scelte dei giocatori vengono effettuate secondo una certa sequenza temporale

l'informazione che ciascun giocatore possiede quando è il suo turno di scelta è un elemento costitutivo del gioco e svolge un ruolo cruciale nella determinazione della soluzione

problema centrale: credibilità

descrizione di un gioco non cooperativo

forma normale o strategica

forma estesa

per i giochi dinamici viene spesso utilizzata la forma estesa

la descrizione in forma estesa specifica i seguenti elementi:

- 1) un insieme di giocatori $N = \{1, 2, \dots, n\}$
- 2) l'ordine delle mosse del gioco (chi muove e quando)
 - albero del gioco costituito da un insieme ordinato di nodi dotati di una relazione di precedenza
 - attribuzione dei nodi ai giocatori che specifica a chi è intestato ciascun nodo

Z insieme dei nodi terminali (nodi senza successori)

- 3) le informazioni disponibili per ciascun giocatore $i \in N$ ogni volta che ha diritto alla mossa
 - D_i classe degli insiemi di informazione del giocatore i (partizione dell'insieme dei nodi attribuiti ad i)
 - $d_i \in D_i$ generico insieme di informazione del giocatore i

- 4) le scelte disponibili per ciascun giocatore $i \in N$ ogni volta che ha diritto alla mossa

$A_i(d_i)$ insieme di azioni o mosse ammissibili per il giocatore i in tutti i nodi non terminali dell'albero che appartengono a d_i

$a_i \in A_i(d_i)$ generica azione ammissibile per il giocatore i

- 5) i payoff conseguiti da ciascun giocatore in corrispondenza di ogni combinazione di mosse che può essere scelta dai giocatori

una funzione di payoff $u_i : Z \rightarrow \mathcal{R}$ per ciascun giocatore $i \in N$

$u_i(z)$ è il payoff ottenuto dal giocatore i se viene raggiunto il nodo terminale $z \in Z$

Def. Una strategia di un giocatore è un piano completo di azione (specifica un'azione ammissibile del giocatore per ciascuna circostanza in cui il giocatore può essere chiamato ad agire)

Esempio 8

Nel primo stadio il giocatore 1 sceglie un'azione a_1 dall'insieme ammissibile $A_1 = \{\textit{sinistra}, \textit{destra}\}$

Nel secondo stadio il giocatore 2 sceglie un'azione a_2 dall'insieme ammissibile $A_2 = \{\textit{sinistra}, \textit{destra}\}$

I payoff conseguiti da ciascun giocatore sono indicati in corrispondenza dei nodi terminali dell'albero del gioco (in corrispondenza di ogni combinazione di mosse che può essere scelta dai giocatori)

forma estesa

forma normale

Def. Un'insieme di informazione del giocatore i , $d_i \in D_i$, è un insieme di nodi decisionali che soddisfano le seguenti condizioni:

- in corrispondenza di ogni nodo dell'insieme informativo il giocatore i ha diritto alla mossa
- quando lo svolgimento del gioco raggiunge un nodo dell'insieme informativo, il giocatore i non sa quale nodo dell'insieme informativo è stato raggiunto.

osservazione

in ogni nodo decisionale appartenente ad un insieme informativo, il giocatore deve avere lo stesso insieme di azioni ammissibili, $A_i(d_i)$, altrimenti sarebbe in grado di capire quale nodo dell'insieme informativo è stato raggiunto.

Esempio

Dilemma del prigioniero in forma estesa

Def. Un gioco G è caratterizzato da informazione perfetta se ogni insieme di informazione è costituito da un singolo nodo

Def. Un gioco G è caratterizzato da informazione imperfetta se vi è almeno un insieme di informazione composto da più di un nodo

giochi dinamici con informazione
completa e perfetta

Esempio: modello di Stackelberg

giochi dinamici con informazione
completa e imperfetta

Esempio: dilemma del prigioniero ripetuto

una predizione sull'esito del gioco richiede la nozione di sottogioco

definizione

Un sottogioco di un gioco in forma estesa è un sottoinsieme dei nodi dell'albero che:

comincia da un nodo decisionale che appartiene ad un insieme informativo di cui è l'unico elemento

comprende tutti i nodi decisionali e terminali successivi (ma nessun nodo che non sia successivo)

mantiene la stessa struttura di insiemi di informazione del gioco a cui si riferisce (non spezza alcun insieme informativo)

un sottogioco si dice proprio se non coincide con il gioco a cui si riferisce

Def. (Selten, 1965) Un equilibrio di Nash è perfetto nei sottogiochi se le strategie dei giocatori costituiscono un'equilibrio di Nash in ogni sottogioco

un equilibrio perfetto nei sottogiochi aggiunge alla nozione di equilibrio di Nash il requisito che la strategia di ogni giocatore i sia ottimale rispetto a ciò che fanno gli altri anche in ogni sottogioco proprio

Procedura risolutiva: backwards induction
(induzione a ritroso)

In un gioco con informazione completa e perfetta la procedura di backwards induction elimina le minacce non credibili

Esempio 8

Altri esempi

- modello di Stackelberg

- giochi ripetuti

- collusione tacita

strategia trigger

Def. Dato il fattore di sconto α , il payoff medio della sequenza infinita di payoff $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ è

$$(1-\alpha) \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^{t-1} \pi_t$$

folk theorem

Teorema. (Friedman, 1971) Sia G un gioco finito, statico, e con informazione completa. Si indichi con (e_1, e_2, \dots, e_n) il vettore dei payoff corrispondenti a un equilibrio di Nash di G e con (x_1, x_2, \dots, x_n) qualsiasi altro vettore di payoff ammissibili di G . Se $x_i > e_i$ per ogni giocatore i e se α è sufficientemente prossimo a uno, allora esiste un equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi del gioco ripetuto infinitamente $G(\infty, \alpha)$ che consente di ottenere il vettore (x_1, x_2, \dots, x_n) come payoff medio

Bibliografia

R. Gibbons, *Teoria dei giochi*, Il Mulino, 1994

M. Li Calzi, *Teoria dei giochi*, Etas Libri, 1995

D. Fudenberg and J. Tirole, *Game Theory*, MIT Press, 1991

J. W. Friedman, *Game Theory with Applications to Economics*, Oxford University Press, 1990