`Economia degli investimenti`
`Esercizio II Soluzione degli esercizi` A, B e C: `riassunto dei punti principali`

(NB: Le soluzioni possono essere viziate da errori di battitura: in caso di dubbio contattatemi per email: deidda@uniss.it)

A. **Irrilevanza della politica dei dividendi**

Considerate un'impresa che vive N periodi. Il tempo è una variabile discreta: $t = 0, 1, 2, ..., N$. In ogni periodo t, l'impresa:

i. Genera un rendimento complessivo R_t;

ii. Corrisponde un dividendo d_t per azione, immette sul mercato un numero di azioni pari a $n_t - n_{t-1}$ dove n_{t-1} è il numero di azioni nel periodo precedente, e n_{t-1}, è il numero di azioni nel periodo t,

iii. effettua un investimento I_t.

a. Scrivete il vincolo di bilancio tra fonti e impieghi di risorse finanziarie riferito ad un generico periodo t;

b. Ipotizzando che il mercato dei capitali (mercato azionario) sia perfettamente efficiente, scrivete la relazione tra prezzo dell'azione al tempo t e prezzo al tempo $t + 1$ (assumete che il fattore di sconto intertemporale sia pari a β)

c. Utilizzate i risultati di cui al punto a e b per dimostrare le seguenti relazioni:

$$V_0 = \beta(R_1 - I_1) + \beta V_1 \tag{1}$$
$$V_0 = \beta(R_1 - I_1) + \beta^2(R_2 - I_2) + \beta^2 V_2 \tag{2}$$
$$V_0 = \beta(R_1 - I_1) + \beta^2(R_2 - I_2) + \beta^3(R_3 - I_3) + \beta^3 V_3 \tag{3}$$

dove ''V"' sta per (V)alore dell'impresa.

d. Utilizzate i risultati di cui al punto c per spiegare questa relazione

$$V_0 = \sum_{t=1}^{T} \beta^t (R_t - I_t) + \beta^T V_T \tag{4}$$

e calcolate il valore dell'impresa nel caso in cui l'impresa viva all'infinito. In quest'ultimo caso, potete dire che il valore dell'impresa non dipende dalla politica dei dividendi?

Soluzione

a.

$$R_t + (n_t - n_{t-1})P_t = d_t n_{t-1} + I_t \tag{5}$$

b.

$$P_t = \beta P_{t+1} + \beta d_{t+1} \tag{6}$$

cosicchè, $P_0 = \beta P_1 + \beta d_1$

c. Riscriviamo il vincolo di bilancio relativo ai periodi 0 e 1:

$$R_1 - I_1 + n_1 P_1 = d_1 n_0 + n_0 P_1 \tag{7}$$

Ricordiamoci che il valore dell'impresa al tempo t è $V_t = n_t P_t$, cosicchè $V_0 = n_0 P_0$ e $V_1 = n_1 P_1$. Dunque,

$$R_1 - I_1 + \overbrace{n_1 P_1}^{V_1} = d_1 n_0 + n_0 P_1 \tag{8}$$

Utilizzando,$P_0 = \beta P_1 + \beta d_1$ il valore dell'impresa al tempo zero può essere riscritto come:

$$V_0 = n_0 P_0 = \beta(P_1 n_0 + n_0 d_1) \tag{9}$$

Utilizzando il membro di destra dell'equazione (8) possiamo riscrivere (9):

$$V_0 = \beta(\overbrace{P_1 n_0 + \beta d_1}^{R_1 - I_1 + V_1}) = \beta(R_1 - I_1) + \beta V_1 \tag{10}$$

$$\mathit{ovvero} \tag{11}$$

$$V_0 = \beta(R_1 - I_1) + \beta V_1 \tag{12}$$

Si può usare il risultato appena ottenuto per scrivere:

$$V_1 = \beta(R_2 - I_2) + \beta V_2 \tag{13}$$

Utilizzando questa relazione per sostituire il valore di V_1 nell'equazione (12) otteniamo:

$$V_0 = \beta(R_1 - I_1) + \beta^2(R_2 - I_2) + \beta^2 V_2 \tag{14}$$

Utilizzando l'equazione (12) oppure (13) possiamo scrivere:

$$V_2 = \beta(R_3 - I_3) + \beta V_3 \tag{15}$$

Possiamo infine utilizzare questo risultato per sostituire il valore di V_2 nell'equazione (14)

$$V_0 = \beta(R_1 - I_1) + \beta^2(R_2 - I_2) + \beta^3(R_3 - I_3) + \beta^3 V_3 \tag{16}$$

d. Per iterazione, ripetendo T volte, per T periodi, otteniamo

$$V_0 = \sum_{t=1}^{T} \beta^t (R_t - I_t) + \beta^T V_T \tag{17}$$

Nel caso di un'impresa che vive per infiniti periodi, il valore, V_0 sarà:

$$\lim_{T\to\infty} V_0 = \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} \beta^t (R_t - I_t) + \lim_{T\to\infty} \beta^T V_T \tag{18}$$

Se V_T è una quantità finita, il che è plausibile, abbiamo che, dato $\beta < 1$,

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T V_T = 0 \tag{19}$$

Cosicchè:

$$\lim_{T\to\infty} V_0 = \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} \beta^t (R_t - I_t) \tag{20}$$

che non dipende dalla politica dei dividendi.

B. **Irrilevanza della struttura del capitale**

Ipotizzate il caso di un'impresa che vive due periodi, zero e 1, e alla fine del periodo 1 genera un rendimento complessivo pari ad R (R può essere interpretato come il valore dell'impresa al periodo 1). Tale rendimento è, ex ante, incerto e dipende dall'esito favorevole (evento H) o sfavorevole (evento L) dell'investimento. In particolare, la variabile casuale R ha due possibili realizzazioni, R_L e R_H , dove $R_L < R_H$. R_L si verifica con probabilità p_L mentre R_H si verifica con probabilità p_H. Assumete che la struttura finanziaria dell'impresa sia tale che D è il valore del debito al tempo 1, dove D è compreso tra R_L e R_H ovvero, $D > R_L$ e $D < R_H$.

a. Dato che R_L e R_H sono eventi mutuamente esclusivi, e sono i due soli eventi possibili, qual' è la relazione tra p_L e p_H ?

b. Scrivete le espressioni generali del rendimento associato al capitale di rischio, R_E e di credito, R_D, in termini di R.

c. Scrivete le espressioni del rendimento atteso associato al capitale di rischio e di credito come somma di due aspettative condizionate: la prima condizionata all'evento H e la seconda all'evento L.

d. Utilizzate le risposte di cui ai punti precedenti per dimostrare che il valore atteso dell'impresa non dipende dalla struttura finanziaria della stessa.

Soluzione

a. $p_L + p_H = 1$

b. Scrivete le espressioni generali del rendimento associato al capitale di rischio, R_E e di credito, R_D, in termini di R.

$$R_E = \max(R - D, 0) \tag{21}$$
$$R_D = \min(R, D) \tag{22}$$

c. Dobbiamo tener conto del fatto che nel caso in cui si verifichi l'evento H, $R_E|H = \max(R_H - R_D, 0) = R_H - R_D$, dato che $R_H > R_D$, ovvero $R_E|H = R_H - R_D$. Notate che, in termini di notazione $R_E|H$ vuol dire, R_E condizionato all'evento H. Allo stesso modo, condizionando rispetto all'evento L, $R_E|L = \max(R_L - R_D, 0) = 0$, dato che $R_L < R_D$. In maniera simile, per quanto riguarda R_D avremo: $R_D|L = \min(R_L, D) = R_L$, dato che $D > R_L$ per ipotesi e $R_D|H = \min(R_H, D) = D$ dato che, sempre per ipotesi, $R_H > D$. Ciò dato possiamo scrivere

$$E(R_E) = p_H E(R_E|H) + p_L E(R_E|L) = p_H(\overbrace{R_H - R_D}^{R_E|H}) + p_L \times \overbrace{0}^{R_E|L} = (R_H - D)p_H$$
$$E(R_D) = p_H E(R_D|H) + p_L E(R_D|L) = p_H \overbrace{D}^{R_D|H} + p_L \overbrace{R_L}^{R_D|L} = Dp_H + p_L R_L$$

d. Il rendimento complessivo dell'impresa si può scrivere come:

$$E(R) = E(R_E) + E(R_D) = (R_H - D)p_H + Dp_H + p_L R_L = R_H p_H + R_L p_L \tag{23}$$

Notate che il rendimento atteso dell'impresa così determinato non dipende dal valore del debito D, ovvero non dipende dalla struttura finanziaria.

C. **Teorema di separazione di Fisher**

a Considerate il caso di un individuo che:

1. Abbia una dotazione di reddito pari a 10 nel periodo zero;
2. Abbia accesso ad una tecnologia di investimento produttivo caratterizzata da rendimenti decrescenti di scala. Ipotizzate che, nel caso in cui l'individuo investa tutta la dotazione di reddito il rendimento complessivo sia 12.
   Disegnate la frontiera delle possibilità produttive ed analizzate graficamente il problema riguardante la decisione ottima

d'investimento assumendo la possibilità di prendere/dare a prestito nel mercato dei capitali ad un tasso del 5%. Spiegate quale sarà la scelta ottima operata dall'individuo, quale sarà il valore del rendimento marginale dell'investimento ad essa associato, e la strategia di finanziamento adottata.

b. Data la risposta al questito a, analizzate graficamente gli effetti di un aumento del tasso di interesse dal 5% al %6 sulla scelta ottima di investimento.

c. Spiegate, attraverso l'analisi grafica, se il teorema di separazione di Fisher resta valido in presenza di costi di transazione.

Soluzione

a. La risposta è illustrata in figura 1 (vedi terzultima pagina).

Curva delle possibilità produttive:

semplicemente, dobbiamo tracciare una curva che passa per i punti di coordinate (C_0, C_1) pari a $(0, 12)$ e $(10, 0)$. La curva deve essere concava data l'ipotesi di rendimenti marginali decrescenti.

Scelta ottimale di investimento in presenza del mercato dei capitali:

Se l'individuo scegliesse di consumare tutta la dotazione di reddito disponibile al tempo zero, pari a 10, la sua utilità sarebbe descritta dalla curva di indifferenza U_1. Questa scelta non è ottima. La scelta ottima consiste nell'investire un ammontare pari a $I_p = y_0^P - y_0$ per produrre y_1^p. Una volta fatto ciò prendendo o dando a prestito l'individuo potrà scegliere la combinazione di consumo al tempo zero e al tempo 1, (C_0, C_1), che massimizza il suo benessere (utilità) tra tutte le combinazioni che soddisfano il vincolo di bilancio (*capital market line*) dato dalla possibilità di prendere a prestito o dare a prestito al tasso del 5% ovvero tra tutte quelle combinazioni che soddisfano:

$$C_0 + \frac{C1}{1 + 0.05} = y_0^P + \frac{y_1^P}{1 + r} \tag{24}$$

La combinazione ottima sarà data dalla combinazione $(C_0^{E_1}, C_1^{E_1})$ che corrisponde al punto di tangenza (E_1) tra la curva di indifferenza U_2 e la *capital market line*.

b. La soluzione è descritta in figura 2 (penultima pagina). Un aumento del tasso di interesse equivale ad un aumento del costo (opportunità) di investire. Di conseguenza, la scelta ottima dell'individuo sarà di investire meno. Il nuovo livello di investimenti ottimale sarà $I^{P'} = y_o^{P'} - y_0$, dove $I^{P'}$ è minore di $I_P = y_0^P - y_0$, cosicchè anche il reddito prodotto nel periodo 1, $y_1^{P'}$ sarà minore. L'individuo sceglierà poi la combinazione C_0, C_1 lungo la nuova "capital market line". La nuova combinazione ottimale è quella associata al punto di tangenza E_2. L'utilità ottima raggiunta dall'individuo sarà ovviamente più bassa (la curva di indifferenza U_2 si colloca a sud-ovest della curva di utilità U_1 che descrive l'utilità ottimale raggiungibile prima dell'aumento del tasso di interesse (in quel caso il punto di tangenza che descrive la combinazione ottimale prima del cambio di interesse è il punto E_1).

c. La soluzione è descritta in figura 3 (ultima pagina). Per capire la soluzione di quest'esercizio fino in fondo, leggete il capitolo 2 del libro "Financial Theory and Corporate Policy"' di Copeland e Weston (fotocopie disponibili presso i tutor di economia).

   Assumiamo un costo di transazione c per unità di risorse finanziarie scambiate. Assumiamo altresì che il mercato dei mezzi finanziari sia competitivo. Date queste assunzioni dato un tasso passivo (sui prestiti) lordo r_L il tasso netto attivo sarà

$$r_D = \frac{r_L}{1+c} \tag{25}$$

   ovvero

$$r_L = (1+c)r_D \tag{26}$$

   La differenza tra tassi attivi r_D e passivi r_L è lo spread associato ai costi di transazione. Se ad esempio interpretate le banche come intermediari finanziari che minimizzano i costi di transazione allora, posto che il mercato dei servizi bancari sia perfettamente competitivo, r_D sarebbe il tasso sui depositi bancari e r_L il tasso sugli impieghi (prestiti). Notate che questa struttura dei tassi implica un profitto netto per unità di mezzi finanziari intermediati pari a $r_L - (1+c)r_D$ cioè pari a zero; il che è compatibile con l'ipotesi che il mercato dei servizi bancari sia competitivo. Ciò dato, il rendimento di un prestatore di fondi (depositante) sarà r_D mentre il costo del finanziamento per un prenditore di fondi sarà r_L.

   In questo contesto, un individuo-impresa che, preferendo anticipare i consumi piuttosto che posticiparli, prende a prestito, si confronta con un tasso di interesse passivo più elevato, in valore assoluto (e dunque con una capital market line più inclinata) rispetto al tasso attivo che ottiene un individuo che preferisce posticipare i consumi e dunque si comporta da depositante-prestatore di fondi. La prima tipologia di individui, cui appartiene l'individuo B in figura 3, a parità di altre condizioni, troverà conveniente investire meno della seconda categoria di individui, cui appartiene l'individuo A.

L'individuo di tipo B sceglie di investire I^B. Ciò gli consente di produrre y_1^B nel periodo 1, mentre il suo reddito residuo nel periodo zero sarà y_0^B. L'individuo sceglierà poi la combinazione ottima (C_0^B, C_1^B),(punto di tangenza E_B), lungo la market line:

$$C_0 + \frac{C_1}{1 + r_L} = y_0 + \frac{y_1}{1 + r_L} \tag{27}$$

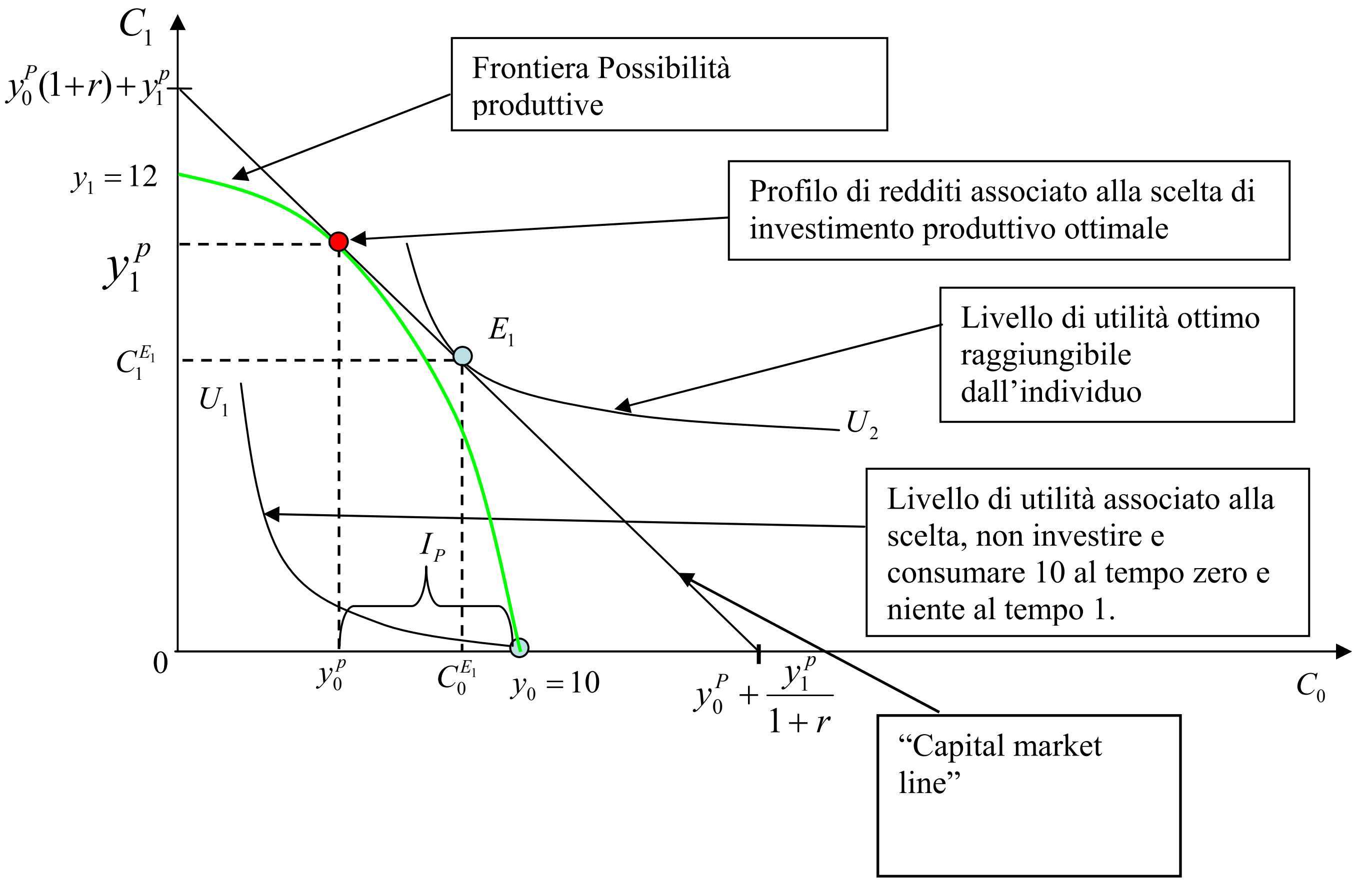
Notare che tale market line vale solo se l'individuo prende a prestito.

Veniamo invece all'individuo prestatore di fondi, ovvero all'individuo A. Quest'individuo sceglie di investire I^A dove $I^A > I^B$. Ciò gli consente di produrre y_1^A nel periodo 1, mentre il suo reddito residuo nel periodo zero sarà y_0^A. L'individuo sceglierà poi la combinazione ottima (C_0^A, C_1^A), (punto di tangenza E_A) lungo la market line:

$$C_0(1 + r_D) + C_1 = y_0(1 + r_D) + y_1 \tag{28}$$

Notare che tale market line vale solo se l'individuo è prestatore di fondi.

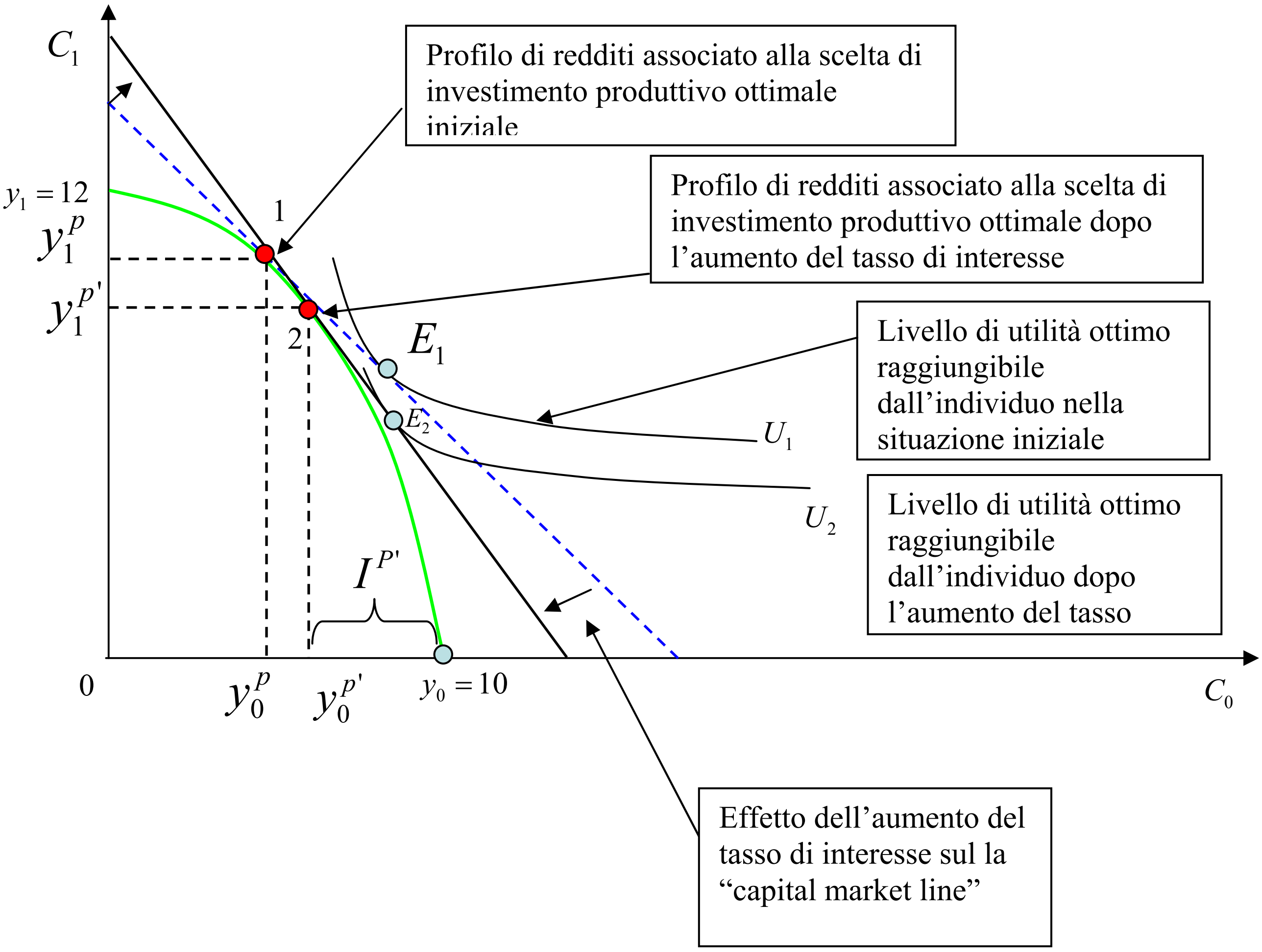
Ciò ci porta a concludere che in presenza di costi di transazione, le scelte ottime di investimento dipendere nuovamente dalle preferenze degli individui. In generale, la separazione tra proprietà e controllo non è più valida. In particolare smette di essere valida laddove i proprietari hanno preferenze così diverse dai controllori delle decisioni di investimento che mentre i primi si comportano da datori di fondi i secondi si comportano da prenditori di fondi o viceversa i primi si comportano da prenditori ed i secondi da datori...



C_1
$y_0^P(1+r)+y_1^p$
$y_1 = 12$
y_1^p
$C_1^{E_1}$
U_1
E_1
U_2
I_P
0
y_0^p
$C_0^{E_1}$
$y_0 = 10$
$y_0^P + \frac{y_1^p}{1+r}$
C_0
Frontiera Possibilità produttive
Profilo di redditi associato alla scelta di investimento produttivo ottimale
Livello di utilità ottimo raggiungibile dall'individuo
Livello di utilità associato alla scelta, non investire e consumare 10 al tempo zero e niente al tempo 1.
"Capital market line"

Figura 1

1



C_1
Profilo di redditi associato alla scelta di investimento produttivo ottimale iniziale
Profilo di redditi associato alla scelta di investimento produttivo ottimale dopo l'aumento del tasso di interesse
$y_1 = 12$
y_1^p
$y_1^{p'}$
1
2
E_1
E_2
Livello di utilità ottimo raggiungibile dall'individuo nella situazione iniziale
U_1
U_2
Livello di utilità ottimo raggiungibile dall'individuo dopo l'aumento del tasso
$I^{P'}$
0
y_0^p
$y_0^{p'}$
$y_0 = 10$
C_0
Effetto dell'aumento del tasso di interesse sul la "capital market line"

Figura 2

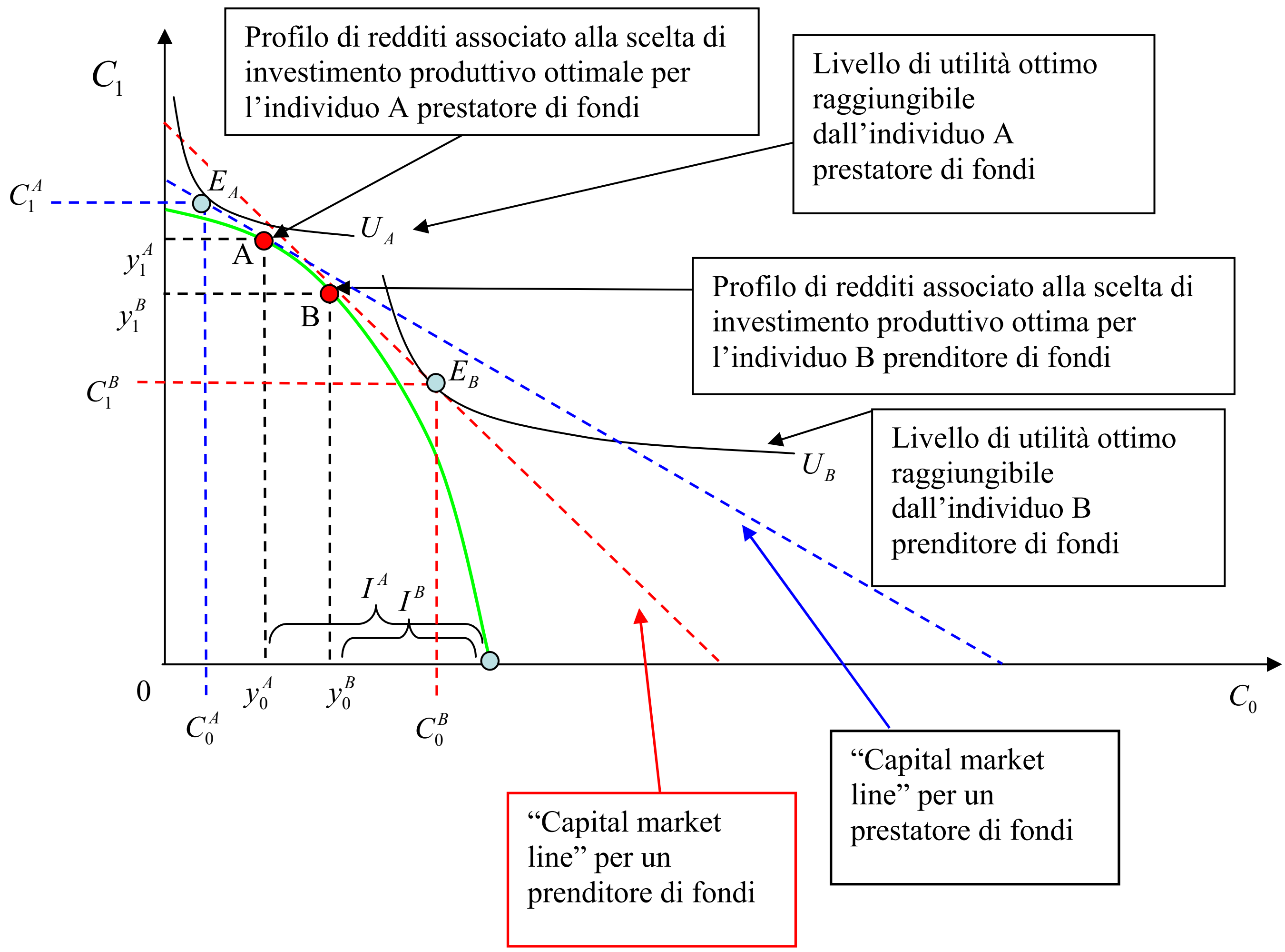

Profilo di redditi associato alla scelta di investimento produttivo ottimale per l'individuo A prestatore di fondi
Livello di utilità ottimo raggiungibile dall'individuo A prestatore di fondi
Profilo di redditi associato alla scelta di investimento produttivo ottima per l'individuo B prenditore di fondi
Livello di utilità ottimo raggiungibile dall'individuo B prenditore di fondi
"Capital market line" per un prestatore di fondi
"Capital market line" per un prenditore di fondi
C_1
C_0
0
C_1^A
y_1^A
y_1^B
C_1^B
E_A
E_B
U_A
U_B
A
B
I^A
I^B
C_0^A
y_0^A
y_0^B
C_0^B

Figura 3