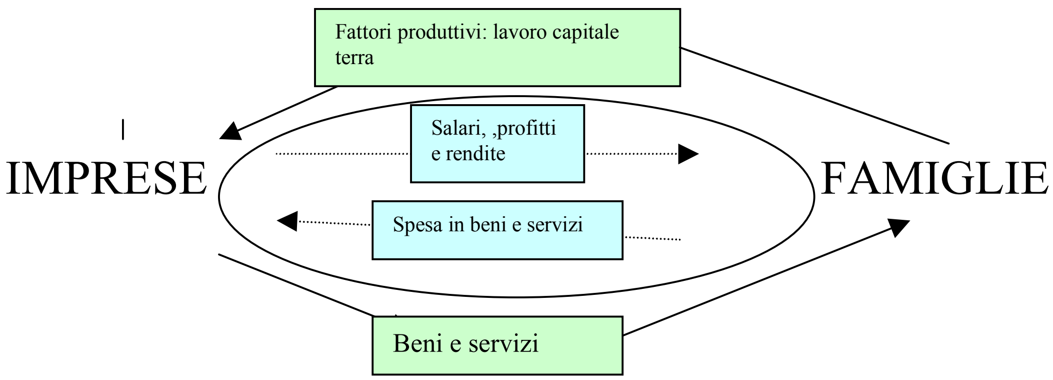
INTRODUZIONE

L'economia politica è la scienza che si occupa della allocazione di **risorse scarse** , cioè delle risorse economiche (per le quali l'offerta è limitata rispetto alla domanda potenziale) per la produzione di **beni**, destinati a soddisfare **bisogni** umani (primari o secondari).
Alla base dell'economia vi è lo studio del **mercato** , che con il suo **sistema di prezzi** segnala alle imprese **cosa e come** produrre.
Lo studio dell'economia si divide in due grandi settori la MICROECONOMIA, che studia il comportamento delle unità economiche elementari come le famiglie e le imprese, e la MACROECONOMIA che si occupa dello studio delle grandezze aggregate.

Nel nostro studio partiremo dalla descrizione del flusso circolare dell'attività economica



Metodo dell'economia politica

L'economia politica fa uso di modelli dei fenomeni sociali (che sono una rappresentazione semplificata della realtà e delle teorie) ove compaiono variabili endogene (che dipendono dal valore delle altre variabili incluse nel modello e variabili esogene, il cui valore non dipende da altre variabili incluse nel modello**)**

Essa applica il **principio dell'ottimizzazione** e il **principio dell'equilibrio**

Strumenti dell'economia politica

L'economia politica fa uso di relazioni funzionali per descrivere il comportamento delle variabili oggetto di studio.

Per esempio dall'osservazione della realtà possiamo formulare la legge di domanda che individua l'esistenza di un relazione decrescente tra la quantità domandata di un bene (le arance) da parte di un consumatore ed il loro prezzo. Il prezzo P è il prezzo massimo che il consumatore è disposto a pagare per una data quantità di arance.

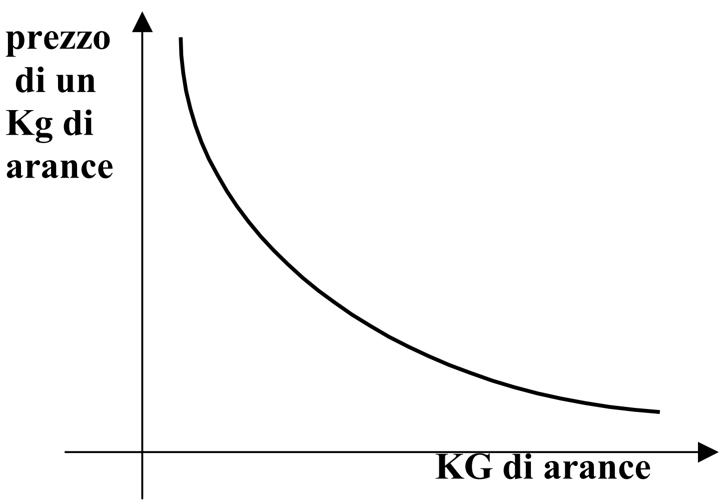
I consumatori e le imprese si incontrano sul **mercato**, che è il luogo dove i primi desiderano acquistare i beni e le seconde desiderano venderli.

Vi sarà quindi una domanda di beni da parte dei consumatori e un'offerta degli stessi da parte delle imprese.

Le quantità che un individuo domanda in corrispondenza dei diversi prezzi costituiscono la **scheda di domanda individuale**.

Le quantità che tutti gli acquirenti domandano in corrispondenza dei diversi prezzi costituiscono la **scheda di domanda collettiva** o **di mercato**.

La **curva di domanda individuale di arance** sarà:



Poiché la domanda collettiva è data dalla somma delle domande individuali, anche la domanda collettiva è funzione decrescente del prezzo.

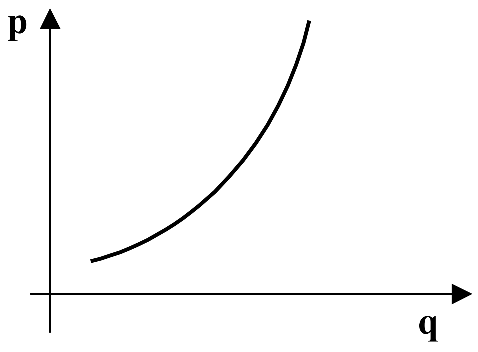
Per ogni dato prezzo sommiamo le quantità domandate da tutti gli individui, e così dalle curve di domanda individuali otteniamo la **curva di domanda collettiva** o **di mercato**. Essa rappresenta la relazione tra la quantità domandata di un bene da tutti gli individui e il suo prezzo.

RELAZIONE FUNZIONALE $q^{d}_{arance} = f(p_{arance})$	SEGNO DELLA RELAZIONE $\partial q^{d} / \partial p < 0$

Come i consumatori desiderano acquistare i beni, così le imprese desiderano venderli.

Le quantità che un venditore offre in corrispondenza dei diversi prezzi costituiscono la **scheda di offerta individuale**.

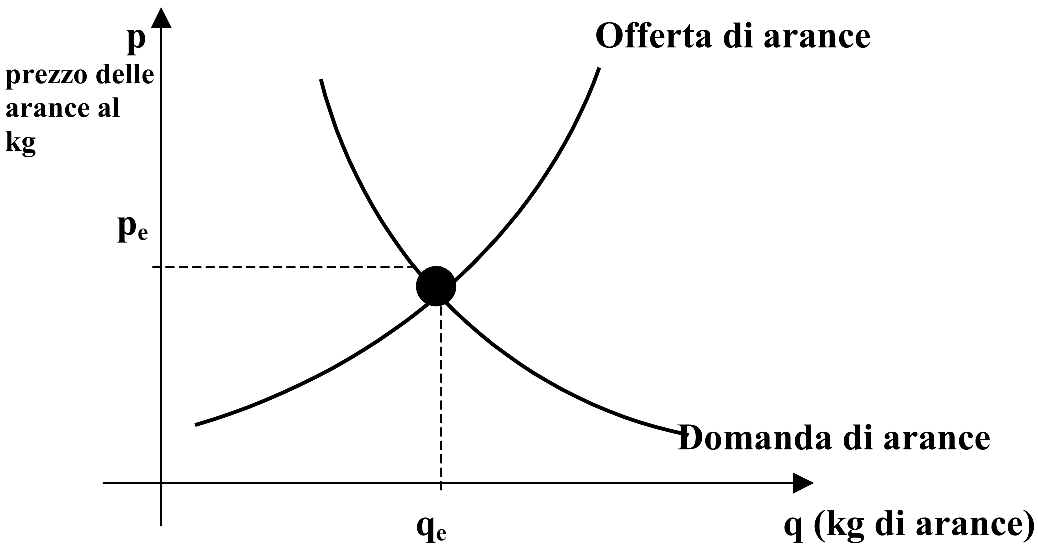
Le quantità che tutti i venditori offrono in corrispondenza dei diversi prezzi costituiscono la **scheda di offerta collettiva** o **di mercato**.
Generalmente, ad un dato prezzo ogni venditore offre (cioè è disposto a vendere) una diversa quantità del bene.
Vi è, però, un **elemento comune** nel comportamento dei venditori: ognuno di essi, man mano che il prezzo di un bene aumenta, è disposto a venderne una quantità maggiore.
Quindi l'offerta individuale di un bene (le arance) varia nello stesso senso del prezzo, ovvero è funzione crescente (ossia diretta) del prezzo.
L'offerta collettiva è data dalla somma delle offerte individuali, e quindi anche l'offerta collettiva è funzione crescente del prezzo.
Sia la curva di offerta individuale sia la curva di offerta di mercato possono essere rappresentate graficamente.
La **curva di offerta individuale** o **dell'impresa** sarà:



La **curva di offerta di mercato,** costruita sommando le quantità del bene considerato che le diverse imprese sono disposte ad offrire in corrispondenza di ogni singolo prezzo, è anch'essa crescente

L’EQUILIBRIO DEL MERCATO

Rappresentiamo su uno stesso piano cartesiano la curva di domanda di mercato e la curva di offerta di mercato relative alle arance:



L’unico prezzo in corrispondenza del quale quantità domandata e offerta (di arance) sono eguali è chiamato **prezzo di equilibrio** (p_e).
La quantità (domandata e offerta) corrispondente al prezzo di equilibrio è chiamata **quantità di equilibrio** (q_e). Il prezzo di equilibrio p_e è quel prezzo che rende uguali la quantità domandata e la quantità offerta di un bene ($q_{dom.} = q_{off.} = q_e$): esso realizza l’**equilibrio del mercato**. Lo spostamento di una o di entrambe le curve determina un nuovo prezzo di equilibrio.

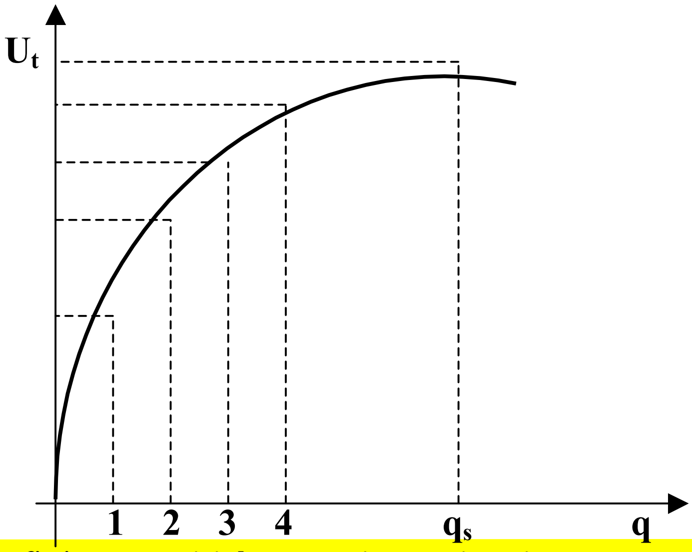
Tutte queste relazioni che sono state identificate osservando la realtà verranno poi derivate (dedotte) da ipotesi sul comportamento degli operatori, applicando il principio dell’ottimizzazione e dell’equilibrio.
Così avremo la teoria del consumatore, dalla quale deriveremo la domanda di beni e l’offerta di fattori produttivi e la teoria dell’impresa, dalla quale deriveremo la domanda di fattori produttivi e l’offerta di beni (v. flusso circolare del reddito).

LA FUNZIONE DI UTILITA' CARDINALE

La funzione di utilità cardinale, che nella teoria classica delle preferenze veniva posta alla base della descrizione del comportamento decisionale di un soggetto economico, conserva buone capacità esplicative a fini didattici anche se, come vedremo, è stata superata dall'approccio assiomatico.
Alla base di questo indirizzo vi è la convinzione che il consumo dei beni e dei servizi dia alla persona una sensazione di piacere o di soddisfazione che può essere misurata mediante un indice numerico chiamato utilità. Il fatto di parlare della soddisfazione di un individuo come di un'entità misurabile è stata, infatti, per lungo tempo l'impostazione degli economisti ed in particolare della scuola inglese dell'Ottocento, che, seguendo la tradizione della filosofia morale, considerava la soddisfazione psichica come un'entità misurabile. L'**utilità** di un individuo è **il piacere che egli ricava dal consumo dei beni e servizi**, ovvero «**l'attitudine di un bene a soddisfare un bisogno**». Essa è un indicatore del benessere complessivo dell'individuo. Nel linguaggio economico l'utilità **prescinde da qualsiasi considerazione di ordine morale o etico**: anche l'alcool o le sigarette sono utili perché procurano piacere a chi le consuma, nonostante danneggino la salute. L'utilità non è una qualità oggettiva dei beni, ma **ha natura psichica o soggettiva**, in quanto consiste in una relazione fra bisogno da soddisfare e un bene. Ma questa relazione si forma solo nella mente del soggetto che prova un bisogno, per cui l'utilità è data dalla rappresentazione di un possibile rapporto fra bisogno e un bene in grado di soddisfarlo. Se cessa il bisogno, anche l'utilità di un determinato bene può cessare. Inoltre, un dato bene per un individuo può avere una grande utilità e per un altro un'utilità scarsa o nulla.

Dato un bene, definiamo **utilità totale** il piacere che l'individuo trae dal consumo di una data quantità del bene, ossia **il complesso delle soddisfazioni ottenibili da tutte le dosi disponibili**. Essa è crescente fino ad un certo punto, detto **punto di sazietà** (**q_s**), in cui l'utilità che si trae dal consumo dell'**n-esima** dose di quel bene è nulla, e poi comincia a decrescere, giacché l'utilità diventa negativa dato che il consumo della **n+1-esima**, **n+2-esima** dose del bene diventa negativa perché il consumatore non ha più vantaggio, ma danno o più precisamente disutilità dal consumo di quel bene.

Graficamente:

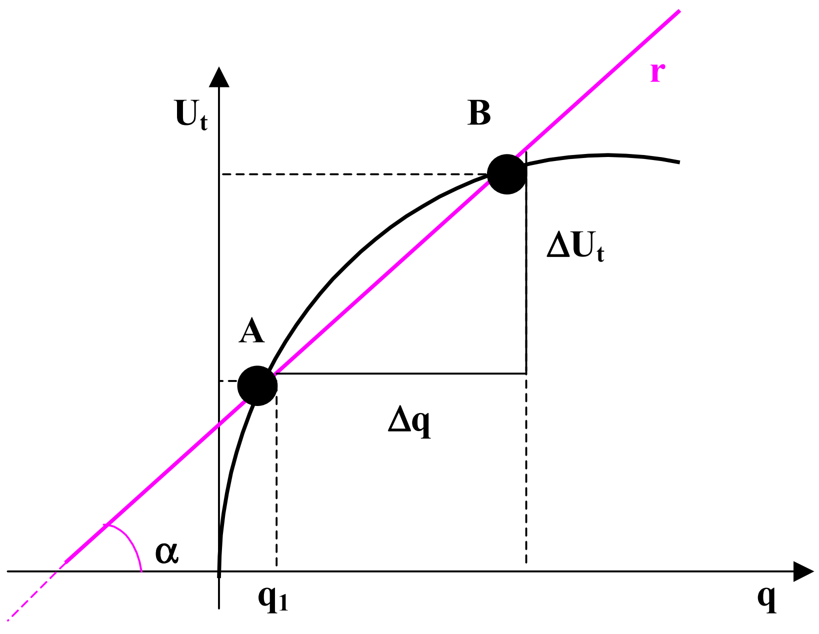


Definiamo **utilità marginale il piacere che l'individuo trae dall'ultima dose consumata** ed è **il rapporto fra la variazione di utilità ΔU_t e la variazione di quantità consumata Δq**:

$$\boxed{U_{mg} = \Delta U_t / \Delta q}\ .$$

La **legge dell'utilità marginale decrescente** o **legge di Gossen**, importantissima nella scienza economica, afferma che: «**dosi successive dello stesso bene hanno per il soggetto utilità sempre minore**».

Prendiamo il grafico precedente:



e osserviamo che l'utilità marginale, ossia il rapporto fra la variazione di utilità ΔU_t e la variazione di quantità consumata Δq, non è altro che il coefficiente angolare della retta **r** passante per il punto **A** e il punto **B**, ovvero la tangente dell'angolo α che si forma quando la retta r interseca l'asse delle ascisse.

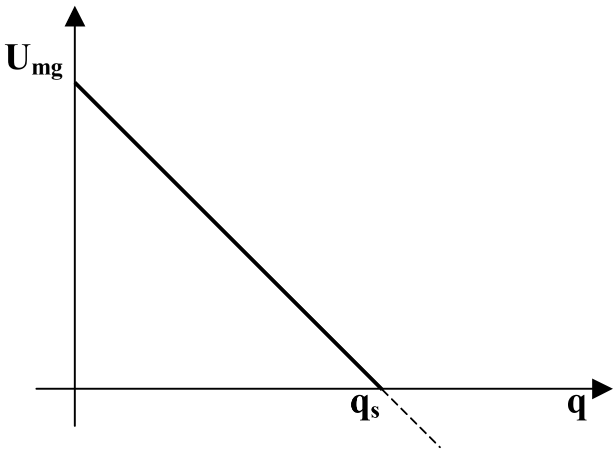
$$\mathbf{U_{mg} = \Delta U_t / \Delta q = tg\ \alpha}$$

Se prendiamo l'intervallo **Δq** sempre più piccolo la retta **r** ruota intorno al punto **A** fino a diventare tangente alla curva proprio in quel punto per **Δq** infinitesimo, ovvero per $\Delta q \to 0$.
Si ha quindi per $\Delta q \to 0$ che l'utilità marginale è uguale alla derivata prima della funzione U_t calcolata in q_1.
Possiamo scrivere:

$$\boxed{\lim_{\Delta q \to 0} U_{mg} = \lim_{\Delta q \to 0} \Delta U_t / \Delta q = \partial U_t / \partial q = U_t'}$$

Se la derivata prima è positiva allora vuol dire che non siamo ancora arrivati al punto di sazietà e l'utilità totale è crescente, mentre se è negativa ci troviamo dopo il punto di sazietà e l'utilità totale è decrescente.

Possiamo quindi ottenere il grafico dell'utilità marginale ottenendo ogni punto dalla derivata prima di U_t in quel punto.



Riassumendo:

$$U_{mg} > 0 \quad \text{quando} \quad \begin{cases} U_t' > 0 \\ q < q_s \end{cases} \qquad\qquad U_{mg} < 0 \quad \text{quando} \quad \begin{cases} U_t' < 0 \\ q > q_s \end{cases}$$

In particolare, $U_{mg} = 0$ quando $U_t' = 0$ e ci troviamo proprio nel punto di sazietà q_s. Quando l'utilità marginale è uguale a zero, la tangente alla curva nel punto q_s è parallela all'asse delle ascisse.

Definiamo, infine, l'**utilità media** come **il rapporto fra il livello di utilità totale e la quantità consumata**.

$$\boxed{U_{me} = U_t / q}\ .$$

Ricordiamo che la posizione e l'inclinazione delle curve sono date dai gusti della persona e variano da soggetto a soggetto, però l'andamento delle curve è uguale per qualunque individuo, poiché per tutti è valida la legge dell'utilità marginale decrescente.

LA MASSIMIZZAZIONE DELL'UTILITÀ DA PARTE DEL CONSUMATORE, OVVERO L'EQUILIBRIO DEL CONSUMATORE

Con l'ausilio della funzione di utilità cardinale è possibile iniziare descrivere dal punto di vista intuitivo il processo che porta il consumatore al raggiungimento di una posizione di equilibrio.
Se consideriamo più beni, dato che per ipotesi il livello di soddisfazione ottenibile dal consumo di un determinato bene è in generale indipendente dalle quantità consumate degli altri beni, l'utilità viene generalmente assunta di tipo **additivo**, quindi:

.

$$\boxed{U_t\,(q_1.\ q_2.) = U_1(q_1) + U_2(q_2)}$$

Ogni individuo consuma parecchi beni ed dispone di un certo reddito. Possiamo chiederci: che quantità comprerà dei beni che consuma? Per rispondere dobbiamo avere, innanzitutto, due elementi:

- l'utilità che le successive dosi di ciascun **bene** danno all'individuo, ossia la sua **scala d'utilità**, che riflette i suoi gusti;

- i prezzi di ciascun **bene**.

Supponiamo che l'individuo distribuisca il suo reddito fra n beni che consuma e che hanno lo stesso prezzo. Egli comincerà a consumare (e quindi acquisterà) la prima dose del **bene** che gli dà più utilità (diciamo il **bene** $\mathbf{q_1}$) e continuerà a consumare (e ad acquistare) dosi successive fino a quando l'n-esima dose del **bene** $\mathbf{q_1}$ gli darà un'utilità minore della prima dose che gli darebbe un altro **bene** (chiamiamolo $\mathbf{q_2}$). Consumata (e quindi acquistata) la prima dose del **bene** $\mathbf{q_2}$ continuerà a consumare (e ad acquistare) il **bene** $\mathbf{q_2}$ fino a quando la k-esima dose di quest'ultimo gli darà un'utilità minore della prima dose di uno degli altri beni oppure dell'n+1-esima dose

del **bene q_1**. Continuerà così fino a quando ha speso tutto il suo reddito e le utilità marginali degli n beni sono eguali tra di loro.
In definitiva, possiamo dire che quando **i prezzi dei beni sono eguali tra di loro**, il consumatore distribuisce il suo reddito nell'acquisto dei diversi beni in modo che ogni **bene** acquistato abbia per lui la stessa utilità marginale. Solo in questo modo egli ottiene la massima utilità totale. Cioè, dati n beni:

$Umg_1 = Umg_2 = Umg_{3\,..} = \ldots\ldots\ldots\ldots = Umg_n$

Nella realtà, però, i beni hanno normalmente prezzi diversi. In generale, possiamo dire che un individuo che ha a disposizione un certo reddito e che consuma n beni che hanno prezzi diversi, ogni volta che decide di spendere, comprerà la quantità di beni che gli dà la massima soddisfazione possibile.

Egli considererà, quindi, l'**utilità marginale ponderata**, cioè il rapporto fra l'utilità marginale di un **bene** e il prezzo del **bene** stesso.

Allora, quando **i prezzi dei beni sono diversi tra di loro**, l'individuo tende a raggiungere non l'eguaglianza delle utilità marginali, ma l'eguaglianza delle utilità marginali ponderate per i rispettivi prezzi.

Cioè, dati n beni:

$Umg_1 /P_1 = Umg_2/P_2 = Umg_3 /P_{3\,..} = \ldots\ldots\ldots\ldots = Umg_n/P_n$

Quando le utilità marginali ponderate dei beni sono eguali tra di loro, il consumatore ha raggiunto la massima soddisfazione possibile, chiamata anche posizione di **equilibrio del consumatore**. Infatti, in questa situazione l'ultima lira spesa nell'acquisto dei diversi beni dà all'individuo la stessa utilità. Qualunque allontanamento da questa posizione, cioè qualsiasi sostituzione al margine tra le quantità dei beni consumati, farebbe diminuire l'utilità totale del consumatore.

LE CURVE DI INDIFFERENZA

Secondo l'economista italiano Vilfredo Pareto il piacere non può essere misurato e al concetto di scala di utilità va sostituito quello di curva di indifferenza. In particolare all'approccio *Cardinalista* occorre sostituire quello *Ordinalista*, che rappresenta la premessa dell'impostazione assiomatica che stiamo per esaminare. Non potendo quantificare l'utilità, dobbiamo parlare, delle **preferenze del consumatore**. Supponiamo che, dati due beni (1 e 2) e due qualsiasi panieri di consumo $(\mathbf{h_1, h_2})$ e $(\mathbf{g_1, g_2})$, il consumatore possa ordinarli secondo la loro desiderabilità. Il consumatore cioè può stabilire che uno dei panieri è strettamente migliore dell'altro, oppure può ritenere di essere indifferente tra i due.

Useremo il simbolo > per indicare che un paniere è **strettamente preferito** all'altro. Se il consumatore preferisce un paniere ad un altro, ciò significa che, avendone l'opportunità, sceglierà il paniere preferito. Se il consumatore sceglie sempre $(\mathbf{h_1, h_2})$ quando è disponibile $(\mathbf{g_1, g_2})$, è naturale affermare che egli preferisce $(\mathbf{h_1, h_2})$ a $(\mathbf{g_1, g_2})$. Per indicare che il consumatore è **indifferente** tra i due panieri, usiamo il simbolo ~ e scriviamo $(\mathbf{h_1, h_2}) \sim (\mathbf{g_1, g_2})$: ciò significa che il consumatore è ugualmente soddisfatto sia che consumi il paniere $(\mathbf{h_1, h_2})$ sia che consumi $(\mathbf{g_1, g_2})$.
Dati due panieri di beni, se il consumatore ne preferisce uno all'altro oppure è indifferente tra i due, diciamo che per il consumatore esiste una relazione di **preferenza debole** tra $(\mathbf{h_1, h_2})$ e $(\mathbf{g_1, g_2})$ e la scriviamo come $(\mathbf{h_1, h_2}) \geq (\mathbf{g_1, g_2})$.

ASSUNZIONI SULLE PREFERENZE. In genere, gli economisti formulano ipotesi sulla «coerenza» delle preferenze dei consumatori. Ad esempio, sembra contraddittoria una situazione in cui $(\mathbf{h_1, h_2}) > (\mathbf{g_1, g_2})$ e, contemporaneamente, $(\mathbf{g_1, g_2}) > (\mathbf{h_1, h_2})$: infatti, ciò significherebbe che il consumatore preferisce strettamente il paniere $(\mathbf{h_1, h_2})$ al paniere $(\mathbf{g_1, g_2})$ …. e viceversa.
I principali «assiomi» che garantiscono la razionalità del consumatore sono:

- **Completezza**. In questo caso, assumiamo che sia possibile confrontare sempre due panieri qualsiasi cioè, che dati due panieri qualsiasi $(\mathbf{h_1, h_2})$ e $(\mathbf{g_1, g_2})$, è sempre $(\mathbf{h_1, h_2}) > (\mathbf{g_1, g_2})$, oppure $(\mathbf{h_1, h_2}) < (\mathbf{g_1, g_2})$, oppure il consumatore è indifferente tra i due panieri. Questo assioma significa che il consumatore è in grado di effettuare una scelta fra due panieri dati.
- **Riflessività**. Assumiamo che ogni paniere sia desiderabile almeno tanto quanto sé stesso: $(\mathbf{h_1, h_2}) \geq (\mathbf{h_1, h_2})$.
- **Transitività**. Se $(\mathbf{h_1, h_2}) \geq (\mathbf{g_1, g_2})$ e $(\mathbf{g_1, g_2}) \geq (\mathbf{z_1, z_2})$, allora assumiamo che $(\mathbf{h_1, h_2}) \geq (\mathbf{z_1, z_2})$. In altri termini, se il consumatore ritiene che **H** sia desiderabile almeno tanto quanto **G** e che **G** sia desiderabile almeno tanto quanto **Z**, allora per il consumatore **H** è desiderabile almeno tanto quanto **Z**.

I primi tre assiomi bastano a derivare le funzioni di utilità. Esistono poi ipotesi che possono essere formulate relative al profilo psicologico degli individui:

- **Principio della non sazietà o della non saturazione**. Assumiamo, in questo caso, che «più è meglio». Più precisamente, se $(\mathbf{h_1, h_2})$ è un paniere di beni e $(\mathbf{g_1, g_2})$ è un altro paniere che contiene almeno la stessa quantità di entrambi e una quantità addizionale di uno solo, allora $(\mathbf{g_1, g_2}) > (\mathbf{h_1, h_2})$. Questa è chiamata anche ipotesi di **monotonicità delle preferenze**.
- **L'ipotesi dell'egoismo**. Gli individui tengono conto solo della propria utilità o soddisfazione, cioè la solidarietà e l'altruismo non influenzano le scelte economiche.
- «**La media è preferita agli estremi**». Se individuiamo due panieri $(\mathbf{h_1, h_2})$ e $(\mathbf{g_1, g_2})$ sulla stessa curva di indifferenza e ne consideriamo una media aritmetica:

$$\left(\tfrac{1}{2}\, \mathbf{h_1} + \tfrac{1}{2}\, \mathbf{g_1};\ \tfrac{1}{2}\, \mathbf{h_2} + \tfrac{1}{2}\, \mathbf{g_2} \right)$$

tale media sarà strettamente preferita ai due panieri estremi, o almeno altrettanto buona. Il paniere corrispondente alla media ponderata contiene esattamente la quantità media del **bene 1** e la quantità media del **bene 2** dei due panieri: giace, pertanto, a metà della retta che congiunge il paniere-**x** al paniere-**y**.
In realtà, questa ipotesi sarà mantenuta per qualsiasi peso **t** compreso fra **0** e **1**, non solo ½. Assumiamo, quindi, che se $(\mathbf{h_1, h_2}) \sim (\mathbf{g_1, g_2})$, allora:

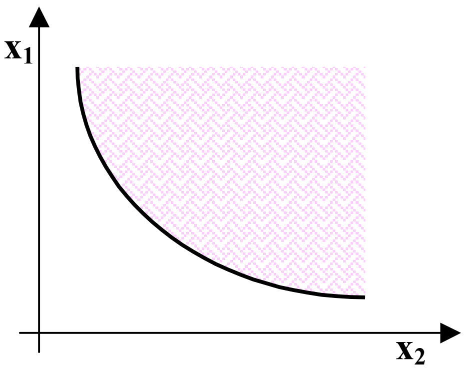
$$\left(\mathbf{t\, h_1 + (1 - t)\, g_1;\ t\, h_2 + (1 - t)\, g_2} \right) \geq (\mathbf{h_1, h_2})$$

per qualsiasi valore di **t** tale che $\mathbf{0 \leq t \leq 1}$. La media ponderata dei due panieri dà al paniere-**h** un peso uguale a **t** volte quello assegnato al paniere-**g**. La distanza tra il paniere-**h** e il paniere medio è esattamente una frazione **t** della distanza tra il paniere-**h** e il paniere-**g**, lungo la retta che li congiunge.

LE CURVE DI INDIFFERENZA. Consideriamo, ora, un individuo che consuma due beni, il **bene 1** e il **bene 2**, e riportiamo le quantità di questi su di una coppia di assi cartesiani. Ciascuna combinazione possibile dei due beni (che chiameremo, appunto, **paniere**) è rappresentata da un punto nel piano.

Chiameremo, allora, curva di indifferenza **l'insieme delle combinazioni di x_1 e x_2 che danno all'individuo la stessa utilità, ovvero che il consumatore dichiara essere indifferenti nei confronti del paniere dato**.

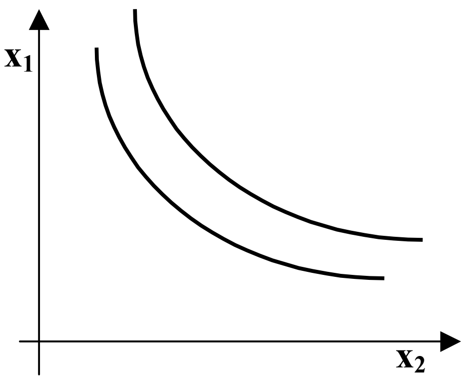
Graficamente avremo:



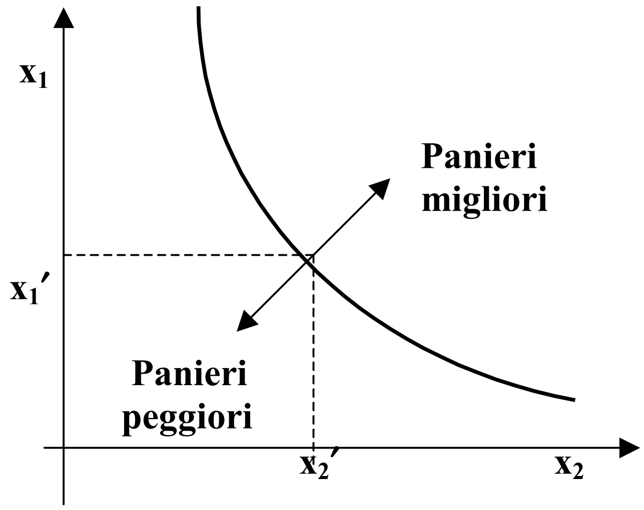
L'area ombreggiata rappresenta l'insieme di tutti i panieri almeno altrettanto desiderabili di **(x_1; x_2)** e costituisce l'**insieme preferito debolmente**.

Inoltre, dobbiamo dire che non vi sarà una sola curva di indifferenza. Infatti, se consideriamo il paniere **C**, anche in questo caso vi saranno molti panieri indifferenti rispetto a quest'ultimo, e, congiungendo tutti i punti che rappresentano tali panieri, otteniamo una nuova curva di indifferenza, più alta (cioè più spostata verso destra) rispetto alla precedente. I panieri situati sulla nuova curva sono indifferenti tra loro, ma sono preferiti a tutti quelli che giacciono sulla curva più bassa.

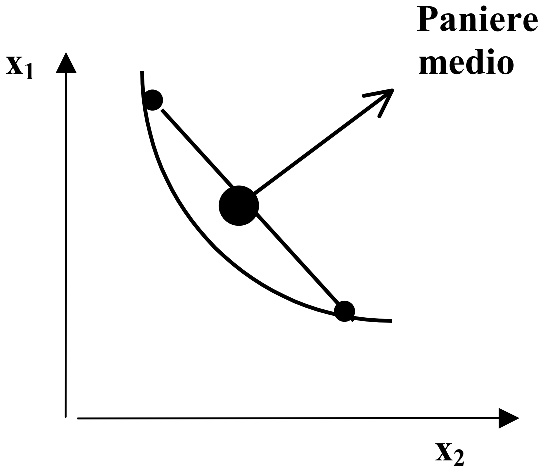
Avremo, quindi, infinite curve di indifferenza, cioè una **mappa di curve di indifferenza**.



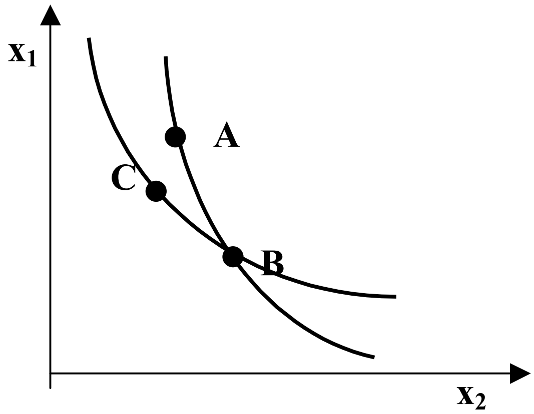
PROPRIETÀ DELLE CURVE DI INDIFFERENZA. Ogni curva di indifferenza è **decrescente** perché la diminuzione del consumo di un bene va compensata con l'aumento di quello dell'altro, se si vuole che la soddisfazione del soggetto rimanga costante. È l'assioma di **non sazietà** che comporta che le curve di indifferenza abbiano un'**inclinazione negativa**. Consideriamo, infatti, dapprima un paniere **(x_1', x_2')**, come nel grafico:



Inoltre, ogni curva di indifferenza ha la **convessità rivolta verso l'origine degli assi** perché man mano che la persona consuma una quantità minore del **bene 1**, occorrono quantità via via maggiori del **bene 2** per compensarla della diminuzione di una data quantità del primo bene. Tale proprietà deriva dall'assioma che **la media è preferita agli estremi**. Supponiamo che **(h_1, h_2)** e **(g_1, g_2)** siano indifferenti: se le medie sono preferite agli estremi, tutte le medie ponderate di **(h_1, h_2)** e **(g_1, g_2)** saranno preferite debolmente a **(h_1, h_2)** e **(g_1, g_2)**. Quindi, dovremmo avere :



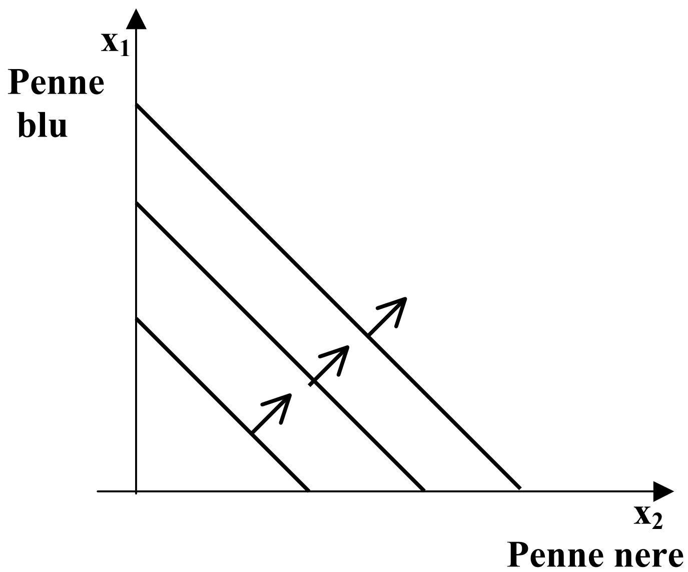
Infine, le curve di indifferenza **non si intersecano mai fra loro**, e ciò si deriva dall'assioma della **transitività**. Consideriamo questo grafico:



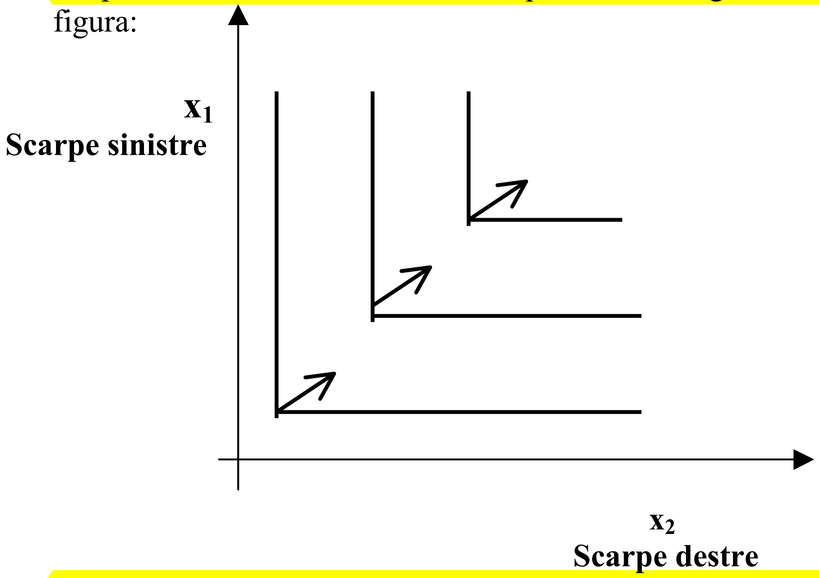
Il paniere **A** è preferito al paniere **C** per il principio della non sazietà in quanto contiene maggiori quantità di entrambi i beni. Il paniere **B** appartiene ad entrambe le curve, per cui è indifferente sia rispetto al paniere **A** sia al paniere **C**, ma allora il paniere **A** e il paniere **C** dovrebbero essere indifferenti tra loro per la proprietà transitiva, mentre, come abbiamo visto, il paniere **A** è preferito al paniere **C**. Quindi, le curve di indifferenza non possono mai intersecarsi.

ESEMPI DI PREFERENZE (CURVE DI INDIFFERENZA "ATIPICHE O IRREGOLARI"):

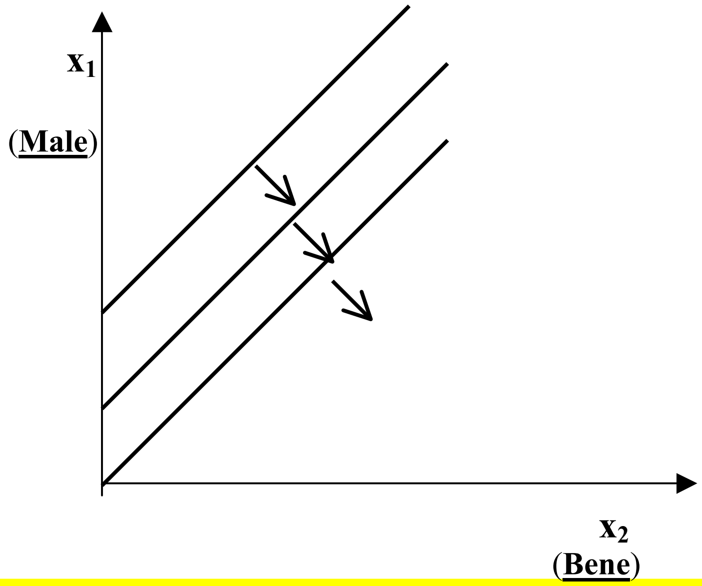
1. Diciamo che due beni sono **perfetti sostituti** se il consumatore è disposto a sostituire un bene con l'altro ad un saggio **costante**. Il caso più semplice è quello nel quale i due beni vengono sostituiti in proporzione uno a uno.
   Supponiamo, ad esempio, di considerare una scelta fra penne blu e penne nere e che il consumatore in questione, desideri le penne indipendentemente dal colore. Scegliamo un paniere di consumo, per esempio **(10; 10)**. Ogni altro paniere che contenga **20** penne è, per questo consumatore, desiderabile tanto quanto **(10; 10)**. In termini matematici, ogni paniere di consumo (x_1, x_2) tale che $x_1 + x_2 = 20$ sarà sulla curva di indifferenza che passa per **(10; 10)**. Le curve di indifferenza di questo consumatore sono pertanto tutte rette parallele con inclinazione **–1**, come rappresentato in figura:



I panieri con un maggior numero complessivo di penne sono preferiti ai panieri con un minore numero complessivo di penne: pertanto le preferenze aumentano nella direzione verso l'alto a destra.
È importante notare che nel caso dei perfetti sostituti le curva di indifferenza hanno inclinazione **costante**. Supponiamo, ad esempio, di considerare le preferenze di un consumatore tra penne nere e coppie di penne blu: le curve di indifferenza relative a questi due beni avranno inclinazione **–2**, poiché il consumatore sarà disposto a rinunciare a due penne nere in cambio di una coppia addizionale di penne blu.
Diciamo che due beni sono **perfetti complementi** se vengono sempre consumati congiuntamente in proporzioni fisse: in un certo senso, i beni «si completano» a vicenda. Le curve di indifferenza avranno quindi una forma a **L**, il cui vertice si troverà in corrispondenza del punto in cui il numero delle scarpe sinistre è uguale al numero delle scarpe destre, come in figura:

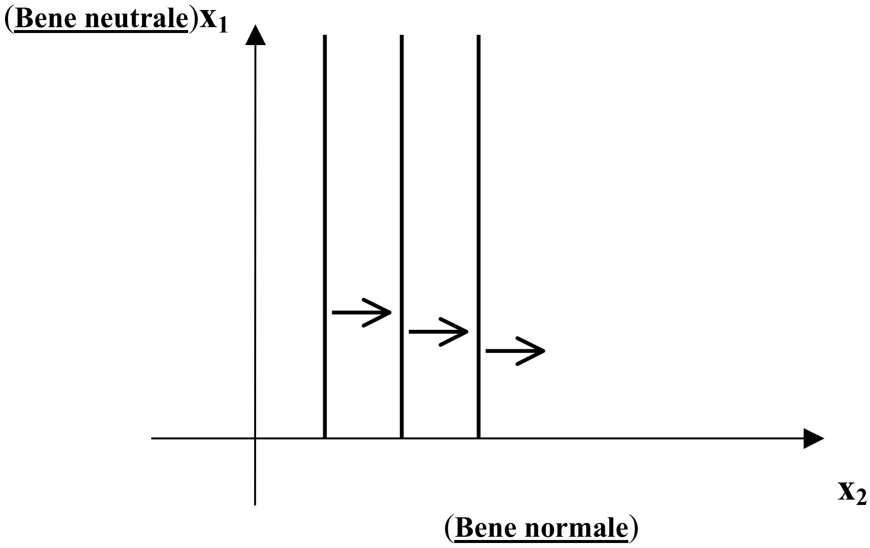


2. Definiamo «**male**» ciò che il consumatore non apprezza ad esempio i funghi.



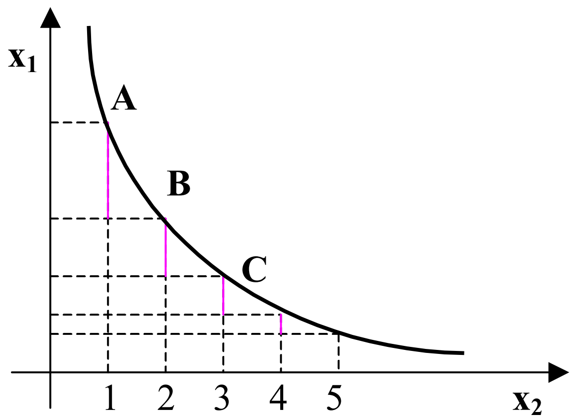
La direzione di preferenza è verso il basso a destra, direzione in cui il consumo di $x_1$diminuisce e il consumo di x_2 aumenta.

3. Diciamo che un bene è un **bene neutrale** quando per il consumatore è indifferente consumarlo o non consumarlo. Nel caso in cui un consumatore sia neutrale nei confronti del bene $\mathbf{x_1}$ le curve di indifferenza saranno delle rette verticali, come rappresentato in figura:



IL SAGGIO MARGINALE DI SOSTITUZIONE

Rappresentiamo sul piano cartesiano tutti i panieri del **bene 1** e del **bene 2** che sono indifferenti al consumatore, mediante una curva di indifferenza:

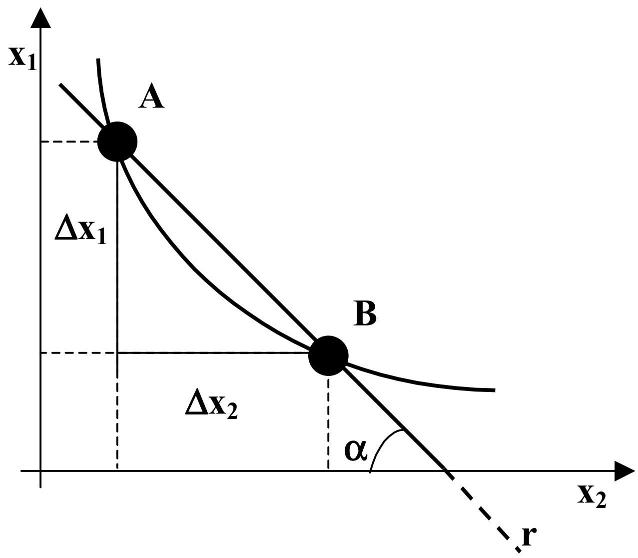


1

Il **saggio marginale di sostituzione** (SMS) è **la quantità del bene 1**, Δx_1, **a cui il consumatore è disposto a rinunciare per avere una unità aggiuntiva del bene 2, e rimanere indifferente**, ossia:

$$\boxed{SMS = \Delta x_1/\Delta x_2}\ .$$

Consideriamo il grafico seguente:



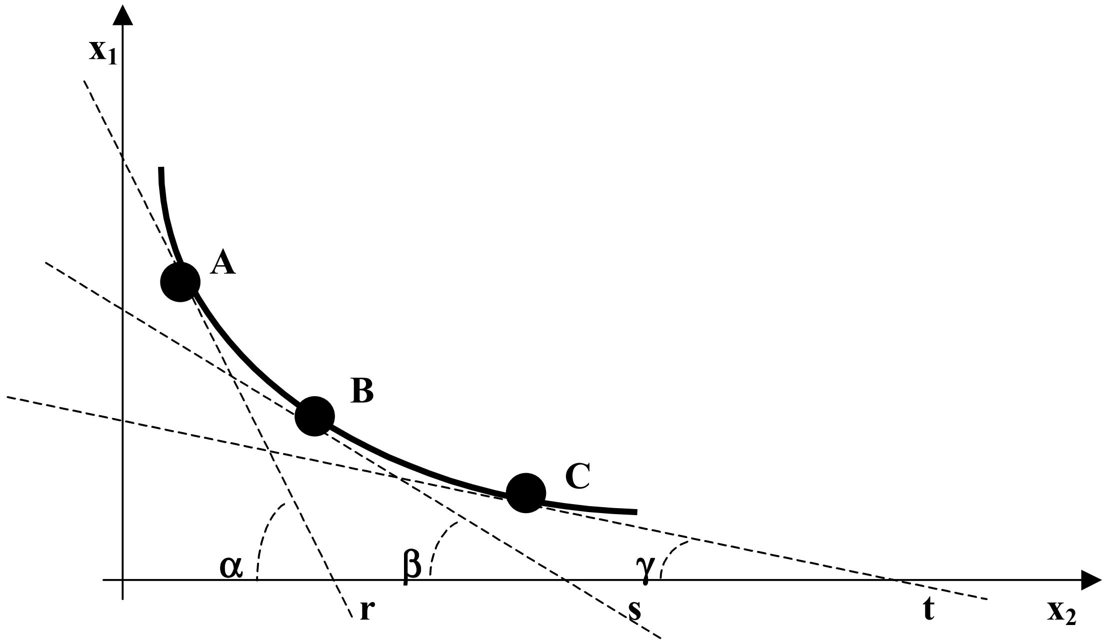
2

Se il consumatore vuole passare dal paniere **A** al paniere **B**, rimanendo, quindi, sulla stessa curva di indifferenza, dovrà rinunciare ad una quantità del **bene 1** pari a Δx_1 per avere una quantità aggiuntiva del **bene 2** pari a Δx_2.

Analiticamente, il **SMS** misura l'inclinazione della corda che unisce i punti **A** e **B**, ovvero la tangente dell'angolo α che si forma quando la retta interseca l'asse delle ascisse.
Se prendiamo l'intervallo Δx_2 sempre più piccolo, la retta **r** ruota intorno al punto **A** fino a diventare tangente alla curva proprio in quel punto per Δx_2 infinitesimo, ovvero per $\Delta x_2 \to 0$.

Quindi, per $\Delta x_2 \to 0$ il **SMS** rappresenta $\partial x_1/\partial x_2$, cioè la derivata prima della funzione e graficamente la pendenza della curva di indifferenza, cioè il saggio al quale il consumatore è disposto a sostituire una quantità leggermente inferiore del **bene 1** ad una leggermente superiore del **bene 2**.

Graficamente, abbiamo:



3

Il **SMS** **<u>ha segno negativo</u>**: infatti, l'ipotesi di monotonicità delle preferenze implica che le curve di indifferenza abbiano inclinazione negativa: poiché il **SMS** rappresenta l'inclinazione di una curva di indifferenza, sarà naturalmente un numero negativo.

Anche l'ipotesi di convessità ha implicazioni sul saggio marginale di sostituzione. Infatti, nel caso di curve di indifferenza strettamente convesse, l'inclinazione della curva di indifferenza, ovvero il **SMS**, diminuisce (in valore assoluto), all'aumentare di $\mathbf{x_2}$.

Possiamo vedere tutto questo dal grafico **3** Passando dal paniere **A** al paniere **B**, la retta tangente da **r** diventa **s**, e vediamo chiaramente che l'angolo $\beta < \alpha$. Poiché, l'inclinazione della curva di indifferenza, ovvero il **SMS**, è la tangente dell'angolo che si forma quando la retta interseca l'asse della ascisse, allora avremo **tg** β. < **tg** α

Analogamente avviene passando dal paniere **B** al paniere **C**.

Le curve di indifferenza presentano, quindi, un **SMS** **<u>decrescente</u>**.

Ciò significa che il saggio al quale un individuo è disposto a rinunciare al **bene 1** per avere una quantità aggiuntiva del **bene 2** è via via minore.

Questo economicamente vuol dire che un bene, man mano che diventa più scarso, diventa più prezioso.

Poiché lungo una curva di indifferenza la variazione dell'utilità totale dev'essere sempre **0**, abbiamo che:

$$\Delta U_T = \Delta x_1 * U_{mg\ x1} + \Delta x_2 * U_{mg\ x2} = 0 \qquad \boxed{1}$$

Infatti, se Δx_1 è positiva, allora Δx_2 è negativa e viceversa.

La $\boxed{1}$ equivale a scrivere che:

$$\boxed{SMS = \Delta x_1/\Delta x_2 = - U_{mg\ x2}/U_{mg\ x1}}$$

Quindi il **SMS** tra due beni è uguale al reciproco del rapporto tra le utilità marginali dei due beni e questo giustifica anche la convessità delle curve di indifferenza.

In particolare, ricordiamo che il **SMS** è:

- costante e uguale a **–1** per i perfetti sostituti;
- **0** o – ∞ per i perfetti complementi.

IL VINCOLO DI BILANCIO

Dati due beni, indichiamo con **X** il paniere di consumo **(x_1, x_2)**, i cui prezzi sono rispettivamente **p_1** e **p_2** e, data la quantità di moneta **m** a disposizione del consumatore, possiamo esprimere il **vincolo di bilancio** come:

$$\boxed{p_1 * x_1 + p_2 * x_2 \leq m}$$

Esso esprime **l'insieme delle combinazioni che l'individuo può acquistare dato il suo reddito monetario m**. Questo è l'insieme di consumo economicamente ammissibile.

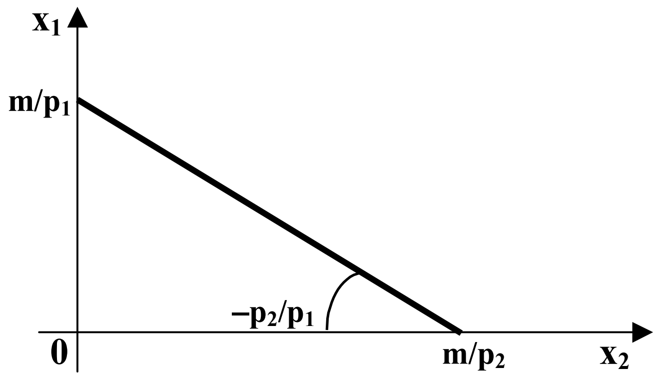
Ponendo:

$$p_1 * x_1 + p_2 * x_2 = m$$

otteniamo:

$$\boxed{x_1 = m/p_1 - p_2/p_1 * x_2}$$

che rappresenta la cosiddetta **retta di bilancio**, riportata nel seguente grafico:

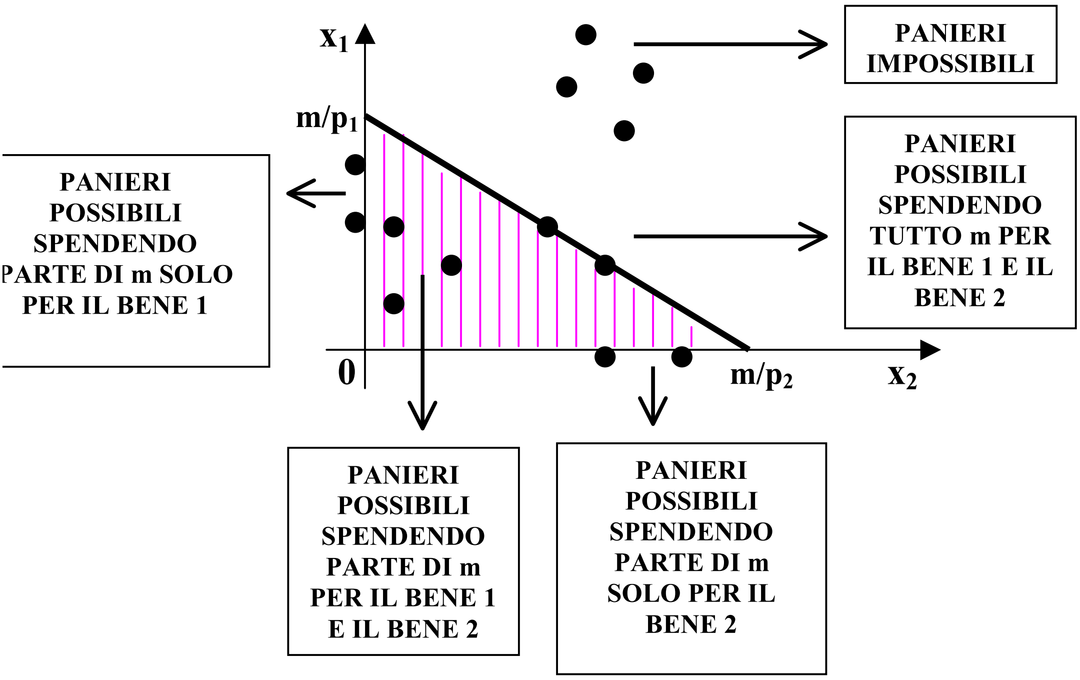


Se il consumatore acquista **0** unità del **bene 2** e spende tutto il suo reddito nel **bene 1**, la quantità che acquisterà sarà **m/p_1**. Il punto **(0, m/p_1)** rappresenta l'**intercetta dell'asse delle ordinate**.

Se il consumatore acquista **0** unità del **bene 1** e spende tutto il suo reddito nel **bene 2**, la quantità che acquisterà sarà **m/p_2**. Il punto **(m/p_2, 0)** rappresenta l'**intercetta dell'asse delle ascisse**.

$-p_2/p_1$ è il **coefficiente angolare** della retta e rappresenta la quantità del **bene 1** a cui il consumatore deve rinunciare per ottenere una unità aggiuntiva del **bene 2**.

Riprendiamo il grafico precedente:



L'area tratteggiata rappresenta il cosiddetto **insieme di bilancio**. In particolare:

- i punti situati a destra della retta di bilancio rappresentano **panieri impossibili** per il consumatore, cioè tali da non poter essere acquistati dal consumatore con il reddito di cui dispone;
- i punti situati fra gli assi e la retta di bilancio rappresentano **panieri possibili** per il consumatore, cioè tali da poter essere acquistati dal consumatore **spendendo parte del suo reddito**;
- punti situati sulla retta di bilancio rappresentano **panieri possibili** per il consumatore, cioè tali da poter essere acquistati dal consumatore **spendendo tutto il suo reddito**;
- i punti situati sull'asse delle ascisse nell'intervallo aperto $(0, m/p_2)$ rappresentano **panieri possibili** per il consumatore, cioè tali da poter essere acquistati dal consumatore **spendendo parte del suo reddito nell'acquisto del solo bene 2**;
- i punti situati sull'asse delle ordinate nell'intervallo aperto $(0, m/p_1)$ rappresentano **panieri possibili** per il consumatore, cioè tali da poter essere acquistati dal consumatore **spendendo parte del suo reddito nell'acquisto del solo bene 1**.

ESEMPIO N°1. Supponiamo di variare il reddito del consumatore **m**, da **m** a **m'**, con **m' > m**, facendo rimanere invariati i prezzi.

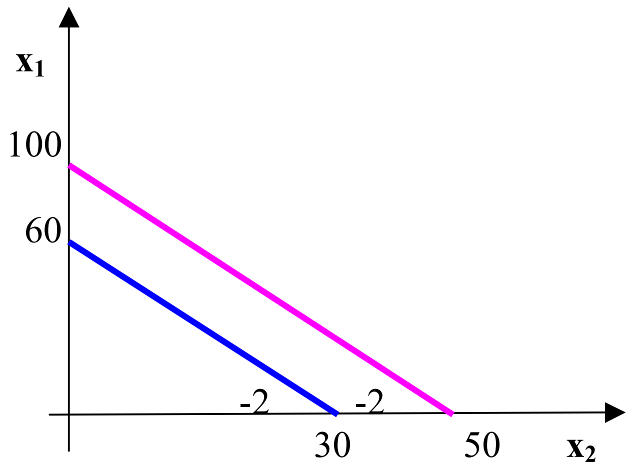
Sia $m = 120$; $m' = 200$; $p_1 = 2$; $p_2 = 4$.

Avremo:

- $2x_1 + 4x_2 = 120$, da cui:
  $\mathbf{x_1 = 60 - 2x_2}$ (**1**)

- $2x_1 + 4x_2 = 200$, da cui:
  $\mathbf{x_1 = 100 - 2x_2}$ (**2**)

Graficamente:



Quindi ogni volta che aumenta il reddito, restando invariati i prezzi, si ha una traslazione parallela (infatti, il coefficiente angolare rimane costante) della retta di bilancio verso destra. In questo caso, aumenta l'insieme di bilancio, ossia il numero di panieri acquistabili dal consumatore.
Analogamente, ogni volta che diminuisce il reddito, restando invariati i prezzi, si ha una traslazione parallela della retta di bilancio verso sinistra. In quest'altro caso, diminuisce l'insieme di bilancio, ossia il numero di panieri acquistabili dal consumatore.
ESEMPIO N°2. Supponiamo di far rimanere il reddito costante e di variare uno dei prezzi.

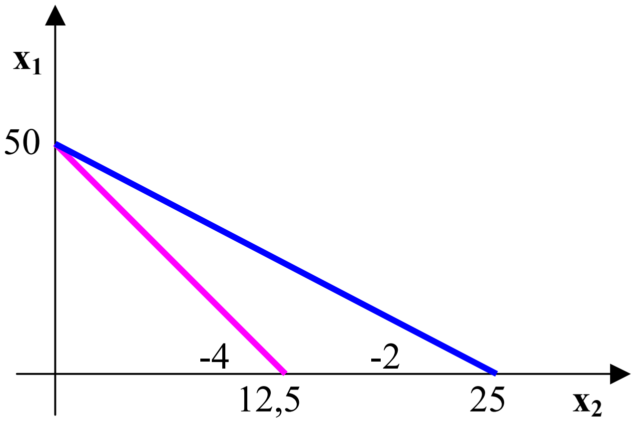
Sia $\mathbf{m} = 100$; $\mathbf{p_1} = 2$; $\mathbf{p_2} = 4$; $\mathbf{p_2'} = 8$.

Avremo:

- $2x_1 + 4x_2 = 100$, da cui:
  $\mathbf{x_1 = 50 - 2x_2}$ (**1**)

- $2x_1 + 8x_2 = 100$, da cui:
  $\mathbf{x_1 = 50 - 4x_2}$ (**2**)

Graficamente:



Quindi, a parità di reddito **m**, se aumenta il prezzo di uno dei due beni, cambia l'inclinazione della retta di bilancio e si riduce di conseguenza l'insieme di bilancio, ossia il numero di panieri acquistabili dal consumatore.

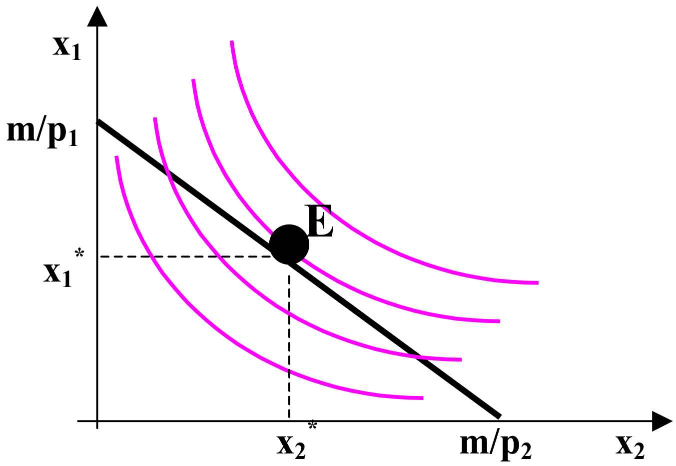
Analogamente, a parità di reddito **m**, se diminuisce il prezzo di uno dei due beni, cambia l'inclinazione della retta di bilancio ed aumenta di conseguenza l'insieme di bilancio, ossia il numero di panieri acquistabili dal consumatore.

In entrambi i casi, il reddito monetario **m** è rimasto identico, ma il **<u>reddito reale</u>** (ossia il potere di acquisto) si è ridotto nel primo caso (infatti il consumatore non potrà più acquistare i panieri compresi nell'area tratteggiata) ed è aumentato nel secondo.

LE CURVE DI INDIFFERENZA
E
L'EQUILIBRIO DEL CONSUMATORE

Date le ipotesi di razionalità delle preferenze (completezza riflessività e transitività) e le proprietà dell'insieme di consumo economicamente ammissibile possiamo identificare come un individuo effettua la sua scelta. . L'equilibrio del consumatore può essere rappresentato graficamente mediante le curve di indifferenza e la retta di bilancio.

Consideriamo un individuo che consuma il **bene 1** e il **bene 2**, i cui prezzi sono rispettivamente $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ e che disponga di un reddito **m**. Rappresentiamo i suoi gusti mediante una mappa di curve di indifferenza e disegniamo la retta di bilancio.



Il reddito **m** e i prezzi dei due beni $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ sono noti, mentre dobbiamo determinare le quantità del **bene 1** e del **bene 2** che rendono massima l'utilità dell'individuo (ovvero lo portano sulla curva di indifferenza più alta) compatibilmente col suo vincolo di bilancio.

$\mathbf{E \equiv (x_2^*; x_1^*)}$ è la posizione di **equilibrio del consumatore**.

Infatti, tutti i punti situati su curve di indifferenza più alte di quella su cui si trova **E** sono preferiti ad **E**, ma, essendo situati a destra della retta di bilancio, rappresentano combinazioni di beni il cui acquisto comporta una spesa superiore al reddito dell'individuo e quindi sono combinazioni impossibili.

Tutti i punti situati sulla retta di bilancio o tra questa e gli assi d'altra parte si trovano su curve di indifferenza più basse di quella su cui si trova **E**: quindi, pur essendo punti possibili, essi danno all'individuo una soddisfazione minore di quella procuratagli da **E**.

Pertanto la combinazione **(x_2^*; x_1^*)** corrispondente al punto **E** è quella che rende massima l'utilità dell'individuo compatibilmente col suo reddito, cioè col suo vincolo di bilancio.
Nel punto **E** la retta di bilancio è tangente alla curva di indifferenza.
Come sappiamo, la pendenza della retta tangente alla curva di indifferenza misura il **SMS** tra il **bene 1** e il **bene 2**. Inoltre, la pendenza della retta di bilancio è data da **$-p_2/p_1$**. Pertanto in equilibrio abbiamo:

$$-p_2/p_1 = SMS = \Delta x_1/\Delta x_2,$$

cioè, il saggio marginale di sostituzione tra due beni è uguale al reciproco del rapporto tra i loro prezzi. Questa condizione **deve** essere soddisfatta per individuare il paniere ottimo. L'inclinazione della curva di indifferenza misura la quantità del bene $x_1$che l'individuo è disposto a cedere per avere un'unità in più del bene 1 , ossia il saggio marginale di sostituzione del bene x_1 con il bene x_2. L'inclinazione della retta di bilancio ci dice quanto egli sarà costretto a cedere del bene x_1 dal mercato per avere una unità in più del bene x_2. Se il consumatore si trova in una situazione in cui quanto deve cedere per ottenere x_2 è meno di quanto è disposto a cedere egli migliorerà la sua situazione scambiando x_1 con x_2. D'altra parte sappiamo che:

$$SMS = -U_{mg\ x2} / U_{mg\ x1},$$

quindi:

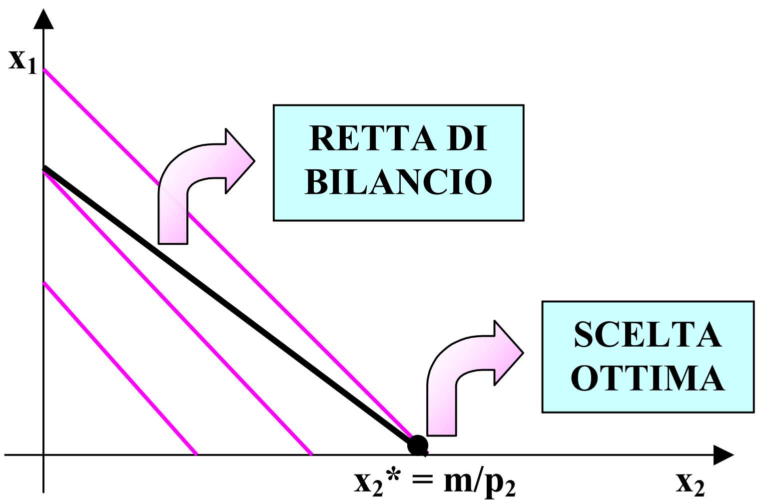
$$p_2/p_1 = U_{mg\ x2} / U_{mg\ x1},$$

da cui:

$$\boxed{U_{mg\ x1} / p_1 = U_{mg\ x2} / p_2}$$

Ciò significa che in equilibrio il consumatore eguaglia le utilità marginali ponderate dei beni che consuma.

CASO DEI PERFETTI SOSTITUTI. Rappresentiamo tale caso graficamente:



Si presentano tre possibili casi:

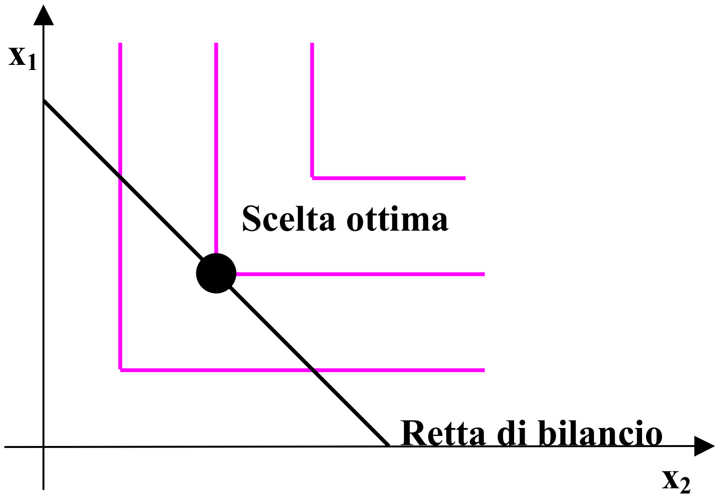
1. Se $\mathbf{p_1 > p_2}$, l'inclinazione della retta di bilancio è inferiore a quella della curva di indifferenza. In questo caso, il paniere ottimo corrisponde al punto in cui il consumatore spende tutto il suo reddito per l'acquisto del **bene 2**.

2. Se $\mathbf{p_2 > p_1}$, l'inclinazione della retta di bilancio è superiore a quella della curva di indifferenza. In questo caso, il paniere ottimo corrisponde al punto in cui il consumatore spende tutto il suo reddito per l'acquisto del **bene 1**.

3. Se $\mathbf{p_1 = p_2}$, l'inclinazione della retta di bilancio coincide con quella della curva di indifferenza. In questo caso, vi è un'intera gamma di scelte ottime: in questo caso, qualsiasi quantità del **bene 1** e del **bene 2** che soddisfi il vincolo di bilancio è ottima.

In definitiva: **se due beni sono perfetti sostituti, un consumatore acquisterà quello meno caro, e se i due beni hanno lo stesso prezzo, per il consumatore sarà indifferente acquistare l'uno o l'altro**.

CASO DEI PERFETTI COMPLEMENTI. Rappresentiamo tale caso graficamente:



Il paniere ottimo deve sempre trovarsi sulla diagonale, quali che siano i prezzi. Determiniamo algebricamente la scelta ottima. Sappiamo che il consumatore acquista le quantità del **bene 1** e del **bene 2** in proporzioni fisse, quali che siano i prezzi. Supponiamo che li acquisti in proporzione **1:1**. Indichiamo tale quantità con **x**: dobbiamo ora soddisfare il vincolo di bilancio:

$$\mathbf{p_1 * x + p_2 * x = m.}$$

Risolvendo per **x**, otteniamo le scelte ottime del **bene 1** e del **bene 2**:

$$\boxed{\mathbf{x_1 = x_2 = x = m/(p_1 + p_2)}}$$

In questo caso, la funzione di domanda corrispondente alla scelta ottima è del tutto intuitiva: poiché i due beni vengono consumati assieme, è come se il consumatore spendesse tutto il suo denaro per acquistare un unico bene il cui prezzo fosse $\mathbf{p_1 + p_2}$.

CASO DEI BENI NEUTRALI E «MALI». Nel caso di un bene neutrale o di un «male» il consumatore spende tutto il suo denaro per acquistare il bene che gli piace e non acquista affatto né il bene neutrale né il «male».

EQUILIBRIO DEL CONSUMATORE CON IL METODO DI LAGRANGE

Esaminiamo il problema dell'equilibrio del consumatore applicando il metodo dei **moltiplicatori di Lagrange**.

Si tratta di un problema di massimizzazione vincolata del tipo:

$$\begin{gathered}\textbf{Max } u(x_1, x_2) \\ \textbf{tale che } p_1 * x_1 + p_2 * x_2 = m\end{gathered}$$

.

Scriviamo, innanzitutto, la Lagrangiana:

$$L = u(x_1, x_2) - \lambda * (p_1 * x_1 + p_2 * x_2 - m)$$

dove λ è una variabile chiamata **moltiplicatore di Lagrange**, poiché è moltiplicata per il vincolo.

Calcoliamo le derivate rispetto a x_1, x_2 e λ. Si ottengono, così, le condizioni del primo ordine:

$$\begin{cases} \partial L/\partial x_1 = \partial u(x_1, x_2)/\partial x_1 - \lambda * p_1 = 0 & \boxed{1} \\ \partial L/\partial x_2 = \partial u(x_1, x_2)/\partial x_2 - \lambda * p_2 = 0 & \boxed{2} \\ \partial L/\lambda = p_1 * x_1 + p_2 * x_2 - m = 0 & \boxed{3} \end{cases}$$

La condizione $\boxed{3}$ (che si ottiene derivando L rispetto a λ) rappresenta il vincolo.

Trasformiamo la $\boxed{1}$, ottenendo:

$$\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1 = \lambda * p_1.$$

Similmente, dalla $\boxed{2}$ otteniamo:

$$\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2 = \lambda * p_2.$$

Dividendo la $\boxed{1}$ per la $\boxed{2}$, abbiamo:

$$\boxed{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1 / \partial u(x_1, x_2)/\partial x_2 = p_1/p_2}\ .$$

Quindi, in equilibrio il saggio marginale di sostituzione deve essere uguale al rapporto tra prezzi.

SCELTA DI UNA TASSA

Se lo Stato si propone di ottenere una certa entrata addizionale, è meglio, a tal fine, introdurre una tassa sulla quantità o una tassa sul reddito?

Consideriamo dapprima l'effetto di una **tassa sulla quantità**. Supponiamo che il vincolo di bilancio di partenza sia:

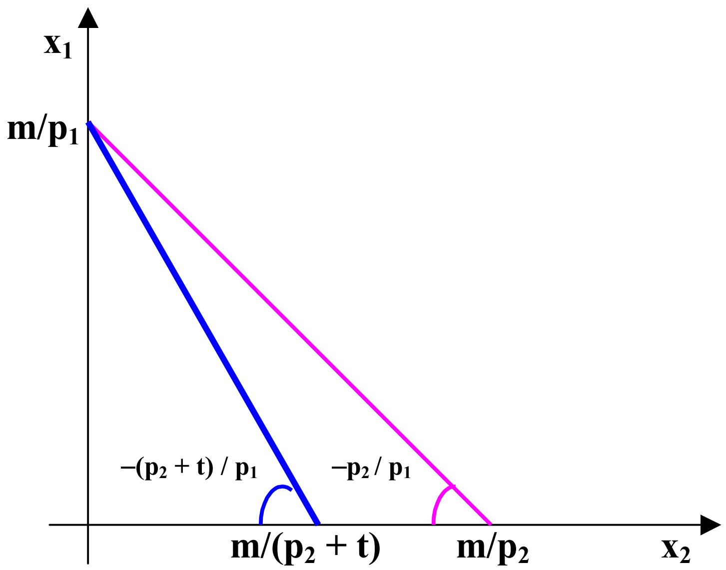
$$\mathbf{p_1 * x_1 + p_2 * x_2 = m}.$$

Come si modificherà il vincolo di bilancio se il consumo del **bene 2** è tassato a un saggio **t**? Dal punto di vista del consumatore è esattamente come se il prezzo del **bene 2** fosse aumentato di **t**. Il nuovo vincolo di bilancio è pertanto:

$$\mathbf{p_1 * x_1 + (p_2 + t) * x_2 = m}.$$

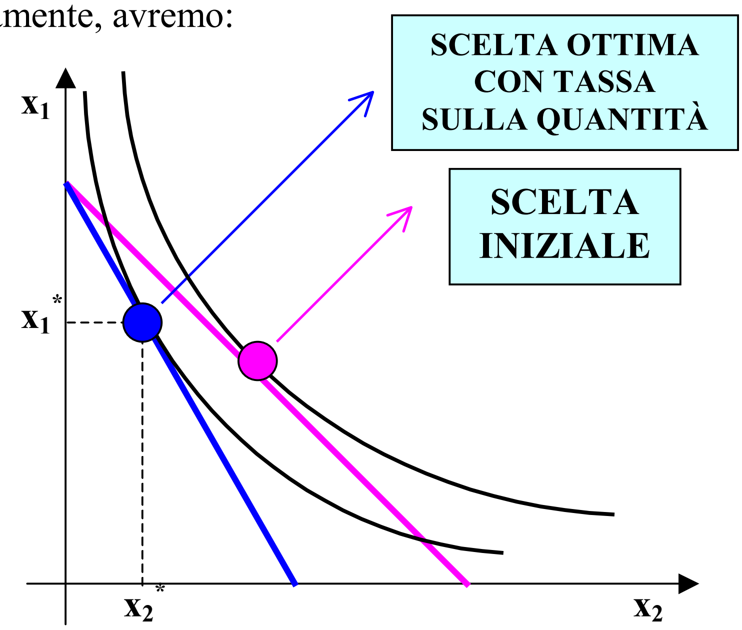
Per il consumatore una tassa sulla quantità equivale ad un aumento del prezzo del bene.

Graficamente avremo una situazione del genere:



A questo punto, non sappiamo ancora se la tassa aumenterà o diminuirà il consumo del **bene 2**, anche se supponiamo che lo farà diminuire.

Graficamente, avremo:



In ogni caso, sappiamo che la scelta ottima, $(\mathbf{x_1^*}, \mathbf{x_2^*})$, deve soddisfare il vincolo di bilancio:

$$\mathbf{p_1 * x_1^* + (p_2 + t) * x_2^* = m.} \qquad \boxed{\mathbf{A}}$$

Le entrate derivanti dalla tassa saranno:

$$\mathbf{R^* = t * x_2^*.}$$

Prendiamo ora in considerazione una **<u>tassa sul reddito</u>** che determini la stessa quantità di entrate.

Il vincolo di bilancio del consumatore sarà in questo caso:

$$\mathbf{p_1 * x_1 + p_2 * x_2 = m - R^*},$$

oppure, sostituendo $\mathbf{R^*}$:

$$\mathbf{p_1 * x_1 + p_2 * x_2 = m - t * x_2^*.}$$

Vediamo dove si trova questa retta di bilancio. È facile vedere che essa la stessa inclinazione $\mathbf{-p_2/p_1}$ della retta di bilancio di partenza (quella **fucsia**) ed è, quindi, parallela a quest'ultima. Il problema è determinarne la posizione.

Si dà il caso che la retta di bilancio in presenza della tassa sul reddito debba passare per il punto **(x_1^*, x_2^*)**: per verificarlo è sufficiente inserire **(x_1^*, x_2^*)** nel vincolo di bilancio con tassa sul reddito e verificare se è soddisfatto.

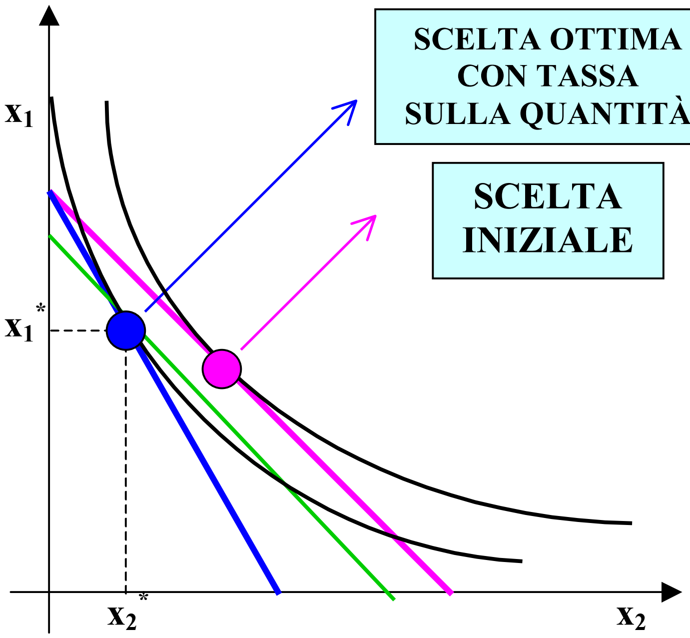
È vero, cioè, che:

$$\mathbf{p_1 \ast x_1^* + p_2 \ast x_2^* = m - t \ast x_2^*}?$$

La risposta è affermativa, poiché questa equazione è semplicemente un modo di riscrivere la $\boxed{\mathbf{A}}$, che sappiamo essere vera.

È pertanto stabilito che **(x_1^*, x_2^*)** giace sulla retta di bilancio in presenza della tassa sul reddito: rappresenta, cioè, una scelta che il consumatore **<u>può permettersi</u>**.

Graficamente, avremo:

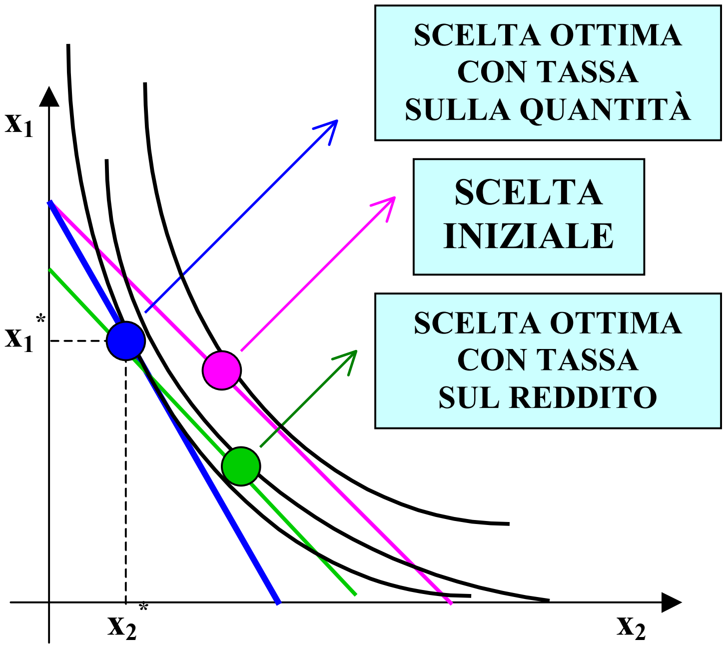


In definitiva, la retta di bilancio in presenza della tassa sul reddito (quella **verde**), è parallela alla retta iniziale (quella **fucsia**) perché ha la stessa sua inclinazione e passa per **(x_1^*, x_2^*)** che rappresenta la scelta ottima in presenta della tassa sulla quantità (sulla retta di bilancio **blu**).

È facile capire che la scelta **(x_1^*, x_2^*)** non è ottima: in corrispondenza di **(x_1^*, x_2^*)** il saggio marginale di sostituzione è **$-(p_2 + t)/p_1$**, ma la tassa sul reddito consente di scambiare a un saggio **$-\ p_2/p_1$**. Così, la retta di bilancio interseca la curva di indifferenza in corrispondenza di **(x_1^*, x_2^*)**, il che significa che sulla retta di bilancio esistono certamente dei punti preferiti a **(x_1^*, x_2^*)**.

La tassa sul reddito è pertanto sicuramente migliore della tassa sulla quantità: infatti, la quantità di denaro che il consumatore dovrà pagare sarà la stessa con entrambe le tasse, ma la sua soddisfazione sarà maggiore in presenza di una tassa sul reddito che di una sulla quantità.

Graficamente, avremo:



Questo è, indubbiamente, un bel risultato, ma è necessario capirne anche i **<u>limiti</u>**. Per prima cosa **<u>ciò vale soltanto per un consumatore</u>**. Il ragionamento dimostra che per ogni consumatore esiste una tassa sul reddito che consente allo Stato di ottenere entrate identiche a quelle ottenute con una tassa sulla quantità, e provoca una minor riduzione del benessere del consumatore. Ma l'ammontare della tassa sul reddito sarà ovviamente diverso per ciascun consumatore, quindi **<u>una tassa sul reddito uniforme per tutti i consumatori non è necessariamente migliore di una tassa sulla quantità uniforme per tutti i consumatori</u>**. (Si pensi ad un consumatore che non consumi affatto il **bene 2** - questi preferirebbe sicuramente la tassa sulla quantità ad una tassa uniforme sul reddito).
In secondo luogo, abbiamo assunto che, in presenza di una tassa sul reddito, il reddito del consumatore non vari: **<u>abbiamo assunto</u>** cioè **<u>che la tassa sul reddito sia</u>** fondamentalmente **<u>una tassa globale che diminuisce la quantità di denaro che un consumatore può spendere</u>**, **<u>ma che non influisce sulle sue scelte</u>**. Ma questa sembra un'**<u>ipotesi poco plausibile</u>**. Se il consumatore percepisce un reddito da lavoro, possiamo aspettarci che, se tassiamo il reddito, egli sia indotto a lavorare di meno, quindi, in seguito alla tassa, il reddito potrebbe ridursi di una quantità maggiore dell'ammontare della tassa.
In terzo luogo, **<u>non abbiamo considerato come reagisce l'offerta alla tassa</u>**: abbiamo visto come reagisce la domanda, ma l'analisi completa dovrebbe considerare anche le variazioni dell'offerta.

FUNZIONI DI UTILITA'

> L'utilità è un modo per rappresentare le preferenze. I valori dell'utilità ordinano le preferenze. Una trasformazione monotona trasforma un insieme di numeri in un altro mantenendone invariato l'ordine. La trasformazione monotona di una funzione di utilità rappresenta le stesse preferenze.

Data la funzione di utilità $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$, ad essa corrisponde la curva di indifferenza di equazione

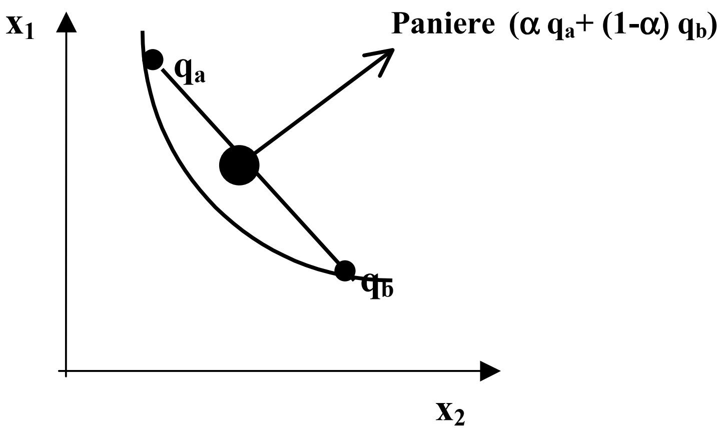
$x_1 = K / x_2$

La trasformazione monotona $v(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ della funzione di utilità $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$, esprime le stesse preferenze. Infatti per entrambe:

$SMS = - dU(x_1 x_2)/d x_1 / dU(x_1 x_2)/d x_2 = -x_1 / x_2$

> Una funzione di utilità è strettamente quasi concava se dati due panieri q_a e q_b
>
> $U(\alpha q_a + (1-\alpha) q_b) > \min(U(q_a), U(q_b))$

Se i due panieri q_a e q_b sono indifferenti e pertanto $U(q_a)=U(q_b)$ tale ipotesi coincide con l'ipotesi della stretta convessità delle curve di indifferenza.



Preferenze Cobb- Douglas

Le preferenze Cobb- Douglas sono convesse e monotone. Osserviamo alcune trasformazioni monotone della funzione di utilità Cobb-Douglas (ricordiamo che ogni trasformazione monotona di una funzione di utilità esprime le stesse preferenze e quindi ha lo stesso SMS).

Data:

$$u(x_1, x_2) = x_1^c\, x_2^{\,d}$$

SMS = $- dU(x_1\, x_2)/d\, x_1 / dU(x_1\, x_2)/d\, x_2$

SMS = $- c\, x_1^{(c-1)}\, x_2^{\,d} \,/\, d\, x_1^c\, x_2^{\,(d-1)}$

SMS = $- c\, x_2 \,/\, d\ \ x_1$

la trasformazioni monotona della Cobb-Douglas:

$$\ln (x_1^c\, x_2^{\,d}) = c \ln x_1 + d \ln x_2$$

ha SMS pari a :
SMS = $- dU(x_1\, x_2)/d\, x_1 / dU(x_1\, x_2)/d\, x_2$

SMS = $- c\ 1/ x_1 \,/\, d\ 1/ x_2$

SMS = $- c\, x_2 \,/\, d\ \ x_1$

Da una funzione di utilità Cobb Douglas è sempre possibile ottenere una trasformazione monotona tale che la somma degli esponenti sia eguale ad 1.

Infatti data:

$u(x_1, x_2) = x_1^c\, x_2^{\,d}$

elevando a 1/(c+d) si ottiene:

$u(x_1, x_2) = x_1^{c/(c+d)}\, x_2^{\,d(c+d)}$

da cui ponendo a= c/(c+d) si ottiene:(1-a)= d/(c+d) da cui :

$$\mathbf{u(x_1, x_2) = x_1^{a}\, x_2^{\,(1 - a)}}$$

Equilibrio del consumatore con preferenze Cobb- Douglas

Vediamo ora come sia possibile ottenere l'equilibrio di un consumatore le cui preferenze si possono rappresentare per mezzo di una funzione Cobb-Douglas. Dobbiamo risolvere la seguente massimizzazione vincolata:

$$\text{MAX } \ln (x_1^{c}\, x_2^{d}) = c \ln x_1 + d \ln x_2$$

sotto il vincolo:

$$p_1\, x_1 + p_2\, x_2 = m$$

Dato che il SMS deve essere eguale al rapporto tra i prezzi:

$$c\, x_2 / d\ x_1 = p_1 / p_2$$

e dato il vincolo di bilancio:

$$x_2 = m / p_2 - (p_1 / p_2) x_1$$

si ottiene:

$$c\,(m / p_2 - (p_1 / p_2) x_1) / d\ x_1 = p_1 / p_2$$

$$c\,(m - p_1\, x_1) = d\ x_1\, p_1$$

$$c\ m = (c+d)\, x_1\, p_1$$

per cui

$$\boldsymbol{x_1^* = (c/(c+d))\ m/p_1}$$

e sostituendo x_1 nel vincolo di bilancio

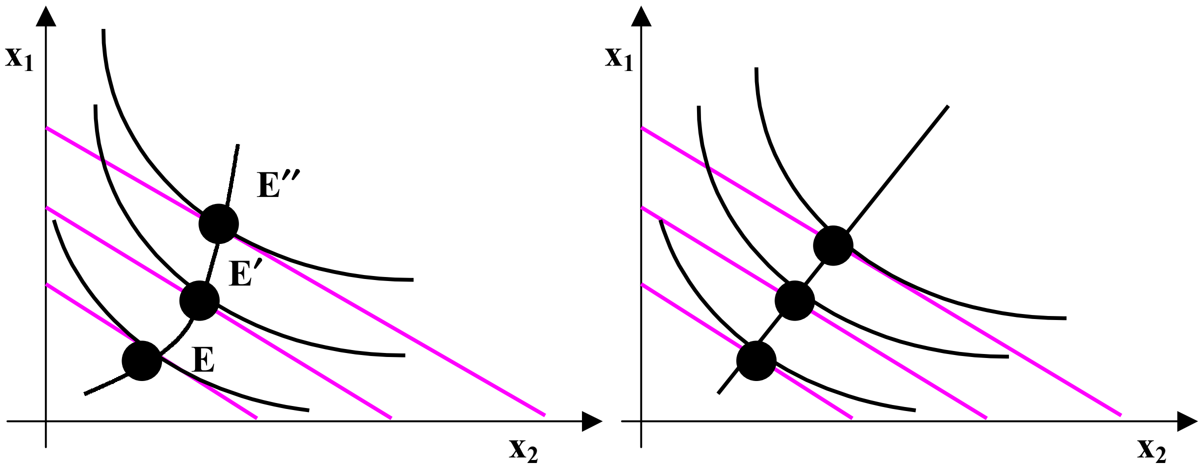
$$\boldsymbol{x_2^* = (d/(c+d))\ m/p_2}$$

RELAZIONE TRA LA QUANTITÀ DOMANDATA E IL REDDITO DELL'INDIVIDUO

IN GENERALE. Supponiamo che un individuo consumi due beni, il **bene 1** e il **bene 2**, i cui prezzi $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ rimangano invariati, ed abbia a disposizione inizialmente un reddito **m** e successivamente un reddito **m',** con **m' > m**. Possiamo chiederci come l'individuo usi la quantità addizionale di denaro (**m' – m**) a sua disposizione. L'ipotesi più probabile è che egli usi questa somma per aumentare sia il consumo del **bene 1** e del **bene 2**, cioè la **domanda** del **bene 1** e del **bene 2**. In generale, si può affermare che **la quantità di un bene domandata da un individuo è una funzione crescente del reddito dell'individuo stesso**.

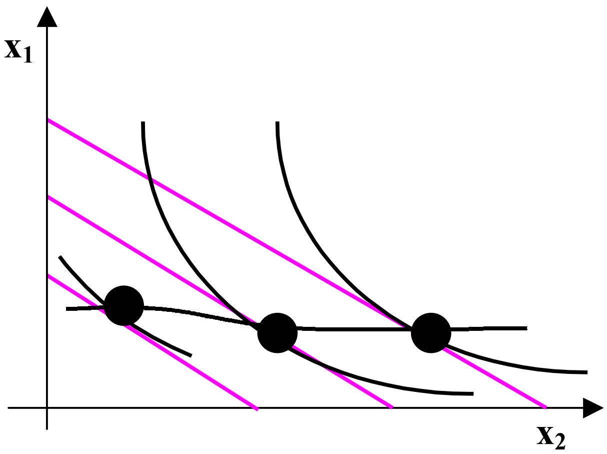
ECCEZIONI. Questa regola, però, subisce delle eccezioni. Infatti, vi sono dei beni, detti **beni inferiori**, per i quali accade il seguente fenomeno: un individuo, quando registra un aumento del suo reddito, diminuisce il consumo dei beni inferiori, per poter espandere in misura maggiore quello degli altri beni (un esempio può essere il pane nero).

GRAFICO RELATIVO AI BENI NORMALI. Passiamo ora all'illustrazione grafica. Consideriamo un consumatore la cui posizione di equilibrio è rappresentata dal punto **E**. Supponiamo che il reddito monetario di questo individuo aumenti; pertanto la retta di bilancio si traspone parallelamente verso destra. Si avrà così un nuovo punto di equilibrio **E'**. Un ulteriore aumento del reddito determinerà un'altra trasposizione della retta di bilancio verso destra e un altro punto di equilibrio **E''**.
Congiungendo questi punti si ottiene una curva, chiamata **curva reddito-consumo**.



Questa può avere forme diverse. Nella prima figura è una curve crescente, nella seconda è una retta, sempre crescente.

GRAFICO RELATIVO AI BENI INFERIORI. Nel **caso di beni inferiori** (se x_1 è inferiore) avremo la seguente situazione:

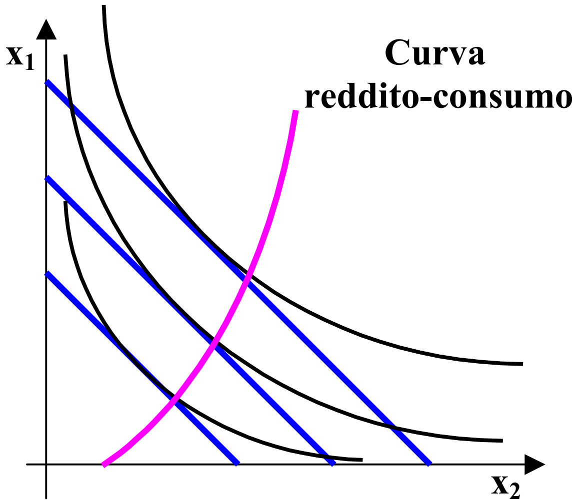


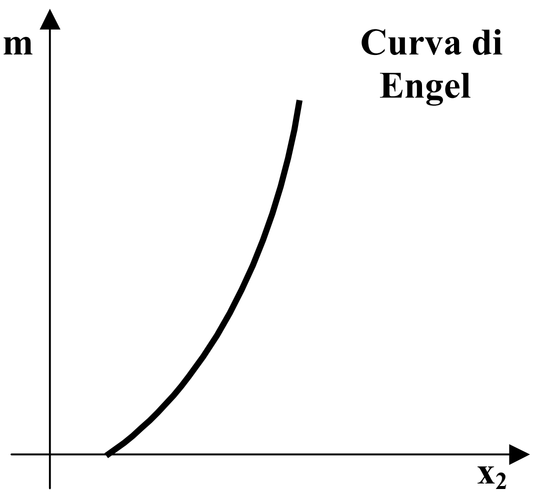
CURVE REDDITO-CONSUMO E CURVE DI ENGEL

Ricordiamo che un aumento del reddito si traduce in uno spostamento verso destra della retta di bilancio, senza che se ne modifichi l'inclinazione. Se uniamo i panieri domandati ottenuti in seguito allo spostamento verso destra della retta di bilancio, senza che se ne modifichi l'inclinazione, costruiamo la **curva reddito-consumo**, nota anche come **sentiero di espansione del reddito**.

Per ciascun livello di reddito, **m**, esisterà una scelta ottima per ciascuno dei beni. Consideriamo la scelta ottima del **bene 2** in corrispondenza di dati prezzi e reddito, $\mathbf{x_2 (P_1, P_2, m)}$: questa non è altro che la funzione di domanda del **bene 2**. Se teniamo fissi i prezzi dei beni ed osserviamo le variazioni della domanda al variare del reddito, otteniamo una curva nota come **curva di Engel**, che rappresenta la domanda di uno dei beni come funzione del reddito, se i prezzi sono mantenuti costanti.

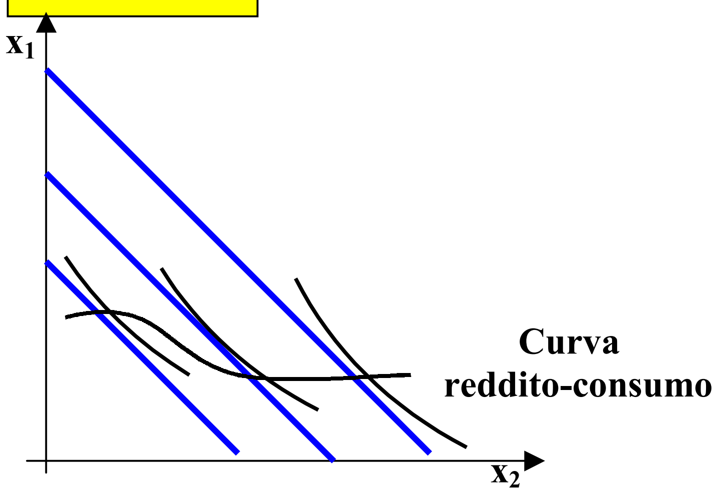
BENI NORMALI

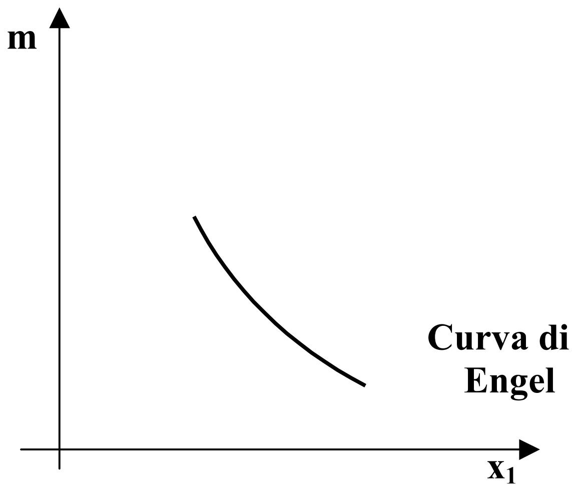




Dobbiamo precisare che la curva di Engel ad un certo punto diventa verticale, perché in corrispondenza di un certo reddito $\mathbf{m}^*$ l'individuo raggiunge un livello di saturazione e la quantità del **bene 2** domandata dall'individuo non aumenta più per all'aumentare del reddito.

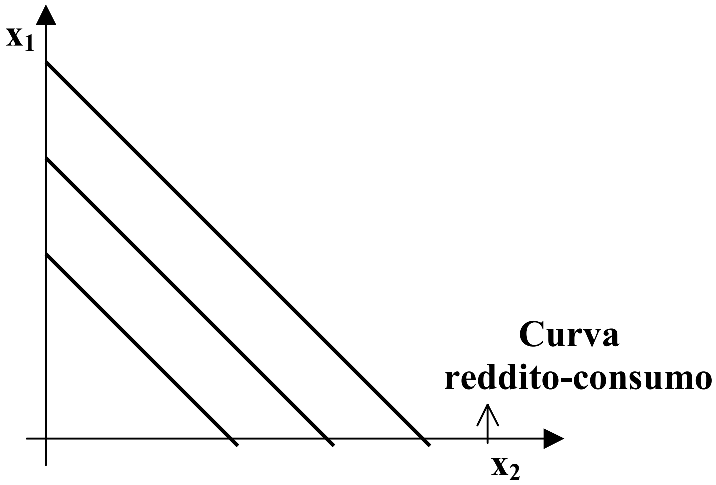
BENI INFERIORI

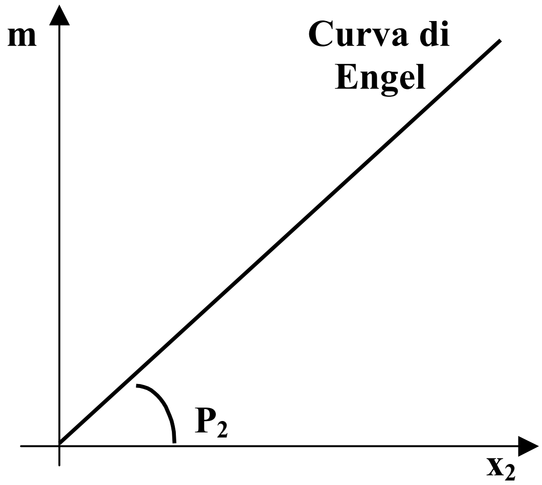




In questo caso, il **bene 1** è un bene inferiore. Aumentando il reddito, si rinuncia gradualmente al suo consumo. Si avrà, in corrispondenza, una curva di Engel decrescente.

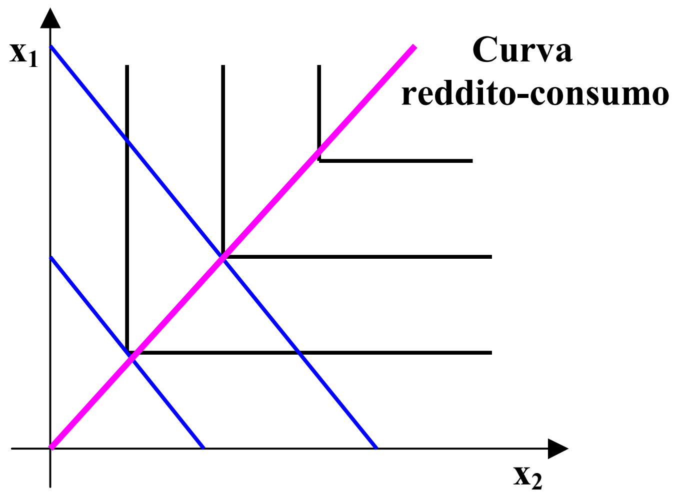
PERFETTI SOSTITUTI

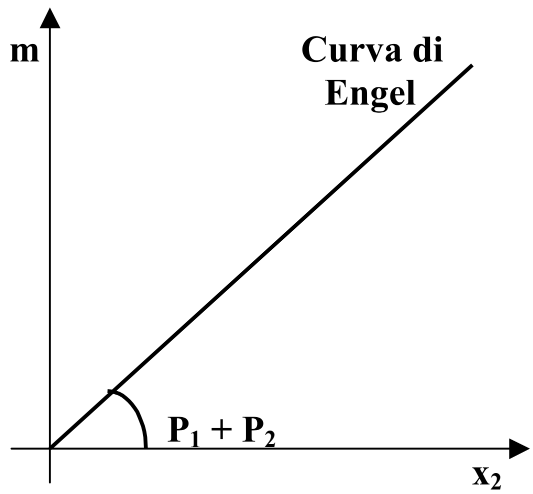




Se $\mathbf{P_2 < P_1}$, allora il consumatore si specializza nel consumo del **bene 2** e se il reddito aumenta, aumenterà anche il consumo del bene.
Poiché, in questo caso, la domanda del **bene 2** è $\mathbf{x_2 = m/P_2}$, la curva di Engel sarà una retta con inclinazione $\mathbf{P_2}$.

PERFETTI COMPLEMENTI

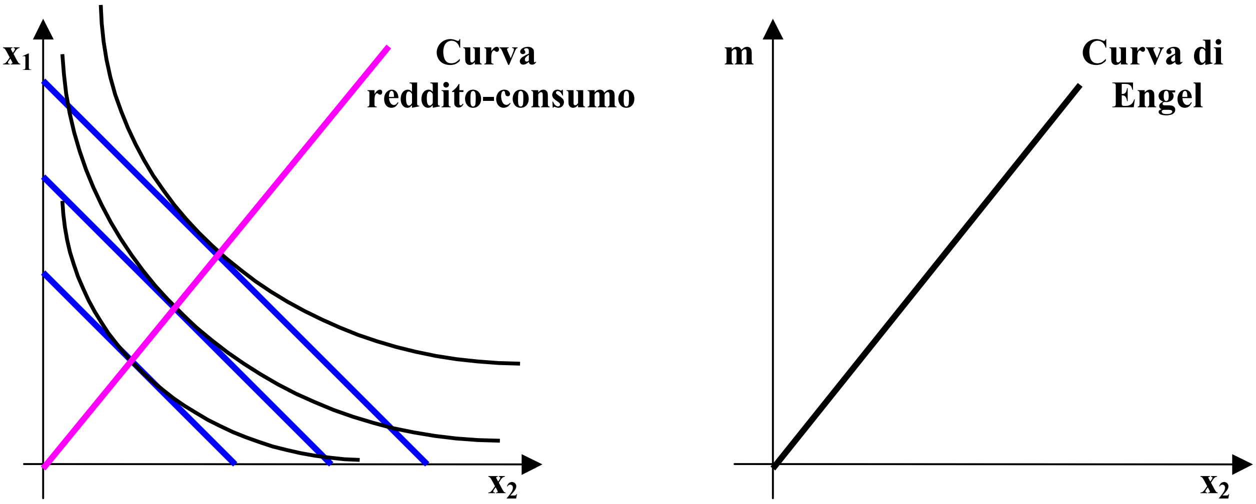




Poiché il consumatore consuma sempre la stessa quantità di ciascun bene, la curva reddito-consumo coincide con la diagonale passante per l'origine.
La domanda del **bene 2** è $\mathbf{x_2 = m/(P_1 + P_2)}$, quindi la curva di Engel sarà una retta con inclinazione $\mathbf{P_1 + P_2}$.

PREFERENZE OMOTETICHE

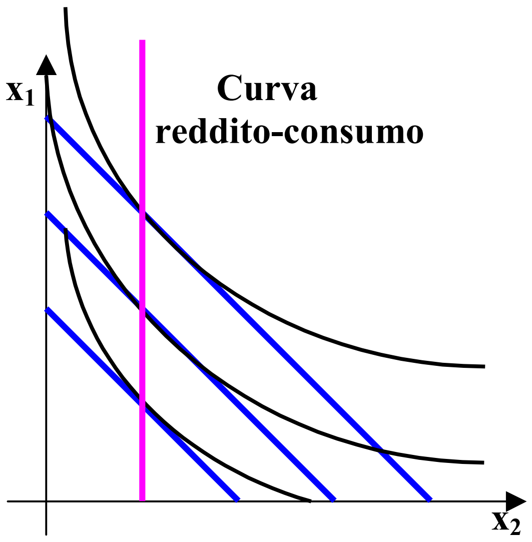
Esaminiamo il caso in cui la domanda di un bene aumenta nella stessa proporzione del reddito. Supponiamo che le preferenze del consumatore dipendano unicamente dal **rapporto** tra il **bene 1** e il **bene 2**. Ciò significa che se il consumatore preferisce **(x_1; x_2)** a **(y_1; y_2)**, allora preferisce automaticamente **($2x_1$; $2x_2$)** a **($2y_1$; $2y_2$)**, **($3x_1$; $3x_2$)** a **($3y_1$; $3y_2$)**, e così via, poiché per tutti questi panieri il rapporto tra **x** e **y** rimane costante. In effetti il consumatore, preferisce **(tx_1; tx_2)** a **(ty_1; ty_2)** per ogni valore positivo di **t**. Le preferenze che possiedono questa proprietà vengono chiamate **omotetiche**.

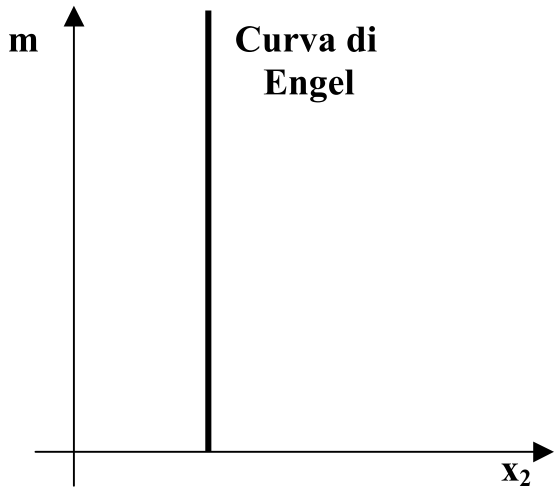


Se il consumatore ha preferenze omotetiche, le curve reddito-consumo sono rette. Più precisamente, nel caso delle preferenze omotetiche, se il reddito aumenta o diminuisce di un fattore **$t > 0$**, il paniere domandato aumenta o diminuisce nella stessa misura.
Questa affermazione può essere dimostrata rigorosamente, ma risulta già chiara dai grafici. Se la curva di indifferenza è tangente alla retta di bilancio in corrispondenza di **(x_1^*; x_2^*)**, allora la curva di indifferenza passante per **(tx_1^*; tx_2^*)**è tangente alla retta di bilancio corrispondente ad un reddito **t** volte più elevato e agli stessi prezzi. Questo implica che, in questo caso, anche le curve di Engel sono rette: se il reddito raddoppia risulterà raddoppiata anche la domanda di ciascuno dei beni.
Le preferenze omotetiche sono utili poiché gli effetti di reddito sono molto semplici, e pertanto non sono molto realistiche.

PREFERENZE QUASI-LINEARI

Un altro tipo di preferenze che determina una forma particolare di curva reddito-consumo e di curva di Engel è rappresentata dal caso di **preferenze quasi-lineari**. Si tratta del caso in cui le curve di indifferenza sono «traslazioni» di una stessa curva, come in figura:





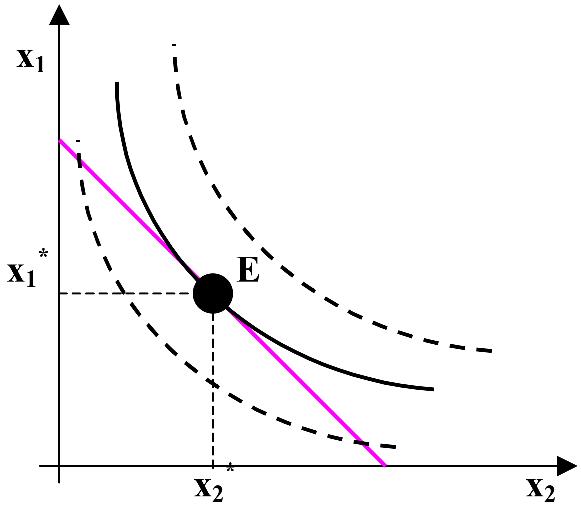
In questo caso, quando si sposta verso destra la retta di bilancio, se la curva di indifferenza è tangente alla retta di bilancio in corrispondenza di un paniere **(x_1^*; x_2^*)**, allora un'altra curva di indifferenza deve essere tangente a **(x_1^* + k; x_2^*)** per ogni costante **k**. L'aumento del reddito non fa variare la domanda del **bene 2**, e il reddito addizionale viene usato interamente per il consumo del **bene 1**. Se le preferenze sono quasi-lineari, diciamo talvolta che esiste un «effetto reddito zero» per il **bene 2**. La curva di Engel per il **bene 2** è pertanto una retta verticale: la domanda del **bene 2** rimane costante al variare del reddito. L'ipotesi di quasi-linearità è certamente plausibile quando consideriamo una scelta tra tutti gli altri beni e un certo singolo bene che non occupi una posizione molto importante nel bilancio del consumatore.

LA LEGGE DI ENGEL

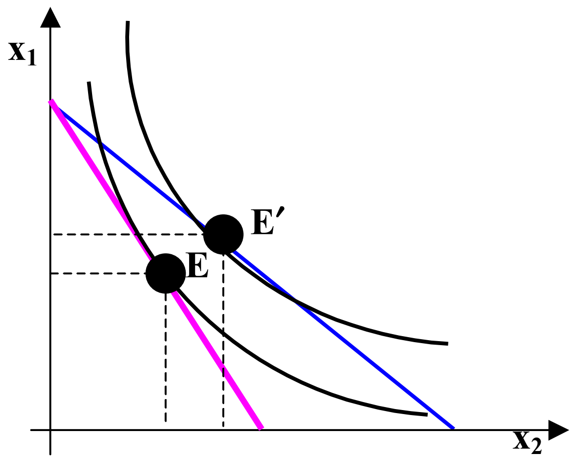
I beni di consumo possono essere distinti in inferiori, primari e secondari (cioè di lusso).
I **beni inferiori** sono quelli per i quali un individuo ne diminuisce il consumo all'aumentare del reddito (il pane nero).
I **beni primari** sono destinati a soddisfare bisogni essenziali, come i generi alimentari e il vestiario.
I **beni secondari** o **di lusso** soddisfano bisogni non essenziali (pellicce, gioielli, ecc.).
Lo statistico tedesco E. Engel nella seconda metà dell'Ottocento enunciò la seguente legge, verificata empiricamente per diversi Paesi**: il consumatore**, **quando il suo reddito aumenta**, **abbandona gradualmente i beni inferiori**; **aumenta sia il consumo dei beni primari sia quello dei beni secondari**; **aumenta però la quota (percentuale) di reddito destinata all'acquisto dei beni secondari e diminuisce quella destinata all'acquisto dei beni primari**.

LA CURVA DI DOMANDA INDIVIDUALE: RELAZIONE TRA LA QUANTITÀ DOMANDATA DI UN BENE E IL SUO PREZZO

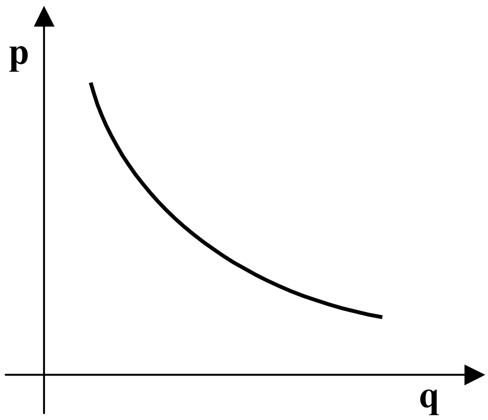
Le quantità di beni che un individuo consuma dipendono dalla struttura dei suoi gusti (rappresentata dalla funzione di utilità o dalla mappa di curve di indifferenza), dal reddito monetario che egli ha a disposizione e dai prezzi dei beni (grandezze rappresentate nella retta di bilancio).
Consideriamo un individuo la cui mappa di curve di indifferenza è rappresentata nel seguente grafico e che abbia a disposizione un certo reddito **m** che spende completamente nell'acquisto del **bene 1** e del **bene 2**, i cui prezzi sono rispettivamente $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$. L'equazione di bilancio, $\mathbf{p_1x_1 + p_2x_2 = m}$, è anch'essa rappresentata nel grafico.
Il punto di equilibrio dell'individuo è, in **E**, rappresentato dalla combinazione di beni $\mathbf{(x_1^*, x_2^*)}$.



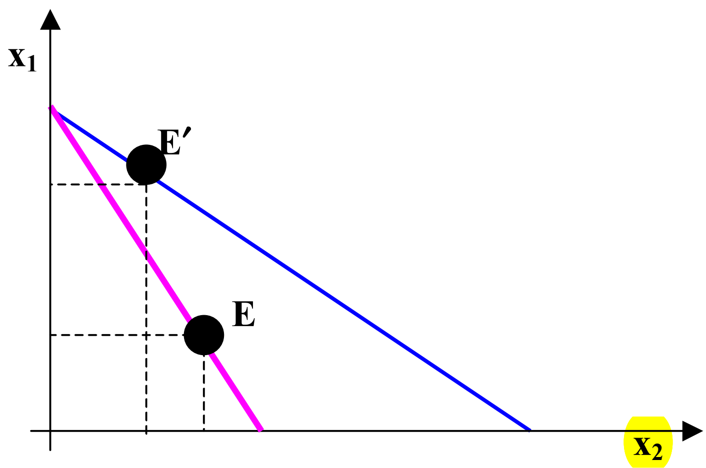
Supponiamo ora che il prezzo del **bene 2** diminuisca. Naturalmente, la posizione di equilibrio (cioè di massima utilità) dell'individuo cambierà. Possiamo chiederci cosa farà l'individuo. Tutto dipende dalla struttura dei suoi gusti. Normalmente possiamo ritenere che egli aumenterà sia il consumo del **bene 1** che del **bene 2**, per cui possiamo affermare in generale che se il prezzo del **bene 2** diminuisce, la quantità del **bene 2** che l'individuo comprerà, cioè la quantità del **bene 2** domandata dall'individuo sul mercato, aumenterà. Vediamo cosa accade graficamente. Ovviamente una diminuzione di $\mathbf{p_2}$ provoca uno spostamento della retta di bilancio verso destra, restando ferma l'intersezione con l'asse delle ordinate, dato che $\mathbf{p_1}$ resta invariato.



L'individuo ha una nuova posizione di equilibrio, rappresentata dal punto **E'**, in cui consuma una quantità maggiore sia del **bene 1** che del **bene 2**.
Se ipotizziamo una ulteriore diminuzione del prezzo del **bene 2**, avremo un ulteriore spostamento verso destra della retta di bilancio e una nuova posizione di equilibrio, in cui l'individuo consumerà una quantità ancora maggiore sia del **bene 1** che del **bene 2**.
Pertanto ogni volta che il prezzo del **bene 2** diminuirà, la quantità del **bene 2** domandata dall'individuo aumenterà.
Si può quindi enunciare la seguente legge, detta **legge della domanda**: **la quantità di un bene domandata da un individuo è una funzione decrescente del prezzo del bene**.
Se indichiamo con **q** la quantità domandata e con **p** il prezzo del bene, la legge può essere così illustrata:

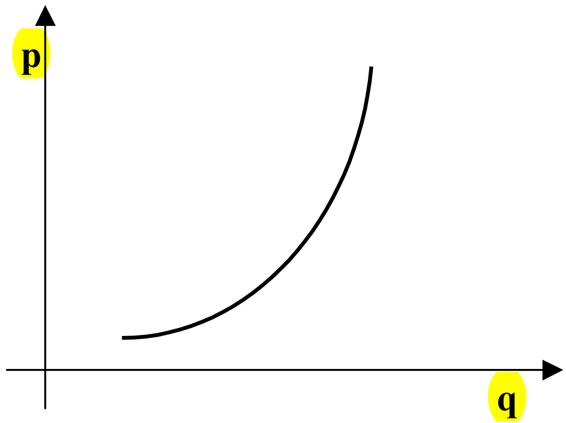


La curva è chiamata **curva di domanda individuale** ed esprime, quindi, la relazione tra la quantità di un bene domandata da un individuo e il prezzo del bene. Essa è decrescente.
Questo è il caso generale, ma tale legge può subire delle eccezioni. Supponiamo, infatti, che al diminuire del prezzo del **bene 2**, l'individuo ne diminuisca il consumo. Se si verificasse questo caso, la legge che afferma che la quantità domandata di un bene è funzione decrescente del suo prezzo sarebbe smentita, perché ad una diminuzione del prezzo del **bene 2** corrisponderebbe una diminuzione della sua domanda. Il seguente grafico mostra come ciò può accadere a causa della struttura dei gusti dell'individuo, cioè della posizione e dell'inclinazione delle sue curve di indifferenza. Nel punto **E'** il consumo del **bene 2** è minore che nel punto **E**.



I beni per i quali quando diminuisce il prezzo si verifica una diminuzione della domanda sono chiamati **beni di Giffen** dal nome dell'economista inglese Robert Giffen della metà dell'Ottocento che studiò tale fenomeno.

La curva di domanda individuale per i beni di Giffen è quindi **crescente**, come nel seguente grafico:



EFFETTO PREZZO, EFFETTO REDDITO ED EFFETTO SOSTITUZIONE

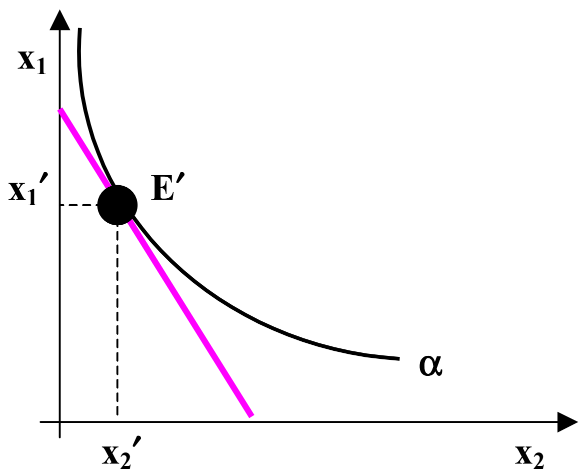
La relazione fra la quantità domandata di un bene e la diminuzione del suo prezzo può essere approfondita seguendo l'impostazione dell'economista russo E. Slutsky dei primi del '900 e dell'inglese J. R. Hicks della metà del '900, che hanno introdotto nell'analisi economica i concetti di effetto prezzo, effetto reddito ed effetto sostituzione.

Supponiamo di avere due beni: il **bene 1** e il **bene 2**. La diminuzione del prezzo del **bene 2** produce un effetto sulla sua domanda da parte dell'individuo considerato, chiamato **effetto prezzo**. La diminuzione del prezzo del **bene 2** produce nell'individuo un duplice stimolo: da un lato lo spinge a domandare una quantità maggiore del bene, per il solo fatto che è diventato più conveniente (questo è chiamato **effetto sostituzione**); dall'altro la diminuzione del prezzo del bene farà aumentare il reddito reale dell'individuo (parleremo quindi di **effetto reddito**): questi ora con lo stesso reddito monetario può acquistare una maggiore quantità di beni. Il potere d'acquisto del suo reddito monetario, cioè il suo reddito reale, è aumentato. L'aumento del reddito reale spingerà l'individuo ad aumentare la domanda di beni e quindi anche la domanda del bene il cui prezzo è diminuito, a meno che esso non sia un bene inferiore.

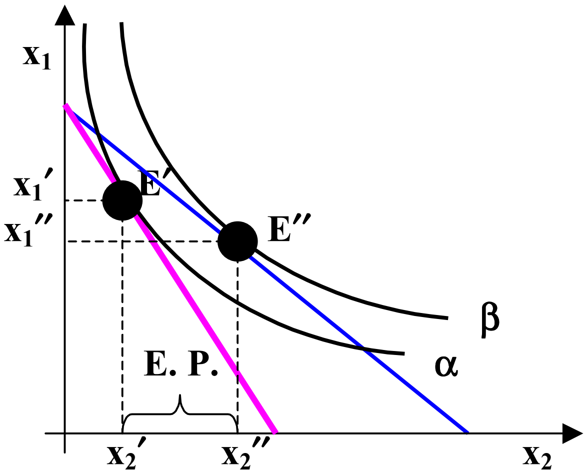
Comunque, possiamo affermare che **l'effetto prezzo è dato dalla somma dell'effetto sostituzione e dell'effetto reddito**. Nella realtà noi rileviamo solo l'effetto prezzo; però, mediante un artificio logico, possiamo scomporlo nell'effetto sostituzione e nell'effetto reddito.

METODO DI HICKS

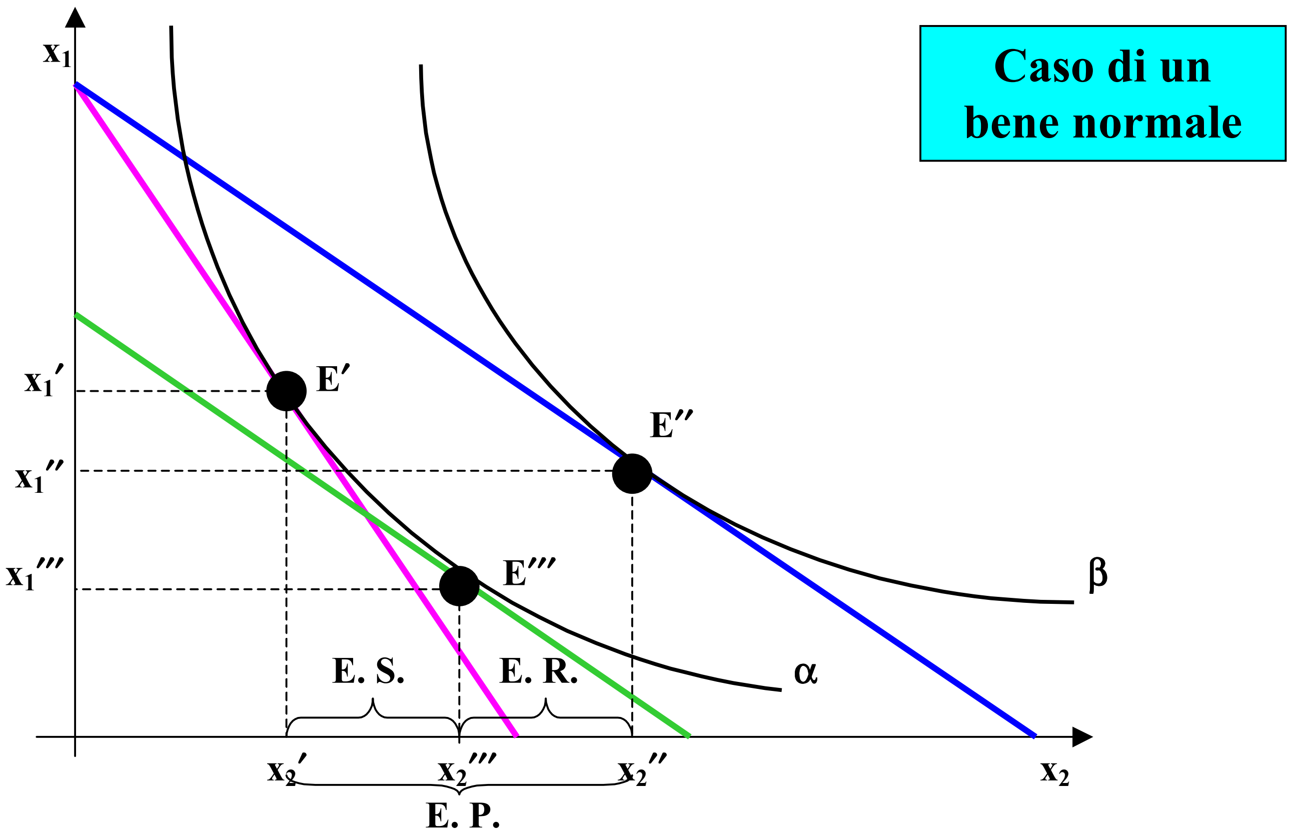
CASO DI UN BENE NORMALE. Consideriamo prima il **caso di un bene normale**. L'individuo consuma due beni x_1 e x_2, i cui prezzi sono rispettivamente P_1 e P_2 ed ha a disposizione un reddito **m**. I suoi gusti sono rappresentati da una determinata mappa di curve di indifferenza. Inizialmente, **E'** (che giace sulla curva di indifferenza α) rappresenterà il punto di equilibrio, quindi (x_1', x_2') sarà il paniere ottimo acquistato dal consumatore.



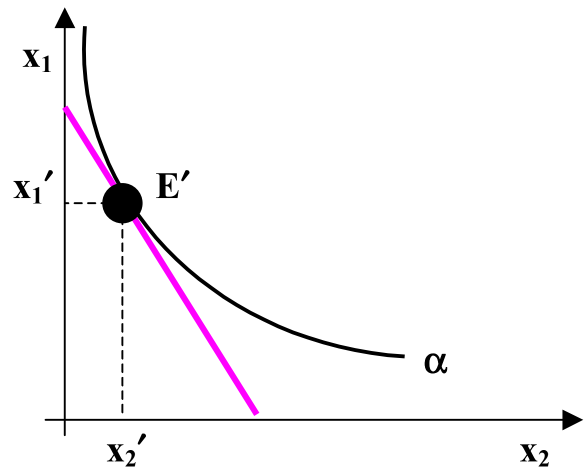
Supponiamo che il prezzo di $\mathbf{x_2}$ diminuisca e che tutti gli altri dati restino invariati. Avremo un nuova retta di bilancio (più spostata verso destra) e un nuovo punto di equilibrio **E''** (giacente sulla curva di indifferenza **β**). Il paniere **(x_1'', x_2'')** sarà la combinazione ottima acquistata dal consumatore. Il passaggio da **E'** a **E''** rappresenta l'**<u>effetto prezzo</u>**. Graficamente:



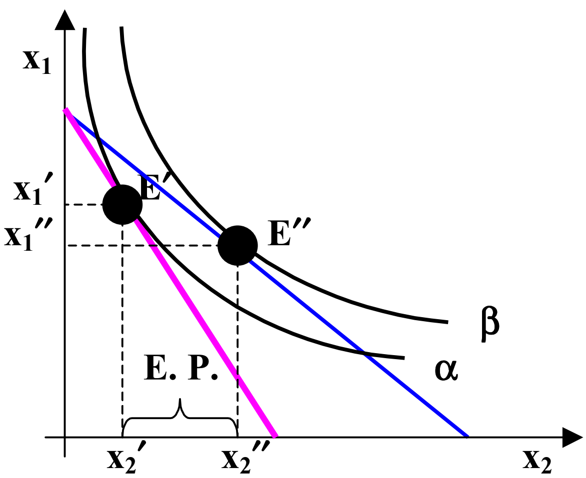
Supponiamo ora che si sia verificata la diminuzione di prezzo di x_2, ma simultaneamente l'individuo abbia avuto una diminuzione del suo reddito monetario che lo costringa a rimanere sulla prima curva di indifferenza α.
Graficamente avremo una nuova retta di bilancio ottenuta arretrando parallelamente la seconda retta di bilancio verso l'origine degli assi (parallelamente perché essa ha lo stesso valore di $-P_2/P_1$ e quindi la stessa pendenza), fino a divenire tangente alla curva di indifferenza α (abbiamo presupposto la tangenza ad α per eliminare l'effetto reddito).



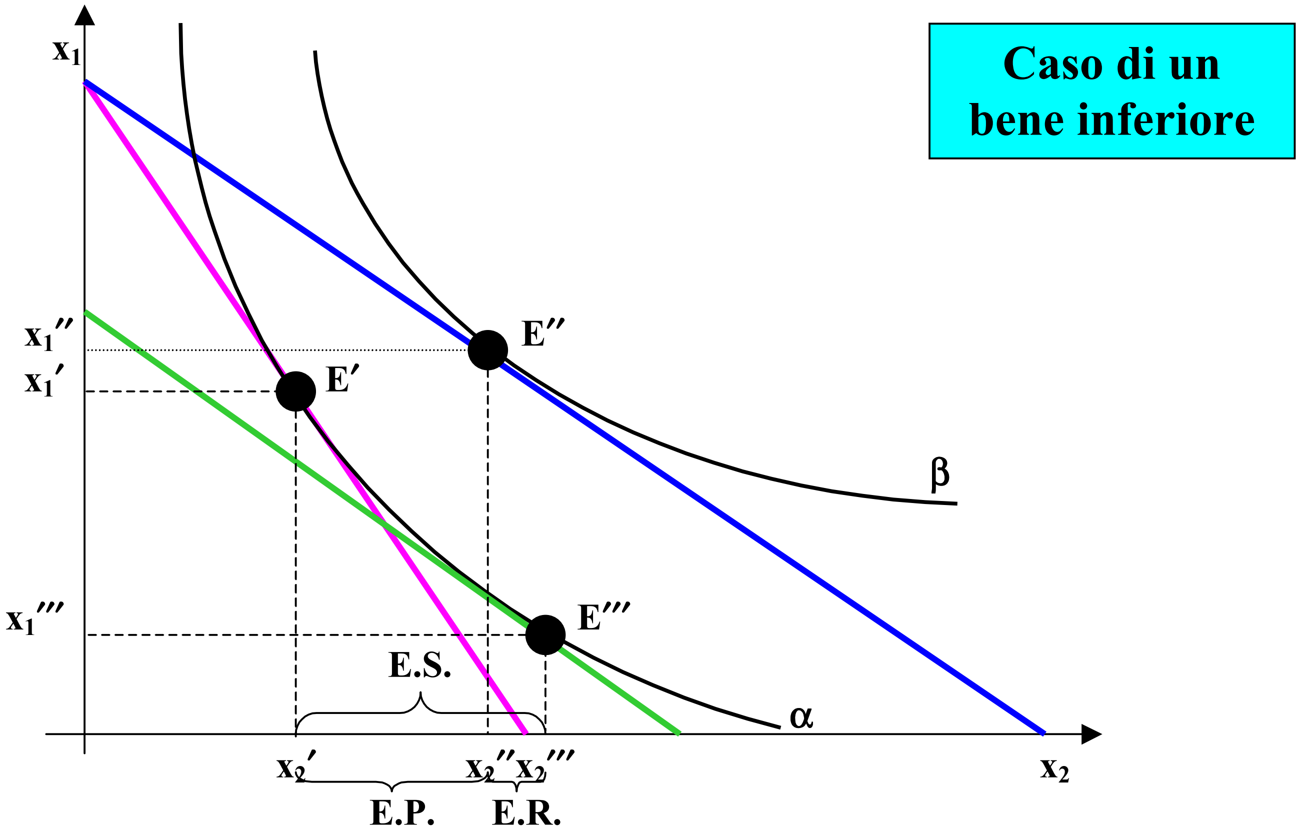
L'equilibrio del consumatore ora è rappresentato dal punto **E'''**, che , per costruzione, si trova a destra di **E'** e quindi comporta un aumento del consumo di $\mathbf{x_2}$.
Il passaggio da **E'** a **E'''** è l'**effetto sostituzione**, cioè l'aumento di domanda di $\mathbf{x_2}$ determinato da una diminuzione del prezzo, avendo eliminato l'effetto reddito, ossia l'effetto prodotto dall'aumento di reddito reale generato dalla diminuzione di prezzo di $\mathbf{x_2}$. Infatti, **l'ipotesi fondamentale del metodo di Hicks è che l'individuo non subisce effetti di reddito se non cambia la sua utilità, quindi se rimane sulla stessa curva di indifferenza**.
Il passaggio da **E'''** a **E''** rappresenta l'**effetto reddito**.
Pertanto il passaggio da **E'** a **E''**, che è l'**effetto prezzo**, può essere scomposto nel passaggio da **E'** a **E'''** (effetto sostituzione) e nel passaggio da **E'''** a **E''** (effetto reddito). L'effetto prezzo è la somma dell'effetto sostituzione e dell'effetto reddito e, per un bene normale, conseguente alla diminuzione del prezzo di $\mathbf{x_2}$, determina un aumento della domanda di $\mathbf{x_2}$.
CASO DI UN BENE INFERIORE. Consideriamo ora il **caso di un bene inferiore**, cioè di un bene il cui consumo diminuisce all'aumentare del reddito. L'individuo consuma due beni $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, i cui prezzi sono rispettivamente $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ ed ha a disposizione un reddito **m**. I suoi gusti sono rappresentati da una determinata mappa di curve di indifferenza. Inizialmente **E'** (che giace sulla curva di indifferenza α) rappresenterà il punto di equilibrio, quindi $\mathbf{(x_1', x_2')}$ sarà il paniere ottimo acquistato dal consumatore.



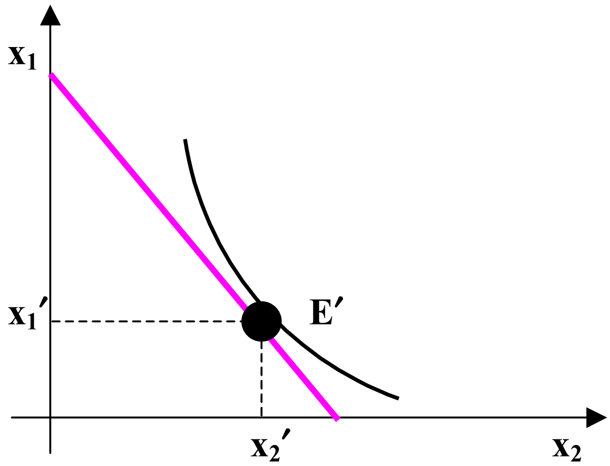
Supponiamo che il prezzo di $\mathbf{x_2}$ diminuisca e che tutti gli altri dati restino invariati. Avremo un nuova retta di bilancio (più spostata verso destra) e un nuovo punto di equilibrio **E''** (giacente sulla curva di indifferenza β). Il paniere $\mathbf{(x_1'', x_2'')}$ sarà la combinazione ottima acquistata dal consumatore. Il passaggio da **E'** a **E''** rappresenta l'**effetto prezzo**. Graficamente:



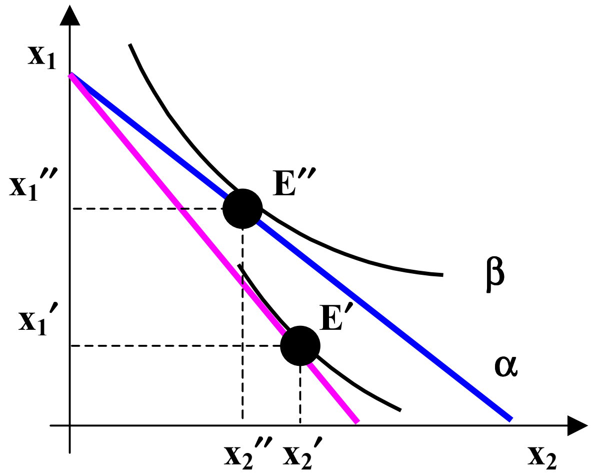
Supponiamo ora che si sia verificata la diminuzione di prezzo di $\mathbf{x_2}$, ma simultaneamente l'individuo abbia avuto una diminuzione del suo reddito monetario che lo costringa a rimanere sulla prima curva di indifferenza α.
Graficamente avremo una nuova retta di bilancio ottenuta arretrando parallelamente la seconda retta di bilancio verso l'origine degli assi (parallelamente perché essa ha lo stesso valore di $-\mathbf{P_2/P_1}$ e quindi la stessa pendenza), fino a divenire tangente alla curva di indifferenza α (abbiamo presupposto la tangenza ad α per eliminare l'effetto reddito).



L'equilibrio del consumatore ora è rappresentato dal punto **E'''**, che , per costruzione, si trova a destra di **E'** e quindi comporta un aumento del consumo di $\mathbf{x_2}$. Il passaggio da **E'** a **E'''** è l'**<u>effetto sostituzione</u>**, cioè l'aumento di domanda di $\mathbf{x_2}$ determinato da una diminuzione del prezzo.
Ma in questo caso, trattandosi si un bene inferiore, **E''** non si trova più a destra di **E'''**, come accadeva per i beni normali, ma a sinistra, giacché, in questo caso, un aumento di reddito fa registrare una diminuzione di domanda di $\mathbf{x_2}$. Il passaggio da **E'''** a **E''** , che rappresenta l'**<u>effetto reddito</u>** è negativo.
In questo caso, l'**<u>effetto prezzo</u>** sarà sempre positivo, ma l'effetto reddito compenserà parzialmente l'effetto sostituzione.
<u>CASO DEI BENI DI GIFFEN</u>. Consideriamo ora il **<u>caso dei beni di Giffen</u>**, cioè di quei particolari beni per cui al diminuire del prezzo si registra una diminuzione della domanda. L'individuo consuma due beni $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, i cui prezzi sono rispettivamente $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ ed ha a disposizione un reddito **m**. I suoi gusti sono rappresentati da una determinata mappa di curve di indifferenza. Inizialmente, **E'** (che giace sulla curva di indifferenza α) rappresenterà il punto di equilibrio, quindi $(\mathbf{x_1', x_2'})$ sarà il paniere ottimo acquistato dal consumatore.

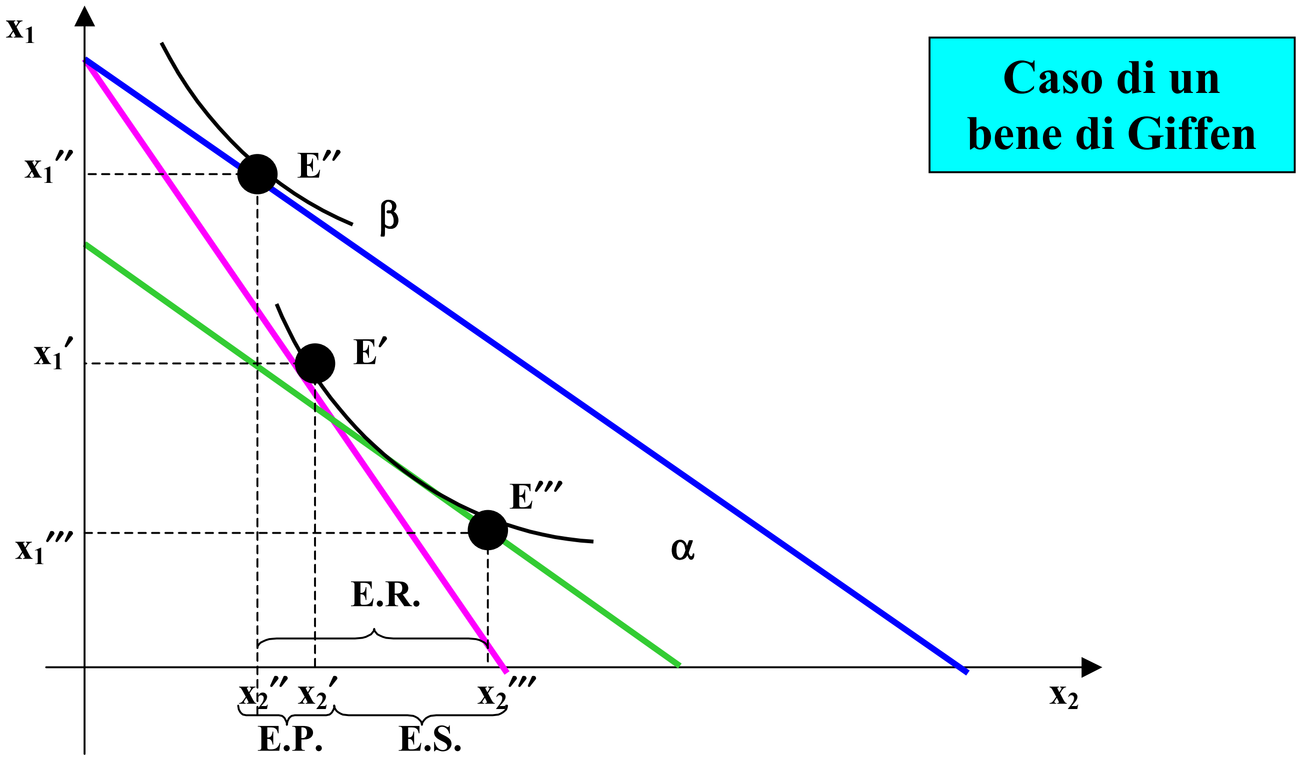


Supponiamo che il prezzo di $\mathbf{x_2}$ diminuisca e che tutti gli altri dati restino invariati. Avremo un nuova retta di bilancio (più spostata verso destra) e un nuovo punto di equilibrio **E''** (giacente sulla curva di indifferenza β), che si trova a sinistra di **E'**, dato che si tratta di un bene di Giffen per cui diminuisce la domanda al diminuire del prezzo. Il paniere **(x_1'', x_2'')** sarà la combinazione ottima acquistata dal consumatore. Il passaggio da **E'** a **E''** rappresenta l'**<u>effetto prezzo</u>**, che, in questo caso, è negativo. Graficamente:



Supponiamo ora che si sia verificata la diminuzione di prezzo di $\mathbf{x_2}$, ma simultaneamente l'individuo abbia avuto una diminuzione del suo reddito monetario che lo costringa a rimanere sulla prima curva di indifferenza α.

Graficamente avremo una nuova retta di bilancio ottenuta arretrando parallelamente la seconda retta di bilancio verso l'origine degli assi (parallelamente perché essa ha lo stesso valore di $\mathbf{-\ P_2/P_1}$ e quindi la stessa pendenza), fino a divenire tangente alla curva di indifferenza α (abbiamo presupposto la tangenza ad α per eliminare l'effetto reddito).



L'equilibrio del consumatore ora è rappresentato dal punto **E'''**, che , per costruzione, si trova anche in questo caso a destra di **E'** e quindi comporta un aumento del consumo di $\mathbf{x_2}$. Il passaggio da **E'** a **E'''** è l'**effetto sostituzione**, cioè l'aumento di domanda di $\mathbf{x_2}$ determinato da una diminuzione del prezzo.

E'', invece, non si trova più a destra di **E'''**, come accadeva per i beni normali, ma a sinistra. Il passaggio da **E'''** a **E''** , che rappresenta l'**effetto reddito** è negativo.

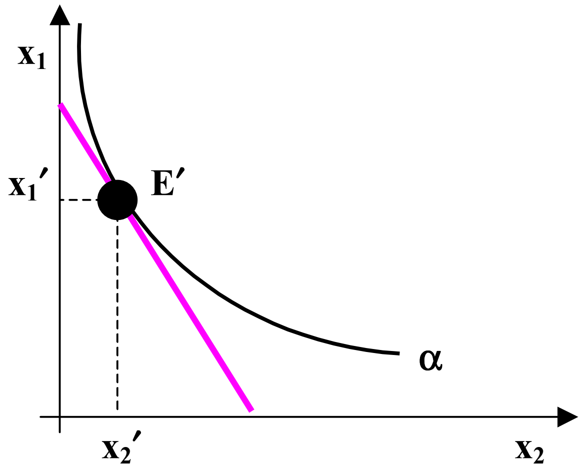
In questo caso, l'**effetto prezzo** sarà negativo, giacché l'effetto reddito compenserà totalmente l'effetto sostituzione. Questo si dice il **paradosso di Giffen**.

CONCLUSIONI: **In generale la diminuzione del prezzo di un bene determina l'aumento della domanda del bene stesso, e quindi la curva di domanda è decrescente.**

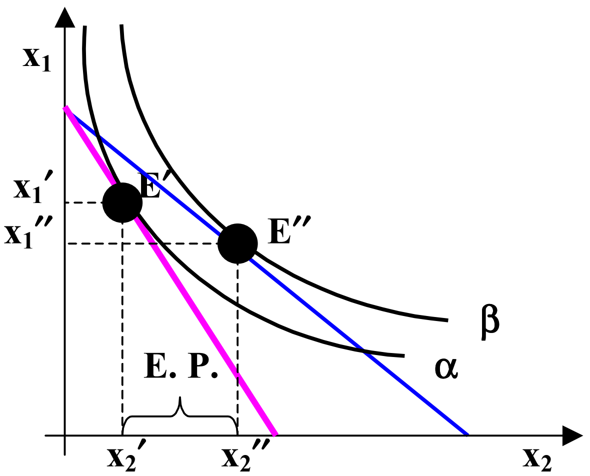
Però per alcuni beni si verifica il paradosso di Giffen per cui al diminuire del prezzo di un bene segue la diminuzione della domanda del bene stesso: la curva di domanda risulta crescente. Tuttavia, se depuriamo l'effetto prezzo dall'effetto di reddito e consideriamo quindi solo l'effetto di sostituzione, siamo sicuri che una diminuzione del prezzo determina sempre un aumento della sua domanda, anche per i beni di Giffen. Il segno dell'effetto sostituzione pertanto è sempre negativo (perché ad una variazione del prezzo segue una variazione della quantità domandata di segno opposto) mentre quello dell'effetto di reddito può essere negativo, come per i beni normali, o positivo, come per i beni inferiori.

METODO DI SLUTSKY

CASO DI UN BENE NORMALE. Consideriamo prima il **caso di un bene normale**. L'individuo consuma due beni $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, i cui prezzi sono rispettivamente $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ ed ha a disposizione un reddito **m**. I suoi gusti sono rappresentati da una determinata mappa di curve di indifferenza. Inizialmente, **E'** (che giace sulla curva di indifferenza α) rappresenterà il punto di equilibrio, quindi $(\mathbf{x_1', x_2'})$ sarà il paniere ottimo acquistato dal consumatore. Graficamente:

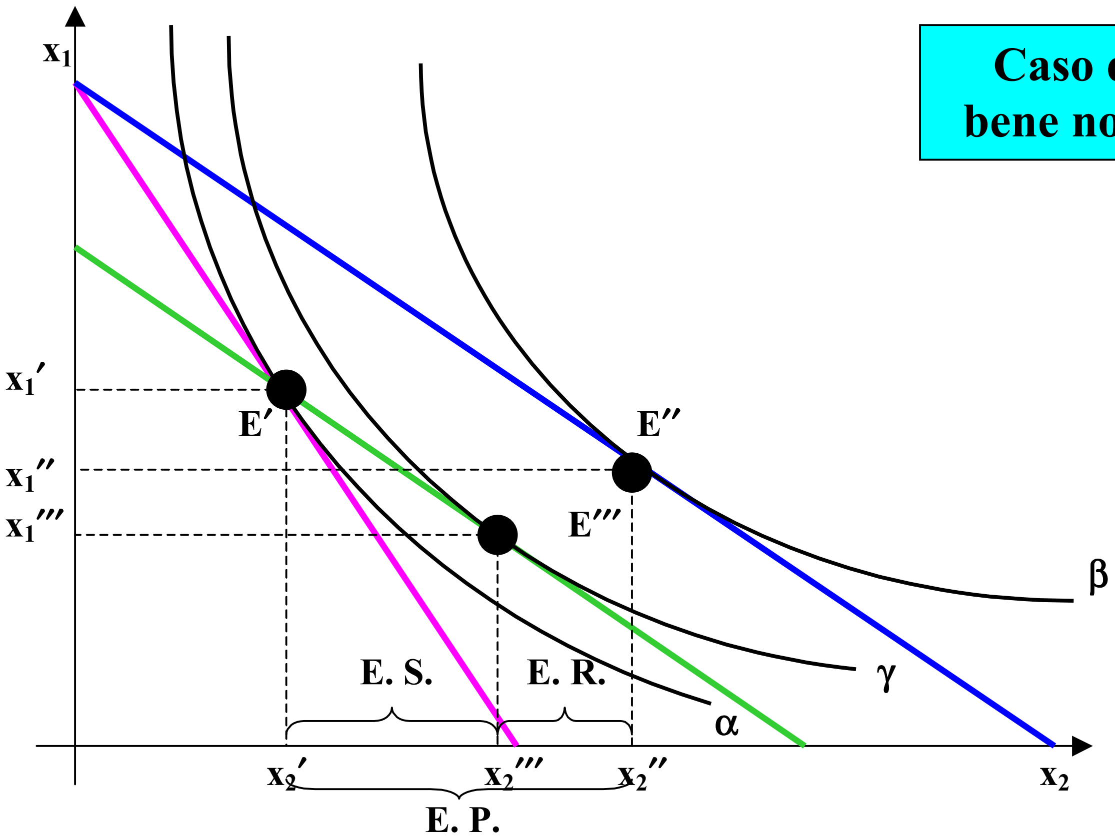


Supponiamo che il prezzo di $\mathbf{x_2}$ diminuisca e che tutti gli altri dati restino invariati. Avremo un nuova retta di bilancio (più spostata verso destra) e un nuovo punto di equilibrio **E''** (giacente sulla curva di indifferenza β). Il paniere $(\mathbf{x_1'', x_2''})$ sarà la combinazione ottima acquistata dal consumatore. Il passaggio da **E'** a **E''** rappresenta l'**effetto prezzo**. Graficamente:

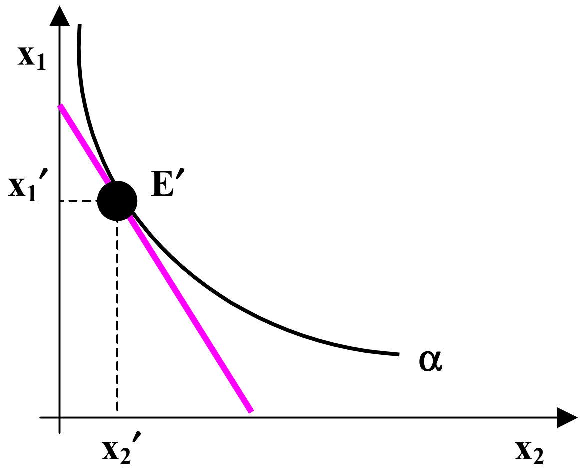


Ora dobbiamo cercare di scorporare l'effetto prezzo nell'effetto sostituzione e nell'effetto reddito. Col metodo di Slutsky dobbiamo «aggiustare» il reddito monetario in modo da tener costante il potere d'acquisto, cioè in modo che il consumatore abbia abbastanza denaro da poter acquistare la stessa combinazione **E'** che acquistava in precedenza.
Quindi, graficamente dobbiamo ruotare la retta attorno al punto **E'** e spostarla in modo che sia parallela alla nuova retta di bilancio.

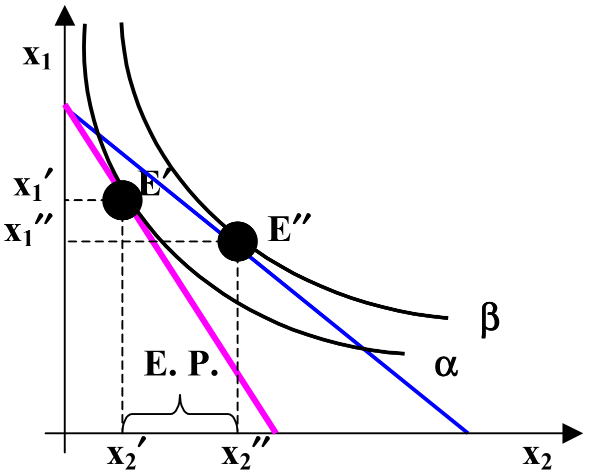
Caso di un bene normale



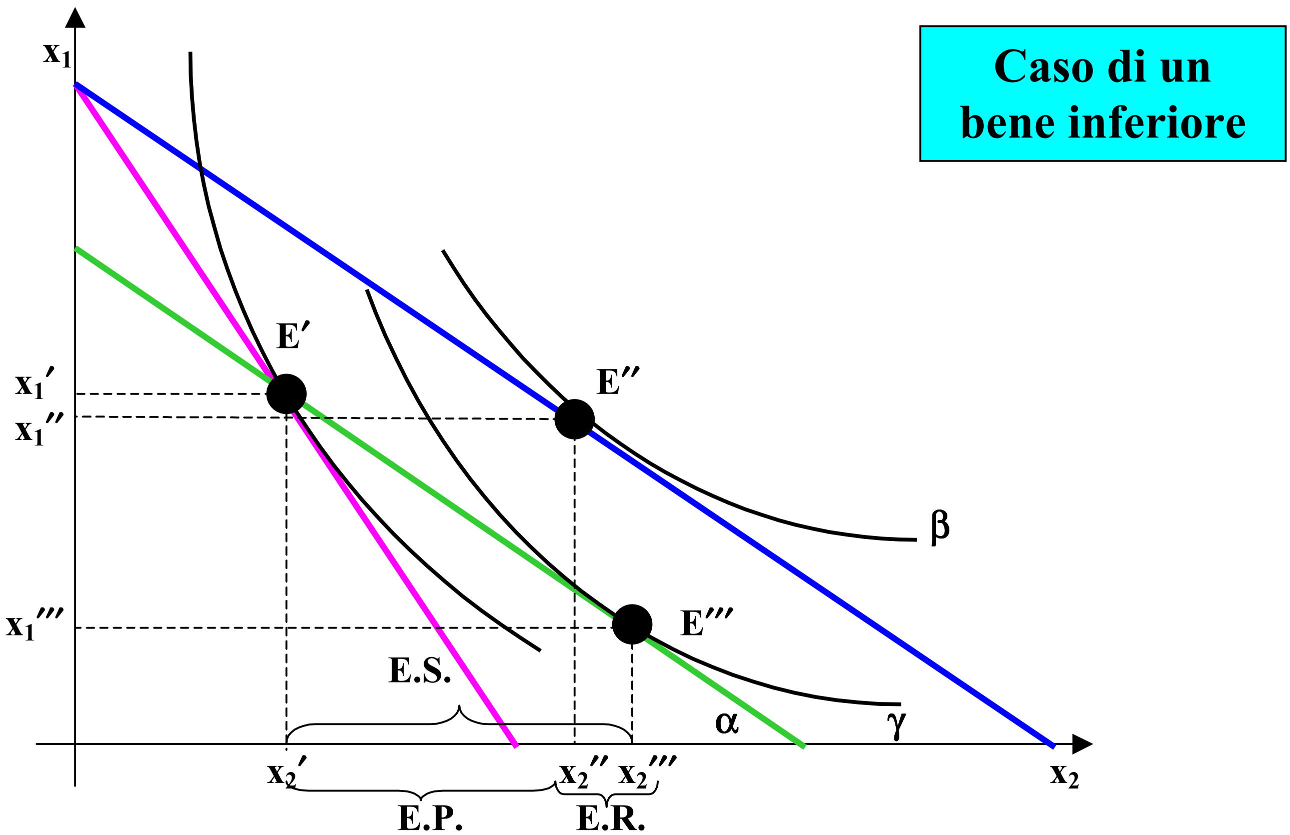
Ora il punto di equilibrio sarà **E'''**.
Il passaggio da **E'** a **E'''** è l'**effetto sostituzione**, cioè l'aumento di domanda di $\mathbf{x_2}$ determinato da una diminuzione del prezzo.
Il passaggio da **E'''** a **E''** rappresenta l'**effetto reddito**.
L'**effetto prezzo** è la somma dell'effetto sostituzione e dell'effetto reddito e, per un bene normale, conseguente alla diminuzione del prezzo di $\mathbf{x_2}$, determina un aumento della domanda di $\mathbf{x_2}$.
CASO DI UN BENE INFERIORE. Consideriamo ora il **caso di un bene inferiore**, cioè di un bene per cui all'aumentare del reddito, diminuisce il consumo. L'individuo consuma due beni $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, i cui prezzi sono rispettivamente $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ ed ha a disposizione un reddito **m**. I suoi gusti sono rappresentati da una determinata mappa di curve di indifferenza. Inizialmente, **E'** (che giace sulla curva di indifferenza α) rappresenterà il punto di equilibrio, quindi $\mathbf{(x_1', x_2')}$ sarà il paniere ottimo acquistato dal consumatore. Graficamente:



Supponiamo che il prezzo di x_2 diminuisca e che tutti gli altri dati restino invariati. Avremo un nuova retta di bilancio (più spostata verso destra) e un nuovo punto di equilibrio **E''** (giacente sulla curva di indifferenza **β**). Il paniere **(x_1'', x_2'')** sarà la combinazione ottima acquistata dal consumatore. Il passaggio da **E'** a **E''** rappresenta l'**effetto prezzo**. Graficamente:



Ora dobbiamo cercare di scorporare l'effetto prezzo nell'effetto sostituzione e nell'effetto reddito. Col metodo di Slutsky dobbiamo «aggiustare» il reddito monetario in modo da tener costante il potere d'acquisto, cioè in modo che il consumatore abbia abbastanza denaro da poter acquistare la stessa combinazione **E'** che acquistava in precedenza.



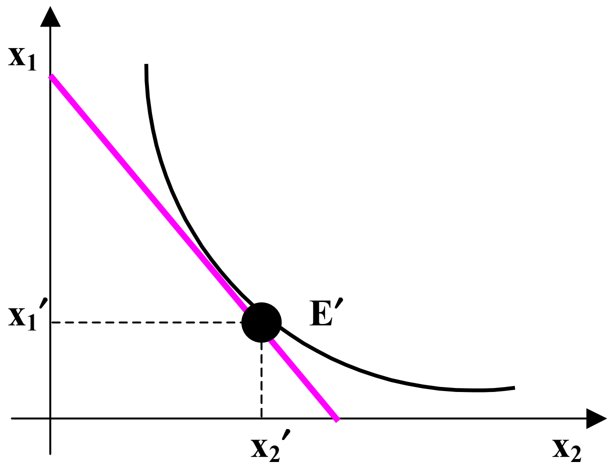
Ora il punto di equilibrio sarà **E'''**.

Il passaggio da **E'** a **E'''** è l'**effetto sostituzione**, cioè l'aumento di domanda di $\mathbf{x_2}$ determinato da una diminuzione del prezzo.

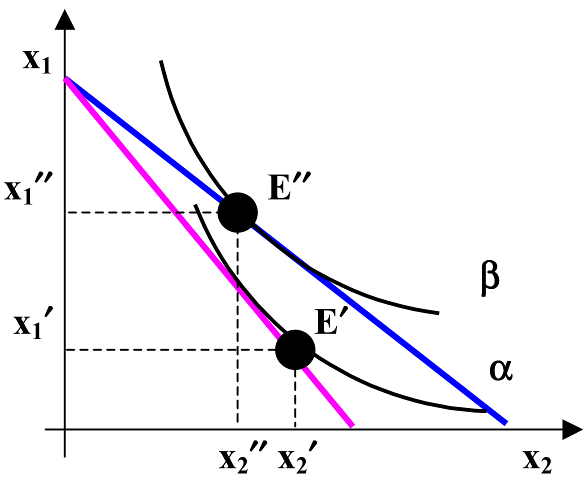
Ma in questo caso, trattandosi si un bene inferiore, **E''** non si trova più a destra di **E'''**, come accadeva per i beni normali, ma a sinistra, giacché, in questo caso, un aumento di reddito fa registrare una diminuzione di domanda di $\mathbf{x_2}$. Il passaggio da **E'''** a **E''** , che rappresenta l'**effetto reddito** è negativo.

In questo caso, l'**effetto prezzo** sarà sempre positivo, ma l'effetto reddito compenserà parzialmente l'effetto sostituzione.

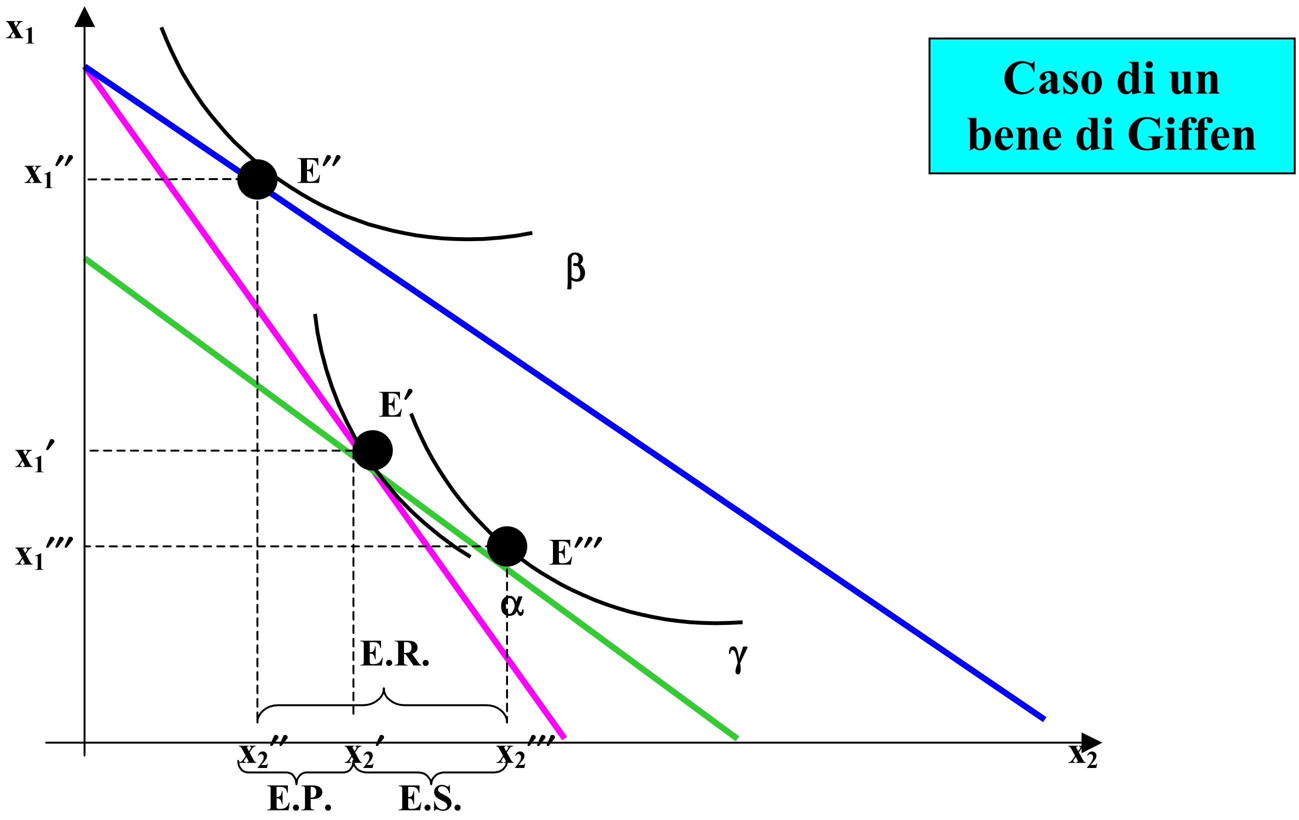
CASO DEI BENI DI GIFFEN. Consideriamo ora il **caso dei beni di Giffen**, cioè di quei particolari beni per cui al diminuire del prezzo si registra una diminuzione della domanda. L'individuo consuma due beni $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, i cui prezzi sono rispettivamente $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ ed ha a disposizione un reddito **m**. I suoi gusti sono rappresentati da una determinata mappa di curve di indifferenza. Inizialmente, **E'** (che giace sulla curva di indifferenza α) rappresenterà il punto di equilibrio, quindi $\mathbf{(x_1', x_2')}$ sarà il paniere ottimo acquistato dal consumatore. Graficamente:



Supponiamo che il prezzo di $\mathbf{x_2}$ diminuisca e che tutti gli altri dati restino invariati. Avremo un nuova retta di bilancio (più spostata verso destra) e un nuovo punto di equilibrio **E''** (giacente sulla curva di indifferenza β). Il paniere $\mathbf{(x_1'', x_2'')}$ sarà la combinazione ottima acquistata dal consumatore. Il passaggio da **E'** a **E''** rappresenta l'**effetto prezzo**. Graficamente:



Ora dobbiamo cercare di scorporare l'effetto prezzo nell'effetto sostituzione e nell'effetto reddito. Col metodo di Slutsky dobbiamo «aggiustare» il reddito monetario in modo da tener costante il potere d'acquisto, cioè in modo che il consumatore abbia abbastanza denaro da poter acquistare la stessa combinazione **E'** che acquistava in precedenza.



Ora il punto di equilibrio sarà **E'''**.
Il passaggio da **E'** a **E'''** è l'**effetto sostituzione**, cioè l'aumento di domanda di $\mathbf{x_2}$ determinato da una diminuzione del prezzo.
E'', invece, non si trova più a destra di **E'''**, come accadeva per i beni normali, ma a sinistra. Il passaggio da **E'''** a **E''** , che rappresenta l'**effetto reddito** è negativo.
In questo caso, l'**effetto prezzo** sarà negativo, giacché l'effetto reddito compenserà totalmente l'effetto sostituzione. È questo il **paradosso di Giffen**.

EQUAZIONE DI SLUTSKY. Sia:

$$\begin{cases} \mathbf{p_1 = \text{prezzo iniziale del bene 1}} \\ \mathbf{p_2 = \text{prezzo iniziale del bene 2}} \\ \mathbf{p_2' = \text{prezzo variato del bene 2}} \\ \mathbf{m = \text{reddito monetario}} \\ \mathbf{m' = \text{reddito monetario «aggiustato»}} \end{cases}$$

Vediamo qual è la **variazione del reddito monetario** necessaria per consentire appena l'acquisto del paniere iniziale ai nuovi prezzi.

L'equazione di bilancio iniziale è:

$$\mathbf{m = p_1 * x_1 + p_2 * x_2.} \qquad \boxed{\mathbf{a}}$$

L'equazione di bilancio quando il prezzo del **bene 2** varia è:

$$\mathbf{m' = p_1 * x_1 + p_2' * x_2.} \qquad \boxed{\mathbf{b}}$$

Sottraiamo la $\boxed{\mathbf{a}}$ dalla $\boxed{\mathbf{b}}$

$$\mathbf{m' - m = p_2' * x_2 - p_2 * x_2;}$$

$$\mathbf{m' - m = x_2 * (p_2' - p_2)}$$

$$\boxed{\mathbf{\Delta m = x_2 * \Delta p_2}} \qquad \boxed{\mathbf{1}}$$

L'**effetto sostituzione** rappresenta la variazione della domanda del **bene 2** quando il suo prezzo è $\mathbf{p_2'}$ e il reddito monetario è $\mathbf{m'}$.

$$\boxed{\mathbf{\Delta x_2^S = x_2(p_2', m') - x_2(p_2, m)}} \qquad \boxed{\mathbf{2}}$$

Per determinare l'effetto sostituzione dobbiamo conoscere la funzione di domanda del consumatore per poter calcolare le scelta ottime.

L'**effetto reddito** rappresenta la variazione della domanda del **bene 2** al variare del reddito da $\mathbf{m'}$ a $\mathbf{m}$, quando il prezzo del **bene 2** venga mantenuto fisso a $\mathbf{p_2'}$.

$$\boxed{\mathbf{\Delta x_2^R = x_2(p_2', m) - x_2(p_2', m')}} \qquad \boxed{\mathbf{3}}$$

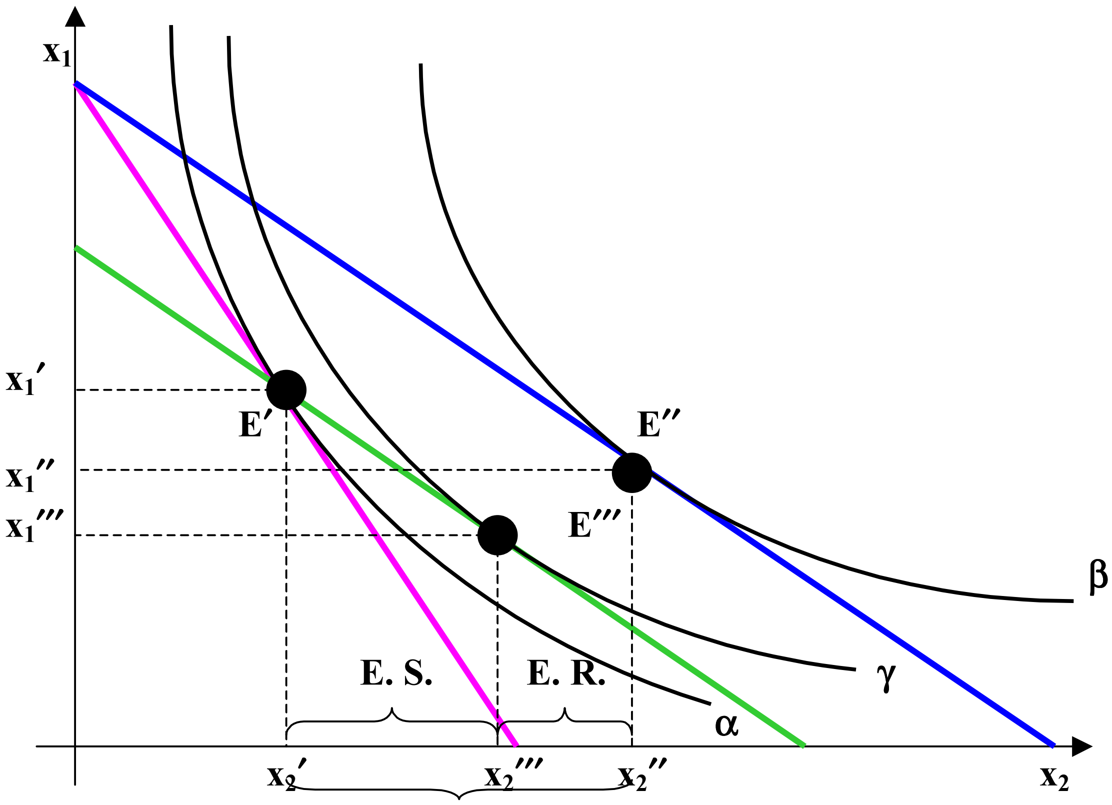
Per determinare l'effetto sostituzione dobbiamo conoscere la funzione di domanda del consumatore per poter calcolare le scelta ottime.

L'**effetto prezzo** complessivo sarà:

$$\boxed{\mathbf{\Delta x_2^P = \Delta x_2^S + \Delta x_2^R}} \qquad \boxed{\mathbf{4}}$$

che rappresenta l'**identità di Slutsky**.

IL SEGNO DELL'EFFETTO SOSTITUZIONE. L'effetto reddito può avere segno positivo o negativo a seconda che si tratti di un bene normale o un bene inferiore. Per quanto riguarda l'effetto sostituzione, se il prezzo di un bene diminuisce, la variazione nella domanda del bene dovuta all'effetto sostituzione **deve** essere non negativa: se $\mathbf{p_2 > p_2'}$, **dobbiamo** ottenere $\mathbf{x_2(p_2', m') \geq x_2(p_2, m)}$, tali che $\mathbf{\Delta x_2^S > 0}$. Ciò può essere dimostrato nel modo seguente, riconsiderando il grafico:

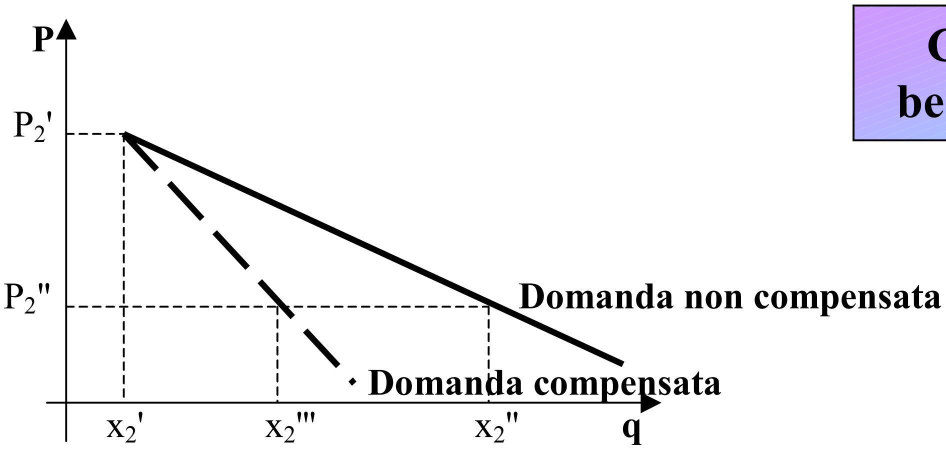


L'effetto sostituzione varia sempre nella direzione opposta alla variazione del prezzo. Quindi, **<u>l'effetto sostituzione è negativo</u>**, poiché la variazione della domanda dovuta all'effetto sostituzione è opposta alla variazione del prezzo: se il prezzo aumenta, la domanda del bene diminuisce per l'effetto sostituzione, e viceversa.

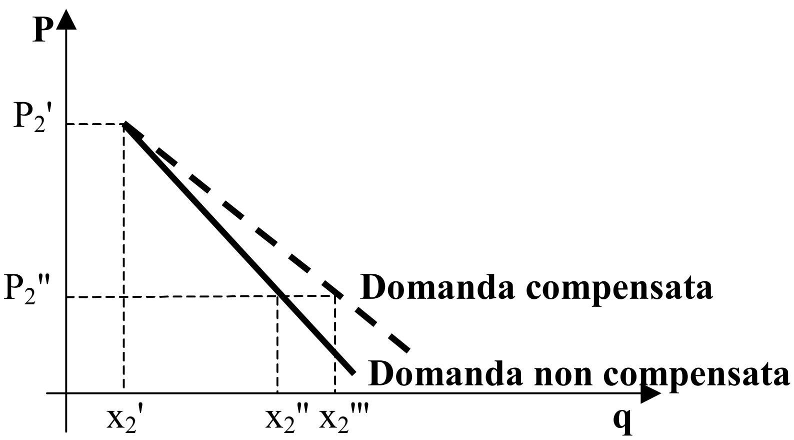
CURVA DI DOMANDA COMPENSATA

La regola generale è che la diminuzione del prezzo di un bene determina l'aumento della domanda del bene stesso, e quindi la curva di domanda è decrescente.
Però per alcuni beni si verifica il paradosso di Giffen per cui al diminuire del prezzo di un bene fa seguito la diminuzione della domanda del bene stesso: la curva di domanda risulta crescente.
Tuttavia, se depuriamo l'effetto prezzo dall'effetto di reddito e consideriamo quindi solo l'effetto di sostituzione, siamo sicuri che una diminuzione del prezzo determina sempre un aumento della sua domanda, anche per i beni di Giffen.
Quindi, se la curva di domanda è disegnata tenendo conto solo dell'effetto di sostituzione, essa sarà sempre decrescente. Questa conclusione è nota come **teorema di Slutsky** e la curva che tiene conto solo di tale effetto è detta **curva di domanda compensata**.

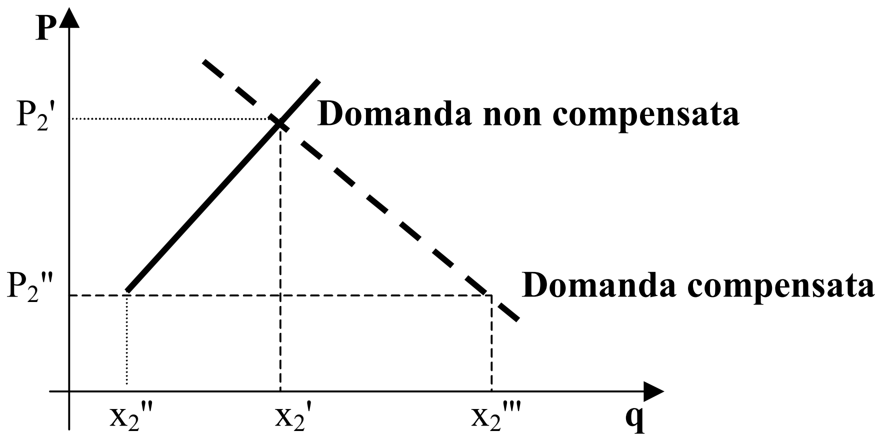
Caso di un bene normale



Caso di un bene inferiore



Caso di un bene di Giffen



OFFERTA DI LAVORO

Supponiamo che il consumatore abbia inizialmente un reddito monetario **M**, sia che lavori o no: potrebbe trattarsi di un reddito da investimenti, di donazioni familiari, o altro. Definiamo questo reddito come **reddito non da lavoro**.

Indichiamo con **C** la quantità consumata dal consumatore e con **p** il suo prezzo. Se **w** indica il salario e **L** la quantità di lavoro offerta, il vincolo di bilancio sarà:

$$\mathbf{p * C = M + w * L} \qquad \boxed{1}$$

che significa che il valore di tutto ciò che il consumatore consuma deve essere uguale alla somma del suo reddito non da lavoro e del suo reddito da lavoro.

Se spostiamo l'offerta di lavoro $\mathbf{w * L}$ dal membro di destra della $\boxed{1}$ al membro di sinistra, otteniamo:

$$\mathbf{p * C - w * L = M}. \qquad \boxed{2}$$

Supponiamo, ora, che esista una quantità massima possibile di offerta di lavoro e indichiamola con $\mathbf{\overline{L}}$. Sommando $\mathbf{w * \overline{L}}$ a ciascun membro della $\boxed{2}$ e con le opportune trasformazioni, otteniamo:

$$\mathbf{p * C - w * L + w * \overline{L} = M + w * \overline{L}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{p * C + w * (\overline{L} - L) = M + w * \overline{L}}. \qquad \boxed{3}$$

Indichiamo con $\mathbf{\overline{C} = M/p \Leftrightarrow p * \overline{C} = M}$ la quantità di consumo disponibile per il consumatore se non lavorasse affatto, vale a dire, la sua **dotazione di consumo**. Allora la $\boxed{3}$ diventa:

$$\mathbf{p * C + w * (\overline{L} - L) = p * \overline{C} + w * \overline{L}}. \qquad \boxed{4}$$

In questa equazione vi sono due variabili di scelta a sinistra e due variabili di dotazione a destra.
La variabile $\mathbf{\overline{L} - L}$ può essere interpretata come la quantità di «**tempo libero**», cioè del tempo durante il quale non si lavora.

La **4** è formalmente identica alla **1** , ma la sua interpretazione è molto più interessante.

Secondo questa equazione **la somma del valore del consumo e del tempo libero deve essere uguale al valore della dotazione di consumo e della dotazione di tempo**, quest'ultima valutata in base al salario del consumatore.

Il salario è, quindi, anche il prezzo del tempo libero, definito, proprio per questo motivo, dagli economisti come **costo opportunità** del tempo libero.

Il membro di destra del vincolo di bilancio viene definito, talvolta, **reddito pieno** o **reddito implicito** del consumatore, e rappresenta il valore di tutto ciò che il consumatore possiede, cioè la sua dotazione di beni di consumo, nel caso ne possieda, e la sua dotazione di tempo.

Distinguiamo dal reddito pieno, il **reddito misurato** del consumatore, che rappresenta semplicemente il reddito derivante dalla vendita di una parte del suo tempo.

Cerchiamo di rappresentare, ora, il vincolo di bilancio graficamente. Prendiamo la **4** e facciamo le opportune trasformazioni:

$$\mathbf{p * C + w * (\bar{L} - L) = p * \bar{C} + w * \bar{L}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{p * C = p * \bar{C} + w * \bar{L} - w * (\bar{L} - L)}$$

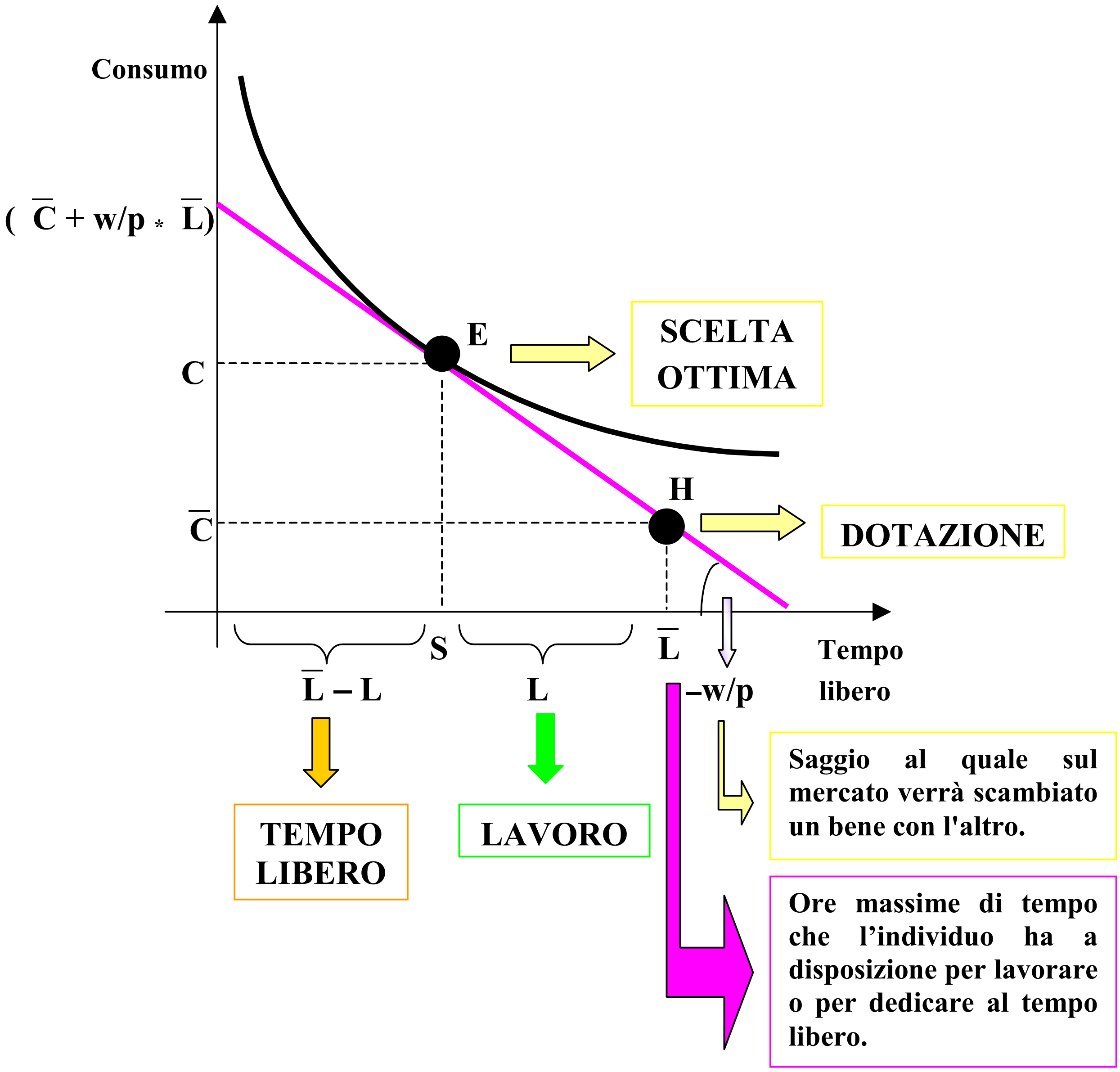
$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{C = p/p * \bar{C} + w/p * \bar{L} - w/P * (\bar{L} - L)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\mathbf{C = (\bar{C} + w/p * \bar{L}) - w/p * (\bar{L} - L)}} . \tag{5}$$

Se rappresentiamo sull'asse delle ordinate il consumo **C** e sull'asse delle ascisse il tempo libero $\mathbf{\bar{L} - L}$, la **5** può essere rappresentata così:



Il punto **E** rappresenta la **scelta ottima** e corrisponderà al punto di tangenza fra la curva di indifferenza e la retta di bilancio.

In **E** cui la curva di indifferenza e la retta di bilancio hanno la stessa inclinazione, ovvero il **SMS** in valore assoluto, cioè il valore di consumo addizionale derivante dal lavorare un poco di più, è uguale a **w/p**, il **salario reale**, cioè la quantità di beni di consumo che può essere acquistato rinunciando ad un'ora di tempo libero.

Analiticamente esaminiamo il problema dell'equilibrio del consumatore-lavoratore applicando il metodo dei **moltiplicatori di Lagrange**. Per semplicità poniamo M=0.

.

Si tratta di un problema di massimizzazione vincolata del tipo:

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{Max } u(c, R) \\ \text{tale che } p\ c + w\ R = w\ \bar{L}\end{array}}$$.

Scriviamo la Lagrangiana:

$$\boxed{L = u(c, R) + \lambda * (w\ \bar{L} - p\ c + w\ R)}$$

Calcoliamo le derivate rispetto **c, R** e **λ**. Si ottengono, così, le condizioni del primo ordine:

$$\begin{array}{lcl} \partial L/\partial R=0 & \multirow{3}{*}{} & \partial u(c, R)/\partial R - \lambda * w = 0 \quad \boxed{1} \\ \partial L/\partial c=0 & & \partial u(c,R)/\partial c - \lambda * p = 0 \quad \boxed{2} \\ \partial L/\lambda = 0 & & p\ c + w\ R = w\ \bar{L} \quad \boxed{3} \end{array}$$

La condizione $\boxed{3}$ (che si ottiene derivando L rispetto a λ) rappresenta il vincolo.

Dividendo la $\boxed{1}$ per la $\boxed{2}$, abbiamo:

$$\boxed{\partial u(c,R)/\partial R \big/ \partial u(c,R)/\partial c = w/p}$$.

Quindi, in equilibrio il saggio marginale di sostituzione tra riposo e consumo deve essere uguale al salario reale.

STATICA COMPARATA DELL'OFFERTA DI LAVORO. Chiediamoci come varia l'offerta e la domanda di tempo libero se, per esempio, un consumatore vince alla lotteria e il suo reddito monetario aumenta considerevolmente.

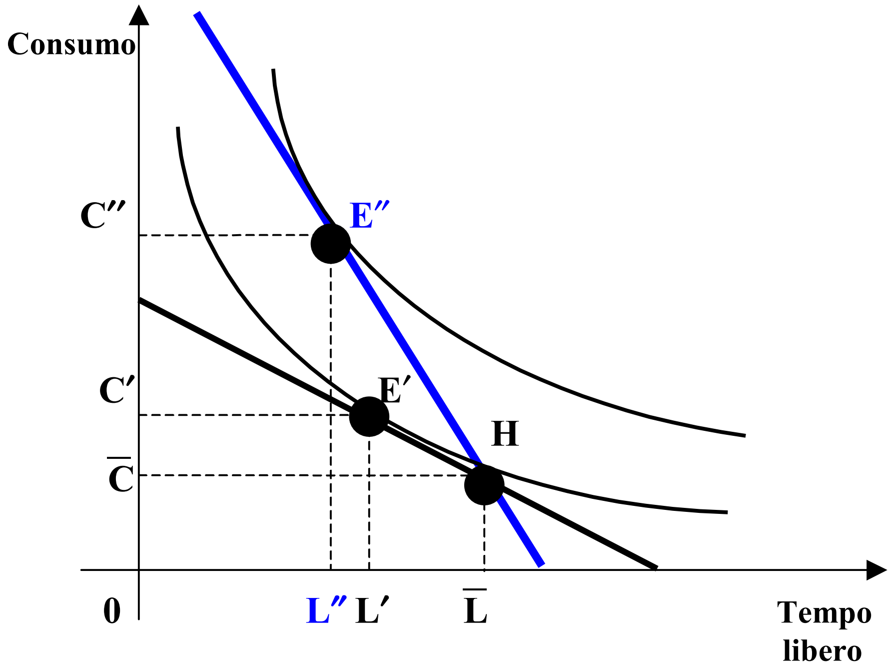
Nella maggior parte dei casi l'offerta di lavoro diminuisce se il reddito monetario aumenta. In altre parole, il tempo libero è probabilmente un bene normale per la maggior parte delle persone: se aumenta il loro reddito monetario, esse scelgono di consumare quantità maggiori di tempo libero. Adotteremo, quindi, l'ipotesi che il tempo libero sia un bene normale.

Vediamo, ora, quali sono le implicazioni di questa ipotesi sulla variazione dell'offerta di lavoro di un consumatore al variare del salario.

Un aumento del salario produce diversi effetti: aumenta il reddito derivante dal lavoro e il tempo libero diventa più costoso.

Se il salario aumenta, anche il prezzo del tempo libero diventa più elevato, e questo comporta una diminuzione del suo consumo (**effetto sostituzione**).

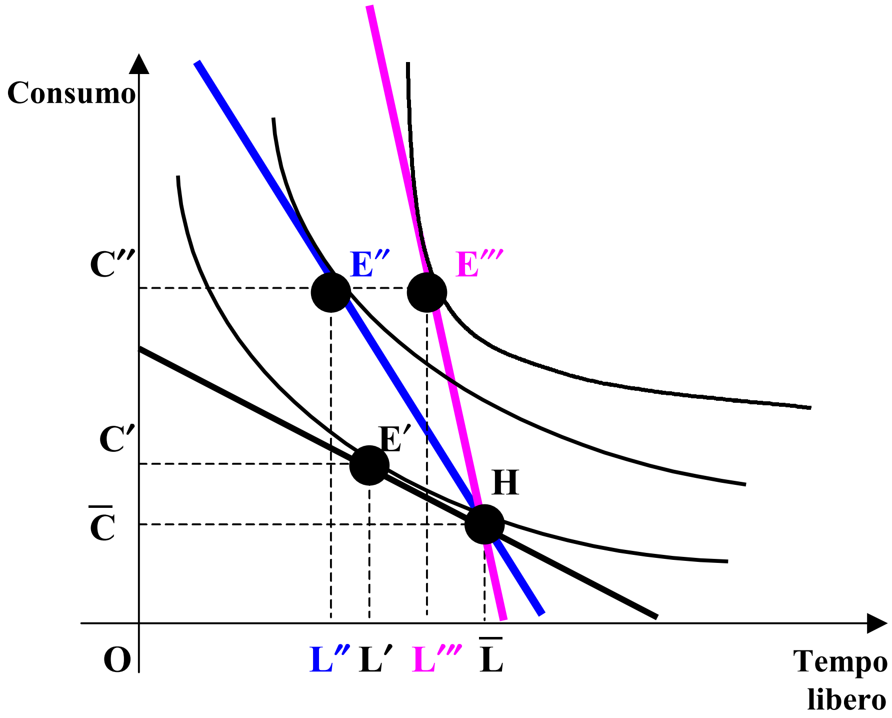
Graficamente, avremo:



Quindi, se il tempo libero è un bene normale, la curva di offerta di lavoro deve avere un'inclinazione positiva.
Ma ciò pone qualche problema: in primo luogo, non sembra accettabile, da un punto di vista intuitivo, che un aumento di salario si traduca **sempre** in un aumento dell'offerta di lavoro.

Se il salario diventa molto elevato, è probabile che un lavoratore decida di «spendere» il reddito addizionale consumando tempo libero.

Graficamente, avremo:



Riassumendo possiamo dire che:

- L'individuo ha un certo numero di ore $\overline{\mathbf{L}}$ da poter dedicare al lavoro o al tempo libero.

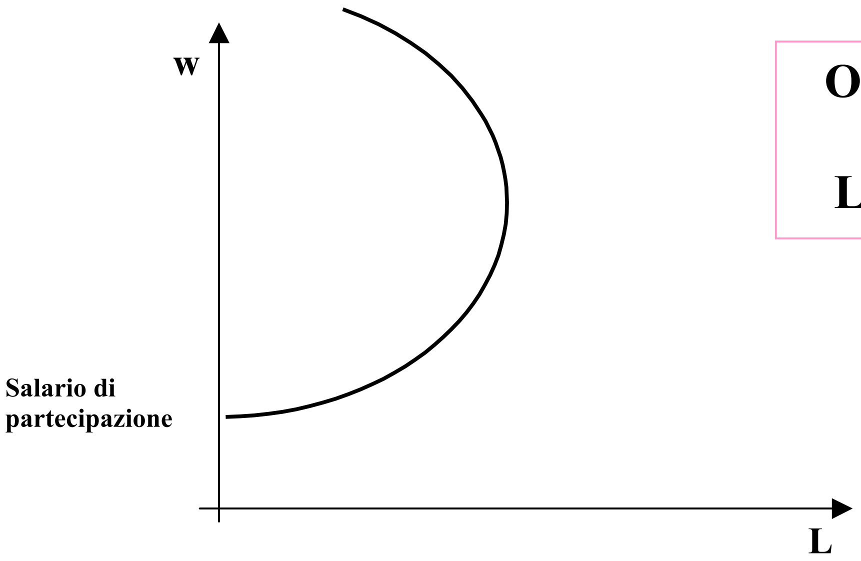
- Inizialmente, ha un salario **w′**. Egli decide di offrire una quantità di lavoro pari a ($\overline{\mathbf{L}}$ – **L′**) e di avere a disposizione una certa quantità di tempo libero pari alla distanza **O L′**. Il suo punto di equilibrio è, infatti, rappresentato dal punto **E′**.

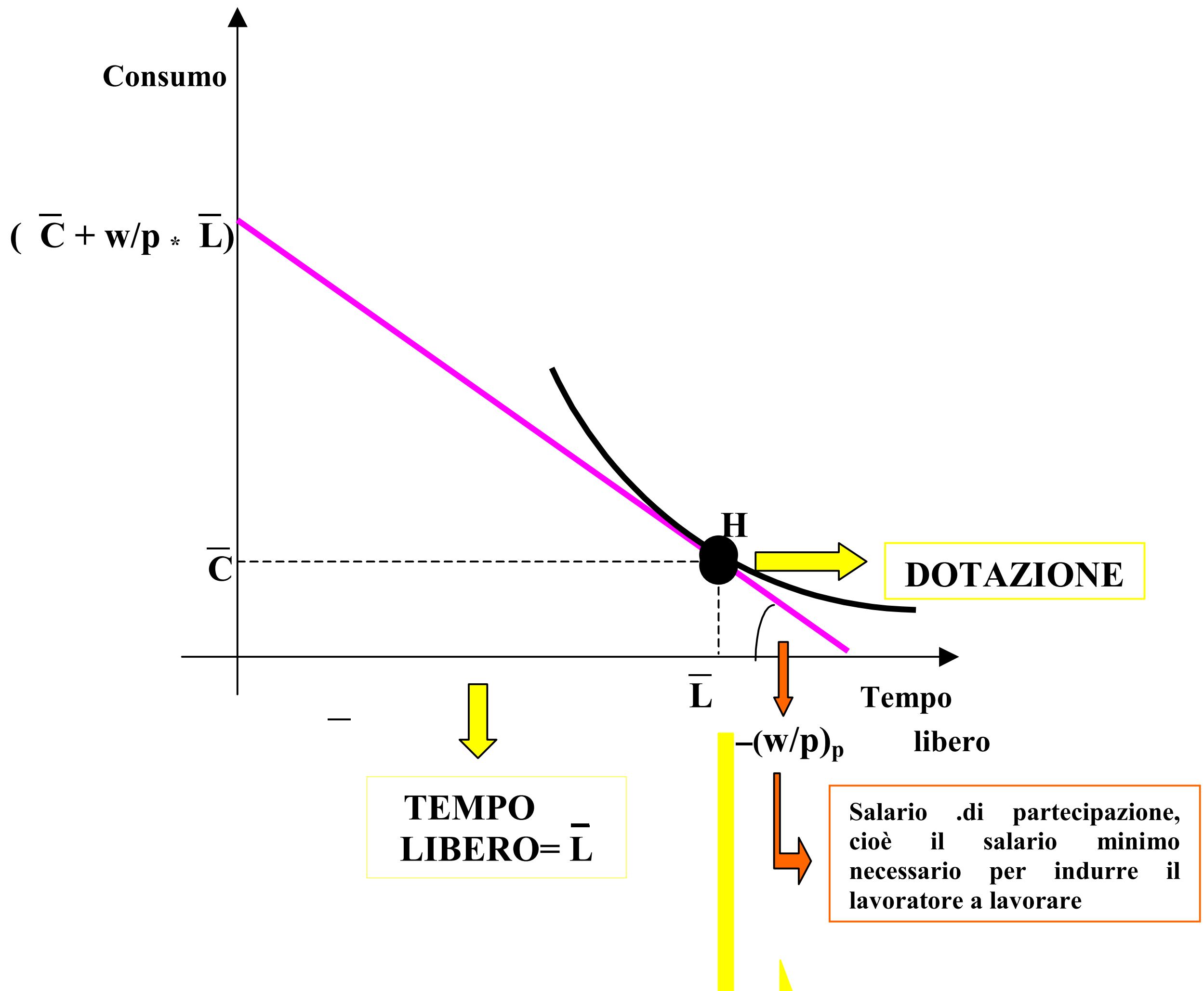
- Successivamente il salario aumenta in una certa misura (**w″** > **w**). Con un salario **w″** egli decide di dedicare più ore al lavoro ($\overline{\mathbf{L}}$ – **L″**) e meno al tempo libero (pari alla distanza **OL″**), che gli «costerebbe» troppo. In questo modo, egli può consumare di più (infatti, **C″** > **C′**), come vediamo dal punto **E″**.

- Se il salario continua ad aumentare (**w‴** > **w″** > **w**). Con un salario **w‴** egli decide di lavorare di meno ($\overline{\mathbf{L}}$ - **L‴**) e di dedicare parecchie ore al tempo libero (pari alla distanza **O L‴**). Tutto questo perché egli può, ad ogni modo:
  - acquistare gli stessi beni di prima (rappresentati dal punto **C″**);
  - avere più tempo per sé;
  - rinunciare al lavoro che, comunque, considera un «male».

Avremo, quindi, una **curva di offerta di lavoro volta all'indietro**:

OFFERTA DI LAVORO





La **curva dell'offerta di lavoro** rivolta all'indietro rappr e in cui:

- a bassi livelli di salario, un aumento dello stesso fa diminuire la domanda di tempo libero e fa aumentare l'offerta di lavoro;

- ad alti livelli di salario, l'effetto reddito supera l'effetto sostituzione e un aumento ulteriore dello stesso fa diminuire l'offerta di lavoro.

- Esiste un salario minimo al di sotto del quale il lavoratore non è disposto a lavorare

Riassumendo:

$$\mathbf{w}\uparrow \begin{cases} \mathbf{L}\uparrow & \textbf{E. S.} \Longleftarrow \mathbf{w/P}\uparrow \\ \mathbf{L}\downarrow & \textbf{E. R.} \Longleftarrow \mathbf{R}\uparrow \end{cases}$$

SCELTA INTERTEMPORALE

IL VINCOLO DI BILANCIO. Esaminiamo, in questo caso, il comportamento del consumatore analizzando le sue scelte relative al risparmio e al consumo nel tempo. Queste scelte vengono dette scelte intertemporali.

Supponiamo che un consumatore scelga la quantità di un bene da consumare in due diversi periodi di tempo. Indichiamo con (c_1; c_2) il consumo di ciascun periodo e supponiamo che i prezzi in ciascun periodo rimangano costanti a 1. La quantità di moneta di cui il consumatore dispone in ciascun periodo è indicata con (m_1; m_2).

Supponiamo, inizialmente, che l'unico modo in cui un consumatore può trasferire moneta dal periodo 1 al periodo 2 sia risparmiarla senza interessi. Supponiamo, inoltre, per il momento, che non abbia nessuna possibilità di prendere denaro a prestito, così che nel periodo 1 possa spendere al massimo m_1.

Vediamo che sono possibili due tipi di scelte: il consumatore può scegliere di consumare in corrispondenza di (m_1; m_2), cioè consumare interamente il suo reddito di ciascun periodo, oppure può scegliere di non consumare per intero il suo reddito nel periodo 1. In quest'ultimo caso, il consumatore risparmia una parte del suo consumo del periodo 1 per un periodo successivo.

Supponiamo, ora, che il consumatore possa dare e prendere a prestito denaro ad un tasso di interesse r. Deriviamo il vincolo di bilancio mantenendo, per comodità, i prezzi fissi a 1 in ciascun periodo. Supponiamo dapprima che il consumatore decida di risparmiare, così che c_1, il consumo del periodo 1, sia inferiore a m_1, il reddito del periodo 1. In questo caso, otterrà degli interessi sul denaro risparmiato, $m_1 - c_1$, al tasso di interesse r. La quantità di consumo nel periodo successivo sarà quindi:

$$c_2 = m_2 + (m_1 - c_1) + r * (m_1 - c_1) =$$

$$= \boxed{\mathbf{m_2 + (1 + r) * (m_1 - c_1)}}$$

Il consumo del periodo 2 corrisponde alla somma del reddito del consumatore, di ciò che ha risparmiato nel periodo 1, e dell'interesse maturato sui suoi risparmi.

Supponiamo, ora, che il consumatore prenda denaro a prestito, così che il consumo del periodo 1 sia maggiore del suo reddito nello stesso periodo. Il consumatore prende a prestito denaro se $c_1 > m_1$, e l'interesse che dovrà pagare nel periodo 2 sarà $r * (c_1 - m_1)$. Naturalmente dovrà anche restituire $c_1 - m_1$, il denaro preso a prestito. Il suo vincolo di bilancio sarà pertanto:

$$c_2 = m_2 - r * (c_1 - m_1) - (c_1 - m_1) =$$

$$= \boxed{\mathbf{m_2 + (1 + r) * (m_1 - c_1)}}$$

che equivale al risultato precedente.

Se $m_1 - c_1$
- $> 0 \Rightarrow$ il consumatore ottiene degli interessi sui suoi risparmi.
- $< 0 \Rightarrow$ il consumatore paga interessi sul denaro preso a prestito.

Nel caso in cui $c_1 = m_1$, necessariamente $c_2 = m_2$, e il consumatore non prende né dà a prestito denaro. Possiamo dire in questo caso che la sua posizione di consumo coincide col «punto di Polonio» (da una scena dell'*Amleto* di W. Shakespeare in cui Polonio, parlando al figlio, dice «*Non indebitarti e non prestar soldi, perché chi presta perde sé e l'amico, e il debito smussa il filo dell'economia*»).

Possiamo trasformare il vincolo di bilancio ottenendo due utili espressioni alternative. Abbiamo:

$$c_2 = m_2 + (1 + r) * (m_1 - c_1);$$

$$c_2 = m_2 + (1 + r) * m_1 - (1 + r) * c_1;$$

$$\boxed{\mathbf{(1 + r) * c_1 + c_2 = (1 + r) * m_1 + m_2}} \qquad \boxed{\mathbf{1}}$$

e

$$\boxed{\mathbf{c_1 + c_2/(1 + r) = m_1 + m_2/(1 + r)}} \qquad \boxed{\mathbf{2}}$$

Osserviamo che entrambe le equazioni hanno la forma:

$$p_1 * c_1 + p_2 * c_2 = p_1 * m_1 + p_2 * m_2.$$

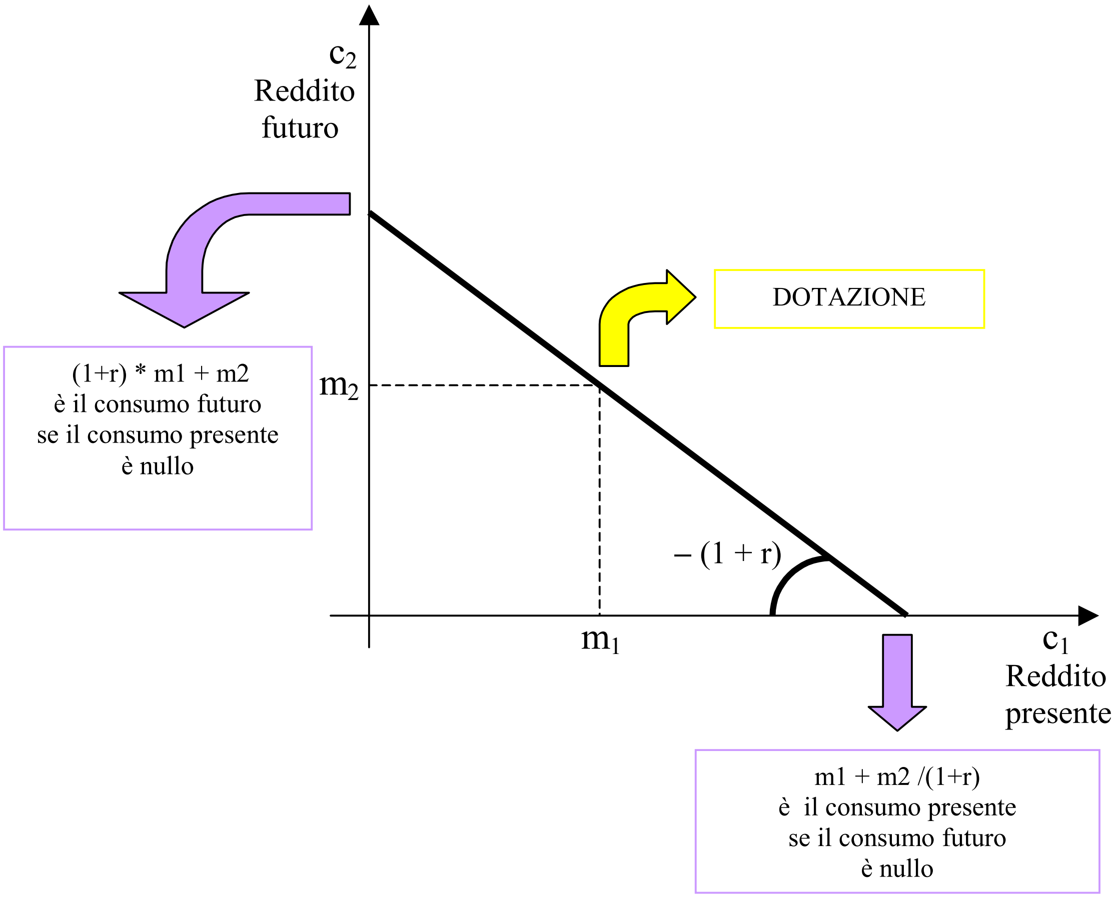
Nell'equazione $\boxed{\mathbf{1}}$, $p_1 = 1 + r$ e $p_2 = 1$.

Nell'equazione $\boxed{\mathbf{2}}$, $p_1 = 1$ e $p_2 = 1/(1 + r)$.

L'equazione $\boxed{\mathbf{1}}$ esprime il vincolo di bilancio in termini del valore futuro. L'equazione $\boxed{\mathbf{2}}$ esprime il vincolo di bilancio in termini del valore attuale.

Il vincolo di bilancio $\boxed{\mathbf{1}}$ esprime il prezzo del periodo 1 relativamente al prezzo del periodo 2, mentre si ha l'opposto nel vincolo di bilancio $\boxed{\mathbf{2}}$

Rappresentiamo il valore attuale e il valore futuro da un punto di vista geometrico:



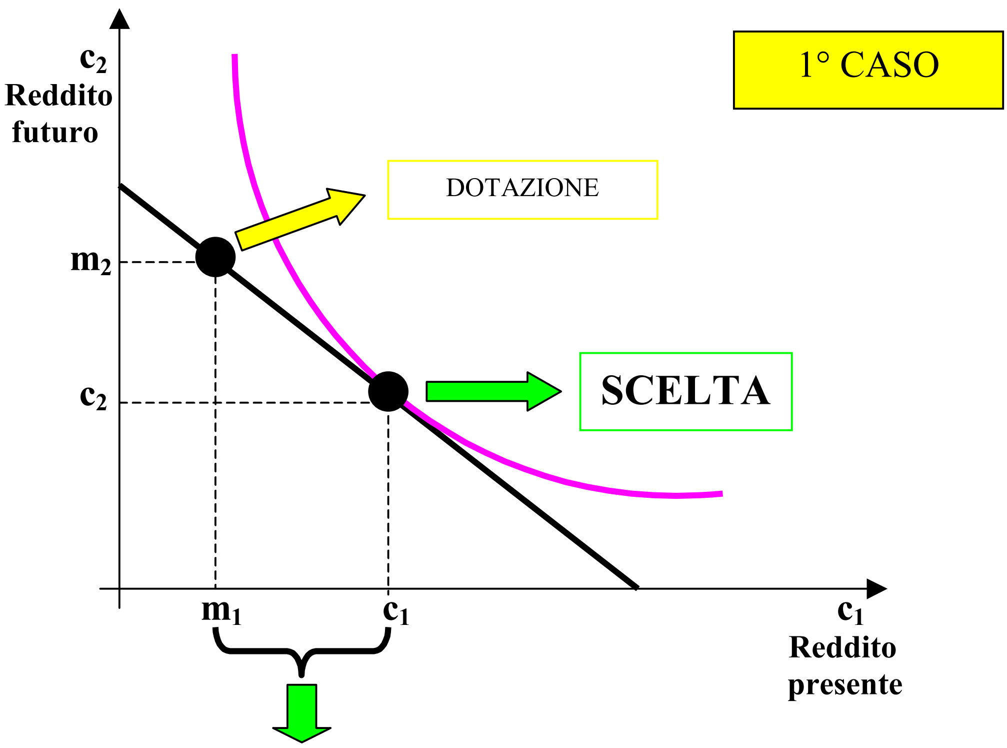
PREFERENZE RELATIVE AL CONSUMO. Consideriamo, ora, le preferenze del consumatore, rappresentate dalle curve di indifferenza: la loro forma descrive i gusti del consumatore in periodi diversi.

Se, per esempio, disegniamo delle curve di indifferenza con inclinazione costante -1, queste rappresenteranno i gusti di un consumatore indifferente tra il consumare oggi oppure domani: il suo saggio marginale di sostituzione fra oggi e domani è -1.

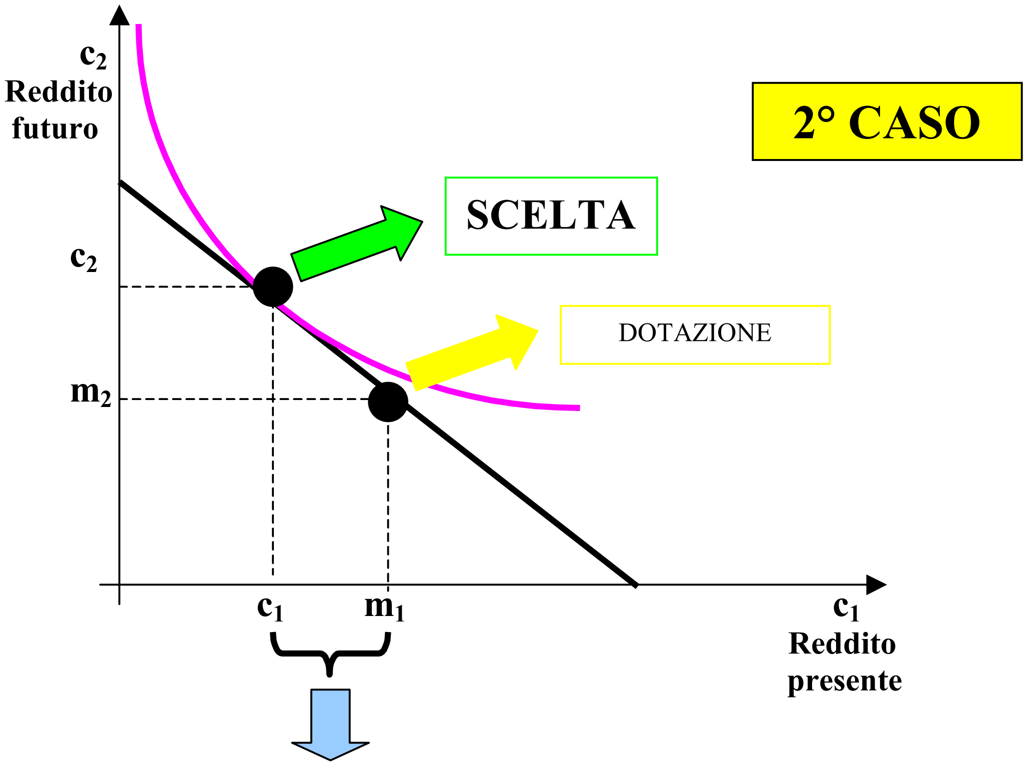
Le curve di indifferenza relative ai perfetti complementi rappresentano un consumatore che intende consumare quantità uguali oggi e domani. Un consumatore di questo tipo sarebbe poco propenso a spostare il consumo da un periodo all'altro, indipendentemente dal valore di scambio del consumo stesso nei diversi periodi.

Ancora una volta, la situazione più ragionevole è rappresentata dal caso intermedio delle preferenze regolari. Il consumatore è disposto, in questo caso, a sostituire una certa quantità del consumo di oggi con il consumo di domani: la quantità che è disposto a sostituire dipende dalla sua particolare combinazione di consumo. In questo contesto, l'ipotesi di convessità delle preferenze risulta naturale, poiché ne deriva che un consumatore preferisce una quantità «media» di consumo in ciascun periodo piuttosto che una grande quantità oggi e niente domani, oppure il contrario.

STATICA COMPARATA. Dati il vincolo di bilancio di un consumatore e le sue preferenze in ciascun periodo, possiamo studiarne la scelta ottima di consumo $(\mathbf{c_1}; \mathbf{c_2})$. Nel caso in cui il consumatore scelga un punto in corrispondenza del quale $\mathbf{c_1 > m_1}$, prende a prestito, mentre se $\mathbf{c_1 < m_1}$, dà a prestito.



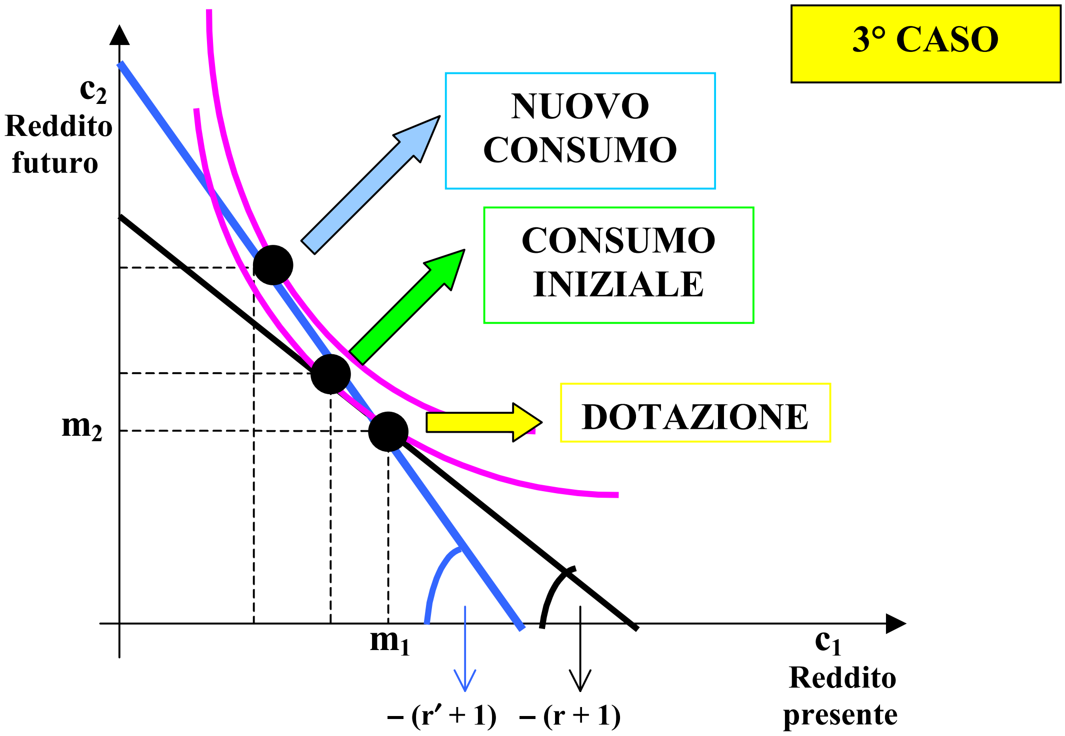
Il consumatore prende a prestito oggi per consumare di più (c1 > m1), pagando con il reddito di domani (c2 < m2).



Il consumatore dà a prestito oggi (c1 < m1) per consumare di più domani con il reddito di domani (c2 > m2).

Consideriamo, ora, come il consumatore reagisce ad una variazione del tasso di interesse. Un incremento del tasso di interesse rende più ripida la retta di bilancio: se il tasso di interesse è più elevato, ad una riduzione di $\mathbf{c_1}$ corrisponderà un aumento del consumo nel **periodo 2**. Naturalmente, l'acquisto della dotazione iniziale è sempre possibile, e quindi la retta ruoterà intorno al punto corrispondente alla dotazione stessa.
Consideriamo, ora, come si modifica la scelta fra dare e prendere a prestito al variare del tasso di interesse. Vi sono due casi, a seconda che il consumatore inizialmente prenda oppure dia a prestito. Supponiamo dapprima che il consumatore dia a prestito: in questo caso, se il tasso di interesse aumenta, $\mathbf{r' > r}$, continuerà a dare a prestito.

Rappresentiamo il caso graficamente:

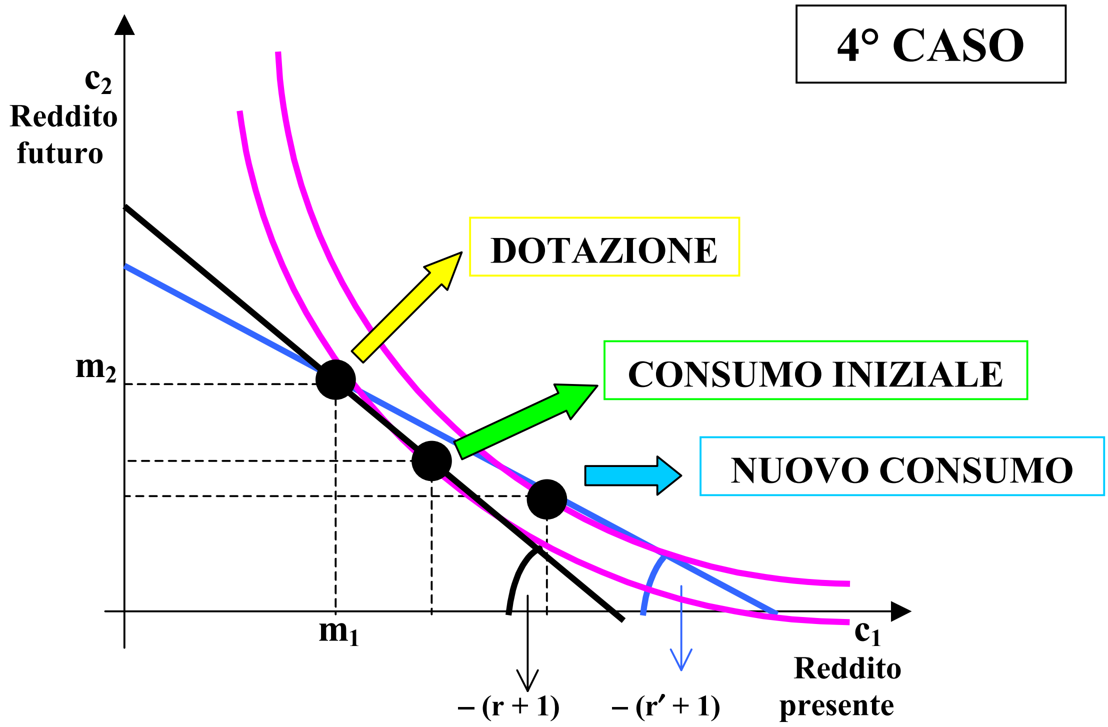


Se il consumatore inizialmente dà a prestito, il suo paniere ottimo di consumo si trova a sinistra del punto di dotazione.

Se il tasso di interesse aumenta, è impossibile che il consumatore si sposti verso un nuovo punto a destra della dotazione. Infatti, le scelte a destra erano già disponibili in corrispondenza dell'insieme di bilancio iniziale, e sono state rifiutate a favore del punto scelto. Poiché il paniere ottimo iniziale è ancora disponibile in corrispondenza della nuova retta di bilancio, il nuovo paniere ottimo deve trovarsi al di fuori dell'insieme di bilancio iniziale - cioè a sinistra del punto di dotazione.

Quindi, **se inizialmente il consumatore dà a prestito e il tasso di interesse aumenta**, **il consumatore continuerà a dare a prestito**.
Una situazione analoga si verifica nel caso in cui il consumatore prenda a prestito e il tasso di interesse diminuisca: **se inizialmente il consumatore prende a prestito e il tasso di interesse diminuisce**, **egli continuerà a prendere a prestito**.

Graficamente, abbiamo:



D'altra parte **<u>se un individuo dà a prestito ed il tasso di interesse diminuisce</u>**, **<u>può anche decidere di iniziare a prendere a prestito</u>**.

In conclusione un consumatore che non può comprare oggi beni futuri, data l'assenza di mercati a termine, massimizza una funzione di utilità intertemporale sottostante a due distinti vincoli che esprimono il vincolo di bilancio del primo e del secondo periodo. Si pone quindi sia il problema relativo alle aspettative sui prezzi e sui redditi attesi per il periodo futuro sia il problema di individuare appropriati strumenti per trasferire il potere d'acquisto dal presente al futuro. Occorre pertanto introdurre un mercato delle obbligazioni. Il consumatore - risparmiatore potrà comprare obbligazioni (che danno diritto a riscuotere nel periodo 2 una somma di denaro) in modo tale che (se indichiamo con B i titoli e con s il risparmio):

$\mathbf{s = (m_1 - c_1)}$

$\mathbf{B = (1 + r) * s}$

$\mathbf{s = B\,(1/(1+r))}$

$\mathbf{p_b = 1/(1+r)}$

Facciamo l'ipotesi che l'analisi si svolga in condizioni di certezza cioè che il consumatore sia sicuro sul valore atteso del reddito e dei prezzi (m^2, p_1^2 e p_2^2). Esaminiamo il problema dell'equilibrio del consumatore applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Si tratta di un problema di massimizzazione vincolata del tipo:

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{Max}\ u(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2)\\ \text{tale che } p_1^1 * x_1^1 + p_2^1 * x_2^1 + p_b B = m^1\\ \text{e}\\ p_1^2 * x_1^2 + p_2^2 * x_2^2 = m^2 + B\end{gathered}}$$

.

Scriviamo, innanzitutto, la Lagrangiana:

$$\boxed{L = u(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) + \lambda * (m^1 - p_1^1 * x_1^1 - p_2^1 * x_2^1 - p_b B) + \lambda' (m^2 + B - p_1^2 x_1^2 - p_2^2 x_2^2)}$$

dove λ **e** λ' sono i moltiplicatori di Lagrange.

Calcoliamo le derivate prime rispetto a x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, **B,** λ E λ' Si ottengono, così, le condizioni del primo ordine:

$$\begin{array}{ll} 1) & \\ 2) & \\ 3) & \\ 4) & \\ 5) & \\ 6) & \\ 7) & \end{array}\left\{\begin{array}{l} \partial U/\partial x_1^1 - \lambda * p_1^1 = 0\\ \partial U/\partial x_2^1 - \lambda * p_2^1 = 0\\ \partial U/\partial x_1^2 - \lambda' * p_1^2 = 0\\ \partial U/\partial x_2^2 - \lambda' * p_2^2 = 0\\ p_b = \lambda'/\lambda\\ m^1 = p_1^1 * x_1^1 + p_2^1 * x_2^1 + p_b B\\ m^2 + B = p_1^2 x_1^2 + p_2^2 * x_2^2 \end{array}\right.$$

Otteniamo con opportune trasformazioni, dividendo le equazioni 2, 3 e 4 per la 1:

$$\begin{cases} \partial U/\partial x_2^1 / \partial U/\partial x_1^1 = p_2^1 / p_1^1 \\ \partial U/\partial x_1^2 / \partial U/\partial x_1^1 = \lambda' p_1^2 / \lambda p_1^1 \\ \partial U/\partial x_2^2 / \partial U/\partial x_1^1 = \lambda' p_2^2 / \lambda p_1^1 \\ m^1 = p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 + p_b B \\ m^2 + B = p_1^2 x_1^2 + p_2^2 x_2^2 \\ \lambda' = \lambda p_b \end{cases}$$

Similmente otteniamo tenendo conto che $\lambda' = \lambda p_b$:

$$\begin{cases} \partial U/\partial x_2^1 / \partial U/\partial x_1^1 = p_2^1 / p_1^1 \\ \partial U/\partial x_1^2 / \partial U/\partial x_1^1 = \lambda p_b p_1^2 / \lambda p_1^1 \\ \partial U/\partial x_2^2 / \partial U/\partial x_1^1 = \lambda p_b p_2^2 / \lambda p_1^1 \\ m^1 = p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 + p_b B \\ m^2 + B = p_1^2 x_1^2 + p_2^2 x_2^2 \end{cases}$$

dato che $p_b = 1/(1+r)$:

$$\begin{array}{ll} 1) & \\ 2) & \\ 3) & \\ 4) & \\ 5) & \end{array} \begin{cases} \partial U/\partial x_2^1 / \partial U/\partial x_1^1 = p_2^1 / p_1^1 \\ \partial U/\partial x_1^2 / \partial U/\partial x_1^1 = (p_1^2/(1+r)) / p_1^1 \\ \partial U/\partial x_2^2 / \partial U/\partial x_1^1 = (p_2^2/(1+r)) / p_1^1 \\ m^1 = p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 + p_b B \\ m^2 + B = p_1^2 x_1^2 + p_2^2 x_2^2 \end{cases}$$

Quindi in equilibrio le quantità consumate nel periodo corrente dei beni 1 e 2 e dei titoli **(x_1^1,x_2^1 e B)** e i consumi futuri (x_1^2**e** x_2^2) debbono essere tali da rispettare i vincoli di bilancio (equazioni 4 e 5). Il saggio marginale di sostituzione tra i beni **(x_1^1,x_2^1)** come di consueto deve essere uguale al rapporto tra prezzi (equazione 1). In base alla seconda equazione il rapporto tra l'utilità marginale attesa del bene 1 consumato in futuro e l'utilità marginale del bene 1 consumato oggi deve essere uguale al rapporto tra il prezzo atteso del bene 1, scontato al tasso d'interesse di mercato, ed il prezzo corrente del bene 1. Il saggio marginale di sostituzione intertemporale è dato dal numero delle unità del bene 1 che oggi sono necessarie per sostituire una unità del bene 1 consumabile nel periodo successivo rimanendo indifferente (lo stesso vale per il bene 2).

Un altro aspetto interessante di questa analisi è che se i prezzi correnti aumentano, e il consumatore pensa che l'aumento sia temporaneo, esso tenderà a sostituire al consumo presente quello futuro, posticipando l'acquisto del bene. Questo si chiama **effetto di sostituzione intertemporale** e si verifica perché cambiano i prezzi relativi dello stesso bene riferiti a periodi diversi. L'effetto di sostituzione intertemporale può rendere la domanda ancora più sensibile alle variazioni di prezzo. Dal momento tuttavia che i prezzi attesi in generale dipendono da quelli correnti è importante **l'elasticità delle aspettative** (cioè la misura in cui i prezzi attesi reagiscono alle variazioni dei prezzi correnti).

Dal processo di massimizzazione si ottengono le funzioni di domanda dei beni, correnti (x_1^{1d}, x_2^{1d}) e futuri (x_1^{2d}, x_2^{2d}), e delle obbligazioni (B^{d}):

$$\mathbf{x_1^{1d}=f(p_1^1, p_2^1, p_1^2, p_2^2, p_b, m^1, m^2)}$$

$$\mathbf{x_2^{1d}=f(p_1^1, p_2^1, p_1^2, p_2^2, p_b, m^1, m^2)}$$

$$\mathbf{x_1^{2d}=f(p_1^1, p_2^1, p_1^2, p_2^2, p_b, m^1, m^2)}$$

$$\mathbf{x_2^{2d}=f(p_1^1, p_2^1, p_1^2, p_2^2, p_b, m^1, m^2)}$$

$$\mathbf{B^d=f(p_1^1, p_2^1, p_1^2, p_2^2, p_b, m^1, m^2)}$$

I titoli tuttavia, come ogni altra attività finanziaria, non possono entrare direttamente nella funzione di utilità del consumatore, non essendo consumabili direttamente. I titoli posseggono solo un'utilità indiretta, legata al consumo futuro che essi rendono possibile[1].

[1] potremmo sostituire a x_1^2e x_2^2 le grandezze da cui dipendono p_1, p_2 e B e ottenere una *funzione di utilità derivata* dove entrano anche i titoli, del tipo:

$$\mathbf{V(x_1^1, x_2^1, B, p_1^1, p_2^1)}$$

SCELTE DEL CONSUMATORE
IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA

INTRODUZIONE. L'incertezza è una caratteristica fondamentale dell'esistenza umana.

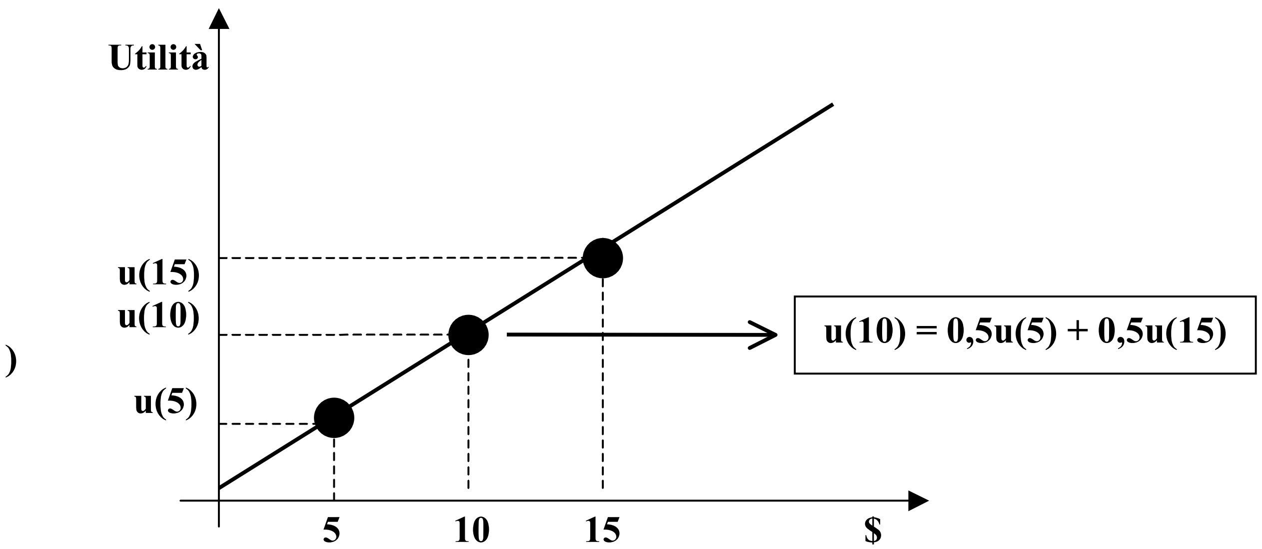
Come le curve di indifferenza ci danno informazioni sulle preferenze di un individuo in condizioni di certezza, si ottengono informazioni dell'atteggiamento dell'individuo verso il rischio esaminando la **funzione di utilità attesa** oppure la **funzione di utilità Von Neumann-Morgenstern**.

Esaminiamo diverse situazioni.

INDIVIDUO NEUTRALE AL RISCHIO

Il caso intermedio fra un individuo avverso al rischio e un individuo propenso al rischio, è rappresentato dal caso di un individuo **neutrale al rischio**. Supponiamo che il consumatore abbia una ricchezza attuale di \$10 e che stia pensando di investirla in un'attività a rischio, ad esempio una lotteria, la quale gli offra una probabilità del 50% di guadagnare 5\$ e una probabilità del 50% di perderli. La sua ricchezza, quindi, dipenderà ancora da un elemento aleatorio: egli ha il 50% di probabilità di ritrovarsi con 5\$ e il 50% di probabilità di ritrovarsi con 15\$. Il **premio certo** di questa scommessa è 10\$ e l'**utilità attesa dalla lotteria** è:

$$\tfrac{1}{2}\,u(15\$) + \tfrac{1}{2}\,u(5\$).$$



Va osservato che in questo grafico **l'utilità attesa dalla lotteria è uguale all'utilità del premio certo**, e cioè:

$$u(\tfrac{1}{2}\,15 + \tfrac{1}{2}\,5) = u(10) = \tfrac{1}{2}\,u(15) + \tfrac{1}{2}\,u(5).$$

In questo caso, si dice che il consumatore è **neutrale al rischio**.

La **funzione di utilità** del consumatore neutrale al rischio è **lineare**; quindi, ogni $ in più dà all'individuo sempre lo stesso aumento di utilità.

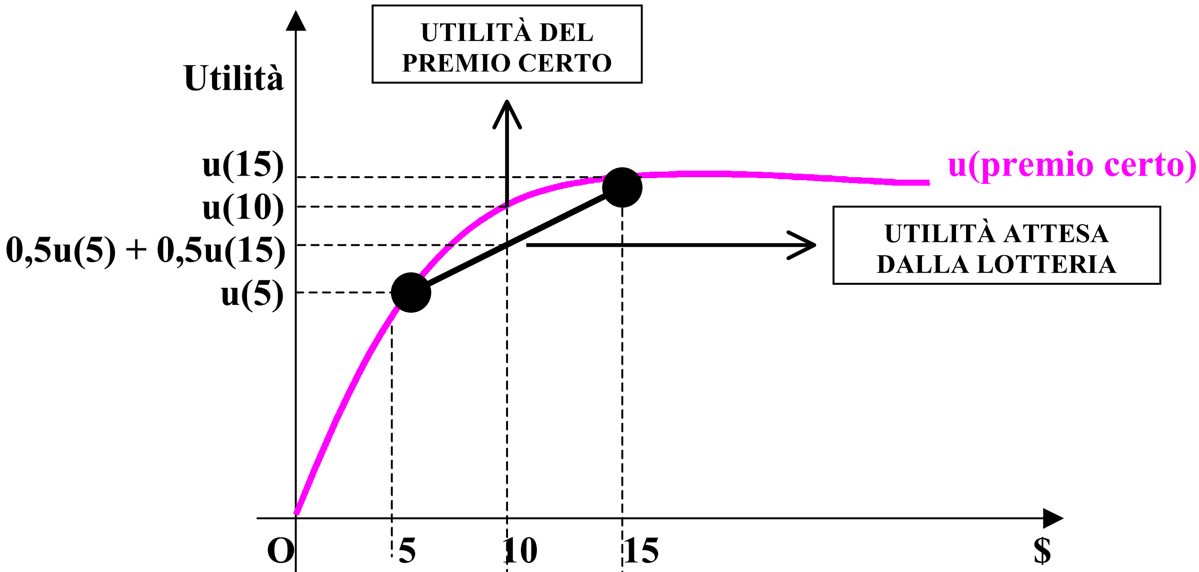
In questo caso, il consumatore non è interessato al rischio della lotteria, ma soltanto al suo valore atteso.

INDIVIDUO AVVERSO AL RISCHIO

Supponiamo che la ricchezza di un consumatore sia attualmente $10 e che stia pensando di investirla in un'attività a rischio, ad esempio una lotteria, la quale gli offra una probabilità del 50% di guadagnare 5$ e una probabilità del 50% di perderli. La sua ricchezza, quindi, dipenderà da un elemento aleatorio: egli ha il 50% di probabilità di ritrovarsi con 5$ e il 50% di probabilità di ritrovarsi con 15$. Il **premio certo** di questa scommessa è 10$ e l'**utilità attesa dalla lotteria** è:

$$\tfrac{1}{2}\,u(15\$) + \tfrac{1}{2}\,u(5\$).$$

Graficamente, avremo:



L'**utilità attesa dalla lotteria** corrisponde alla media dei due numeri **u(15$)** e **u(5$)**, rappresentata nel grafico da **0,5u(5) + 0,5u(15)**. Abbiamo rappresentato anche l'**utilità del premio certo**, **u(10$)**.

Va osservato che in questo grafico **l'utilità attesa dalla lotteria è inferiore all'utilità del premio certo**, e cioè:

$$u(\tfrac{1}{2}\,15 + \tfrac{1}{2}\,5) = u(10) > \tfrac{1}{2}\,u(15) + \tfrac{1}{2}\,u(5).$$

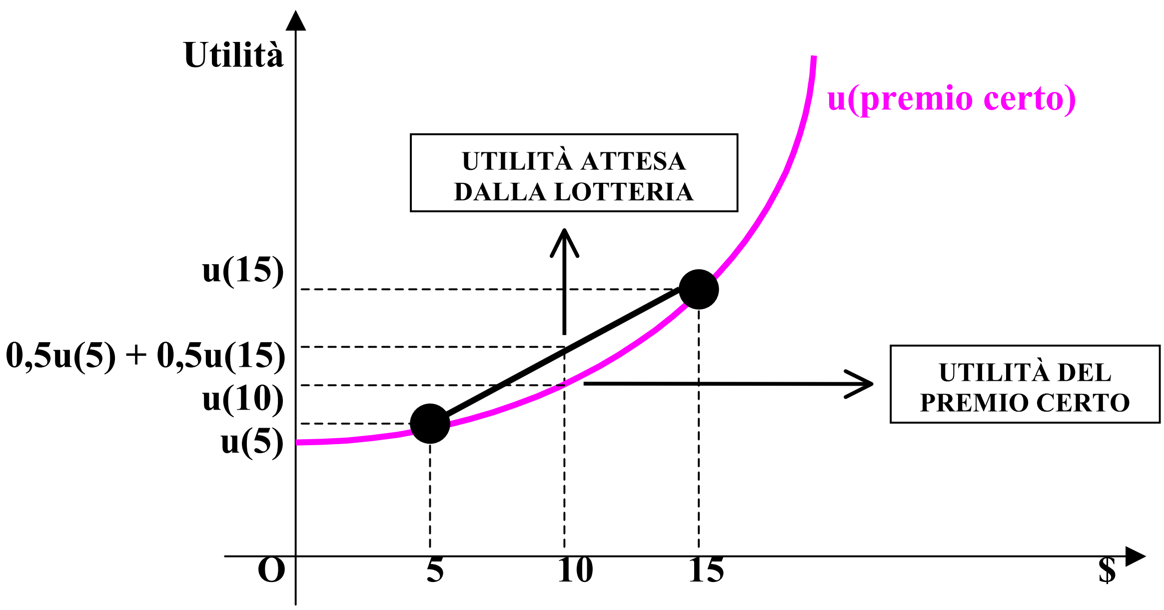
In questo caso, si dice che il consumatore è **avverso al rischio**, poiché preferisce disporre del valore del premio certo piuttosto di correre il rischio di affrontare la lotteria. Egli accetterebbe al più una lotteria in cui le probabilità di vincere sono maggiori di quelle di perdere.

La **funzione di utilità** del consumatore avverso al rischio è **concava**, cioè diventa sempre più piatta all'aumentare della ricchezza. La curvatura della funzione di utilità rappresenta, pertanto, l'attitudine al rischio del consumatore: in genere, più la funzione di utilità è concava, più il consumatore sarà avverso al rischio.

INDIVIDUO PROPENSO AL RISCHIO

Siamo sempre in presenza di un consumatore la cui ricchezza attuale sia di \$10 e che stia pensando di investirla in un'attività a rischio, ad esempio una lotteria, la quale gli offra una probabilità del 50% di guadagnare 5\$ e una probabilità del 50% di perderli. La sua ricchezza, quindi, dipenderà ancora da un elemento aleatorio: egli ha il 50% di probabilità di ritrovarsi con 5\$ e il 50% di probabilità di ritrovarsi con 15\$. Il **premio certo** di questa scommessa è 10\$ e l'**utilità attesa dalla lotteria** è:

$$\tfrac{1}{2}\,u(15\$) + \tfrac{1}{2}\,u(5\$).$$



L' **utilità attesa dalla lotteria** corrisponde alla media ponderata di **u(15$)** e **u(5$)**, rappresentata nel grafico da **0,5u(5) + 0,5u(15)**. Abbiamo rappresentato anche l'**utilità del premio certo**, **u(10$)**.

Va osservato che in questo grafico **l'utilità attesa dalla lotteria è superiore all'utilità del premio certo**, e cioè:

$$u(\tfrac{1}{2}\,15 + \tfrac{1}{2}\,5) = u(10) < \tfrac{1}{2}\,u(15) + \tfrac{1}{2}\,u(5).$$

In questo caso, si dice che il consumatore è **propenso al rischio**, poiché preferisce correre il rischio di affrontare la lotteria piuttosto di disporre del valore del premio certo.

La **funzione di utilità** del consumatore avverso al rischio è **convessa**, cioè diventa sempre più ripida all'aumentare della ricchezza. La curvatura della funzione di utilità rappresenta, pertanto, l'attitudine al rischio del consumatore: in genere, più la funzione di utilità è convessa, più il consumatore sarà propenso al rischio.

ATTIVITÀ A RISCHIO

Supponiamo di poter investire in due attività differenti, una delle quali sia **non rischiosa**, cioè garantisca un tasso di rendimento costante r_f: per esempio, un **BOT** che offra un interesse costante.
Supponiamo che l'altra attività sia un'attività **a rischio**, come, per esempio, l'acquisto di una quota di un fondo comune di investimento che operi sul mercato azionario. Questo investimento sarà redditizio soltanto nel caso in cui il mercato azionario abbia un andamento positivo.
Indichiamo, inoltre, con r_m il rendimento medio atteso dell'attività a rischio e con σ_m lo scarto quadratico medio del rendimento, ossia il rischio associato a tale attività.
Non è naturalmente necessario scegliere l'una o l'altra attività, poiché è possibile suddividere tra le due la ricchezza disponibile. Se si impiega una frazione di **x** della ricchezza disponibile nell'attività a rischio ed una frazione **(1 − x)** in quella non rischiosa, il **valore medio** o **rendimento medio del portafoglio** sarà:

$$\boxed{r_x = x * r_m + (1 - x) * r_f}$$

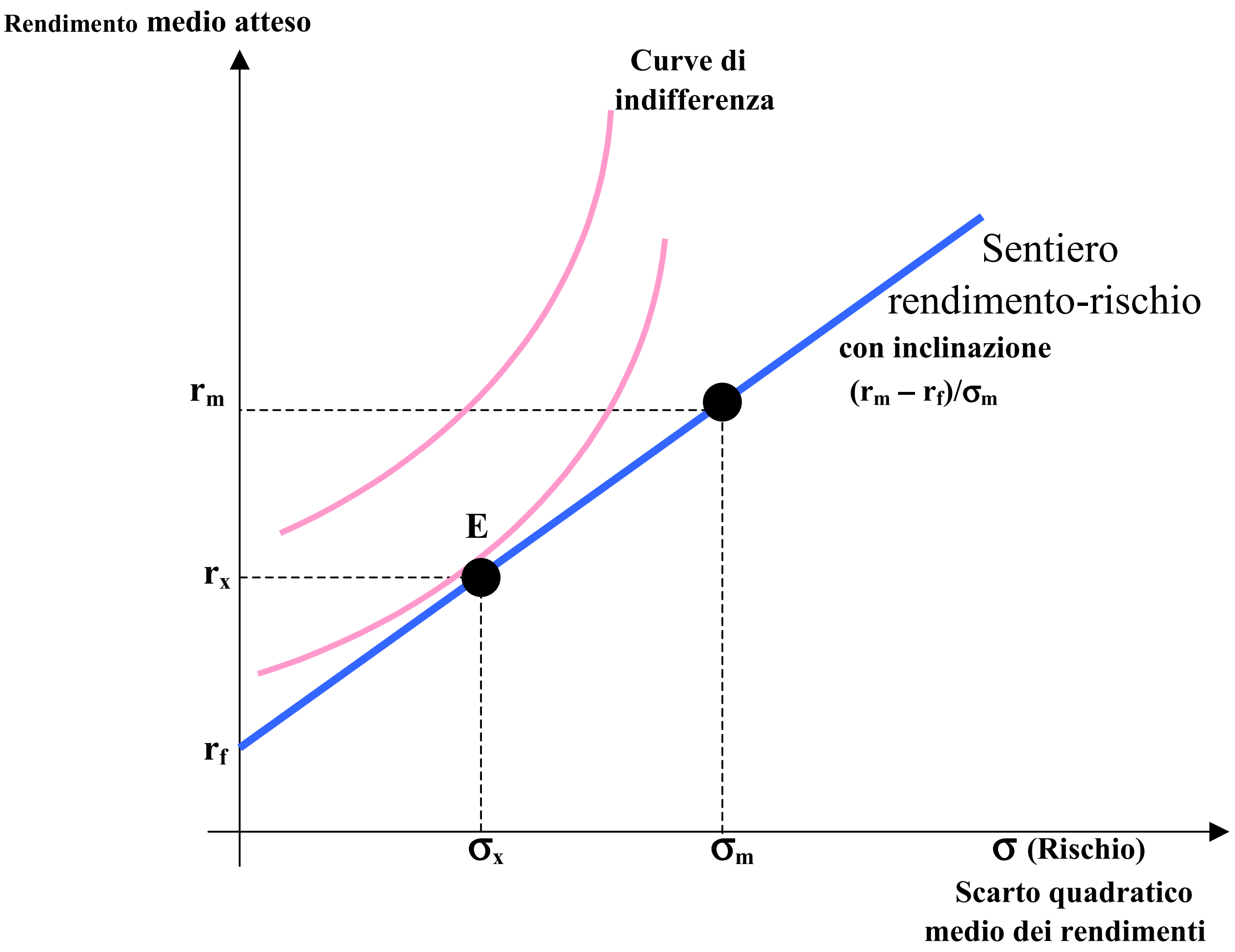
Pertanto il rendimento medio atteso del portafoglio è uguale alla media ponderata dei rendimenti medi attesi delle due attività.

Lo scarto quadratico medio del rendimento del portafoglio, ovvero il rischio associato, sarà:

$$\sigma_x = x\ \sigma_m.$$

$$r_x = r_f + x\ (r_m - r_f)$$
$$x = \sigma_x / \sigma_m$$
$$r_x = r_f + (r_m - r_f)\ \sigma_x / \sigma_m$$

Naturalmente assumiamo che $\mathbf{r_m > r_f}$, poché un individuo avverso al rischio non investirebbe in una attività a rischio il cui rendimento medio atteso fosse inferiore a quello dell'attività non rischiosa.
Di conseguenza, se si sceglie di impiegare nell'attività a rischio una frazione più elevata della ricchezza disponibile, si avrà un più elevato rendimento atteso, ma si dovrà anche affrontare un rischio maggiore, come possiamo rappresentare graficamente:



Se **x = 1** ciò significa che l'intera ricchezza è investita nell'attività a rischio: il rendimento atteso e lo scarto quadratico medio saranno **(r_m; σ_m)**.
Se **x = 0** tutta la ricchezza è investita nell'attività non rischiosa, e il rendimento atteso e lo scarto quadratico medio saranno **(r_f; 0)**.
Infine, i valori di **x** compresi tra **0** e **1** corrispondono ai punti situati sulla retta rappresentata in figura. Questa retta è la retta di bilancio che descrive lo scambio, o trade-off, di mercato tra rischio e rendimento. Lo scarto quadratico medio, ovvero il rischio, è un «male» e quindi le curve di indifferenza avranno un'inclinazione positiva, come abbiamo rappresentato in figura.
In corrispondenza della scelta ottima di rischio e rendimento **E′**, l'inclinazione della curva di indifferenza deve essere uguale all'inclinazione della retta di bilancio.
Potremmo definire questa inclinazione il **<u>prezzo del rischio</u>**, poiché misura la sostituzione tra rischio e rendimento nelle scelte di portafoglio. Esaminando la figura, possiamo ottenere il prezzo del rischio che è:

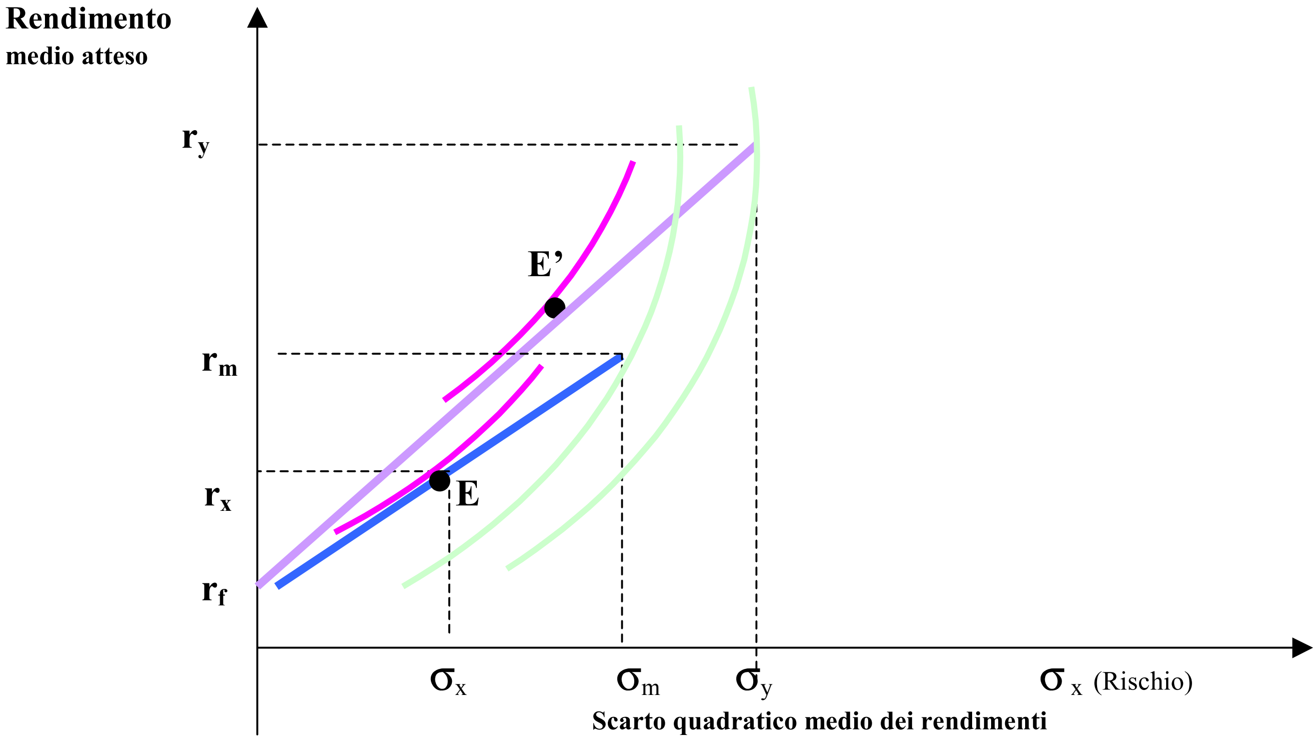
$$\mathbf{(r_m - r_f)/\ \sigma_m.}$$

Potremmo pertanto caratterizzare la scelta ottima di portafoglio tra l'attività a rischio e quella non rischiosa con la condizione che il saggio marginale di sostituzione tra rischio e rendimento debba essere uguale al prezzo del rischio:

$$\mathbf{SMS = (r_m - r_f)/\ \sigma_m.}$$

Supponiamo, ora, per esempio, che ad un individuo sia offerta una nuova attività a rischio, **y**, con rendimento medio **r_y** e scarto quadratico medio **σ_y**, come in figura:

Sentieri rendimento-rischio



Vediamo come si comporterà il consumatore se può scegliere tra l'investimento nell'attività **m** e quello nell'attività **y**.

Notiamo che tutte le scelte di rischio e rendimento possibili nell'insieme di bilancio iniziale sono possibili anche nel nuovo insieme, poiché questo contiene quello iniziale.

Quindi investire nell'attività **y** e in quella non rischiosa è decisamente preferibile che investire nell'attività **m** e in quella non rischiosa, dal momento che, in questo modo, il consumatore può scegliere una migliore struttura del portafoglio.

È importante per questo ragionamento che il consumatore possa scegliere quale frazione della propria ricchezza investire nell'attività a rischio.

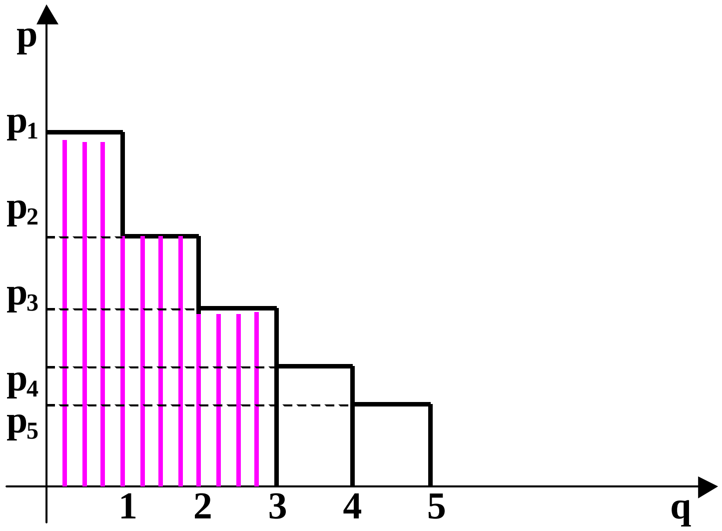
Se, infatti, si trattasse di una scelta del tipo «tutto o niente», cioè se il consumatore dovesse scegliere di investire tutto il suo denaro nell'attività **m** oppure nell'attività **y**, il risultato sarebbe *molto diverso.

Nell'esempio rappresentato in figura, il consumatore preferirà investire tutto il suo denaro dell'attività **m** piuttosto che nell'attività **y (** si vede infatti che la soddisfazione associata alle curve di indifferenza di colore verde è maggiore per l'attività **m** .che per quella **y**)

Ma se può combinare l'attività a rischio con quella non rischiosa, il consumatore preferirà certamente la combinazione che contiene **y** a quella che contiene **m.**

IL SURPLUS DEL CONSUMATORE

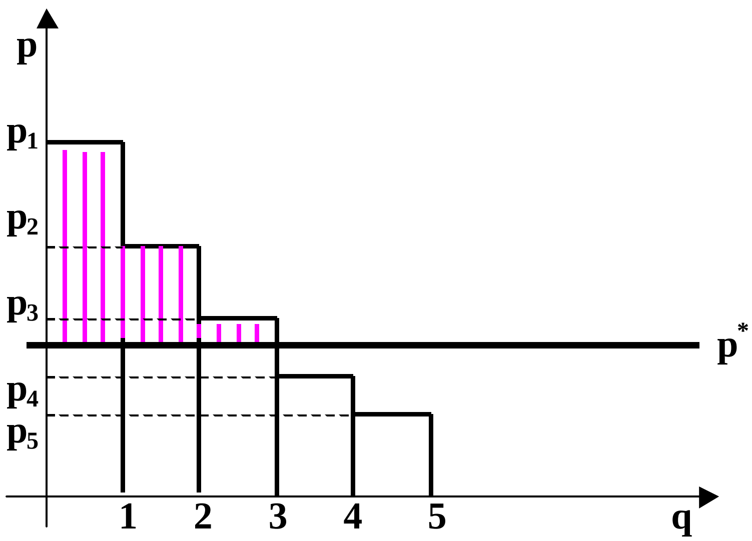
Supponiamo il caso di un bene discreto, ossia di un bene che può essere consumato in quantità intere e che le preferenze siano di tipo quasi lineare (dato un bene q e la moneta m si ha che U(q,m)= v(q)+ m). Supponiamo inoltre che il prezzo della moneta è 1 e il prezzo del bene q è p. Il prezzo di riserva del consumatore, cioè il prezzo massimo che è disposto a pagare per una data quantità di merce, è rappresentabile graficamente nel modo seguente:



Possiamo osservare che l'utilità derivante dal consumo di **n** unità del bene corrisponde esattamente all'area dei primi **n** rettangoli che formano la curva di domanda. Questo perché l'altezza di ciascun rettangolo è il prezzo associato a quel livello della domanda, mentre la base è uguale a **1**. Quest'area è generalmente definita **beneficio lordo** o **surplus lordo del consumatore** associato al consumo del bene. Quindi:

$$SL = u(n) = p_1 * 1 + p_2 * 1 + \dots + p_n * 1 = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

Supponiamo, ora, che il prezzo del bene discreto sia $\mathbf{p^*}$. Consideriamo la figura:



In questo caso, il consumatore assegna un valore pari a $\mathbf{p_1}$ al consumo della prima unità del bene, ma per acquistarla deve pagare solo il prezzo $\mathbf{p^*}$. In questo modo, gli resta un surplus uguale a $\mathbf{p_1 - p^*}$.

Il valore assegnato alla seconda unità è $\mathbf{p_2}$, ma di nuovo, egli deve pagare solo il prezzo $\mathbf{p^*}$, e ottiene in questo modo un surplus di $\mathbf{p_2 - p^*}$.

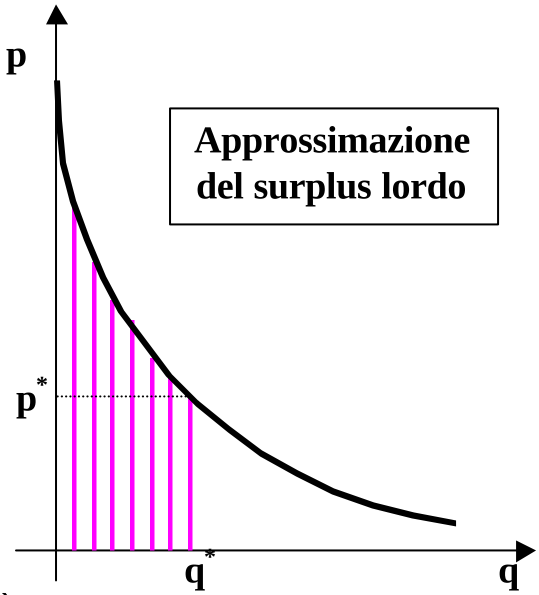
Sommando il surplus derivante dalle **n** unità scelte otteniamo il surplus totale del consumatore:

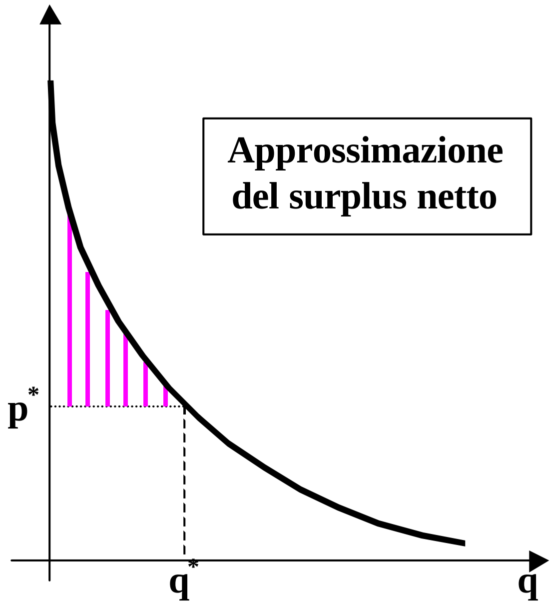
$$SN = p_1 - p^* + p_2 - p^* + \dots + p_n - p^* = p_1 + p_2 + \dots + p_n - np^*.$$

Poiché la somma dei prezzi $p_1, p_2, \dots, p_n$ è uguale all'utilità derivante dal consumo di **n** unità del bene, la precedente espressione può anche essere scritta come:

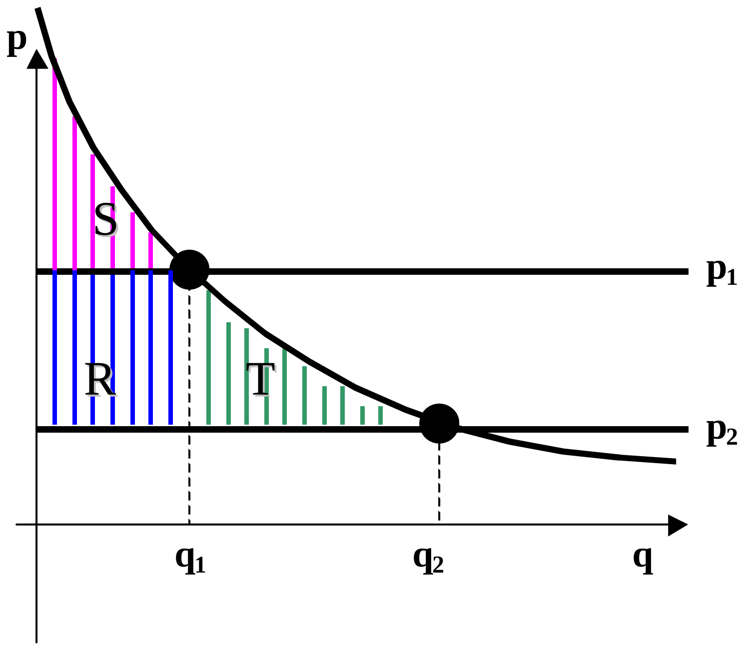
$$SN = u(n) - np^*.$$

Quest'espressione è definita **surplus del consumatore** o **surplus netto del consumatore** ed è la **differenza fra quanto il consumatore sarebbe disposto a pagare e quello che effettivamente paga**.
Nella figura esso è rappresentato dall'area tratteggiata. Esso non è un guadagno monetario, ma è solo un vantaggio di natura psicologica.
Ovviamente colui che è disposto a pagare per un bene un prezzo al massimo uguale al prezzo di mercato non realizza alcun surplus del consumatore. Questo soggetto è chiamato **consumatore marginale**.
APPROSSIMAZIONE A UNA CURVA DI DOMANDA CONTINUA. Abbiamo visto che la superficie al di sotto della curva di domanda rappresenta l'utilità derivante dal consumo nel caso di un bene discreto.
Possiamo generalizzare questa rappresentazione al caso di un bene disponibile in quantità continue approssimando una curva di domanda continua per mezzo di una curva di domanda scalettata. Vediamo un esempio:





È possibile calcolare esattamente le aree tratteggiate impiegando il calcolo integrale.
VARIAZIONE DEL SURPLUS DEL CONSUMATORE. Vediamo, ora, cosa succede quando varia il prezzo di un bene. Sia il prezzo iniziale p_1. Sia $p_2 < p_1$.

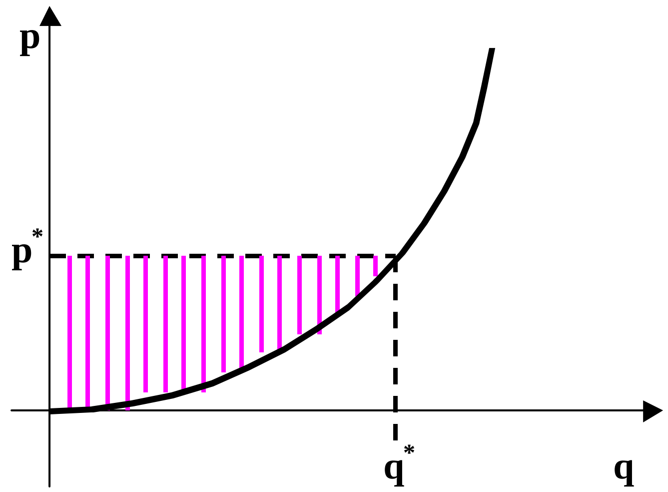


S rappresenta il surplus netto del consumatore quando il bene ha un prezzo di mercato $\mathbf{p_1}$.
S + R + T rappresenta il surplus netto del consumatore quando il prezzo del bene scende da $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$.
In particolare:

- R rappresenta l'aumento di surplus che deriva dal pagare di meno la quantità $\mathbf{q_1}$ già consumata in precedenza;
- T rappresenta il surplus aggiuntivo che il consumatore ottiene dal consumare una maggiore quantità del bene, pagando anche questa di meno.

SURPLUS DEL PRODUTTORE

La **curva di offerta** rappresenta la quantità che viene offerta in corrispondenza di ciascun prezzo.
Come l'area al di sotto della curva di domanda misura il surplus di cui godono coloro i quali domandano un bene, così l'area **al di sopra** della curva di offerta misura il surplus goduto dagli offerenti. Per analogia col surplus del consumatore, l'area al di sopra della curva di offerta è definita **surplus del produttore**. Rappresentiamo la curva di offerta del produttore in figura:



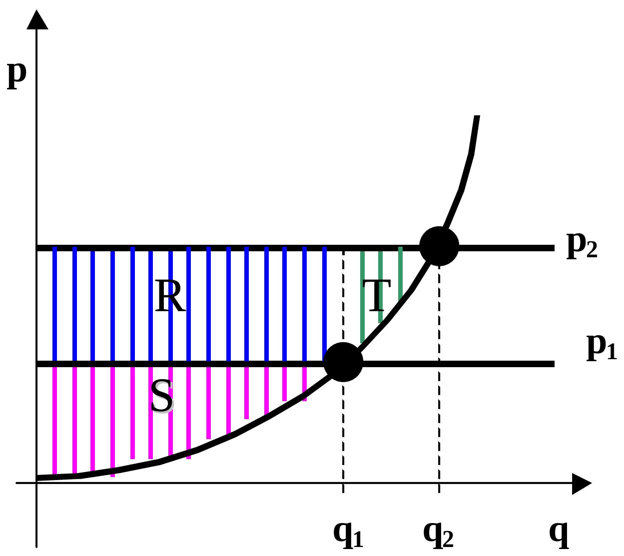
Vogliamo conoscere il surplus che deriva al produttore dalla vendita di $\mathbf{q^*}$ unità del suo prodotto al prezzo $\mathbf{p^*}$.

È conveniente proseguire l'analisi considerando la curva di offerta inversa del produttore, **p(q)**, che descrive il prezzo **p** al quale il produttore è disposto a offrire **q** unità del bene.

Se consideriamo il caso di un bene discreto, il produttore è disposto a vendere la prima unità del bene al prezzo **p(1)**, ma ne ricava, in effetti, il prezzo $\mathbf{p^*}$. Egualmente, egli è disposto a vendere la seconda unità al prezzo **p(2)**, ma ne ricava ancora $\mathbf{p^*}$. possiamo continuare sino all'ultima unità: egli sarà disposto a venderla esattamente al prezzo $\mathbf{p(q^*) = p^*}$.

<u>La differenza tra la somma minima alla quale il produttore sarebbe disposto a vendere q^* unità del bene e quella che effettivamente ottiene è il surplus netto del produttore</u>, rappresentato nell'area tratteggiata della figura di sopra.

<u>VARIAZIONE DEL SURPLUS DEL PRODUTTORE</u>. Vediamo, ora, cosa succede quando varia il prezzo di un bene. Sia il prezzo iniziale $\mathbf{p_1}$. Sia $\mathbf{p_2 > p_1}$.



S rappresenta il surplus netto del produttore quando il bene ha un prezzo di mercato $\mathbf{p_1}$.

S + R + T rappresenta il surplus netto del produttore quando il prezzo del bene sale da $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$.

In particolare:

- R rappresenta l'aumento di surplus che deriva dal vendere ad un prezzo maggiore la quantità $\mathbf{q_1}$ già venduta in precedenza;
- T rappresenta il surplus aggiuntivo che il produttore ottiene dal vendere una maggiore quantità del bene sempre ad un prezzo superiore del precedente.

ELASTICITÀ DELLA DOMANDA RISPETTO AL PREZZO

La domanda di un bene da parte di un individuo dipende dal suo prezzo, dai prezzi degli altri beni e dal reddito dell'individuo considerato.

In simboli possiamo scrivere: $\mathbf{D_1 = ¦ (p_1, p_2, \dots , p_n, Y)}$,

dove $\mathbf{D_1}$ rappresenta la quantità domandata del **bene 1**, le **p** rappresentano i prezzi dei beni (da **1** a **n**) e **Y** il reddito dell'individuo.

Al diminuire di $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{D_1}$ aumenta, a meno che il **bene 1** non sia un bene di Giffen.

Al diminuire di uno qualunque degli altri prezzi, $\mathbf{D_1}$ può aumentare, o diminuire, o rimanere invariata.

All'aumentare di **Y**, $\mathbf{D_1}$ aumenta, a meno che il **bene 1** non sia un bene inferiore.

Nella realtà, spesso rileviamo che, al trascorrere del tempo, sia il prezzo di un bene sia la quantità domandata dello stesso aumentano (si pensi al caso della carne). Ciò dipende dal fatto che, al trascorrere del tempo, aumenta anche il reddito degli individui.

L'**elasticità della domanda** di un bene rispetto al prezzo è il **rapporto fra la variazione percentuale della quantità domandata del bene e la variazione percentuale del suo prezzo**.

In simboli:

$$\mathbf{e = Dq/q \,/\, Dp/p = Dq/q * p/Dp = Dq/Dp * p/q}$$.

Essa **misura la reattività della domanda di un bene alla variazione del suo prezzo**. È importante ricordare che parliamo di variazione percentuale. Se così non fosse, **e** dipenderebbe dall'unità di misura impiegata e non sarebbe corretto usare un indice del genere.

L'elasticità della domanda **è sempre negativa**, in quanto ad un aumento di prezzo corrisponde una diminuzione della quantità domandata e viceversa, tranne che per i beni di Giffen.

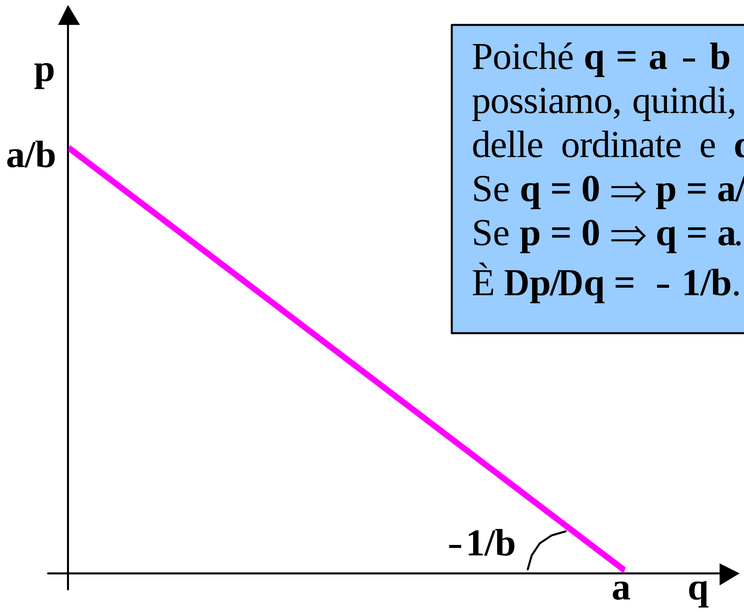
ELASTICITÀ DI UNA CURVA DI DOMANDA LINEARE. Consideriamo una curva di domanda lineare:

$$\mathbf{q = a - b * p,}$$

la cui inclinazione è:

$$\mathbf{Dq/Dp = - b}$$

e rappresentiamola in figura:



Poiché **q = a - b * p** $\Leftrightarrow$ **p = a/b - 1/b * q**, possiamo, quindi, rappresentare **p** sull'asse delle ordinate e **q** sull'asse delle ascisse.
Se **q = 0** $\Rightarrow$ **p = a/b**.
Se **p = 0** $\Rightarrow$ **q = a**.
È **Dp/Dq = - 1/b**.

Se la sostituiamo nella formula dell'elasticità, otteniamo:

$$\mathbf{e = Dq/Dp * p/q =}$$

$$\mathbf{= -bp/q =} \quad \boxed{1}$$

$$\mathbf{= -bp/(a - bp).} \quad \boxed{2}$$

Abbiamo che:

- Se **p = 0**, allora dalla $\boxed{2}$ otteniamo che **êe ê= 0**.
- Se **q = 0**, allora dalla $\boxed{1}$ otteniamo che **e = -¥**, ovvero **êe ê= ¥**.

Vediamo in corrispondenza di quale prezzo **p**, avremo **e = -1**. Scriviamo l'equazione:

$$-bp/(a - bp) = -1,$$

da cui, risolvendo per **p**, otteniamo:

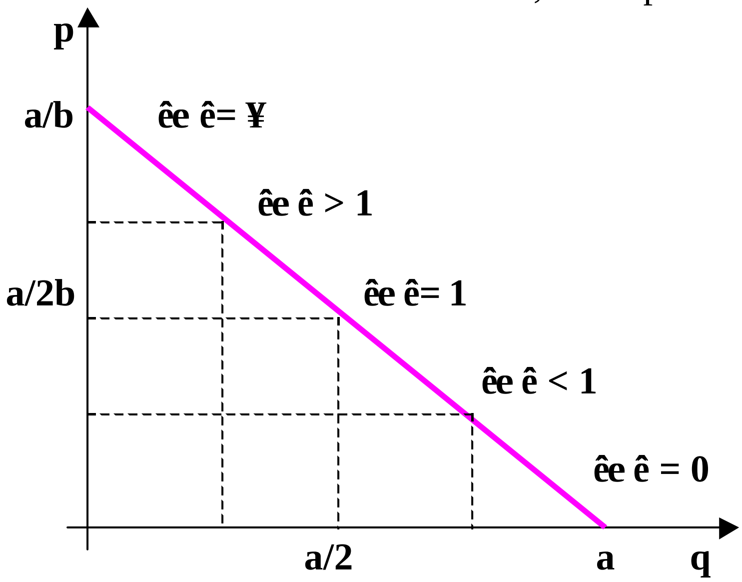
$$bp/(a - bp) = 1;$$

$$bp = a - bp;$$

$$2bp = a;$$

$$p = a/2b,$$

che si trova a metà della curva di domanda, coma possiamo vedere in figura:



Quindi, il valore assoluto di **e** varia da **0** a **¥**.

Avremmo ottenuto lo stesso risultato considerando che:

- per **Dp/p ® 0**, abbiamo che **êe ê= êDq/q/Dp/p ê = êDq/q/0 ê= ¥**;
- man mano **êe ê**decresce perché è il rapporto di due variazioni di cui quella al numeratore diminuisce e quella al denominatore aumenta;
- per **Dq/q ® 0**, abbiamo che **êe ê= êDq/q/Dp/p ê = ê0 /Dp/p ê= 0**.

ECCEZIONI. Parliamo di **curva infinitamente elastica** (o **perfettamente elastica**) quando **êe ê= ¥**. La curva di domanda è una retta orizzontale.

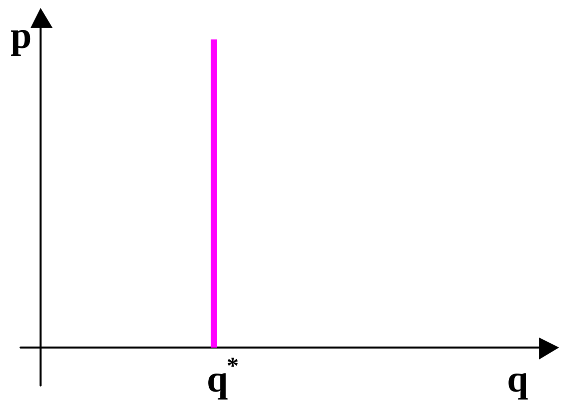
Curva infinitamente elastica

In questo caso qualunque si la quantità domandata (q), il prezzo (p^*) è sempre lo stesso, quindi $\Delta p = 0$. Infatti:

$$|\varepsilon| = |\Delta q/q \,/\, \Delta p/p| = |\Delta q/q \cdot p/\Delta p| = |\Delta q/\Delta p| \cdot p/q = |\Delta q/0| \cdot p/q = \infty.$$

ESEMPIO: al mercato della frutta c'è una bancarella che vende le arance a un prezzo p^* più basso delle altre e acquista tutti i clienti.

Parliamo, invece, di **curva perfettamente rigida** (o **anelastica**) quando $|\varepsilon| = 0$. La curva di domanda è una retta verticale.



Curva perfettamente rigida

In questo caso qualunque si il prezzo (p), la quantità domandata (q^*) è sempre la stessa, quindi $\Delta q = 0$. Infatti:

$$|\varepsilon| = |\Delta q/q \,/\, \Delta p/p| = |\Delta q/q \cdot p/\Delta p| = |\Delta q/\Delta p| \cdot p/q = |0/\Delta p| \cdot p/q = 0.$$

ESEMPIO: farmaci «salva vita».

Questi sono i due **casi estremi**. Fra i due vi sono tutta una gamma di casi intermedi, in cui l'elasticità ha valori finiti (compresi fra ∞ e 0).

L'elasticità della domanda è diversa da bene a bene, da individuo a individuo, da prezzo a prezzo.

In generale, i beni di prima necessità (o primari), come il pane e la pasta, sono a **domanda rigida**, perché se il prezzo di tali beni aumenta anche in misura notevole, la domanda diminuisce di poco.

Sono a domanda rigida anche i beni di gran lusso, come i gioielli e le pellicce di lusso; infatti, le persone molto ricche comprano ugualmente tali beni, anche se il loro prezzo aumenta notevolmente.

Invece, i beni secondari sono a **domanda elastica**. Ad esempio, l'acqua minerale, i dolciumi sono beni la cui domanda diminuisce considerevolmente quando il loro prezzo aumenta anche di poco.

Inoltre, gli individui hanno gusti diversi, per cui ad esempio Tizio ama molto il bene $\mathbf{x_1}$, mentre Caio lo ama meno. Se il prezzo di $\mathbf{x_1}$ aumenta, la domanda di $\mathbf{x_1}$ da parte di Tizio diminuisce di poco, mentre da parte di Caio diminuisce di molto. Quindi l'elasticità della domanda di $\mathbf{x_1}$ è maggiore per Caio e minore per Tizio.

Infine, l'elasticità è diversa da prezzo a prezzo, cioè è diversa a seconda del punto della curva di domanda in cui si calcola.

ELASTICITÀ E RICAVO TOTALE

Il **<u>ricavo totale</u>** per un'impresa corrisponde al **<u>prodotto del prezzo di un bene per la quantità venduta</u>**. Abbiamo:

$$\boxed{R_T = p * q} \, . \qquad \boxed{1}$$

Supponiamo che un'impresa si trovi di fronte ad una domanda per il bene che produce negativamente inclinata (come vedremo questo si verifica ad esempio quando l'impresa è monopolista, cioè l'unica produttrice di un bene sul mercato). Se il prezzo aumenta, e quindi la quantità venduta diminuisce, i ricavi possono sia aumentare che diminuire: l'effettivo risultato dipende dalla reattività della domanda alle variazioni del prezzo.

Se la domanda diminuisce in modo consistente all'aumentare del prezzo, i ricavi di un'impresa diminuiranno, mentre se all'aumentare del prezzo la domanda diminuisce di poco, i ricavi aumenteranno.

<u>Esiste</u>, in effetti, **<u>una importante relazione tra l'elasticità rispetto al prezzo della domanda di un bene diretta ad un'impresa e la variazione dei ricavi</u>**.

Se varia il prezzo e la quantità lungo la curva di domanda per l'impresa, avremo:

$$\boxed{p¢ = Dp + p} \quad \text{e} \quad \boxed{q¢ = Dq + q} \qquad \boxed{2}$$

e i nuovi ricavi $\mathbf{R_T¢}$ saranno:

$$R_T¢ = p¢ * q¢ = (p + Dp) * (q + Dq) =$$

$$= \boxed{pq + pDq + qDp + DpDq} \, . \qquad \boxed{3}$$

Sottraendo $\mathbf{R_T}$ da $\mathbf{R_T¢}$, avremo:

$$DR_T = R_T¢ - R_T =$$

$$= pq + pDq + qDp + DpDq - pq =$$

$$= \boxed{pDq + qDp + DpDq} \, . \qquad \boxed{4}$$

Per $\mathbf{Dp} ® \mathbf{0}$ e $\mathbf{Dq} ® \mathbf{0}$, la quantità $\mathbf{DpDq}$ è trascurabile, quindi abbiamo che:

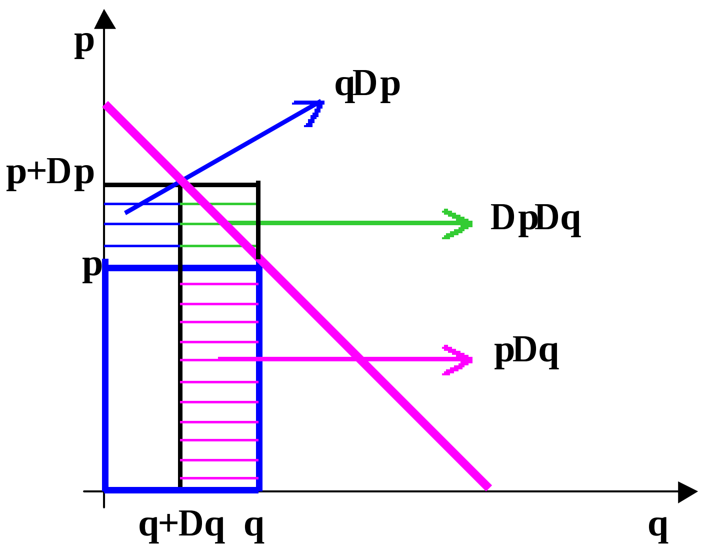
$$\mathbf{DR_T = pDq + qDp} \quad . \qquad \boxed{5}$$

Ciò significa che la variazione dei ricavi $\mathbf{DR_T}$ è approssimativamente uguale al prodotto tra il prezzo **p** e la variazione della quantità **Dq** sommato al prodotto fra la quantità **q** e la variazione del prezzo **Dp**.

Per ottenere un'espressione del saggio di variazione del ricavo al variare del prezzo è sufficiente dividere la $\boxed{5}$ per **Dp**, ottenendo:

$$\mathbf{DR_T /Dp = q + p * Dq/Dp} \quad . \qquad \boxed{6}$$

Rappresentiamo tutto questo graficamente:



Il ricavo iniziale $\mathbf{R_T}$ corrisponde all'area del rettangolo delimitato dal contorno **blu**, dato che è il prodotto fra la quantità **q** e il prezzo **p**.

Quando il prezzo aumenta, viene sommata ai ricavi l'area rettangolare che corrisponde approssimativamente a **qDp** (quella a strisce **blu**), e sottratta l'area che corrisponde approssimativamente a **pDq** (quella a strisce **fucsia**).

Per variazioni di piccola entità, possiamo trascurare l'area corrispondente a **DpDq** (quella a strisce **verdi**) perché è molto piccola rispetto alle altre.

Vogliamo sapere, ora, in quale caso il risultato netto di questi due effetti sarà positivo, cioè in quale caso sarà soddisfatta la disuguaglianza:

$$\mathbf{DR_T /Dp = p * Dq/Dp + q > 0} \qquad \boxed{7}$$

. .

Dividiamo la **7** per **q** e abbiamo:

$$p/q * Dq/Dp + 1 > 0;$$

$$p/q * Dq/Dp > -1, \qquad \boxed{8}$$

il cui membro a sinistra non è altro che **e**, che ha segno negativo.

Infatti, **Dq/Dp** è sicuramente negativo perché se **Dp** aumenta (segno +), allora **Dq** diminuisce (segno -), e viceversa. Infatti, **Dq/Dp** è il coefficiente angolare della curva di domanda lineare che ha un'inclinazione negativa.

Quindi, **e** = **Dq/Dp** * **p/q** ha sicuramente segno -.

Moltiplicando la **8** per - **1** si inverte il senso della disuguaglianza e abbiamo:

$$\boxed{- Dq/Dp * p/q < 1} . \qquad \boxed{9}$$

Allora, possiamo scrivere il **I°** membro della **9** come:

$$\boxed{- Dq/Dp * p/q =½e½} \qquad \boxed{10}$$

e, in definitiva:

$$\boxed{½e½ < 1} . \qquad \boxed{11}$$

Pertanto, i ricavi R_T aumentano all'aumentare del prezzo **p** se l'elasticità della domanda **e** è inferiore a **1** in valore assoluto.

Analogamente, i ricavi R_T diminuiscono all'aumentare del prezzo **p** se l'elasticità della domanda **e** è maggiore a **1** in valore assoluto.

Possiamo ottenere questo risultato in un altro modo. Riconsideriamo la **6** :

$$DR_T /Dp = q + p * Dq/Dp.$$

e trasformiamola nel modo seguente:

$$DR_T /Dp = q + p * Dq/Dp =$$

$$= q * (1 + p/q * Dq/Dp) =$$

$$= \boxed{q * (1 + e)} . \qquad \mathbf{12}$$

Poiché, l'elasticità della domanda ha ovviamente segno negativo, possiamo scrivere:

$$\boxed{DR_T /Dp = q * (1 - ôeô)} . \qquad \mathbf{13}$$

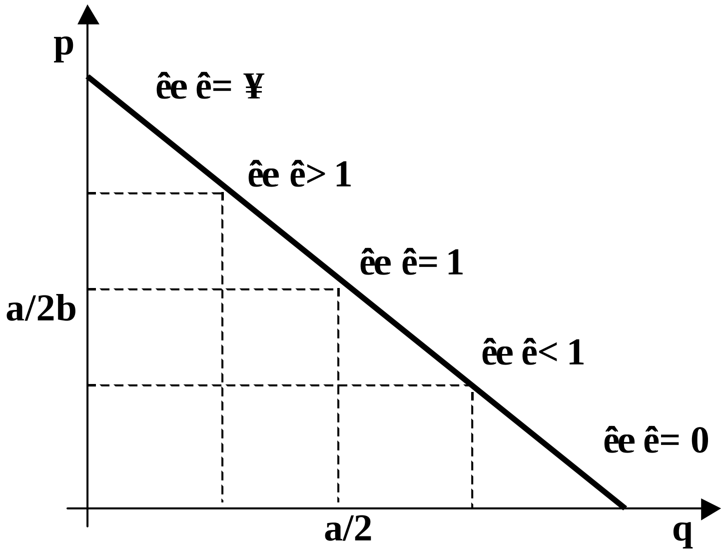
La **13** significa che:

- Se **½e½ = 1 ⇒ (1 -½e½) = 0 ⇒ DR_T /Dp = 0**. In questo caso, i ricavi **R_T** non varieranno all'aumentare del prezzo **p**. Se l'elasticità in valore assoluto è uguale a **1**, un aumento del prezzo dell'1%, per esempio, farà diminuire della stessa percentuale la domanda, e quindi i ricavi non varieranno.

- Se **½e½ > 1 ⇒ (1 - ½e½) < 0 ⇒ DR_T /Dp < 0**. In questo caso, i ricavi **R_T** diminuiranno all'aumentare del prezzo **p**. Se la domanda è molto sensibile al prezzo - se è molto elastica - un aumento del prezzo ridurrà talmente la domanda che i ricavi diminuiranno.

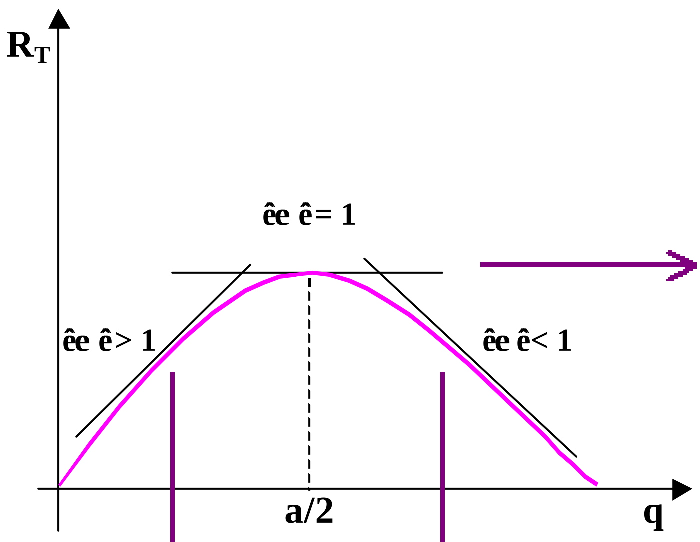
- Se **½e½ < 1 ⇒ (1 - ½e½) > 0 ⇒ DR_T /Dp > 0**. In questo caso, i ricavi **R_T** aumenteranno all'aumentare del prezzo **p**. Se la domanda non è molto sensibile al prezzo - è molto anelastica - un aumento del prezzo non la modificherà sostanzialmente e quindi i ricavi aumenteranno.

Possiamo vedere il tutto anche dal punto di vista grafico. Sappiamo che lungo una curva di domanda lineare è:



R_T = p $_*$ q, rappresenta l'area del rettangolo

e, considerando anche quanto detto precedentemente, possiamo dedurre che:



Se êe ê= 1, allora un aumento del prezzo di un tot.% ridurrà di la domanda della stessa misura e i ricavi resteranno invariati.

Se êe ê>1, allora la domanda è elastica. Un aumento del prezzo ridurrà a tal punto la domanda che i ricavi diminuiranno.

Se êe ê< 1, allora la domanda è anelastica. Un aumento del prezzo ridurrà di poco la domanda e i ricavi aumenteranno.

ELASTICITÀ E RICAVO MARGINALE

Il **<u>ricavo totale</u>** corrisponde al **<u>prodotto del prezzo di un bene per la quantità venduta</u>**. Abbiamo:

$$\boxed{R_T = p * q} \qquad \boxed{1}$$

Vediamo come variano i ricavi $\mathbf{R_T}$ al variare della quantità $\mathbf{q}$, relazione particolarmente importante per le decisioni produttive dell'impresa.

Se varia il prezzo e la quantità lungo la curva di domanda, avremo:

$$\boxed{p' = \Delta p + p} \quad \text{e} \quad \boxed{q' = \Delta q + q} \qquad \boxed{2}$$

e i nuovi ricavi $\mathbf{R_T'}$ saranno:

$$R_T' = p' * q' = (p + \Delta p) * (q + \Delta q) =$$

$$= \boxed{pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q} . \qquad \boxed{3}$$

Sottraendo $\mathbf{R_T}$ da $\mathbf{R_T'}$, avremo:

$$\Delta R_T = R_T' - R_T =$$

$$= pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q - pq =$$

$$= \boxed{p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q} . \qquad \boxed{4}$$

Per $\mathbf{\Delta p \to 0}$ e $\mathbf{\Delta q \to 0}$, la quantità $\mathbf{\Delta p\Delta q}$ è trascurabile, quindi abbiamo che:

$$\boxed{\Delta R_T = p\Delta q + q\Delta p} . \qquad \boxed{5}$$

Dividendo entrambi i membri per $\mathbf{\Delta q}$, otteniamo l'espressione del **<u>ricavo marginale</u>**:

$$\boxed{MR = \Delta R_T/\Delta q = p + q * \Delta p/\Delta q} . \qquad \boxed{6}$$

Possiamo trasformare la $\boxed{6}$ nel modo seguente:

$$MR = DR_T/Dq = p + q * Dp/Dq =$$

$$= \boxed{p * (1 + \underbrace{q/p * Dp/Dq}))} \qquad \boxed{7}$$

dove il secondo termine fra parentesi è il reciproco dell'elasticità e.

Pertanto, l'espressione $\boxed{7}$ diventa:

$$DR_T/Dq = \boxed{p * (1 + 1/e)}\ . \qquad \boxed{8}$$

Per evitare le ambiguità derivanti dal segno negativo dell'elasticità e, possiamo scrivere:

$$DR_T/Dq = \boxed{p * (1 - 1/\text{½}e\text{½})} \qquad \boxed{9}$$

La $\boxed{9}$ significa che:

- Se **½e½ = 1 ⇒ 1/½e½ = 1 ⇒ (1 - 1/½e½) = 0 ⇒ MR = 0**. In questo caso, i ricavi $\mathbf{R_T}$ non varieranno all'aumentare dell'output **q**.

- Se **½e½ > 1**(domanda elastica) **⇒ 1/½e½ < 1 ⇒ (1 - 1/½e½) > 0 ⇒ MR > 0**. In questo caso, i ricavi $\mathbf{R_T}$ aumenteranno all'aumentare dell'output **q**. Infatti, se la domanda è elastica e, quindi, sensibile al variare prezzo, per poter aumentare l'output si dovranno ridurre i prezzi di poco, e in tal modo i ricavi aumenteranno.

- Se **½e½ < 1** (domanda anelastica) **⇒ 1/½e½ > 1 ⇒ (1 - 1/½e½) < 0 ⇒ MR < 0**. In questo caso, i ricavi $\mathbf{R_T}$ diminuiranno all'aumentare dell'output **q**. Infatti, se la domanda è anelastica e, quindi, non molto sensibile al prezzo, per poter aumentare l'output si dovranno ridurre i prezzi in modo consistente, e in tal modo i ricavi diminuiranno.

<u>CURVA DEL RICAVO MARGINALE</u>. Abbiamo visto dalla $\boxed{6}$ che possiamo esprimere il **<u>ricavo marginale</u>** come:

$$DR_T/Dq = p + q \ast Dp/Dq.$$

Vogliamo, ora, costruire la curva che lo rappresenta.

Si noti, in primo luogo che, se la quantità è nulla, il ricavo marginale è uguale al prezzo.

Per la prima unità venduta, il ricavo addizionale sarà esattamente uguale al prezzo, ma, per l'unità successiva, il ricavo marginale sarà inferiore al prezzo, poiché **Dp/Dq** è negativo.

In altri termini, se vogliamo vendere una unità addizionale di output, dovremo diminuirne il prezzo, e questo, a sua volta, farà diminuire i ricavi derivanti da tutte le altre unità che stavamo vendendo. Di conseguenza il ricavo addizionale sarà inferiore al prezzo ottenuto per l'unità addizionale.

Consideriamo, ora, il caso di una curva di domanda (inversa) lineare:

$$\boxed{p = a - b \ast q} \; . \tag{10}$$

Si nota facilmente che l'inclinazione della curva di domanda inversa è costante:

$$\boxed{Dp/Dq = -b} \; . \tag{11}$$

Pertanto, l'espressione del ricavo marginale diventa:

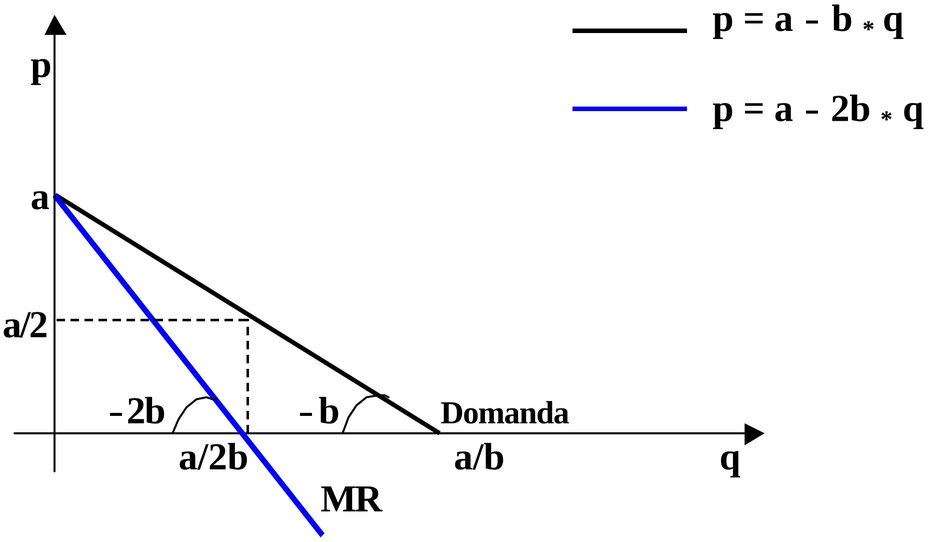
$$DR_T/Dq = p + q \ast Dp/Dq =$$

$$= p - b \ast q =$$

$$= a - b \ast q - b \ast q =$$

$$= \boxed{a - 2b \ast q} \; . \tag{12}$$

Graficamente, abbiamo:



La curva del ricavo marginale ha la stessa intercetta verticale della curva di domanda, ma la sua inclinazione è doppia.

Il ricavo marginale è negativo per $\mathbf{q > a/2b}$.

In corrispondenza della quantità **a/2b** l'elasticità **e** in valore assoluto è uguale a **1**.

Per ogni quantità maggiore la domanda sarà anelastica, e quindi il ricavo marginale sarà negativo.

ALTRE CONSIDERAZIONI. Sappiamo dalla **1** che:

$$R_T = p * q.$$

Se sostituiamo la **10** nella **1**, otteniamo che:

$$R_T = p * q =$$

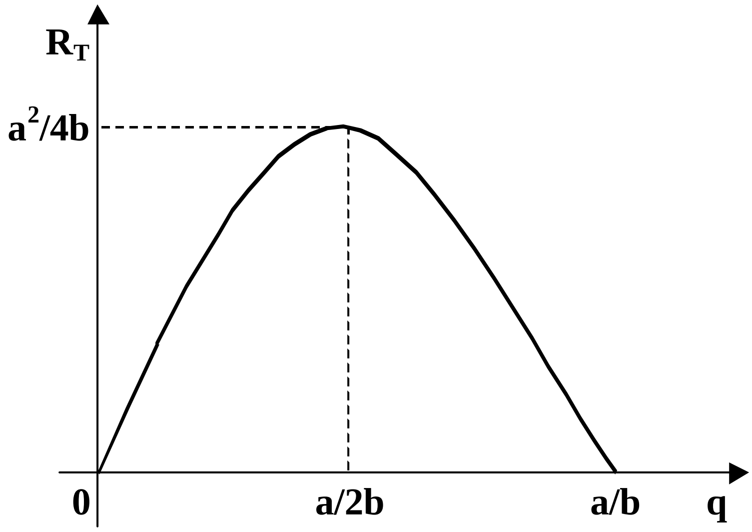
$$= (a - b * q) * q =$$

$$= \boxed{a * q - b * q^2}. \qquad \mathbf{13}$$

- Se $q = 0 \Rightarrow R_T = 0$.
- Se $R_T = 0 \Rightarrow a * q - 2b * q^2 = 0 \Rightarrow q * (a - b * q) = 0$ → $q = 0$. / → $q = a/b$.

- Affinché R_T sia massimo deve essere $\P R_T / \P q = a - 2b * q = 0 \Rightarrow q = a/2b$. Per $q = a/2b \Rightarrow R_T = a * q - b * q^2 = a^2/2b - a^2/4b = a^2/4b$.

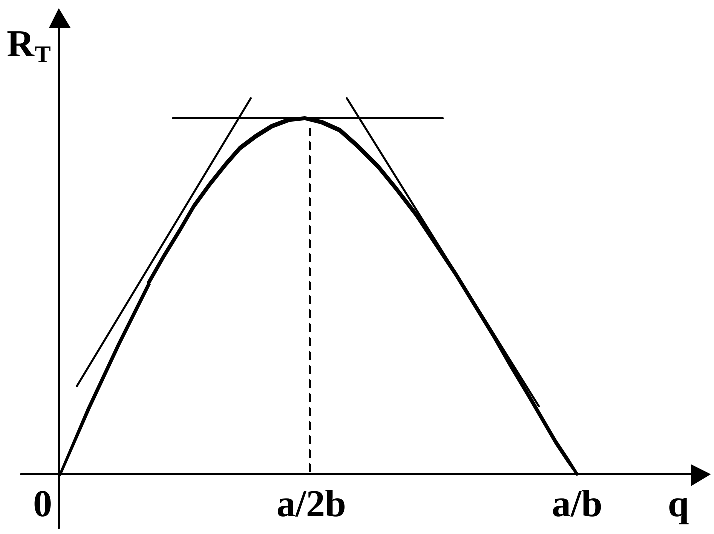
La relativa rappresentazione grafica sarà:



Per variazioni infinitesime, abbiamo:

$$\boxed{MR = DR_T / Dq = \P R_T / \P q}$$

che è la tangente alla curva del ricavo totale R_T nel punto considerato:



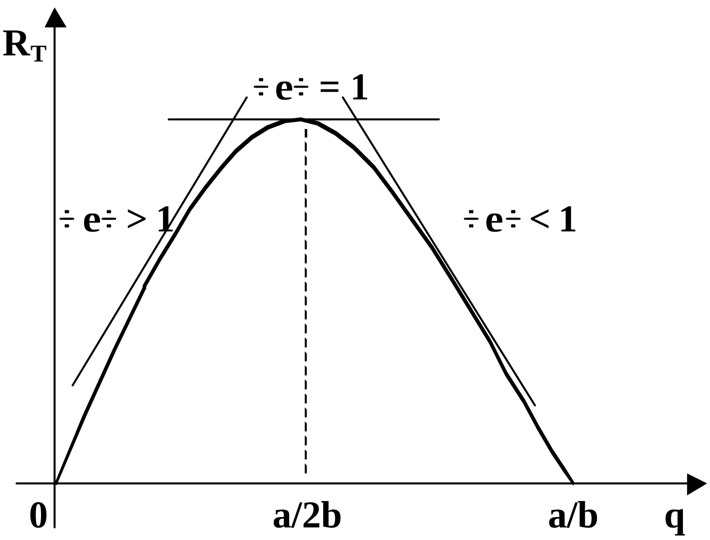
Vediamo che:

- Se $q = 0 \Rightarrow \P R_T / \P q = a - 2b * q = a$.
- Se $0 < q < a/2b \Rightarrow \P R_T / \P q > 0$.
- Se $q = a/2b \Rightarrow \P R_T / \P q = 0$.

♦ Se **$a/2b < q < a/b \Rightarrow$ ¶R_T/¶$q < 0$**.

Possiamo, quindi, ricostruire la curva del ricavo marginale, ottenendo lo stesso risultato.

Inoltre, abbiamo che:



DOMANDA AD ELASTICITÀ COSTANTE

Vediamo quale tipo di curva di domanda presenta un'**<u>elasticità costante</u>**. Non è certamente il caso di una curva di domanda lineare, se si ricorda che in questo caso l'elasticità passa da **0** a **¥** e, quindi, è diversa da punto a punto.

Esaminiamo un esempio, tenendo conto della relazione fra elasticità **e** e ricavo **R_T**.

Sappiamo che se ÷**e**÷ **= 1** in corrispondenza del prezzo **p**, il ricavo **R_T** non varierà in corrispondenza di una piccola variazione del prezzo. Pertanto, perché i ricavi **R_T** rimangano costanti in corrispondenza di qualsiasi variazione del prezzo, la curva di domanda deve presentare ÷**e**÷ **= 1** in ogni tratto.

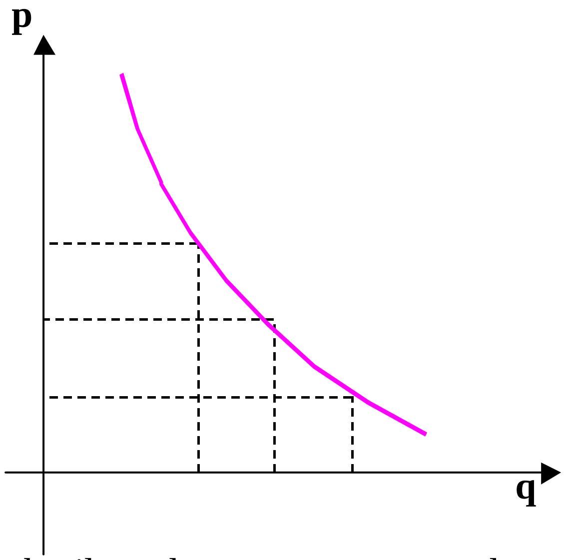
Ciò significa che la relazione tra il prezzo **p** e la quantità **q** dev'essere:

$$p * q = \overline{R_T}$$

e quindi:

$$q = \overline{R_T}/p$$

rappresenta una funzione di domanda con elasticità costante ÷ **e**÷ = **1**.
Graficamente, abbiamo:

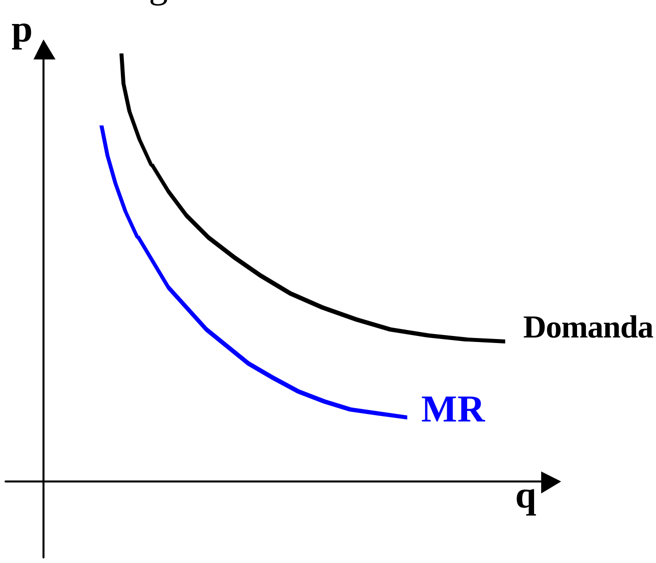


Sin noti che il prodotto tra prezzo **p** e la quantità **q** è **<u>costante</u>** lungo la curva di domanda. Vediamo, ora, la **<u>curva del ricavo marginale</u>** associata alla curva di domanda ad elasticità costante. Se l'elasticità della domanda **e** è costante, la curva del ricavo marginale avrà la forma:

MR = p * (1 - 1/½e½).

Poiché il termine tra parentesi è costante, la curva del ricavo marginale è rappresentata da qualche frazione costante della curva di domanda inversa.

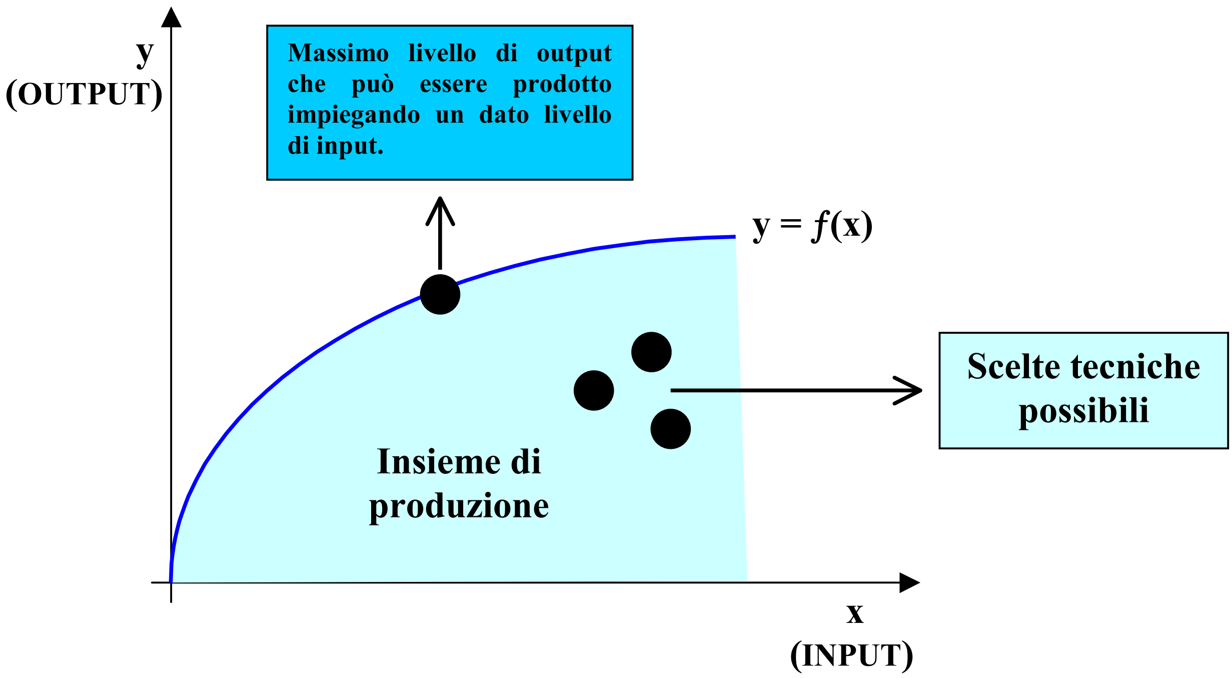
Per ÷ **e**÷ = **1** la curva del ricavo marginale si trova al di sotto della curva di domanda inversa, come in figura:



Per ÷ **e**÷ < **1** il ricavo marginale è negativo.

TECNOLOGIA

Studiando il comportamento dell'impresa, dobbiamo esaminare, in primo luogo, i vincoli ai quali è sottoposta.
Infatti, quando un'impresa compie delle scelte, essa tiene conto di molti vincoli: questi possono essere imposti dai clienti, o dai concorrenti, oppure possono essere **vincoli naturali**.
I vincoli naturali si presentano all'impresa come **vincoli tecnologici**: solo alcune combinazioni di input consentono di produrre una data quantità di output, quindi, l'impresa deve limitarsi a prendere in considerazione piani di produzione tecnicamente realizzabili.
L'insieme di tutte le combinazioni di input e output tecnicamente realizzabili è detto **insieme di produzione**.
Supponiamo, per esempio, di avere un solo input, che indichiamo con **x**, e un solo output, **y**. L'insieme di produzione può, in questo caso, avere la forma rappresentata in figura:



Dire che un punto **(x; y)** si trova all'interno dell'insieme di produzione significa affermare che è tecnicamente possibile produrre una quantità **y** di output impiegando una quantità **x** di input.
L'insieme di produzione rappresenta le **scelte tecniche possibili** per l'impresa.
Finché gli input dell'impresa hanno un costo, ha senso prendere in considerazione soltanto il **massimo livello di output** che può essere prodotto impiegando un dato livello di input. Questo coinciderà con la **frontiera dell'insieme di produzione** rappresentato.
La funzione **y =** f**(x)** corrispondente alla frontiera di questo insieme di produzione è nota come **funzione di produzione** e misura il massimo livello di input che può ottenersi impiegando una dato livello di input.

La nozione di funzione di produzione può essere estesa anche al caso in cui vi siano più input. Se, per esempio, consideriamo il caso di due input, la funzione di produzione $\mathbf{y = f(x_1, x_2)}$ determina la quantità massima di output **y** che può essere prodotta impiegando $\mathbf{x_1}$ unità del **fattore 1** e $\mathbf{x_2}$ unità del **fattore 2**.
Quindi, in generale, se indichiamo con **y** la quantità prodotta di un bene (output) e con $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, …. , $\mathbf{x_n}$ le quantità impiegate dei fattori produttivi (input), possiamo scrivere:

$$\boxed{\mathbf{y = f(x_1, x_2, \ldots , x_n)}} .$$

Essa è una funzione di produzione microeconomica, dato che si riferisce ad una singola impresa.

FATTORI FISSI E FATTORI VARIABILI

In un dato periodo di tempo, può risultare difficile far variare la quantità impiegata di certi input. Tipicamente un'impresa è obbligata contrattualmente ad utilizzare determinati input a livelli prefissati. Per esempio, l'impresa potrebbe affittare un edificio, con l'obbligo legale di acquistarne la proprietà in un certo periodo di tempo (leasing).

Definiamo **<u>fattore fisso</u>** quel fattore produttivo che l'impresa deve impiegare in quantità predeterminate.

Se un fattore può essere, invece, impiegato in quantità variabili, lo si definisce **<u>fattore variabile</u>**.

Nell'analisi del fenomeno della produzione è importante distinguere il breve periodo dal lungo periodo, distinzione su cui si è soffermato in modo particolare l'economista inglese A. Marshall.

Definiamo, quindi, **<u>breve periodo</u>** quel periodo di tempo in cui alcuni fattori sono fissi, e cioè possono essere utilizzati solo in quantità prefissate.

Nel **<u>lungo periodo</u>**, invece, l'impresa è libera di variare la combinazione dei fattori produttivi: cioè tutti i fattori sono variabili.

Non vi è una rigida distinzione fra lungo e breve periodo: ciò che conta è che alcuni fattori produttivi sono fissi nel breve periodo e variabili nel lungo.

Poiché tutti i fattori sono variabili nel lungo periodo, l'impresa è sempre libera di decidere di utilizzare quantità nulle di input per produrre una quantità nulla di output, cioè può decidere di cessare ogni attività. Quindi il profitto minimo che un'impresa può realizzare nel lungo periodo è un profitto nullo.

Nel breve periodo, l'impresa deve impiegare un certo numero di fattori, anche se ha deciso che la sua produzione sarà nulla. È quindi perfettamente possibile che il profitto dell'impresa sia **negativo** nel breve periodo. Infatti, se l'impresa prende in affitto un edificio dovrà pagare l'affitto alle scadenze previste, che decida o no di produrre qualche cosa.

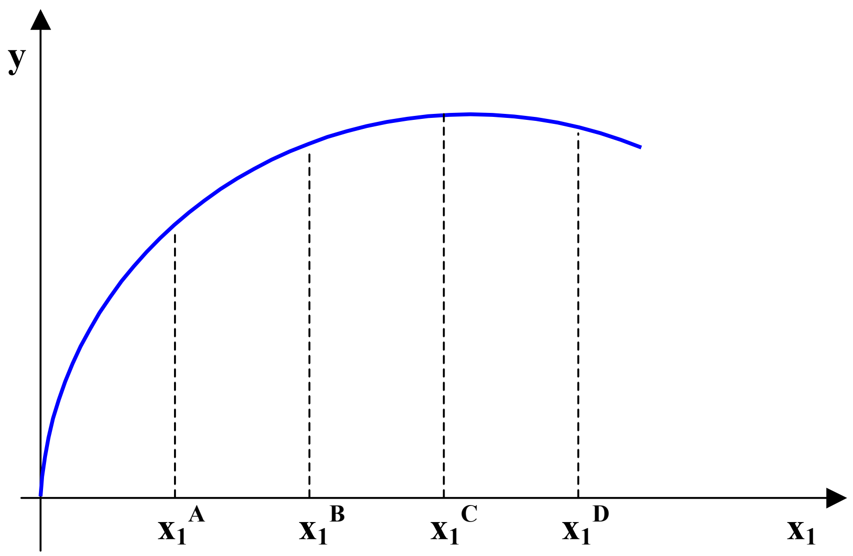
Esiste, comunque, anche un'altra categoria di fattori che l'impresa dovrà pagare solo nel caso in cui decida di produrre una quantità positiva di output: per esempio, l'elettricità per l'illuminazione. Se l'output dell'impresa è nullo, non sarà necessario acquistare energia elettrica, ma, se l'impresa produce una quantità positiva di output, dovrà acquistare una quantità fissa di elettricità. Questi fattori, detti **fattori quasi-fissi**, sono fattori che bisogna utilizzare in quantità fisse, finché la quantità di output è positiva.

PRODUTTIVITÀ MARGINALE E PRODUTTIVITÀ MEDIA

IL PRODOTTO TOTALE. Il **prodotto totale** è **l'output ottenuto dall'impiego di tutti i fattori produttivi**.

Esso **è crescente** fino ad un certo punto (nel grafico rappresentato da x_1^C) in cui l'applicazione di una quantità sempre maggiore di un fattore, a quantità date degli altri fattori, non provoca ulteriori aumenti dell'output, anzi addirittura può provocarne una diminuzione.

Graficamente, abbiamo:

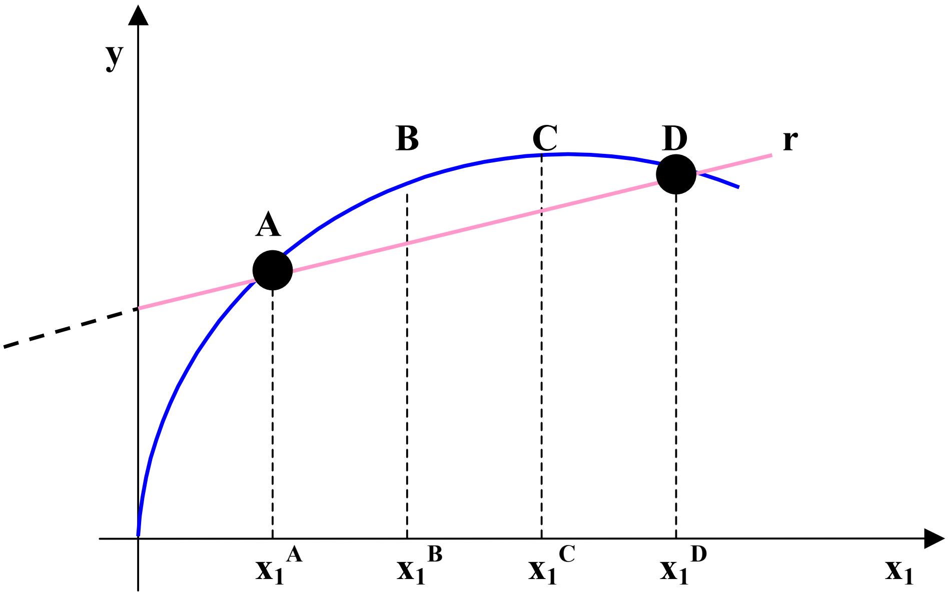


LA PRODUTTIVITÀ MARGINALE. Definiamo ora la **produttività marginale di un fattore**, cioè **l'incremento che l'output subisce quando si impiega una unità in più del fattore considerato**, **ferme restando le quantità impiegate degli altri fattori**, cioè:

$$\boxed{PMG = \Delta y/\Delta x_1 = [f(x_1+\Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)] / \Delta x_1}\ .$$

DIFFERENZE CON L'UTILITÀ MARGINALE. Il concetto di prodotto marginale è del tutto simile al concetto di utilità marginale nella teoria del consumatore, fatta eccezione per la natura ordinale dell'utilità. Qui stiamo trattando il prodotto fisico: il prodotto marginale di un fattore è un numero preciso che, in linea di principio, può essere misurato.

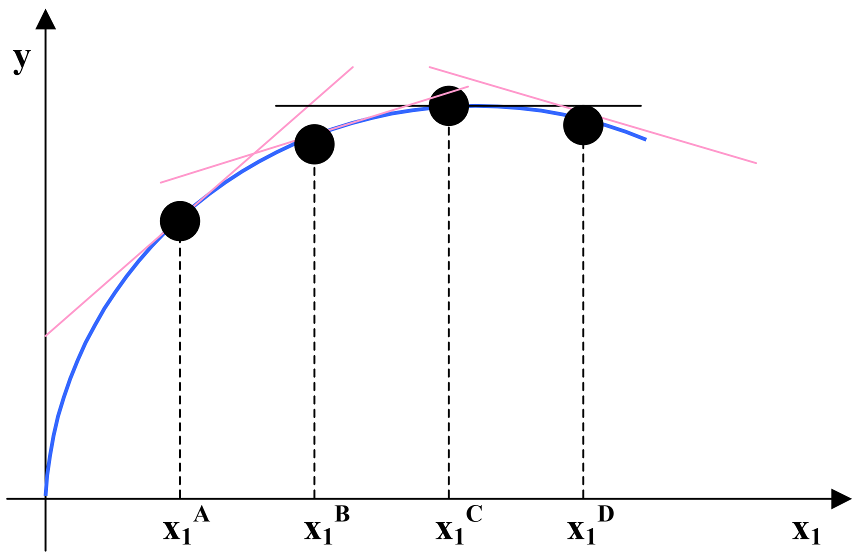
CONSIDERAZIONI SULLA PMG. Prendiamo il grafico precedente:



e osserviamo che la produttività marginale non è altro che il coefficiente angolare della retta **r** passante per il punto **A** e il punto **D**, ovvero la tangente dell'angolo α che si forma quando la retta **r** interseca l'asse delle ascisse.

$$PMG = \Delta y / \Delta x_1 = tg\ \alpha$$

Se prendiamo l'intervallo Δx_1 sempre più piccolo, la retta **r** ruota intorno al punto **A** fino a diventare tangente alla curva proprio in quel punto per Δx_1 infinitesimo, ovvero per $\Delta x_1 \to 0$. Graficamente, abbiamo:

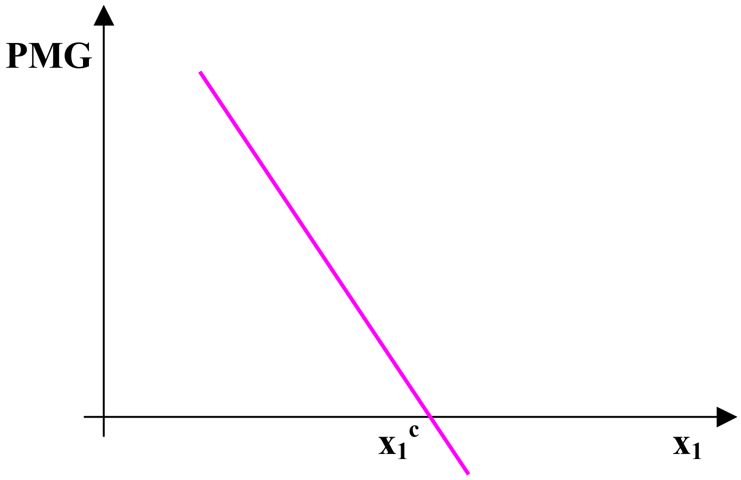


Si ha quindi per **$\Delta x_1 \to 0$** che la produttività marginale è uguale alla derivata prima della funzione del prodotto totale calcolata in quel punto.
Possiamo scrivere:

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \mathbf{PMG} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \Delta y / \Delta x_1 = \partial y / \partial x_1$$

.

Dal grafico precedente vediamo che le rette tangenti ai vari punti hanno dapprima un'inclinazione positiva, che man mano diminuisce (rimanendo sempre positiva) fino ad un punto (**x_1^C**) in cui è nulla (infatti, la retta diventa parallela all'asse delle ascisse), per diventare poi negativa. Quindi, il grafico relativo alla **PMG** sarà:



Vediamo che la produttività marginale **è decrescente**.
Supponiamo di disporre di una data quantità del **fattore 1** e del **fattore 2** e di voler impiegare una quantità addizionale del **fattore 1**, mantenendo ad un livello prefissato il **fattore 2**. Chiediamoci come varierà il prodotto marginale del **fattore 1**.
Se la tecnologia è monotona, l'output totale aumenterà all'aumentare del livello del **fattore 1**. Ma ci si può attendere che tale aumento avvenga ad un saggio decrescente.
Consideriamo un esempio specifico: una fattoria. Un individuo che lavori su un acro di terra può produrre 30 Kg di frumento. Se impieghiamo due lavoratori sullo stesso appezzamento, mantenendo invariata l'estensione del terreno, otterremo 60 kg di frumento, e quindi, in questo caso, il prodotto marginale di un lavoratore addizionale è 30. Se impieghiamo altri lavoratori la produzione aumenta, ma la quantità addizionale di frumento prodotta dall'ultimo lavoratore impiegato sarà inferiore a 30 Kg. Se si impiegano quattro o cinque lavoratori in più, la quantità addizionale che ciascun lavoratore produce scenderà a 25, 20, 10 kg o anche meno. Se, ammassati su questo acro di terra, ci fossero centinaia di lavoratori, un lavoratore in più potrebbe far diminuire l'output.
Ci possiamo aspettare, dunque, che il prodotto marginale di un fattore diminuisce quando se ne impiegano quantità via via crescenti. Questa viene definita **legge della**

produttività marginale decrescente. Non si tratta di una vera e propria «legge», ma soltanto di una caratteristica comune alla maggior parte dei processi produttivi.
È importante sottolineare che la legge della produttività marginale decrescente è valida solo quando tutti gli altri input siano mantenuti fissi.

LA PRODUTTIVITÀ MEDIA. Definiamo, ora, la **produttività media di un fattore** come **il rapporto fra il prodotto totale e la quantità impiegata del fattore**:

$$\boxed{P_{me} = y/x_1}$$

Anche la produttività media di un fattore $\mathbf{x_1}$ decresce man mano che cresce la quantità impiegata di $\mathbf{x_1}$.

RENDIMENTI DI SCALA

Consideriamo il caso in cui, invece di aumentare l'impiego di uno degli input, mantenendo l'altro fisso, aumentiamo la quantità impiegata di **tutti** gli input della funzione di produzione. In altri termini, moltiplichiamo la quantità di tutti gli input per una qualche costante.
Se, per esempio, raddoppiamo la quantità impiegata sia del **fattore 1** che del **fattore 2**, possiamo chiederci quanto output sarà prodotto. Possiamo attenderci ragionevolmente che l'output raddoppi. È questo un caso di **rendimenti di scala costanti**. Nei termini della funzione di produzione, questo significa che raddoppiando la quantità di ciascun input, si produce una quantità doppia di output. Il caso di due input può essere espresso analiticamente nel modo seguente:

$$2f(x_1; x_2) = f(2x_1; 2x_2).$$

In generale, se si moltiplica per **t** la quantità impiegata di tutti gli input, nel caso di rendimenti di scala costanti risulterà moltiplicata per **t** anche la quantità prodotta:

$$\boxed{tf(x_1; x_2) = f(tx_1; tx_2)}\ .$$

Questo risultato è plausibile perché, normalmente, l'impresa è in grado di **replicare** esattamente ciò che faceva prima. Se l'impresa dispone di una quantità doppia di ciascun input può, per esempio, costruire due impianti uguali, l'uno accanto all'altro, che produrranno una quantità doppia di output. Se la quantità degli input fosse tripla, costruirebbe tre impianti e così via.

Si noti che è perfettamente possibile che una tecnologia presenti, allo stesso tempo, rendimenti costanti di scala e **PMG** dei fattori decrescente. I **rendimenti di scala** descrivono ciò che accade quando si aumentano **tutti** gli input, mentre la **PMG** decrescente rappresenta ciò che accade quando si aumenta **un solo** input e si mantengono gli altri fissi.

Il caso dei rendimenti di scala costanti è quello più «naturale», ma vi sono anche altre possibilità.

Per esempio, può accadere che, moltiplicando per **t** la quantità impiegata di entrambi gli input, la quantità di output risulti pari a **più** di **t** volte la quantità iniziale. È questo il caso di **rendimenti di scala crescenti**. Formalmente, i rendimenti di scala crescenti sono rappresentati in questo modo:

$$\boxed{\mathbf{t}f(\mathbf{x}_1;\, \mathbf{x}_2) < f(\mathbf{t}\mathbf{x}_1;\, \mathbf{t}\mathbf{x}_2)}$$

per $\mathbf{t} > \mathbf{1}$.

Un oleodotto può rappresentare un esempio significativo di una tecnologia che presenta rendimenti di scala crescenti. Se si raddoppia il diametro della tubatura, si utilizzerà una quantità doppia di materiali, ma la sezione del condotto aumenterà di quattro volte. Quindi, l'oleodotto sarà in grado di trasportare una quantità più che doppia di petrolio.

Ovviamente, c'è un limite. Se si continua a raddoppiare il diametro della tubatura, questa alla fine cederà sotto il suo stesso peso. I rendimenti di scala crescenti sussistono solo per certi livelli di output.

L'altro caso da considerare è quello di **rendimenti di scala decrescenti**, dove:

$$\boxed{\mathbf{t}f(\mathbf{x}_1;\, \mathbf{x}_2) > f(\mathbf{t}\mathbf{x}_1;\, \mathbf{t}\mathbf{x}_2)}$$

per $\mathbf{t} > \mathbf{1}$.

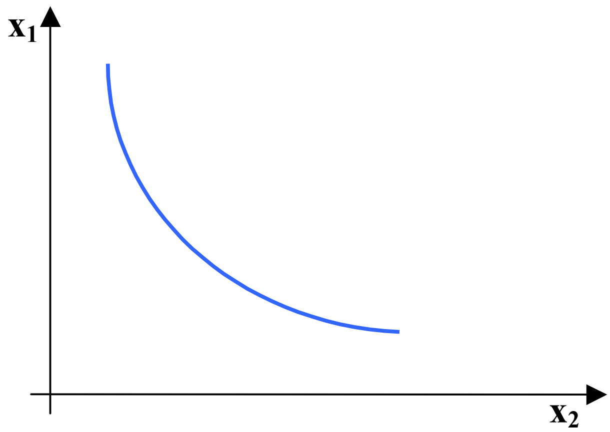
Questo è un caso un po' particolare. Se otteniamo una quantità meno che doppia di output raddoppiando la quantità impiegata di tutti gli input, qualche cosa non funziona. Dopo tutto, si tratta di replicare esattamente ciò che si faceva prima!

Normalmente, si hanno rendimenti di scala decrescenti quando non si tiene conto di qualche input. Se si raddoppiano tutti gli input tranne uno, non sarà possibile replicare esattamente ciò che si faceva prima, e quindi non si potrà ottenere un output doppio. I rendimenti di scala decrescenti sono in realtà un fenomeno di breve periodo, quando cioè alcuni fattori sono fissi.

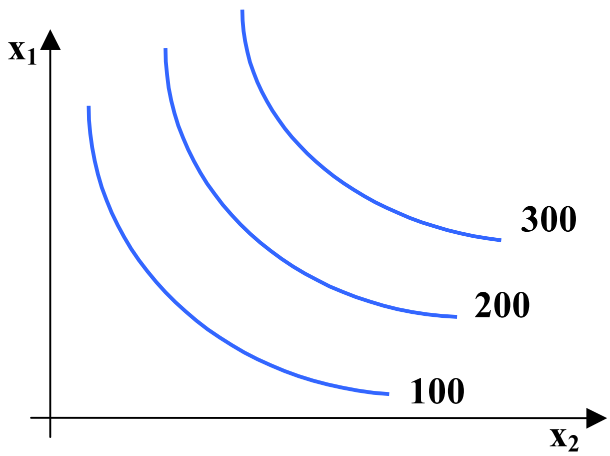
Naturalmente, una tecnologia può presentare rendimenti di scala diversi in corrispondenza di livelli diversi di produzione. Può accadere che a livelli di produzione bassi corrispondano rendimenti di scala crescenti - moltiplicando successivamente la quantità impiegata di tutti gli input per una piccola quantità **t**, la quantità prodotta può aumentare in misura **più che proporzionale** a **t**. Successivamente, in corrispondenza di livelli di output più elevati, è possibile che se moltiplichiamo gli input per **t** anche l'output risulti moltiplicato esattamente per lo stesso fattore.

GLI ISOQUANTI

Supponiamo di dover produrre una data quantità di output impiegando due fattori produttivi. L'insieme di tutte le possibili combinazioni di input **1** e **2** esattamente sufficienti a produrre una data quantità di output è detto **isoquanto**.



Naturalmente non vi sarà un solo isoquanto, ma ve ne saranno tanti, ciascuno corrispondente ad un livello dato di output. Quindi, tutti i punti situati su di un isoquanto rappresentano lo stesso livello di output, ma ogni isoquanto rappresenta un livello di output più alto man mano che le curve sono situate più a destra (cioè più in alto).



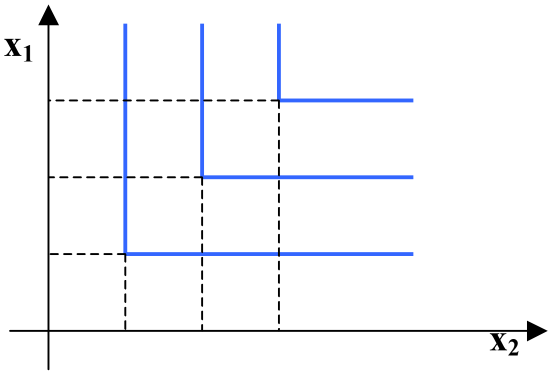
DIFFERENZA FRA ISOQUANTI E CURVE DI INDIFFERENZA. Gli isoquanti sono simili alle curve di indifferenza, che rappresentano i diversi panieri di consumo che consentono di ottenere un certo livello di utilità. La differenza essenziale fra isoquanti e curve di indifferenza consiste nel fatto che gli isoquanti sono contrassegnati in base alla quantità di output prodotto, e non in base al livello di utilità. Questo significa che i livelli di produzione corrispondenti agli isoquanti sono assegnati dalla tecnologia, e non risentono dell'arbitrarietà che invece caratterizza l'assegnazione dell'utilità alle curve di indifferenza.

ESEMPI DI TECNOLOGIA:

- Supponiamo di produrre buche, e che il solo modo di produrle sia impiegare un uomo e un badile. Un uomo in più senza un badile non scaverebbe nessuna buca, e neppure un badile senza uomo. Il numero totale di buche che possono essere prodotte corrisponderà pertanto al minimo tra il numero degli uomini e quello dei badili a disposizione. La funzione di produzione sarà:

$$\mathbf{q = \mathit{f}(x_1, x_2) = min\ \{x_1, x_2\}}.$$

Gli isoquanti vengono rappresentati in questo modo:

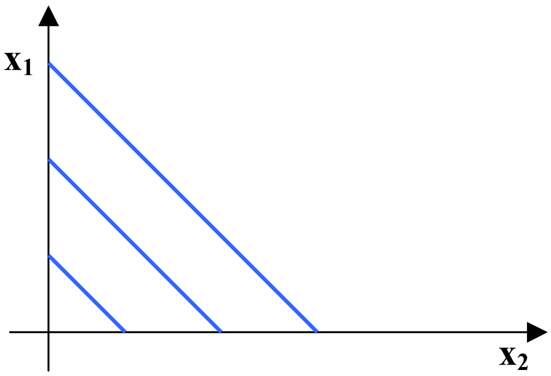


e corrispondono esattamente al caso dei perfetti complementi nella teoria del consumatore.

- Supponiamo, ora, di produrre torte e che gli input siano teglie rotonde e teglie quadrate. La quantità di torte prodotte dipende unicamente dal numero totale delle teglie, e quindi la funzione di produzione sarà:

$$\mathbf{q = \mathit{f}(x_1, x_2) = x_1 + x_2}.$$

Gli isoquanti vengono rappresentati in questo modo:



e corrispondono esattamente al caso dei perfetti sostituti nella teoria del consumatore.

- Se la funzione di produzione ha la forma:

$$q = f(x_1, x_2) = A * x_1^a * x_2^b,$$

diremo che è una **funzione di produzione Cobb-Douglas**.

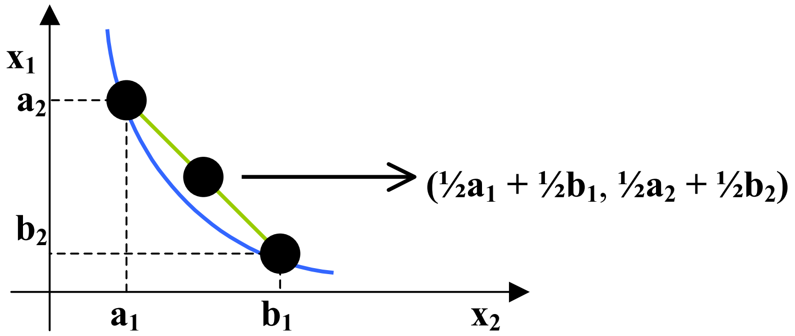
In questo caso, il parametro **A** misura la **scala di produzione**, cioè la quantità di output che può essere prodotta impiegando una unità di ciascun input.

I parametri **a** e **b** rappresentano la variazione del livello dell'output al variare delle quantità di input impiegate. Generalmente, poniamo: **a + b = 1**.

PROPRIETÀ DELLA TECNOLOGIA:

- 1) **Impossibilità di produrre senza l'impiego di fattori-**
- 2) **Irreversibilità**: il processo produttivo non può essere invertito: se un dato ammontare di fattori da luogo ad un certo output, non è poi possibile trasformare nuovamente l'output negli input impiegati.
- 3) **Possibilità di distruzione gratuita dei beni**: con la stessa quantità di fattori è sempre possibile produrre una quantità di output strettamente minore ad esempio producendo la quantità originaria di beni e gettando via senza costo la quantità di output che non desideriamo. Le tecnologie sono **monotone**: aumentando la quantità impiegata di almeno uno degli input, dovrebbe essere possibile produrre una quantità di output almeno uguale a quella prodotta inizialmente. Si definisce, talvolta, questa proprietà come possibilità di **eliminazione senza costo** (*free disposability*). Con questa ipotesi possiamo non tenere conto di quelle situazioni in cui l'imprenditore continua a produrre in perdita perché le perdite sono inferiori al costo di distruzione delle unità non redditizie.
- 4) **Additività**: se esistono due attività di produzione ammissibili: y_1 e y_2 è possibile anche una attività y_3 che sia la somma delle due attività $y_3 = y_1 + y_2$
- 5) **Divisibilità** : data una attività y_1 ammissibile lo è anche una attività che appartiene allo stesso processo che sia una frazione di y_1 ad esempio ½ y_1
- 6) **Convessità :** ciò significa che se esistono due modi per produrre **q** unità di output, y_1 e y_2, allora la loro media ponderata produrrà almeno **q** unità di output. Per illustrare questa ipotesi, supponiamo di produrre **1** unità di output impiegando a_1 unità del **fattore 1** e $\mathbf{a_2}$ unità del **fattore 2**, e di disporre di un altro modo per produrre **1** unità di output impiegando $\mathbf{b_1}$ unità del **fattore 1** e $\mathbf{b_2}$ unità del **fattore 2**. Chiamiamo questi due modi di produrre **tecniche di produzione**.
  Supponiamo, inoltre, di poter aumentare arbitrariamente il livello dell'output, così che $\mathbf{(100a_1, 100a_2)}$ e $\mathbf{(100b_1, 100b_2)}$ unità di input produrranno **100** unità di output. Ma si noti ora che impiegando $\mathbf{25a_1 + 75b_1}$ unità del **fattore 1** e $\mathbf{25a_2 + 75b_2}$ unità del **fattore 2** è ancora possibile produrre **100** unità di output: **25**

unità saranno prodotte impiegando la tecnica «**a**» e **75** impiegando la tecnica «**b**». Rappresentiamo il tutto graficamente:



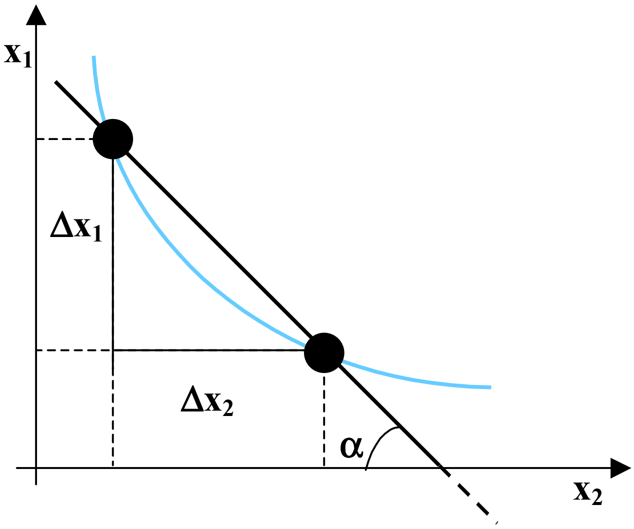
Scegliendo il livello operativo di ciascuna delle due attività produttive sarà possibile produrre una data quantità di output in molti modi.
In particolare, ogni combinazione di input che si trovi sulla retta che unisce **(a_1, a_2)** e **(b_1, b_2)** rappresenta un modo realizzabile di produrre **q** unità di output. In questo tipo di tecnologia, dove è possibile aumentare o diminuire facilmente la produzione, ed i processi produttivi separati non interferiscono l'uno con l'altro, l'ipotesi di convessità risulta ragionevole.

IL SAGGIO MARGINALE DI SOSTITUZIONE TECNICA

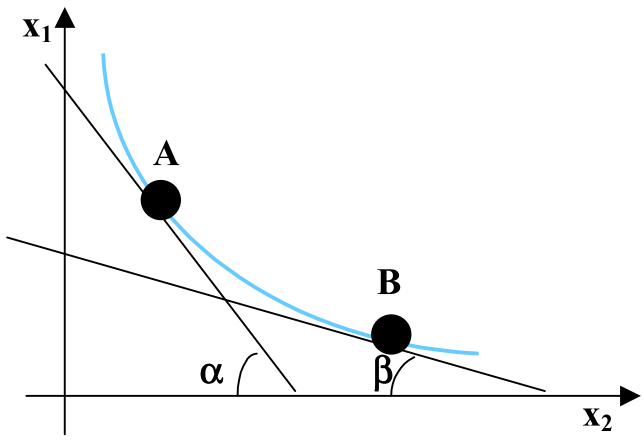
IL SAGGIO MARGINALE DI SOSTITUZIONE TECNICA. Supponiamo di impiegare la quantità **$(x_1; x_2)$** di input per produrre una data quantità di output. Supponiamo di voler ridurre di poco la quantità impiegata del **fattore 1**, usando al suo posto la quantità addizionale del **fattore 2** esattamente necessaria per produrre la medesima quantità di output **y**.
Vogliamo, ora, vedere qual è la quantità addizionale del **fattore 2**, **Δx_2**, che si deve impiegare se si vuole ridurre di **Δx_1** la quantità impiegata del **fattore 1**.
Il saggio al quale l'impresa deve sostituire un input con un altro per mantenere costante il livello dell'output viene definito come il **saggio marginale di sostituzione tecnica**. Esso è dato dal **rapporto tra la diminuzione della quantità impiegata di x_1 e l'aumento di x_2 necessario affinché il livello di output del bene resti immutato**, ossia:

$$\boxed{SMST = \Delta x_1/\Delta x_2} \quad .$$

Rappresentiamo, ora, su un piano cartesiano tutte le combinazioni dei fattori $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ che servono a produrre una stessa quantità di output, mediante lo strumento analitico dell'isoquanto:



In questo caso, il **SMST** misura l'inclinazione della corda che unisce i punti **A** e **B**, ovvero la tangente dell'angolo α che si forma quando la retta interseca l'asse delle ascisse.
Se prendiamo l'intervallo $\mathbf{\Delta x_2}$ sempre più piccolo, la retta **r** ruota intorno al punto **A** fino a diventare tangente alla curva proprio in quel punto per $\mathbf{\Delta x_2}$ infinitesimo, ovvero per $\mathbf{\Delta x_2 \rightarrow 0}$.
Quindi, per $\mathbf{\Delta x_2 \rightarrow 0}$ il **SMST** rappresenta $\mathbf{\partial x_1/\partial x_2}$, cioè la derivata prima della funzione e graficamente la pendenza dell'isoquanto.



RAPPORTO TRA IL SMST E PMG. Sappiamo che lungo un isoquanto la variazione della produzione dev'essere sempre **0**, quindi, abbiamo che:

$$\mathbf{\Delta y = \Delta y/\Delta x_1 * \Delta x_1 + \Delta y/\Delta x_2 * \Delta x_2 = 0} \qquad \boxed{\mathbf{1}}$$

Infatti, se Δx_1 è positiva, allora Δx_2 è negativa e viceversa.

La $\boxed{1}$ equivale a scrivere che:

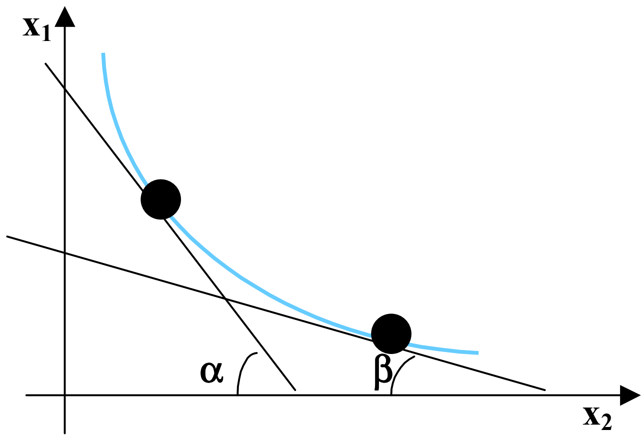
$$\Delta x_1 * PMG\ x_1 + \Delta x_2 * PMG\ x_2 = 0 = \Delta y$$

cioè:

$$\boxed{SMST = \Delta x_1/\Delta x_2 = - PMG\ x_2/PMG\ x_1} .$$

Quindi il **SMST** tra due fattori produttivi **è uguale al reciproco del rapporto tra le produttività marginali dei due fattori**.

CONSIDERAZIONI SUL SMST. Un'altra assunzione riguardante la tecnologia è quella del **saggio marginale di sostituzione tecnica decrescente**. Questa ipotesi afferma che, se si impiega una quantità minore del **fattore 1**, e si varia l'impiego del **fattore 2**, in modo da rimanere sullo stesso isoquanto, il **SMST** diminuisce.
In parole povere, l'ipotesi che il **SMST** sia decrescente significa che l'inclinazione dell'isoquanto deve aumentare in valore assoluto man mano che ci si sposta lungo l'isoquanto nella direzione che corrisponde all'aumento di x_1 e diminuire in valore assoluto man mano che ci si sposta lungo l'isoquanto nella direzione che corrisponde all'aumento di x_2. Questo equivale a dire che gli isoquanti hanno forma convessa. Graficamente, abbiamo:



Vediamo, infatti, che, passando da **A** a **B**, cioè aumentando l'impiego del **fattore 2**, la pendenza dell'isoquanto, ovvero il **SMST**, diminuisce in valore assoluto.

Viceversa, passando da **B** a **A**, cioè aumentando l'impiego del **fattore 1**, la pendenza dell'isoquanto, ovvero il **SMST**, aumenta in valore assoluto.

RAPPORTO FRA IL SMST DECRESCENTE E IL PMG DECRESCENTE.

Le ipotesi di **SMST** decrescente e **PMG** decrescente sono strettamente connesse, ma non coincidono esattamente.

L'ipotesi di **PMG** decrescente concerne la variazione del **PMG** che dipende dall'aumento della quantità impiegata di un fattore, **se si mantiene l'altro a un livello prefissato**.

L'ipotesi di **SMST** decrescente, invece, riguarda il modo in cui il **rapporto** dei prodotti marginali (l'inclinazione dell'isoquanto) varia, se si aumenta la quantità impiegata di un fattore **e si fa variare la quantità impiegata dell'altro in modo da rimanere sullo stesso isoquanto**.

GLI ISOCOSTI

Nell'acquisto dei fattori di produzione, l'impresa ha un vincolo, rappresentato dal fatto che essa ha una somma limitata da poter spendere nell'acquisto dei fattori stessi. Il vincolo, riferito a due fattori di produzione è:

$$C = w_1x_1 + w_2x_2$$

dove **C** rappresenta la spesa totale, ossia il costo totale sostenuto dall'impresa, x_1 e x_2 sono le quantità impiegate dei fattori produttivi, e w_1 e w_2 i rispettivi prezzi.

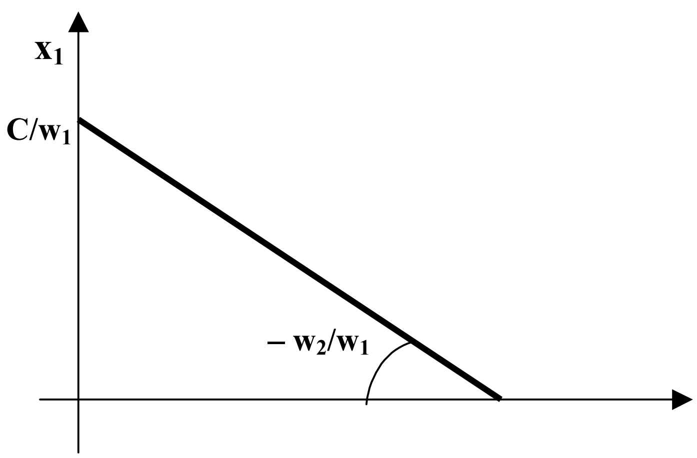
Con un semplice passaggio abbiamo:

$$w_1x_1 = C - w_2x_2$$

da cui:

$$\boxed{x_1 = C/\, w_1 - w_2/w_1 * x_2}$$.

Se rappresentiamo graficamente il vincolo, esso sarà una retta comunemente chiamata **isocosto**:

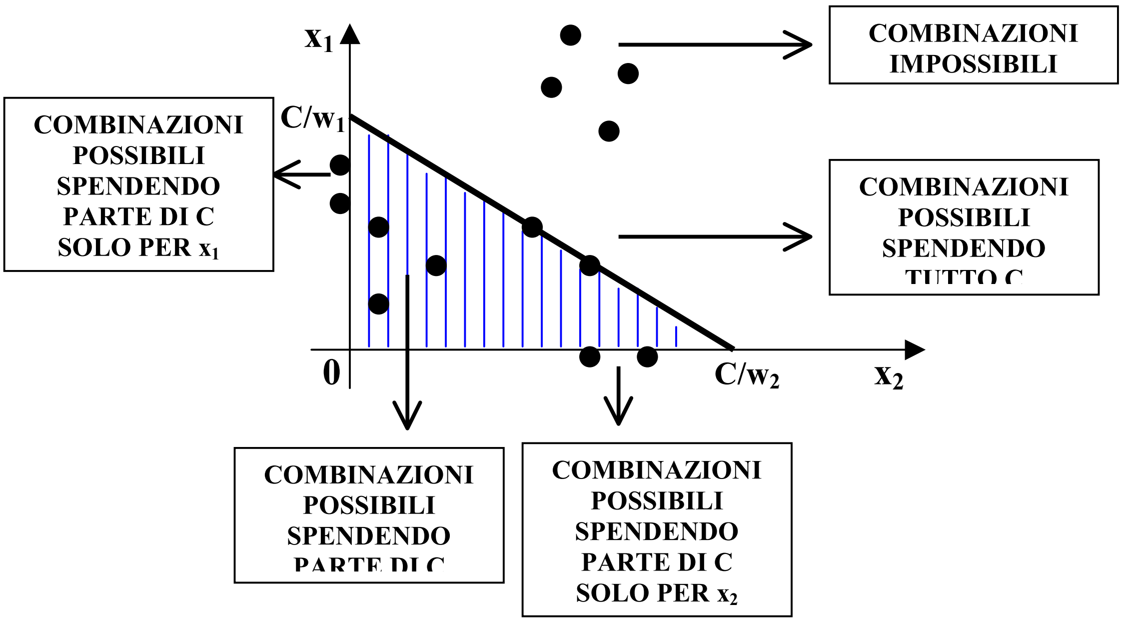


C/w_2 x_2

Se il produttore acquista **0** unità del **fattore 2** e spende tutto il capitale **C** nel **fattore 1**, la quantità che acquisterà sarà **C/w_1**. Il punto **$(0, C/w_1)$** rappresenta l'**<u>intercetta dell'asse delle ordinate</u>**.

Se il produttore acquista **0** unità del **fattore 1** e spende tutto il capitale **C** nel **fattore 2**, la quantità che acquisterà sarà **C/w_2**. Il punto **$(C/w_2, 0)$** rappresenta l'**<u>intercetta dell'asse delle ascisse</u>**.

– w_2/w_1 è il **<u>coefficiente angolare</u>** dell'isocosto e rappresenta la quantità del **fattore 1** a cui devo rinunciare per ottenere una unità aggiuntiva del **fattore 2**.
Riprendiamo il grafico precedente:



In particolare:

- i punti situati a destra dell'isocosto rappresentano **<u>combinazioni di fattori impossibili</u>** per il produttore, cioè tali da non poter essere acquistati dal produttore con il capitale di cui dispone;

- i punti situati fra gli assi e l'isocosto rappresentano **<u>combinazioni di fattori possibili</u>** per il produttore, cioè tali da poter essere acquistati dal produttore **<u>spendendo parte del capitale</u>** di cui dispone;

- i punti situati sull'isocosto rappresentano **<u>combinazioni di fattori possibili</u>** per il produttore, cioè tali da poter essere acquistati dal produttore **<u>spendendo tutto il capitale</u>** di cui dispone;

- i punti situati sull'asse delle ascisse nell'intervallo aperto **(0, C/w_2)** rappresentano **combinazioni di fattori possibili** per il produttore, cioè tali da poter essere acquistati dal produttore **spendendo parte del capitale** di cui dispone **nell'acquisto del solo fattore 2**;

- i punti situati sull'asse delle ordinate nell'intervallo aperto **(0, C/w_1)** rappresentano **combinazioni di fattori possibili** per il produttore, cioè tali da poter essere acquistati dal produttore **spendendo parte del capitale** di cui dispone **nell'acquisto del solo fattore 1**.

ESEMPIO N°1. Supponiamo di variare il capitale del produttore **C**, da **C** a **C'**, con **C' > C**, facendo rimanere invariati i prezzi.

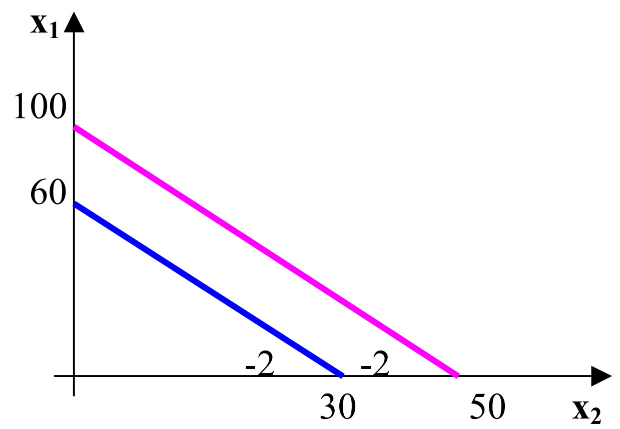
Sia **C** = 120; **C'** = 200; $w_1 = w_1' = 2$; $w_2 = w_2' = 4$.

Avremo:

- $2x_1 + 4x_2 = 120$, da cui:
  $x_1 = 60 - 2x_2$ (1)

- $2x_1 + 4x_2 = 200$, da cui:
  $x_1 = 100 - 2x_2$ (2)

Graficamente:



Quindi ogni volta che aumenta il capitale, restando invariati i prezzi, si ha una traslazione parallela (infatti, il coefficiente angolare rimane costante) dell'isocosto verso destra. In questo caso, aumenta il numero di combinazioni di fattori acquistabili dal produttore.

Analogamente, ogni volta che diminuisce il capitale, restando invariati i prezzi, si ha una traslazione parallela dell'isocosto verso sinistra. In quest'altro caso, diminuisce il numero di combinazioni di fattori acquistabili dal produttore.

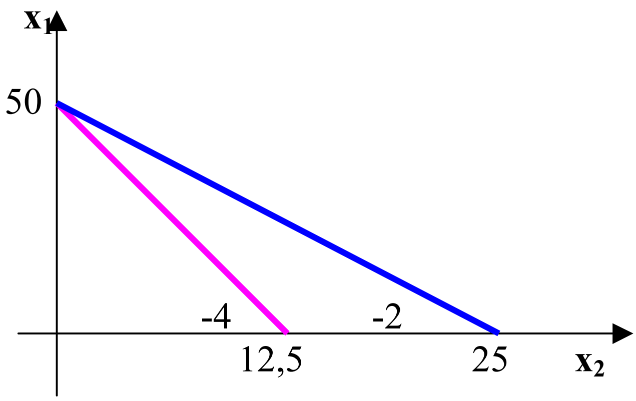
ESEMPIO N°2. Supponiamo di far rimanere il capitale costante e di variare uno dei prezzi.

Sia $\mathbf{C} = \mathbf{C'} = 100$; $\mathbf{w_1} = \mathbf{w_1'} = 2$; $\mathbf{w_2} = 4$; $\mathbf{w_2'} = 8$.

Avremo:

- $2\mathbf{x_1} + 4\mathbf{x_2} = 100$, da cui:
  $\mathbf{x_1 = 50 - 2x_2}$ (**1**)
- $2\mathbf{x_1} + 8\mathbf{x_2} = 100$, da cui:
  $\mathbf{x_1 = 50 - 4x_2}$ (**2**)

Graficamente:

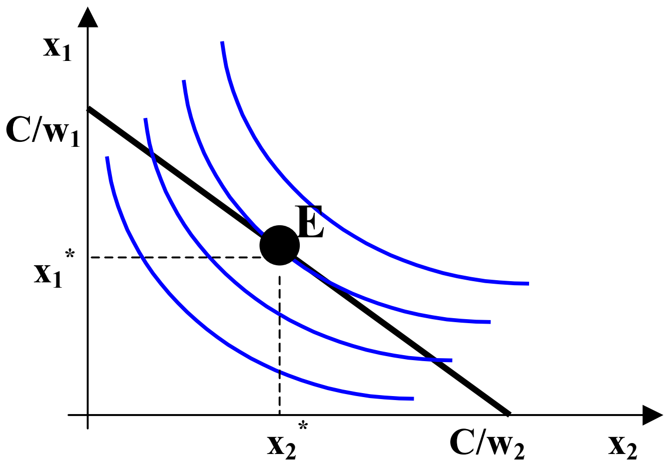


Quindi, a parità di capitale **C**, se aumenta il prezzo di uno dei due fattori, cambia l'inclinazione dell'isocosto e si riduce di conseguenza il numero di combinazioni di fattori acquistabili dal produttore.

Analogamente, a parità di capitale **C**, se diminuisce il prezzo di uno dei due fattori, cambia l'inclinazione dell'isocosto ed aumenta di conseguenza il numero di combinazioni di fattori acquistabili dal produttore.

RAPPRESENTAZIONE DELL'EQUILIBRIO DEL PRODUTTORE MEDIANTE GLI ISOQUANTI

Supponiamo che il produttore intenda massimizzare la produzione, raggiungendo l'isoquanto più alto possibile, tenendo conto del fatto che ha una somma limitata da poter spendere nell'acquisto di fattori. L'equilibrio del produttore può essere, quindi, rappresentato graficamente. Consideriamo un produttore che acquisti due fattori $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, i cui prezzi sono rispettivamente $\mathbf{w_1}$ e $\mathbf{w_2}$ e che disponga di un capitale **C**. Rappresentiamo le combinazioni dei due fattori produttivi che gli consentono di ottenere vari livelli di produzione mediante una mappa di isoquanti e disegniamo il vincolo dell'isocosto.



Il capitale **C** e i prezzi dei due fattori $\mathbf{w_1}$ e $\mathbf{w_2}$ sono noti, mentre dobbiamo determinare le quantità di $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ che rendono massima la produzione dell'impresa (ovvero la portano sull'isoquanto più alto), compatibilmente con l'isocosto.

$\mathbf{E \equiv (x_2^*;\ x_1^*)}$ è la posizione di **<u>equilibrio del produttore che massimizza la quantità dato un vincolo di costo</u>**.

Infatti, tutti i punti situati su isoquanti più alti di quello su cui si trova **E** rappresentano combinazioni di fattori in cui si ha un livello di produzione maggiore rispetto a quello rappresentato da **E**, ma, essendo situati a destra dell'isocosto, rappresentano combinazioni di fattori il cui acquisto comporta una spesa superiore al capitale del produttore e quindi sono combinazioni impossibili.

Tutti i punti situati sull'isocosto o tra questo e gli assi d'altra parte si trovano su isoquanti più bassi di quello su cui si trova **E**: quindi, pur essendo punti possibili, essi comportano un livello di produzione minore di quello rappresentato da **E**.

Pertanto la combinazione **(x_2^*; x_1^*)** corrispondente al punto **E** è quella che rende massima la produzione dell'impresa compatibilmente col capitale a disposizione del produttore, cioè con l'isocosto.

Nel punto **E** l'isocosto è tangente all'isoquanto.

Come sappiamo, la pendenza della tangente all'isoquanto misura il **SMST** tra i due fattori $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$. Inoltre, la pendenza dell'isocosto è data da $\mathbf{-w_2/w_1}$. Pertanto in equilibrio abbiamo:

$$\boxed{\mathbf{SMST = \Delta x_1/\Delta x_2 = -\,w_2/w_1}}$$

cioè, il saggio marginale di sostituzione tecnica tra due fattori è uguale al reciproco del rapporto tra i loro prezzi.

D'altra parte sappiamo che:

$$\mathbf{SMST = -\,PMG\ x_2/PMG\ x_1}$$

quindi:

$$\mathbf{-\,w_2/w_1 = -\,PMG\ x_2/PMG\ x_1}$$

da cui:

$$\boxed{\mathbf{PMG\ x_1/w_1 = PMG\ x_2/w_2}}\ .$$

Ciò significa che in equilibrio il produttore eguaglia le produttività marginali ponderate dei fattori che acquista.

L'analisi sin qui svolta presuppone che il produttore massimizzi la **quantità** prodotta dato un vincolo di costo. Obiettivo dell'impresa tuttavia è quello di massimizzare il **profitto**, cioè la differenza tra ricavi e costi. Analizziamo pertanto il problema della massimizzazione del profitto in un contesto più preciso.

PROFITTO

Si definisce **profitto** la differenza tra ricavi e costi. Supponiamo che un'impresa produca **n** output $(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \dots, \mathbf{y_n})$ impiegando **m** input $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n})$. Siano $(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \dots, \mathbf{p_n})$ i prezzi dei beni prodotti e $(\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \dots, \mathbf{w_n})$ i prezzi degli input.

Il profitto dell'impresa, π, può allora essere espresso come:

$$\pi = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{m} w_i x_i$$

dove il primo termine esprime i ricavi totali $\mathbf{R_T}$ ed il secondo i costi totali $\mathbf{C_T}$.

È essenziale che nel calcolo dei costi siano inclusi **tutti** i fattori produttivi impiegati dall'impresa, valutati al loro prezzo di mercato. In generale, questo è scontato, ma, per esempio, nel caso in cui la stessa persona sia proprietaria di un'impresa e la gestisca, è possibile che alcuni fattori non vengano considerati.

Se un individuo lavora in un'impresa di sua proprietà, infatti, il suo lavoro va considerato come un input, e quindi deve essere incluso nel calcolo dei costi. Il suo salario corrisponde al prezzo di mercato del lavoro che egli presta, cioè a quanto egli **guadagnerebbe** se offrisse il proprio lavoro sul mercato. Analogamente, se un agricoltore possiede un terreno e lo utilizza come fattore produttivo, deve far ricorso al suo prezzo di mercato per calcolarne il costo economico.

Questo tipo di costi è noto come **costi opportunità**. Il termine deriva dal concetto che, se si impiega il proprio lavoro in una certa attività, si perde l'opportunità di impiegarlo in un'altra. Il salario non percepito del primo esempio fa parte dei costi di produzione, e lo stesso criterio vale nel caso del terreno. L'agricoltore che lo possiede potrebbe, infatti, affittarlo ad altri, ma sceglie di rinunciare a questa rendita per utilizzarlo egli stesso. La rendita non percepita rappresenta per lui un costo opportunità.

> La definizione economica di profitto richiede che tutti gli input e gli output siano valutati al loro costo opportunità. Il profitto calcolato dai contabili non misura necessariamente in modo accurato il profitto economico, poiché essi impiegano normalmente la nozione di costi storici (costo effettivo del bene al momento del suo acquisto) e non quella di costi economici (costo del bene se fosse acquistato ora).

MASSIMIZZAZIONE DEL PROFITTO
NEL BREVE PERIODO IN CONCORRENZA PERFETTA

Consideriamo il problema di massimizzazione del profitto nel breve periodo, quando la quantità impiegata **del fattore 2 sia fissa ad un livello dato** $\mathbf{x_2}$**.**

Siano $f(x_1; x_2)$ la funzione di produzione dell'impresa, **p** il prezzo dell'output e $\mathbf{w_1}$ e $\mathbf{w_2}$ i prezzi dei due input. Il prezzo dell'output è dato perché, come vedremo analizzando le forme di mercato**, se l'impresa opera in concorrenza perfetta non può influenzare il prezzo che è determinato dal mercato.**

In questo caso, il problema di massimizzazione del profitto dell'impresa può essere scritto come:

$$\boxed{\mathbf{Max}\ \pi = \mathbf{Max}\ p f(x_1; x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2} . \qquad \boxed{\mathbf{1}}$$

Matematicamente, affinché la $\boxed{\mathbf{1}}$ sia massima, dev'essere:

$$\partial\pi/\partial x_1 = 0.$$

Abbiamo:

$$\partial\pi/\partial x_1 = p * \underbrace{\partial f(x_1; x_2)/\partial x_1}_{\text{PMG di } x_1} - w_1 = 0,$$

verificata se e solo se:

$$\boxed{p * \text{PMG } x_1 = w_1} .$$

Quindi, la condizione che determina la scelta ottima della quantità da impiegare del **fattore 1** è che il prodotto del prezzo dell'output per il prodotto marginale del **fattore 1** deve essere uguale al prezzo del fattore stesso.

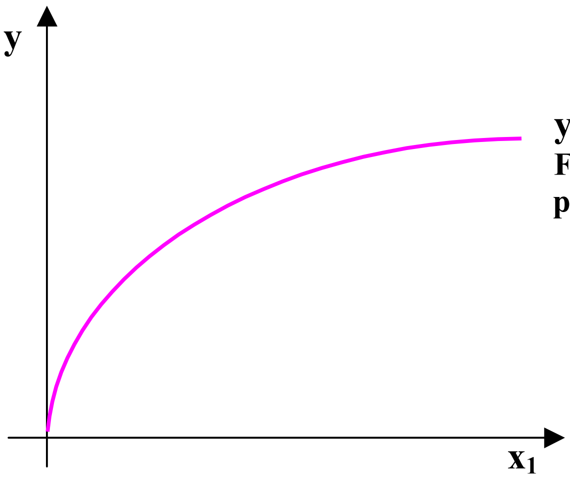
In altri termini, **<u>il valore del prodotto marginale di un fattore deve essere uguale al suo prezzo</u>**.

Non è difficile capire il perché: se si decide di impiegare una piccola quantità addizionale del **fattore 1**, Δx_1, si produrrà una quantità addizionale di output $\Delta y = \text{PMG}x_1 * \Delta x_1$, il cui valore sarà $p * \text{PMG}x_1 * \Delta x_1$. Produrre questo output marginale costerà $w_1 * \Delta x_1$. Se il valore del prodotto marginale fosse superiore al suo costo, sarebbe possibile aumentare i profitti impiegando una quantità maggiore del **fattore 1**. Se al contrario il valore del prodotto marginale fosse inferiore al suo costo, sarebbe possibile incrementare i profitti diminuendo la quantità impiegata del **fattore 1**.

Se i profitti risultano già massimi, allora essi non aumenteranno sia che si incrementi, sia che si diminuisca la quantità impiegata del **fattore 1**. Ciò significa che in corrispondenza di una scelta delle quantità di input e output che massimizzi il profitto, il valore del prodotto marginale $\mathbf{p * PMG\ x_1}$ deve essere uguale al prezzo del fattore $\mathbf{w_1}$.

La stessa condizione può essere ottenuta graficamente.

Rappresentiamo, innanzitutto, la funzione di produzione nel caso in cui la quantità del **fattore 2** sia mantenuta fissa al livello $\mathbf{x_2}$:



Se indichiamo con **y** l'output dell'impresa, i profitti saranno:

$$\boldsymbol{\pi = py - w_1x_1 - w_2x_2.} \qquad \boxed{2}$$

Questa espressione può essere risolta per **y** per esprimere l'output come funzione di $\mathbf{x_1}$.

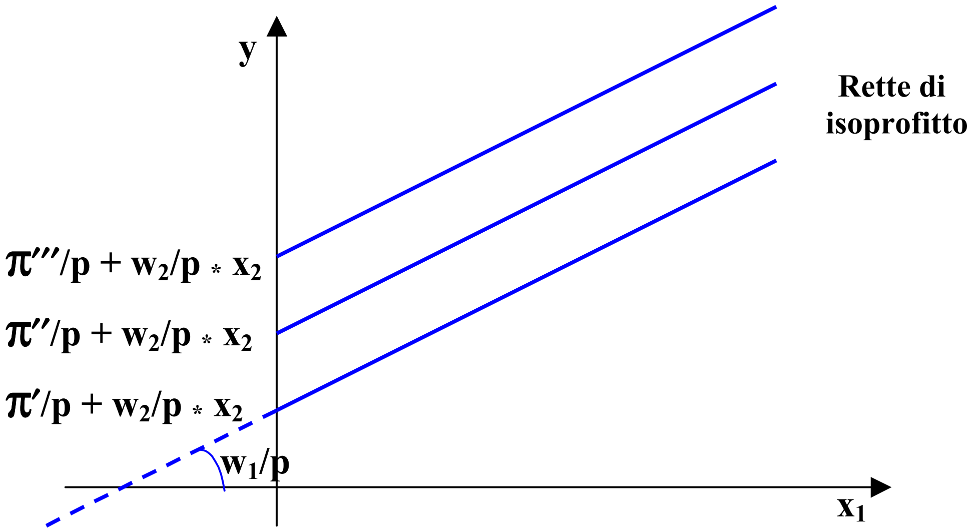
Dalla $\boxed{2}$ abbiamo:

$$\boldsymbol{-py = -\pi - w_1x_1 - w_2x_2;}$$

$$\boldsymbol{py = \pi + w_1x_1 + w_2x_2;}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = \pi/p + w_2/p * x_2 + w_1/p * x_1}}. \qquad \boxed{3}$$

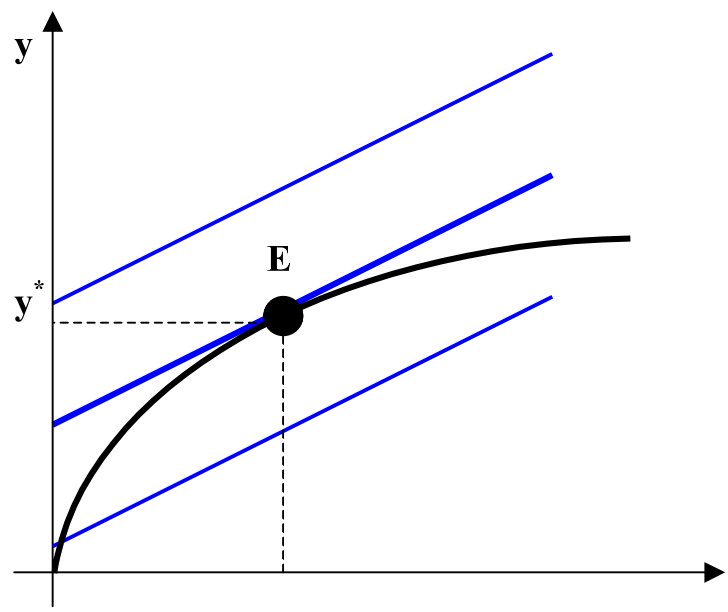
Questa equazione rappresenta le **<u>rette di isoprofitto</u>**.
Le rette di isoprofitto corrispondono a tutte le combinazioni di input e output associate ad un livello costante del profitto π. Al variare di π si ottiene un fascio di rette parallele, ciascuna con inclinazione w_1/p e intercetta verticale $\pi/p + w_2/p * x_2$.
Graficamente, abbiamo:



Poiché i costi rimangono fissi, la sola cosa che varia, se ci si sposta da una retta di isoprofitto all'altra, è il livello dei profitti. Quindi, a livelli di profitto più elevati corrispondono rette di isoprofitto con intercette verticali più elevate.

Il problema della massimizzazione del profitto consiste quindi nel trovare sulla funzione di produzione un punto al quale sia associata la retta di isoprofitto più elevata.

Graficamente, abbiamo:



x_1^* x_1

Il punto di equilibrio **E** = $(x_1^*; y^*)$ è, come al solito, caratterizzato da una condizione di tangenza: l'inclinazione della funzione di produzione deve essere uguale all'inclinazione della retta di isoprofitto.

Poiché l'inclinazione della funzione di produzione rappresenta il prodotto marginale e l'inclinazione della retta di isoprofitto è w_1/p, la condizione può anche essere espressa nel modo seguente:

$$\boxed{\mathbf{PMG}\ x_1 = w_1/p}$$

che equivale alla condizione ottenuta in precedenza.

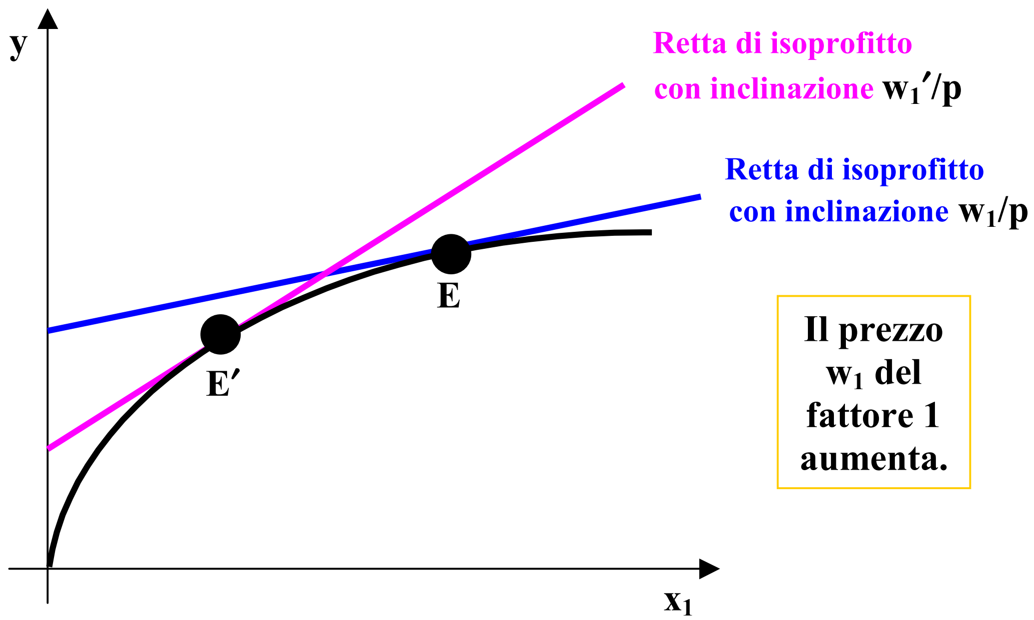
STATICA COMPARATA. Analizziamo, ora, come varia la scelta degli input e degli output al variare dei loro prezzi: in questo modo studieremo la **statica comparata** del comportamento dell'impresa.

Vediamo come varia la scelta ottima del **fattore 1** al variare del suo prezzo w_1. Facciamo riferimento all'equazione $\boxed{3}$ della retta di isoprofitto:

$$y = \pi/p + w_2/p * x_2 + w_1/p * x_1.$$

Se w_1 aumenta, diventando w_1', la retta di isoprofitto diventa più ripida, dato che avremo un'inclinazione $w_1'/p > w_1/p$.

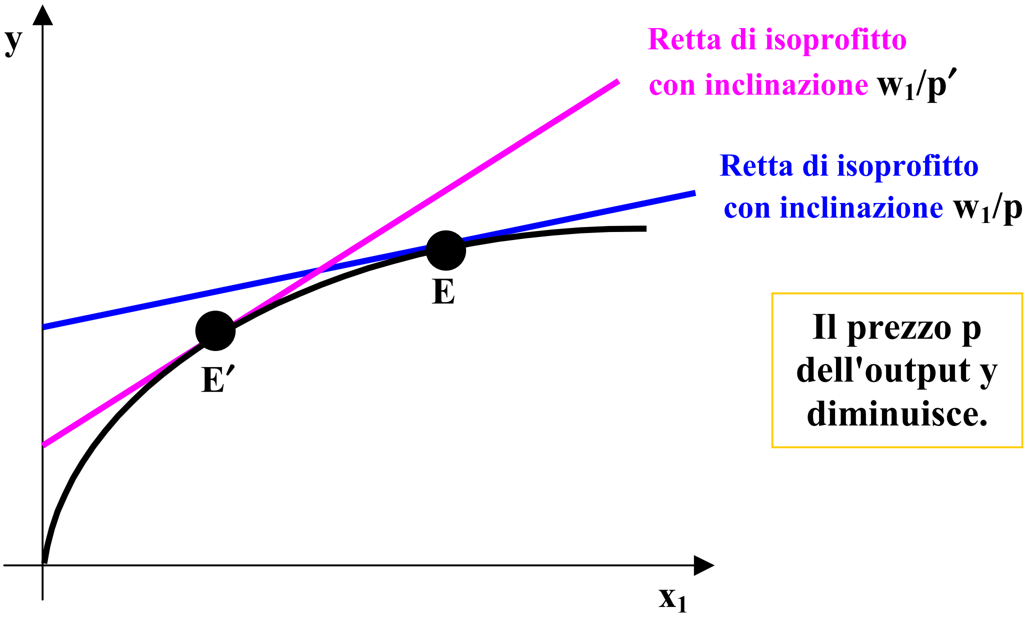
Graficamente, sarà:



Quanto più la retta di isoprofitto è ripida, tanto più a sinistra si verificherà la condizione di tangenza, e quindi la quantità ottima del **fattore 1** diminuirà.
Ciò significa semplicemente che, **all'aumentare del prezzo del fattore 1** , **la domanda di tale fattore diminuisce**: **le curve di domanda dei fattori hanno inclinazione negativa**.

Analogamente, se il prezzo **p** dell'output diminuisce, diventando **p′**, la retta di isoprofitto diventa più ripida, dato che avremo un'inclinazione $\mathbf{w_1/p' > w_1/p}$.

Graficamente, sarà:



Il livello del **fattore 1** che corrisponde alla massimizzazione del profitto deve diminuire. Se la quantità impiegata del **fattore 1** diminuisce, e si assume che il livello del **fattore 2** sia fisso nel breve periodo, il livello dell'output diminuirà.

È questo un altro risultato di statica comparata: **una riduzione del prezzo dell'output farà sì che la sua offerta diminuisca**. **La funzione di offerta**, cioè, **ha un'inclinazione positiva**.

Vediamo, infine, cosa accade se varia il prezzo del **fattore 2**, $\mathbf{w_2}$. Poiché questa è un'analisi di breve periodo, possiamo affermare che la variazione del prezzo del **fattore 2** non influirà sulla scelta dell'impresa relativa all'impiego del fattore stesso: nel breve periodo, il livello del **fattore 2** rimane fisso a $\mathbf{x_2}$. La variazione del prezzo del **fattore 2** non influisce sull'inclinazione della retta di isoprofitto. Non vi saranno, quindi, variazioni, né della scelta ottima del **fattore 1**, né dell'offerta di output: l'unica variazione riguarda il profitto dell'impresa.

MASSIMIZZAZIONE DEL PROFITTO NEL LUNGO PERIODO IN CONCORRENZA PERFETTA

Nel lungo periodo l'impresa è libera di scegliere il livello di tutti i suoi input. Il problema di massimizzazione del profitto nel lungo periodo può essere quindi formulato nel modo seguente:

$$\boxed{\mathbf{Max}\ \pi = \mathbf{Max}\ \mathbf{p}f(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2) - \mathbf{w}_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{w}_2\mathbf{x}_2}\ .$$

Questo problema non è sostanzialmente dissimile da quello della massimizzazione del profitto nel breve periodo, ma, in questo caso, entrambi i fattori sono liberi di variare. Anche la condizione che determina le scelte ottimali è analoga, ma ora dev'essere applicata a **ciascun** fattore.

Se nel breve periodo avevamo che il valore del prodotto marginale del **fattore 1** deve essere uguale al suo prezzo, quale che sia il livello del **fattore 2**, la stessa condizione deve valere ora simultaneamente per ciascun fattore. Avremo, quindi:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{p} * \mathbf{PMG}\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{p} * \mathbf{PMG}\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{w}_2 \end{array}}\ . \qquad \boxed{\mathbf{1}}$$

Se l'impresa ha scelto le quantità ottimali da impiegare del **fattore 1** e del **fattore 2**, il valore del prodotto marginale di ciascun fattore sarà uguale al suo prezzo. In corrispondenza della scelta ottima, il profitto dell'impresa non può aumentare al variare della quantità impiegata di uno dei due input.

Se, per esempio, il valore del prodotto marginale del **fattore 1** è superiore al prezzo del fattore stesso, se si impiega una piccola quantità addizionale del **fattore 1**, si produrrà una quantità addizionale **PMG** $\mathbf{x}_1$ di output, che sarà venduta per lire $\mathbf{p} * $ **PMG** $\mathbf{x}_1$. Se il valore di questo output supera il costo del fattore utilizzato per produrlo, è chiaro che conviene aumentare l'impiego del fattore in questione.

Le condizioni di cui al punto $\boxed{\mathbf{1}}$ ci danno due equazioni in due incognite, $\mathbf{x}_1^*$ e $\mathbf{x}_2^*$. Se è nota la produttività marginale di $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, le quantità ottime da impiegare di $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, che risolvono le equazioni, possono essere espresse in funzione dei loro prezzi. Le equazioni così ottenute sono note come **curve di domanda dei fattori**.

MINIMIZZAZIONE DEI COSTI

INTRODUZIONE. Se un'impresa massimizza il profitto e sceglie di offrire una quantità **y** di output, questo significa anche che minimizza il costo di produzione di **y**. Se così non fosse, dovrebbe esistere un altro modo più economico di produrre **y** unità di output, e quindi l'impresa in questione non massimizzerebbe il profitto.

Questa semplice osservazione è utile per analizzare il comportamento dell'impresa, poiché ci permette di scomporre il problema della massimizzazione del profitto in due fasi: la minimizzazione dei costi necessari per produrre una quantità **y** di output e la determinazione della quantità di output che corrisponde alla massimizzazione del profitto.

SCELTA DEI FATTORI CHE MINIMIZZANO I COSTI DI PRODUZIONE OTTENUTA GRAFICAMENTE. Supponiamo di disporre di due fattori produttivi i cui prezzi siano w_1 e w_2: vogliamo individuare il modo più economico per produrre un dato livello **y** di output. Se indichiamo con x_1 e x_2 le quantità impiegate dei due fattori e con $f(x_1, x_2)$ la funzione di produzione dell'impresa possiamo scrivere il problema nel modo seguente:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Min } w_1 * x_1 + w_2 * x_2 \\ \text{tale che } f(x_1, x_2) = y\end{array}}\ .$$

La soluzione del problema di minimizzazione dei costi - i costi minimi necessari per produrre il livello di output desiderato - dipenderà da w_1, w_2 e **y**, e sarà espressa pertanto da $c(w_1, w_2, y)$. Questa funzione è nota come **funzione di costo** ed esprime i costi minimi necessari per produrre **y** unità di output, quando i prezzi dei fattori sono w_1 e w_2.

Per risolvere questo problema, rappresentiamo sullo stesso grafico i costi e i vincoli tecnologici.

Ricordiamo che:

- Per un determinato costo **C** tutte le combinazioni di input il cui costo è proprio **C** possono essere rappresentate mediante una **retta di isocosto**, la cui equazione è:

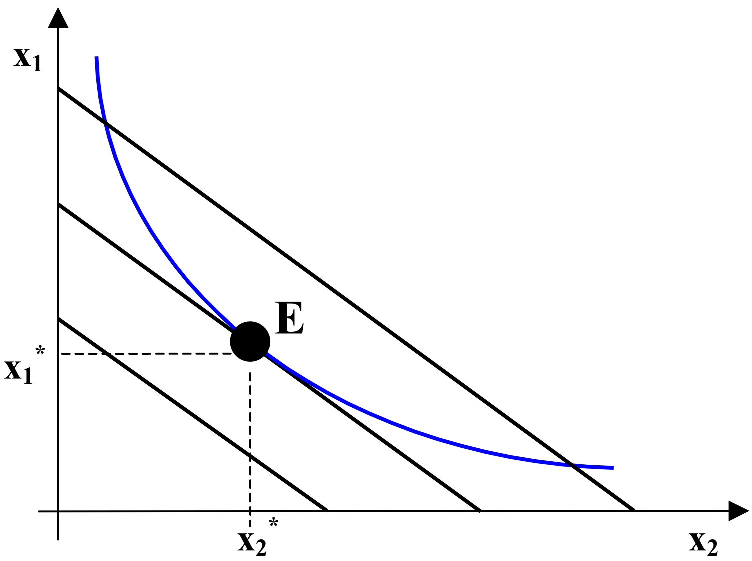
  $$x_1 = C/\, w_1 - w_2/w_1 * x_2.$$

  A rette di isocosto più elevate corrispondono costi più elevati.

- I vincoli tecnologici possono essere rappresentati mediante un **isoquanto**, che rappresenta tutte le combinazioni di x_1 e x_2 che consentono di produrre **y**.

È quindi possibile riformulare il problema di minimizzazione dei costi nei seguenti termini: **dobbiamo individuare sull'isoquanto il punto al quale è associata la retta di isocosto più bassa possibile**.

Graficamente, abbiamo:



Il punto corrispondente alla minimizzazione dei costi, ossia il punto **E ≡ (x_2^*; x_1^*)**, sarà caratterizzato dalla condizione di tangenza: l'inclinazione dell'isoquanto deve essere uguale all'inclinazione della retta di isocosto.

Possiamo dire, in altri termini, che **il saggio marginale di sostituzione tecnica deve essere uguale al rapporto tra i prezzi dei fattori**:

$$\boxed{\mathbf{SMST = \Delta x_1/\Delta x_2 = - PMG\ x_2/PMG\ x_1 = - w_2/w_1}} \quad . \qquad \boxed{\mathbf{1}}$$

DIFFERENZA CON LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DELLA SCELTA DEL CONSUMATORE. Il grafico che rappresenta la soluzione della scelta del produttore, presenta delle analogie con la soluzione del problema di scelta del consumatore. Nonostante le soluzioni sembrino uguali, non si equivalgono esattamente.

Nel problema del consumatore, la retta rappresenta il vincolo di bilancio, ed il consumatore si sposta lungo tale retta per trovare la posizione preferita.

Nel problema del produttore, l'isoquanto rappresenta il vincolo tecnologico, e il produttore si sposta lungo l'isoquanto per trovare la posizione ottimale.

FUNZIONI DI DOMANDA CONDIZIONATA. Le scelte delle quantità di input che minimizzano i costi dell'impresa dipendono generalmente dai prezzi e dalla quantità di output che l'impresa intende produrre, e saranno pertanto indicate con:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1(w_1; w_2; y) \\ \text{e} \\ x_2(w_1; w_2; y) \end{array}}\ .$$

Queste scelte sono dette **funzioni di domanda condizionata dei fattori**, oppure **domande derivate dei fattori**, e misurano la relazione tra i prezzi, l'output e la scelta ottimale dei fattori dell'impresa, **condizionata** dalla produzione di un certo livello **y** di output.

DIFFERENZA TRA LA DOMANDA CONDIZIONATA DEI FATTORI E LA DOMANDA DEI FATTORI CHE MASSIMIZZANO IL PROFITTO. Si osservi con attenzione la differenza tra la domanda condizionata dei fattori e la domanda dei fattori che massimizzano il profitto.

La domanda condizionata dei fattori dà le scelte di minimizzazione dei costi in corrispondenza di un dato **livello** di output.
La domanda dei fattori dà, invece, le scelte di massimizzazione del profitto in corrispondenza di un dato **prezzo** dell'output.
Le funzioni di domanda condizionata dei fattori sono, in effetti, una costruzione ipotetica, che ci consente di determinare la quantità di ciascun fattore che un'impresa **impiegherebbe** se intendesse produrre un livello dato di output al costo minimo.
Tali funzioni, tuttavia, ci permettono di distinguere il problema della determinazione del livello ottimo di output da quello della determinazione del metodo di produzione cui corrisponde il costo minimo.

MINIMIZZAZIONE DEI COSTI (LAGRANGE)

Esaminiamo il problema di minimizzazione dei costi mediante il metodo dei **moltiplicatori di Lagrange**.
Si tratta di un problema di minimizzazione vincolata del tipo:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Min } w_1 * x_1 + w_2 * x_2 \\ \text{tale che } f(x_1, x_2) = y \end{array}}$$

Scriviamo, innanzitutto, la Lagrangiana:

$$\boxed{L = w_1 * x_1 + w_2 * x_2 - \lambda * [f(x_1, x_2) - y]}$$

dove λ è una variabile chiamata **moltiplicatore di Lagrange**, poiché è moltiplicata per il vincolo.

Calcoliamo le derivate rispetto a x_1, x_2 e λ. Si ottengono, così, le condizioni del primo ordine:

$$\begin{cases} w_1 - \lambda * \partial f(x_1, x_2)/\partial x_1 = 0 & \boxed{1} \\ w_2 - \lambda * \partial f(x_1, x_2)/\partial x_2 = 0 & \boxed{2} \\ f(x_1, x_2) - y = 0 & \boxed{3} \end{cases}$$

La condizione $\boxed{3}$ rappresenta il vincolo.

Trasformiamo la $\boxed{1}$, ottenendo:

$$w_1 = \lambda * \partial f(x_1, x_2)/\partial x_1.$$

Similmente, dalla $\boxed{2}$ otteniamo:

$$w_2 = \lambda * \partial f(x_1, x_2)/\partial x_2.$$

Dividendo la $\boxed{1}$ per la $\boxed{2}$, abbiamo:

$$\boxed{w_1/w_2 = \partial f(x_1, x_2)/\partial x_1 / \partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}.$$

Quindi, in equilibrio il saggio marginale di sostituzione tecnica deve essere uguale al rapporto tra prezzi dei fattori.

.

IL COSTO TOTALE

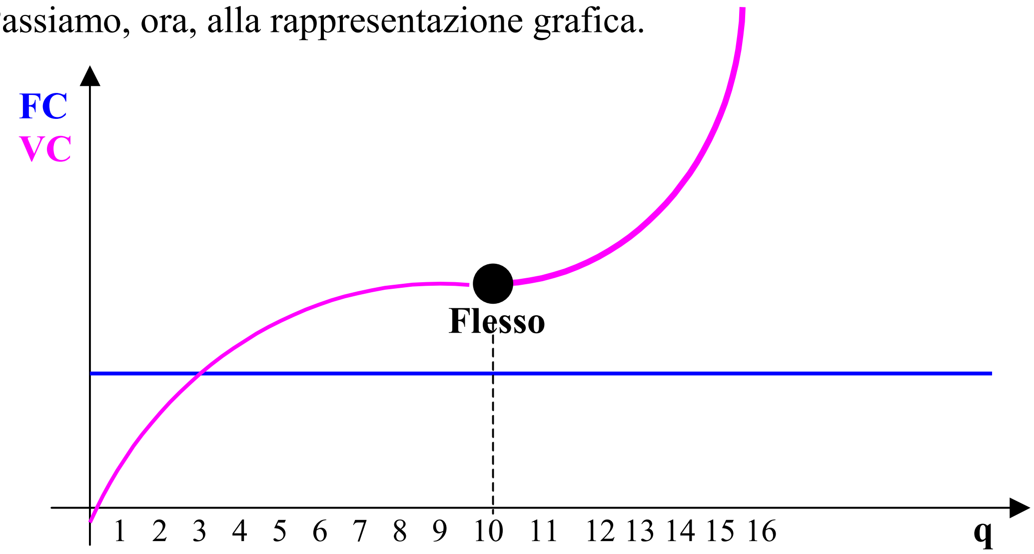
DEFINIZIONE. Il **costo di produzione** o **costo totale** per l'impresa è la **somma che l'impresa spende per l'acquisto e per la remunerazione dei fattori necessari a produrre una data quantità di prodotto**.
Il costo totale (**TC** = **T**otal **C**ost) è costituito da una parte fissa (**FC** = **F**ixed **C**osts) e da una parte variabile (**VC** = **V**ariable **C**osts):

$$TC = FC + VC$$

Sono **costi fissi** quelli che non variano al variare della produzione (come, per esempio, i costi che l'impresa sostiene per pagare l'affitto dei locali e per la manutenzione e l'ammortamento dei macchinari); sono **costi variabili** quelli che variano al variare della produzione (come, per esempio, per l'acquisto delle materie prime, per l'energia elettrica, per pagare il salario agli operai).

Ricordiamo che stiamo parlando del **breve periodo**, ossia di uno spazio temporale in cui l'impresa non può variare alcuni fattori produttivi (come i macchinari e gli impianti), per cui l'aumento della produzione può essere ottenuto solo sfruttando più intensamente i fattori stessi.

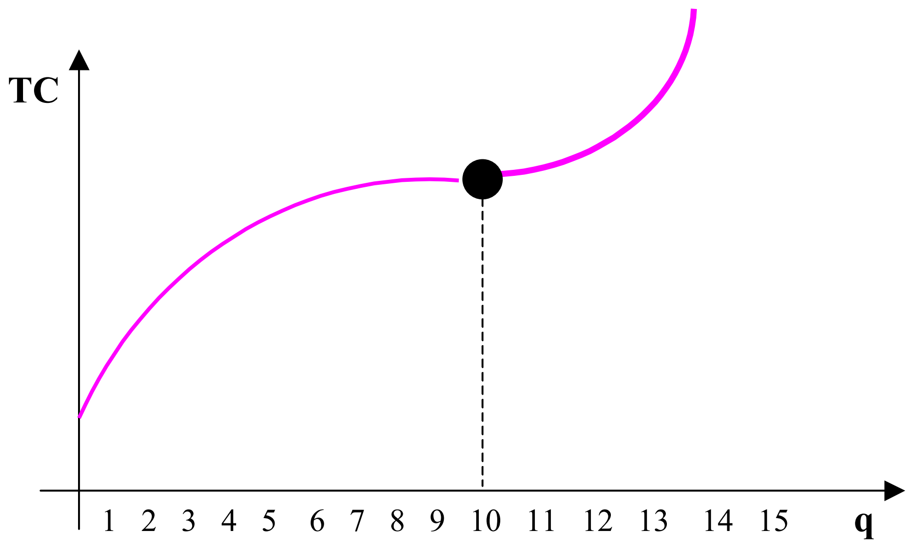
Passiamo, ora, alla rappresentazione grafica.



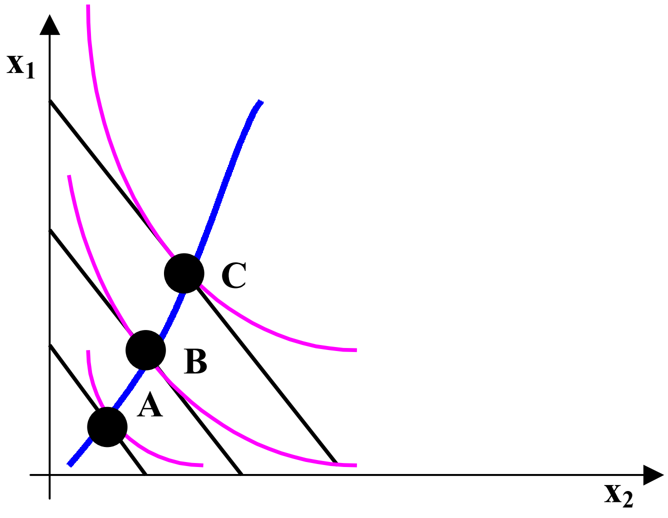
Che la **curva relativa ai costi fissi** sia una retta parallela all'asse delle ascisse è scontato. Infatti, se la produzione è 0, l'impresa comunque sostiene un costo, che, nel breve periodo continua ad essere sempre lo stesso indipendentemente dalla quantità prodotta.

La **curva relativa ai costi variabili** è ovviamente crescente. È scontato che se la produzione è pari a 0 unità, anche i costi variabili siano pari a 0, proprio per la definizione che abbiamo dato degli stessi. Inizialmente, essi crescono a ritmo decrescente (in questo tratto la produttività marginale è crescente) perché è possibile fare delle economie; quindi ogni aumento unitario della produzione comporta all'impresa un costo via via minore. Tutto questo fino ad un certo punto, detto punto di flesso. Da questo punto in poi i costi variabili crescono ugualmente, ma a ritmo crescente, cioè ad ogni aumento unitario della produzione corrisponde per l'impresa un costo via via maggiore.

Abbiamo detto che i costi totali sono pari alla somma dei costi fissi e dei costi variabili; quindi possiamo ottenere il **grafico dei costi totali**, sommando, per ogni valore di **q**, i rispettivi valori delle altre due funzioni, ottenendo:



ALTRE CONSIDERAZIONI. La funzione del costo totale deriva, oltre che dall'osservazione empirica, anche dall'ipotesi che il produttore massimizzi continuamente la produzione subordinatamente al vincolo dell'isocosto.
Consideriamo, infatti, il seguente grafico che rappresenta il sentiero di espansione dell'impresa:



In ciascuna delle posizioni di equilibrio il livello di produzione è implicito nell'isoquanto, mentre il livello del costo totale che il produttore sostiene è implicito nell'isocosto. Sia la produzione sia il costo totale sono più alti in **B** che in **A**, e inoltre più alti in **C** che in **B**. Quindi, il costo totale è una funzione crescente del livello della produzione.

IL COSTO MEDIO

DEFINIZIONE. Il **costo medio** o **costo unitario** (**AC** = **A**verage **C**ost) è il **rapporto fra il costo totale e il numero delle unità prodotte del bene**:

$$\boxed{AC = TC/q}$$

.

ANDAMENTO. Possiamo dedurre l'andamento del costo medio dalle seguenti considerazioni. Sappiamo che il costo totale (**TC**) è costituito da una parte fissa (**FC**) e una variabile (**VC**), cioè:

$$TC = FC + VC$$

quindi:

$$AC = FC/q + VC/q.$$

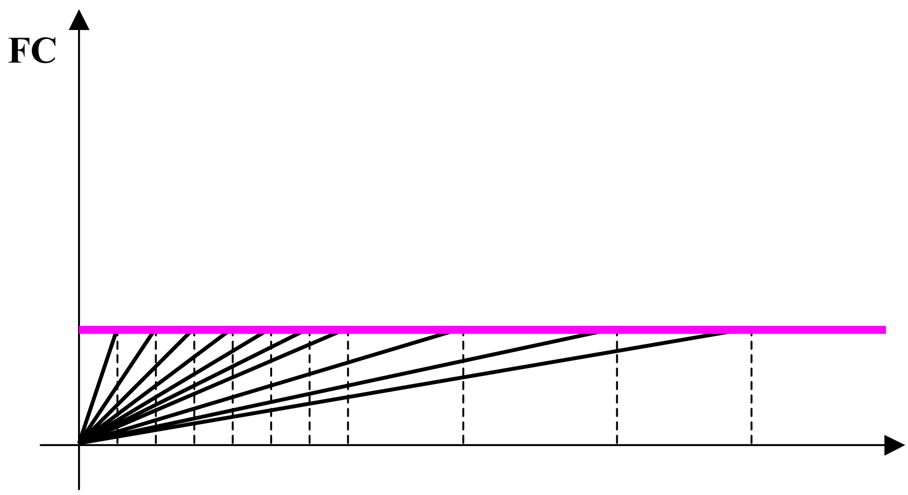
Consideriamo, ora, solamente i **costi fissi medi** (**AFC** = **A**verage **F**ixed **C**osts), cioè:

$$\boxed{AFC = FC/q}$$

.

Supponiamo che l'impresa aumenti la produzione: sappiamo che i costi fissi restano invariati qualunque sia il livello di produzione, quindi è scontato che man mano che la produzione aumenta, i costi fissi si ripartiscono su un numero maggiore di unità prodotte, e quindi i costi fissi medi diminuiscono.

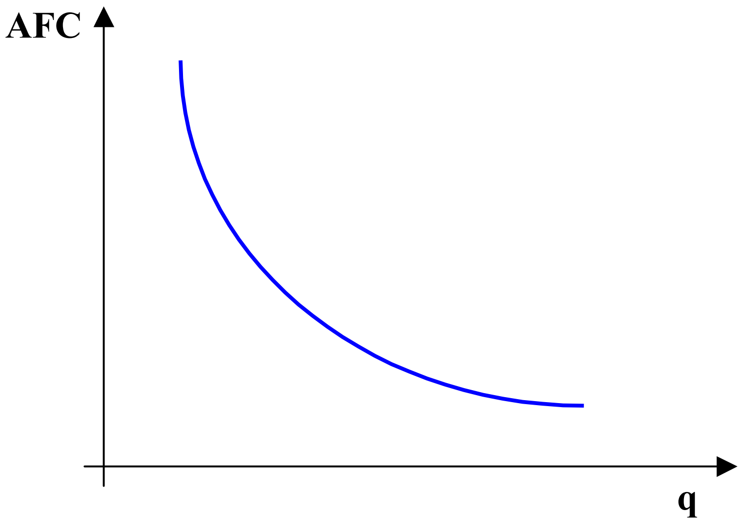
Possiamo vedere tutto questo anche dal punto di vista grafico:



q

I costi fissi medi rappresentano analiticamente la tangente dell'angolo che si forma congiungendo l'origine degli assi al punto della curva dei costi fissi corrispondente alla quantità prodotta.

Vediamo che questi angoli sono via via minori e non vi è dubbio che la curva dei costi fissi medi abbia un andamento di questo genere:



Consideriamo, ora, solamente i **<u>costi variabili medi</u>** (**AVC** = **A**verage **V**ariable **C**osts), cioè:

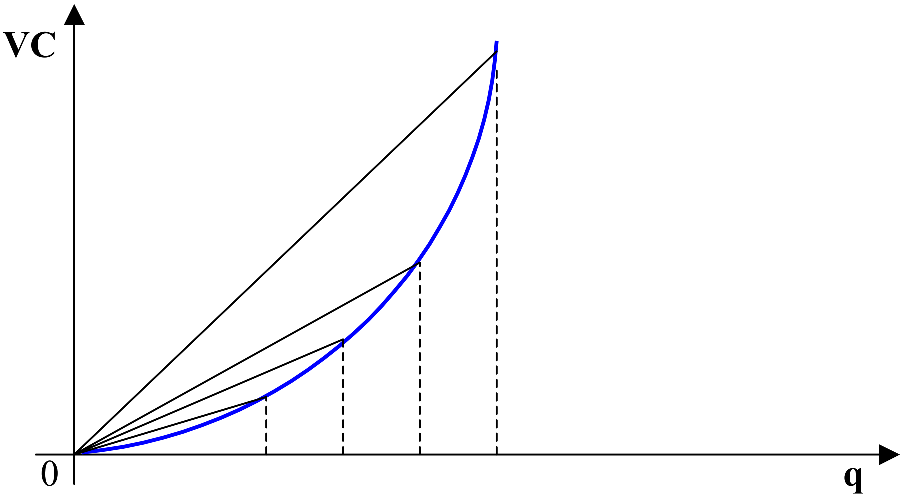
$$\boxed{\mathbf{AVC = VC/q}}$$.

Pensiamo di produrre una unità. In questo caso, se **q = 1**, i costi medi variabili corrispondono esattamente al costo variabile di produzione di questa unità. Portiamo il livello di produzione a due unità. Ci attenderemo che, nel peggiore dei casi, i costi variabili raddoppino, e quindi i costi medi variabili rimangano costanti.

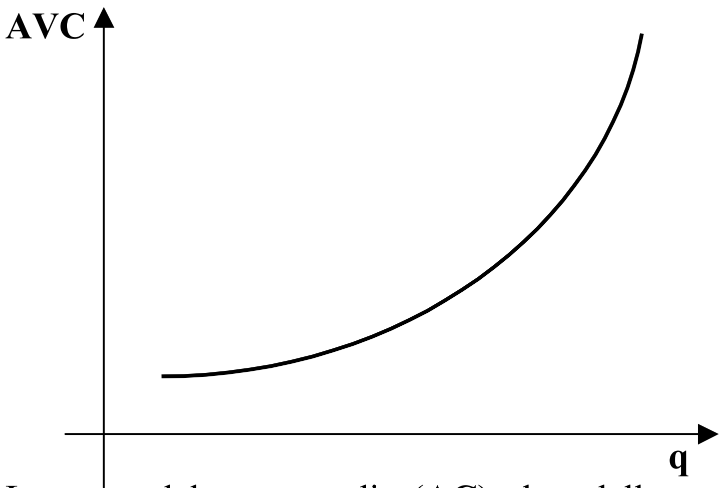
Se fosse possibile organizzare la produzione in modo più efficiente, all'aumentare della scala di produzione i costi medi variabili potrebbero, inizialmente, addirittura diminuire. A lungo andare, però, possiamo attenderci che essi aumentino poiché, se vi sono dei fattori fissi, questi finiranno per porre dei vincoli al processo produttivo.

Quindi, se in un primo periodo i costi variabili aumentano proporzionalmente alla produzione, in un secondo periodo, però, se l'impresa continua ad aumentare la produzione, essi aumentano più che proporzionalmente, proprio perché gli impianti e i macchinari di un'impresa sono atti a produrre, in un dato periodo di tempo (ad esempio un anno), una quantità compresa entro certi limiti, ma aumentando la

produzione, l’imprenditore dovrà sfruttare più intensamente gli impianti e i macchinari (causandone il logorio) e dovrà far fare turni straordinari di lavoro agli operai.
Ricordiamo che stiamo parlando del **breve periodo**, ossia di uno spazio temporale in cui l’impresa non può variare alcuni fattori produttivi (come, appunto, i macchinari e gli impianti), per cui l’aumento della produzione può essere ottenuto solo sfruttando più intensamente i fattori stessi.
Tutto ciò costituisce un aggravio di costi per l’impresa, e quindi i costi aumenteranno più che proporzionalmente al variare della produzione.
Il costo variabile medio, quindi, ha un andamento crescente, e ciò dipende proprio dal fatto che i costi variabili aumentano più che proporzionalmente al crescere della produzione. Possiamo vedere tutto questo anche dal punto di vista grafico:



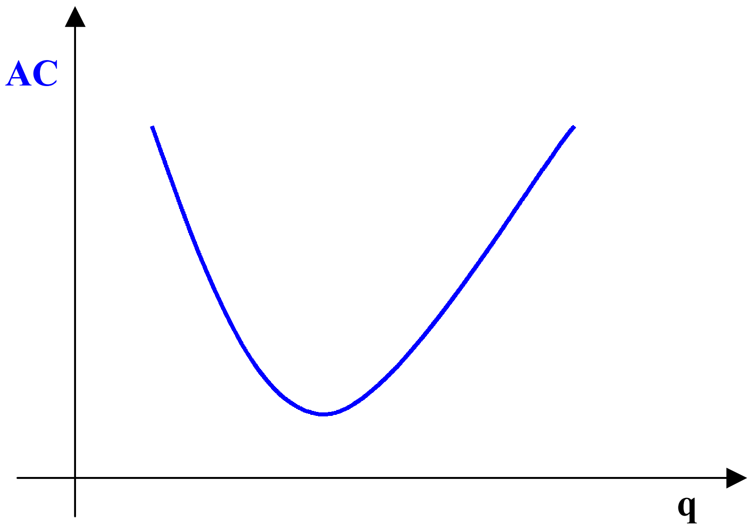
I costi variabili medi rappresentano analiticamente la tangente dell’angolo che si forma congiungendo l’origine degli assi al punto della curva dei costi variabili corrispondente alla quantità prodotta.
Vediamo che questi angoli sono via via maggiori e non vi è dubbio che la curva dei costi variabili medi abbia un andamento di questo genere:



La curva del costo medio (**AC**), data dalla somma dei costi fissi medi (**AFC**) e dei costi variabili medi (**AVC**), avrà sempre una forma ad ∪. Pertanto **il costo medio in**

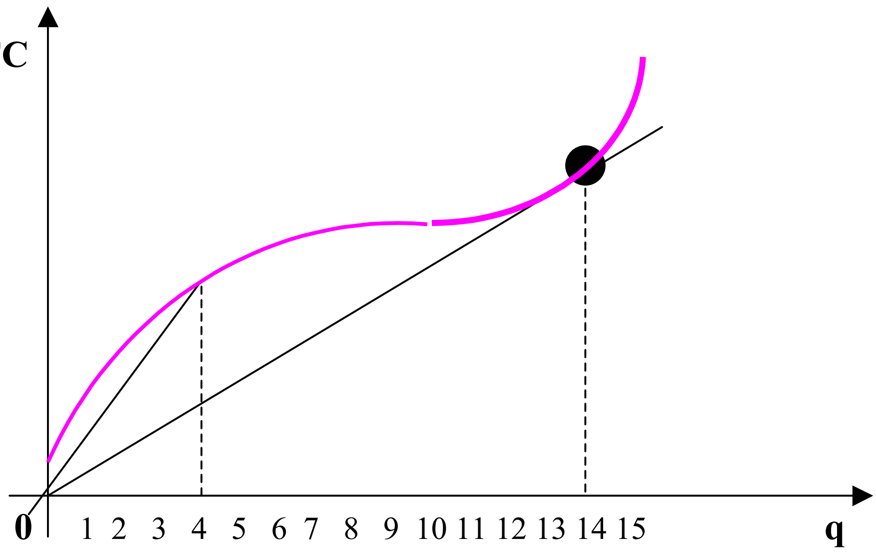
un primo tempo diminuisce e successivamente aumenta. Tanto maggiori sono i costi fissi, tanto più la curva dei costi medi ha questa forma ad ∪.

GRAFICO. Il costo medio ha, quindi, un andamento di questo genere:



Riassumendo, possiamo dire che l'iniziale diminuzione è data dal fatto che man mano che la produzione aumenta, i costi fissi si ripartiscono per unità di prodotto crescenti, dando quozienti via via minori.
In sostanza, il costo medio finché subisce l'influenza dei costi fissi presenta un andamento decrescente, dando luogo alle «economie di scala» che si realizzano quando è possibile produrre molte unità di prodotto.
Tuttavia, ad un certo punto, il costo medio raggiunge il suo livello minimo, dopo di che aumentando la quantità di prodotto comincia a crescere in quanto si verificano degli «aggravi di costo», determinati dalla limitazione dei fattori produttivi.

ALTRE CONSIDERAZIONI. Riprendiamo ora il grafico del costo totale, per fare altre considerazioni di tipo analitico:



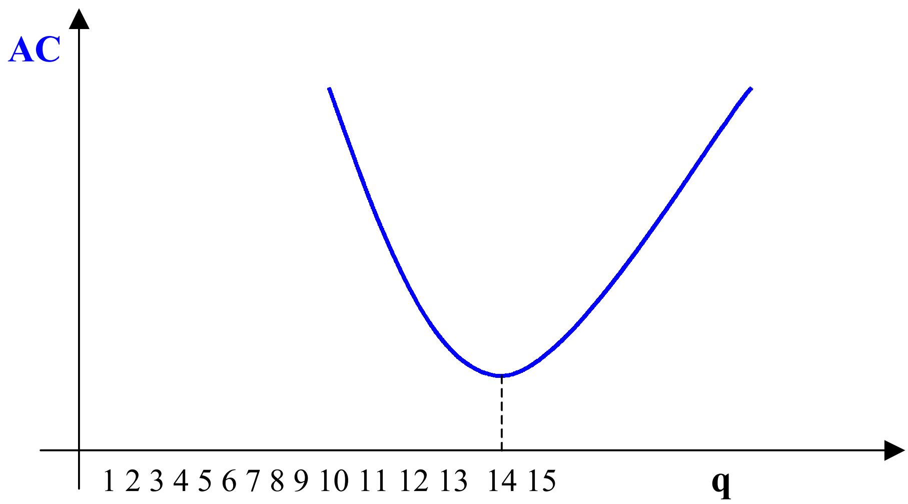
Per **q** quantità prodotte, il costo medio rappresenta analiticamente la tangente dell'angolo che si forma congiungendo l'origine degli assi al punto della curva corrispondente alla quantità prodotta.

Dal grafico possiamo vedere che il costo medio diminuisce da **0** a 14, dove la corda che unisce, per una data quantità prodotta, il punto corrispondente della curva del costo totale all'origine diventa tangente alla curva stessa. Infatti, notiamo anche che coefficienti angolari delle rette diventano sempre più piccoli.

Per **q** pari a **14** il costo medio sarà minimo.

Da **14** in poi esso comincerà a crescere. Vediamo, infatti, che gli angoli che si formano congiungendo, per una data quantità prodotta (>**14**), l'origine al punto corrispondente della curva del costo totale sono sempre più grandi.

Il grafico relativo al costo medio sarà ugualmente:



COSTO MARGINALE E COSTO MEDIO

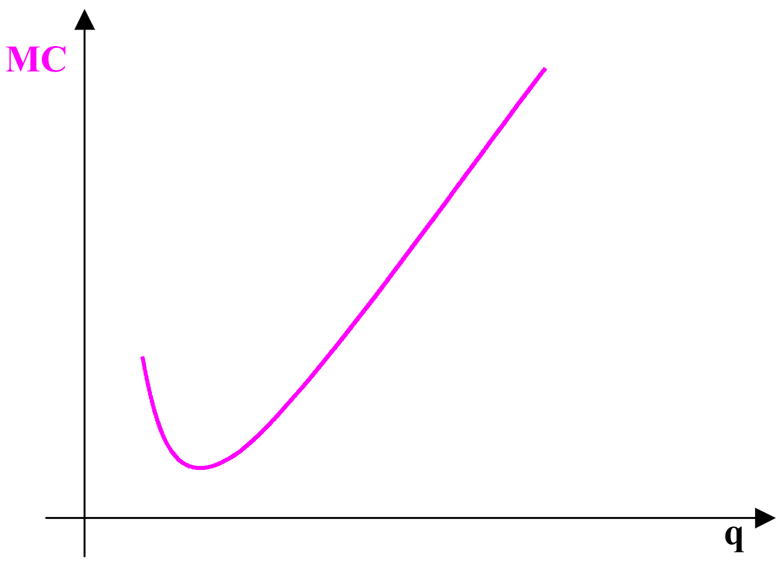
DEFINIZIONE. Sappiamo che il **costo marginale** (**MC** = **M**arginal **C**ost) è dato dal **rapporto fra la variazione del costo totale e la variazione della quantità prodotta**:

$$\boxed{MC = \Delta TC/\Delta q} \quad .$$

Esso **rappresenta il costo dell'ultima unità prodotta**, ovvero il costo che l'impresa deve sostenere per produrre un'unità di prodotto in più.

ANDAMENTO. Il costo marginale dapprima diminuisce, perché in un primo tempo l'impresa, man mano che espande la produzione, può attuare una migliore organizzazione del lavoro, ad esempio adibendo ogni lavoratore ad una specifica mansione. Quindi ogni nuova unità costa meno della precedente.
Questa situazione, però, dura solo fino ad un certo punto. Infatti, al di là di un certo livello di produzione, l'impianto diviene inadeguato, bisogna ricorrere a turni straordinari di lavoro (che costano di più), e di conseguenza ogni nuova unità di prodotto costa più della precedente: il costo marginale cresce.
In conclusione, **il costo marginale in un primo tempo diminuisce e successivamente aumenta**.

GRAFICO. Dovrebbe avere, quindi, un andamento di questo genere:

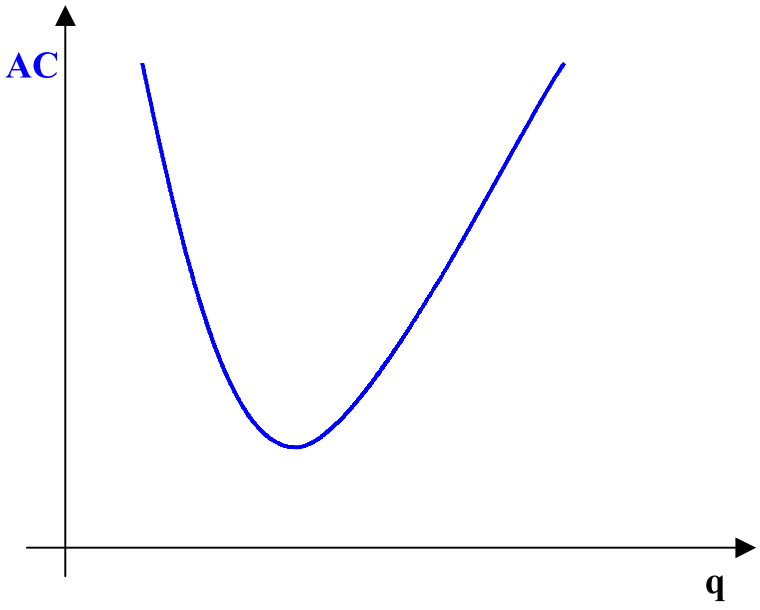


DEFINIZIONE. Il **costo medio** (**AC** = **A**verage **C**ost), invece, sappiamo che è il **rapporto fra il costo totale e il numero delle unità prodotte del bene**.

$$\boxed{AC = TC/q}$$

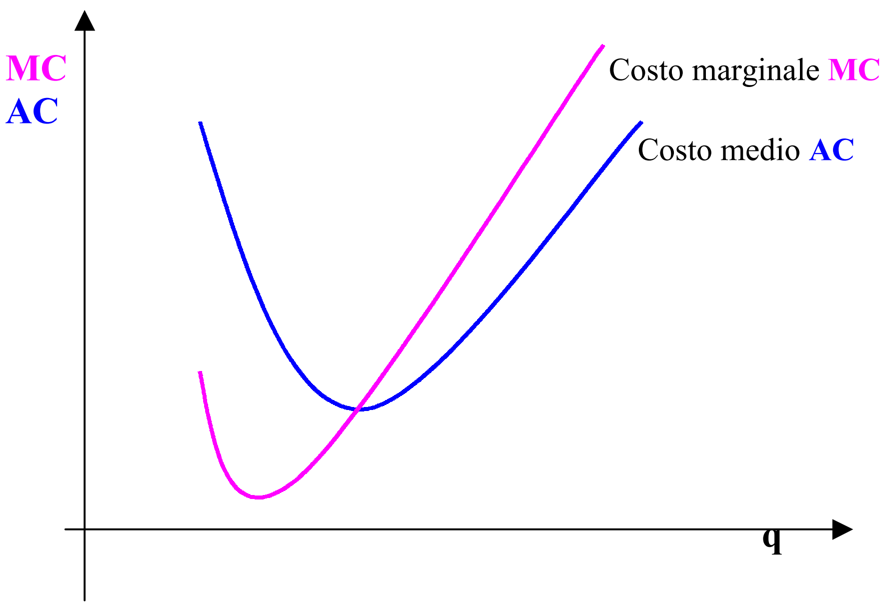
ANDAMENTO. **Il costo medio ha un andamento dapprima decrescente e poi crescente**. L'iniziale diminuzione è data dal fatto che man mano che la produzione aumenta, i costi fissi si ripartiscono per unità di prodotto crescenti, dando quozienti via via minori. In sostanza, il costo medio finché subisce l'influenza dei costi fissi presenta un andamento decrescente, dando luogo alle «economie di scala» che si realizzano quando è possibile produrre molte unità di prodotto. Tuttavia, ad un certo punto, il costo medio raggiunge il suo livello minimo, dopo di che aumentando la quantità di prodotto comincia a crescere in quanto si verificano degli «aggravi di costo», determinati dalla limitazione dei fattori produttivi.

GRAFICO. Il costo medio ha, quindi, un andamento di questo genere:



Ricordiamo che stiamo parlando del **breve periodo**, ossia di uno spazio temporale in cui l'impresa non può variare alcuni fattori produttivi (come i macchinari e gli impianti), per cui l'aumento della produzione può essere ottenuto solo sfruttando più intensamente i fattori stessi.

CONFRONTO. Riportiamo, ora, entrambe le curve su uno stesso sistema di assi cartesiani:



Inizialmente, il costo marginale è inferiore al costo medio perché su quest'ultimo gravano i costi fissi che si ripartiscono su poche unità di prodotto. Infatti, la curva del costo marginale giace al di sotto della curva del costo medio. Aumentando la produzione, la curva del costo marginale comincia a crescere più rapidamente della curva del costo medio, per effetto dell'influenza esercitata dai costi variabili.

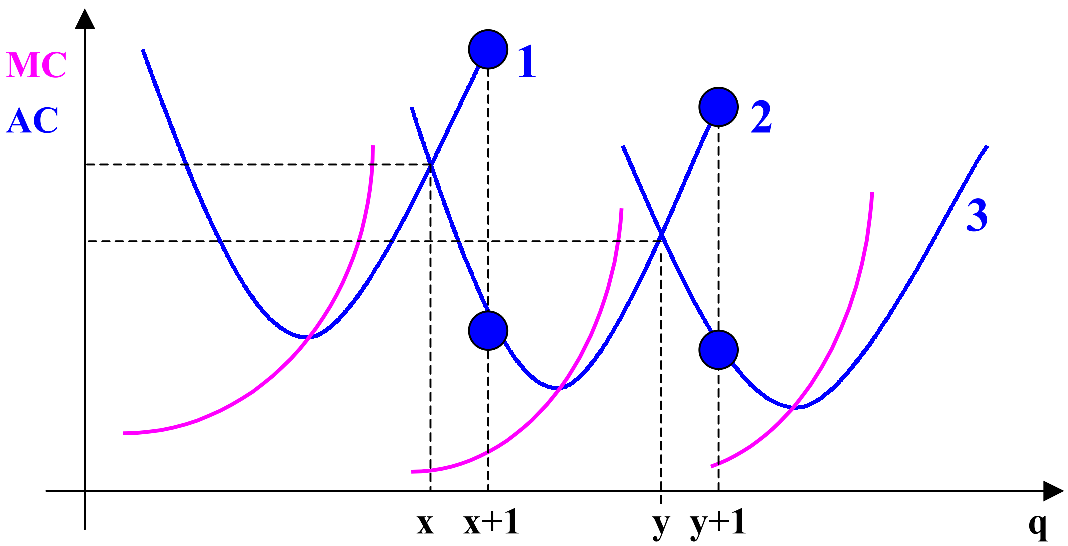
La curva del costo marginale taglia la curva del costo medio nel punto di minimo di quest'ultima. In altri termini il costo marginale è uguale al costo medio nel punto in cui questo raggiunge il suo valore minimo.

COSTI DI LUNGO PERIODO

Una distinzione importante è quella fra breve periodo e lungo periodo. Infatti, nel **breve periodo** gli impianti e i macchinari sono dati, non possono mutare, per cui l'aumento della produzione può essere ottenuto solo sfruttando più intensamente gli impianti. Nel breve periodo quindi man mano che la produzione aumenta, i costi fissi si ripartiscono per unità di prodotto crescenti, dando quozienti via via minori e in sostanza, il costo medio finché subisce l'influenza dei costi fissi presenta un andamento decrescente. Tuttavia, ad un certo punto, il costo medio raggiunge il suo livello minimo, dopo di che, aumentando ulteriormente la quantità di prodotto, comincia a crescere in quanto un eccessivo sfruttamento degli impianti dà rendimenti via via minori.

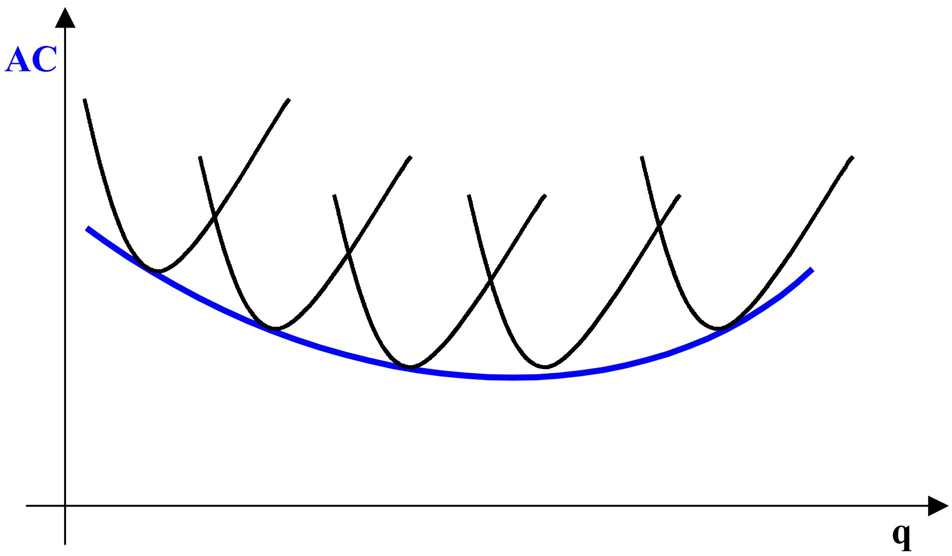
Se, però, consideriamo il **lungo periodo**, gli impianti, i macchinari e gli altri fattori produttivi fissi possono mutare. Quindi, per definizione, nel lungo periodo i costi fissi non esistono.

Esaminiamo il seguente grafico:



Abbiamo rappresentato le curve dei costi medi e dei costi marginali relativamente all'uso di tre impianti diversi che nel lungo periodo l'impresa può decidere di cambiare.
Fino a quando l'impresa produce **x** unità di prodotto userà l'impianto **1**, sostenendo un determinato costo medio. Se l'impresa decide di aumentare la produzione, passando da **x** a **x+1** unità di prodotto, deciderà di cambiare impianto (**2**) perché il costo medio che sostiene è, in questo caso, più basso di quello che sosterrebbe usando l'impianto **1**. Quando l'impresa decide di espandere ulteriormente la produzione, userà l'impianto **2** fino a **y** unità. Infatti, passando da **y** a **y+1** ci ritroviamo in un caso analogo al precedente e l'impresa cambierà nuovamente impianto (**3**).

Pensando che nel lungo periodo avremo infiniti possibili impianti, allora **la curva dei costi medi nel lungo periodo sarà l'inviluppo di quelle nel breve periodo**:



RENDIMENTI DI SCALA E FUNZIONI DI COSTO

Ricordiamo, innanzitutto, che una tecnologia presenta rendimenti di scala crescenti, decrescenti o costanti quando $f(tx_1; tx_2)$ è maggiore, minore o uguale, rispettivamente, a $tf(x_1; x_2)$, per ogni $t > 0$.

Osserviamo che esiste un'interessante relazione tra il tipo di rendimenti di scala della funzione di produzione e l'andamento della funzione di costo.

Esaminiamo i diversi casi:

- **Caso dei rendimenti di scala costanti**. Immaginiamo di aver risolto il problema della minimizzazione dei costi necessari per produrre una unità di output. La **funzione di costo per unità** sarà quindi: $c(w_1; w_2; 1)$. Chiediamoci quale sarà il modo meno costoso per produrre **q** unità di output. Sarà sufficiente utilizzare **q** volte la quantità di ogni input impiegata pe produrre una unità di output. Questo significa che il costo minimo di produzione di **q** unità di output sarà : $c(w_1; w_2; 1) * q$. Nel caso dei rendimenti di scala costanti, pertanto, **la funzione di costo è lineare nell'output**.

- **Caso dei rendimenti di scala crescenti**. In tal caso, **i costi aumentano meno che proporzionalmente rispetto all'output**. Infatti, se l'impresa decide di produrre una quantità doppia di output, può farlo con un costo meno che doppio, almeno finché i prezzi dei fattori rimangano fissi. Questa è una conseguenza ovvia dell'ipotesi di rendimenti di scala crescenti: se l'impresa raddoppia la quantità degli input, la quantità dell'output risulterà più che doppia. Quindi, se l'impresa vuole produrre una quantità doppia di output potrà farlo impiegando ciascun input in quantità meno che doppia. Impiegare ciascun input in quantità doppia significa raddoppiare esattamente i costi e, quindi, se ciascun input viene utilizzato in quantità meno che doppia anche i costi risulteranno meno che doppi: in altri termini, **la funzione di costo aumenterà meno che proporzionalmente rispetto all'output**.

- **Caso dei rendimenti di scala decrescenti**. Analogamente, in questo caso, **la funzione di costo aumenterà più che proporzionalmente rispetto all'output**. Se la quantità di output raddoppia, i costi risulteranno più che doppi.

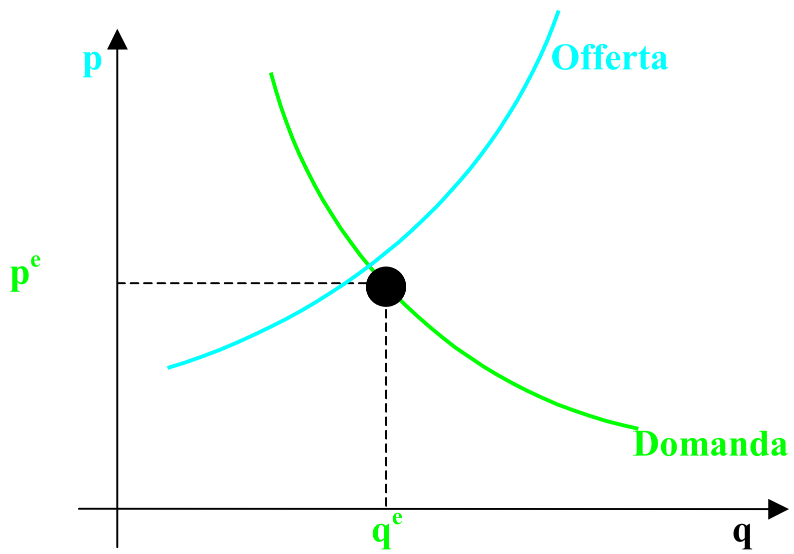
CONCORRENZA PERFETTA

Le ipotesi che si debbono riscontrare perché si abbia un mercato di concorrenza perfetta sono:

- la **polverizzazione o atomizzazione** del mercato. Esistono moltissime piccole imprese che producono lo stesso bene;
- l'**omogeneità del prodotto.** Le imprese non possono differenziare il loro prodotto da quello venduto dalle altre imprese;
- **l'assenza di barriere all'entrata**. Non ci sono ostacoli all'ingresso delle imprese sul mercato.
- **In conseguenza delle tre caratteristiche suddette ogni impresa è "price taker" cioè non può influenzare il prezzo di vendita del suo prodotto .** Il prezzo è determinato dalla domanda e dall'offerta complessiva sul mercato del bene e la domanda per l'impresa è infinitamente elastica a quel prezzo .

DETERMINAZIONE DEL PREZZO DI EQUILIBRIO SUL MERCATO

EQUILIBRIO DI MERCATO



EQUILIBRIO DELL'IMPRESA IN CONCORRENZA PERFETTA

L'impresa sceglie la quantità del bene da produrre in modo da massimizzare i profitto dato il prezzo di vendita p^e.
Il profitto è la differenza tra ricavi e costi. Il ricavo totale è dato dal prezzo, che per l'impresa in concorrenza perfetta è fisso, moltiplicato per la quantità prodotta. **In ogni forma di mercato il ricavo medio è uguale al prezzo** essendo dato da

$$\mathbf{AR = p\ q/q}$$

Ma **solo in concorrenza perfetta**, essendo il prezzo di vendita fisso, si ha che anche **il ricavo marginale è uguale al prezzo** dato che la variazione del prezzo è nulla.
Quindi:

$$\mathbf{AR=MR=p}$$

Dato il prezzo, il profitto è massimo per quella quantità q* tale che

$$\partial\pi/\partial q = 0$$

dove :

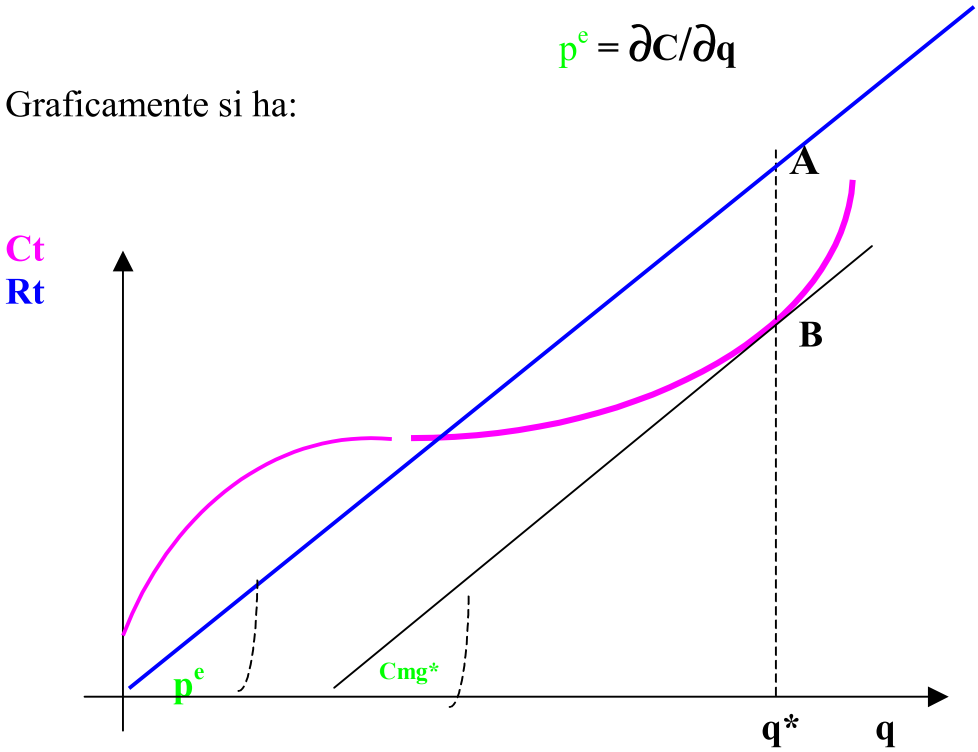
$$\pi = Rt - Ct = p^e q + C(q)$$

quindi

$$\partial\pi/\partial q = p^e + \partial C/\partial q = 0$$

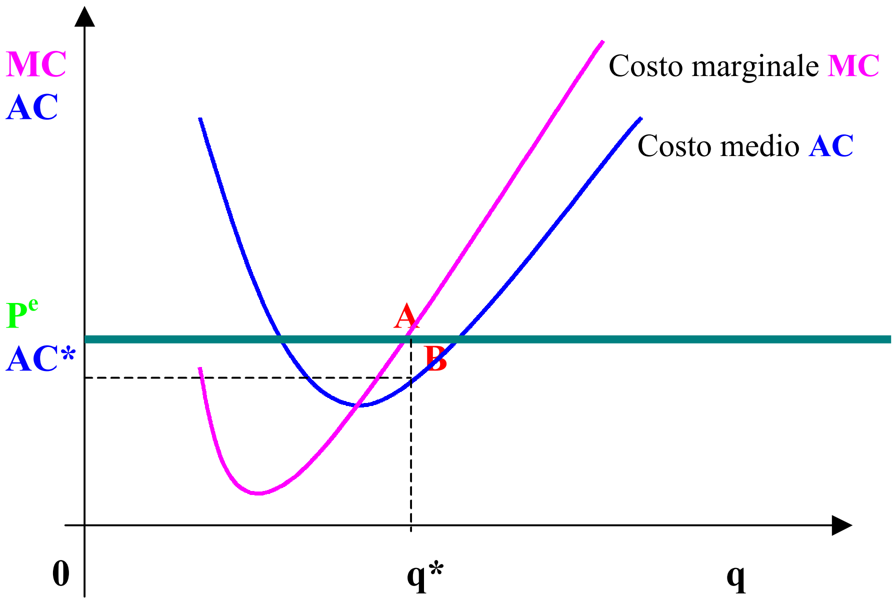
$$p^e = \partial C/\partial q$$

Graficamente si ha:

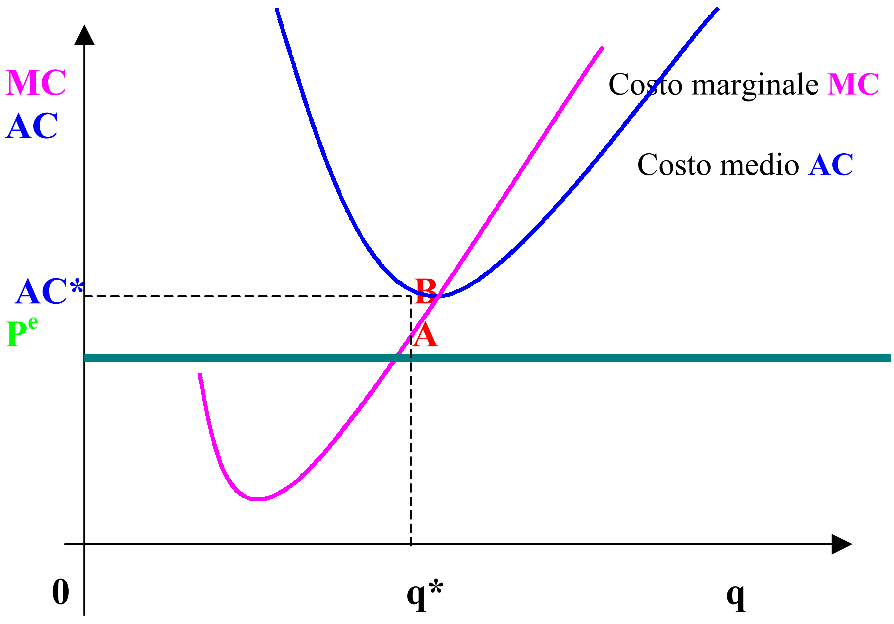


Rt è dato dal segmento q*A, Ct è dato dal segmento q*B, π è dato dal segmento AB . In equilibrio Cmg*= ∂C/∂q= p^e

L'impresa in equilibrio massimizza l'extraprofitto, cioè il profitto al di sopra di quello minimo necessario per indurre l'imprenditore a continuare l'attività (detto profitto normale e conteggiato nei costi fissi dell'imprenditore in quanto identificabile come il costo opportunità del tempo che l'imprenditore dedica alla sua impresa invece che ad altre attività che potrebbero fruttare un reddito). Nel grafico sottostane l'extraprofitto, o profitto sovra-normale, che d'ora in poi per semplicità chiameremo profitto, è dato dall'area del rettangolo **P^e A AC*B,** che è la differenza tra l'area del ricavo totale (**P^e** x q*) e quella del costo totale(AC*x q*).



Se l'impresa è in perdita si ha che l'area del rettangolo **P^e A B AC*** rappresenta la perdita che l'impresa minimizza in corrispondenza di q*:



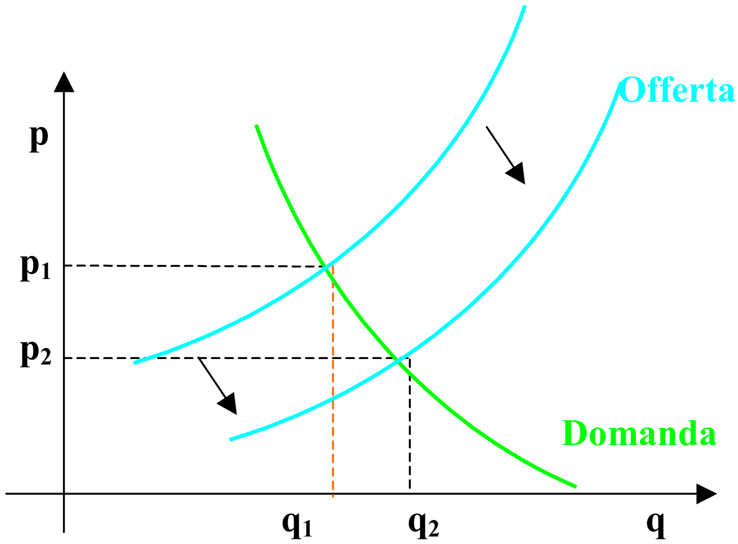
Se nel breve periodo le imprese che operano sul mercato concorrenziale realizzano profitti nuove imprese, data l'assenza di barriere all'entrata, entreranno nel mercato e il prezzo di equilibrio p^e si abbasserà sino a che i profitti non saranno nulli, e l'impresa realizza solo profitti normali, cioè

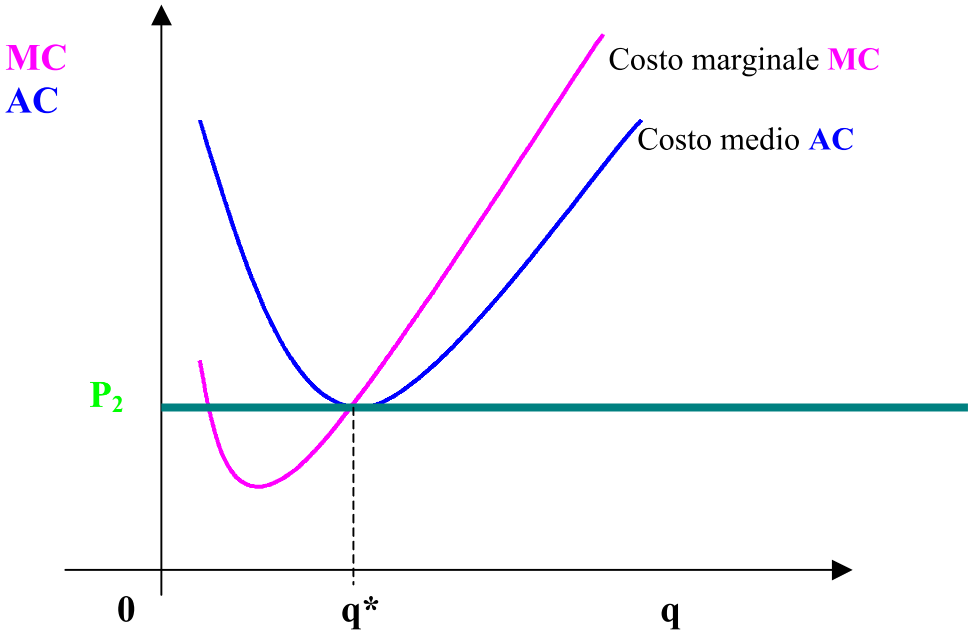
$$p^e = \partial C/\partial q = C/q$$

ovvero

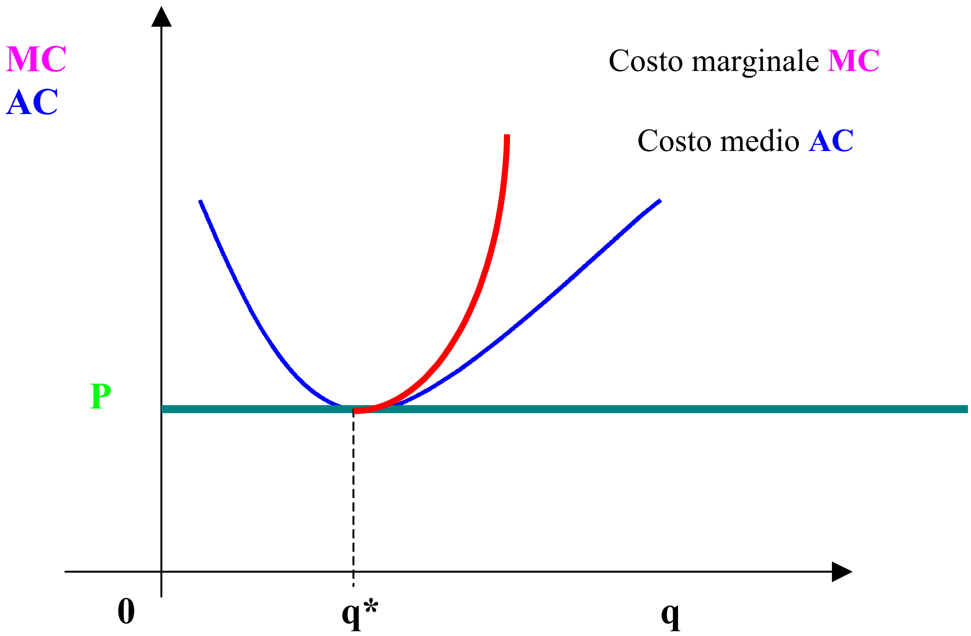
$$p^e = MC = AC$$

Sul mercato:





Se definiamo l'offerta dell'impresa concorrenziale come le relazione tra il prezzo e la quantità ottima dell'impresa osserviamo che essa coincide con il tratto crescente dei costi marginali al di sopra del costo medio minimo (la linea rossa)

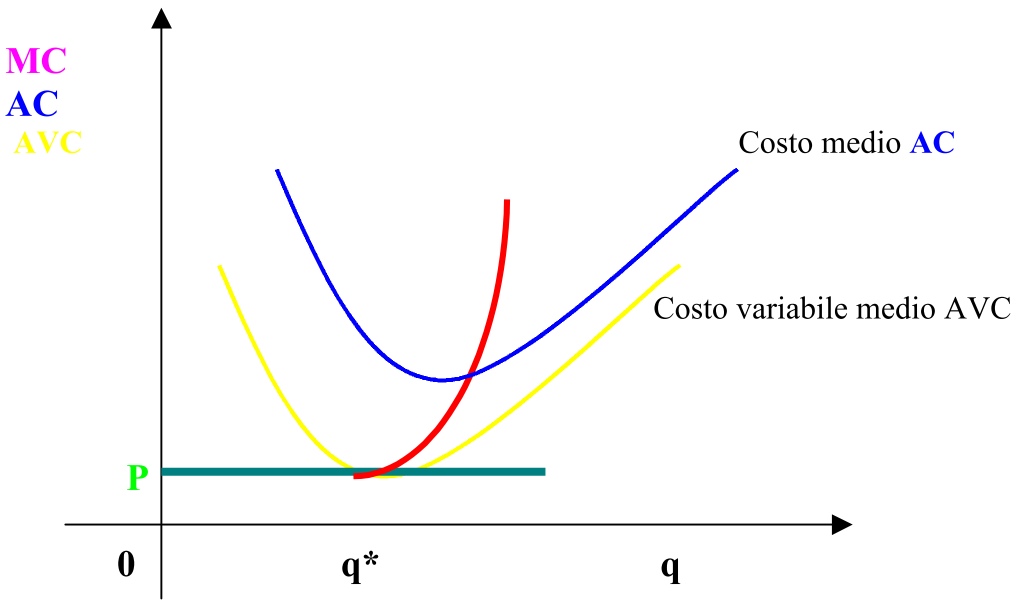


In realtà l'impresa nel breve periodo sceglie di offrire una quantità positiva di prodotto anche se è in perdita purché copra i costi variabili. Infatti l'impresa raffronta la perdita che deve sopportare smettendo di produrre (CF) con quella che dovrebbe sopportare continuando ad operare e chiude la sua attività nel breve periodo se

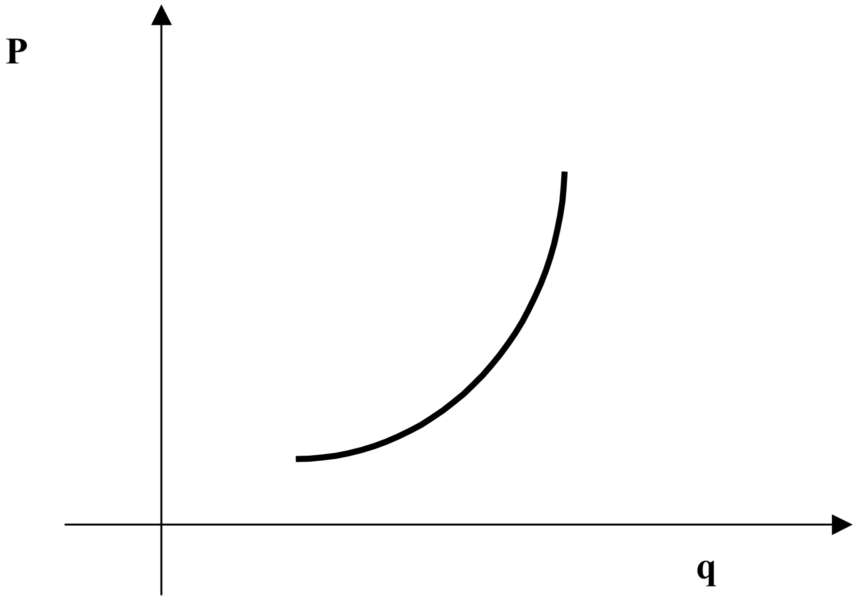
$$-CF < pq - CF - Cv(q)$$

cioè se

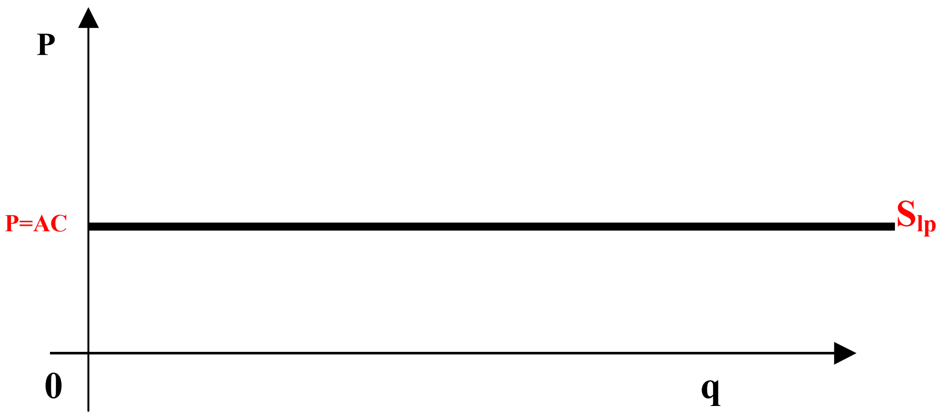
$$p < Cv(q)/q$$



La curva di offerta del mercato è data dalla somma orizzontale delle curve di offerta delle imprese presenti che sono un numero dato: dobbiamo sommare le quantità offerte dalle imprese in corrispondenza di ogni dato prezzo : Avremo così:

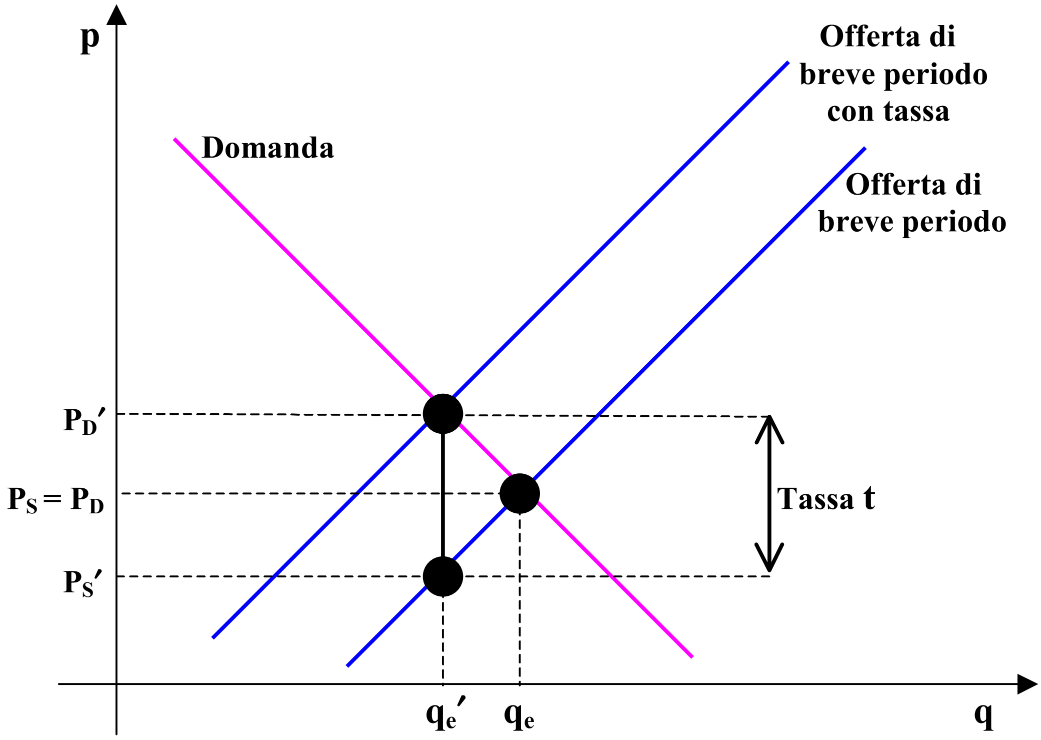


Nel lungo periodo con l'entrata di un numero sempre maggiore di imprese nell'industria e l'uscita delle imprese che subiscono delle perdite il prezzo tenderà ad essere sempre uguale al costo medio minimo. La curva di offerta dell'industria nel lungo periodo è una retta orizzontale in corrispondenza del prezzo che eguaglia il costo medio minimo. I profitti saranno quelli normali per tutte le imprese, che saranno sul mercato in numero variabile.



TASSAZIONE NEL LUNGO E NEL BREVE PERIODO IN UN MERCATO DI CONCORRENZA PERFETTA

Consideriamo il grafico:



Nel **breve periodo**, con un numero fisso di imprese, la curva di offerta dell'industria ha un'inclinazione positiva.

Inizialmente si ha un equilibrio in corrispondenza di $\mathbf{P_D = P_S}$.

Quando la tassa **t** viene introdotta, la curva di offerta di breve periodo si sposta verso l'alto di un tratto pari all'ammontare della tassa **t**.

Il prezzo di equilibrio per i consumatori diventa $\mathbf{P_D'}$ ed il consumatore paga $\mathbf{P_D' - P_D}$, cioè la differenza fra quanto paga adesso e quanto pagava prima.

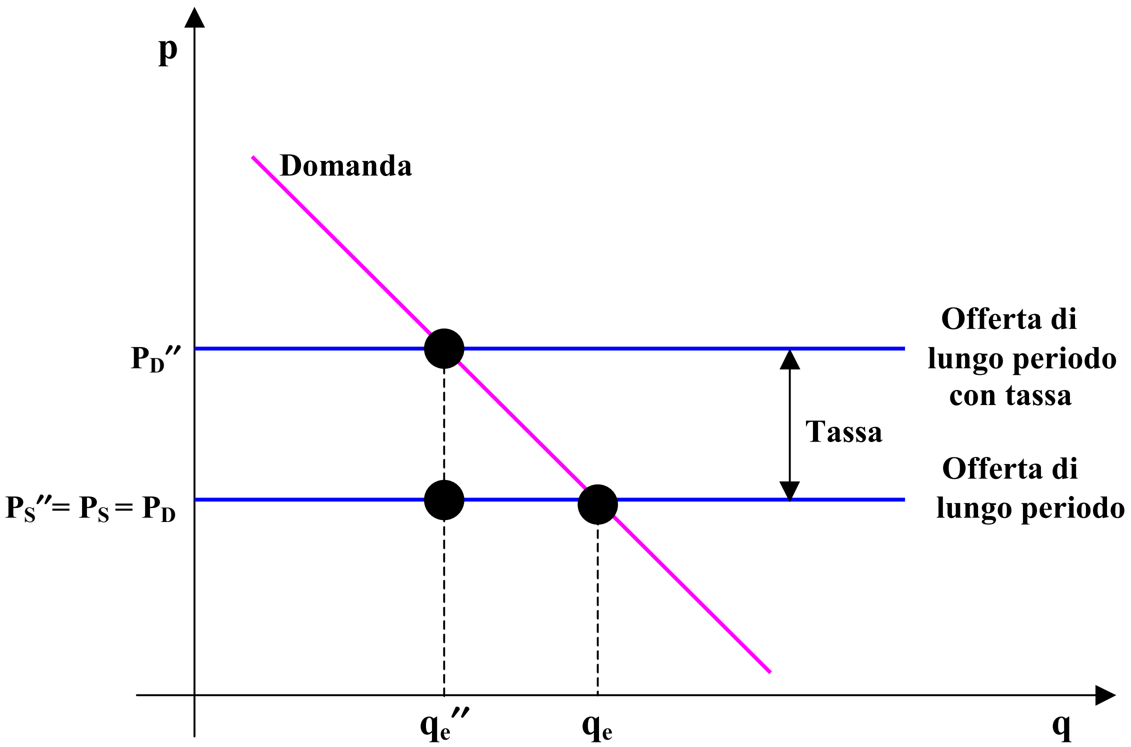
Il prezzo di equilibrio per le imprese diminuisce a $\mathbf{P_S' = P_D' - t}$ ed il produttore paga $\mathbf{P_S - P_S'}$, cioè la differenza fra quanto riceveva prima e quanto riceve adesso.

In definitiva, nel breve periodo, quando viene applicata una tassa i consumatori pagano un prezzo più elevato, e i produttori ricevono un prezzo più basso: essa si ripartisce in parte sul consumatore e in parte sul produttore.

Nel **lungo periodo**, la tassa spingerà alcune imprese ad uscire dall'industria, riducendo l'offerta che sarà rappresentata da una curva orizzontale.

Per rimanere su questa curva le imprese devono praticare un prezzo uguale al costo medio minimo, cioè il prezzo praticato prima della tassa, e quindi il prezzo per i consumatori dovrà aumentare in misura pari all'intero ammontare della tassa.

Graficamente, avremo:



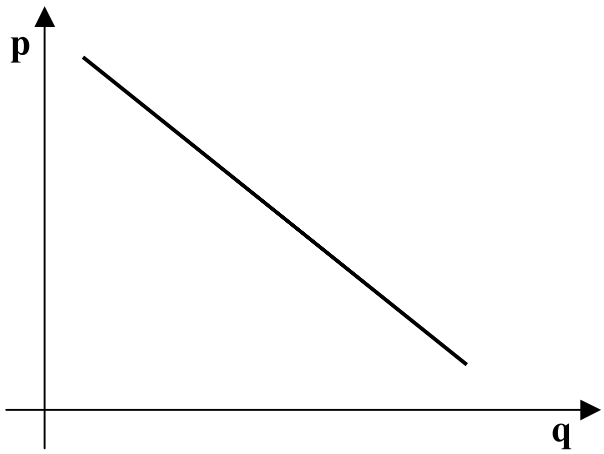
Quindi, l'intero peso della tassa ricade tutto sul consumatore.

RIASSUMENDO: In un'industria in cui vi sia libertà di entrata e di uscita, l'introduzione di una tassa, all'inizio, farà aumentare il prezzo per i consumatori in misura inferiore al suo ammontare, poiché una parte della tassa ricadrà sui produttori. Ma, nel lungo periodo, la tassa spingerà alcune imprese ad uscire dall'industria, riducendo l'offerta, e saranno quindi i consumatori a dover sostenere l'onere della tassa.

IL MONOPOLIO

DEFINIZIONE. Il **monopolio** è una forma di mercato in cui una merce, di cui **non esistono sostituti**, è prodotta da **una sola impresa**. Non è possibile per altre imprese entrare facilmente nel mercato perché vi sono **barriere all'entrata**.

LA CURVA DI DOMANDA PER L'IMPRESA. L'impresa può influire sul prezzo di vendita della merce (è **price maker**): se fissa un prezzo molto alto, la quantità domandata di merce sarà piuttosto bassa; se invece fissa un prezzo più basso, la quantità domandata sarà maggiore. Infatti, quanto più basso è il prezzo, tanto maggiori sono il numero degli acquirenti della merce e la quantità di merce comprata da ogni individuo.
Pertanto, la **curva di domanda per l'impresa** in regime di monopolio è **decrescente**:



L'EQUILIBRIO DELL'IMPRESA MONOPOLISTICA CHE SOSTIENE DEI COSTI. L'impresa, anche in un regime di monopolio, cercherà di massimizzare i profitti, fissando quel prezzo che gli permetterà di raggiungere tale risultato. Consideriamo il caso, realistico, in cui l'impresa sostiene dei costi per produrre la merce.

Indicando con $\mathbf{R_T}$ il ricavo totale, con $\mathbf{C_T}$ il costo totale e con $\boldsymbol{\pi}$ il profitto, abbiamo sempre che:

$$\boxed{\boldsymbol{\pi = R_T - C_T}}\ .$$

Dal punto di vista matematico, affinché $\boldsymbol{\pi}$ sia massimo dev'essere:

$$\partial\pi / \partial q = 0.$$

In questo caso, abbiamo che:

$$\partial\pi/\partial q = \partial R_T/\partial q - \partial C_T/\partial q = 0$$

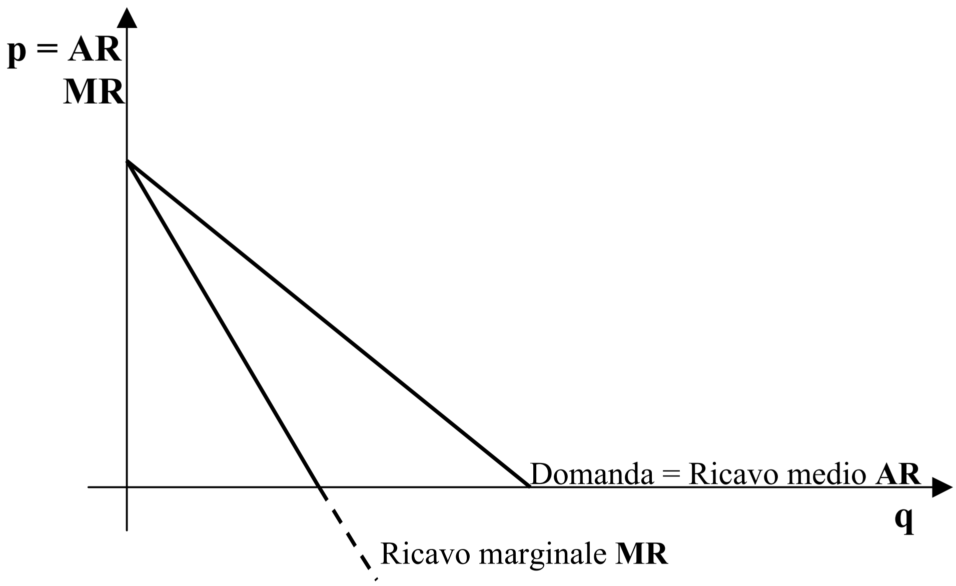
verificata se e solo se:

$$\boxed{\partial R_T/\partial q = \partial C_T/\partial q}\ .$$

Quindi, l'impresa, in un regime di monopolio, ha il massimo profitto quando il ricavo marginale è uguale al costo marginale.

Questo si verifica anche per un'impresa in regime di concorrenza perfetta, ma con la particolarità che il ricavo marginale è uguale al prezzo e, quindi, condizione necessaria affinché l'impresa realizzi il massimo profitto è che siano uguali il prezzo determinato dal mercato e il costo marginale.

Rappresentiamo su un piano cartesiano la curva di domanda per l'impresa e la curva del ricavo marginale **MR**:



Poiché consideriamo una curva di domanda lineare, possiamo scrivere:

$$\boxed{p = a - bq}$$

la cui rappresentazione grafica è una retta con inclinazione $-\mathbf{b} = \Delta p/\Delta q$.

Il ricavo medio **AR** è dato dal rapporto fra ricavo totale $\mathbf{R_T}$ e quantità prodotta **q** (che, per semplicità, si suppone uguale a quella venduta), cioè:

$$AR = R_T/q.$$

Il ricavo totale $\mathbf{R_T}$, al solito, è dato dal prodotto fra il prezzo **p** e la quantità prodotta **q**. Avremo:

$$\mathbf{AR = R_T/q = (p * q)/q = p}.$$

Ma, ora, il prezzo **p** non è determinato dal mercato come in concorrenza perfetta e, poiché consideriamo una curva di domanda lineare, la curva del ricavo medio **AR** coinciderà con quella della domanda:

$$\boxed{\mathbf{AR = p = a - bq}}\ .$$

Il ricavo marginale **MR** è dato dal rapporto fra la variazione del ricavo totale $\mathbf{\Delta R_T}$ e la variazione della quantità prodotta $\mathbf{\Delta q}$, cioè:

$$\mathbf{MR = \Delta R_T / \Delta q}.$$

Abbiamo che:

$\mathbf{\Delta R_T / \Delta q =}$

$\mathbf{= [\Delta(p * q)] / \Delta q =}$

$\mathbf{= [(p + \Delta p) * (q + \Delta q) - pq] / \Delta q =}$

$\mathbf{= (\cancel{pq} + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q \cancel{- pq}) / \Delta q =}$

$\mathbf{= (p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q) / \Delta q}.$

Per $\mathbf{\Delta p \to 0}$ e $\mathbf{\Delta q \to 0}$, la quantità $\mathbf{\Delta p\Delta q}$ è trascurabile, quindi abbiamo che:

$$\mathbf{\Delta R_T / \Delta q = (p\Delta q + q\Delta p) / \Delta q = p + \Delta p/\Delta q * q}.$$

Ricordiamo che $\mathbf{p = a - bq}$ e $\mathbf{\Delta p/\Delta q = -b}$; quindi avremo:

$$\boxed{\mathbf{R_T / \Delta q = p + \Delta p/\Delta q * q = a - bq - bq = a - 2bq = MR}}\ .$$

È per questo che la curva del ricavo marginale **MR** è anch'essa una retta ed in particolare ha un'inclinazione (**– 2b**) esattamente doppia di quella della retta che rappresenta la domanda per l'impresa.

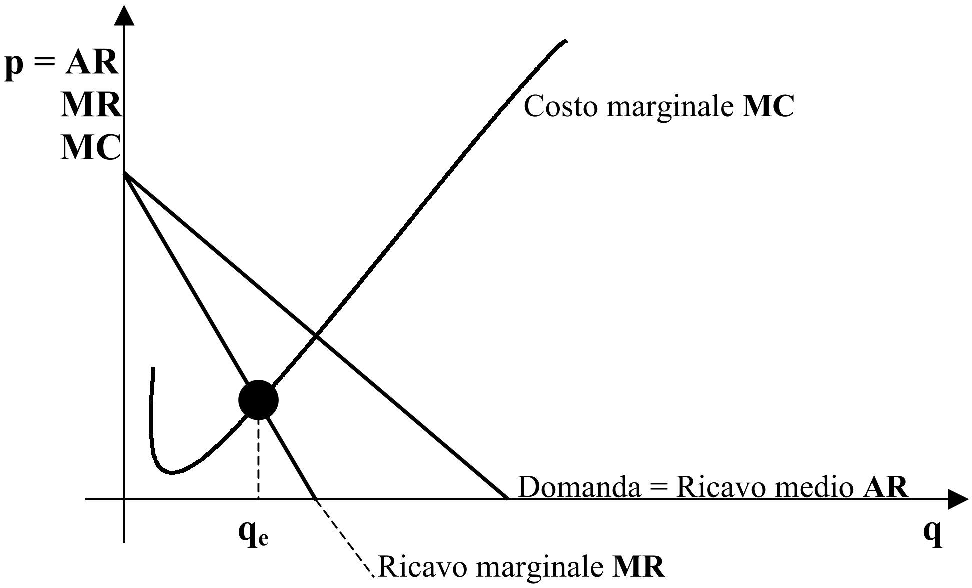
Avremmo ottenuto lo stesso risultato calcolando la derivata prima del ricavo totale $\mathbf{R_T}$ rispetto a **q**. Infatti:

$$\mathbf{R_T = p * q = (a - bq) * q = aq - bq^2}.$$

e:

$$\boxed{\partial \mathbf{R_T} / \partial \mathbf{q} = \mathbf{a - 2bq = MR}}\ .$$

Dopo aver dato queste spiegazioni, riprendiamo lo stesso grafico e aggiungiamo la curva del costo marginale **MC**, che ha un andamento a ∪:



L'impresa monopolistica produrrà la quantità che corrisponde al massimo profitto totale. Come abbiamo detto, il profitto totale è massimo quando il ricavo marginale è uguale al costo marginale, e ciò si verifica in **E**. Questo è il punto di **<u>equilibrio per l'impresa monopolistica</u>**, che produrrà quindi la quantità $\mathbf{q_e}$.

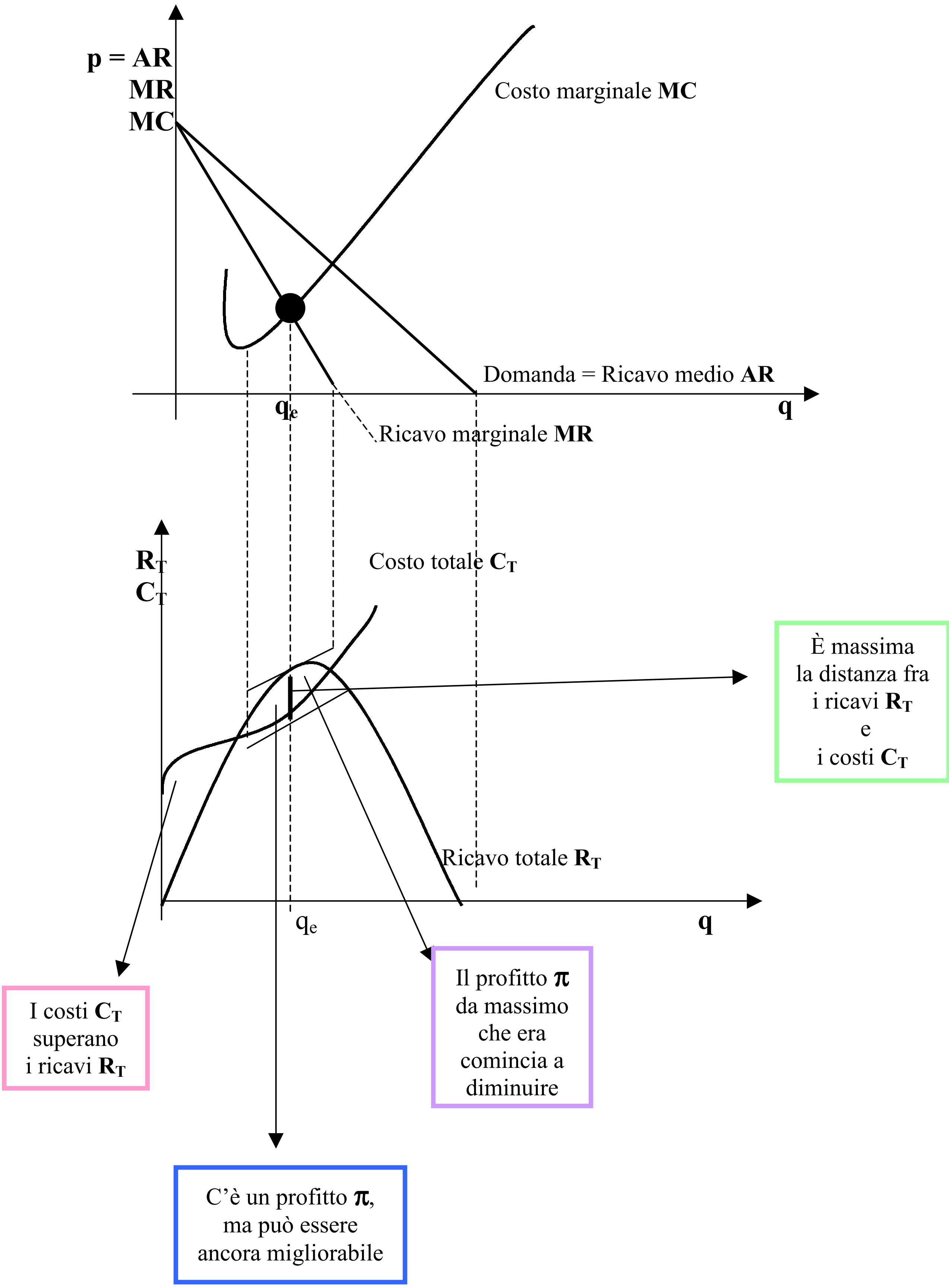
Mettiamo, ora, in relazione la curva del costo totale $\mathbf{C_T}$ e del ricavo totale $\mathbf{R_T}$. Ricordiamo che:

$$\mathbf{R_T = p * q = (a - bq) * q = aq - bq^2}$$

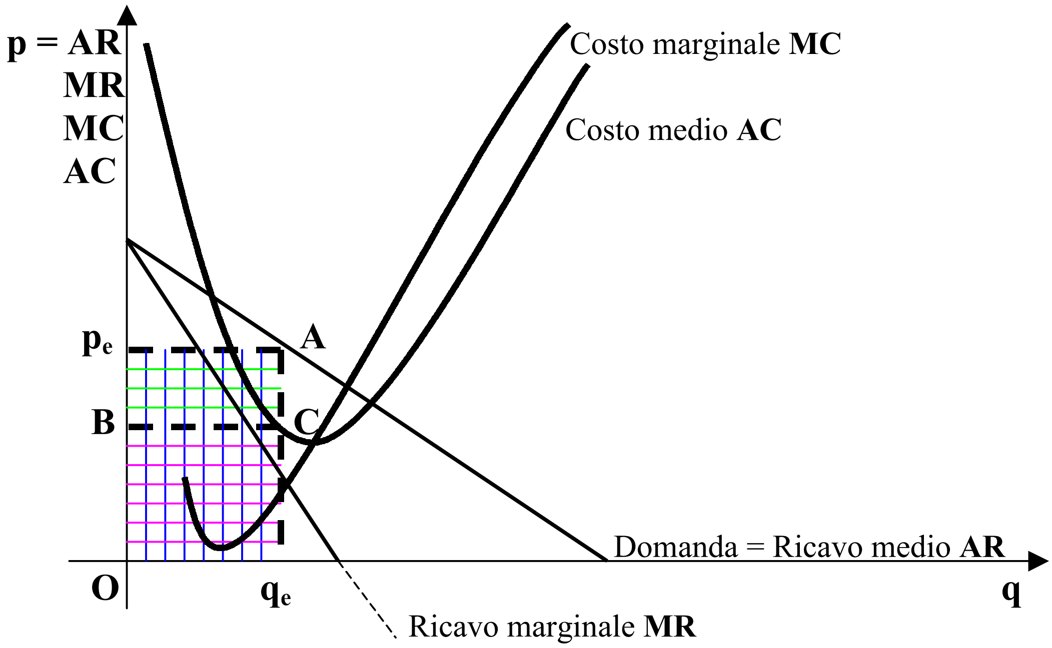
ed ha come rappresentazione grafica una parabola con la concavità rivolta verso il basso (giacché il coefficiente di $\mathbf{q^2}$, cioè $\mathbf{-b}$, è negativo), con il suo punto di massimo laddove $\partial \mathbf{R_T} / \partial \mathbf{q} = \mathbf{0}$, ossia dove il ricavo marginale **MR** è nullo.

Ricordiamo, inoltre, che il punto in cui il costo marginale è minimo è anche il punto in cui la curva del costo totale $\mathbf{C_T}$ ha il punto di flesso.

Partiamo dal grafico precedente:



Facciamo le ultime considerazioni, riportando sullo stesso grafico la curva di domanda per l'impresa, la curva del ricavo marginale **MR**, la curva del costo marginale **MC** e la curva del costo medio **AC**:



Abbiamo detto che l'impresa produrrà la quantità in cui il ricavo marginale **MR** è uguale al costo marginale **MC**, perché è in questo punto che realizza il massimo profitto; quindi produrrà $\mathbf{q_e}$.

Per un quantità pari a $\mathbf{q_e}$, sulla curva di domanda per l'impresa, corrisponde un prezzo pari a $\mathbf{p_e}$. Quindi, l'impresa produrrà (e venderà) la quantità $\mathbf{q_e}$ al prezzo $\mathbf{p_e}$. L'area $\mathbf{p_eAq_eO}$ rappresenta il ricavo totale $\mathbf{R_T}$.

A una quantità prodotta pari a $\mathbf{q_e}$ corrisponde un costo medio pari alla distanza **OB**, per cui l'area del rettangolo $\mathbf{BCq_eO}$ rappresenta il costo totale $\mathbf{C_T}$.

Per una quantità pari a $\mathbf{q_e}$, la distanza verticale **CA** tra la curva di domanda e la curva del costo medio è la differenza tra il prezzo e il costo medio, cioè il profitto medio o unitario. Esso è evidentemente un extraprofitto, rappresentato dell'area del rettangolo $\mathbf{p_eABC}$.

In un regime di monopolio non c'è differenza fra **<u>breve periodo</u>** e **<u>lungo periodo</u>** perché vi sono barriere all'entrata.

LA TEORIA DEL MARK-UP

Dato che

$$\mathbf{MR = p * (1 - 1/|\varepsilon|)}$$

e che in equilibrio MR=MC , allora l'impresa monopolista fissa il prezzo tale che :

$$\mathbf{MC = p * (1 - 1/|\varepsilon|)}$$

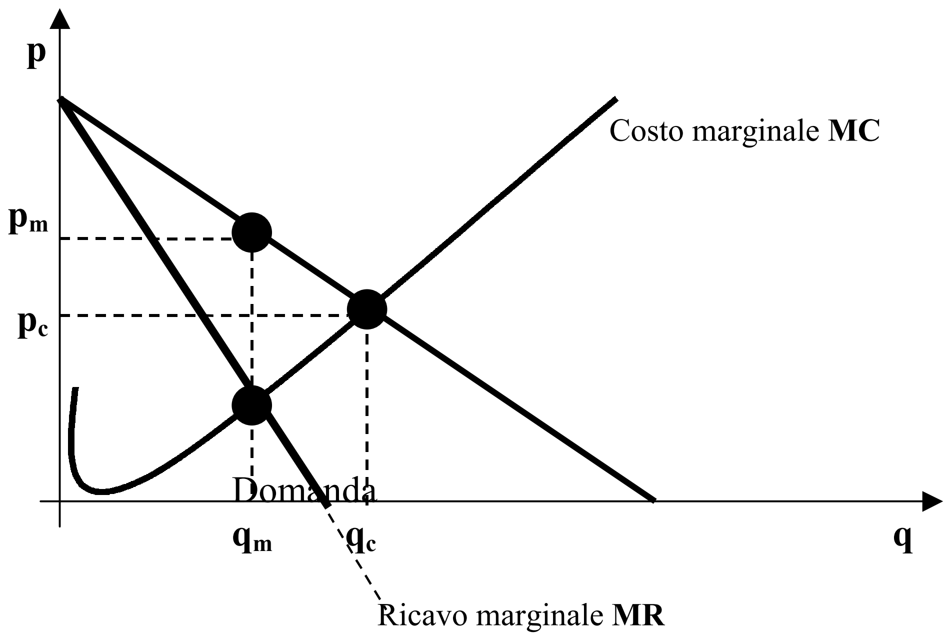
$$\mathbf{P = MC / (1 - 1/|\varepsilon|)}$$

Dove $1/(1 - 1/|\varepsilon|)$ è il mark-up, o ricarico sui costi, che l'impresa applica nel fissare il prezzo ottimo in monopolio. Tanto minore è l'elasticità della domanda tanto maggiore è la differenza positiva tra il prezzo di monopolio e quello che si avrebbe in equilibrio concorrenza perfetta (p=MC che si ottiene quando l'elasticità della domanda in valore assoluto è infinita)

PERDITA DI BENESSERE IN MONOPOLIO RISPETTO ALLA CONCORRENZA PERFETTA

INEFFICIENZA DEL MONOPOLIO. Un'industria concorrenziale produce in corrispondenza di un punto in cui il prezzo è uguale al costo marginale, mentre un'industria monopolistica produce in corrispondenza di un punto in cui il prezzo è maggiore del costo marginale. Quindi, in monopolio, l'output sarà in generale inferiore e il prezzo più elevato che in concorrenza. Per questa ragione, la soddisfazione dei consumatori sarà tipicamente inferiore se la struttura dell'industria è monopolistica piuttosto che concorrenziale, ma, per la stessa ragione, per l'impresa è vero il contrario. Se consideriamo congiuntamente gli interessi dell'impresa e del consumatore, non è chiaro se la soluzione «migliore» sia la concorrenza o il monopolio. Vedremo, ora, che è possibile essere contrari al monopolio semplicemente sulla base di un criterio di efficienza.

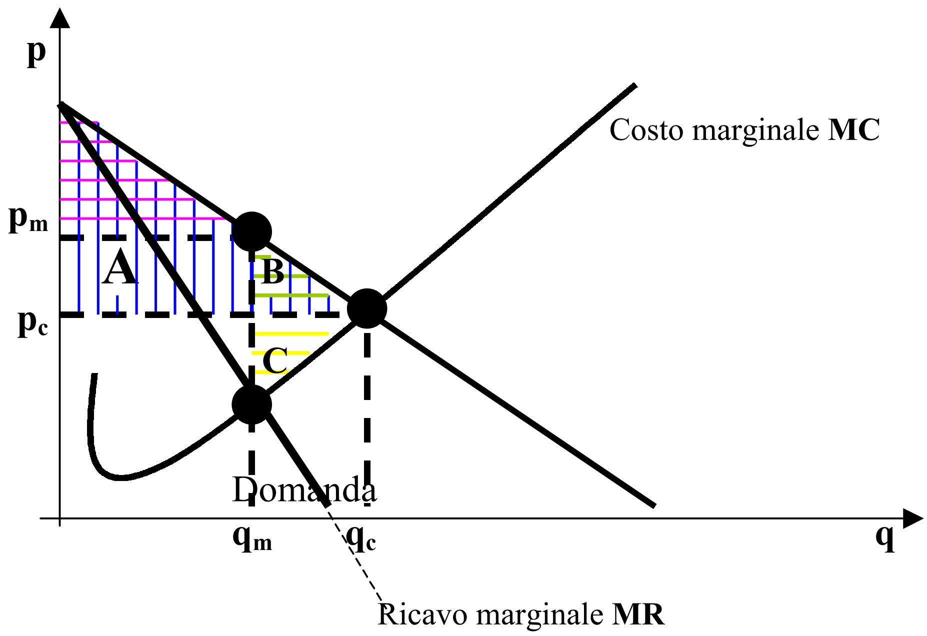
Consideriamo una situazione di monopolio come quella rappresentata in figura:



In concorrenza perfetta abbiamo l'uguaglianza fra prezzo **p**, ricavo medio **AR** e ricavo marginale **MR** e l'impresa concorrenziale avrà il massimo profitto quando il prezzo **p** sarà uguale al costo marginale **MC**. È proprio per questo che la combinazione concorrenziale sarà (q_c; p_c).
Alternativamente, se l'impresa si rende conto di poter influire sul prezzo di mercato, e quindi sceglie la quantità che massimizza il profitto, la combinazione monopolistica sarà (q_m; p_m), perché sceglierà l'output per cui si verifica l'uguaglianza fra il ricavo marginale **MR** e il costo marginale **MC**.
Ricordiamo che uno stato dell'economia è Pareto-efficiente se non è possibile operare alcuna riallocazione a vantaggio di qualcuno senza danneggiare qualcun altro. Ricordiamo la definizione di curva di domanda inversa: in corrispondenza di ciascun livello di output, $p(q)$ rappresenta il prezzo che i consumatori sono disposti a pagare per un'unità addizionale di un bene.
Poiché $p(q)$ è maggiore di $MC(q)$ per tutti i livelli di output compresi tra q_m e q_c, esistono livelli di output in corrispondenza dei quali i consumatori sono disposti ad acquistare un'unità di output ad un prezzo superiore al suo costo. Per esempio, consideriamo la situazione in cui la quantità di output prodotta in monopolio sia q_m. Poiché $p(q_m) > MC(q_m)$, sappiamo che esiste qualcuno disposto a pagare una unità addizionale di output più di quanto essa costi.
Supponiamo che l'impresa produca questa quantità addizionale e la venda per un qualsiasi prezzo **p**, tale che $p(q_m) > p > MC(q_m)$. La soddisfazione del consumatore aumenterà, poiché era disposto a pagare esattamente $p(q_m)$ per l'unità addizionale che viene invece venduta a $p < p(q_m)$. D'altra parte, il costo di produzione dell'unità addizionale sarà per il monopolista $MC(q_m)$, mentre il prezzo è $p > MC(q_m)$. Tutte le altre unità sono vendute al prezzo precedente, ma, nella vendita dell'unità addizionale, entrambi i contraenti ottengono un surplus addizionale - cioè aumenta la soddisfazione di tutti, senza che diminuisca quella di alcuno.

Abbiamo così dimostrato che la situazione iniziale non è Pareto-efficiente.
Esaminiamo le ragioni di questa inefficienza. Il livello efficiente dell'output è quello in corrispondenza del quale la disponibilità a pagare una unità addizionale di output è uguale al costo necessario per produrla. Un'impresa concorrenziale tiene conto di questa condizione. Ma il monopolista tiene altresì conto dell'effetto dell'aumento dell'output sui ricavi derivanti dalle unità **inframarginali**, che non hanno nulla a che fare con l'efficienza. Un monopolista sarebbe sempre disposto a vendere un'unità addizionale ad un prezzo inferiore, se non dovesse vendere ad un prezzo inferiore anche le unità inframarginali.

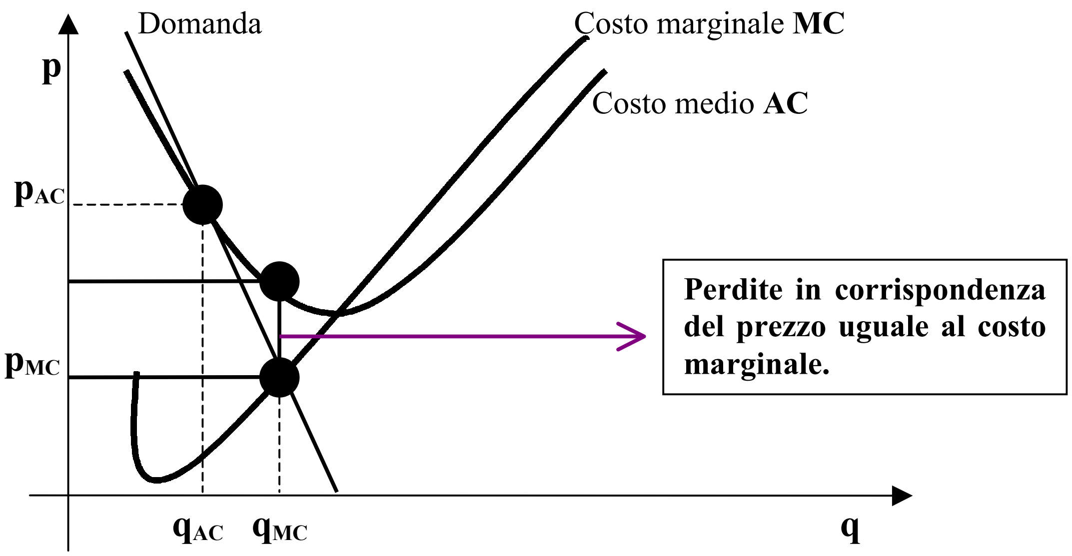
PERDITA NETTA DI MONOPOLIO. Abbiamo visto che il monopolio è inefficiente: vediamo, ora, in quale misura.
Per calcolare l'aumento dei profitti per un'impresa che pratichi un prezzo $\mathbf{p_m}$ invece che $\mathbf{p_c}$, è sufficiente considerare la variazione del surplus del produttore, che misura l'entità del profitto cui i proprietari dell'impresa sono disposti a rinunciare per poter praticare il più elevato prezzo di monopolio.
Per calcolare la perdita del consumatore, che, in monopolio, deve pagare $\mathbf{p_m}$ invece di $\mathbf{p_c}$, è sufficiente considerare la variazione del suo surplus, che rappresenta quanto si deve dare ai consumatori per compensarli del prezzo più elevato.
La differenza tra questi due valori consente di calcolare la **perdita netta di monopolio**.
Le variazioni del surplus del produttore e del consumatore passando dal livello dell'output che massimizza il profitto in monopolio a quello che corrisponde all'equilibrio in concorrenza possono essere rappresentate in questo modo:



In un regime di concorrenza perfetta vi è un maggiore benessere per il consumatore. Infatti, egli può acquistare più unità di prodotto, giacché $\mathbf{q_c > q_m}$, ad un prezzo minore, giacché $\mathbf{p_c < p_m}$. Inoltre, il surplus del consumatore in concorrenza perfetta (rappresentato dall'area che comunque è appare il **blu**) è maggiore di quello che egli ottiene in monopolio (rappresentato dall'area in cui appaiono il **blu** e il **fucsia**). Passando dal monopolio alla concorrenza perfetta, infatti, egli può acquistare la stessa quantità che acquistava in precedenza $\mathbf{q_m}$ ad un prezzo più basso $\mathbf{p_c}$, e il suo surplus aumenta in misura uguale all'area **A**, e può acquistare la quantità aggiuntiva $\mathbf{q_c - q_m}$ sempre al prezzo $\mathbf{p_c}$, e il suo surplus aumenta ulteriormente in misura uguale all'area **B**. Non accade analogamente per il produttore. Egli venderà la quantità $\mathbf{q_m}$, che già vendeva in precedenza, ad un prezzo minore $\mathbf{p_c}$, e il suo surplus diminuisce in misura uguale all'area **A**, e venderà unità addizionali pari alla differenza $\mathbf{q_c - q_m}$ sempre al prezzo $\mathbf{p_c}$, e il suo surplus aumenta in misura pari all'area **C**. Quindi, l'area **A** rappresenta il surplus trasferito al consumatore in concorrenza perfetta, o, viceversa, il surplus di cui si appropria il produttore in monopolio. Ad ogni modo, un lato del mercato aumenta la propria soddisfazione mentre l'altro la diminuisce, ma il surplus totale non varia.L'area **B + C** corrisponde ad un vero e proprio aumento di surplus, e misura il valore che, rispettivamente, il consumatore e il produttore attribuiscono all'output addizionale. L'area **B + C** è detta **perdita netta di monopolio**, e misura il peggioramento della situazione per chi deve pagare il prezzo di monopolio piuttosto che quello di concorrenza.

IL MONOPOLIO NATURALE

La quantità di output che garantisce in un'industria l'efficienza paretiana è quella in corrispondenza della quale il prezzo eguaglia il costo marginale.
Un monopolista produce una quantità in corrispondenza della quale il ricavo marginale è uguale al costo marginale, producendo così una quantità di output inferiore a quella efficiente. Sembrerebbe facile regolamentare un monopolio in modo tale da eliminare l'inefficienza: sarebbe sufficiente stabilire che il prezzo debba essere uguale al costo marginale e lasciare che la quantità prodotta sia determinata dalla condizione di massimizzazione del profitto.
Ciò sfortunatamente non tiene conto di un importante aspetto del problema: potrebbe verificarsi il caso che, a quel prezzo, il profitto del monopolista fosse negativo.
Rappresentiamo graficamente un caso del genere:



Qui il minimo della curva dei costi medi si trova a destra della curva di domanda, e l'intersezione delle curve di domanda e del costo marginale si trova al di sotto della curva del costo medio. Pur essendo efficiente, il livello $\mathbf{q_{MC}}$ di output non consente di ottenere profitti. Se s'imponesse al monopolista di produrre questa quantità, per lui sarebbe conveniente cessare l'attività.
Questo caso è quello tipico dei servizi pubblici. Si pensi alla società del gas, per esempio. In questo caso, la tecnologia adottata richiede notevoli costi fissi e il costo marginale per fornire unità addizionali di gas è molto basso - posate le tubature, costa molto poco farvi passare il gas. Analogamente, una società telefonica locale deve affrontare notevoli costi fissi per installare i cavi e i commutatori, mentre i costi marginali di un'unità addizionale sono molto bassi. In presenza di elevati costi fissi e bassi costi marginali, è facile che si crei la situazione detta di **monopolio naturale**.

Se non è opportuno permettere ad un monopolista naturale di fissare il prezzo di monopolio, poiché a questo prezzo si determinerebbe una inefficienza paretiana, e non è possibile imporgli di produrre al prezzo concorrenziale, poiché egli realizzerebbe profitti negativi, cos'altro si può fare?

Per la maggior parte, i monopoli naturali sono gestiti dallo Stato. Diversi sono gli approcci adottati nei vari Paesi: in alcuni, il servizio telefonico è fornito dallo Stato, in altri da imprese private regolamentate. Entrambi gli approcci presentano vantaggi e svantaggi.

Consideriamo, per esempio, il caso di un monopolio naturale regolamentato dallo Stato. Affinché l'impresa regolamentata non abbia bisogno di sovvenzioni, i suoi profitti devono essere positivi, e ciò significa che deve operare sulla curva del costo medio, o al di sopra. Ma se intende offrire un servizio a tutti coloro che sono disposti a pagarlo, deve anche tener conto della curva di domanda. Per soddisfare queste condizioni, la combinazione di prezzo e output per un'impresa regolamentata deve corrispondere al punto **($\mathbf{p_{AC}}$; $\mathbf{q_{AC}}$)**. In corrispondenza di questo punto l'impresa vende il suo prodotto al costo medio di produzione, riuscendo così a coprire i costi, ma producendo un livello di output inferiore a quello efficiente.

Questa soluzione viene spesso adottata nel caso del monopolista naturale come politica dei prezzi sub-ottimale, o **second best**: il Governo stabilisce i prezzi che l'impresa fornitrice del servizio pubblico può imporre, i quali, teoricamente, dovrebbero essere tali da permettere all'impresa di pareggiare i costi, cioè di produrre in corrispondenza di un punto in cui il prezzo è uguale al costo medio. Il problema che il Governo deve risolvere è la determinazione dei costi effettivi dell'impresa: di solito, un'apposita commissione è incaricata di determinarli e di fissare un prezzo che permetta di coprirli.

L'altra soluzione del problema del monopolio naturale che sia lo Stato stesso a gestirlo. La soluzione ideale consiste in questo caso nel gestire il servizio secondo il criterio dell'uguaglianza tra prezzo e costo marginale, fornendo un sussidio all'impresa. Questo è il sistema adottato di solito dai servizi locali di trasporto pubblico. Questi sussidi, di per sé, possono anche non dipendere dall'inefficienza di questi servizi, ma piuttosto dai notevoli costi fissi ad essi associati.

DISCRIMINAZIONE DEI PREZZI

Il monopolio produce in corrispondenza di un livello inefficiente di output, poiché lo riduce fino al punto in cui i consumatori sono disposti ad acquistarne una unità addizionale ad un prezzo superiore al suo costo di produzione. Il monopolista non intende produrre tale output **addizionale** perché in questo modo farebbe diminuire il prezzo di **tutto** l'output.
Ma, se il monopolista potesse vendere diverse unità di output a prezzi diversi, le cose cambierebbero: questa pratica è chiamata **discriminazione dei prezzi**. Generalmente, gli economisti distinguono tre tipi di discriminazione dei prezzi.

DISCRIMINAZIONE DEI PREZZI DI PRIMO GRADO. La **discriminazione dei prezzi di primo grado** descrive una situazione in cui il monopolista vende unità diverse di output a prezzi diversi e questi prezzi possono essere diversi per ogni consumatore. Questa situazione viene, a volte, definita **discriminazione perfetta dei prezzi**. In questo caso, ogni unità è venduta a quel consumatore che le attribuisce il valore più alto, al massimo prezzo al quale costui è disposto ad acquistarlo. Di conseguenza, non si produce surplus del consumatore, poiché tutto il surplus va al produttore. Ne deriva che la discriminazione perfetta dei prezzi determina un livello efficiente dell'output. Per dimostrarlo, si noti che un monopolista che pratica una discriminazione perfetta dei prezzi deve produrre un livello di output in corrispondenza del quale il prezzo sia uguale al costo marginale: se, infatti, il prezzo fosse maggiore del costo marginale, ciò significherebbe che qualcuno è disposto a pagare più di quanto costi produrre un'unità addizionale di output, e quindi perché mai non si dovrebbe produrla e venderla a costui?
Una perfetta discriminazione dei prezzi da parte di un monopolista determina un'efficienza paretiana esattamente come nel caso di un mercato concorrenziale: la somma del surplus del produttore e del consumatore viene massimizzata. Tuttavia, in questo caso, sarà il solo produttore ad ottenere tutto il surplus prodotto.
La discriminazione perfetta dei prezzi è un'astrazione, ma è interessante dal punto di vista teorico, perché ci fornisce l'esempio di un meccanismo di allocazione di risorse, diverso da quello di un mercato concorrenziale, in cui si ha egualmente efficienza paretiana.

L'esempio più adatto potrebbe forse essere quello di un medico di una piccola città, in grado di far pagare le sue prestazioni ai pazienti secondo le loro possibilità.

DISCRIMINAZIONE DEI PREZZI DI SECONDO GRADO. La **discriminazione dei prezzi di secondo grado** descrive una situazione in cui il monopolista vende unità diverse di output a prezzi diversi, ma ogni consumatore che acquisti la stessa quantità del bene paga lo stesso prezzo. Questa situazione viene definita anche **determinazione non-lineare del prezzo**, poiché il prezzo unitario dell'output non è costante, ma dipende dalla quantità acquistata. Questo tipo di discriminazione dei prezzi è praticata, di solito, nei servizi pubblici: per esempio, il prezzo unitario dell'elettricità dipende da quanta se ne acquista. In altre industrie, sono a volte previsti sconti per acquisti di grandi quantità.

Vediamo, ora, come un'impresa determina i prezzi in modo non-lineare. Supponiamo che un monopolista sottoposto a regolamentazione tenti di determinare un prezzo che massimizzi il surplus totale dei consumatori, con il vincolo, però, che siano coperti i costi. Ne deriva che il consumatore che acquista la quantità **maggiore** si trova di fronte ad un prezzo dell'ultima unità acquistata uguale al costo marginale.

Supponiamo, al contrario, che il prezzo per il consumatore che acquista la quantità maggiore sia $\mathbf{p}^*$, superiore al costo marginale, e che egli acquisti $\mathbf{q}^*$ unità di output. Consideriamo ora che cosa accadrebbe se si riducesse a $\mathbf{p}'$ il prezzo dell'unità di output successiva a $\mathbf{q}^*$, dove $\mathbf{p}'$ è minore di $\mathbf{p}^*$ e maggiore del costo marginale. Tale consumatore acquisterebbe questa unità addizionale, poiché il suo prezzo è ora inferiore, ottenendone un vantaggio, e il venditore venderebbe questa unità addizionale ad un prezzo superiore al costo marginale, ottenendo anch'egli un vantaggio. Poiché ciò può essere fatto ogni volta che il prezzo per il consumatore che acquista la maggiore quantità superi il costo marginale, una politica di prezzo Pareto-efficiente richiede che tale consumatore paghi un prezzo uguale al costo marginale.

DISCRIMINAZIONE DEI PREZZI DI TERZO GRADO. La **discriminazione dei prezzi di terzo grado** descrive una situazione in cui il monopolista vende l'output a persone diverse a prezzi diversi, ma ciascuna unità di output è venduta allo stesso consumatore allo stesso prezzo. Potremmo fare l'esempio degli sconti al cinema concessi agli studenti oppure degli sconti di cui godono nelle farmacie gli anziani.

Vediamo come fa il monopolista a decidere quali sono i prezzi ottimi in ciascun mercato.

Supponiamo che il monopolista sia in grado di identificare due gruppi di consumatori e possa vendere a ciascuno uno stesso bene ad un prezzo diverso. Supponiamo anche che i consumatori di ciascun mercato non siano in grado di rivendere il bene. Siano $\mathbf{p_1(q_1)}$ e $\mathbf{p_2(q_2)}$ le curve di domanda inversa rispettivamente del **gruppo 1** e del **gruppo 2**, e sia $\mathbf{c(q_1 + q_2)}$ il costo di produzione dell'output.

Il problema di massimizzazione del profitto per il monopolista sarà:

$$\boxed{\mathbf{Max}\ p_1(q_1) * q_1 + p_2(q_2) * q_2 - c(q_1 + q_2)}\ .$$

La soluzione ottima sarà:

$$\boxed{\begin{array}{l} MR_1(q_1) = MC(q_1 + q_2) \\ MR_2(q_2) = MC(q_1 + q_2) \end{array}}\ .$$

Vale a dire, il costo marginale deve essere uguale al ricavo marginale in **ciascun** mercato. Se il ricavo marginale del **mercato 1** superasse il costo marginale, in questo mercato sarebbe conveniente espandere l'output, ed analogamente per il **mercato 2**. Poiché il costo marginale è uguale in tutti e due i mercati, lo stesso deve valere per il ricavo marginale. Quindi, la vendita di un bene nel **mercato 1** o nel **mercato 2** dovrebbe comportare un uguale aumento del ricavo.
Si può utilizzare per esprimere il ricavo marginale la formula in termini di elasticità e scrivere le condizioni di massimizzazione del profitto come:

$$\boxed{\begin{array}{l} p_1(q_1) * \left(1 - 1/|\varepsilon_1(q_1)|\right) = MC(q_1 + q_2) \\ p_2(q_2) * \left(1 - 1/|\varepsilon_2(q_2)|\right) = MC(q_1 + q_2) \end{array}}$$

dove $\varepsilon_1(q_1)$ e $\varepsilon_2(q_2)$ rappresentano le elasticità della domanda nei rispettivi mercati, valutate in corrispondenza dei livelli di output che massimizzano il profitto.
Notiamo, ora, quanto segue: se $p_1 > p_2$, allora:

$$1 - 1/|\varepsilon_1(q_1)| < 1 - 1/|\varepsilon_2(q_2)|$$

che a sua volta implica che:

$$1/|\varepsilon_1(q_1)| > 1/|\varepsilon_2(q_2)|.$$

Questo significa che:

$$\boxed{|\varepsilon_2(q_2)| > |\varepsilon_1(q_1)|}\ .$$

Quindi, nel mercato in cui il prezzo è più elevato, l'elasticità della domanda sarà più bassa. Ciò è evidente se si pensa che una domanda elastica è sensibile al prezzo. Un'impresa che discrimina i prezzi praticherà un prezzo più basso per il gruppo di consumatori sensibile al prezzo e uno più alto per quello relativamente insensibile al prezzo. In questo modo massimizzerà i profitti totali.
Abbiamo detto che gli sconti per gli anziani e per gli studenti costituiscono un buon esempio di discriminazione dei prezzi di terzo grado. Possiamo, ora, capire perché questi gruppi godano di facilitazioni. È probabile che gli studenti e gli anziani siano più sensibili al prezzo che il consumatore medio, e che quindi la loro domanda sia più elastica in corrispondenza dei prezzi rilevanti. Quindi, un'impresa che massimizzi il profitto discriminerà i prezzi in loro favore.

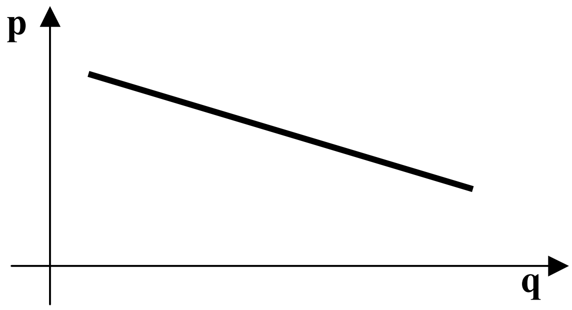
LA CONCORRENZA MONOPOLISTICA O IMPERFETTA

DEFINIZIONE E CARATTERISTICHE. Nella realtà possono determinarsi situazioni intermedie fra la concorrenza perfetta e il monopolio, come, per l'appunto, la **concorrenza monopolistica** (o **imperfetta**). Essa è una forma di mercato più vicina alla concorrenza perfetta che al monopolio, ed ha le seguenti caratteristiche:

- esistenza di **numerose piccole imprese**;
- esistenza di **barriere all'entrata** nel breve periodo;
- esistenza di un **prodotto differenziato**: ogni impresa cerca di differenziare il proprio prodotto da quello delle altre imprese presenti nel mercato. Più la sua differenziazione è efficace, maggiore sarà il suo potere di monopolio - cioè più anelastica sarà la curva di domanda del suo prodotto;
- grande estensione del fenomeno della **pubblicità**, attraverso cui ciascuna impresa cerca di convincere i consumatori che il suo prodotto è migliore di quello delle altre.

ESEMPI DI CONCORRENZA MONOPOLISTICA. Tipici esempi di concorrenza monopolistica sono il mercato dei panettoni e quello dei detersivi. Esistono diversi tipi di panettone, tutti simili, ma ognuno di essi ha delle peculiarità. In particolare, alcuni hanno un nome e una tradizione per cui molte persone sono disposte a pagare per essi un prezzo più elevato che non per altre marche. Un discorso analogo vale per i detersivi, di cui esistono diverse marche. Essi sono simili, ma non identici, per cui molte persone sono disposte a pagare per un certo detersivo, che ritengono di qualità superiore, un prezzo più alto che non per un altro.

LA CURVA DI DOMANDA PER L'IMPRESA. Innanzitutto, diciamo che la curva non è una retta orizzontale come in un mercato di concorrenza perfetta, ma ha una certa inclinazione: ciò significa che l'impresa ha qualche influenza sul prezzo. Se essa aumenta il prezzo, la quantità domandata si riduce notevolmente, perché vi è la possibilità di sostituire il bene con un altro, ma non diviene uguale a zero, dato che vi saranno sempre persone disposte ad acquistare quella merce che è in possesso di un requisito che la differenzia dalle merci prodotte dalle altre imprese. Quindi, la **curva di domanda per l'impresa**, pur non essendo orizzontale, cioè infinitamente elastica, è sempre molto elastica ed è, quindi, più appiattita rispetto alla retta che rappresenta, in un regime di monopolio, la domanda per l'impresa. Abbiamo:



CONSIDERAZIONI SULLA CURVA DI DOMANDA PER L'IMPRESA. Quanto più la merce prodotta dall'impresa è «diversa» da quelle prodotte dalle altre, tanto maggiore sarà il potere monopolistico dell'impresa, cioè la possibilità da parte

di essa di aumentare il prezzo di vendita senza determinare una forte riduzione della quantità domandata; e quindi la curva di domanda dell'impresa sarà più ripida, simile a quella del caso del monopolio.
Quando, invece, le merci prodotte dalle diverse imprese sono assai simili, un piccolo aumento del prezzo da parte di un'impresa determina una forte diminuzione della domanda di merce della stessa, per cui la curva di domanda della singola impresa è quasi orizzontale, essendo tale situazione simile a quella della concorrenza perfetta. Vi sono, infine, altri elementi, oltre la specificità o la qualità del prodotto, che possono determinare una situazione di concorrenza imperfetta. Essi sono: la distanza dal negozio di vendita dalla casa del compratore, l'aspetto esteriore del negozio e così via. Spesso un individuo è disposto a pagare la merce che compra in un negozio vicino alla propria abitazione più di quanto la pagherebbe in un negozio più lontano.

L'EQUILIBRIO DELL'IMPRESA. Anche in concorrenza monopolistica l'impresa cercherà di massimizzare il profitto.

Indicando con $\mathbf{R_T}$ il ricavo totale, con $\mathbf{C_T}$ il costo totale e con $\boldsymbol{\pi}$ il profitto, abbiamo sempre che:

$$\boxed{\boldsymbol{\pi = R_T - C_T}}$$

e dal punto di vista matematico, affinché $\boldsymbol{\pi}$ sia massimo dev'essere:

$$\partial\pi / \partial q = 0.$$

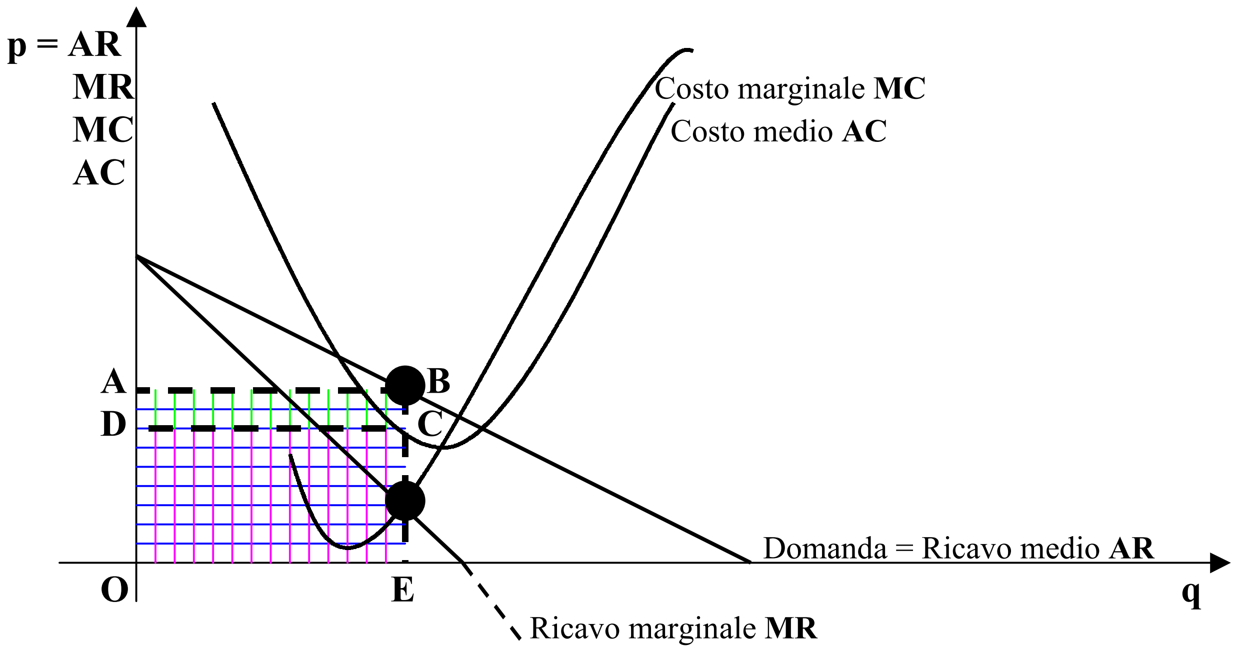
In questo caso, abbiamo che:

$$\partial\pi / \partial q = \partial R_T / \partial q - \partial C_T / \partial q = 0$$

verificata se e solo se:

$$\boxed{\partial R_T / \partial q = \partial C_T / \partial q}\ .$$

Quindi, l'impresa, anche in un regime di concorrenza monopolistica, ha il **massimo profitto quando il ricavo marginale MR è uguale al costo marginale MC**.
L'equilibrio dell'impresa può essere rappresentato mediante il seguente grafico, simile a quello relativo all'impresa monopolistica, anche se la curva di domanda è, per le ragioni esaminate, meno ripida:



Abbiamo detto che l’impresa produrrà la quantità in cui il ricavo marginale **MR** è uguale al costo marginale **MC**, perché è in questo punto che realizza il massimo profitto; quindi produrrà una quantità pari alla distanza **OE**.

Per un quantità pari a **OE**, sulla curva di domanda per l’impresa, corrisponde un prezzo pari alla distanza **OA**. Quindi, l’impresa produrrà (e venderà) la quantità **OE** al prezzo **OA**. L’area racchiusa nel rettangolo **blu** rappresenta il ricavo totale $\mathbf{R_T}$.

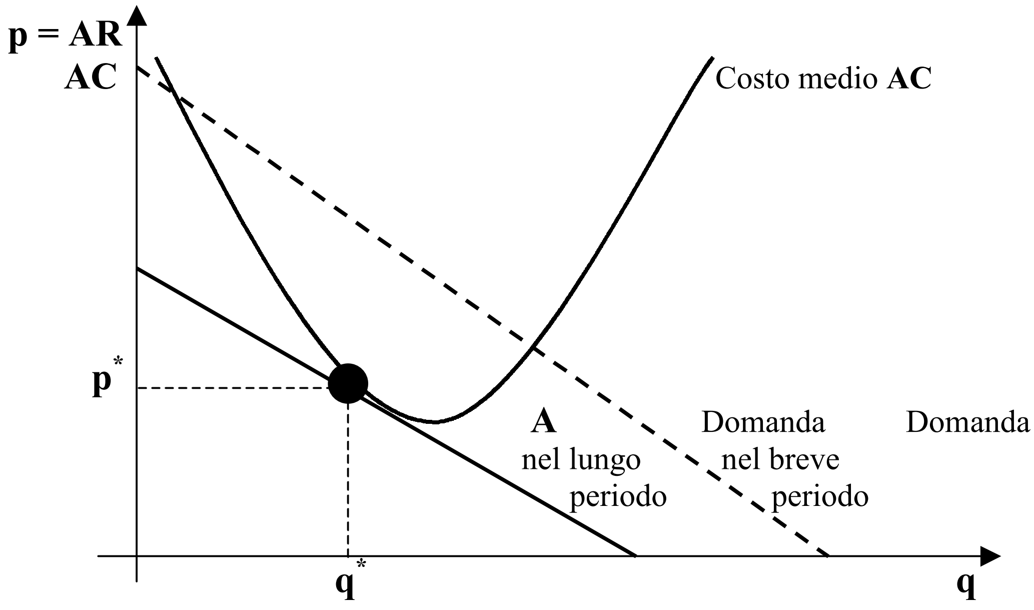
Per una quantità prodotta pari a **OE** corrisponde un costo medio pari alla distanza **OD**, per cui l’area del rettangolo **fucsia** e **blu** rappresenta il costo totale $\mathbf{C_T}$.

Per una quantità pari a **OE**, la distanza verticale **CB** tra la curva di domanda e la curva del costo medio, è la differenza tra il prezzo e il costo medio, cioè il profitto medio o unitario. Esso è evidentemente un extraprofitto, rappresentato dell’area del rettangolo **verde** e **blu**.

Questa è la situazione che si viene a determinare nel **breve periodo** ed è solo nel breve periodo che l’impresa può realizzare extraprofitti.
Nel **lungo periodo**, infatti, non esistono vincoli che impediscano a nuove imprese di entrare in un mercato di concorrenza monopolistica. Quindi, in corrispondenza di ciascun prezzo, il numero di unità di output che l'impresa vende diminuirà all'aumentare delle imprese che entrano nel mercato. Inoltre, la curva di domanda diventerà più elastica, se più imprese producono prodotti sempre più simili. In altri termini, l'entrata di nuove imprese nel mercato sposterà verso sinistra le curve di domanda delle imprese già presenti e le renderà più piatte.

Se continuano ad entrare imprese nel mercato, ritenendolo ancora profittevole, possiamo descrivere l'equilibrio del mercato in questo modo:
1. ogni impresa vende in corrispondenza di una combinazione di prezzo e di output che si trova sulla curva di domanda;
2. ogni impresa, data la sua curva di domanda, massimizza il suo profitto;
3. l'entrata tende ad annullare il profitto di ogni impresa.

Abbiamo:



Per il **punto 1** la combinazione di prezzo e output deve corrispondere a qualche punto della curva di domanda, e per il **punto 3** tale combinazione deve essere anche sulla curva del costo medio. Quindi, l'impresa deve produrre in corrispondenza di un punto che si trovi su entrambe le curve. Chiediamoci se sia possibile che la curva di domanda intersechi quella del costo medio. Diciamo subito che non è possibile, perché altrimenti vi sarebbe qualche punto sulla curva di domanda al di sopra della curva del costo medio, ed in questo caso si avrebbero profitti positivi; giacché se $\mathbf{p > c(q)/q}$, $\mathbf{p * q - c(q) > 0}$. Per il punto 2, il punto in cui il profitto è nullo è anche di massimo profitto.

Ciò può essere considerato anche da un altro punto di vista. Vediamo cosa accade se l'impresa rappresentata nel grafico di sopra impone un prezzo qualsiasi, diverso da quello che le permette di coprire i costi. In corrispondenza di questo prezzo, più alto o più basso, l'impresa subirà delle perdite, mentre in corrispondenza del prezzo che copre i costi, il profitto è nullo. Questo prezzo è dunque quello che massimizza i profitti.

Ci sono due osservazioni che vale la pena di fare a proposito dell'equilibrio di concorrenza monopolistica:
- In primo luogo, anche se il profitto è nullo, la situazione non è Pareto-efficiente. Il profitto non ha nulla a che fare con il problema dell'efficienza: se il prezzo è

maggiore del costo marginale, si può aumentare l'output in base ad un criterio di efficienza.

- In secondo luogo, è chiaro che l'impresa produrrà, normalmente, una quantità di output inferiore a quella che corrisponde alla minimizzazione del costo medio. Ciò è stato a volte interpretato come «eccesso di capacità» dovuto alla concorrenza monopolistica. Se vi fossero meno imprese, ciascuna potrebbe produrre su una scala operativa più efficiente, con un vantaggio per i consumatori. Tuttavia, se vi fossero meno imprese ci sarebbe anche una minore varietà di prodotti, e questo andrebbe a svantaggio dei consumatori. È difficile dire quale effetto prevalga.

L’OLIGOPOLIO

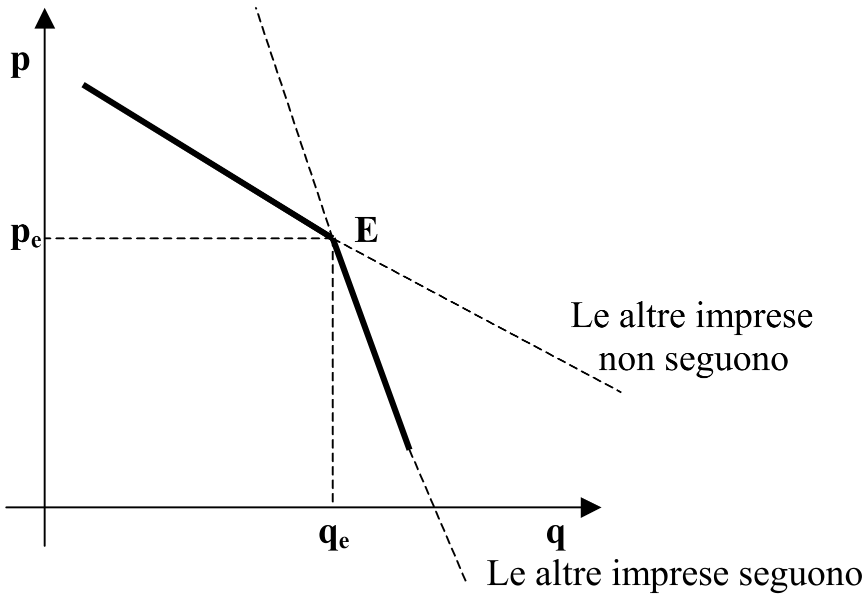
DISCORSO GENERALE. L’**oligopolio** è una forma di mercato caratterizzata dal fatto che la produzione di una merce è concentrata nelle mani di **pochi produttori**. Si pensi all’industria delle automobili in Germania o negli Stati Uniti: l’intera produzione (o il 90% di essa) è fornita da tre o quattro imprese e ognuna di queste ha il **potere di influenzare il prezzo in una certa misura**.
Quando le imprese producono lo stesso prodotto si parla di **oligopolio concentrato**; quando, invece, producono merci diverse si ha l’**oligopolio differenziato**. Quest’ultimo è il caso del mercato automobilistico, dato che le automobili prodotte dalle diverse imprese differiscono fra loro per qualità, estetica, ecc.
Un caso particolare di oligopolio è quello del **duopolio**, in cui una merce è prodotta da due imprese soltanto.
Se ci chiediamo come si determina il prezzo del prodotto in regime di oligopolio o di duopolio, dobbiamo convenire che non esiste una risposta univoca, come avviene, ad esempio, nel caso della concorrenza perfetta.
Possiamo dire, invece, con sicurezza che le imprese reagiscono continuamente alle «mosse» poste in essere dalle altre, come in un gioco.
In regime di oligopolio o di duopolio le imprese possono, ad esempio, farsi la guerra reciprocamente; oppure, mettersi d'accordo in modo da agire come se fossero un'unica impresa per dividersi il mercato. Parleremo, in questo caso, di **gioco cooperativo** o di **mercato collusivo**. In linea di massima, le imprese oligopolistiche, se si mettono d'accordo, fisseranno un prezzo abbastanza alto che garantisca loro elevati margini di profitto. Però non lo fisseranno troppo alto, altrimenti altre imprese, attratte dai profitti elevati, saranno indotte ad entrare nel mercato e a produrre quei beni.
Ma non sempre è facile per altre imprese introdursi nel settore, perché la produzione dei beni offerti in regime di oligopolio spesso richiede consistenti mezzi finanziari ed esperienza tecnica. Si pensi al settore delle automobili: non è che chiunque possa mettersi facilmente a produrre tali beni perché occorrono ingenti capitali per creare o acquistare gli strumenti di produzione e di distribuzione dei beni e non è facile ottenere tali capitali emettendo azioni o obbligazioni o ricevendo prestiti dalle banche: vi sono, quindi, **barriere di carattere finanziario**. Però, ad esempio, una grande impresa che già produce motociclette forse potrebbe entrare nel settore di produzione delle automobili senza grandi difficoltà. Ma, anche in questo caso vi sono **barriere tecnologiche** perché le imprese che già vi operano hanno una maggiore efficienza del personale e delle maestranze, conoscenza dei canali di vendita, disponibilità di tecnologie e di brevetti.
Inoltre, un mercato oligopolistico può essere caratterizzato dalla presenza di alcune grandi imprese e di un certo numero di piccole imprese. Le grandi imprese hanno il potere di fissare il prezzo, sono price leaders**, mentre le piccole imprese devono subirlo. L'**impresa leader** (che può essere un'unica impresa oppure alcune imprese che agiscono in accordo tra loro), se vuole evitare l'entrata di nuove imprese, non fisserà un prezzo troppo alto, ma fisserà un**

prezzo inferiore a quello che consentirebbe ai potenziali entranti di realizzare un profitto normale. Il prezzo così fissato prende il nome di **prezzo di esclusione**.
Se, invece, persegue l'obiettivo di eliminare delle imprese che già operano nel mercato, fisserà un prezzo inferiore al costo medio minimo delle imprese che vuole eliminare: questo è il **prezzo di eliminazione**. Ad ogni modo, l'impresa leader sceglie per prima, tenendo conto di quella che può essere la reazione delle altre imprese, dette **followers.** Parleremo, in questo caso, di **gioco sequenziale.**
Infine, le imprese possono essere delle grandi imprese delle quali, però, nessuna è leader. In questo caso, esse si trovano a dover cooperare contemporaneamente. Parleremo, allora, di **gioco simultaneo**. Ad ogni modo, non è possibile sapere a priori quale sarà il prezzo di vendita in regime di oligopolio o di duopolio.

L'IPOTESI DELLA CURVA DI DOMANDA AD ANGOLO. MODELLO DI SWEEZY.

Una teoria sulla determinazione del prezzo in regime di oligopolio è stata elaborata dall'economista americano **P. Sweezy** ed è nota come la teoria della **curva di domanda ad angolo**. Si tratta di una teoria che per la prima volta prende in considerazione l'incidenza della previsione di cosa faranno le altre imprese a seguito delle scelte di un'altra. Infatti, l'impresa oligopolistica ritiene che, se riducesse il prezzo, le altre imprese sue rivali seguirebbero il suo esempio e lo ridurrebbero anch'esse; pertanto essa non registrerebbe un incremento rilevante delle vendite perché non sottrarrebbe clienti alle sue rivali. Inoltre, l'impresa ritiene che, qualora essa aumentasse il prezzo, le rivali non farebbero altrettanto, per cui essa registrerebbe una forte diminuzione delle vendite. **Pertanto essa avrà convenienza a mantenere il prezzo immutato**.

Ciò significa che la **curva di domanda per l'impresa** ha un tale andamento:



Il punto **E** rappresenta la **posizione di equilibrio per l'impresa**, cui corrispondono il prezzo corrente $\mathbf{p_e}$ e la quantità $\mathbf{q_e}$ che l'impresa vende a quel prezzo.
La curva di domanda è elastica nel tratto superiore ad **E** e rigida nel tratto inferiore. Infatti, se l'impresa aumenta il prezzo al di sopra di $\mathbf{p_e}$, la quantità domandata all'impresa (cioè venduta dall'impresa) diminuisce fortemente. Viceversa, se l'impresa diminuisce il prezzo $\mathbf{p_e}$, anche di molto, la quantità venduta aumenta poco.

ATTENZIONE!!!

La teoria esaminata, tuttavia, ha un limite: essa spiega perché il prezzo, in regime di oligopolio, tende a rimanere immutato; però non spiega come si è determinato quel prezzo anziché un altro.

GIOCO SEQUENZIALE
MODELLO DI STACKELBERG
LA LEADERSHIP DI QUANTITA'

Sul mercato sono presenti due imprese che producono lo stesso bene (**duopolio**) e siamo nel caso di **leadership di quantità**. Quindi una delle due imprese, detta **leader di quantità** fisserà per prima la quantità da produrre e l'altra, detta **follower di quantità**, si comporterà di conseguenza, fissando a sua volta il suo livello di output. Questa situazione è rappresentata dal **modello di Stackelberg**, così chiamato in onore dell'economista tedesco che per primo studiò sistematicamente le iterazioni leader-follower ed è spesso impiegato per descrivere quelle industrie nelle quali esiste un'impresa dominante o leader naturale.

ESEMPIO. L'IBM è spesso considerata come l'impresa leader nell'industria dell'informatica. Si può osservare frequentemente che le imprese di piccole dimensioni nell'industria dei computer aspettano che l'IBM comunichi l'immissione sul mercato di nuovi prodotti per modificare poi, di conseguenza, le decisioni sui propri prodotti. Questa situazione potrebbe essere rappresentata come un'industria in cui l'IBM sia un'impresa leader nel senso di Stackelberg e le altre imprese dei follower.

Esaminiamo ora il modello in termini formali. Supponiamo che:

- l'impresa leader decida di produrre la quantità $\mathbf{q_1}$;
- l'impresa follower reagisce scegliendo di produrre la quantità $\mathbf{q_2}$;
- ciascuna delle due imprese sa che il prezzo di equilibrio nel mercato dipende dall'output totale prodotto. Impieghiamo, quindi, la funzione di domanda inversa, $\mathbf{p(q)}$, per rappresentare il prezzo di equilibrio in funzione dell'output dell'industria, $\mathbf{q = q_1 + q_2}$.

Se ci chiediamo quale livello di output dovrà scegliere l'impresa leader per rendere massimo il proprio profitto, dobbiamo convenire che la risposta dipende dal modo in cui l'impresa leader ritiene che l'impresa follower reagisca alle sue decisioni. Presumibilmente, l'impresa leader si aspetterà che l'impresa follower tenti di massimizzare il proprio profitto, date le decisioni dell'impresa leader. Quindi, per poter scegliere ragionevolmente il livello del proprio output, l'impresa leader deve prendere in considerazione il problema della massimizzazione del profitto dell'impresa follower.

Assumiamo, quindi, che l'impresa follower intenda massimizzare il proprio profitto, ossia:

$$\mathbf{Max}\ \overbrace{\underbrace{p(q_1+q_2)} * q_2}^{R_T} - \overbrace{c_2(q_2)}^{C_T} = \mathbf{Max}\ \pi_2$$

RICORDIAMO CHE:
Il prezzo p è funzione della quantità offerta da entrambe.

Il profitto π_2 dell'impresa follower dipende dal livello di output $\mathbf{q_1}$ scelto dall'impresa leader, che, dal punto di vista dell'impresa follower, è predeterminato, giacché l'impresa leader ha già effettuato le proprie scelte, e l'impresa follower le considera semplicemente come una costante.
L'impresa follower sceglierà il livello di output $\mathbf{q_2}$ in modo che il ricavo marginale **MR** uguagli il costo marginale **MC**:

$$\boxed{\mathbf{MR = p(q_1 + q_2) + (\Delta p/\Delta q_1) * q_1 = MC}}\ .$$

Se l'impresa follower aumenta la quantità prodotta $\mathbf{q_2}$, aumenterà anche i propri ricavi, vendendo un numero maggiore di unità di output al prezzo di mercato. Ma così facendo provocherà una riduzione $\mathbf{\Delta p}$ del prezzo, e di conseguenza una riduzione del profitto π_2 per tutte le unità che erano vendute in precedenza ad un prezzo più alto.

È importante osservare che la scelta che massimizza il profitto π_2 dell'impresa follower dipende dalla scelta dell'impresa leader. Scriviamo questa relazione:

$$\boxed{\mathbf{q_2 = f_2(q_1)}}\ .$$

L'espressione $\mathbf{f_2(q_1)}$, rappresenta il livello di output $\mathbf{q_2}$ cui è associato il massimo profitto π_2 dell'impresa follower come funzione della scelta dell'impresa leader. Questa funzione è detta **funzione di reazione** poiché descrive la reazione dell'impresa follower al livello di output $\mathbf{q_1}$ scelto dall'impresa leader.

Costruiamo una curva di reazione considerando il caso piuttosto semplice di una curva di domanda lineare. Scriviamo la funzione di domanda (inversa):

$$\mathbf{p(q_1 + q_2) = a - b * (q_1 + q_2)}$$

e assumiamo per semplicità che i costi siano nulli:

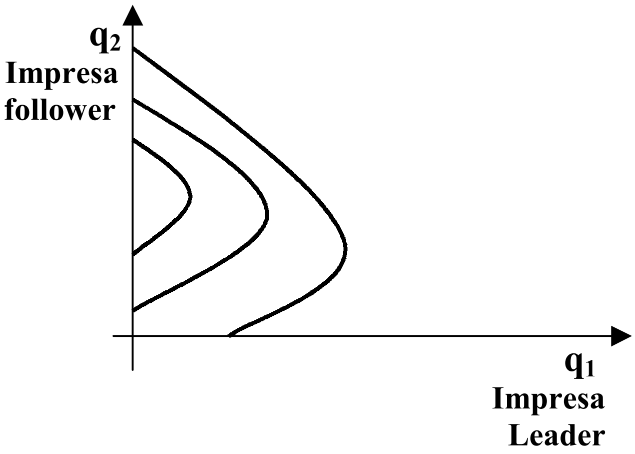
$$\mathbf{C_T = c_2(q_2) = 0}.$$

Allora, avremo:

$$\pi_2 = \mathbf{R_T - C_T = [a - b * (q_1 + q_2)] * q_2 - 0 =}$$

$$= \boxed{\mathbf{aq_2 - bq_1q_2 - bq_2^2}}\ .$$

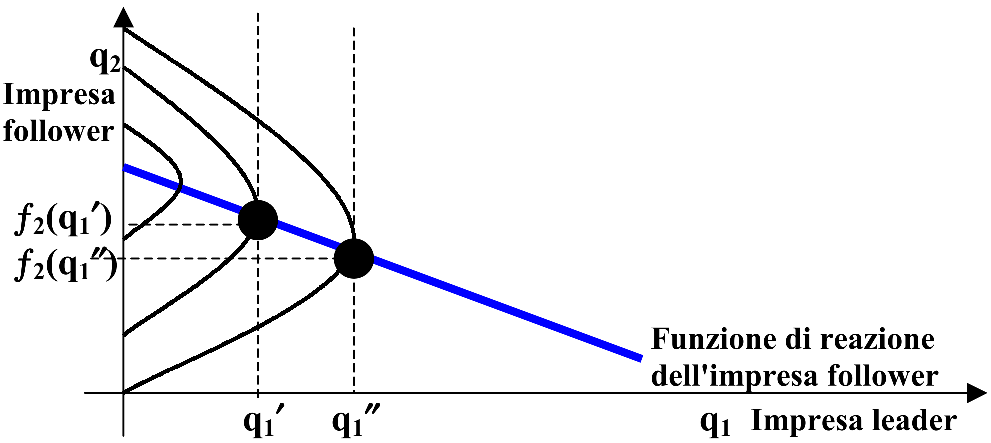
Possiamo impiegare quest'espressione per tracciare le **curve di isoprofitto**:



Tali curve rappresentano le combinazioni di $\mathbf{q_1}$ e $\mathbf{q_2}$ alle quali corrisponde per l'impresa follower un livello di profitto π_2 costante. Vale a dire, le curve di isoprofitto comprendono tutti i punti $\mathbf{(q_1;q_2)}$ che soddisfano la condizione:

$$aq_2 - bq_1q_2 - bq_2^2 = \bar{\pi}_2.$$

Notiamo che il profitto dell'impresa follower aumenta man mano che ci si sposta verso le curve di isoprofitto più a sinistra. Infatti, se fissiamo arbitrariamente il livello dell'output $\mathbf{q_2}$ dell'impresa follower, i suoi profitti aumenteranno al diminuire dell'output $\mathbf{q_1}$ dell'impresa leader. L'impresa follower realizzerebbe il massimo profitto possibile se fosse un monopolista, vale a dire, se l'impresa leader non producesse alcun output.
Per ciascuna decisione di output $\mathbf{q_1}$ dell'impresa leader, l'impresa follower sceglierà il proprio livello di output $\mathbf{q_2}$ in modo da massimizzare il profitto. Questo significa che per ciascuna scelta di $\mathbf{q_1}$ l'impresa follower sceglierà il valore di $\mathbf{q_2}$ situata sulla curva di isoprofitto più a sinistra. Tale punto soddisfa l'usuale condizione di tangenza: l'inclinazione della curva di isoprofitto deve essere verticale in corrispondenza della scelta ottima. Il luogo geometrico dei punti di tangenza corrisponde alla **curva di reazione dell'impresa follower**, $f_2(\mathbf{q_1})$.



Per esprimere formalmente questo risultato dobbiamo ricorrere al calcolo differenziale. Abbiamo:

$$\pi_2 = R_T - C_T = aq_2 - bq_1q_2 - bq_2^2$$

che corrisponde anche al ricavo totale $\mathbf{R_T}$, dato che abbiamo assunto che i costi $\mathbf{C_T}$ siano nulli.

Sappiamo che π_2 sarà massimo quando:

$$\partial\pi_2 / \partial q_2 = 0,$$

cioè quando il ricavo marginale **MR** sarà uguale al **MC**.
Abbiamo che:

$$MR = \partial R_T / \partial q_2 = a - bq_1 - 2bq_2$$

e:

$$MC = \partial C_T / \partial q_2 = 0.$$

Dovrà essere, quindi:

$$a - bq_1 - 2bq_2 = 0,$$

verificata se e solo se:

$$\boxed{q_2 = (a - bq_1) / 2b}.$$

Tale risultato esprime l'**equazione della funzione di reazione dell'impresa follower** ed ha come rappresentazione grafica una retta sulla quale il profitto π_2 è sempre massimo per l'impresa follower dato l'output $\mathbf{q_1}$ dell'impresa leader.

Abbiamo, quindi, visto come l'impresa follower determina il livello di output $\mathbf{q_2}$ data la scelta dell'impresa leader. Esaminiamo ora il problema di massimizzazione del profitto π_1 per l'impresa leader.
Presumibilmente, l'impresa leader si rende conto che le sue azioni influenzano la scelta di output dell'impresa follower. Questa relazione è riassunta dalla funzione di reazione $f_2(q_1)$. Quindi, nel determinare il livello di output, il leader dovrà considerare la reazione dell'impresa follower.

Il problema di massimizzazione del profitto π_1 per l'impresa leader diviene quindi:

$$\mathbf{Max}\ \overbrace{p(q_1 + q_2) * q_1}^{R_T} - \overbrace{c_1(q_1)}^{C_T} = \mathbf{Max}\ \pi_1$$

tale che:

$$q_2 = f_2(q_1).$$

Sostituendo la seconda espressione alla prima otteniamo:

$$\mathbf{Max}\ \ p[q_1 + f_2(q_1)] * q_1 - c_1(q_1).$$

Notiamo che l'impresa leader riconosce che, se sceglie di produrre la quantità q_1, l'output totale prodotto sarà $q_1 + f_2(q_1)$: la quantità prodotta dall'impresa leader più la quantità prodotta dall'impresa follower.

Se l'impresa leader intende modificare il livello dell'output, dovrà di nuovo tener conto dell'influenza esercitata sul follower.

Esaminiamo il problema nel caso di una curva di domanda lineare, come in precedenza. In quel caso la funzione di reazione è:

$$f_2(q_1) = q_2 = (a - bq_1) / 2b. \qquad \boxed{1}$$

Poiché abbiamo assunto che il costo marginale fosse nullo, il profitto π_1 dell'impresa leader sarà:

$$\pi_1 = p(q_1 + q_2) * q_1 = aq_1 - bq_1q_2 - bq_1^2. \qquad \boxed{2}$$

Ma la quantità q_2 prodotta dall'impresa follower, f_2, dipenderà dalla scelta dell'impresa leader, data la funzione di reazione $q_2 = f_2(q_1)$.

Sostituendo la $\boxed{1}$ nella $\boxed{2}$ avremo:

$$\pi_1 = aq_1 - bq_1 f_2(q_1) - bq_1^2 =$$

$$= aq_1 - bq_1^2 - bq_1 * (a - bq_1) / 2b =$$

$$= aq_1 - bq_1^2 - q_1 * (a - bq_1) / 2 =$$

$$= aq_1 - bq_1^2 - a/2 * q_1 + b/2 * q_1^2 =$$

$$= \boxed{a/2 * q_1 - b/2 * q_1^2}\,.$$

Quest'espressione che esprime il profitto π_1 corrisponde anche al ricavo totale $\mathbf{R_T}$, dato che abbiamo assunto il costo totale $\mathbf{C_T}$ nullo.

Quindi il ricavo marginale **MR** sarà:

$$\partial R_T/\partial q_1 = a/2 - b * q_1.$$

Ponendo il ricavo marginale **MR** uguale al costo marginale **MC**, che nel nostro esempio è nullo, dato che:

$$\partial C_T/\partial q_1 = 0,$$

otteniamo:

$$a/2 - b * q_1 = 0,$$

cioè:

$$\boxed{q_1^* = a/2b}\,.$$

Per ottenere il livello di output $\mathbf{q_2^*}$ dell'impresa follower, semplicemente sostituiamo $\mathbf{q_1^*}$ nella funzione di reazione:

$$q_2^* = (a - bq_1^*) / 2b =$$

$$= (a - b * a/2b) / 2b =$$

$$= a/2b - a/4b =$$

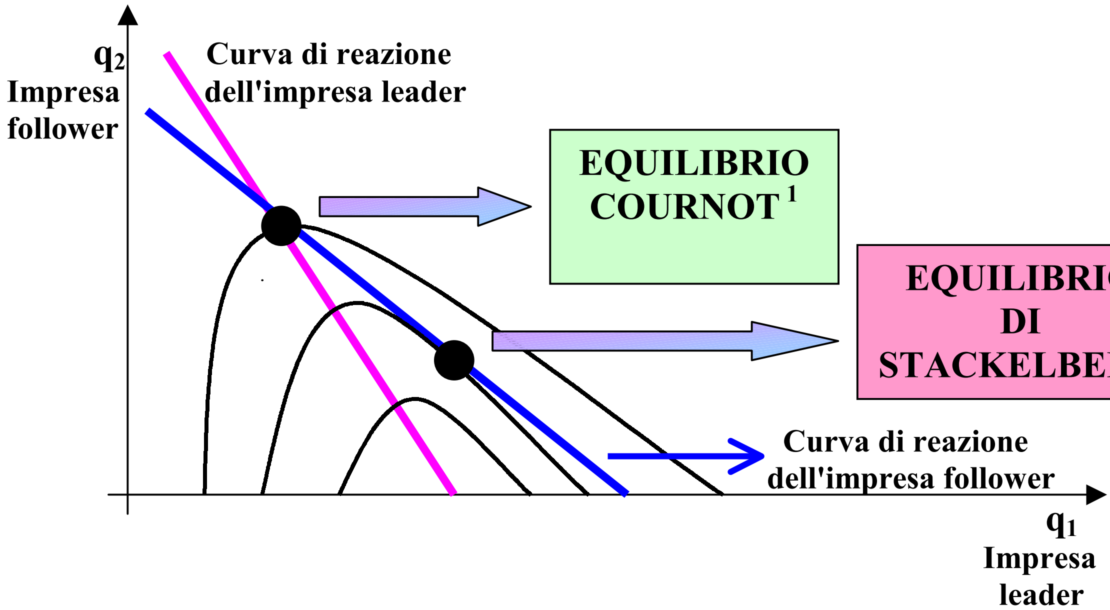
$$= \boxed{a/4b}\,.$$

Possiamo ottenere ora l'output totale dell'industria:

$$q_1^* + q_2^* = a/2b + a/4b =$$

$$= \boxed{3a/4b}\,.$$

La soluzione di Stackelberg può essere rappresentata graficamente per mezzo delle curve di isoprofitto:



In questo grafico sono rappresentate le curve di reazione di entrambe le imprese e le curve di isoprofitto dell'impresa leader.

Le curve di isoprofitto dell'impresa leader hanno la stessa forma di quelle dell'impresa follower, e sono semplicemente ruotate di 90°.

Profitti più elevati per l'impresa leader sono associati a curve di isoprofitto più basse, poiché il profitto $\boldsymbol{\pi_1}$ dell'impresa leader aumenta al diminuire dell'output $\mathbf{q_2}$ dell'impresa follower.

L'impresa follower sceglierà una quantità di output $\mathbf{q_2}$ che si trovi lungo la sua curva di reazione, $f_2(\mathbf{q_1})$.

Quindi, l'impresa leader sceglierà una combinazione di output che si trovi sulla sua curva di reazione e che sia associata al più elevato profitto $\boldsymbol{\pi_1}$ possibile. Ciò significa che verrà scelto un punto sulla curva di reazione che è tangente alla curva di isoprofitto più bassa. Tale punto corrisponde alla scelta ottima.

[1] *Dell'**equilibrio di Cournot** parleremo nelle pagine successive.*

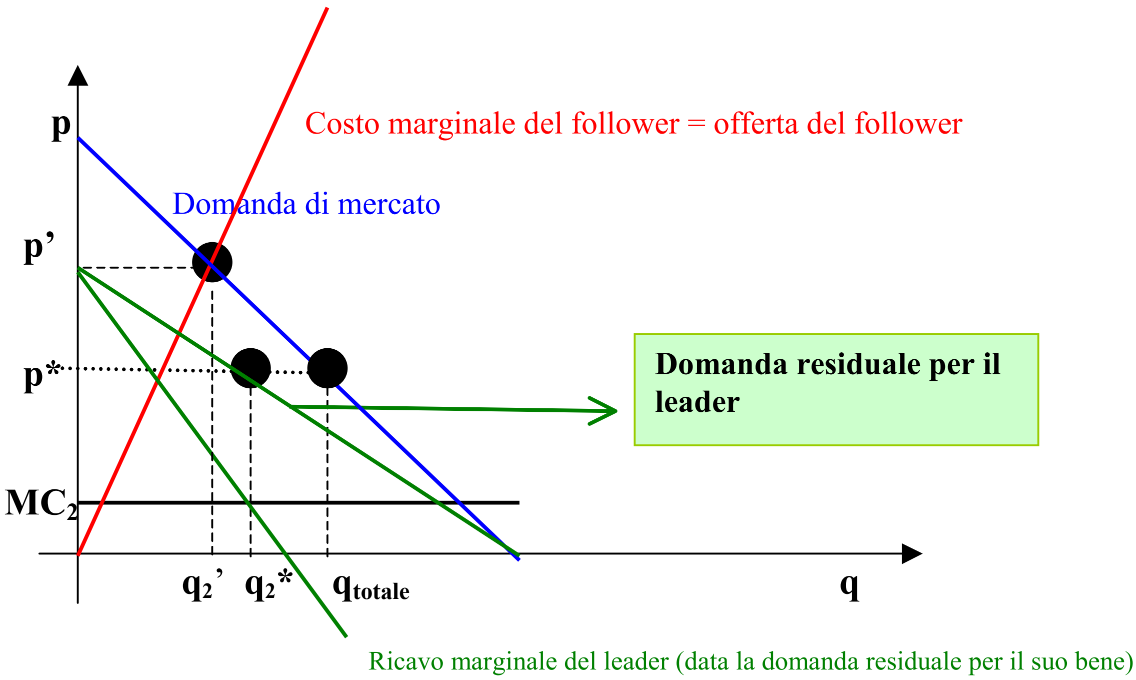
GIOCO SEQUENZIALE
MODELLO DI STACKELBERG
LA LEADERSHIP DI PREZZO

Se l'impresa leader invece di stabilire il livello della quantità offerta stabilisce il prezzo, il follower prenderà il prezzo come dato, comportandosi come un'impresa in concorrenza perfetta, è sceglierà la quantità offerta q_2^* in modo tale da massimizzare il profitto :

$$\textbf{Max } p * q_2 - c_2(q_2).$$

$$p = \partial C_2 / \partial q_2$$

Supponiamo che la retta rossa nel grafico sottostante rappresenti il costo marginale del follower. L'impresa Leader sa che se fissa il prezzo **p'** la quantità offerta dal follower sarà **q_2' ,** quindi la domanda del mercato sarà tutta assorbita dal follower e la domanda residuale per il leader (in verde) sarà nulla. Se il prezzo fissato dal leader è zero, l'offerta del follower è zero e tutta la domanda è per il leader.



Se l'impresa leader ha un costo marginale $\mathbf{MC_2}$ costante tenderà a scegliere la quantità tale che il costo marginale sia eguale al ricavo marginale (calcolato tenendo conto della domanda residuale che l'impresa leader si trova di fronte) e fisserà il prezzo p* tale che, tenuto conto della reazione del follower, l'impresa massimizzerà i profitti. La quantità totale offerta sul mercato sarà la somma delle offerte del leader e del follower ($\mathbf{q_{totale}}$).

GIOCO SIMULTANEO.
DETERMINAZIONE SIMULTANEA DELLA QUANTITÀ PRODOTTA.
MODELLO DI COURNOT.

Il modello leader-follower è necessariamente asimmetrico: un'impresa (quella leader) è in grado di effettuare le sue scelte prima dell'altra (quella follower). In alcune situazioni questa ipotesi non sembra appropriata. Per esempio, supponiamo che due imprese debbano determinare **simultaneamente** il livello dell'output. In questo caso, ciascuna impresa deve prevedere la scelta di produzione dell'altra. Data questa previsione, ciascuna impresa sceglierà la quantità di output che massimizza il profitto. Successivamente, cercheremo di individuare un equilibrio nelle previsioni, cioè una situazione in cui ciascuna delle due imprese veda confermate le proprie aspettative circa il comportamento dell'altra. Questo modello è noto come **modello di Cournot**, dal nome del matematico francese del diciannovesimo secolo che per primo ne esaminò le implicazioni.
Assumiamo che l'**impresa 1** si aspetti che l'**impresa 2** produca $\mathbf{q_2^e}$ unità di output, dove **e** indica l'output atteso (**e** = **e**xpected). Se l'**impresa 1** decide di produrre $\mathbf{q_1}$ unità di output, si aspetterà che la quantità totale prodotta sia :

$$\mathbf{q = q_1 + q_2^e},$$

cui corrisponde un prezzo di mercato:

$$\mathbf{p(q) = p(q_1 + q_2^e)}.$$

Il problema di massimizzazione del profitto per l'**impresa 1** è quindi:

$$\mathbf{Max\ p(q_1 + q_2^e) * q_1 - c_1(q_1)}.$$

Per qualsiasi livello atteso dell'output dell'**impresa 2**, $\mathbf{q_2^e}$, esiste una scelta ottima dell'output dell'**impresa 1**, $\mathbf{q_1}$. Scriviamo la relazione funzionale tra l'**output atteso** dell'**impresa 2** e la **scelta ottima** dell'**impresa 1** come:

$$\boxed{\mathbf{q_1 = \mathit{f}_1(q_2^e)}}.$$

Questa è la **funzione di reazione dell'impresa 1** che esprime, in questo caso, la scelta ottima dell'**impresa 1** come funzione delle sue **aspettative** circa la scelta dell'**impresa 2**.

In modo analogo, possiamo derivare la **funzione di reazione dell'impresa 2**:

$$\boxed{q_2 = f_2(q_1^e)}$$

che esprime la scelta ottima dell'**impresa 2** come funzione delle sue **aspettative** circa la scelta dell'**impresa 1**.

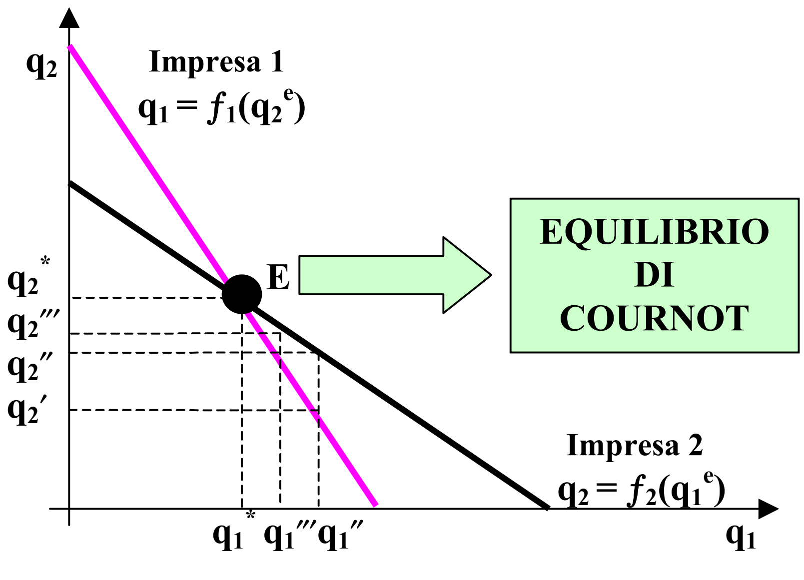
Ricordiamo ora che ciascuna impresa sceglie il proprio livello di output **assumendo** che il livello dell'output dell'altra sia q_1^e o q_2^e. Tuttavia, per valori di q_1^e o q_2^e scelti arbitrariamente, ciò non sarà vero. Vale a dire, il livello **ottimo** di output dell'**impresa 1**, q_1, sarà in generale diverso da quello **atteso** dall'**impresa 2**, q_1^e.

Cerchiamo ora la combinazione $(q_1^*;q_2^*)$ tale che il livello ottimo di output per l'**impresa 1**, assumendo che l'**impresa 2** produca q_2^*, è q_1^*, e il livello ottimo per l'**impresa 2**, posto che l'**impresa 1** produca q_1^*, è q_2^*. In altre parole, questa combinazione soddisfa:

$$\boxed{\begin{array}{c} q_1^* = f_1(q_2^*) \\ q_2^* = f_2(q_1^*) \end{array}}\ .$$

Questa combinazione dei livelli di output è nota come **equilibrio di Cournot**. In equilibrio di Cournot, ciascuna impresa massimizza il profitto, date le aspettative di ciascuna circa la scelta di output dell'altra. Inoltre, tali aspettative si realizzano in equilibrio: la scelta ottima di output di ciascuna impresa è uguale a quella che l'altra si aspetta. In equilibrio di Cournot, nessuna delle due imprese ritiene profittevole variare l'output quando viene a conoscenza della scelta effettiva dell'altra.

AGGIUSTAMENTO VERSO L'EQUILIBRIO. Vediamo graficamente cosa accade:



La soluzione di equilibrio è rappresentata dalla combinazione di output in corrispondenza del punto **E**, punto di intersezione delle due curve di reazione.

Infatti, in corrispondenza di quel punto, il livello di output di ciascuna impresa massimizza il profitto, data la scelta di output dell'altra.
Supponiamo che in un determinato momento l'**impresa 2** scelga di produrre la quantità q_2' e l'**impresa 1** scelga di produrre q_1''. In questo caso l'**impresa 2** non si trova sulla sua curva di reazione e, quindi, non massimizza il suo profitto. Allora, l'**impresa 2** decide di produrre q_2'', aspettandosi che l'**impresa 1** tenga costante il suo livello di output. Ma, invece, l'**impresa 1,** che non viene più a trovarsi sulla sua curva di reazione e, quindi, non riesce a massimizzare il suo profitto, deciderà di produrre q_1'''.
Vediamo che ogni impresa reagisce supponendo che l'altra non cambi il suo livello di produzione. Ma, notiamo anche che, una volta che una delle due imprese ha reagito, l'altra non si trova più sulla sua curva di reazione, non riuscendo, quindi, a massimizzare il suo profitto, e cambia nuovamente il suo livello di output. Le due imprese proseguono in questo modo fino al punto $\mathbf{E \equiv (q_1^*;\ q_2^*)}$, dove il livello di output di ciascuna impresa massimizza il profitto, data la scelta di output dell'altra.

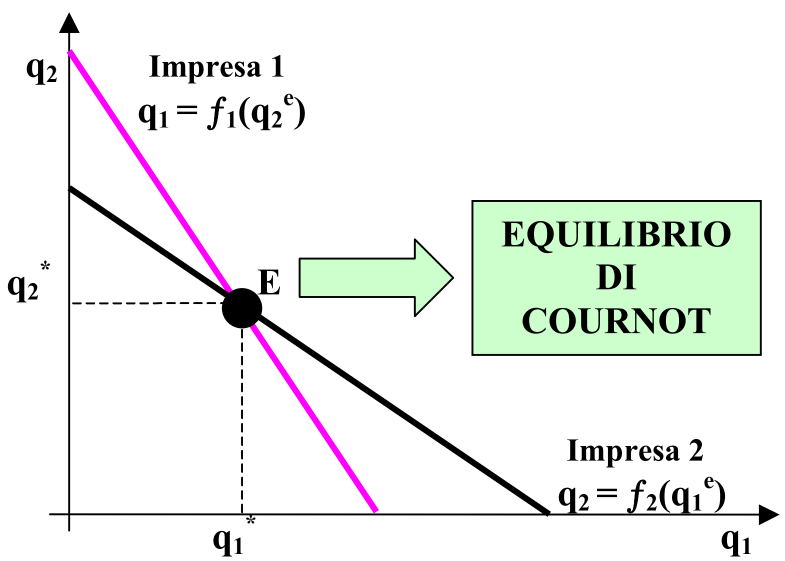
UN ESEMPIO DI EQUILIBRIO DI COURNOT. Consideriamo una curva di domanda lineare e costi marginali nulli. In questo caso, la **funzione di reazione per l'impresa 1** è:

$$\boxed{q_1 = (a - b * q_2^e) / 2b}\ .$$

Poiché nel nostro esempio le due imprese sono del tutto identiche, la **funzione di reazione dell'impresa 2** ha la stessa forma:

$$\boxed{q_2 = (a - b * q_1^e) / 2b}\ .$$

Rappresentiamo graficamente le due curve di reazione:



Nel punto **E** la scelta di ciascuna impresa massimizza il profitto, date le sue aspettative circa il comportamento dell'altra; aspettative confermate dagli effettivi comportamenti di ciascuna impresa.
Per calcolare l'equilibrio di Cournot, dobbiamo cercare il punto $(\mathbf{q_1; q_2})$ in corrispondenza del quale ciascuna impresa si comporta secondo le aspettative dell'altra. Se fissiamo:

$$\mathbf{q_1 = q_1^e}$$

e:

$$\mathbf{q_2 = q_2^e},$$

avremo le seguenti due equazioni a due incognite:

$$\mathbf{q_1 = (a - b * q_2) / 2b}$$

$$\mathbf{q_2 = (a - b * q_1) / 2b}.$$

Poiché nel nostro esempio le due imprese sono identiche, ciascuna produrrà in equilibrio la medesima quantità di output. Possiamo quindi sostituire $\mathbf{q_1 = q_2}$ nell'equazione precedente, ottenendo:

$$\mathbf{q_1 = (a - b * q_1) / 2b}.$$

Risolvendo per $\mathbf{q_1^*}$, otteniamo:

$$\mathbf{q_1^* = a/2b - q_1^*/2};$$

$$\mathbf{3/2 * q_1^* = a/2b};$$

$$\boxed{\mathbf{q_1^* = a/3b}}\ .$$

Poiché le due imprese sono identiche, ciò significa che è anche:

$$\boxed{\mathbf{q_2^* = a/3b}}$$

e quindi l'output totale dell'industria è:

$$\boxed{\mathbf{q_1^* + q_1^* = 2a/3b}}\ .$$

GIOCO SIMULTANEO.
DETERMINAZIONE SIMULTANEA DEI PREZZI.
CONCORRENZA ALLA BERTRAND.

In questo modello, noto come **concorrenza alla Bertrand**, dal nome del matematico francese che lo ideò, assumiamo che le imprese fissino i prezzi, e che il mercato determini la quantità venduta.
Quando un'impresa determina il prezzo, deve prevedere il prezzo scelto dall'altra impresa presente nell'industria. Dobbiamo, quindi, individuare i due prezzi in modo tale che ciascuna di esse massimizzi il profitto, data la scelta dell'altra impresa. Esaminiamo, ora, le caratteristiche dell'equilibrio alla Bertrand. Nel caso in cui le due imprese vendano un identico prodotto, ed è il caso che stiamo trattando, la struttura dell'equilibrio alla Bertrand è molto semplice. Esso coincide, infatti, con l'equilibrio concorrenziale, vale a dire, il prezzo è uguale al costo marginale.
Si noti, prima di tutto, che il prezzo non può essere inferiore al costo marginale, perché in questo caso l'impresa potrebbe realizzare maggiori profitti producendo una quantità minore di output.
Consideriamo dunque il caso in cui il prezzo è superiore al costo marginale. Supponiamo che entrambe le imprese vendano il proprio prodotto ad un prezzo $\mathbf{p}^*$, superiore al costo marginale.
Consideriamo l'**impresa 1**: se questa diminuisce il suo prezzo di una piccola quantità $\boldsymbol{\varepsilon}$, mentre l'altra mantiene il proprio fisso a $\mathbf{p}^*$, tutti i consumatori preferiranno acquistare dall'**impresa 1**. Diminuendo il prezzo di una quantità arbitrariamente piccola, l'**impresa 1** può quindi sottrarre tutti i clienti all'**impresa 2**.
Se l'**impresa 1** ritiene effettivamente che l'**impresa 2** stabilirà un prezzo $\mathbf{p}^*$ superiore al costo marginale, troverà sempre vantaggioso ridurre il proprio prezzo a $(\mathbf{p}^* - \boldsymbol{\varepsilon})$. Ma ciò vale anche per l'**impresa 2**. Quindi, un prezzo superiore al costo marginale non può essere un equilibrio: l'unico equilibrio possibile in questo caso è quello concorrenziale.
A prima vista questo risultato sembra paradossale: come può il prezzo essere concorrenziale se sul mercato sono presenti solo due imprese? Possiamo comprendere meglio il senso di questo risultato se pensiamo il modello alla Bertrand come una gara al ribasso. Supponiamo che un'impresa «faccia un'offerta» ai consumatori indicando un prezzo superiore al costo marginale. L'altra impresa può allora realizzare un profitto facendo un'offerta più bassa. Ne consegue che l'unico prezzo oltre il quale nessuna delle due imprese può ragionevolmente aspettarsi che l'altra scenda è quello uguale al costo marginale.
È stato spesso osservato che una gara al ribasso fra imprese che non possono colludere permette di conseguire prezzi molto più bassi di quelli che si otterrebbero con altri mezzi.

COLLUSIONE

Le imprese, oltre ad agire in modo indipendente l'una dall'altra, possono aver un comportamento collusivo e non conflittuale, determinando congiuntamente il loro output. Se la collusione è possibile, le imprese troveranno più conveniente scegliere l'output che massimizza il profitto totale dell'industria, dividendosi poi tra loro tale profitto. Quando le imprese si accordano e cercano di determinare prezzi e output in modo da rendere massimo il profitto totale dell'industria, si dice che formano un **sindacato industriale**. Esso può prendere la forma di **cartello** o di **trust**. Nel primo caso, ideato in Germania, ogni impresa mantiene la sua autonomia; nel secondo, ideato negli Stati Uniti, le imprese si danno un'unica direzione e spesso si fondono, diventando degli stabilimenti soggetti ad un unico centro direzionale. Quando il cartello prevede anche la creazione di un ufficio centrale che controlli e coordini l'attività delle imprese aderenti, si ha il **pool**.

Consideriamo, allora, due imprese: **l'impresa 1** e l'**impresa 2**. Per quanto abbiamo detto, le due imprese devono scegliere i livelli di output, $\mathbf{q_1}$ e $\mathbf{q_2}$, che massimizzano il profitto totale dell'industria:

$$\mathbf{Max}\ \overbrace{p(q_1 + q_2) * (q_1 + q_2)}^{R_T} - \overbrace{[c_1(q_1) + c_2(q_2)]}^{C_T} = \mathbf{Max}\ \pi$$

Le condizioni di ottimo di questo problema sono:

$$p(q_1^* + q_2^*) + \Delta p/\Delta q * (q_1^* + q_2^*) = MC_1(q_1^*);$$

$$p(q_1^* + q_2^*) + \Delta p/\Delta q * (q_1^* + q_2^*) = MC_2(q_2^*).$$

Le due condizioni evidenziano un fatto interessante. Quando l'**impresa 1** valuta la possibilità di aumentare il proprio output della quantità $\mathbf{\Delta q_1}$, tiene conto dei due consueti effetti:

- l'aumento dei profitti derivanti dalla vendita di una maggiore quantità di output;
- la riduzione dei profitti a causa della diminuzione del prezzo.

Ma per quanto riguarda questo secondo aspetto, essa ora deve tener conto dell'effetto della diminuzione sia sul proprio output, che su quello dell'altra impresa. Questo perché l'impresa è ora interessata a massimizzare il profitto totale dell'industria. Le condizioni di ottimo implicano che il ricavo marginale derivante da un'unità addizionale di output deve essere lo stesso, indipendentemente dall'impresa che la produce. Ne consegue che:

$$MC_1(q_1^*) = MC_2(q_2^*)$$

e quindi, in equilibrio, i due costi marginali sono uguali. Se una delle due imprese ha un vantaggio in termini di costo, per cui la sua curva del costo marginale si trova

sempre al di sotto di quella dell'altra impresa, nell'equilibrio corrispondente alla soluzione di cartello produrrà necessariamente una quantità maggiore di output.
In realtà, se si vuole formare un cartello, bisogna tener presente che i contraenti sono sempre tentati di non stare ai patti. Supponiamo, per esempio, che le due imprese producano la quantità di output che massimizza il profitto dell'industria, $(q_1^*; q_2^*)$, e che l'**impresa 1** valuti l'opportunità di produrre una quantità di output lievemente maggiore, Δq_1. Essa ne ricaverà un profitto marginale pari a:

$$\Delta\pi_1/\Delta q_1 = p(q_1^* + q_2^*) + \Delta p/\Delta q * q_1^* - MC_1(q_1^*). \qquad \boxed{a}$$

Abbiamo già visto che la condizione di ottimo per il cartello è:

$$p(q_1^* + q_2^*) + \Delta p/\Delta q * q_1^* + \Delta p/\Delta q * q_2^* - MC_1(q_1^*).$$

Con le modifiche opportune otteniamo:

$$p(q_1^* + q_2^*) + \Delta p/\Delta q * q_1^* - MC_1(q_1^*) = - \Delta p/\Delta q * q_2^* > 0. \qquad \boxed{b}$$

La disuguaglianza deriva dal fatto che $\Delta p/\Delta q$ è negativo, poiché è negativa l'inclinazione della curva di domanda di mercato.

Esaminando le equazioni $\boxed{a}$ e $\boxed{b}$ si nota che:

$$\Delta\pi_1/\Delta q_1 > 0.$$

Quindi, se l'**impresa 1** ritiene che l'**impresa 2** manterrà invariato il suo output, riterrà di poter accrescere i propri profitti aumentando la produzione.

Nella soluzione di cartello, le imprese si accordano per ridurre l'output, in modo da non «guastare» il mercato. Esse concordano sul fatto che, se una delle imprese dovesse aumentare il proprio output, ne risentirebbero i profitti di entrambe. Ma se ciascuna impresa si aspetta che l'altra mantenga invariata la propria quota di produzione, ciascuna impresa sarà tentata di aumentare i propri profitti producendo unilateralmente una quantità maggiore. In corrispondenza dei livelli di output che massimizzano i profitti congiunti, ciascuna impresa troverà sempre vantaggioso aumentare unilateralmente la quantità prodotta, se si aspetta che l'altra impresa mantenga fissa la sua.

Può accadere anche di peggio. Se l'**impresa 1** si aspetta che l'**impresa 2** mantenga costante il suo output, penserà di approffittarne aumentando il proprio. Ma se essa si aspetta, invece, che l'**impresa 2** intenda aumentare la propria produzione, essa vorrà, per prima, aumentare il proprio output e cercare, fin che può, di realizzare un profitto.

Quindi, affinché un cartello funzioni è necessario che le imprese trovino un modo di scoprire e punire chi non sta ai patti. Se le imprese non hanno la possibilità di controllare reciprocamente le quantità prodotte, la tentazione di non stare ai patti potrebbe anche portare alla dissoluzione del cartello.

Esaminiamo, ora, un cartello in un esempio in cui la curva di domanda è lineare:

$$\mathbf{p = a - b * (q_1 + q_2)}$$

e i costi siano nulli:

$$\mathbf{c_1(q_1) = c_2(q_2) = 0}.$$

La **<u>funzione del profitto congiunto</u>** sarà:

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{R_T - C_T = [a - b * (q_1 + q_2)] * (q_1 + q_2) - 0 =}$$

$$= \boxed{\mathbf{a * (q_1 + q_2) - b * (q_1 + q_2)^2}}\ .$$

Affinché tale funzione sia massima, dev'essere:

$$\partial\pi/\partial\mathbf{(q_1 + q_2) = 0},$$

cioè il ricavo marginale **MR** dev'essere uguale al **MC**.

Abbiamo che:

$$\mathbf{MR} = \partial\mathbf{R_T}/\partial\mathbf{(q_1 + q_2) = a - 2b * (q_1^* + q_2^*) =}$$

$$\mathbf{= a - 2b * q_1^* - 2b * q_2^*}$$

e:

$$\mathbf{MC} = \partial\mathbf{C_T}/\partial\mathbf{(q_1 + q_2) = 0}.$$

Allora, avremo che, affinché il profitto congiunto π sia massimo, dev'essere:

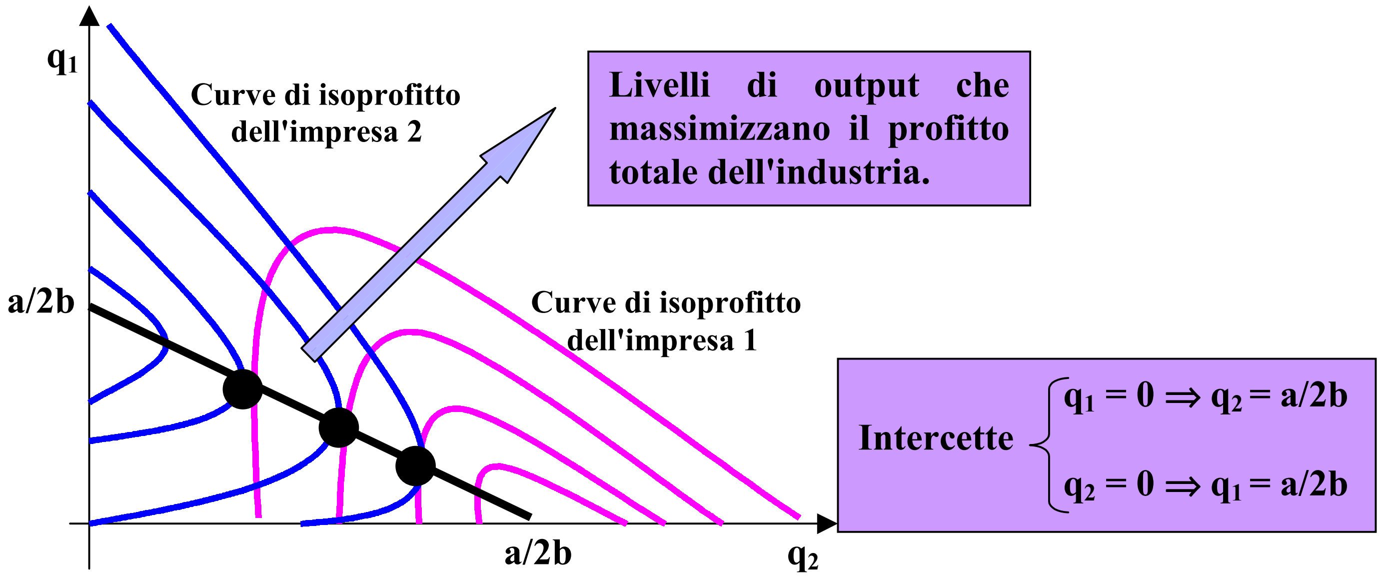
$$\boxed{\mathbf{a - 2b * q_1^* - 2b * q_2^* = 0}}$$

che implica:

$$\boxed{q_1^* + q_2^* = a/2b}$$

Poiché i costi marginali sono nulli, non ha alcuna importanza il modo in cui l'output viene suddiviso fra le imprese. Quello che viene determinato è solo il livello complessivo dell'output dell'industria.

Rappresentiamo questa soluzione graficamente:



Abbiamo riportato nel grafico le curve di isoprofitto di ciascuna impresa ed abbiamo evidenziato il luogo geometrico dei punti di tangenza, che corrisponde ad una retta. Questa retta è molto interessante, perché, dato che il cartello cerca di rendere massimo il profitto totale dell'industria, i profitti marginali derivanti da un eventuale aumento della produzione da parte di ciascuna impresa devono essere uguali – altrimenti sarebbe vantaggioso lasciare che l'impresa più profittevole produca una quantità maggiore. Questo a sua volta significa che le inclinazioni delle curve di isoprofitto devono essere uguali per ciascuna impresa, vale a dire, che le curve di isoprofitto devono essere tangenti. Quindi le combinazioni di output che rendono massimo il profitto totale dell'industria (la soluzione di cartello) sono quelle che si trovano sulla retta rappresentata nel grafico di sopra.

Questa figura mette anche in evidenza la tentazione a non rispettare le regole che caratterizza la soluzione di cartello. Consideriamo, per esempio, il punto in cui le due imprese si spartiscono equamente il mercato. Pensiamo a che cosa accadrebbe se l'**impresa 1** fosse convinta che l'**impresa 2** è decisa a mantenere costante il suo output. Se l'**impresa 1** aumentasse il proprio output mentre l'**impresa 2** lascia il suo costante, l'**impresa 1** si sposterebbe verso una curva di isoprofitto più bassa, aumentando il proprio profitto. La situazione è identica a quella che abbiamo prima rappresentato algebricamente. Se un'impresa ritiene che il livello dell'output dell'altra rimarrà costante, sarà tentata di aumentare il proprio e di realizzare in questo modo profitti più elevati.

ESEMPIO. Un esempio di cartello è rappresentato dall'OPEC, l'organizzazione dei Paesi esportatori di petrolio, i quali hanno tentato, negli anni '70 con successo, di fissare un prezzo alto per il petrolio. Esso però comportava l'obbligo per i Paesi membri di ridurre la produzione, altrimenti l'eccesso di offerta avrebbe fatto scendere il prezzo. Però in diversi momenti alcuni Paesi, come l'Ecuador, l'Iran e la Nigeria, si sono rifiutati di ridurre la produzione e negli anni '80 il prezzo del petrolio è diminuito.

CONFRONTO TRA LE SOLUZIONI. Abbiamo ora esaminato alcuni modelli di duopolio:

- **leadership di quantità** (Stackelberg);
- **determinazione simultanea delle quantità prodotte** (Cournot);
- **determinazione simultanea dei prezzi** (Bertrand);
- **collusione**.

Vediamo in che modo possiamo confrontarli.

In genere, la **collusione** ha come risultato la minore quantità di output totale e il prezzo più elevato.

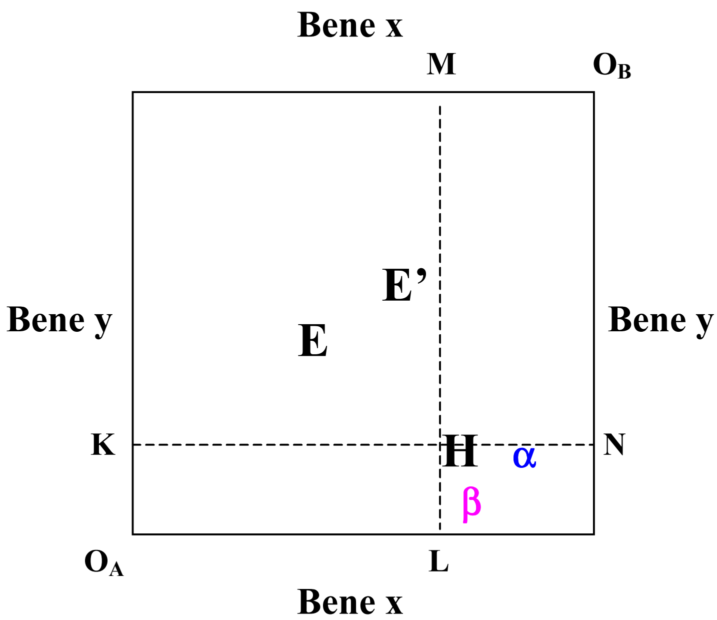
L'**equilibrio alla Bertrand** (l'equilibrio concorrenziale) determina la maggiore quantità di output e il prezzo più basso.

I risultati degli **altri modelli** si collocano fra questi due estremi.

Esiste, d'altra parte, una varietà di altri modelli. Per esempio, potremmo prendere in esame un modello con differenziazione dei prodotti in cui i due beni non fossero perfetti sostituti. Oppure potremmo esaminare un modello nel quale le imprese effettuano una sequenza di scelte in una serie di periodi successivi. In questo contesto, le scelte effettuate da un'impresa in un periodo influenzano le scelte dell'altra nel periodo successivo.
Abbiamo anche assunto che ciascuna impresa conoscesse la funzione di domanda e le funzioni di costo delle altre imprese presenti nell'industria, in realtà, queste funzioni non possono essere conosciute con certezza. Quando formula le sue decisioni, ciascuna impresa deve stimare la domanda e i costi delle imprese rivali. Tutti questi aspetti sono stati elaborati dagli economisti, ma i modelli che ne risultano risultano molto più complessi.

IL CRITERIO DI OTTIMO RELATIVO ALLO SCAMBIO: LA SCATOLA DI EDGEWORTH

Parliamo, in questo caso, di ottimo paretiano relativo allo scambio. Consideriamo due beni: il **bene x** e il **bene y**, che si ripartiscono fra due individui: l'**individuo A** e l'**individuo B**. Costruiamo un rettangolo il cui lato orizzontale rappresenta la quantità totale del **bene x** e il lato verticale la quantità totale del **bene y**. Tale rettangolo è chiamato **scatola di Edgeworth** dal nome dell'economista che lo ha usato per la prima volta.

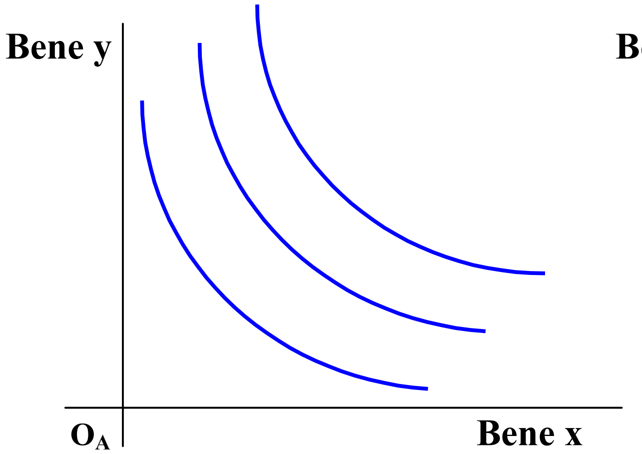


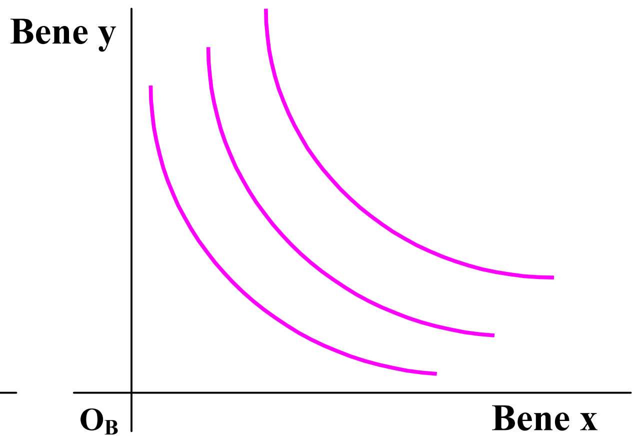
La dimensione della scatola dipende dalla disponibilità totale dei due beni presente sul mercato e ogni punto all'interno del rettangolo rappresenta una certa distribuzione dei due beni tra i due individui. Consideriamo un punto qualunque all'interno del rettangolo, ad esempio **H**, che rappresenta la **dotazione iniziale**. Questo vuol dire che:

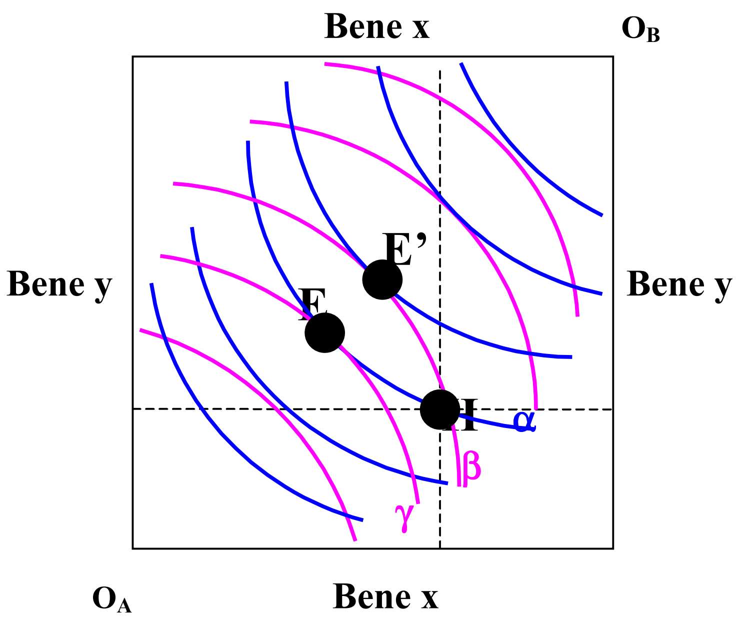
- l'**individuo A** ha una dotazione iniziale di $\mathbf{O_AL}$ unità del **bene x** e di $\mathbf{O_AK}$ unità del **bene y**;

- l'**individuo B** ha una dotazione iniziale di $\mathbf{O_BM}$ unità del **bene x** e di $\mathbf{O_BN}$ unità del **bene y**.

I gusti dei due individui sono rappresentati da due mappe di curve di indifferenza, quella dell'**individuo A** disegnata rispetto ai lati che hanno origine **O_A** e quella dell'**individuo B** disegnata rispetto ai lati che hanno origine **O_B**. per chiarezza, possiamo disegnare i due grafici dapprima separatamente e poi sovrapporli.

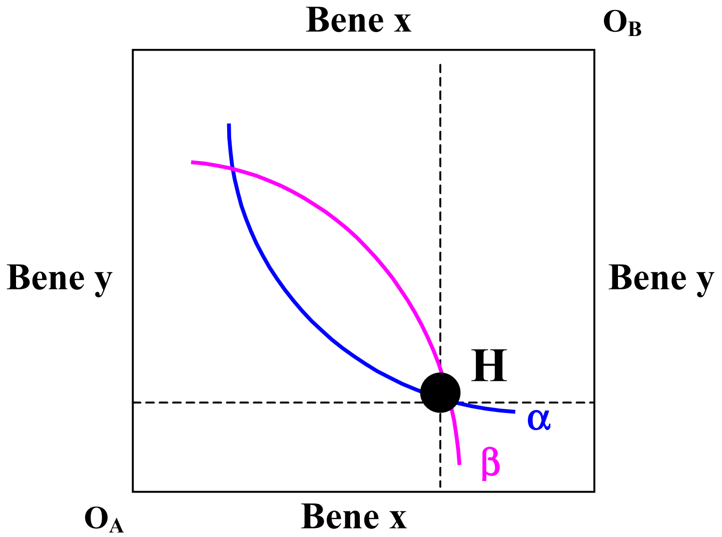




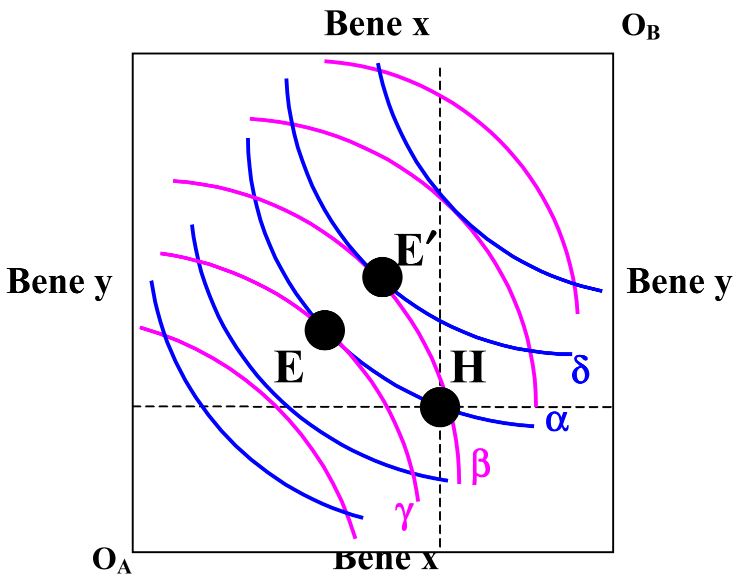


Ritorniamo a considerare il punto **H**. Come abbiamo visto, esso comporta una certa distribuzione del **bene x** e del **bene y** fra l'**individuo A** e l'**individuo B**. Il punto **H** appartiene alla curva di indifferenza α dell'**individuo A** e alla curva di indifferenza β dell'**individuo B**, essendo il punto di intersezione delle due curve.

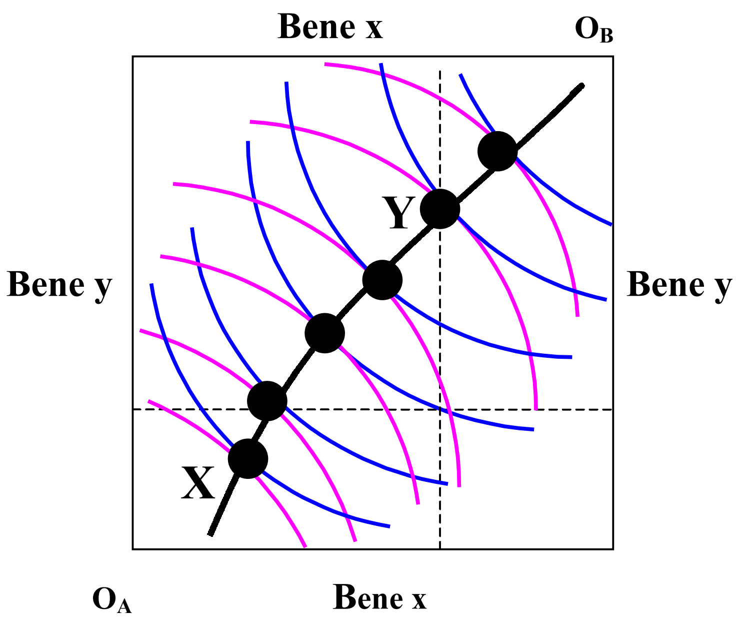
Supponiamo ora di spostarci da **H** a **E**; in **E** c'è una diversa distribuzione del **bene x** e del **bene y** fra i due individui; però nel passaggio da **H** a **E** l'**individuo A** resta sulla stessa curva di indifferenza α e l'**individuo B** va su una curva di indifferenza più alta (da β a γ). Il punto **E**, infatti, è il punto di contatto fra α e γ e quindi appartiene ad entrambe le curve. Nel passaggio da **H** ad **E** l'**individuo A** non viene danneggiato, ma l'**individuo B** viene avvantaggiato. Pertanto **H** non è una situazione di ottimo paretiano, perché **E** è migliore di **H**. I due individui da **H**, anziché andare ad **E**, potrebbero andare ad **E′** (che è il punto di contatto fra β e δ). In questo caso, l'**individuo A** va su una curva di indifferenza più alta (da α a δ) e l'**individuo B** resta sulla stessa curva di indifferenza β. Nel passaggio da **H** ad **E′** l'**individuo A** viene avvantaggiato, ma l'**individuo B** non viene danneggiato. Quindi, anche in questo caso, uno dei due individui ha migliorato la sua situazione senza danneggiare l'altro.In realtà, i due individui si muoveranno da **H** per andare in un punto situato all'interno dell'area racchiusa tra le due curve α e β….



… perché lì vi passano sia curve di indifferenza dell'**individuo A** sia curve dell'**individuo B**. Le curve di indifferenza dell'**individuo A** sono più alte di α e quelle dell'**individuo B** sono più alte di β. Pertanto, in qualunque punto all'interno dell'area aumenta il benessere sia dell'**individuo A** che dell'**individuo B** rispetto al punto **H**.
Lo spostamento da **H** ad un punto interno all'area racchiusa tra le curve α e β avverrà attraverso scambi volontari tra i due individui: l'**individuo A** troverà conveniente vendere unità del **bene x** in cambio di unità del **bene y** perché in tal modo andrà su di una curva superiore, e l'**individuo B** venderà unità del **bene y** in cambio di unità del **bene x** per lo stesso motivo. Si può verificare che le coordinate di qualunque punto interno all'area comportano, rispetto ad **H**, meno unità del **bene x** e più unità del **bene y** per l'**individuo A** e meno unità del **bene y** e più unità del **bene x** per l'**individuo B**.
Riprendiamo il grafico precedente:



Riconsideriamo ora il punto **E**. Se l'**individuo A** si sposta muovendosi lungo la curva α, verso destra o verso sinistra, egli non risulta danneggiato, ma l'**individuo B** si troverà su di una curva inferiore e, quindi, sarà danneggiato. L'**individuo B**, quindi, non troverà conveniente lo scambio e questo non verrà effettuato. Analogamente, Se l'**individuo B** si sposta da **E** lungo la sua curva γ, verrà danneggiato l'**individuo A** e, quindi, lo scambio, non essendo conveniente per l'**individuo A**, non verrà compiuto.
In conclusione, qualunque **punto di intersezione** tra una curva di indifferenza dell'**individuo A** e una curva di indifferenza dell'**individuo B** non è un punto di ottimo paretiano, perché da esso ci si può spostare avvantaggiando entrambi gli individui oppure avvantaggiando uno senza danneggiare l'altro.
Qualunque **punto di contatto** (o **tangenza**) tra una curva dell'**individuo A** e una dell'**individuo B** è un punto di ottimo paretiano, perché da esso non è possibile spostarsi senza danneggiare almeno un individuo. In ogni punto di contatto si verifica l'uguaglianza fra i **saggi marginali di sostituzione**, giacché le due curve hanno la stessa pendenza.
Congiungiamo ora tutti i punti di contatto con una curva, in questo modo:



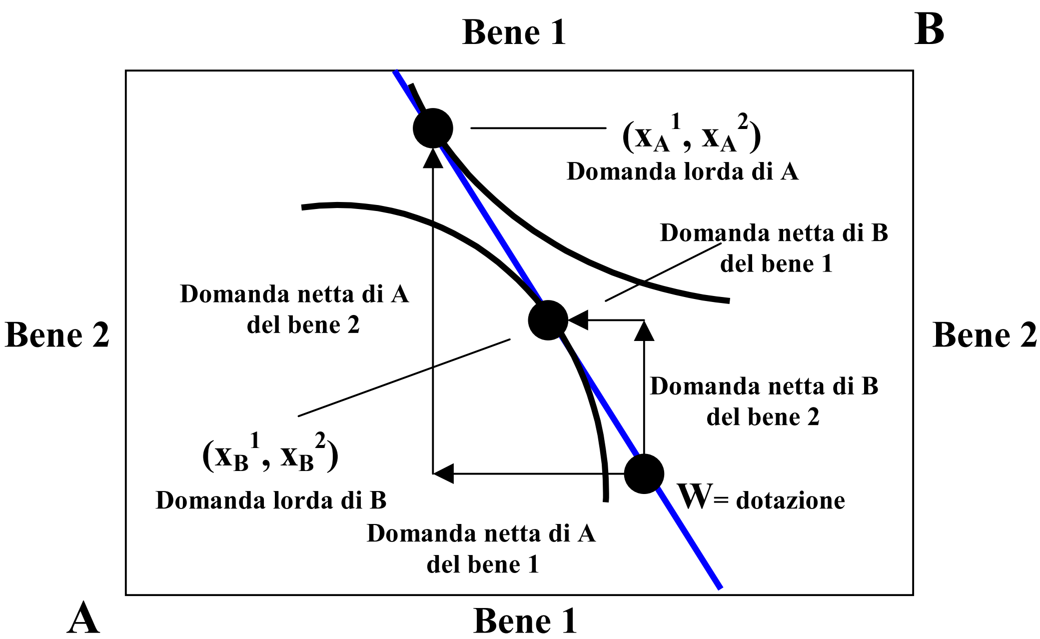
Questa curva è chiamata **curva dei contratti**, perché è costituita dai punti che vengono raggiunti mediante gli scambi volontari tra i due individui. Infatti, gli individui si sposteranno dai punti di intersezione e, mediante gli scambi che sono convenienti per entrambi gli individui, raggiungeranno i punti di contatto, dai quali non si sposteranno perché in un punto di contatto lo scambio non può avvenire se non danneggiando uno dei due.
Consideriamo ora i punti **X** ed **Y**. Entrambi sono punti di ottimo. Però la distribuzione del reddito nei due punti è diversa. In **X** l'**individuo A** è più povero che in **Y**, perché in **X** ha sia meno unità del **bene x** che del **bene y**; mentre l'**individuo B** è più ricco in **X** che in **Y**. Quanto più un punto di ottimo è situato verso l'origine $\mathbf{O_A}$ tanto più l'**individuo A** è povero e l'**individuo B** è ricco; e viceversa.Come si vede, vi è **un numero infinito di punti di ottimo paretiano, ciascuno caratterizzato da una diversa distribuzione del reddito tra gli individui**. Tali punti sono **inconfrontabili** tra di loro, nel senso che il criterio di Pareto non ci consente di affermare quale sia la migliore distribuzione del reddito, ciò che può essere fatto solo sulla base di un criterio etico.

IL CRITERIO DI OTTIMO RELATIVO ALLO SCAMBIO: IL MERCATO DI WALRAS

SCAMBIO E MERCATO. Descriviamo il processo di scambio di un mercato concorrenziale. Supponiamo che, oltre allo **scambista A** e allo **scambista B**, vi sia un terzo individuo disposto a fare da «**banditore**».

Il **banditore** sceglie un prezzo per il **bene 1** ed un prezzo per il **bene 2**,e li comunica ad **A** e **B**. Ciascuno scambista valuta la propria dotazione in relazione ai prezzi $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ e decide quanto di ciascun bene è disposto ad acquistare a quei prezzi.

Consideriamo la seguente figura, in cui sono rappresentati i panieri domandati dai due scambisti:



Notiamo che non è una configurazione di equilibrio, poiché la domanda di uno dei due agenti non è uguale all'offerta dell'altro.

Esaminiamo i due concetti di «domanda» significativi:

- la **domanda lorda** del **bene 1** da parte dello **scambista A**, per esempio, corrisponde alla quantità totale del **bene 1** che questi desidera consumare dati i prezzi correnti;

- la **domanda netta** del **bene 1** da parte dello **scambista A** rappresenta la differenza tra la domanda totale e la dotazione iniziale del **bene 1** di cui lo **scambista A** dispone.

Non vi è alcuna garanzia che, in corrispondenza di prezzi arbitrari $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$, l'offerta eguagli la domanda - intesa nell'uno o nell'altro senso.

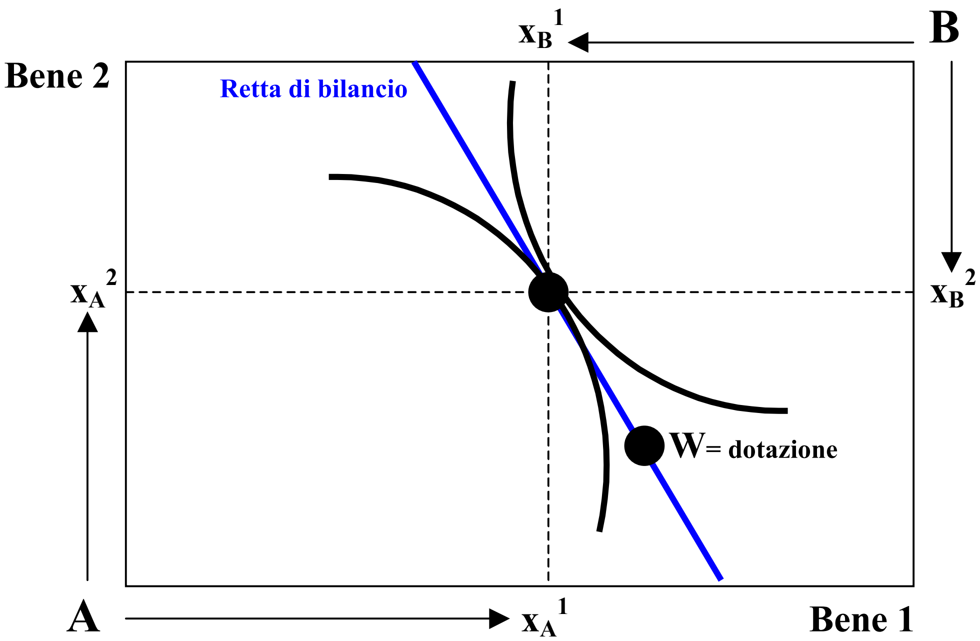
In termini di domanda netta, questo significa che la quantità che **A** intende acquistare [vendere] non sarà necessariamente uguale alla quantità che **B** intende vendere [acquistare].

In termini di domanda lorda, questo significa che la somma della quantità totale di cui gli agenti vogliono disporre non è uguale alla quantità totale disponibile del bene in questione.

Questa è la situazione che abbiamo rappresentato in figura, in cui gli agenti non sono in grado di completare le transazioni desiderate. Si dirà, in questo caso, che il mercato è in **disequilibrio**. In tale situazione, ci aspetteremo che il **banditore** faccia variare il prezzo dei beni: se vi è eccesso di domanda per uno dei beni, il banditore farà aumentare il prezzo di quel bene, mentre se vi è eccesso di offerta, lo farà diminuire.

Supponiamo che questo processo di aggiustamento continui fino a che la domanda di ciascun bene eguagli l'offerta.

Rappresentiamo la situazione finale in figura:



In questo caso, la quantità del **bene 1** che **A** intende acquistare è esattamente uguale alla quantità dello stesso bene che **B** intende vendere, e analogamente per il **bene 2**. In altri termini, la quantità totale di ciascun bene che ogni scambista è disposto ad acquistare ai prezzi correnti, è uguale alla quantità totale disponibile. Diciamo, quindi, che in questo caso il mercato è in **equilibrio**.

Più precisamente, questo tipo di equilibrio è detto **di mercato**, **concorrenziale**, o **equilibrio walrasiano**, dal nome dell'economista francese che fu tra i primi studiosi della teoria dell'equilibrio generale.

Sappiamo che se ciascuno scambista sceglie il paniere migliore tra quelli che può acquistare, il suo saggio marginale di sostituzione tra i due beni deve essere uguale al rapporto tra i prezzi. Ma se tutti i consumatori si trovano di fronte agli stessi prezzi, allora il saggio marginale di sostituzione tra ciascuno dei due beni dovrà essere lo stesso per tutti.

Dalla figura risulta che un equilibrio è caratterizzato dal fatto che la curva di indifferenza di ciascun agente è tangente alla sua retta di bilancio. Poiché la retta di bilancio di ciascuno scambista ha inclinazione $-\mathbf{p_2/p_1}$, questo significa che le curve di indifferenza dei due scambisti devono essere tangenti.

In generale, se ci sono **n** mercati per cui:

$$\begin{cases} q_{dom1} = q_{off1} \\ q_{dom2} = q_{off2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ q_{dom\,n} = q_{off\,n} \end{cases}$$

avremo un vettore di prezzi relativi:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$$

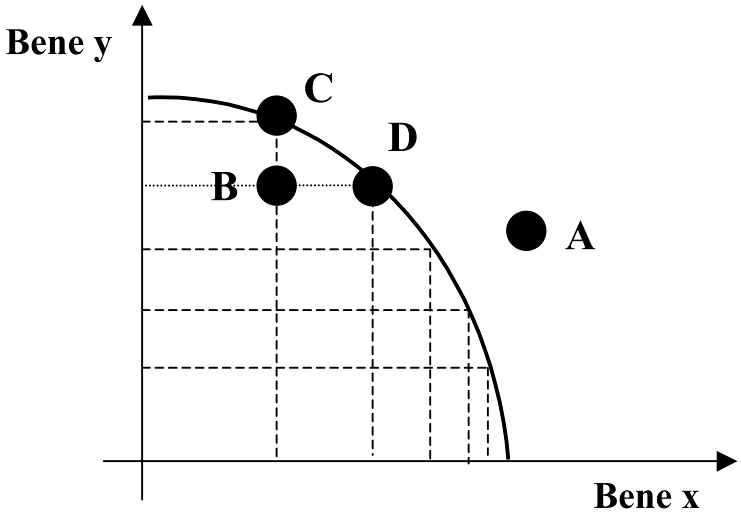
tale che tutti i mercati siano in equilibrio nello stesso momento.

La **legge di Walras** dice che se **n – 1** mercati sono in equilibrio allora anche l'**n-esimo** mercato è in equilibrio. Questo perché la domanda di un bene ha come specchio l'offerta di un altro bene.

IL CRITERIO DI OTTIMO RELATIVO ALLA PRODUZIONE: LA CURVA DI TRASFORMAZIONE

ESAME DELLA CURVA DI TRASFORMAZIONE. Il criterio di ottimo paretiano relativo alla produzione, detto anche **criterio di efficienza produttiva** o **allocativa**, può essere rappresentato mediante l'uso della **frontiera delle possibilità di produzione** o **curva di trasformazione**.

Consideriamo il seguente grafico:



Dati capitale **K** e lavoro **L**, un'impresa o un Paese deve scegliere la combinazione del **bene x** e del **bene y** da produrre.

Consideriamo un punto esterno alla frontiera, ad esempio **A**. Esso è un punto **impossibile**, perché con le risorse disponibili nel sistema economico non è possibile produrre le quantità del **bene x** e del **bene y** corrispondenti alle coordinate del punto **A**. **Tutti i punti situati all'esterno della frontiera sono impossibili**.

Consideriamo, ora, un punto situato all'interno della frontiera, ad esempio **B**. Questo è un punto possibile, ma è **inefficiente**. Vediamo perché. Se ci spostiamo al punto **C**, che è anch'esso possibile, vediamo che in **C** si produce, rispetto a **B**, una maggiore quantità del **bene y** e la stessa quantità del **bene x**. Pertanto, con le stesse risorse, abbiamo una produzione maggiore; quindi **B** è un punto inefficiente: se il sistema economico è nel punto **B**, vuol dire che le risorse sono utilizzate male.

Analogamente, se ci spostiamo da **B** a **D**, aumenta la produzione del **bene x** senza che diminuisca quella del **bene y**. E, se ci spostiamo in qualunque punto situato sulla frontiera tra **C** e **D**, aumentiamo, rispetto a **B**, le quantità prodotte di entrambi i beni.

Pertanto, quando è possibile aumentare la produzione di un bene senza diminuire quella di un altro bene, il sistema economico è in un punto inefficiente**. Tutti i punti situati all'interno della frontiera sono possibili, ma inefficienti**.

Invece, un punto **efficiente** è un punto in cui non è possibile aumentare la produzione di un bene senza diminuire quella di un altro bene. Infatti, se ci si sposta da **C** ad un altro punto situato lungo la frontiera, ad esempio **D**, aumenta la quantità del **bene x**, ma diminuisce quella del **bene y**. **Tutti i punti situati sulla frontiera sono**, **oltre che possibili**, **efficienti**, **ma inconfrontabili fra loro**. Infatti, per decidere se produrre maggiore quantità del **bene x** o del **bene y** occorre una scelta di carattere etico o politico.

Quindi, un'impresa o un Paese sceglierà la combinazione del **bene x** e del **bene y** da produrre su un punto della frontiera della curva di trasformazione, ma non possiamo dire se è migliore che esso faccia la scelta **C**, la scelta **D** o scelga uno degli altri punti della frontiera.

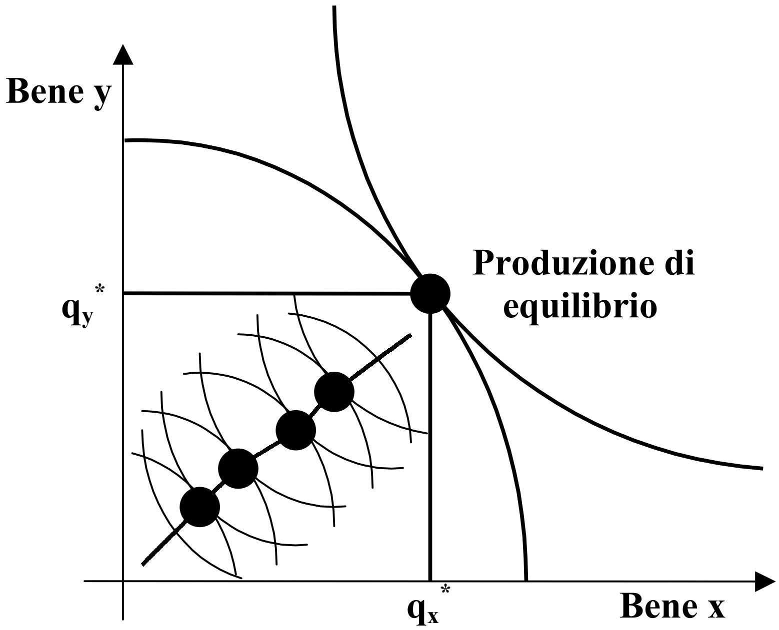
SAGGIO MARGINALE DI TRASFORMAZIONE. Dal grafico vediamo che, man mano che un'impresa o un Paese rinuncia a produrre una certa quantità del **bene y** per incrementare la produzione del **bene x**, tale incremento è via via minore. Abbiamo, infatti, che il **saggio marginale di trasformazione**:

$$\boxed{\mathbf{SMT = \Delta y/\Delta x}}$$

è decrescente, ovvero crescente se preso in valore assoluto.

ESEMPIO. Esaminiamo il caso di un Paese che deve decidere quale combinazione produrre di alimenti ed armi. Se decidesse di produrre solo alimenti starebbe meglio, ma non lo fa. Siamo nel caso del «dilemma del prigioniero»: se potessero mettersi tutti d'accordo nessuno produrrebbe armi. Ma se un Paese «rompe l'accordo» e decide di produrne, allora gli altri correrebbero un pericolo troppo grande. Poiché, la sicurezza è uno dei beni più importanti di un Paese, allora tutti producono armi.

QUALE SARÀ LA COMBINAZIONE DEL BENE X E DEL BENE Y CHE SI DECIDE DI PRODURRE? In generale, dati capitale **K** e lavoro **L**, un'impresa o un Paese decide di produrre la combinazione del **bene x** e del **bene y** laddove **la curva di trasformazione risulta tangente alla curva di benessere** dell'impresa o del Paese.



La combinazione **(q_x^*; q_y^*)** ci dà le dimensioni della scatola di Edgeworth che, al contrario della curva di trasformazione che riguarda i beni da produrre, riguarda in che modo si scambiano i beni già prodotti.

IL PRIMO TEOREMA DELL'ECONOMIA DEL BENESSERE E IMPLICAZIONI

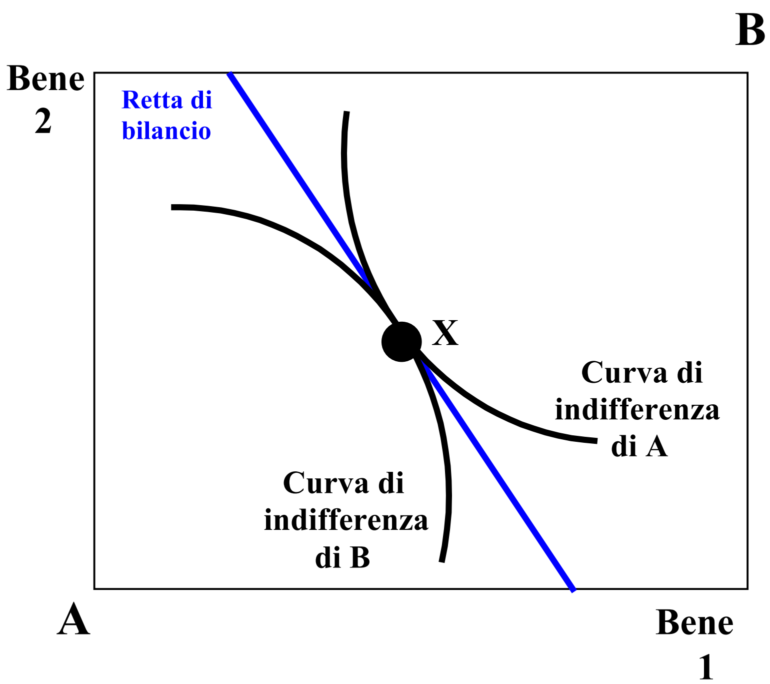
Il **primo teorema dell'economia del benessere** stabilisce che **ogni equilibrio concorrenziale è Pareto-efficiente**.
Tale teorema non discende da nessuna ipotesi esplicita, ma direttamente dalle definizioni. Tuttavia, vi sono alcune ipotesi implicite. L'ipotesi principale afferma che **gli scambisti sono interessati solo al proprio consumo e non a quello degli altri scambisti**. Se per uno scambista è importante il consumo degli altri agenti, si dirà che vi è una **esternalità del consumo**. In tal caso, l'equilibrio concorrenziale non è necessariamente Pareto-efficiente. Per esempio, supponiamo che ad **A** interessi il consumo di sigari di **B**: niente ci assicura che ciascuno scambista, scegliendo il proprio paniere di consumo ai prezzi di mercato, pervenga ad un'allocazione Pareto-efficiente. Dopo che ciascuno ha scelto il paniere ottimo tra quelli che può acquistare, è ancora possibile migliorare la soddisfazione di entrambi: per esempio, **A** potrebbe pagare **B** per indurlo a fumare meno sigari.

Un'altra importante ipotesi implicita del primo teorema dell'economia del benessere è che **gli scambisti si comportino effettivamente in modo concorrenziale**. Se vi sono solo due scambisti, come nella scatola di Edgeworth, è improbabile che ciascuno di essi consideri il prezzo come dato. Uno degli scambisti, o entrambi, possono rendersi conto di avere un potere di mercato e tentare di utilizzarlo per aumentare la propria soddisfazione. Il concetto di equilibrio concorrenziale ha senso solo quando il numero degli scambisti è sufficientemente elevato da far sì che ciascuno di essi si comporti in modo concorrenziale. Infine, **il primo teorema dell'economia del benessere ha qualche interesse solo se esiste l'equilibrio concorrenziale**. Ciò avviene se le quote di mercato dei consumatori sono sufficientemente piccole rispetto alle dimensioni del mercato.Date queste ipotesi, il primo teorema dell'economia del benessere è un risultato fondamentale: **un mercato, nel quale ciascuno scambista massimizzi la propria utilità**, **consente di realizzare allocazioni Pareto-efficienti**. L'importanza di tale teorema sta nel fatto che **esso ci dà un meccanismo** - **il mercato concorrenziale** - **che consente di pervenire all'efficienza paretiana**. Questo può non essere importante quando vi siano solo due scambisti: due persone possono incontrarsi e vedere se vi è la possibilità di effettuare scambi reciprocamente vantaggiosi. Ma se ve ne sono molti, allora deve esserci una qualche struttura che regoli il processo di scambio. Il primo teorema dell'economia del benessere mostra che la particolare struttura dei mercati concorrenziali ha la proprietà di determinare allocazioni Pareto-efficienti. Se studiamo un problema di allocazione delle risorse fra molti scambisti, è importante notare che il mercato concorrenziale riduce al minimo le informazioni di cui ciascun agente ha bisogno. Tutto quello che il consumatore deve conoscere per prendere le sue decisioni di consumo sono i prezzi dei beni che desidera acquistare.In un mercato concorrenziale, i consumatori non hanno bisogno di sapere come i beni sono prodotti, da dove vengono o chi li possiede. Se ciascun consumatore conosce i prezzi dei beni, può determinare la sua domanda e se il mercato è in grado di determinare prezzi concorrenziali, siamo certi che il risultato sarà efficiente.

IL SECONDO TEOREMA DELL'ECONOMIA DEL BENESSERE E IMPLICAZIONI

Il primo teorema dell'economia del benessere afferma che l'equilibrio in un insieme di mercati concorrenziali è Pareto-efficiente. Chiediamoci se vale anche il contrario, ossia se, data un'allocazione Pareto-efficiente, esistono prezzi cui corrisponda un equilibrio di mercato .La risposta è affermativa, date alcune condizioni. Rappresentiamo il ragionamento in figura:

1



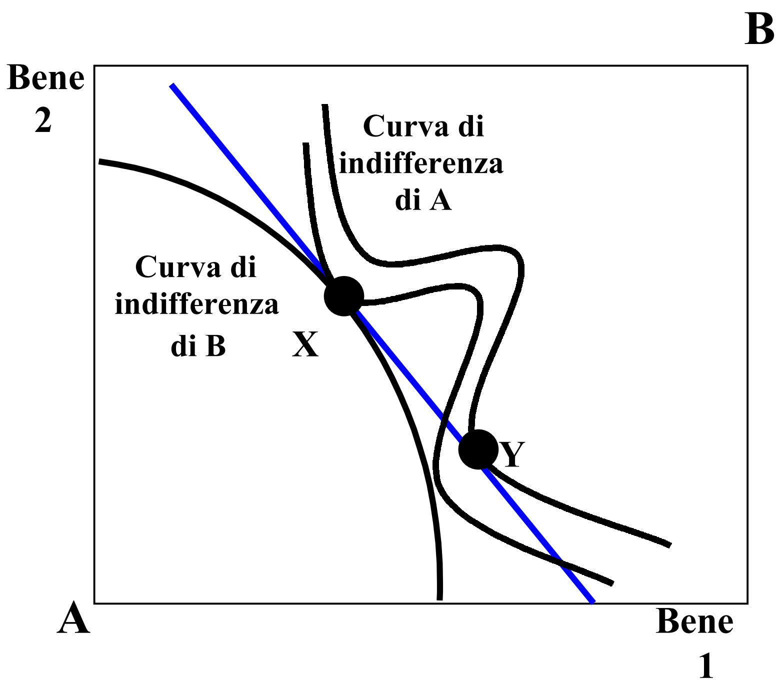
Consideriamo un'allocazione Pareto-efficiente. Sappiamo che l'insieme delle allocazioni che **A** preferisce alla sua dotazione iniziale non interseca quello delle allocazioni preferite da **B**. Questo implica che le due curve di indifferenza sono tangenti in corrispondenza di un'allocazione Pareto-efficiente.

Supponiamo che la retta tangente comune alle due curve rappresenti gli insiemi di bilancio degli scambisti. Quindi, se ciascuno scambista scegli il paniere ottimo all'interno del proprio insieme di bilancio, l'equilibrio che ne risulta è un'allocazione Pareto-efficiente iniziale.

Quindi, il fatto che l'allocazione iniziale sia efficiente determina automaticamente i prezzi di equilibrio. Le dotazioni possono corrispondere ad un qualsiasi paniere che si trovi sulla retta di bilancio.

Chiediamoci se è sempre possibile tracciare una tale retta di bilancio. La risposta è negativa, come possiamo vedere dalla seguente figura:

2



Il punto **X** è Pareto-efficiente, ma non esistono prezzi per i quali **A** e **B** intendano consumare il paniere corrispondente al punto **X**.

Nella figura è rappresentato un possibile punto di equilibrio, ma le domande ottime degli scambisti **A** e **B** non coincidono in corrispondenza della retta di bilancio associata a quel punto.

Infatti, **A** desidera il paniere **Y**, mentre **B** vuole il paniere **X**, e quindi la domanda non è uguale all'offerta in corrispondenza di questi prezzi.

La differenza fra le due figure sta nel fatto che le preferenze della figura **1** sono convesse, mentre non lo sono nella figura **2** .

Se le preferenze di entrambi gli scambisti sono convesse, la tangente comune non interseca l'una o l'altra delle curve di indifferenza più di una volta.

Da questo deriva il <u>**secondo teorema dell'economia del benessere**</u>: se le preferenze di tutti gli scambisti sono convesse, è possibile tracciare una retta che li divide. L'inclinazione di questa retta ci dà i prezzi relativi, e qualsiasi dotazione che porti gli scambisti su questa retta conduce ad un equilibrio di mercato che coincide con l'allocazione Pareto-efficiente di partenza.

In altri termini, **date alcune condizioni**, **ogni allocazione Pareto-efficiente può essere realizzata come equilibrio concorrenizale**.
Il secondo teorema dell'economia del benessere, quindi, implica che possiamo considerare separatamente il problema della distribuzione e quello dell'efficienza. Qualsiasi allocazione Pareto-efficiente desiderata può essere realizzata dal meccanismo di mercato. Tale meccanismo è neutrale quanto alla distribuzione: una distribuzione del benessere ritenuta equa in base a qualche criterio può essere realizzata in mercati concorrenziali.

I prezzi hanno due ruoli nel sistema di mercato: un ruolo **allocativo** ed un ruolo **distributivo**. Il ruolo allocativo consiste nell'indicare la scarsità relativa; il ruolo distributivo consiste nel determinare la quantità di beni che gli scambisti possono acquistare. Il secondo teorema dell'economia del benessere afferma che tali ruoli possono essere separati: possiamo ridistribuire le dotazioni di beni per determinare la ricchezza di cui dispongono gli scambisti e quindi utilizzare i prezzi per indicare la scarsità relativa.

Si dice spesso che bisogna intervenire sulla formazione dei prezzi per ottenere l'equità distributiva. Un intervento di questo tipo crea in genere delle distorsioni. Sappiamo che per ottenere allocazioni efficienti è necessario che ciascuno scambista sostenga i costi sociali delle sue azioni, e che le sue scelte tengano conto di tali costi. Quindi, in un mercato perfettamente concorrenziale, la decisione marginale di consumare una maggiore od una minore quantità di un dato bene dipende dal prezzo, il quale esprime il valore marginale assegnato da ciascun individuo a quel determinato bene, e l'efficienza riguarda essenzialmente le decisioni marginali.

La decisione relativa alla **quantità** che ciascuno scambista vuole consumare rappresenta un problema completamente diverso. In un mercato concorrenziale tale quantità è determinata dal valore delle risorse che un individuo può vendere. Dal punto di vista della teoria pura, non vi è alcuna ragione per cui lo Stato non possa trasferire potere di acquisto - dotazioni - ai consumatori nel modo che ritiene più opportuno.

In effetti, lo Stato non deve necessariamente trasferire le dotazioni fisiche dei beni, ma semplicemente il potere di acquisto che vi corrisponde. Lo Stato potrebbe tassare un consumatore sulla base del valore della sua dotazione e trasferire il denaro così ottenuto ad un altro consumatore. Fintanto che le tasse si basano sul valore della **dotazione** dei beni del consumatore, non vi sarà perdita di efficienza. Solo se le tasse dipendono dalle **scelte** del consumatore si può avere inefficienza perché, in questo caso, esse influiranno sulle sue scelte marginali.

Anche una tassa sulle dotazioni, in genere, modifica il comportamento dei consumatori. Ma, in base al primo teorema dell'economia del benessere, gli scambi effettuati a partire da una dotazione iniziale qualsiasi si traducono in una allocazione Pareto-efficiente. Quindi, non importa il modo in cui vengono ridistribuite le dotazioni: l'allocazione di equilibrio determinata dalle forze di mercato continuerà ad essere Pareto-efficiente.

Vi sono comunque altri aspetti del problema. Di fatto sarebbe facile imporre una tassa globale ai consumatori. Si potrebbero tassare i consumatori con gli occhi azzurri e ridistribuire i proventi a quelli con gli occhi neri. Dal momento che non si può cambiare il colore degli occhi, non si verificherebbe alcuna perdita di efficienza. Oppure si potrebbero tassare i consumatori con un quoziente di intelligenza elevato e ridistribuire i proventi a quelli con un quoziente basso. Anche in questo caso, se è possibile misurare il quoziente di intelligenza, non vi sarebbe alcuna perdita di efficienza.

A questo punto si pone un problema, cioè quello di determinare come si misurano le dotazioni dei beni. Per molti la dotazione è costituita prevalentemente dalla propria capacità lavorativa. Le dotazioni di capacità lavorativa sono costituite dal lavoro che gli individui **possono** pensare di vendere e non dalla quantità che effettivamente vendono. Una tassa sul lavoro che gli individui decidono di vendere sul mercato è una **tassa con effetti distorsivi**: tassare l'offerta di lavoro avrà in genere l'effetto di diminuire la quantità di lavoro offerta. Tassare il valore potenziale del lavoro - la dotazione di lavoro - non provoca distorsioni, perché il valore potenziale del lavoro, per definizione, varia con la tassazione. Tassare il valore delle dotazioni appare semplice, fino a che non ci si rende conto che significa tassare qualcosa che **potrebbe** essere venduto, invece di qualcosa che è venduto effettivamente.

Potremmo anche **immaginare** un sistema di imposizione per questo tipo di tassa. Supponiamo che vi sia una società in cui ciascun consumatore debba versare allo Stato, ogni settimana, quanto ha guadagnato in dieci ore di lavoro. Questa tassa non tiene conto di quanto l'individuo lavora effettivamente - essa dipende solo dalla dotazione di lavoro e non dalla quantità di lavoro effettivamente venduta. Una tassa di questo tipo non fa altro che trasferire allo Stato una parte delle dotazioni di tempo di ciascun consumatore. Lo Stato potrebbe quindi utilizzare questi fondi per fornire beni, oppure potrebbe semplicemente trasferirli ad altri consumatori.

Per il secondo teorema dell'economia del benessere, questa tassa globale non provoca alcuna distorsione. Qualsiasi allocazione Pareto-efficiente può essere raggiunta per mezzo di tale ridistribuzione.

In ogni caso, l'offerta di lavoro è relativamente insensibile alle variazioni del salario, e quindi la perdita di efficienza derivante dalla tassazione del lavoro non è troppo elevata. Tuttavia, il secondo teorema dell'economia del benessere esprime un concetto importante: i prezzi dovrebbero riflettere la scarsità, mentre i trasferimenti globali di ricchezza dovrebbero essere utilizzati ai fini di una migliore distribuzione. Nella maggior parte dei casi, queste due politiche possono essere attuate separatamente.
La ridistribuzione del benessere può condurre a sostenere diverse politiche di prezzo. Ad esempio, gli anziani potrebbero usufruire di un servizio telefonico meno costoso, oppure che chi consuma poca elettricità dovrebbe pagare tariffe più basse di chi ne consuma di più. Questi sono tentativi di ridistribuire il reddito per mezzo del sistema dei prezzi, offrendo al alcuni individui prezzi più bassi che ad altri.

Di fatto, questo è un modo assolutamente inefficiente di ridistribuire il reddito. Se si vuole ridistribuire il reddito, chiediamoci perché non farlo, invece, direttamente. Se si dà mille lire a qualcuno, questi potrà scegliere di spenderlo per ottenere una quantità maggiore dei beni che desidera consumare, e non necessariamente del bene oggetto di sussidio.

TEORIA DEI GIOCHI

Gli agenti economici possono interagire in vari modi, molti dei quali sono studiati dalla **teoria dei giochi**. Essa tratta, in generale, del **problema dell'interazione strategica** e può essere impiegata per studiare i giochi di società, i negoziati politici, o il comportamento economico.

MATRICE PAYOFF DI UN GIOCO. Innanzitutto, dobbiamo formulare il concetto di **matrice payoff** o **matrice delle vincite** di un gioco.

Supponiamo che due individui, **A** e **B**, facciano un semplice gioco: **A** scriverà su un foglio di carta «**alto**» o «**basso**» e, contemporaneamente, **B** scriverà sul suo foglio «**sinistra**» o «**destra**». Fatto questo, si esamineranno i due fogli e ogni giocatore riceverà un premio o pagherà una penale. La matrice delle vincite è indicata in figura:

		GIOCATORE B	
		Sinistra	**Destra**
GIOCATORE A	**Alto**	**1,2**	**0,1**
	Basso	**2,1**	**1,0**

Se **A** scrive «**alto**» e **B** «**sinistra**», esamineremo l'angolo in alto a sinistra della matrice. In questa matrice, la vincita di **A** è la prima cifra della prima casella, cioè **1**, mentre la vincita di **B** corrisponde alla seconda cifra, e cioè **2**.

Analogamente, se **A** scrive «**basso**» e **B** «**destra**», la vincita di **A** sarà **1** e quella di **B** sarà **0**.

A ha due strategie: può scegliere «**alto**» oppure «**basso**». Queste strategie possono rappresentare scelte economiche, come «aumentare il prezzo» o «diminuire il prezzo», oppure scelte politiche come «dichiarare guerra» o «non dichiarare guerra».

Quindi, la **matrice payoff** o **matrice delle vincite** di un gioco **indica quali saranno le vincite di ciascun giocatore in corrispondenza di ciascuna combinazione di strategie**.

STRATEGIA DOMINANTE. Consideriamo una matrice delle vincite di questo genere:

		GIOCATORE B	
		Sinistra	**Destra**
GIOCATORE A	**Alto**	**1, 2**	**0, 1**
	Basso	**2, 1**	**1, 0**

Questo gioco ha una soluzione molto semplice. Dal punto di vista di **A**, sarà sempre più vantaggioso scegliere «**basso**», poiché le vincite derivanti da questa scelta, **2** o **1**, sono in ogni caso maggiori di quelle derivanti dalla scelta «**alto**», **1** o **0**. Analogamente, la scelta migliore per **B** sarà sempre «**sinistra**», poiché le vincite derivanti da questa scelta, **2** o **1**, sono in ogni caso maggiori di quelle derivanti dalla scelta «**destra**», **1** o **0**. È questo un caso di **strategia dominante**: **ogni giocatore dispone di una scelta ottima, quale che sia la mossa dell'altro giocatore**.

Per qualunque scelta di **B**, **A** otterrà sempre la vincita più alta giocando «**basso**», e quindi la sua scelta sarà sempre questa.

Analogamente, per qualunque scelta di **A**, **B** otterrà sempre la vincita più alta giocando «**sinistra**», e quindi la sua scelta sarà sempre questa.

Se in un gioco vi è una strategia dominante per ciascun giocatore, questa dovrebbe coincidere verosimilmente con la soluzione di equilibrio.
In questo caso, la soluzione di equilibrio dovrebbe verificarsi quando **A** sceglie «**basso**» e **B** sceglie «**sinistra**». Si tratta di una situazione di **equilibrio paretiano**, non migliorabile. Nella realtà non è molto frequente che si verifichino equilibri con strategia dominante.

EQUILIBRIO DI NASH. Consideriamo una matrice delle vincite di questo genere:

		GIOCATORE B	
		Sinistra	**Destra**
GIOCATORE A	**Alto**	**2, 1**	**0, 0**
	Basso	**0, 0**	**1, 2**

In questo caso, quando **B** sceglie «**sinistra**», la vincita di **A** è **2** o **0**; quando **B** sceglie «**destra**», la vincita di **A** è **0** o **1**.
Questo significa che quando **B** sceglie «**sinistra**», **A** sceglierà «**alto**», e quando **B** sceglie «**destra**», **A** sceglierà «**basso**».Quindi, la scelta ottima di **A** dipende da quello che egli ritiene che farà **B**. Analogamente, quando **A** sceglie «**alto**», la vincita di **B** è **1** o **0**; quando **A** sceglie «**basso**», la vincita di **B** è **0** o **2**. Questo significa che quando **A** sceglie «**alto**», **B** sceglierà «**sinistra**», e quando **A** sceglie «**basso**», **B** sceglierà «**destra**».Quindi, la scelta ottima di **B** dipende da quello che egli ritiene che farà **A**. Parleremo, in questo caso, di **equilibrio di Nash**, dal nome del matematico statunitense che elaborò, nel 1951, questo concetto fondamentale della teoria dei giochi: **la scelta di A è ottima**, **data la scelta di B**, **e la scelta di B è ottima**, **data la scelta di A**.
Si ricordi che nessuno dei due, quando sceglie la sua strategia, sa quello che farà l'altro, ma entrambi hanno una qualche aspettativa relativamente alla scelta dell'avversario. Nel caso di questa matrice delle vincite, la strategia «**alto**» - «**sinistra**» corrisponde a un equilibrio di Nash. Per dimostrarlo si noti che se **A** sceglie «**alto**», la cosa migliore da fare per **B** sarà scegliere «**sinistra**», poiché la vincita di **B** per questa scelta è **1**, mentre se sceglie «**destra**» sarà **0**. E se **B** sceglie «**sinistra**», la cosa migliore da fare per **A** è scegliere «**alto**», perché la sua vincita sarà **2** invece di **0**. Anche la strategia «**basso**» - «**destra**» corrisponde a un equilibrio di Nash. Si noti che se **A** sceglie «**basso**», la cosa migliore da fare per **B** sarà scegliere «**destra**», poiché la vincita di **B** per questa scelta è **2**, mentre se sceglie «**sinistra**» sarà **0**. E se **B** sceglie «**destra**», la cosa migliore da fare per **A** è scegliere «**basso**», perché la sua vincita sarà **1** invece di **0**. Quindi, **ciascun giocatore compie la scelta ottima**, **data la scelta dell'altro giocatore**. L'equilibrio di Nash è una generalizzazione dell'equilibrio di Cournot. In quel caso si dovevano scegliere i livelli dell'output, e ciascuna impresa sceglieva il proprio, considerando data la scelta dell'altra. Si supponeva che ciascuna impresa si comportasse in modo ottimale, assumendo che l'altra continuasse a produrre la quantità di output scelta - cioè che continuasse a seguire la strategia che aveva scelto. Si ha un equilibrio di Cournot quando ciascuna impresa massimizza il profitto, dato il comportamento dell'altra: questa è esattamente la definizione di un equilibrio di Nash.

ASSENZA DI EQUILIBRIO. Consideriamo una matrice delle vincite di questo genere:

		GIOCATORE B	
		Sinistra	**Destra**
GIOCATORE A	**Alto**	**0, 0**	**0, –1**
	Basso	**1, 0**	**–1, 3**

In questo caso, **l'equilibrio non esiste**. Se il giocatore **A** sceglie «**alto**», il giocatore **B** sceglie «**sinistra**». Ma, se **B** sceglie «**sinistra**», allora **A** sceglie «**basso**». Analogamente, Se il giocatore **A** sceglie «**basso**», il giocatore **B** sceglie «**destra**». Ma, se **B** sceglie «**destra**», allora **A** sceglie «**alto**». **Non esiste una situazione in cui entrambi i giocatori confermerebbero la loro scelta dopo aver saputo quella dell'altro**.

IL DILEMMA DEL PRIGIONIERO. Un problema del**l'equilibrio di Nash** è che esso **non comporta necessariamente soluzioni Pareto-efficienti**.
Consideriamo il gioco illustrato in questa tabella:

		PRIGIONIERO B	
		Confessare	**Negare**
PRIGIONIERO A	**Confessare**	$\boxed{\mathbf{-3, -3}}$	**0, –6**
	Negare	**–6, 0**	**–1,–1**

Questo gioco è noto come **dilemma del prigioniero**.
Consideriamo una situazione in cui due prigionieri complici di un delitto vengono interrogati in due stanze separate. Ciascuno di loro ha la possibilità di confessare, denunciando l'altro, oppure di negare la propria colpevolezza. Se un solo prigioniero confessasse, egli sarebbe libero, mentre l'altro sarebbe ritenuto colpevole e condannato a **6** mesi di prigione. Se entrambi negassero la propria colpevolezza, sarebbero condannati entrambi a **1** mese, e a **3** mesi se tutti e due confessassero.
Se il prigioniero **B** decidesse di negare di aver commesso il delitto, allora al prigioniero **A** converrebbe confessare, perché in questo modo otterrebbe la libertà. Analogamente, se **B** decidesse di confessare, allora al prigioniero **A** converrebbe confessare, poiché in questo caso la condanna sarebbe di **3** mesi invece che di **6**. Quindi, **qualsiasi cosa faccia B**, **ad A conviene confessare**.
Lo stesso ragionamento vale per **B**: **qualsiasi cosa faccia A**, **a B conviene confessare**.
Quindi, **l'unico equilibrio di Nash in questo gioco corrisponde alla scelta di confessare per entrambi i prigionieri**.

In questo caso, la loro scelta costituirebbe non solo un equilibrio di Nash, ma anche un equilibrio con strategia dominante, poiché **ciascun prigioniero ha a disposizione la stessa scelta ottima**, **indipendentemente dalla scelta dell'avversario**.

Ma se solo potessero restare uniti, ne sarebbero avvantaggiati entrambi! Se fossero entrambi certi che l'altro nega, e potessero accordarsi per negare tutti e due, ciascuno otterrebbe una condanna di **1** mese, che aumenterebbe la soddisfazione di entrambi. **La strategia «negare» - «negare» è Pareto-efficiente**, **dato che non vi è un'altra scelta strategica che possa aumentare la soddisfazione di entrambi i giocatori**, mentre **la strategia «confessare» - «confessare» non lo è**.
Il problema per i due prigionieri è che non possono coordinare le loro azioni. Se ognuno potesse fidarsi dell'altro, potrebbero guadagnarci entrambi.
Il dilemma del prigioniero trova applicazione in un'ampia gamma di fenomeni economici e politici.
Consideriamo, per esempio, il problema del controllo degli armamenti. La strategia «**confessare**» corrisponderà a «**installare un nuovo missile**» e la strategia «**negare**» corrisponderà a «**non installarlo**». Se il mio nemico installa i suoi missili, anch'io farò la stessa cosa, anche se la migliore strategia sarebbe accordarsi per non installarne alcuno. Ma se non si trova il modo di sottoscrivere un accordo vincolante, ciascuno finirà per installare il nuovo missile, e tutti e due peggioreremo la nostra situazione.
Un altro esempio significativo è il problema costituito dalla violazione dei patti che regolano un cartello. In questo caso, «**confessare**» corrisponderà a «**produrre una quantità di output superiore alla quota assegnata**» e la strategia «**negare**» corrisponderà a «**attenersi alla quota assegnata**». Se riteniamo che l'altra impresa si atterrà alla quota stabilita, sarà vantaggioso produrre una quantità superiore a quella assegnata a noi, se invece riteniamo che l'altra impresa produrrà di più, allora ci sentiremo giustificati a comportarci in modo analogo!
Il dilemma del prigioniero ha provocato numerosi dibattiti per stabilire quale sia il modo «corretto» di giocare o, più precisamente, quale sia un modo ragionevole di giocare a questo gioco. Sembra che questa ipotesi dipenda dal fatto che il gioco possa essere giocato una sola volta, oppure venir ripetuto per un numero indefinito di volte.
Se il gioco è giocato una sola volta, la strategia ragionevole sembra essere quella di tradire - nel nostro esempio «**confessare**». Dopo tutto, quale che sia la scelta dell'altro, saremo noi a trarne vantaggio, e non c'è modo per influire sul suo comportamento.

Monopolio

1. Un monopolista fronteggia la seguente curva di domanda:

$$P(Q) = 8 - Q\,.$$

(a) Data questa unica informazione, determinate l'intervallo delle quantità che il monopolista prenderà in considerazione per la sua produzione.

(b) Sapendo che il costo marginale del monopolista è dato da:

$$MC(Q) = Q^2\,.$$

Determinate l'eventuale quantità prescelta dal monopolista.

(c) La funzione dei costi totali è data da:

$$CT(Q) = \frac{1}{3}Q^3 + F\,,$$

dove F sono i costi fissi. Determinate per quale intervallo di F il monopolista produrrà la quantità determinata al punto (b).

2. Il prof. Bong ha appena finito di scrivere il suo libro. Alcune ricerche di mercato suggeriscono che la funzione di domanda del suo libro è $Q = 2000 - 100p$, dove p è il prezzo del libro. Preparare il libro per la stampa costa 1000 $ e questo costo deve essere sostenuto prima di poter stampare anche una sola copia. Oltre a questo costo iniziale vi è un costo marginale di 4 $ per ogni libro stampato.

(a) Determinare le funzioni del ricavo totale, del ricavo medio e del ricavo marginale e rappresentarle graficamente.

(b) Determinare le funzioni del costo totale, del costo medio e del costo marginale e rappresentarle graficamente.

(c) Determinare la quantità di libri venduti dal prof. Bong, il prezzo a cui vengono venduti ed acquistati ed il profitto realizzato.

3. Un monopolista produce ad un costo marginale costante uguale a 20 e la curva di domanda inversa per il suo prodotto è: $P(q) = 100 - 2q$

(a) Determinare la quantità prodotta dal monopolista e il prezzo a cui la vende.

(b) Calcolare la perdita netta di monopolio.

4. Un monopolista vende in due mercati. Nel mercato 1 la curva di domanda inversa è $P(q_1) = 130 - q_1$ e nel mercato 2 è $P(q_2) = 200 - q_2$. La funzione del costo totale dell'impresa è $CT(q_1 + q_2) = (q_1 + q_2)^2$ e l'impresa può discriminare il prezzo nei due mercati.

(a) Determinare il prezzo imposto dal monopolista, la quantità venduta in ciascun mercato e i profitti complessivi del monopolista.

(b) Calcolare l'elasticità della domanda al prezzo sul mercato 1 e sul mercato 2 in corrispondenza del prezzo e della quantità di massimo profitto. Sul mercato in cui il monopolista impone il prezzo più elevato, la domanda è più o meno elastica?

ESERCIZIO 1

Curva di domanda:
$P(Q) = 8 - Q$
(a) Avendo come unica informazione quella relativa alla domanda di mercato fronteggiata dal monopolista, l'unica cosa che si può dire è che il monopolista produrrà una quantità del bene per la quale il suo ricavo marginale è non-negativo:
$MR \geq 0$
$RT(Q) = P(Q)Q = (8 - Q)Q = 8Q - Q^2$
$MR(Q) = 8 - 2Q \geq 0 \Rightarrow 0 \leq Q \leq 4$
(b) Il monopolista massimizza il profitto:
max $\pi = RT - CT \Rightarrow MR = MC$
$MR(Q) = 8 - 2Q$
$MC(Q) = Q^2$
$8 - 2Q = Q^2 \Rightarrow Q^2 + 2Q - 8 = 0$, risolviamo rispetto a Q:
$Q = -1 \pm \sqrt{1+8}$ con $Q \geq 0$
$Q^* = -1 + 3 = 2 \rightarrow$ quantità ottimale per il monopolista
$P^* = P(Q^*) = 8 - 2 = 6 \rightarrow$ prezzo di mercato
(c) Il monopolista produrrà la quantità determinata al punto precedente, se realizza profitti positivi:
$RT(Q) = P(Q)Q$

$$CT(Q) = \frac{1}{3}Q^3 + F$$

$$\pi^* = RT(Q^*) - CT(Q^*) \geq 0 \Rightarrow P^*Q^* - \frac{1}{3}(Q^*)^3 - F \geq 0 \Rightarrow$$

$$6(2) - \frac{1}{3}(2)^3 - F \geq 0 \Rightarrow 12 - \frac{8}{3} - F \geq 0 \Rightarrow \frac{28}{3} \geq F$$

$F \leq 9,\overline{3}$

ESERCIZIO 2

Funzione di domanda:

$$Q(p) = 2000 - 100p \Rightarrow p(Q) = 20 - \frac{1}{100}Q$$

Costi fissi:
$CF = 1000$
Costo marginale:
MC = 4

(a) RICAVO TOTALE:

$$RT(Q) = p(Q)Q = \left(20 - \frac{1}{100}Q\right)Q = 20Q - \frac{1}{100}Q^2$$

RICAVO MEDIO:

$$AR(Q) = \frac{RT(Q)}{Q} = \frac{p(Q)Q}{Q} = p(Q)$$ è la funzione di domanda.

RICAVO MARGINALE:

$MR(Q) = \frac{dRT(Q)}{dQ} = 20 - \frac{1}{50}Q$

(b) COSTO TOTALE:

$CT(Q) = 4Q + 1000$

COSTO MEDIO:

$AC(Q) = 4 + \frac{1000}{Q}$

COSTO MARGINALE:

$MC(Q) = 4$

(c) $\max\ \pi(Q) = RT(Q) - CT(Q)$

Condizione di massimo profitto:

$MR(Q) = MC(Q)$

$20 - \frac{1}{50}Q = 4$

$1000 - Q = 200$

$Q^* = 800 \rightarrow$ quantità di libri venduta dal prof. Bong

$p^* = p(Q^*) = 20 - \frac{1}{100}800 = 12 \rightarrow$ prezzo di equilibrio

$\pi^* = p^*Q^* - CT(Q^*) = 12(800) - 4(800) - 1000 = 5400 \rightarrow$ profitti realizzati.

ESERCIZIO 3

Funzione di domanda:

$P(q) = 100 - 2q$

(a) Il monopolista massimizza il profitto:

$\max\ \pi = RT - CT \Rightarrow MR = MC$

$RT(q) = P(q)q = (100 - 2q)q = 100q - 2q^2$

$MR(q) = 100 - 4q$

$MC(q) = 20$

$100 - 4q = 20 \Rightarrow 4q = 80$

$q_M^* = \frac{80}{4} = 20 \rightarrow$ quantità prodotta in regime di monopolio

$P_M^* = P(q_M^*) = 100 - 2(20) = 60 \rightarrow$ prezzo di equilibrio in monopolio

(b) Per determinare la perdita netta di monopolio, occorre confrontare l'equilibrio di monopolio con l'equilibrio di concorrenza perfetta:

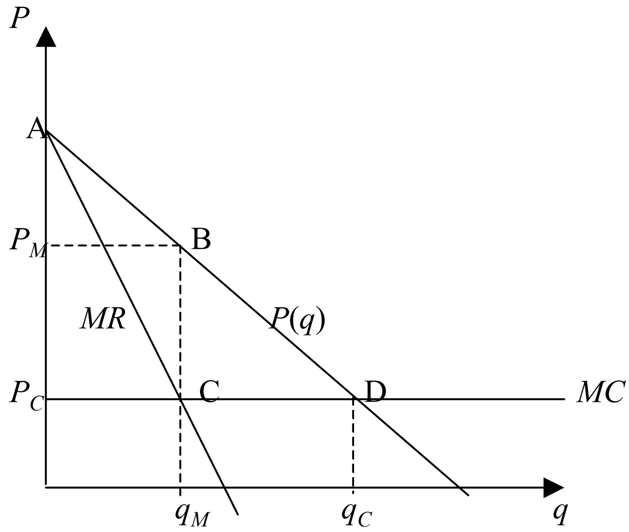
$P_C = MC \Rightarrow P_C^* = 20 \rightarrow$ prezzo di equilibrio in concorrenza perfetta

$P(q) = P_C \Rightarrow 100 - 2q = 20 \Rightarrow 2q = 80$

$q_C^* = \frac{80}{2} = 40 \rightarrow$ quantità prodotta dall'impresa in concorrenza perfetta

NB la quantità prodotta in concorrenza perfetta è maggiore di quella prodotta in monopolio ed il prezzo è minore.

PERDITA NETTA DI MONOPOLIO (*PN*):



La perdita netta di monopolio è rappresentata dall'area del triangolo BCD. Passando dalla concorrenza perfetta al monopolio, il surplus del consumatore si riduce: in concorrenza perfetta è il triangolo AP_CD, in monopolio è il triangolo AP_MB. Parte della riduzione rappresenta un trasferimento dal consumatore al produttore (il rettangolo P_MBCP_C), ma il triangolo BCD rappresenta una perdita netta sociale ed è relativa alla quantità del bene che in monopolio non viene prodotta.

$$PN = \frac{1}{2}(P_M^* - P_C^*)(q_C^* - q_M^*) = \frac{1}{2}(60-20)(40-20) = 400$$

ESERCIZIO 4

(a) MERCATO 1:
Curva di domanda inversa:
$$P(q_1) = 130 - q_1$$
Ricavo totale:
$$RT_1(q_1) = P(q_1)q_1 = (130 - q_1)q_1 = 130q_1 - q_1^2$$
Ricavo marginale:
$$MR_1(q_1) = \frac{dRT_1}{dq_1} = 130 - 2q_1$$
MERCATO 2:
Curva di domanda inversa:
$$P(q_2) = 200 - q_2$$
Ricavo totale:
$$RT_2(q_2) = P(q_2)q_2 = (200 - q_2)q_2 = 200q_2 - q_2^2$$
Ricavo marginale:
$$MR_2(q_2) = \frac{dRT_2}{dq_2} = 200 - 2q_2$$
Il costo totale dipende dall'output complessivamente prodotto:
$$CT(q_1 + q_2) = (q_1 + q_2)^2$$
Il costo marginale è uguale nei due mercati e dipende dall'output totale:
$$MC(q_1 + q_2) = 2(q_1 + q_2)$$

Il monopolista che discrimina il prezzo vuole che il ricavo marginale in ciascun mercato sia uguale al costo marginale.

$$\max_{q_1, q_2} \pi = p_1(q_1)q_1 + p_2(q_2)q_2 - CT(q_1 + q_2)$$

Condizioni del primo ordine:

$$\frac{d\pi}{dq_1} = 0$$

$$\frac{d\pi}{dq_2} = 0$$

Quindi per determinare la quantità venduta in ciascun mercato bisogna risolvere il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} MR_1 = MC \Rightarrow 130 - 2q_1 = 2(q_1 + q_2) \Rightarrow 65 - q_1 = q_1 + q_2 \\ MR_2 = MC \Rightarrow 200 - 2q_2 = 2(q_1 + q_2) \Rightarrow 100 - q_2 = q_1 + q_2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo q_2, che poi sostituiamo nella seconda:

$$q_2 = 65 - 2q_1$$

$$100 - 2(65 - 2q_1) = q_1$$

$$3q_1 = 130 - 100 \Rightarrow q_1^* = \frac{30}{3} = 10$$

$$q_2^* = 65 - 2q_1^* = 65 - 2(10) = 45$$

Dalle funzioni di domanda si ricavano i prezzi a cui le quantità appena determinate vengono vendute in ciascun mercato:

$$P_1^* = P(q_1^*) = 130 - q_1^* = 130 - 10 = 120$$

$$P_2^* = P(q_2^*) = 200 - q_2^* = 200 - 45 = 155$$

(b) Siccome $P_2^* > P_1^*$, mi aspetto che la domanda sul mercato 2 sia meno elastica. Il monopolista fisserà un prezzo più elevato sul mercato in cui la domanda è meno sensibile al prezzo ed un prezzo più basso sul mercato dove la domanda è più sensibile al prezzo. Calcoliamo le elasticità in corrispondenza del prezzo e della quantità di massimo profitto.

MERCATO 1:

$$\varepsilon_{p_1} = \frac{\frac{dq_1}{q_1^*}}{\frac{dp_1}{p_1^*}} = \frac{dq_1}{dp_1}\frac{p_1^*}{q_1^*} = -\frac{120}{10} = -12$$

$$\varepsilon_{p2} = \frac{\frac{dq_2}{q_2^*}}{\frac{dp_2}{p_2^*}} = \frac{dq_2}{dp_2}\frac{p_2^*}{q_2^*} = -\frac{155}{45} = -3,\overline{4}$$

In valore assoluto, l'elasticità della domanda sul mercato 2 è minore di quella sul mercato 1:

$$\left|\varepsilon_{p2}\right| < \left|\varepsilon_{p_1}\right|$$

Oligopolio

1. La curva di domanda inversa di mercato di un bene è $P(Y)=100-2Y$ e la funzione del costo totale per qualsiasi impresa che lo produce è $CT(y)=4y$.

(a) Supponiamo che il mercato del bene sia perfettamente concorrenziale, determinare l'output dell'industria ed il prezzo di mercato.

(b) Supponiamo invece che nell'industria siano presenti due imprese che operano secondo le ipotesi di Cournot. Determinare l'output dell'industria, il prezzo di mercato, la quantità prodotta ed i profitti realizzati da ciascuna impresa.

(c) Supponiamo adesso che le due imprese scelgano di colludere, determinare l'output dell'industria, il prezzo di mercato, la quantità prodotta ed i profitti realizzati da ciascuna impresa.

(d) Supponiamo che una delle due imprese sia leader nel senso di Stackelberg e l'altra sia follower. Determinare il livello di output del leader e quello del follower, l'output totale dell'industria, il prezzo di mercato e i profitti realizzati da ciascuna impresa.

2. Si consideri un mercato duopolistico. La curva di domanda dell'intero mercato è $Q(P)=50-\dfrac{P}{2}$, dove Q è la quantità complessivamente domandata (q_1+q_2). Le due imprese hanno la stessa curva di costo totale:

$CT_1(q_1)=80+10q_1$

$CT_2(q_2)=80+10q_2$

(a) Supponendo che le imprese si comportino secondo le ipotesi di Cournot, determinate la curva di isoprofitto e le curve di reazione di ogni impresa, le quantità, i prezzi e i profitti in equilibrio.

(b) Se invece l'impresa 1 è una leader nel senso di Stackelberg, determinate le curve di reazione di entrambe le imprese, i prezzi, le quantità e i profitti di equilibrio del mercato.

3. Considerate un mercato oligopolistico composto da alcune imprese, dove prevalga un prezzo pari a 280. Due di queste imprese (impresa A e impresa B) hanno effettuato un'indagine di mercato e hanno scoperto che, se decidessero di aumentare il prezzo, si troverebbero di fronte una curva di domanda d'impresa inversa $P(Q)=310-Q$; se invece decidessero di diminuirlo, la curva diventerebbe $P(Q)=400-4Q$.

(a) Determinate la quantità prodotta dall'impresa A e il suo profitto di equilibrio sapendo che ha costi marginali costanti pari a 250 e costi fissi pari a 0.

(b) Determinate la quantità prodotta dall'impresa B e il suo profitto di equilibrio sapendo che ha costi marginali costanti pari a 160 e costi fissi nulli.

(c) Dite come cambierebbe l'equilibrio di lungo periodo se i costi fissi di ambedue le imprese salissero a 2500.

(d) Sempre con costi fissi pari a 0, tutte le imprese meno l'impresa A riescono a ridurre i propri costi marginali a 80. Determinate il nuovo equilibrio di lungo periodo su questo mercato se l'impresa A non riesce a rendere più competitiva la sua struttura dei costi.

ESERCIZIO 1

Curva di domanda:

$P(Y) = 100 - 2Y \Rightarrow Y(P) = 50 - \dfrac{P}{2}$

Costo totale:

$CT(y) = 4y$

(a) CONCORRENZA PERFETTA: l'equilibrio si ha in corrispondenza dell'uguaglianza tra prezzo e costo marginale.

$MC(y) = 4$

$P_C = MC \Rightarrow P_C = 4 \rightarrow$ prezzo di mercato

$Y_C = Y(P_C) = 50 - \dfrac{P_C}{2} = 50 - \dfrac{4}{2} = 48 \rightarrow$ output dell'industria.

(b) MODELLO DI COURNOT: ci sono due imprese, impresa 1 e impresa 2. La funzione di domanda inversa dipende dalla quantità totale ($y_1 + y_2$):

$P(y_1 + y_2) = 100 - 2(y_1 + y_2)$

Costo totale dell'impresa 1:

$CT_1(y_1) = 4y_1$

Costo totale dell'impresa 2:

$CT_2(y_2) = 4y_2$

PROBLEMA DELL'IMPRESA 1: l'impresa 1 massimizza il proprio profitto considerando come data la quantità prodotta dall'impresa 2:

max $\pi_1 = P(y_1 + y_2^e)y_1 - CT_1(y_1) = [100 - 2(y_1 + y_2^e)]y_1 - 4y_1 = 96y_1 - 2y_1^2 - 2y_1y_2^e$

dove y_2^e è la quantità che l'impresa 1 si aspetta venga prodotta dall'impresa 2.

$\dfrac{d\pi_1}{dy_1} = 96 - 4y_1 - 2y_2^e = 0$

$y_1(y_2^e) = 24 - \dfrac{1}{2}y_2^e \rightarrow$ funzione di reazione dell'impresa 1

PROBLEMA DELL'IMPRESA 2: l'impresa 2 massimizza il proprio profitto considerando come data la quantità prodotta dall'impresa 1:

max $\pi_2 = P(y_1^e + y_2)y_2 - CT_2(y_2) = [100 - 2(y_1^e + y_2)]y_2 - 4y_2 = 96y_2 - 2y_2^2 - 2y_2y_1^e$

dove y_1^e è la quantità che l'impresa 2 si aspetta venga prodotta dall'impresa 1.

$\dfrac{d\pi_2}{dy_2} = 96 - 4y_2 - 2y_1^e = 0$

$y_2(y_1^e) = 24 - \dfrac{1}{2}y_1^e \rightarrow$ funzione di reazione dell'impresa 2

Mettendo a sistema le due funzioni di reazione, risolviamo simultaneamente rispetto alle quantità prodotte dalle 2 imprese in modo tale che in equilibrio le aspettative vengano realizzate:

$y_1 = y_1^e$ e $y_2 = y_2^e$.

$$\begin{cases} y_1 = 24 - \frac{1}{2}y_2 \Rightarrow y_1 = 24 - \frac{1}{2}y_2 \\ y_2 = 24 - \frac{1}{2}y_1 \Rightarrow y_2 = 24 - \frac{1}{2}\left(24 - \frac{1}{2}y_2\right) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema:

$$y_2 = 24 - 12 + \frac{1}{4}y_2 \Rightarrow \frac{3}{4}y_2 = 12$$

$y_2^* = \frac{4}{3}(12) = 16 \rightarrow$ quantità prodotta dall'impresa 2

$y_1^* = 24 - \frac{1}{2}y_2^* = 24 - \frac{1}{2}(16) = 16 \rightarrow$ quantità prodotta dall'impresa 1.

$Y^* = y_1^* + y_2^* = 16 + 16 = 32 \rightarrow$ output dell'industria

$P^* = P(Y^*) = 100 - 2Y^* = 100 - 2(32) = 36 \rightarrow$ prezzo di equilibrio

$\pi_1^* = P^* y_1^* - CT_1(y_1^*) = 36(16) - 4(16) = 512 \rightarrow$ profitto realizzato dall'impresa 1

$\pi_2^* = P^* y_2^* - CT_2(y_2^*) = 36(16) - 4(16) = 512 \rightarrow$ profitto realizzato dall'impresa 2

(c) COLLUSIONE: le imprese si accordano e cercano di determinare prezzi e quantità in modo da rendere massimo il profitto totale dell'industria, dividendosi poi tra loro tale profitto:

$$\max\ \pi = P(y_1 + y_2)(y_1 + y_2) - CT_1(y_1) - CT_2(y_2) = [100 - 2(y_1 + y_2)](y_1 + y_2) - 4y_1 - 4y_2$$
$$= 100(y_1 + y_2) - 2(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 - 4y_2$$

Condizioni del primo ordine:

$$\frac{d\pi_1}{dy_1} = \frac{d\pi_2}{dy_2} = 100 - 4(y_1 + y_2) - 4 = 0$$

$(y_1 + y_2)^* = Y^* = \frac{96}{4} = 24 \rightarrow$ output dell'industria

Siccome le 2 imprese hanno esattamente gli stessi costi, si dividono a metà la produzione:

$y_1^* = y_2^* = \frac{Y^*}{2} = \frac{24}{2} = 12 \rightarrow$ quantità prodotta da ciascuna impresa

$P^* = P(Y^*) = 100 - 2Y^* = 100 - 2(24) = 52 \rightarrow$ prezzo di equilibrio

$\pi_i^* = P^* y_i^* - CT_i(y_i^*) = 52(12) - 4(12) = 560 \rightarrow$ profitto realizzato dall'impresa 1 e dall'impresa 2

(d) MODELLO DI STACKELBERG: ci sono 2 imprese, una leader ed una follower. L'impresa leader muove per prima; si aspetta che l'impresa follower tenti di massimizzare il proprio profitto, date le sue decisioni. L'impresa follower massimizza il profitto date le decisioni dell'impresa leader (si comporta come un'impresa di Cournot).

PROBLEMA DELL'IMPRESA FOLLOWER:

$$\max\ \pi_F = P(\bar{y}_L + y_F)y_F - CT_F(y_F) = [100 - 2(\bar{y}_L + y_F)]y_F - 4y_F$$

$$\frac{d\pi_F}{dy_F} = 100 - 2(\bar{y}_L + y_F) - 2y_F - 4 = 0$$

$96 - 2\bar{y}_L - 4y_F = 0 \Rightarrow y_F = 24 - \frac{1}{2}\bar{y}_L \rightarrow$ funzione di reazione dell'impresa follower.

PROBLEMA DELL'IMPRESA LEADER: l'impresa leader sa che la quantità prodotta dall'impresa follower dipende dalle sue decisioni:

max $\pi_L = P(y_L + y_F)y_L - CT_L(y_L) = [100 - 2(y_L + y_F)]y_L - 4y_L$ con $y_F = 24 - \frac{1}{2}y_L$

$$\pi_L = \left[100 - 2(y_L + 24 - \frac{1}{2}y_L)\right]y_L - 4y_L$$
$$= (52 - y_L)y_L - 4y_L = 48y_L - y_L^2$$
$$\frac{d\pi_L}{dy_L} = 48 - 2y_L = 0$$

$y_L^* = \frac{48}{2} = 24 \rightarrow$ quantità prodotta dall'impresa leader

$y_F^* = 24 - \frac{1}{2}y_L^* = 24 - \frac{24}{2} = 12 \rightarrow$ quantità prodotta dall'impresa follower

$Y^* = y_L^* + y_F^* = 24 + 12 = 36 \rightarrow$ output dell'industria

$P^* = P(Y^*) = 100 - 2Y^* = 100 - 2(36) = 28 \rightarrow$ prezzo di equilibrio

$\pi_L^* = P^* y_L^* - CT_L(y_L^*) = 28(24) - 4(24) = 576 \rightarrow$ profitto realizzato dall'impresa leader

$\pi_F^* = P^* y_F^* - CT_F(y_F^*) = 28(12) - 4(12) = 288 \rightarrow$ profitto realizzato dall'impresa follower

ESERCIZIO 2

Curva di domanda di mercato:

$Q(P) = 50 - \frac{P}{2} \Rightarrow P(Q) = 100 - 2Q$

$Q = q_1 + q_2$

Costo totale:

$CT_1(q_1) = 80 + 10q_1$

$CT_2(q_2) = 80 + 10q_2$

(a) COURNOT

CURVE DI ISOPROFITTO

Impresa 1:

$$\pi_1 = P(q_1 + q_2)q_1 - CT_1(q_1) = [100 - 2(q_1 + q_2)]q_1 - 80 - 10q_1$$
$$= 100q_1 - 2q_1^2 - 2q_1q_2 - 80 - 10q_1$$
$$= -2q_1^2 + (90 - 2q_2)q_1 - 80$$

$\pi_1^0 = -2q_1^2 + (90 - 2q_2)q_1 - 80 \rightarrow$ curva di isoprofitto

Impresa 2:

$$\pi_2 = P(q_1 + q_2)q_2 - CT_2(q_2) = [100 - 2(q_1 + q_2)]q_2 - 80 - 10q_2$$
$$= 100q_2 - 2q_2^2 - 2q_1q_2 - 80 - 10q_2$$
$$= -2q_2^2 + (90 - 2q_1)q_2 - 80$$

$\pi_2^0 = -2q_2^2 + (90 - 2q_1)q_2 - 80 \rightarrow$ curva di isoprofitto

FUNZIONI DI REAZIONE

Impresa 1:

max $\pi_1(q_1) = -2q_1^2 + (90 - 2q_2)q_1 - 80$

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = -4q_1 + 90 - 2q_2 = 0$$

$q_1(q_2) = \dfrac{90 - 2q_2}{4} \rightarrow$ funzione di reazione dell'impresa 1

Impresa 2:

max $\pi_2(q_2) = -2q_2^2 + (90 - 2q_1)q_2 - 80$

$$\frac{d\pi_2}{dq_2} = -4q_2 + 90 - 2q_1 = 0$$

$q_2(q_1) = \dfrac{90 - 2q_1}{4} \rightarrow$ funzione di reazione dell'impresa 2

QUANTITA' DI EQUILIBRIO

Si risolve il seguente sistema:

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{90 - 2q_2}{4} \\ q_2 = \dfrac{90 - 2q_1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = 22{,}5 - \dfrac{1}{2}q_2 \\ q_2 = \dfrac{1}{4}\left[90 - 2\left(22{,}5 - \dfrac{1}{2}q_2\right)\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 22{,}5 - \dfrac{1}{2}q_2 \\ q_2 = 22{,}5 - \dfrac{1}{2}22{,}5 + \dfrac{1}{4}q_2 \end{cases}$$

$q_2^* = \dfrac{2}{3}22{,}5 = 15 \rightarrow$ quantità prodotta dall'impresa 2

$q_1^* = 22{,}5 - \dfrac{1}{2}15 = 15 \rightarrow$ quantità prodotta dall'impresa 1

Le due imprese producono la stessa quantità ed hanno quindi stessi profitti.

$Q^* = q_1^* + q_2^* = 15 + 15 = 30 \rightarrow$ output totale

$P^* = P(Q^*) = 100 - 2(30) = 40 \rightarrow$ prezzo di equilibrio

$\pi_1^* = P^* q_1^* - CT_1(q_1^*) = 40(15) - 80 - 10(15) = 370 \rightarrow$ profitto dell'impresa 1

$\pi_2^* = P^* q_2^* - CT_2(q_2^*) = 40(15) - 80 - 10(15) = 370 \rightarrow$ profitto dell'impresa 2

(b) STACKELBERG: l'impresa 1 è la leader, l'impresa 2 è la follower. L'impresa follower si comporterà esattamente come nel modello di Cournot, ossia massimizza il proprio profitto date le scelte dell'impresa leader. La sua funzione di reazione è quella determinata al punto precedente:

$$q_2(q_1) = \frac{90 - 2q_1}{4}$$

L'impresa leader massimizza il proprio profitto sapendo che l'impresa 2 si comporterà da follower:

max $\pi_1(q_1) = -2q_1^2 + (90 - 2q_2)q_1 - 80 = -2q_1^2 + \left(90 - 2\dfrac{90 - 2q_1}{4}\right)q_1 - 80$

$$-2q_1^2 + 90q_1 - 45q_1 + q_1^2 - 80 = -q_1^2 + 45q_1 - 80$$

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = -2q_1 + 45 = 0$$

$q_1^* = \dfrac{45}{2} = 22{,}5 \rightarrow$ quantità prodotta dall'impresa leader

$q_2^* = \dfrac{90-2(22{,}5)}{4} = 11{,}25 \rightarrow$ quantità prodotta dall'impresa follower

$Q^* = q_1^* + q_2^* = 22{,}5 + 11{,}25 = 33{,}75 \rightarrow$ output totale

$P^* = P(Q^*) = 100 - 2(33{,}75) = 32{,}5 \rightarrow$ prezzo di equilibrio

$\pi_1^* = P^* q_1^* - CT_1(q_1^*) = 32{,}5(22{,}5) - 80 - 10(22{,}5) = 426{,}25 \rightarrow$ profitto dell'impresa 1

$\pi_2^* = P^* q_2^* - CT_2(q_2^*) = 32{,}5(11{,}25) - 80 - 10(11{,}25) = 173{,}125 \rightarrow$ profitto dell'impresa 2

ESERCIZIO 3

$P^* = 280 \rightarrow$ prezzo di equilibrio
Curva di domanda spezzata:
$P(Q) = 310 - Q$ per $P > 280$
$P(Q) = 400 - 4Q$ per $P < 280$

L a domanda si spezza in corrispondenza di una quantità pari a:

$310 - Q = 400 - 4Q \Rightarrow Q = \dfrac{90}{3} = 30$

In corrispondenza dell'angolo della curva di domanda, la curva del ricavo marginale presenta un punto di discontinuità saltando da 250 a 160:

TRATTO DELLA DOMANDA PIU' ELASTICO $P(Q) = 310 - Q$

$RT(Q) = P(Q)Q = (310 - Q) = 310Q - Q^2$

$MR_1(Q) = 310 - 2Q$

$MR_1(30) = 310 - 2(30) = 250$

TRATTO DELLA DOMANDA MENO ELASTICO $P(Q) = 400 - 4Q$

$RT(Q) = P(Q)Q = (400 - 4Q) = 400Q - 4Q^2$

$MR_2(Q) = 400 - 8Q$

$MR_2(30) = 400 - 8(30) = 160$

(a) IMPRESA A:

$MC_A = 250 \equiv MR_1(30)$.
L'impresa A produrrà quindi:
$q_A^* = 30$ unità del bene,
le venderà al prezzo di mercato di 280, sosterrà costi totali pari a:
$CT_A(q_A) = 250q_A$

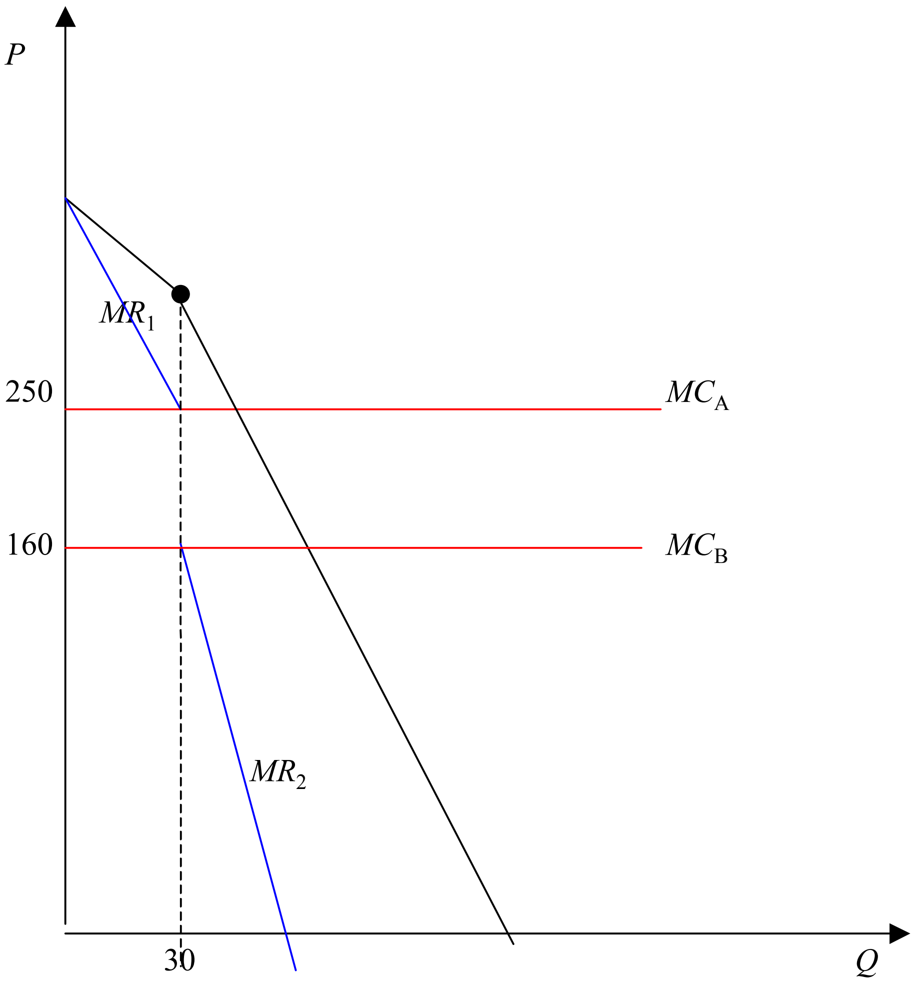
$CT_A(q_A^*) = 250(30) = 7500$

e realizzerà profitti pari a :

$\pi_A^* = P^* q_A^* - CT_A(q_A^*) = 280(30) - 7500 = 900$

(b) IMPRESA B:

$MC_B = 160 \equiv MR_2(30)$.
L'impresa B produrrà quindi:
$q_B^* = 30$ unità del bene,
le venderà al prezzo di mercato di 280, sosterrà costi totali pari a:
$CT_B(q_B) = 160 q_B$
$CT_B(q_B^*) = 160(30) = 4800$
e realizzerà profitti pari a :
$\pi_B^* = P^* q_B^* - CT_B(q_B^*) = 280(30) - 4800 = 3600$
Graficamente:



(c) Cosa succede se: $CF_A = CF_B = 2500$?

L'impresa A esce dal mercato, in quanto produrrebbe in perdita:
$\pi_A^* = P^* q_A^* - CT_A(q_A^*) = 280(30) - 7500 - 2500 = -1600$,

l'impresa B rimane sul mercato e realizza profitti pari a:
$\pi_B^* = P^* q_B^* - CT_B(q_B^*) = 280(30) - 4800 - 2500 = 1100$

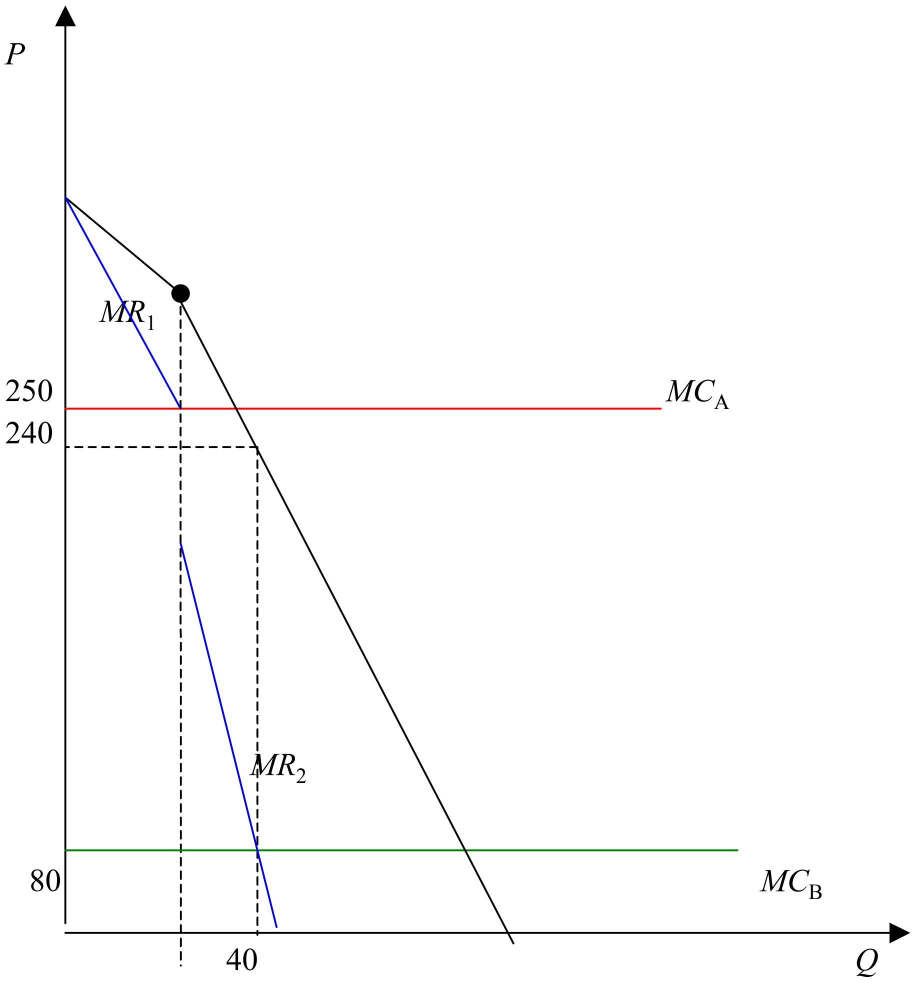
(d) Adesso tutte le imprese presenti sul mercato tranne l'impresa A hanno un costo marginale più basso. Cambia il prezzo di equilibrio del mercato.

$MC = 80$

$$MR_2 = MC$$
$$400 - 8Q = 80$$
$$Q^* = \frac{320}{8} = 40$$
$$P^* = 400 - 4(40) = 240$$

L'impresa A esce dal mercato se non riesce ad abbassare i suoi costi. Infatti il nuovo prezzo di equilibrio è inferiore al suo costo marginale.

Graficamente:



Concorrenza perfetta

1. La funzione di costo di un'impresa che opera in un regime di concorrenza perfetta è: $CT(q) = 2q^2 + 200$. Determinate la sua curva di offerta.

2. La funzione di costo di breve periodo di un'impresa che opera in un regime di concorrenza perfetta è: $CT(q) = q^3 - 8q^2 + 30q + 5$.
(a) Determinate la funzione del costo marginale: $Cma(q)$.
(b) Determinate la funzione del costo medio variabile: $CVme(q)$.
(c) Per quali livelli dell'output il costo medio variabile è decrescente? Per quali livelli dell'output il costo medio variabile è crescente?
(d) Qual è il prezzo al di sotto del quale l'impresa cessa la produzione?

3. Supponete che esistano 10000 consumatori aventi tutti la stessa curva di domanda inversa pari a $P = 24 - q_i^d$ ed inoltre che vi siano 2000 imprese aventi tutte la stessa curva di offerta inversa pari a $P = q_j^s$.
(a) Determinate le curve di domanda e di offerta di mercato, la quantità di equilibrio del bene e il prezzo di mercato.
(b) Supponendo che ogni impresa operante in concorrenza perfetta abbia una curva dei costi medi: $Cme(q) = \dfrac{q}{2} + \dfrac{8}{q}$, calcolate la quantità prodotta dalla singola impresa.
(c) L'equilibrio determinato nel punto precedente è sostenibile nel lungo periodo? Determinate l'equilibrio di lungo periodo. Quante imprese operano sul mercato adesso?

4. Considerate la seguente funzione di costo per ogni impresa che opera in un regime di concorrenza perfetta: $CT(q) = q^3 - \dfrac{1}{2}q^2 + 50q$. Il prezzo di mercato di breve periodo, P^*, è uguale a 60.
(a) Determinate la quantità prodotta da ogni singola impresa nel breve periodo.
(b) Data la funzione di domanda di mercato: $Q^d(P) = -100P + 8000$, determinate il numero di imprese presenti sul mercato nel breve periodo.
(c) Determinate nel lungo periodo il prezzo di equilibrio ed il numero di imprese presenti sul mercato.

5. Consideriamo un'industria perfettamente concorrenziale. Tutte le imprese operanti nell'industria hanno la seguente funzione di costo:

$$CT(q) = q^2 + 1 \text{ per } q > 0$$
$$CT(0) = 0.$$

Supponiamo che inizialmente la curva di domanda di mercato sia $D(p) = 52 - p$. (L'output di un'impresa non deve essere necessariamente un numero intero, ma il numero delle imprese deve essere intero).
(a) Determinare la curva di offerta di una singola impresa nel breve periodo.
(b) Se nell'industria sono presenti n imprese, quale è la curva di offerta dell'industria?
(c) Determinare, in equilibrio di lungo periodo, il prezzo di equilibrio, la quantità prodotta da ciascuna impresa, l'output di equilibrio dell'industria ed il numero di imprese presenti sul mercato.

(d) Supponiamo ora che la curva di domanda si sposti a $D(p) = 52{,}5 - p$. Determinare il numero di imprese presenti nell'industria, il prezzo e la quantità prodotta da ciascuna impresa in equilibrio e i profitti di ciascuna impresa.
(e) Supponiamo ora che la curva di domanda si sposti a $D(p) = 53 - p$. Determinare il numero di imprese presenti nell'industria, il prezzo e la quantità prodotta da ciascuna impresa in equilibrio e i profitti di ciascuna impresa.

ESERCIZIO 1

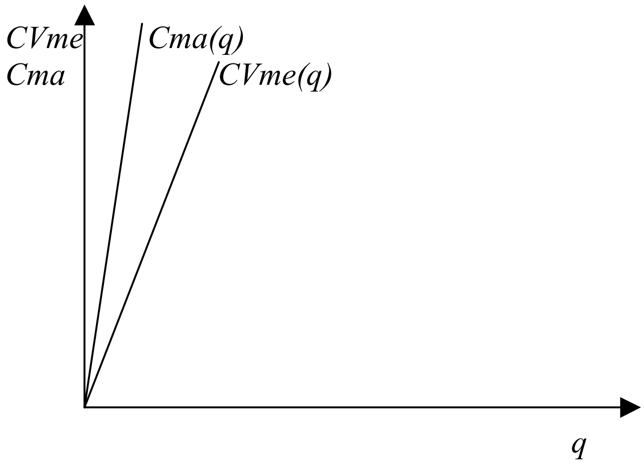
$CT(q) = 2q^2 + 200$

In concorrenza perfetta, la curva di offerta dell'impresa coincide con il tratto crescente del costo marginale che giace al di sopra del costo medio variabile nel breve periodo.

$CVme(q) = 2q$

$Cma(q) = 4q$

In questo caso il costo marginale è sempre al di sopra del costo medio variabile per $q \geq 0$. Infatti rappresentando graficamente le curve del costo medio variabile e del costo marginale:



La curva di offerta individuale di breve periodo è quindi:

$P = Cma(q)$

$P = 4q$ curva di offerta inversa

$q^s(P) = \frac{P}{4}$

ESERCIZIO 2

$CT(q) = q^3 - 8q^2 + 30q + 5$

(a) COSTO MARGINALE:

$Cma(q) = 3q^2 - 16q + 30$

(b) COSTO MEDIO VARIABILE:

$CVme(q) = q^2 - 8q + 30$

(c) Il costo medio variabile è decrescente nel tratto in cui giace al di sopra del costo marginale, è minimo nel punto in cui interseca il costo marginale, è crescente nel tratto che giace al di sotto del costo marginale:

quando $CVme(q) > Cma(q)$ il costo medio variabile è decrescente

$q^2 - 8q + 30 > 3q^2 - 16q + 30 \Rightarrow 2q^2 - 8q < 0 \Rightarrow 0 < q < 4$

quando $CVme(q) < Cma(q)$ il costo medio variabile è crescente

$q^2 - 8q + 30 < 3q^2 - 16q + 30 \Rightarrow 2q^2 - 8q > 0 \Rightarrow q > 4$

(d) L'impresa cessa la produzione per un prezzo al di sotto del costo medio variabile minimo.

$CVme(q)$ è minimo quando $CVme(q) = Cma(q)$

ciò avviene per $q = 4$ (cfr. punto c), $CVme(q)_{min} = CVme(4) = (4)^2 - 8(4) + 30 = 14$

Quindi per $P > 14$ l'impresa produce
per $P < 14$ l'impresa cessa la produzione.

ESERCIZIO 3

Curva di domanda individuale (inversa):
$P = 24 - q_i^d$ con i =1, …, 10000
Curva di offerta individuale (inversa):
$P = q_j^s$ con j = 1, …, 2000.

(a) CURVA DI DOMANDA DI MERCATO: è la somma orizzontale delle curve di domanda individuale dei consumatori:

$$Q^d(P) = \sum_{i=1}^{10000} q_i^d$$

$q_i^d = 24 - P$, poiché i consumatori sono tutti identici ed hanno la stessa funzione di domanda:

$$Q^d(P) = 10000 q_i^d = 240000 - 10000P$$

CURVA DI OFFERTA DI MERCATO: è la somma orizzontale delle curve di offerta individuale delle imprese:

$$Q^s(P) = \sum_{j=1}^{2000} q_j^s$$

$q_j^s = P$, poiché le imprese sono tutte identiche ed hanno la stessa funzione di offerta:

$$Q^s(P) = 2000 q_j^s = 2000P$$

EQUILIBRIO DI MERCATO:

$$Q^d(P) = Q^s(P) \Rightarrow 240000 - 10000P = 2000P \Rightarrow P = \frac{240000}{12000}$$

$P^* = 20$ prezzo di mercato

$Q^* = Q^s(P^*) = Q^d(P^*) = 2000(20) = 40000$ quantità di equilibrio

(b) Costo medio: $Cme(q) = \dfrac{q}{2} + \dfrac{8}{q}$ per ogni impresa

$$CT(q) = \left(\frac{q}{2} + \frac{8}{q}\right)q = \frac{q^2}{2} + 8$$

$$Cma(q) = \frac{dCT(q)}{dq} = \frac{2q}{2} = q$$

La singola impresa produce la quantità in corrispondenza della quale il prezzo di mercato è pari al suo costo marginale:

$$P^* = Cma(q) \Rightarrow P^* = q$$

$$q^* = 20.$$

NB Già lo sapevamo, in realtà, perché l'esercizio dava la curva di offerta individuale della singola impresa, che altro non è che il tratto del costo marginale al di sopra del costo medio variabile. Inoltre, essendo $CVme(q) = \dfrac{q}{2}$ una retta con inclinazione pari a $\dfrac{1}{2}$ (minore dell'inclinazione del costo marginale che è pari a 1), il costo marginale è sempre al di sopra del costo medio variabile, quindi la curva di offerta è la retta del costo marginale.

(c) L'equilibrio determinato al punto precedente non è sostenibile nel lungo periodo. Per vedere ciò, bisogna calcolare se ci sono extra-profitti:

$$\pi^* = P^* q^* - TC(q^*) = 20(20) - \left[\frac{(20)^2}{2} + 8 \right] = 192 > 0$$

In equilibrio di lungo periodo le imprese realizzano extra-profitti nulli, ossia l'equilibrio di lungo periodo è caratterizzato dall'uguaglianza tra prezzo, costo marginale e costo medio ossia è in corrispondenza del costo medio minimo. Quindi calcoliamo la quantità in corrispondenza della quale il costo medio è minimo ed il prezzo di equilibrio è proprio pari al costo medio minimo:

$$Cme(q) = Cma(q) \Rightarrow \frac{q}{2} + \frac{8}{q} = q \Rightarrow \frac{q}{2} - \frac{8}{q} = 0 \Rightarrow \frac{q^2 - 16}{2q} = 0$$

$q^* = 4$ quantità prodotta dalla singola impresa nel lungo periodo.

Il prezzo di equilibrio è:

$$P^* = Cme(q^*) \Rightarrow P^* = \frac{4}{2} + \frac{8}{4} = 4$$

In corrispondenza di un prezzo di mercato pari a 4, la quantità complessivamente domandata dal mercato è:

$$Q^d(4) = 240000 - 10000(4) = 200000$$

Affinché ci sia equilibrio di mercato, l'offerta aggregata deve essere uguale alla domanda aggregata in corrispondenza del prezzo di equilibrio:

$Q^d(P) = Q^s(P)$ dove $Q^s(P) = nq^*$, n è il numero di imprese presenti sul mercato (la nostra incognita). Quindi:

$$Q^d(P) = nq^* \Rightarrow 200000 = 4n \Rightarrow n = \frac{200000}{4} = 50000$$

ESERCIZIO 4

Funzione del costo totale:

$CT(q) = q^2 + 1$ per $q > 0$

$CT(0) = 0$.

Curva di domanda:

$Q^d(p) = 52 - p$

(a) BREVE PERIODO: la curva di offerta di breve periodo coincide con il tratto del costo marginale al di sopra del costo medio variabile.

$Cma(q) = 2q$

$CVme(q) = q$

Il costo marginale ed il costo medio variabile sono rette che partono dall'origine. Siccome il costo marginale ha inclinazione maggiore del costo medio variabile, il costo marginale è sempre al di sopra del costo medio variabile per $q > 0$. Allora la curva di offerta di breve periodo è data da:

$p = Cma(q) \Rightarrow p(q) = 2q$

$q^s(p) = \frac{p}{2}$ per $p > 0$.

(b) Se nell'industria sono presenti n imprese, la curva di offerta dell'industria è data da:

$Q^s(p) = nq^s(p)$

$Q^s(p) = n\dfrac{p}{2}$

(c) LUNGO PERIODO: nel lungo periodo l'equilibrio si ha in corrispondenza di un prezzo pari al costo medio minimo:

$p = Cma(q) = Cme(q)$ ossia $p^* = Cme_{\min}$

$\min \; Cme(q) = q + \dfrac{1}{q}$

$$\frac{dCme(q)}{dq} = 1 - \frac{1}{q^2} = 0 \Rightarrow \frac{q^2 - 1}{q^2} = 0$$

$q^* = 1 \rightarrow$ quantità prodotta da ciascuna impresa.

Il prezzo di equilibrio è pari al costo medio minimo:

$p^* = Cme_{\min} = Cme(q^*)$

$p^* = 1 + 1 = 2 \rightarrow$ prezzo di equilibrio.

Per un prezzo pari a 2 la quantità complessivamente domandata e, affinché ci sia equilibrio, offerta è pari a:

$Q^* = Q^d(p^*) = 52 - 2 = 50$

Siccome ciascuna impresa produce $q^* = 1$, sul mercato saranno presenti:

$n = \dfrac{Q^*}{q^*} = \dfrac{50}{1} = 50$ imprese.

(d) Adesso la curva di domanda è:

$Q^d(p) = 52{,}5 - p$. Vediamo cosa succede se entra un'altra impresa nel mercato. Con $n = 51$ imprese, la curva di offerta dell'industria diventa:

$Q^s(p) = 51q^s(p)$. Non essendo cambiata la struttura dei costi delle imprese presenti nell'industria, la curva di offerta individuale di ciascuna impresa non varia: $q^s(p) = \dfrac{p}{2}$. Allora:

$Q^s(p) = 51\dfrac{p}{2}$.

$Q^s(p) = 25{,}5p$

Affinché ci sia equilibrio, l'offerta deve essere uguale alla domanda di mercato:

$Q^s(p) = Q^d(p) \Rightarrow 25{,}5p = 52{,}5 - p \Rightarrow 26{,}5p = 52{,}5$

$p^* = \dfrac{52{,}5}{26{,}5} \cong 1{,}98 < 2$

Ciò vuol dire che, se entrasse una nuova impresa nell'industria, il prezzo di equilibrio scenderebbe al di sotto del costo medio minimo. Una nuova impresa non entrerebbe in questo mercato, visto che con la sua entrata si troverebbe a produrre in perdita. Quindi n sarà ancora uguale a 50. La domanda non è aumentata a sufficienza da permettere l'entrata di altre imprese nell'industria. Cosa succede al prezzo di equilibrio?

$Q^s(p) = 50\frac{p}{2}$

$Q^s(p) = 25p$

$Q^d(p) = 52{,}5 - p$

$Q^s(p) = Q^d(p) \Rightarrow 25p = 52{,}5 - p$

$p^* = \frac{52{,}5}{25} \cong 2{,}02$

Il prezzo di equilibrio adesso è maggiore del costo medio minimo.
La quantità prodotta da ciascuna impresa è:

$q^s(p^*) = \frac{p^*}{2} = \frac{2{,}02}{2} = 1{,}01$

e il profitto di ciascuna impresa è:

$\pi^* = p^*q^* - CT(q^*) = 2{,}02(1{,}01) - (1{,}01)^2 - 1 = 0{,}0201$

(e) Adesso la curva di domanda è:

$Q^d(p) = 53 - p$. Vediamo cosa succede se entra un'altra impresa nel mercato. Con n = 51 imprese, la curva di offerta dell'industria diventa:

$Q^s(p) = 51\frac{p}{2}$.

$Q^s(p) = 25{,}5p$

Affinché ci sia equilibrio, l'offerta deve essere uguale alla domanda di mercato:

$Q^s(p) = Q^d(p) \Rightarrow 25{,}5p = 53 - p \Rightarrow 26{,}5p = 53$

$p^* = \frac{53}{26{,}5} = 2 = Cme_{\min}$. Il prezzo di equilibrio è uguale al costo medio minimo.

La quantità prodotta da ciascuna impresa è:

$q^s(p^*) = \frac{p^*}{2} = \frac{2}{2} = 1$

e gli extra-profitti di ciascuna impresa sono nulli:

$\pi^* = p^*q^* - CT(q^*) = 2(1) - (1)^2 - 1 = 0$

ESERCIZI

Quasi-concavità

1. Verificare che la seguente funzione di utilità è una funzione quasi-concava:

$u(q_1,q_2) = 4q_1 + 8q_2$

$q^a = (q_1^a;q_2^a) = (4;0.5)$

$q^b = (q_1^b;q_2^b) = (2;1.5)$

Stretta quasi-concavità

2. Verificare che la seguente funzione di utilità è una funzione strettamente quasi-concava:

$u(q_1,q_2) = q_1q_2$

$q^a = (q_1^a;q_2^a) = (5;4)$

$q^b = (q_1^b;q_2^b) = (2;10)$

Trasformazione monotona

3. Sia data la seguente funzione di utilità:

$u(q_1,q_2) = q_1 + q_2$,

dimostrare che la sua trasformazione monotona positiva:

$v(q_1,q_2) = u^2 = (q_1 + q_2)^2 = q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2$

rappresenta le stesse preferenze.

Saggio marginale di sostituzione

4. Riempite la seguente tavola:

$u(q_1,q_2)$	$MU_1(q_1,q_2)$	$MU_2(q_1,q_2)$	$MRS(q_1,q_2)$
$2q_1 + 3q_2$			
$4q_1 + 6q_2$			
$aq_1 + bq_2$			
$2\sqrt{q_1} + q_2$			
$\ln q_1 + q_2$			
$v(q_1) + q_2$			
q_1q_2			
$q_1^a q_2^b$			
$(q_1 + 2)(q_2 + 1)$			
$(q_1 + a)(q_2 + b)$			
$q_1^a + q_2^b$			

ESERCIZIO 1

FUNZIONE QUASI-CONCAVA:

$u[\alpha q^a + (1-\alpha) q^b] \geq \min[u(q^a), u(q^b)]$ per ogni $\alpha \in [0,1]$

$u(q_1, q_2) = 4q_1 + 8q_2$

$q^a = (q_1^a; q_2^a) = (4;0,5)$ $\quad u(q^a) = 4(4) + 8(0,5) = 20$

$q^b = (q_1^b; q_2^b) = (2;1,5)$ $\quad u(q^b) = 4(2) + 8(1,5) = 20$

$u(q^a) = u(q^b) = 20$

Consideriamo un paniere q^c che sia una combinazione lineare dei due panieri iniziali:

$q^c = \alpha q^a + (1-\alpha) q^b$ per $\alpha = \frac{1}{2}$

$$q_1^c = \frac{1}{2} q_1^a + \frac{1}{2} q_1^b = \frac{4}{2} + \frac{2}{2} = 3$$

$$q_2^c = \frac{1}{2} q_2^a + \frac{1}{2} q_2^b = \frac{0,5}{2} + \frac{1,5}{2} = 1$$

$$u(q^c) = u\left[\frac{1}{2} q^a + \frac{1}{2} q^b\right] = 4(3) + 8(1) = 20 = u(q^a) = u(q^b)$$

ESERCIZIO 2

FUNZIONE STRETTAMENTE QUASI-CONCAVA

$u[\alpha q^a + (1-\alpha) q^b] > \min[u(q^a), u(q^b)]$ per ogni $\alpha \in (0,1)$

$u(q_1, q_2) = q_1 q_2$

$q^a = (q_1^a; q_2^a) = (5;4)$ $\quad u(q^a) = 5(4) = 20$

$q^b = (q_1^b; q_2^b) = (2;10)$ $\quad u(q^b) = 2(10) = 20$

$u(q^a) = u(q^b) = 20$

Consideriamo un paniere q^c che sia una combinazione lineare dei due panieri iniziali:

$q^c = \alpha q^a + (1-\alpha) q^b$ per $\alpha = 0,7$

$q_1^c = 0,7 q_1^a + 0,3 q_1^b = 0,7(5) + 0,3(2) = 4,1$

$q_2^c = 0,7 q_2^a + 0,3 q_2^b = 0,7(4) + 0,3(10) = 5,8$

$u(q^c) = u[0,7 q^a + 0,3 q^b] = 4,1(5,8) = 23,78 > 20 = u(q^a) = u(q^b)$

ESERCIZIO 3

TRASFORMAZIONE MONOTONA: bisogna dimostrare che la funzione *u* e la sua trasformazione *v* generano un identico SMS.

$u(q_1, q_2) = q_1 + q_2$ $\quad SMS = \dfrac{\partial u / \partial q_1}{\partial u / \partial q_2} = \dfrac{1}{1} = 1$

$v(q_1, q_2) = u^2 = (q_1 + q_2)^2 = q_1^2 + 2q_1 q_2 + q_2^2$ $\quad SMS = \dfrac{\partial v / \partial q_1}{\partial v / \partial q_2} = \dfrac{2q_1 + 2q_2}{2q_1 + 2q_2} = 1$

Alternativamente considerate due panieri qualsiasi, ad esempio:

$q^a = (q_1^a; q_2^a) = (2;3)$ $\quad u(q^a) = 2 + 3 = 5$

$q^b = (q_1^b; q_2^b) = (4;6)$ $\quad u(q^b) = 4 + 6 = 10$

Siccome $u(q^a) < u(q^b)$, il paniere q^b è preferito al paniere q^a. Vediamo quale è l'ordine di preferenza considerando la funzione *v*: se la funzione *v* è una trasformazione monotona positiva della funzione *u*, dobbiamo avere lo stesso ordine di preferenza. Infatti:

$v(q^a) = (2+3)^2 = 25$

$v(q^b) = (4+6)^2 = 100$

Siccome $v(q^a) < v(q^b)$ il paniere q^b è preferito al paniere q^a.

ESERCIZIO 4

$u(q_1, q_2)$	$MU_1(q_1, q_2)$	$MU_2(q_1, q_2)$	$MRS(q_1, q_2)$
$2q_1 + 3q_2$	2	3	2/3
$4q_1 + 6q_2$	4	6	2/3
$aq_1 + bq_2$	a	b	a/b
$2\sqrt{q_1} + q_2$	$1/\sqrt{q_1}$	1	$1/\sqrt{q_1}$
$\ln q_1 + q_2$	$1/q_1$	1	$1/q_1$
$v(q_1) + q_2$	$v'(q_1)$	1	$v'(q_1)$
$q_1 q_2$	q_2	q_1	q_2/q_1
$q_1^a q_2^b$	$aq_1^{a-1}q_2^b$	$bq_1^a q_2^{b-1}$	$(a/b)(q_2/q_1)$
$(q_1+2)(q_2+1)$	(q_2+1)	(q_1+2)	$(q_2+1)/(q_1+2)$
$(q_1+a)(q_2+b)$	(q_2+b)	(q_1+a)	$(q_2+b)/(q_1+a)$
$q_1^a + q_2^b$	aq_1^{a-1}	bq_2^{b-1}	$(a/b)\left(q_1^{a-1}/q_2^{b-1}\right)$

ESERCIZI

Scelta ottima e funzione di domanda individuale

1. Data la funzione di utilità:

$u(q_1, q_2) = q_1^{1/3} q_2^{2/3}$

determinare le quantità ottime per un consumatore con reddito R pari a 90, nel caso in cui i prezzi dei beni siano $p_1 = 2$ e $p_2 = 5$.

Scrivere le funzioni di domanda individuali del bene 1 e del bene 2.

2. Data la funzione di utilità:

$u(q_1, q_2) = q_1^{1/2} + q_2^{1/2}$

determinare le quantità ottime per un consumatore con reddito R pari a 120, nel caso in cui i prezzi dei beni siano $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$.

Scrivere le funzioni di domanda individuali del bene 1 e del bene 2.

3. La tabella sottostante rappresenta prezzi ed utilità marginali di due beni per un certo consumatore in corrispondenza di una data combinazione delle quantità dei due beni.

Beni

A	B	
10	5	Prezzo
20	30	Utilità marginale

a) Calcolare le utilità marginali ponderate dei due beni.
b) Dire se la combinazione individuata costituisce una posizione di equilibrio del consumatore.
c) Nel caso non si tratti di una posizione di equilibrio, dire se il consumatore tenderà a cedere A e acquistare B o viceversa.

4. E' sabato pomeriggio e Giovanni si trova in Piazza di Spagna con Francesca. Di fronte a loro, c'è un fast food e nella stradina accanto una tea room. I due non riescono a mettersi d'accordo su dove andare. La funzione di utilità di Giovanni U_G, che si trova a scegliere tra il consumo di hamburger h e di dolci d, è la seguente:

$U_G = h^{1/2} d^{1/2}$,

mentre la funzione di utilità di Francesca U_F è:

$U_F = h^{1/2} (2d)^{1/2}$.

Il prezzo di un dolce, p_d, è di 5000 lire; il prezzo di un hamburger, p_h, è di 4000 lire. Giovanni ha nel suo portafoglio 20000 lire, mentre Francesca ne ha 40000.

a) Supponendo che ognuno dei due ragazzi paga per se stesso e che possano scegliere di andare in un solo posto, determinate dove vorrebbe andare Giovanni e dove vorrebbe andare Francesca.
b) Mentre stanno ancora discutendo, arriva Alfredo che propone loro di andare in una caffetteria, che ha a disposizione sia hamburger che dolci agli stessi prezzi. Dite se Giovanni e/o Francesca accetteranno l'offerta e, in caso positivo, quanto consumeranno di dolci e/o di hamburger.

c) Alfredo ha a sua volta una funzione di utilità U_A uguale a quella di Giovanni. Siccome Alfredo ha lasciato i soldi a casa, farà mettere in conto la sua consumazione. Determinate quanto dovrà restituire Alfredo nell'ipotesi che la sua soddisfazione dopo la consumazione sia pari a $U_A^* = 5$.

Perfetti sostituti

5. Determinare la scelta ottima del consumatore con funzione di utilità:

$u(q_1, q_2) = q_1 + q_2$

e reddito R pari a 90, nel caso in cui:

a) $p_1 = 1$ e $p_2 = 2$,

b) $p_1 = 3$ e $p_2 = 2$,

c) $p_1 = 2$ e $p_2 = 2$.

Quale è la funzione di domanda del bene 1?

Perfetti complementi

6. Determinare la scelta ottima del consumatore con funzione di utilità:

$u(q_1, q_2) = \min\{q_1, q_2\}$

e reddito R pari a 100, nel caso in cui:

a) $p_1 = 3$ e $p_2 = 5$,

b) $p_1 = 5$ e $p_2 = 5$,

c) $p_1 = 15$ e $p_2 = 5$.

Quale è la funzione di domanda del bene 1?

ESERCIZIO 1

max $u(q_1, q_2) = q_1^{1/3} q_2^{2/3}$
sub $R = p_1 q_1 + p_2 q_2$

$L(q_1, q_2, \lambda) = q_1^{1/3} q_2^{2/3} + \lambda(R - p_1 q_1 - p_2 q_2)$
Condizioni del primo ordine:

$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \qquad \frac{1}{3} q_1^{-2/3} q_2^{2/3} = \lambda p_1 \qquad (1)$

$\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \qquad \frac{2}{3} q_1^{1/3} q_2^{-1/3} = \lambda p_2 \qquad (2)$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \qquad R = p_1 q_1 + p_2 q_2 \qquad (3)$

Dividendo membro a membro la (1) e la (2), si ottiene:

$\frac{1}{2} \frac{q_2}{q_1} = \frac{p_1}{p_2}$ che esprime la condizione di equilibrio: $SMS = \frac{p_1}{p_2}$, da cui:

$q_2 = 2 \frac{p_1}{p_2} q_1$ (4).

Sostituendo la (4) nella (3) si ottiene:

$R = p_1 q_1 + p_2 \left(2 \frac{p_1}{p_2} q_1 \right)$ e risolvendo rispetto a q_1, si ottiene la funzione di domanda individuale del bene 1:

$q_1^d (p_1, p_2, R) = \frac{1}{3} \frac{R}{p_1}$

Sostituendo q_1 appena determinato nella (4), si ottiene la funzione di domanda individuale del bene 2:

$q_2^d (p_1, p_2, R) = \frac{2}{3} \frac{R}{p_2}$.

Per $R = 90$, $p_1 = 2$ e $p_2 = 5$, le quantità ottime del bene 1 e del bene 2 sono:

$q_1^* = q_1^d (2{,}5{,}90) = \frac{1}{3} \frac{90}{2} = 15$

$q_2^* = q_2^d (2{,}5{,}90) = \frac{2}{3} \frac{90}{5} = 12$

ESERCIZIO 2

max $u(q_1, q_2) = q_1^{1/2} + q_2^{1/2}$
sub $R = p_1 q_1 + p_2 q_2$

$L(q_1, q_2, \lambda) = q_1^{1/2} + q_2^{1/2} + \lambda(R - p_1 q_1 - p_2 q_2)$
Condizioni del primo ordine:

$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \qquad \frac{1}{2} q_1^{-1/2} = \lambda p_1 \qquad (1)$

$\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \qquad \frac{1}{2} q_2^{-1/2} = \lambda p_2 \qquad (2)$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \qquad R = p_1 q_1 + p_2 q_2 \qquad (3)$

Dividendo membro a membro la (1) e la (2), si ottiene:

$\left(\frac{q_2}{q_1} \right)^{1/2} = \frac{p_1}{p_2}$ che esprime la condizione di equilibrio: $SMS = \frac{p_1}{p_2}$, da cui:

$$q_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 q_1 \qquad (4).$$

Sostituendo la (4) nella (3) si ottiene:

$R = p_1q_1 + p_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 q_1$ e risolvendo rispetto a q_1, si ottiene la funzione di domanda individuale del bene 1:

$$q_1^d(p_1, p_2, R) = \frac{p_2R}{p_1(p_1 + p_2)}$$

Sostituendo q_1 appena determinato nella (4), si ottiene la funzione di domanda individuale del bene 2:

$$q_2^d(p_1, p_2, R) = \frac{p_1R}{p_2(p_1 + p_2)}.$$

Per $R = 120$, $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$, le quantità ottime del bene 1 e del bene 2 sono:

$$q_1^* = q_1^d(2,3,120) = \frac{3(120)}{2(2+3)} = 36$$

$$q_2^* = q_2^d(2,3,120) = \frac{2(120)}{3(2+3)} = 16$$

ESERCIZIO 3

a) UTILITA' MARGINALI PONDERATE

L'utilità marginale ponderata del bene A è:

$$\frac{MU_A}{p_A} = \frac{20}{10} = 2$$

L'utilità marginale ponderata del bene B è:

$$\frac{MU_B}{p_B} = \frac{30}{5} = 6$$

b) POSIZIONE DI OTTIMO DEL CONSUMATORE

La posizione di ottimo si ha in corrispondenza del punto in cui le utilità marginali ponderate dei due beni sono uguali. Essendo diverse, non è una posizione di ottimo.

c) Essendo l'utilità marginale ponderata del bene A minore dell'utilità marginale ponderata del bene B, il consumatore cede il bene A ed acquista il bene B.

ESERCIZIO 4

a) In entrambi i casi U = 0, hanno utilità positiva solo consumando entrambi i beni.

b) Sia Giovanni che Francesca accetteranno la proposta di Alfredo.

GIOVANNI:

max $U_G = h^{1/2}d^{1/2}$

sub $20000 = 4000h + 5000d$

Condizione di ottimo:

$$SMS = \frac{4000}{5000}$$

$$\frac{\frac{1}{2}h^{-1/2}d^{1/2}}{\frac{1}{2}h^{1/2}d^{-1/2}} = \frac{4}{5}$$ da cui:

$d = \frac{4}{5}h$, sostituendo nel vincolo di bilancio e risolvendo per h si ottiene la quantità ottima di hamburger per Giovanni:

$$20000 = 4000h + 5000\frac{4}{5}h$$

$$h^* = \frac{20000}{8000} = 2{,}5$$

e la quantità ottima di dolci per Giovanni è:

$$d^* = \frac{4}{5} 2{,}5 = 2$$

FRANCESCA

$\max\ U_F = h^{1/2}(2d)^{1/2}$

sub $40000 = 4000h + 5000d$

Condizione di ottimo:

$$SMS = \frac{4000}{5000}$$

$$\frac{\frac{1}{2} h^{-1/2}(2d)^{1/2}}{\frac{1}{2} h^{1/2}(2d)^{-1/2}\, 2} = \frac{4}{5}$$ da cui:

$d = \frac{4}{5} h$, sostituendo nel vincolo di bilancio e risolvendo per *h* si ottiene la quantità ottima di hamburger per Francesca:

$$40000 = 4000h + 5000\frac{4}{5} h$$

$$h^* = \frac{40000}{8000} = 5$$

e la quantità ottima di dolci per Francesca è:

$$d^* = \frac{4}{5} 5 = 4$$

c) ALFREDO:

Siccome ha la stessa funzione di utilità di Giovanni, anche le funzioni di domanda di Alfredo saranno uguali a quelle di Giovanni. L'incognita adesso è il reddito:

$$h_A = \frac{R_A}{8000}$$

$$d_A = \frac{4}{5} h_A = \frac{R_A}{10000}$$

Ci chiediamo quanto spende Alfredo se vuole conseguire un'utilità pari a 5:

$$U_A = h_A^{1/2} d_A^{1/2} = \left(\frac{R_A}{8000}\right)^{1/2} \left(\frac{R_A}{10000}\right)^{1/2}$$

$$\sqrt{\frac{R_A^2}{80000000}} = 5$$ da cui:

$$R_A = 5\sqrt{80000000} \cong 44721$$

ESERCIZIO 5

$$u(q_1, q_2) = q_1 + q_2$$

a) $p_1 = 1$ e $p_2 = 2$, poiché il prezzo del bene 1 è minore del prezzo del bene 2, essendo i due beni per il consumatore perfetti sostituti, il consumatore spenderà tutto il suo reddito nell'acquisto del bene 1. Quindi:

$$q_1^* = \frac{90}{1} = 90$$

$$q_2^* = 0$$

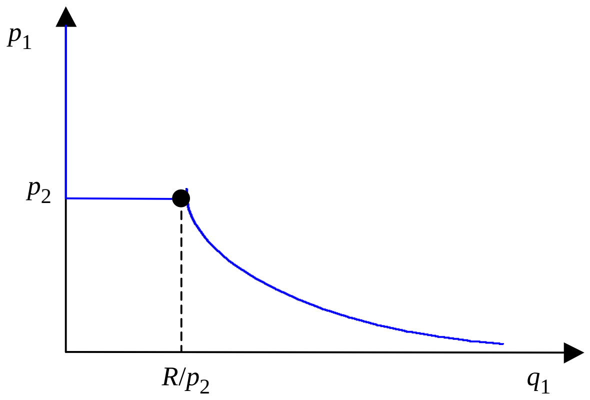
b) $p_1 = 3$ e $p_2 = 2$, poiché il prezzo del bene 2 è minore del prezzo del bene 1, il consumatore spenderà tutto il suo reddito nell'acquisto del bene 2:

$$q_1^* = 0$$

$$q_2^* = \frac{90}{2} = 45$$

c) $p_1 = 2$ e $p_2 = 2$. In questo caso la curva di indifferenza è coincidente con il vincolo di bilancio, quindi le quantità ottime del bene 1 e del bene 2 sono qualsiasi quantità compresa tra 0 e 45 che soddisfano il vincolo di bilancio.
FUNZIONE DI DOMANDA DEL BENE 1:

$$q_1^d(p_1, p_2, R) = \begin{cases} \dfrac{R}{p_1} \Rightarrow p_1 < p_2 \\ 0 < q_1 < \dfrac{R}{p_1} \Rightarrow p_1 = p_2 \\ 0 \Rightarrow p_1 > p_2 \end{cases}$$



ESERCIZIO 10

$u(q_1, q_2) = \min\{q_1, q_2\}$
I beni vengono consumati in rapporto di 1 a 1 (in uguali quantità), indipendentemente dal prezzo relativo dei due beni.
$q_1 = q_2 = q$ dal vincolo di bilancio:
$R = p_1 q + p_2 q$. Le funzioni di domanda individuale del bene 1 e del bene 2 sono:

$$q_1^d(p_1, p_2, R) = q_2^d(p_1, p_2, R) = \frac{R}{p_1 + p_2}$$

a) $p_1 = 3$ e $p_2 = 5$

$$q_1^* = q_2^* = \frac{100}{3+5} = 12{,}5$$

b) $p_1 = 5$ e $p_2 = 5$

$$q_1^* = q_2^* = \frac{100}{5+5} = 10$$

c) $p_1 = 15$ e $p_2 = 5$

$$q_1^* = q_2^* = \frac{100}{15+5} = 5$$

ESERCIZI

1) Data la funzione di utilità $U(x_1\ x_2)= x_1\ x_2^2$, sapendo che $P_1= 3$ e $P_2= 4$ determinare il reddito del consumatore sapendo che la quantità domandata del bene 1 (x_1*) è pari a 10.

2) Dato un consumatore con utilità $U(x_{1,}\ x_2) = x_1,x_2$ e vincolo di bilancio: $3\ x_1+ 2\ x_2 = 12$, calcolare l'effetto di sostituzione per il bene x_1 ,per $p\ _1' = 2$.

ESERCIZI

1) Data la funzione di utilità $U(x_1 x_2)= x_1 x_2^2$, sapendo che $P_1= 3$ e $P_2= 4$ determinare il reddito del consumatore sapendo che la quantità domandata del bene 1 (x_1*) è pari a 10.

In equilibrio il saggio marginale di sostituzione in valore assoluto è uguale al reciproco del rapporto tra i prezzi ($SMS=Umg_1 /Umg_2 = P_1/ P_2$) quindi :

$$\boxed{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1 / \partial u(x_1, x_2)/\partial x_2 = p_1/p_2}$$

Cioè in equilibrio

$\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1 / \partial u(x_1, x_2)/\partial x_2= 3/4$

ma

$\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1 / \partial u(x_1, x_2)/\partial x_2 = x_2^2/ 2 x_1 x_2$

quindi

$x_2^2/ 2 x_1 x_2 = 3/4$

$x_2/ 2 x_1 = 3/4$

essendo $x_1=10$ in equilibrio si ha:

$x_2 = 3/4 (2 x_1)= 3/2 x_1$

$x_2 = 3/2 (10)= 30/2= 15$

Il reddito del consumatore è

m=15 X 4 + 3 X 10= 90

2) Dato un consumatore con utilità $U(x_1, x_2) = x_1, x_2$ e vincolo di bilancio:
$3\ x_1 + 2\ x_2 = 12$, calcolare l'effetto di sostituzione per il bene x_1 ,per $p_1' = 2$.

Soluzione:

dato

$$\boxed{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1 / \partial u(x_1, x_2)/\partial x_2 = p_1/p_2}$$

$$x_2^* / x_1^* = 3/2$$

$$x_2^* = 3/2\ x_1^*$$

dato il vincolo di bilancio

$$3\ x_1 + 2\ X\ 3/2\ x_1^* = 12$$

$$x_1^* = 12/6 = 2$$

$$x_2^* = 3$$

Il nuovo reddito tale che ai nuovi prezzi sia possibile acquistare esattamente x_1^* e x_2^* è

$$m' = p_1'\ x_1^* + p_2\ x_2^* = 2\ X\ 2 + 2\ X\ 3 = 4 + 6 = 10$$

quindi, dato che ai nuovi prezzi $Umg_2/Umg_1 = x_1^* / x_2^* = 2/2$:

$$x_1^* = x_2^*$$
$$2\ x_1 + 2\ x_2 = 10$$
$$x_1^{*}{}_s = 2{,}5$$
$$x_2^* = 2{,}5$$

L'effetto di sostituzione è

$$\mathbf{x_1^*{}_s - x_1^* = 2{,}5 - 2 = 0{,}5}$$

3) Dato un consumatore con utilità
$U(x_1 x_2)= x_1 x_2^2$
e vincolo di bilancio
$4 x_1+ 2 x_2 = 24$,
calcolare **l'effetto di prezzo e sostituzione** per il bene x_2 ,per $p_2' = 4$ e .**rappresentare graficamente** il risultato

SOLUZIONE

In equilibrio
$\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1/\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2= 4/2$

ma
$\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1/\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2 = x_2^2/ 2 x_1 x_2$

quindi

$x_2^2/ 2 x_1 x_2 = 4/ 2$

$x_2/ 2 x_1 = 2$

In equilibrio

$x_2^*= 2 X 2 x_1$
$x_2^*= 4 x_1$

dato il vincolo di bilancio

$4 x_1+ 2 X 4 x_1^*= 24$

$x_1^*=24/12=2$

e

$x_2^*= 8$

Per $p_2' = 4$ *l'*effetto prezzo sulla quantità domandata del bene x_2 è:

$x_2/ 2 x_1 = 4/ 4$

quindi

$4 X' 2 x_1^*+ 4 x_1^*= 24$

$x_1^{*\prime}=24/12=2$

$x_2^{*\prime}= 4$

L'effetto prezzo è pari a - 4

Il nuovo reddito tale che ai nuovi prezzi sia possibile acquistare esattamente x_1^* e x_2^* è
$m'= p_1' x_1^*+ p_2 x_2^*= 4 X 2 + 4 X 8 = 8 + 32 = 40$

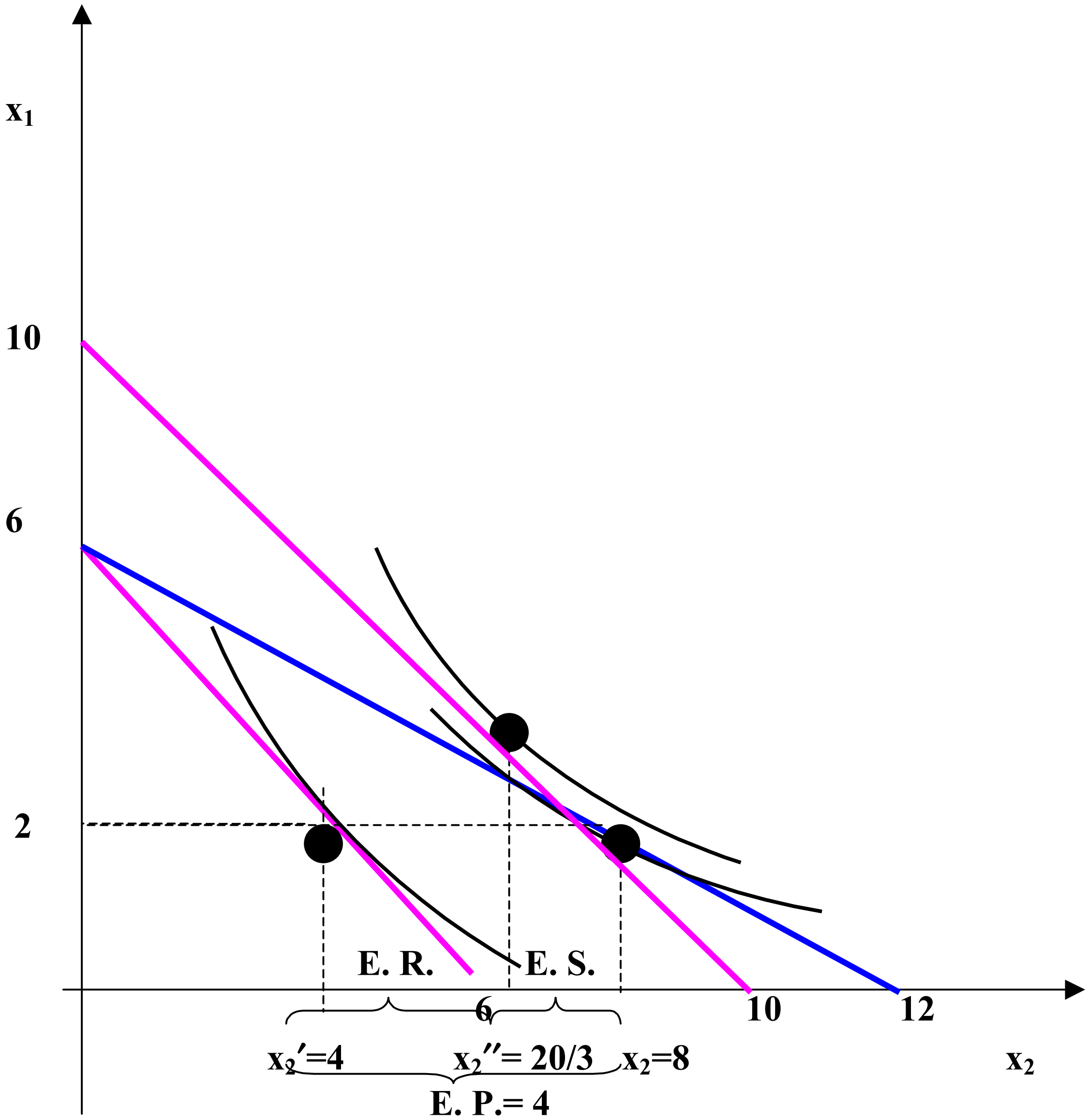
quindi, dato che ai nuovi prezzi $Umg_2/Umg_1 = x_2^* /2x_1^* = 4/4$:

$4\ 2x_1 + 4\ x_1 = 40$
$x_1^* = 40/12 = 10/3$
$p_1\ x_1^* + p_2\ x_2^* = 4 X 10/3 + 4\ x_2^* = 40$
$x_2^* = 40/4 - 4/4 X10/3 = 10 - 10/3 = 20/3$

L'effetto di sostituzione è

$x_2^{*''} - x_2^* = 20/3 - 8 = -4/3$

L'effetto di reddito è - 8/3



E.S. = 20/3 - 8 = - 4/3

E.R.= - 8/3