Analysis I

Skript zur Vorlesung

H. Führ A. Krieg S. Walcher

Analysis I

Skript zur Vorlesung

Prof. Dr. Hartmut Führ
Prof. Dr. Aloys Krieg
Prof. Dr. Sebastian Walcher
Lehrstuhl A für Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Analysis I

In der Analysis I soll die Differentialrechnung von reellen Funktionen einer Variablen behandelt werden. Diese Theorie soll von Anfang an auf möglichst wenige Annahmen aufbauend entwickelt werden. Diese Annahmen werden Axiome genannt. Wir werden dabei zunächst voraussetzen, dass die natürlichen, die ganzen und die rationalen Zahlen bekannt sind.

In der Analysis II folgen die Integralrechnung von reellen Funktionen einer Variablen sowie die Differentialrechnung von reellen Funktionen mehrerer Variablen.

In diesem Skript werden lediglich parallel zu erwerbende Kenntnisse der Mathematischen Grundlagen vorausgesetzt. Die für die Analysis relevanten Definitionen und Sätze dieser Veranstaltung sind im Anhang zusammengestellt.

Der vorliegende Text hat den Charakter einer Vorlesungsmitschrift und nicht etwa den eines Lehrbuches. Die Leserinnen und Leser sollten sich ermutigt fühlen, die Darstellung mit der in den Standardwerken zur Analysis zu vergleichen. Zu empfehlen sind insbesondere:

BARNER, M., und FLOHR, F.: Analysis 1, de Gruyter, Berlin-New York.
FORSTER, O.: Analysis 1, Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden.
HEUSER, H.: Lehrbuch der Analysis 1, Teubner, Stuttgart.
KÖNIGSBERGER, K.: Analysis 1, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
MEYBERG, K., und VACHENAUER, P.: Höhere Mathematik 1, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Wir danken Herrn Dr. Ingo KLÖCKER und Herrn Dr. Sebastian MAYER für die Mitarbeit bei den Korrekturen und für die Erstellung der Zeichnungen sowie Frau Birgit MORTON und Frau Barbara GIESE für die sorgfältige TEX-Erfassung der Vorlage.

Aachen, im Mai 2018 Aloys KRIEG, Sebastian WALCHER

Vorwort zur überarbeiteten Version: Die vorliegende Skriptversion wurde für die Benutzung im Rahmen der Prüfungsordnung aus dem Jahr 2021 angepasst. Neu hinzugekommen ist das Kapitel I, *Grundlagen*, das im Wesentlichen die Inhalte des Moduls "Grundlagen der Analysis" behandelt. Großer Dank gebührt Herrn Leonardo MASCI für die Modernisierung des LaTex-Codes.

Aachen, im September 2024 Hartmut FÜHR

Kapitel I.

Grundlagen

Dieses Kapitel liefert die Textgrundlage für das Modul *Grundlagen der Analysis*. Es geht darin um die grundlegenden Elemente mathematischer Sprache, in der alle modernen mathematischen Texte verfasst sind: Aussagenlogik, Mengen und Abbildungen. Die vorliegende Themenauswahl wurde mit Blick auf die Bedarfe der Analysis-Vorlesung getroffen; weitere wichtige Grundlagenthemen (etwa Äquivalenzrelationen) werden im Modul *Grundlagen der Algebra* behandelt.

§1. Aussagenlogik und Mengen

Das Lernziel dieses Paragrafen besteht darin, die Grundbegriffe mathematischer Sprechweisen zu verstehen.

Wir möchten eigentlich alles definieren, über das wir reden wollen. Für jede Definition werden jedoch weitere Begriffe benötigt, die wieder definiert werden müssten. Daher ist irgendwo ein intuitives Verständnis einiger Grundbegriffe erforderlich. Andernfalls landen wir bei offenen Problemen der mathematischen Logik, auf deren Vorlesungen hier verwiesen sei.

(1.1) Definition. Eine mathematische *Aussage* ist eine Behauptung, der auf eindeutige Weise ein Wahrheitswert, nämlich *wahr* oder *falsch*, zugeordnet werden kann. Zu jeder Aussage gibt es eine *Verneinung* oder *Negation*.

Wir verwenden die Abkürzungen

- 0 für falsch und 1 für wahr,
- $\neg \mathcal{A}$ für die Negation der Aussage $\mathcal{A}$.

Die Aussagen können rein sprachlich oder mit Hilfe von Symbolen oder aus einer Kombination von beiden formuliert sein.

(1.2) Beispiele. a) ″$2+3=5$″ und ″$2 \leqslant 1$″ sind Beispiele mathematischer Aussagen, ebenso ″zu jeder reellen Zahl x gibt es eine reelle Zahl y mit $x < y$″.
b) ″Alemannia Aachen spielte in der Saison 2006/07 in der ersten Fußballbundesliga″ ist eine mathematische Aussage, ″Alemannia Aachen spielt guten Fußball″ aber nicht.
c) Die Verneinung der Aussagen in a) lauten ″$2+3 \neq 5$″, ″$2 > 1$″ sowie ″es gibt eine reelle Zahl x, so dass für alle reellen Zahlen y gilt $x \geqslant y$″.
d) Die Beziehung zwischen den Aussagen $\mathcal{A}$ und $\neg\,\mathcal{A}$ wird in der folgenden *Wahrheitstafel* zusammengefasst:

$\mathcal{A}$	$\neg\,\mathcal{A}$
0	1
1	0

Wir beschreiben einige Verknüpfungen von Aussagen.

(1.3) Definition. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mathematische Aussagen, so erhält man neue mathematische Aussagen

- ″*$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$*″, Bez. $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$,
- ″*$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$*″, Bez. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$,
- ″*aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$*″, Bez. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$,
- ″*$\mathcal{A}$ genau dann, wenn $\mathcal{B}$*″ oder ″*$\mathcal{A}$ äquivalent zu $\mathcal{B}$*″, Bez. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$.

Die neuen Aussagen werden durch die folgende Wahrheitstafel verdeutlicht

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

In der Mathematik bedeutet *oder* immer *oder auch*. Wenn *entweder - oder* gemeint ist, wird es immer explizit so formuliert. Zwei Aussagen sind äquivalent, wenn sie denselben Wahrheitsgehalt haben. Man nennt „$\Rightarrow$“ eine *Implikation*. Eine Aussage, die immer wahr ist, heißt *Tautologie*. Durch einen Vergleich der Wahrheitstafeln erhält man die folgenden

(1.4) Beispiele. Für Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ gilt:
a) $''\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}'' \Leftrightarrow ''(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})''$.

b) $''\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}'' \Leftrightarrow ''\neg\,\mathcal{A} \vee \mathcal{B}'' \Leftrightarrow ''\neg\,\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}''$.

c) "entweder $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}''$ $\Leftrightarrow$ $''(\mathcal{A} \wedge \neg\,\mathcal{B}) \vee (\neg\,\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})''$.

d) $''\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}'' \Leftrightarrow ''\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}''$, $''\mathcal{A} \vee \mathcal{B}'' \Leftrightarrow ''\mathcal{B} \vee \mathcal{A}''$ (Kommutativgesetze).

e) $''(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C}'' \Leftrightarrow ''\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})''$, $''(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}'' \Leftrightarrow ''\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})''$ (Assoziativgesetze).

f) $''(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}))'' \Leftrightarrow ''(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})''$,
$''(\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}))'' \Leftrightarrow ''(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})''$ (Distributivgesetze).

g) $''\mathcal{A} \vee \neg\,\mathcal{A}''$.

h) $''\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})'' \Leftrightarrow ''\neg\,\mathcal{A} \vee \neg\,\mathcal{B}''$, $''\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})'' \Leftrightarrow ''\neg\,\mathcal{A} \wedge \neg\,\mathcal{B}''$.

Tautologien sind wichtig bei der Beweisführung, weil es einfacher sein kann, statt der Aussage $''\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}''$ die äquivalente Aussage $''\neg\,\mathcal{B} \Rightarrow \neg\,\mathcal{A}''$ zu beweisen. Zur Äquivalenz der Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ kann man z. B. äquivalent den Ringschluss $''\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}''$ zeigen.

Um in vernünftiger Weise Aussagen formulieren zu können, benötigen wir Mengen. Bei der Beschreibung von Mengen nehmen wir den so genannten naiven Standpunkt ein, der auf Georg CANTOR (1845-1918) zurückgeht.

(1.5) Definition. Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von wohl bestimmten Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte nennt man *Elemente* der Menge. Die Wohlbestimmtheit besagt, dass man bei jedem Objekt genau entscheiden kann, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Diese Definition birgt natürlich ihre Probleme, da nicht gesagt wird, was „Objekte“ sind und was ein „Ganzes“ sein soll. Es gibt im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, Mengen zu beschreiben, nämlich die aufzählende und die beschreibende Art.

(1.6) Definition. $M = \{x, y, z, \ldots\}$ bedeutet, dass M diejenige Menge ist, die genau aus den angegebenen Elementen $x, y, z, \ldots$ besteht.
$M = \{x \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\} = \{x\,;\, x \text{ hat Eigenschaft } E\}$ bedeutet, dass M diejenige Menge ist, die genau aus allen x besteht, die die Eigenschaft E haben.

Der Erläuterung dienen die

(1.7) Beispiele. a) Alle Studierenden, die am 1. April 2011 an der RWTH Aachen eingeschrieben waren, bilden eine Menge.
b) Die kleinen lateinischen Buchstaben $M = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ bilden eine Menge.
c) Alle großen Zahlen oder alle jungen Einwohner Aachens bilden keine Menge.
d) Bei der Beschreibung mit Pünktchen ist Vorsicht geboten. Es ist nicht klar, ob die Menge $\{3, 5, 7, \ldots, 17\}$ alle ungeraden natürlichen Zahlen zwischen 3 und 17 oder alle ungeraden Primzahlen $\leqslant 17$ beschreibt.

Es ist zweckmäßig, schon jetzt einige Standardbezeichnungen zu vereinbaren, auch wenn ein Teil der verwendeten Begriffe erst später definiert wird.

(1.8) Bezeichnungen. $\mathbb{N} := \{n \mid n \text{ ist natürliche Zahl }\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der *natürlichen Zahlen*.
$\mathbb{N}_0 := \{n \mid n \text{ ist natürliche Zahl oder Null }\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der *natürlichen Zahlen einschließlich Null* oder die Menge der *nicht-negativen ganzen Zahlen*.
$\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ ist ganze Zahl}\} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ ist die Menge der *ganzen Zahlen*.
$\mathbb{Q} = \{x \mid \text{es gibt ganze Zahlen } a, b, b \neq 0, \text{ mit } x = a/b\}$ ist die Menge der *rationalen Zahlen* (Bruchzahlen).
Die Menge der *reellen Zahlen* wird mit $\mathbb{R}$ und die Menge der *komplexen Zahlen* mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Dabei denken wir uns die reellen Zahlen als endliche oder unendliche Dezimalzahlen realisiert.
$\mathbb{R}_+$ steht für die Menge der *nicht-negativen reellen Zahlen*, $\mathbb{R}_+^*$ für die Menge der *positiven reellen Zahlen* und $\mathbb{R}^*$ (bzw. $\mathbb{C}^*$) für die Menge der reellen (bzw. komplexen) Zahlen ohne 0.

Die Bezeichnungen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ werden weltweit weitgehend einheitlich verwendet. Eine Reihe von Autoren fasst allerdings auch die Null als natürliche Zahl auf. Das ist einfach eine Frage des Geschmacks (und der Definition).

Wir stellen noch eine Reihe von gebräuchlichen Abkürzungen zusammen.

(1.9) Bezeichnungen. a) Sei M eine Menge. Ist x ein *Element von* M, so schreibt man $x \in M$. Ist x kein Element von M, so schreibt man $x \notin M$.
b) "$\exists$" bedeutet "*es gibt (mindestens) ein*".
c) "$\forall$" bedeutet "*für alle*".

Die Symbole "$\exists$" und "$\forall$" nennt man *Quantoren*. Die letzte Aussage in (1.2) a) lautet mit Quantoren:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\; \exists\, y \in \mathbb{R} : x < y.$$

Die Verneinung dieser Aussage entsteht durch Vertauschung der Quantoren und Verneinung der Aussage unter Beibehaltung der Reihenfolge, also

$$\exists\, x \in \mathbb{R}\; \forall\, y \in \mathbb{R} : x \geqslant y.$$

Die letzte Aussage ist falsch. Würde es nämlich ein solches $x \in \mathbb{R}$ geben, so könnte man $y := x + 1 \in \mathbb{R}$ wählen und erhielte $x < y$ als Widerspruch. Dabei bedeutet ":=", dass die linke Seite durch die rechte definiert wird, wenn man also in diesem Fall für y das Element $x + 1$ einsetzt.

Es kommt entscheidend auf die Reihenfolge der Quantoren an, denn die Aussage

$$\forall\, y \in \mathbb{R}\; \exists\, x \in \mathbb{R} : x \geqslant y$$

ist wahr, wenn man z. B. $x := y + 1$ wählt.

Die nächsten Bezeichnungen beziehen sich auf Mengen.

(1.10) Definition. Seien M, N Mengen.
a) Man sagt, dass M eine *Teilmenge* von N ist oder dass M in N *enthalten* ist oder dass N *die Menge* M *umfasst*, wenn jedes Element von M auch eine Element von N ist, d. h.

$$\forall\, x \in M : x \in N.$$

Man schreibt dann $M \subset N$ oder $N \supset M$. Das Zeichen "$\subset$" heißt *Inklusion*. Manche Autoren verwenden auch das Zeichen "$\subseteq$".
b) M und N sind *gleich*, falls sie dieselben Elemente enthalten. Man schreibt dann $M = N$. Andernfalls schreibt man $M \neq N$.
c) M heißt *echte Teilmenge* von N, wenn $M \subset N$ und $M \neq N$. Man schreibt dafür $M \subsetneqq N$.
d) Die *leere Menge* ist die Menge ohne Elemente und wird mit $\emptyset$ oder auch mit $\{\,\}$ bezeichnet, d. h.

$$\emptyset = \{\,\} = \{x \mid x \neq x\}.$$

Man beachte die

(1.11) Bemerkungen. a) Es gilt $\{0,0,1\} = \{0,1\} = \{1,0\}$. In der aufzählenden Beschreibung dürfen Elemente mehrfach vorkommen und die Reihenfolge spielt keine Rolle.
b) $\{0,\{1,2\}\}$ ist eine Menge, die aus zwei Elementen besteht, nämlich aus 0 und $\{1,2\}$.
c) Mengen sind durch ihre Eigenschaften charakterisiert. Der Name, den eine Menge hat, ist aber keine ihrer Eigenschaften:

$$M = \{0,1\},\ N = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad M = N.$$

d) Teilmengenbeziehungen sind dem Leser bereits aus der Schule gekannt. Die Aussage, dass jedes gleichseitige Dreieck auch gleichschenklig ist, schreibt sich im Mengenkontext in der Form

$$\{\triangle;\ \triangle \text{ gleichseitiges Dreieck}\} \subset \{\triangle;\ \triangle \text{ gleichschenkliges Dreieck}\}.$$

Die Aussage, dass jedes Quadrat ein Rechteck ist, können wir auch als

$$\{Q;\ Q \text{ Quadrat}\} \subset \{R;\ R \text{ Rechteck}\}$$

schreiben.

Als einfache Folgerungen aus Definition (1.10) notieren wir das

(1.12) Lemma. *Seien L, M, N Mengen. Dann gilt:*
a) $\emptyset \subset M$.
b) $M \subset M$ und $M = M$ *(Reflexivität).*
c) Aus $L \subset M$ und $M \subset N$ folgt $L \subset N$.
Aus $L = M$ und $M = N$ folgt $L = N$ *(Transitivität).*
d) Aus $M = N$ folgt $N = M$ *(Symmetrie).*
e) $M = N$ ist äquivalent zu $M \subset N$ und $N \subset M$.

Wir werden die Gleichheit von Mengen in dieser Vorlesung stets über die in e) dargestellte Aussage beweisen.

Ein weiterer wesentlicher Begriff ist enthalten in der

(1.13) Definition. Sei M eine Menge. Dann ist die *Potenzmenge* von M die Menge aller Teilmengen von M, also

$$\mathrm{Pot}(M) := \{A \mid A \subset M\}.$$

Der Veranschaulichung dienen die

(1.14) Beispiele. a) $\mathrm{Pot}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
b) $\mathrm{Pot}(\{a\}) = \Big\{\emptyset, \{a\}\Big\}$.
c) $\mathrm{Pot}(\{a,b\}) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\Big\}$.
d) $\mathrm{Pot}(\{a,b,c\}) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\Big\}$.

Nun kommen wir zur Paarbildung von Mengen.

(1.15) Definition. Zwei *geordnete Paare* (a,b) und (x,y) sind genau dann gleich, wenn $a = x$ und $b = y$, d. h.

$$(a,b) = (x,y) \quad \Leftrightarrow \quad a = x \text{ und } b = y.$$

a heißt *erste Komponente* und b *zweite Komponente* des Paares (a,b). Sind M und N Mengen, so nennt man die Menge

$$M \times N := \{(a,b) \mid a \in M \text{ und } b \in N\}$$

das *kartesische Produkt* oder *Kreuzprodukt* von M und N.

Hilfreich sind die

(1.16) Beispiele. a) Es gilt $(1,2) \neq (2,1)$.
b) Man hat $\{1,0\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(0,1),(0,2)\}$.
c) Es gilt $M \times N = \emptyset$ genau dann, wenn $M = \emptyset$ oder $N = \emptyset$.
d) Man kann die Gleichheit von Paaren auf die Gleichheit von Mengen zurückführen:

$$(a,b) = (x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \Big\{\{a\},\{a,b\}\Big\} = \Big\{\{x\},\{x,y\}\Big\} \subset \mathrm{Pot}(M \cup N).$$

§2. Abbildungen

Das Lernziel dieses Paragrafen besteht darin, die Grundtatsachen über Abbildungen zusammenzustellen. Spezialfälle von Abbildungen sind *Funktionen*, also etwa die Quadrat- oder die Wurzelfunktion, die aus der Schule bekannt sein sollten. Der rigorose Abbildungsbegriff ist eng mit dem kartesischen Produkt verknüpft.

(2.1) Definition. Seien A, B nicht-leere Mengen. Eine *Abbildung f von A nach B* ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zuordnet. Man nennt x das *Argument* und $f(x) := y$ das *Bild von x unter f* und schreibt dann die Abbildung in der Form

$$f : A \to B,\ x \mapsto f(x).$$

A heißt *Definitionsbereich* und B *Ziel* der Abbildung f. Die Menge

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$$

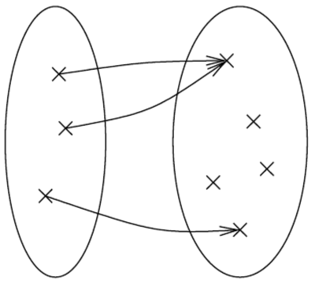
nennt man den *Graph von f*. Zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : U \to V$ heißen *gleich*, wenn

$$A = U,\ B = V \quad \text{und} \quad f(x) = g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in A \quad \text{gilt.}$$

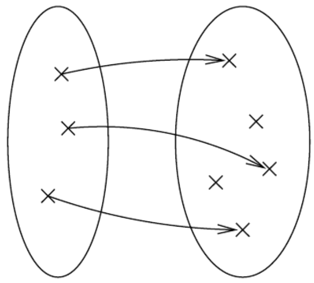
Abbildungen können auch formal über Graphen als Teilmengen des Kreuzproduktes $A \times B$ (vgl. (1.15)) definiert werden. Man nennt dann $G \subset A \times B$ einen *Graphen*, wenn zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in G$ existiert. Dann gilt $G = G_f$ für die Abbildung

$$f : A \to B, \quad f(a) := b, \quad \text{falls} \quad (a, b) \in G.$$

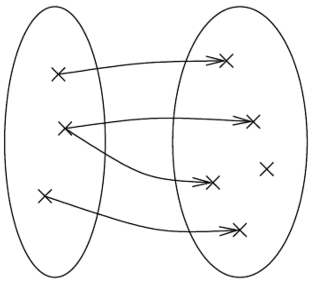
(2.2) Beispiele. (i) Einfache Beispiele kann man sich bildlich veranschaulichen.



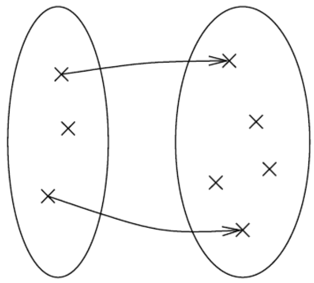
Dies ist eine Abbildung.



Das ist eine Abbildung.



Dies ist **k**eine Abbildung.



Dies ist **k**eine Abbildung.

Aus der Schule bekannt sind

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist eine Abbildung.
(iii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, ist keine Abbildung.
(iv) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto y$, falls $y^2 = n$, ist keine Abbildung.
(v) $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $n \mapsto \sqrt{n}$, ist eine Abbildung.
(vi) Die Abbildungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x+1)^2$, und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y^2 + 2y + 1$, sind gleich.
(vii) $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$, ist keine Abbildung, weil der -1 durch diese Vorschrift kein Wert zugeordnet werden kann. Demgegenüber ist

$$G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{x+1},$$

eine Abbildung.
(viii) Definition und Ziel müssen aber nicht unbedingt in $\mathbb{R}$ enthalten sein. Ist M eine nicht-leere Menge, so ist

$$\varphi : M \to \mathrm{Pot}(M), \quad x \mapsto \{x\},$$

ebenfalls eine Abbildung.

(2.3) Definition. Seien A, B nicht-leere Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Für $M \subset A$ heißt

$$f(M) := \{f(x) \mid x \in M\}$$

das *Bild von* M *unter* f. Speziell nennt man $f(A)$ die *Wertemenge von* f. Für $N \subset B$ heißt

$$f^{-1}(N) := \{x \in A \mid f(x) \in N\}$$

das *Urbild von* N *unter* f.

Man kann somit $f : A \to B$ auch die Abbildung

$$\mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(B), \quad M \mapsto f(M),$$

zuordnen. Die Urbildabbildung ist dagegen eine Abbildung

$$f^{-1} : \mathrm{Pot}(B) \to \mathrm{Pot}(A), \quad N \mapsto f^{-1}(N).$$

Der Erläuterung dienen die

(2.4) Beispiele. a) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, gilt

$$f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+, \qquad f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}^*.$$

b) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, gilt

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+, \quad f^{-1}\left(\{x \in \mathbb{R};\ x \geqslant 8\}\right) = \{x \in \mathbb{R};\ x \geqslant 2\}.$$

Nun führen wir Operationen auf Abbildungen aus.

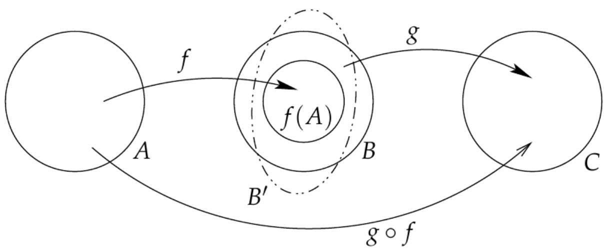
(2.5) Definition. Ist $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$, eine Abbildung und M eine nicht-leere Teilmenge von A, so heißt die Abbildung

$$f|_M : M \to B,\ x \mapsto (f|_M)(x) := f(x),$$

die *Restriktion* oder *Einschränkung* von f auf M. Ist $g : B' \to C$ eine weitere Abbildung mit der Eigenschaft $f(A) \subset B'$, so nennt man

$$g \circ f : A \to C,\ x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)),$$

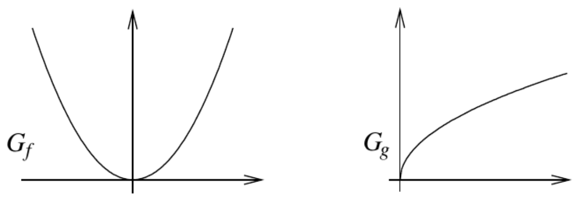
die *Verkettung* oder *Komposition* oder *Hintereinanderausführung* von g und f.



Der Erläuterung dienen die

(2.6) Beispiele. a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$. Dann gilt

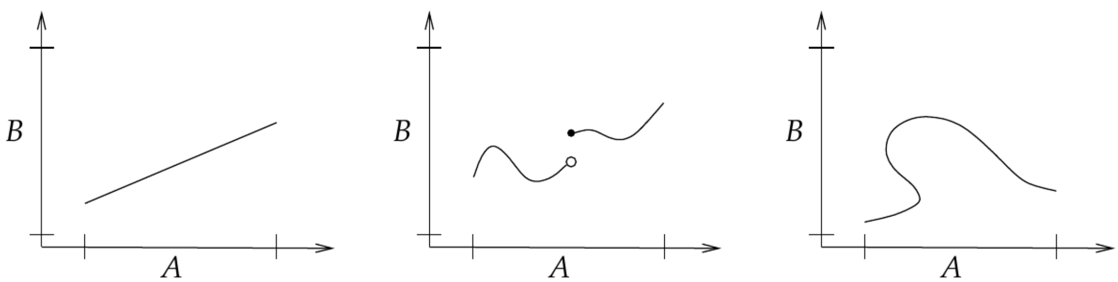
$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|,$$
$$f \circ g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x}^2 = x.$$



b) Die Komposition ist nicht kommutativ. Seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1,$$
$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1,$$
$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

c) Für $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ kann man Graph f für $f : A \to B$ bildlich veranschaulichen.



Dies ist ein Graph — Dies ist auch ein Graph — Dies ist kein Graph

Das Kriterium lautet: Jede Parallele zur y-Achse durch einen Punkt $a \in A$ auf der x-Achse hat mit Graph $f \subset A \times B$ genau einen Schnittpunkt.

Als nächstes beweisen wir das Assoziativgesetz für Verkettungen.

(2.7) Lemma. *Seien $f : A \to B$, $g : B' \to C$, $h : C' \to D$ Abbildungen mit $f(A) \subset B'$ und $g(B') \subset C'$. Dann gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis. Es gilt

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(A) = g(f(A)) \subset g(B') \subset C'$$

und

$$h \circ g : B' \to D, \quad f(A) \subset B'.$$

Also sind beide Seiten der Behauptung Abbildungen $A \to D$. Für $x \in A$ gilt

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = [(h \circ g) \circ f](x).$$

□

Eigenschaften von Abbildungen behandeln wir in der

(2.8) Definition. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. f heißt *injektiv*, wenn für $a_1, a_2 \in A$ aus $f(a_1) = f(a_2)$ stets $a_1 = a_2$ folgt. Man nennt f *surjektiv*, wenn zu jedem $y \in B$ (mindestens) ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ existiert. f heißt *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Injektivität bedeutet, dass aus $a_1 \neq a_2$ auch $f(a_1) \neq f(a_2)$ folgt. Das bedeutet: Verschiedene Argumente haben verschiedene Bilder. Zum Nachweis der Injektivität ist es aber zweckmäßig, wie in (2.8) vorzugehen und aus der Gleichheit der Bilder die Gleichheit der Argumente zu schließen.
f ist genau dann bijektiv, wenn zu jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ existiert. Mit Quantoren ausgedrückt haben wir:

$$\begin{aligned}
f \text{ injektiv} \quad &\Leftrightarrow \forall\, a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \\
&\Leftrightarrow \forall\, a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \;\Rightarrow\; f(a_1) \neq f(a_2). \\
f \text{ surjektiv} \quad &\Leftrightarrow \forall\, y \in B \;\; \exists\, x \in A : f(x) = y. \\
f \text{ bijektiv} \quad &\Leftrightarrow \forall\, y \in B \;\; \exists \text{ genau ein } x \in A : f(x) = y.
\end{aligned}$$

(2.9) Beispiele. a) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv. Die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$, ist surjektiv, aber nicht injektiv. Dagegen ist die Abbildung $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$, bijektiv.
b) Seien $A \neq \emptyset$, $A \subset B$. Die Abbildung

$$\iota : A \to B,\ x \mapsto x,$$

heißt *Inklusionsabbildung*. Sie ist injektiv, aber für $A \neq B$ nicht surjektiv.
c) Sei $A \neq \emptyset$. Die *identische Abbildung* auf A ist definiert durch

$$id_A : A \to A,\ x \mapsto x.$$

Sie ist bijektiv.
d) Für $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ bedeutet die Injektivität (bzw. Bijektivität) von $f : A \to B$, dass jede Parallele zur x-Achse durch ein $b \in B$ höchstens (bzw. genau) einen Schnittpunkt mit Graph $f \subset A \times B$ hat.
e) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a + x,$$

bijektiv. Für $a \in \mathbb{R}^*$ ist die Abbildung

$$F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax,$$

ebenfalls bijektiv. Wie sieht es für $a \in \mathbb{N}$ mit den entsprechenden Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aus?

Das Verhalten bezüglich Komposition beschreibt das

(2.10) Lemma. *Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Dann existiert die Abbildung $g \circ f : A \to C$ und erfüllt die folgenden Eigenschaften:*

a) Wenn f und g surjektiv sind, ist $g \circ f$ surjektiv.

b) Wenn f und g injektiv sind, ist $g \circ f$ injektiv.

c) Wenn f und g bijektiv sind, ist $g \circ f$ bijektiv.

d) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, ist g surjektiv.

e) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, ist f injektiv.

Beweis. a) Sei $c \in C$. Wegen der Surjektivität von g existiert ein $b \in B$ mit $g(b) = c$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$, also

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c.$$

b) Seien $a, a' \in A$ mit $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. Aus $g(f(a)) = g(f(a'))$ und der Injektivität von g folgt $f(a) = f(a')$. Dann impliziert die Injektivität von f auch noch $a = a'$.
c) Man verwende a) und b).
d) Sei $c \in C$. Wegen der Surjektivität von $g \circ f$ existiert ein $a \in A$ mit $(g \circ f)(a) = c$. Dann ist $b := f(a) \in B$ mit $g(b) = c$.
e) Seien $a, a' \in A$ mit $f(a) = f(a')$. Dann folgt

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = (g \circ f)(a').$$

Die Injektivität von $g \circ f$ liefert $a = a'$. □

Injektive Abbildungen kann man (partiell) umkehren.

(2.11) Definition. Sei $f : A \to B$ eine injektive Abbildung mit Wertemenge $W = f(A)$. Die *Umkehrabbildung* $f^{-1} : W \to A$ ist definiert durch

$$f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; f(x) = y.$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, denn zu jedem $y \in f(A)$ gibt es wegen der Injektivität von f genau ein $x \in A$ mit $f(x) = y$. Die Abbildung $F : A \to W$, $x \mapsto f(x)$, ist bijektiv. Man beachte, dass wir für das Urbild eines beliebigen f, also

$$f^{-1} : \mathrm{Pot}(B) \to \mathrm{Pot}(A),$$

und die Umkehrabbildung eines injektiven f, also $f^{-1} : W \to A$, die gleiche Bezeichnung verwenden. Aus dem Zusammenhang ist aber immer klar, was gemeint ist. Praktisch berechnen wir die Umkehrabbildung, indem wir eine Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen.

(2.12) Lemma. *Sei $f : A \to B$ eine injektive Abbildung mit Wertemenge $W = f(A)$. Dann gilt:*
a) Die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to A$ ist bijektiv.
b) $f^{-1} \circ f = id_A$, $f \circ f^{-1} = \iota : W \to B$, $y \mapsto y$.
c) $(f^{-1})^{-1} : A \to W$, $x \mapsto f(x)$.

Beweis. a) $f^{-1}(y) = x = f^{-1}(y')$ impliziert $y = f(x) = y'$. Also ist f^{-1} injektiv. Wegen $f^{-1}(f(x)) = x$ ist f^{-1} surjektiv.
b) $f^{-1} \circ f : A \to A$ und $id_A : A \to A$ sind Abbildungen mit der Eigenschaft

$$f^{-1}(f(x)) = x = id_A(x) \quad \text{für alle} \quad x \in A.$$

Es gilt $f \circ f^{-1} : W \to A$ und $\iota : W \to A$. Ist $y = f(x) \in W$, so gilt

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = y = \iota(y).$$

Also sind die entsprechenden Abbildungen gleich.
c) Es gilt $(f^{-1})^{-1} : A \to W$. Sei $y = f(x)$, also $f^{-1}(y) = x$. Dann gilt

$$(f^{-1})^{-1}(x) = y = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in A.$$ □

Das Verhalten bezüglich der Komposition beschreibt das

(2.13) Korollar. *a) Seien $f : A \to B$ und $h : B \to A$ Abbildungen. f ist genau dann bijektiv mit $f^{-1} = h$, wenn*

$$f \circ h = id_B \quad \text{und} \quad h \circ f = id_A.$$

b) Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ bijektive Abbildungen, so ist $g \circ f : A \to C$ bijektiv mit

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Beweis. a) "$\Rightarrow$" Ist f bijektiv, so folgt $f \circ f^{-1} = id_B$ und $f^{-1} \circ f = id_A$ aus (2.12).
"$\Leftarrow$" Weil die identische Abbildung bijektiv ist, folgt die Bijektivität von f aus $f \circ h = id_B$ und $h \circ f = id_A$ sowie (2.10) d) und c). Aus $f(a) = b$, $a \in A$, $b \in B$ folgt $f^{-1}(b) = a$ sowie

$$h(b) = h(f(a)) = (h \circ f)(a) = id_A(a) = a = f^{-1}(b),$$

also $h = f^{-1}$.
b) Die Bijektivität von $g \circ f$ ergibt sich aus (2.10) c). Aus

$$\begin{aligned}
(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_C, \\
(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_B \circ f = f^{-1} \circ f = id_A
\end{aligned}$$

folgt dann die Behauptung mit a). □

Schließlich notieren wir die

(2.14) Beispiele. a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^n$, bijektiv mit Umkehrabbildung

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \qquad y \mapsto \sqrt[n]{y}.$$

Ist n ungerade, so definieren wir $\sqrt[n]{y} := -\sqrt[n]{-y}$ für $y < 0$. In diesem Fall ist

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n,$$

bijektiv mit Umkehrabbildung

$$F^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad y \mapsto \sqrt[n]{y}.$$

b) Sei $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ein so genanntes abgeschlossenes *Intervall*. Die Abbildung

$$f : [0, 1] \to [a, b],\ t \mapsto a + t(b - a),$$

ist bijektiv. Es gilt zunächst

$$a \leq a + t(b - a) \leq a + 1(b - a) = b \quad \text{für } \ 0 \leq t \leq 1,$$

also $f([0, 1]) \subset [a, b]$. Aus

$$f(t) = a + t(b - a) = a + t'(b - a) = f(t')$$

folgt $t = t'$ wegen $b - a \neq 0$. Demnach ist f injektiv. Zu $y \in [a, b]$ definiert man

$$t := \frac{y - a}{b - a} \in [0, 1] \quad \text{mit } \ f(t) = y.$$

Also ist f auch surjektiv. Die Umkehrabbildung wird gegeben durch

$$f^{-1} : [a, b] \to [0, 1],\ y \mapsto \frac{y - a}{b - a}.$$

c) Ist $A \neq \emptyset$, so ist die Abbildung

$$\varphi : A \to \operatorname{Pot}(A), \quad a \mapsto \{a\},$$

injektiv, aber nicht surjektiv, da z. B. die leere Menge nicht als Bild von φ auftritt. Ist B eine weitere Menge, so ist die Abbildung

$$\varphi : \operatorname{Pot}(A) \to \operatorname{Pot}(A \cap B), \quad M \mapsto M \cap B,$$

surjektiv. Sie ist genau dann injektiv, wenn $A \subset B$. In diesem Fall ist φ die Identität auf $\operatorname{Pot}(A)$.

§3. Mengenalgebra

Das Lernziel dieses Paragrafen besteht darin, die Grundzüge der Verknüpfung von Mengen kennenzulernen.

Um Verknüpfungen von Mengen geht es in der

(3.1) Definition. Seien M und N Mengen. Die *Vereinigung* von M und N ist die Menge aller Elemente, die zu M oder (auch) zu N gehören. Wir verwenden die Bezeichnung

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

Der *Durchschnitt* von M und N ist die Menge aller Elemente, die sowohl zu M als auch zu N gehören. Wir verwenden die Schreibweise

$$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}.$$

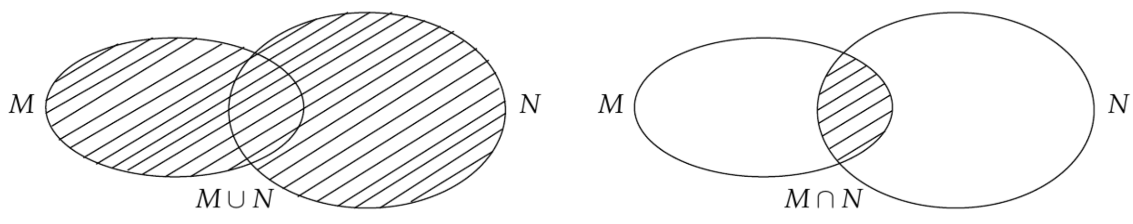
M und N heißen *disjunkt*, wenn $M \cap N = \emptyset$.

Der Illustration dienen die

(3.2) Beispiele. a) $M = \{0,1,2,3\},\ N = \{1,3,5\}$:

$$M \cup N = \{0,1,2,3,5\}, \quad M \cap N = \{1,3\}.$$

b) $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+^* = \mathbb{N}$.
c) für das Verständnis sind oft bildliche Darstellungen:



d) Sind M, N nicht-leere Mengen, so kann man das Kreuzprodukt $M \times N$ identifizieren mit der folgenden Menge von Abbildungen

$$\mathcal{F} := \big\{f;\ f : \{1,2\} \to M \cup N \text{ Abbildung},\ f(1) \in M, f(2) \in N\big\}.$$

Anders ausgedrückt ist die Abbildung

$$\mathcal{F} \to M \times N, \qquad f \mapsto (f(1), f(2)),$$

bijektiv.

Erste Eigenschaften der Verknüpfung beinhaltet das

(3.3) Lemma. *Seien L, M, N Mengen. Dann gilt:*

a) $M \cup \emptyset = M,\ M \cap \emptyset = \emptyset.$

b) $M \subset M \cup N,\ N \subset M \cup N,\ M \cap N \subset M,\ M \cap N \subset N.$

c) $L \subset M$ *und* $L \subset N \Longleftrightarrow L \subset M \cap N,$
$L \subset N$ *und* $M \subset N \Longleftrightarrow L \cup M \subset N.$

d) $M \cup N = N \cup M,\ M \cap N = N \cap M$ *(Kommutativgesetze).*

e) $L \cup (M \cup N) = (L \cup M) \cup N,\ L \cap (M \cap N) = (L \cap M) \cap N$ *(Assoziativgesetze).*

f) $L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N), L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$ *(Distributivgesetze).*

Beweis. a), b), c), d), e) Diese Aussagen sind klar.
f) "$\subset$" Sei $x \in L \cap (M \cup N)$, d. h. $x \in L$ und $x \in M \cup N$, d. h. $(x \in M$ oder $x \in N)$.
1. Fall: $x \in M$. Dann gilt $x \in L$ und $x \in M$, also $x \in L \cap M$.
2. Fall: $x \in N$. Dann gilt $x \in L$ und $x \in N$, also $x \in L \cap N$.
Aus beiden Fällen folgt $x \in L \cap M$ oder $x \in L \cap N$, d. h. $x \in (L \cap M) \cup (L \cap N)$.
"$\supset$" Sei $x \in (L \cap M) \cup (L \cap N)$, d. h. $x \in L \cap M$ oder $x \in L \cap N$.
1. Fall: $x \in L \cap M$. Dann gilt $x \in L$ und $x \in M$, also auch $x \in M \cup N$.
2. Fall: $x \in L \cap N$. Dann gilt $x \in L$ und $x \in N$, also auch $x \in M \cup N$.
Aus beiden Fällen folgt $x \in L$ und $x \in M \cup N$, also $x \in L \cap (M \cup N)$.
Die zweite Gleichung beweist man völlig analog. □

Wir kommen zu einer weiteren

(3.4) Definition. Sind M und N Mengen, so besteht die *Differenz* von M und N aus allen Elementen, die zu M, aber nicht zu N gehören. Man schreibt dafür

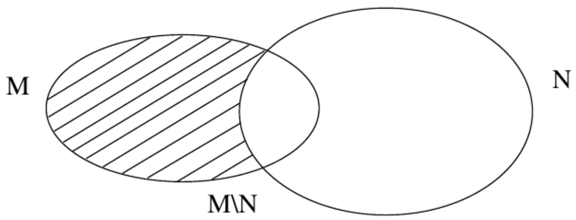
$$M \backslash N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}.$$

Der Veranschaulichung dienen die folgenden

(3.5) Beispiele. a) $M = \{0,1,2,3\},\ N = \{1,3,5\}$:

$$M\backslash N = \{0,2\},\ N\backslash M = \{5\}.$$

b) $\mathbb{N}_0\backslash\{0\} = \mathbb{N},\ \mathbb{N}\backslash\mathbb{Z} = \emptyset, \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^*$.
c) Bildlich hat man



Achtung: Im Allgemeinen gilt

$$(M\backslash N) \cup N \neq M, \quad (M \cup N)\backslash N \neq M.$$

Durch das gesamte Mathematikstudium begleiten werden Sie die folgenden *Regeln von* Augustus DE MORGAN (1806-1871).

(3.6) Satz. *Seien K, L, M Mengen. Dann gilt:*
a) $K\backslash L \subset K$.
b) $(K\backslash L) \cap L = \emptyset$.
c) $(K\backslash L) \cup L = K \cup L$.
d) $K\backslash(K\backslash L) = K \cap L$.
e) $K\backslash(L \cup M) = (K\backslash L) \cap (K\backslash M)$.
f) $K\backslash(L \cap M) = (K\backslash L) \cup (K\backslash M)$.

Beweis. a), b), c) Die Aussagen sind klar.
d) "$\subset$" Sei $x \in K\backslash(K\backslash L)$, d. h. $x \in K$ und $x \notin K\backslash L$. Das bedeutet $x \in K$ und $x \in L$, da man andernfalls $x \notin L$, also $x \in K\backslash L$ als Widerspruch erhält. Es folgt $x \in K \cap L$.
"$\supset$" Sei $x \in K \cap L$, also $x \in K$ und $x \in L$. Es folgt $x \in K$ und $x \notin K\backslash L$, also $x \in K\backslash(K\backslash L)$.
e) "$\subset$" Sei $x \in K\backslash(L \cup M)$, also $x \in K$ und $x \notin L \cup M$, d. h. $x \notin L$ und $x \notin M$. Es folgt $x \in K\backslash L$ und $x \in K\backslash M$, also $x \in (K\backslash L) \cap (K\backslash M)$.
"$\supset$" Sei $x \in (K\backslash L) \cap (K\backslash M)$, also $x \in K\backslash L$ und $x \in K\backslash M$, d. h. $x \in K$ und $x \notin L$ und $x \notin M$. Es folgt $x \notin L \cup M$, also auch $x \in K\backslash(L \cup M)$.
f) Die Aussage wird analog zu e) bewiesen. $\square$

Einen Spezialfall von (3.6) betrachten wir in der

(3.7) Bemerkung. Seien X eine Menge und $L, M \subset X$. Dann nennt man

$$M^c := \mathcal{C}_X M := X \backslash M = \{x \mid x \in X \text{ und } x \notin M\}$$

das *Komplement* von M in X. In diesem Fall formuliert man (3.6) in der Form

a) $L^c \subset X$,

b) $L^c \cap L = \emptyset$,

c) $L^c \cup L = X$,

d) $(L^c)^c = L$,

e) $(L \cup M)^c = L^c \cap M^c$,

f) $(L \cap M)^c = L^c \cup M^c$.

Wir wenden nun die eingeführten Begriffe auf Abbildungen an.

(3.8) Lemma. *Gegeben sei eine Abbildung $f : A \to B$. Dann gilt für alle Teilmengen $A_1, A_2 \subset A$ und $B_1, B_2 \subset B$:*
a) Aus $A_1 \subset A_2$ folgt $f(A_1) \subset f(A_2)$. Es gilt stets

(i) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,

(ii) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$,

(iii) $f(A_1 \backslash A_2) \supset f(A_1) \backslash f(A_2)$.

b) Aus $B_1 \subset B_2$ folgt $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. Es gilt stets

(i) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,

(ii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,

(iii) $f^{-1}(B_1 \backslash B_2) = f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2)$.

Beweis. a) Aus $A_1 \subset A_2$ folgt

$$f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\} \subset \{f(x) \mid x \in A_2\} = f(A_2).$$

Also hat man $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2), f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ und damit

$$f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2).$$

Zu $y \in f(A_1 \cup A_2)$ gibt es ein $x \in A_1 \cup A_2$ mit $f(x) = y$. Also hat man $x \in A_1$ oder $x \in A_2$. Aus $x \in A_1$ bzw. $x \in A_2$ folgt $y \in f(A_1)$ bzw. $y \in f(A_2)$, also insgesamt
$$y \in f(A_1) \cup f(A_2).$$
Wegen $A_1 \cap A_2 \subset A_i$ hat man $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_i)$ für $i = 1, 2$, also
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$
Zu $y \in f(A_1) \backslash f(A_2)$ existiert ein $x \in A_1$ mit $y = f(x)$. Es gilt $x \notin A_2$, da aus $x \in A_2$ auch $y \in f(A_2)$ als Widerspruch folgen würde. Also hat man $x \in A_1 \backslash A_2$ und auch
$$y \in f(A_1 \backslash A_2).$$
b) Aus $B_1 \subset B_2$ folgt sofort
$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A \mid f(x) \in B_1\} \subset \{x \in A \mid f(x) \in B_2\} = f^{-1}(B_2).$$
Daraus ergibt sich wie zuvor
$$f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2), \; f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$
Sei nun $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$, also $f(x) \in B_1 \cup B_2$. Im Fall $f(x) \in B_1$ erhält man $x \in f^{-1}(B_1)$, andernfalls $x \in f^{-1}(B_2)$, d. h.
$$x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$
Sei nun $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$, also $f(x) \in B_1$ und $f(x) \in B_2$. Das bedeutet auch $f(x) \in B_1 \cap B_2$ und
$$x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2).$$
$x \in f^{-1}(B_1 \backslash B_2)$ ist definiert durch $f(x) \in B_1 \backslash B_2$, also $f(x) \in B_1$ und $f(x) \notin B_2$. Das ist äquivalent zu $x \in f^{-1}(B_1)$ und $x \notin f^{-1}(B_2)$, also zu
$$x \in f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2). \qquad \square$$

Wir können die Definitionen von Vereinigung und Durchschnitt noch allgemeiner fassen.

(3.9) Definition. Sei I eine nicht-leere Menge und für jedes $i \in I$ sei eine Menge M_i gegeben. Dann heißt
$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : \; x \in M_i\}$$

der *Durchschnitt* der M_i über alle $i \in I$ und

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I : \; x \in M_i\}$$

die *Vereinigung* der M_i über alle $i \in I$. Ist speziell $I = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, so schreibt man

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i := \bigcap_{i \in I} M_i, \quad \bigcup_{j=1}^{n} M_j := \bigcup_{k \in I} M_k.$$

Im Fall $I = \mathbb{N}$ setzt man schließlich

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} M_k := \bigcap_{j \in \mathbb{N}} M_j, \quad \bigcup_{l=1}^{\infty} M_l := \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} M_\nu.$$

Man beachte, dass in der letzten Beschreibung **keine** Menge M_∞ existiert. Üblicherweise nennt man I in (3.9) die *Indexmenge*. Der Veranschaulichung dienen die

(3.10) Beispiele. a) Sei $I = \mathbb{N}$, $M_i = \{2i\}$, $N_i = \{-i, i-1\}$, $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen und $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i = \mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen.
b) Sei $M_n = \{n, n+1, \ldots, 2n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \mathbb{N}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = \emptyset.$$

c) Sei $M_n = \{j \mid j \in \mathbb{N} \text{ und } j \geq n\}$. Dann gilt $M_{n+1} \subset M_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \mathbb{N}, \quad \bigcap_{n=1}^{m} M_n = M_m, \;\; m \in \mathbb{N}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = \emptyset.$$

d) Es gilt

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x^2\} = \mathbb{R}_+, \quad \bigcap_{x \in \mathbb{R}} \{y \in \mathbb{R};\; y \geqslant x\} = \emptyset.$$

Als Verallgemeinerung von (3.7) formulieren wir die

(3.11) Bemerkung. Die DE MORGANschen Regeln gelten auch für beliebige Vereinigungen und Durchschnitte mit den gleichen Beweisen:
Seien $I \neq \emptyset$ und $M_i \subset X, i \in I$, gegeben. Dann gilt

$$\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)^c = \bigcap_{i\in I}(M_i^c), \quad \left(\bigcap_{i\in I} M_i\right)^c = \bigcup_{i\in I}(M_i^c).$$

Wichtig für das Verständnis der Mengenlehre ist die

(3.12) Bemerkung. Es gibt keine *Allmenge*. Angenommen, es existiert eine Menge aller Mengen. In diesem Fall ist auch

$$X := \{M \mid M \text{ ist Menge und } M \notin M\}$$

eine Menge. Dann liefern sowohl $X \in X$ als auch $X \notin X$ jeweils einen Widerspruch.

Die Anzahl der Elemente einer Menge formalisieren wir in der

(3.13) Definition. Sei M eine Menge. Gibt es paarweise verschiedene Elemente $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, so definiert man $\sharp M := n$. Darüber hinaus setzt man $\sharp\emptyset = 0$ und $\sharp M = \infty$ andernfalls. Man nennt $\sharp M$ die *Mächtigkeit* oder *Ordnung* von M. Gilt $\sharp M = \infty$, so nennt man M *unendlich*. Im Fall $\sharp M \in \mathbb{N}_0$ spricht man von einer *endlichen Menge*.

Manche Autoren verwenden $|M|$ für die Mächtigkeit der Menge M.

(3.14) Lemma. *a) Sei $f : A \to B$ eine injektive Abbildung. Dann gilt für alle $M \subset A$*

$$\sharp f(M) = \sharp M.$$

b) Sind M, N endliche Mengen, so gilt

$$\begin{aligned} \sharp(M \times N) &= \sharp M \cdot \sharp N, \\ \sharp(M \cup N) &= \sharp M + \sharp N - \sharp(M \cap N). \end{aligned}$$

Beweis. a) Sei $M = \{a_i;\ i \in I\}$ mit $a_i \neq a_j$ für alle $i \neq j$, also $f(M) = \{f(a_i);\ i \in I\}$. Dann gilt auch $f(a_i) \neq f(a_j)$ für alle $i \neq j$ wegen der Injektivität von f. Es folgt

$$\sharp M = \sharp f(M) = \sharp I.$$

b) Sei $M = \{a_1, \dots, a_m\}$, $N = \{b_1, \dots, b_n\}$ mit jeweils paarweise verschiedenen Elementen. Dann gilt

$$M \times N = \{(a_i, b_j);\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

also

$$\sharp(M \times N) = mn.$$

Sei $M \cap N = \{c_1, \dots, c_r\}$ und ohne Einschränkung $a_i = b_i = c_i$ für $1 \leqslant i \leqslant r$. Dann gilt

$$M \cup N = \{c_1, \dots, c_r,\ a_{r+1}, \dots, a_m,\ b_{r+1}, \dots, b_n\}$$

und die Elemente sind paarweise verschieden. Es folgt

$$\sharp(M \cup N) = r + (m - r) + (n - r) = m + n - r = \sharp M + \sharp N - \sharp(M \cap N). \qquad \square$$

Ist $f : A \to B$ eine beliebige Abbildung, so gilt für alle $M \subset A$

$$\sharp f(M) \leqslant \sharp M$$

wenn wir $n \leqslant \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ definieren. Die Injektivität von f ist äquivalent zu der Bedingung

$$\sharp f(M) = 2$$

für jedes $M \subset A$ mit $\sharp M = 2$.

Kapitel II.

Reelle Zahlen und Funktionen

§1. Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Wir erinnern an die im ersten Kapitel eingeführten Schreibweisen für die diversen Zahlbereiche.

(1.1) Bezeichnungen. $\mathbb{N} := \{n \mid n \text{ ist natürliche Zahl }\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der *natürlichen Zahlen*.
$\mathbb{N}_0 := \{n \mid n \text{ ist natürliche Zahl oder Null }\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der *natürlichen Zahlen einschließlich Null* oder die Menge der *nicht-negativen ganzen Zahlen*.
$\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ ist ganze Zahl}\} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ ist die Menge der *ganzen Zahlen*.
$\mathbb{Q} = \{x \mid \text{es gibt ganze Zahlen } a, b, b \neq 0, \text{mit } x = \frac{a}{b}\}$ ist die Menge der *rationalen Zahlen* (Bruchzahlen).
Die Menge der *reellen Zahlen* wird mit $\mathbb{R}$ und die Menge der *komplexen Zahlen* (vgl. II §4) mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.
$\mathbb{R}_+$ steht für die Menge der *nicht-negativen reellen Zahlen*, $\mathbb{R}_+^*$ für die Menge der *positiven reellen Zahlen* und $\mathbb{R}^*$ (bzw. $\mathbb{C}^*$) für die Menge der reellen (bzw. komplexen) Zahlen ohne 0.

Die Bezeichnungen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ werden weltweit weitgehend einheitlich verwendet. Eine Reihe von Autoren fasst allerdings auch die Null als natürliche Zahl auf. Das ist einfach eine Frage des Geschmacks (und der Definition). Die Fachwelt konnte sich bisher leider auch nicht auf eine einheitliche Bezeichnung der positiven reellen Zahlen einigen. Es gelten die folgenden offensichtlichen Inklusionen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

In diesem Skript setzen wir $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ mit ihren Rechenoperationen, der Anordnung und den zugehörigen Regeln als bekannt voraus. Die reellen Zahlen werden in §2 axiomatisch eingeführt. Allerdings werden wir schon im weiteren Verlauf von §1 Aussagen über $\mathbb{R}$ formulieren. (Dies entspricht nicht gerade dem Prinzip eines strengen Aufbaus der Theorie, ist aber zu Übungs- und Gewöhnungszwecken ratsam. In §2 werden die Begründungen dann nachgeliefert, so weit nötig.) Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ werden wir in Kapitel II detailliert behandeln.

Wir formulieren zunächst ein wichtiges Beweisprinzip, das so genannte

(1.2) Induktionsprinzip. *Um eine Aussage $A(n)$ für alle ganzen Zahlen $n \geqslant n_0$ bei gegebenem $n_0 \in \mathbb{Z}$ nachzuweisen, genügt es zu zeigen:*

(IA) *$A(n_0)$ ist richtig (Induktionsanfang).*

(IS) *Für alle $n \geqslant n_0$ gilt: Wenn $A(n)$ richtig ist, dann ist auch $A(n+1)$ richtig (Induktionsschritt).*

Man nennt diese Methode das *Beweisprinzip der vollständigen Induktion*. Im Induktionsschritt nennt man die Annahme, dass $A(n)$ richtig ist, die *Induktionsvoraussetzung* (IV).

(1.3) Bemerkung. Das Beweisprinzip ist intuitiv leicht zu verstehen. Nach (IA) ist $A(n_0)$ richtig. Also kann man (IS) auf $n = n_0$ anwenden und erhält die Gültigkeit von $A(n_0+1)$. Wendet man (IS) auf $n = n_0 + 1$ an, so ergibt sich die Richtigkeit von $A(n_0+2)$ usw.
Im Grunde steht hier folgende charakteristische Eigenschaft der natürlichen Zahlen dahinter: Ist $M \subset \mathbb{N}$ so, dass

(i) $1 \in M$;

(ii) falls $n \in M$, so auch $n+1 \in M$, so ist schon $M = \mathbb{N}$.

In (1.2) wird genau diese Eigenschaft für

$$M := \{k \in \mathbb{N}; A(n_0 + k - 1) \text{ ist richtig}\}$$

verwendet.

Wir diskutieren ein einfaches

(1.4) Beispiel. Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 5$, gilt $2^n > n^2$.
(IA) Für $n = 5$ gilt $2^n = 2^5 = 32 > 25 = 5^2 = n^2$.
(IS) Sei $n \geqslant 5$, so dass $2^n > n^2$ bereits gilt. Multiplikation mit 2 ergibt $2^{n+1} > 2n^2$. Aus $n \geqslant 5$ erhält man $n \geqslant 3 > 2 + \frac{1}{n}$ und damit

$$2n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + n(2 + \frac{1}{n}) = (n+1)^2.$$

Also gilt dann auch $2^{n+1} > (n+1)^2$.

Man beachte, dass die Aussage auch für $n = 1$, nicht aber für $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ gilt. Im Induktionsschritt wurde $n \geqq 5$ verwendet. Die erste Aussage stammt von Jacob BERNOULLI (1654-1705). Dabei benutzen wir die

Vereinbarung $\quad x^0 := 1 \quad$ für alle $\quad x \in \mathbb{R}$.

Insbesondere gilt also auch $0^0 = 1$.

(1.5) Satz. *(*BERNOULLI*sche Ungleichung)*
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \geqq -1$, gilt

$$(1+a)^n \geqq 1 + na.$$

In diesem Fall gilt $(1+a)^n = 1 + na$ genau dann, wenn $n = 0$ oder $n = 1$ oder $a = 0$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n.
(IA) Im Fall $n = 0$ gilt $(1+a)^n = 1 = 1 + na$.
(IS) Es gelte $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $1 + a \geqslant 0$ ergibt eine Multiplikation dieser Ungleichung mit $1 + a$

(II.1)
$$\begin{aligned} (*) \qquad (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n \cdot (1+a) \geqslant (1+na) \cdot (1+a) \\ &= 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a, \end{aligned}$$

denn $na^2 \geqslant 0$. (Wir haben hier einige Regeln benutzt. Neben dem Distributivgesetz wurde insbesondere bei der ersten Ungleichung benutzt, dass für reelle $x, y, z \geqslant 0$ mit $x \geqslant y$ auch $xz \geqslant yz$ gilt. Der Schluss "$na^2 \geqslant 0$" benutzt zudem, dass $a^2 \geqslant 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.)
Für $n = 0$ oder $n = 1$ oder $a = 0$ gilt die Gleichheit. Ist aber $n \geqq 1$ und $a \neq 0$, so hat man $(1+a)^{n+1} > 1 + (n+1)a$ nach (II.1) wegen $na^2 > 0$. $\square$

Für weitere Rechnungen benötigen wir die

(1.6) Bezeichnungen. Seien $m, n \in \mathbb{Z}, m \leqslant n$. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ mit $m \leqslant k \leqslant n$ sei eine reelle (komplexe) Zahl a_k gegeben. Dann definiert man die *Summen-* und *Produktzeichen* durch

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n, \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Im Fall $n = m$ bestehen Summe und Produkt aus einem Term und haben den Wert a_m. Für $m > n$ definiert man die *leere Summe* und das *leere Produkt* formal durch

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0, \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k := 1.$$

Man hat als

(1.7) Beispiele. Es gilt

a) $\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14.$

b) $\sum_{k=0}^{3} k^k = 0^0 + 1^1 + 2^2 + 3^3 = 33.$

c) $\prod_{k=4}^{6} \left(k - \frac{1}{k}\right) = \left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(5 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(6 - \frac{1}{6}\right) = 105.$

d) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Den folgenden Satz soll Carl Friedrich GAUSS (1777-1855) als Schüler bewiesen haben, als er die Zahlen von 1 bis 100 addieren sollte.

(1.8) Satz. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Erster Beweis. Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach n.
(IA) Im Fall $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.
(IS) Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

□

Zweiter (alternativer) Beweis. Man hat

$$2\sum_{k=1}^{n} k = (1+2+\ldots+n) + (n+(n-1)+\ldots+1) = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}[k+(n+1-k)] = \sum_{k=1}^{n}(n+1) = n(n+1).$$

(Hier wurde insbesondere das Kommutativgesetz der Addition benutzt.) □

Es gilt also $1+2+\ldots+100 = \frac{1}{2}100\cdot 101 = 5050$.
Als weitere wohlbekannte Formel erhalten wir den

(1.9) Satz. *(Geometrische Summenformel)*
a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und jede reelle (komplexe) Zahl $q \neq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+\ldots+q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle reellen (komplexen) Zahlen a, b mit $a \neq b$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

Beweis. a) *1. Beweis.* Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach n.
(IA) Im Fall $n=0$ gilt $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{q-1}{q-1}$.
(IS) Es gelte $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}.$$

□

2. (alternativer) Beweis. Man berechnet

$$(q-1)\cdot\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} q^k \underset{(j=k+1)}{=} \sum_{j=1}^{n+1} q^j - \sum_{k=0}^{n} q^k$$
$$= q^{n+1} + \left(\sum_{j=1}^{n} q^j\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} q^k\right) - q^0 = q^{n+1} - 1.$$

□

b) Im Fall $b = 0$ ist die Behauptung trivial, weil beide Seiten gleich a^n sind. Ist $b \neq 0$, so verwendet man a) mit $q = \frac{a}{b} \neq 1$ in der Rechnung

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = b^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^k = b^n \cdot \frac{(a/b)^{n+1} - 1}{(a/b) - 1} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

□

Im Fall $q = 1$ bzw. $a = b$ haben alle Größen in (1.9) den Wert $n+1$ bzw. $(n+1)a^n$.

(1.10) Beispiele. a) Ein Sparer zahlt zu Beginn eines jeden Jahres eine konstante Sparsumme K_0 ein, die fest zu p% jährlich verzinst wird, wobei die Zinsen am Ende eines jeden Jahres dem Sparkonto gutgeschrieben werden. Zur Berechnung der Sparsumme am Ende des n-ten Jahres setzt man $q = 1 + p/100$ und erhält mit (1.9)

$$\sum_{k=1}^{n} K_0\, q^k = K_0 \left[\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - 1\right] = K_0\, q\, \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

b) Ein Kredit kostet monatlich p% Zinsen. Den jährlichen Zinssatz berechnet man dann aus

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12} > 1 + \frac{12p}{100}$$

nach (1.5). Ein Monatszins von $0,5\%$ führt zu einem Jahreszins von $\approx 6,17\%$.

Wir kommen zu einer weiteren wohlbekannten

(1.11) Definition. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man n *Fakultät* durch

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \in \mathbb{N}.$$

Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n$ definiert man den *Binomialkoeffizienten* durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \in \mathbb{Q}.$$

Insbesondere hat man also $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \ \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(1.12) Lemma. *Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n$. Dann gilt:*

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

b) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$, *falls $k > 0$.*

c) $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Beweis. a) Es gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

b) Man hat

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n+1-k)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n+1-k)!} \cdot [k + (n+1-k)] = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

c) Wir verwenden eine Induktion nach n.
(IA) Im Fall $n = 0$ hat man $\binom{0}{0} = 1 \in \mathbb{N}$.
(IS) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für $0 \leqslant k \leqslant n$. Es gilt

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1 \in \mathbb{N}.$$

Sei also $0 < k \leqslant n$. Dann folgt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \in \mathbb{N}$$

aus b) und der Induktionsvoraussetzung. □

Damit haben wir das wesentliche Hilfsmittel zum Beweis der binomischen Formel.

(1.13) Satz. *(Binomische Formel)*
Für $n \in \mathbb{N}_0$ und alle reellen (komplexen) Zahlen a, b gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweis. Die zweite Summe entsteht aus der ersten durch Umindizierung $k \mapsto n-k$, wenn man (1.12) a) beachtet. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n.
(IA) Im Fall $n = 0$ gilt

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}.$$

(IS) Die obige Formel gelte für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Durch Multiplikation mit $a+b$ folgt daraus

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&\underset{(j=k+1)}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] a^i b^{n+1-i} \right) + \binom{n}{0} b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} \right) + b^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i},
\end{aligned}$$

wenn man (1.12) b) verwendet. □

Die in der Schule gelernte binomische Formel bezieht sich natürlich auf $n = 2$.

Es gilt also speziell

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2,\\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.\end{aligned}$$

Es existiert auch eine Verallgemeinerung auf r Summanden, der so genannte

(1.14) Multinomialsatz. *Für $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und alle reellen (komplexen) Zahlen $x_1, \ldots, x_r$ gilt:*

$$(x_1+\ldots+x_r)^n = \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{N}_0^{(r)} \\ k_1+\ldots+k_r=n}} \frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_r!}\cdot x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_r^{k_r}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussagen durch Induktion nach r.
(IA) Im Fall $r=1$ sind beide Seiten gleich x_1^n.
(IS) Die obige Formel gelte für ein $r\in\mathbb{N}$ und alle $n\in\mathbb{N}_0$. Mit (1.13) und der Induktionsvoraussetzung folgt dann

$$\begin{aligned}
& (x_1+\ldots+x_{r+1})^n\\
= {} & ((x_1+\ldots+x_r)+x_{r+1})^n\\
= {} & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(x_1+\ldots+x_r)^k\cdot x_{r+1}^{n-k}\\
= {} & \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\left(\sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{N}_0^{(r)}\\ k_1+\ldots+k_r=k}}\frac{k!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_r!}\cdot x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_r^{k_r}\right)\cdot x_{r+1}^{n-k}\\
\underset{k_{r+1}=n-k}{=} {} & \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_{r+1})\in\mathbb{N}_0^{(r+1)}\\ k_1+\ldots+k_{r+1}=n}}\frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_{r+1}!}\cdot x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_{r+1}^{k_{r+1}}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Speziell hat man zum Beispiel

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz,\\ (x+y+z)^3 &= x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+3xz^2+3y^2z+3yz^2+6xyz.\end{aligned}$$

Die Spezialfälle $a = b = 1$ und $a = -1, b = 1$ von (1.13) formulieren wir als

(1.15) Korollar. *Es gilt*

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$,

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Als weitere Anwendung von (1.12) erhalten wir den

(1.16) Satz. *Sei* M *eine Menge mit* $\sharp M = n \in \mathbb{N}_0$. *Dann ist die Anzahl der* k-*elementigen Teilmengen von* M *genau*

$$\binom{n}{k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Beweis. Wir verwenden eine Induktion nach n.
(IA) Im Fall $n = 0$ gilt $M = \varnothing$ und die leere Menge hat nur eine einzige Teilmenge, nämlich $\varnothing$. Es gilt $\binom{0}{0} = 1$.
(IS) Sei M eine Menge mit $n + 1$ Elementen $M = M' \cup \{a\}$, $\sharp M' = n$. Sei $A \subset M$ mit $\sharp A = k$. Im Fall $k = 0$ bzw. $k = n + 1$ gibt es nur eine Möglichkeit, nämlich $A = \varnothing$ bzw. $A = M$. Es gilt auch $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$.
Sei $0 < k \leqslant n$. Wenn A das Element a nicht enthält, so ist A eine k-elementige Teilmenge von M'. Nach Induktionsvoraussetzung hat man $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten für A. Andernfalls gilt $A = A' \cup \{a\}$, wobei A' eine beliebige $(k-1)$-elementige Teilmenge von M' ist. Nach Induktionsvoraussetzung hat man $\binom{n}{k-1}$ Möglichkeiten für A'. Insgesamt gibt es nach (1.12) b)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

mögliche k-elementige Teilmengen von M. $\square$

Die Anzahl aller Teilmengen von M ist demnach $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Aus (1.15) a) ergibt sich damit die Mächtigkeit der *Potenzmenge* $\operatorname{Pot}(M) = \{A;\ A \subset M\}$.

(1.17) Korollar. *Sei M eine Menge mit $\sharp M = n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\sharp \operatorname{Pot}(M) = 2^n.$$

Eine weitere wichtige Ungleichung erhalten wir in dem folgenden Satz. In (2.30) werden wir ihn nochmal in anderer Formulierung sehen.

(1.18) Satz. *(Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel, erste Version)*
Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$, so gilt

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \leqslant \left(\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)\right)^n.$$

Es gilt Gleichheit genau dann, wenn $a_1 = \ldots = a_n$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n.
(IA) Im Fall $n = 1$ sind beide Seiten gleich a_1.
(IS) Obige Ungleichung gelte für $n \in \mathbb{N}$. Seien $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}_+$. Ist eine der Zahlen 0, so ist die linke Seite 0 und die rechte in $\mathbb{R}_+$, so dass die Ungleichung gilt. Sei also nach eventueller Umnummerierung ohne Einschränkung $a_{n+1} \geqslant a_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha &:= \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{n+1}}{n} = a_{n+1}, \quad \alpha > 0, \\ x &:= \frac{a_{n+1} - \alpha}{(n+1)\alpha} \geqslant 0, \quad 1 + x = \frac{n\alpha + a_{n+1}}{(n+1)\alpha} = \frac{a_1 + \ldots + a_{n+1}}{(n+1)\alpha}. \end{aligned}$$

Aus der BERNOULLIschen Ungleichung (1.5) folgt

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_{n+1}}{(n+1)\alpha}\right)^{n+1} = (1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x = \frac{a_{n+1}}{\alpha}.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung $\alpha^n \geqslant a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ erhält man

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant \alpha^n \cdot a_{n+1} \geqslant a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}.$$

Zieht man die $(n+1)$-te Wurzel, so folgt die Ungleichung. Im Fall $a_1 = \ldots = a_n$ hat man die Gleichheit. Ist das nicht der Fall, so gilt $n > 1$ und auch $\alpha < a_{n+1}$, also $x > 0$ im Beweis. Dann folgt die Behauptung mit (1.5). $\square$

Im Fall $n = 2$ hat man einen viel einfacheren Beweis:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}(a_1 + a_2)\right)^2 - a_1 a_2 &= \frac{1}{4}(a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 - 4a_1 a_2) \\ &= \frac{1}{4}(a_1 - a_2)^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

wobei man benutzt, dass Quadrate reelle Zahlen $\geqslant 0$ sind!

§2. Die reellen Zahlen

Wir sind vertraut mit den reellen Zahlen, die wir als endliche oder unendliche Dezimalzahlen kennen. Es gibt zwei grundsätzliche Möglichkeiten, $\mathbb{R}$ einzuführen. Einerseits kann man $\mathbb{R}$ konstruktiv aus $\mathbb{Q}$ gewinnen. Dazu hat man den Quotientenraum aus rationalen CAUCHY-Folgen und Nullfolgen zu bilden oder etwa so genannte DEDEKINDsche Schnitte zu betrachten. Dieser Zugang wird im Skript *Zahlbereichserweiterungen* dargestellt. Andererseits gibt es den axiomatischen Zugang, den wir beschreiten werden. Dabei definiert man $\mathbb{R}$ als eine Menge, die gewissen Axiomen genügt. Der nicht-triviale Teil, der zum Beispiel im Skript *Zahlbereichserweiterungen* ausgeführt wird, besteht darin, die Existenz einer solchen Menge nachzuweisen. Wir fangen allgemein an.

(2.1) Definition. Gegeben sei eine Menge K mit mehr als einem Element und mit zwei inneren Verknüpfungen "$+$" und "$\cdot$", d. h., es gibt zwei Abbildungen

$$K \times K \to K, \quad (a,b) \mapsto a+b \quad \text{und} \quad K \times K \to K, \quad (a,b) \mapsto a \cdot b,$$

die *Addition* und *Multiplikation* genannt werden,
K oder $(K, +, \cdot)$ heißt *Körper*, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(K.1) (*Assoziativgesetze*) Für alle $a, b, c \in K$ gilt

$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad \text{und} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

(K.2) (*Kommutativgesetze*) Für alle $a, b \in K$ gilt

$$a+b = b+a \quad \text{und} \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

(K.3) (*Existenz neutraler Elemente*) Es gibt Elemente $0 \in K$ und $1 \in K$, so dass für alle $a \in K$ gilt

$$a+0 = a \quad \text{und} \quad a \cdot 1 = a.$$

(K.4) (*Existenz inverser Elemente*) Zu jedem $a \in K$ existiert ein Element $-a \in K$ mit der Eigenschaft $a + (-a) = 0$. Zu jedem $a \in K, a \neq 0$, existiert ein Element $a^{-1} \in K$ mit der Eigenschaft $a \cdot a^{-1} = 1$.

(K.5) (*Distributivgesetz*) Für alle $a, b, c \in K$ gilt

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Das Element 0 bzw. 1 in (K.3) heißt *Nullelement* bzw. *Einselement*.

Der Veranschaulichung dienen die folgenden

(2.2) Beispiele. a) $\mathbb{Q}$ ist mit den üblichen Verknüpfungen "$+$" und "$\cdot$" ein Körper.
b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper, weil z. B. 2 kein Inverses bezüglich der Multiplikation besitzt.
c) Es gibt auch endliche Körper. Das kleinste Beispiel ist die Menge $\mathbb{F}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ mit den Verknüpfungen

$$\overline{0} + \overline{0} := \overline{1} + \overline{1} := \overline{0},\ \overline{0} + \overline{1} := \overline{1} + \overline{0} := \overline{1},\ \overline{1} \cdot \overline{1} := \overline{1},\ \overline{0} \cdot \overline{0} := \overline{0} \cdot \overline{1} := \overline{1} \cdot \overline{0} = \overline{0}.$$

Die Axiome müssen hier nachgerechnet werden. Die endlichen Körper spielen in der Analysis keine Rolle.

Weitere Beispiele von Körpern finden Sie vor allem in der Linearen Algebra und in der Algebra.

(2.3) Satz. *Sei K ein Körper. Dann gilt für alle $a, b, c \in K$:*

(i) Es gibt genau ein $x \in K$ mit $a + x = b$, nämlich $x = b + (-a)$. Wir schreiben auch $x = b - a$. Es gilt $-0 = 0$ und $-(a + b) = (-a) + (-b)$. Das Element 0 ist durch (K.3) *eindeutig bestimmt.*

(ii) Aus $a + c = b + c$ folgt $a = b$.

(iii) Ist $a \neq 0$, so gibt es genau ein $y \in K$ mit $a \cdot y = b$, nämlich $y = b \cdot a^{-1}$. Wir schreiben auch $y = \frac{b}{a} = b/a$. Es gilt $1^{-1} = 1$. Das Element 1 ist durch (K.3) *eindeutig bestimmt.*

(iv) Aus $a \cdot c = b \cdot c$ und $c \neq 0$ folgt $a = b$.

(v) $a \cdot 0 = 0$.

(vi) *Es gilt* $1 \neq 0$ *und aus* $a \cdot b = 0$ *folgt* $a = 0$ *oder* $b = 0$.

(vii) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, $-(-a) = a$, $(-1) \cdot a = -a$ *und* $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

(viii) *Aus* $a \neq 0$ *und* $b \neq 0$ *folgt* $a \cdot b \neq 0$, $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ *und* $a^{-1} \neq 0$ *mit* $(a^{-1})^{-1} = a$.

(ix) *Aus* $b \neq 0$ *und* $c \neq 0$ *folgt* $ab^{-1} = (ac)(bc)^{-1}$. *("Erweitern und Kürzen")*

Die Aussage wird in den Mathematischen Grundlagen bewiesen.

Wir werden in Zukunft den Punkt bei der Multiplikation meistens weglassen und vereinbaren die Regel "Punktrechnung vor Strichrechnung", d. h.

$$a \cdot b + c := (a \cdot b) + c \quad \text{usw.}$$

(2.4) Bemerkung. Die Aussagen in (1.10), (1.13) und (1.15) gelten in jedem Körper K, wenn man

$$n \cdot x : = \underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ Terme}}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $x \in K$ setzt. (Die Beweise klappen mit den Axiomen und Regeln aus (2.1) und (2.3).)

Als Nächstes kümmern wir uns um die Anordnung. Eine Möglichkeit, dies zu tun, ist die Auszeichnung der positiven Elemente.

(2.5) Definition. Sei K ein Körper.

(a) Eine Teilmenge P von$K$ heißt *Positivitätsbereich*, wenn gilt:

(P.1) Für alle $x \in K$ ist genau eine der Aussagen $x \in P$; $x = 0$; $-x \in P$ richtg. (Also $K = P \,\dot{\cup}\, \{0\} \,\dot{\cup}\, (-P)$.)

(P.2) Für alle $x, y \in P$ gilt $x + y \in P$. (Also $P + P \subset P$.)

(P.3) Für alle $x, y \in P$ gilt $x \cdot y \in P$. (Also $P \cdot P \subset P$.)

(b) Ist P ein Positivitätsbereich von K, so definiert man eine Relation " $<$ " auf K durch $x < y :\Leftrightarrow y - x \in P$. Weiter vereinbart man:

$$\begin{aligned} x \leqslant y &\Leftrightarrow x < y \text{ oder } x = y; \\ x > y &\Leftrightarrow y < x; \\ x \geqslant y &\Leftrightarrow y \leqslant x. \end{aligned}$$

(c) Für $x \in P$ sagt man auch, x sei *positiv*. Für $-x \in P$ sagt man auch, x sei *negativ*.

(d) Ein Körper K mit Positivitätsbereich P heißt *angeordneter Körper*.

Wir diskutieren zunächst ein bekanntes

(2.6) Beispiel. $\mathbb{Q}$ ist mit der üblichen Menge positiver Zahlen ein angeordneter Körper.

Man beachte, dass P und die $<$-Relation sich auseinander gewinnen lassen:

$$P = \{x \in K;\ x > 0\}.$$

Eigentlich muss bei einem angeordneten Körper stets noch P (oder $<$) mit angegeben werden. Wir tun dies oft aber nicht.

(2.7) Satz. *Sei K angeordneter Körper. Dann gilt*

a) Für alle $a \in K$ gilt genau eine der Beziehungen

$$a > 0; \quad a = 0; \quad a < 0.$$

Äquivalent ausgedrückt: Es gilt genau eine der Beziehungen

$$a > 0; \quad a = 0; \quad -a > 0.$$

b) Durch $<$ ist eine strikte Ordnungsrelation gegeben, d. h.

b1) für $a, b \in K$ gilt genau eine der Beziehungen

$$\begin{aligned} & a < b; \quad a = b; \quad b < a; \\ (\text{äquivalent:}\quad & a < b; \quad a = b; \quad -a < -b); \end{aligned}$$

b2) für alle $a, b, c \in K$ mit $a < b$ und $b < c$ folgt auch $a < c$.

c) Für alle $a, b, c, d \in K$ gilt

c1) $a + c < b + c \;\Leftrightarrow\; a < b$;

c2) $a < b$ und $c \leqslant d \;\Rightarrow\; a + c < b + d$;

c3) $0 < a$ und $0 < b \;\Rightarrow\; 0 < ab$;

c4) $0 < a < b$ *und* $0 < c \leqslant d \;\Rightarrow\; ac < bd$*;*

c5) $0 < a < b \;\Rightarrow\; 0 < a^n < b^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*;*

d) Für alle $a, b, c, d \in K$ *gilt:*

d1) $a > 0$ *und* $b < 0 \;\Rightarrow\; ab < 0$*;*
$a < 0$ *und* $b < 0 \;\Rightarrow\; ab > 0$*;*

d2) $0 \leqslant a^2$*; speziell* $0 < 1$*;*

d3) $a > 0 \;\Leftrightarrow\; a^{-1} > 0$*;*

d4) $0 < a < b$ *und* $c < 0 \;\Rightarrow\; bc < ac < 0$*;*

d5) $a < b, a \neq 0$ *und* $b \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a^{-1} < b^{-1}, & \textit{falls } ab < 0, \\ b^{-1} < a^{-1}, & \textit{falls } ab > 0. \end{cases}$

Beweis. a) folgt direkt aus Definition (2.5), abenso b1).
Für b2) berücksichtige $b - a \in P$ und $c - b \in P \xrightarrow{(P.2)} c - a = (c - b) + (b - a) \in P$.
Für c1) benutze $b - a = (b + c) - (a + c)$ und (2.5).
Im Beweis von c2) kann man wegen (c1)) schon $c < d$ voraussetzen. Dann

$$(b + d) - (a + c) = \underbrace{(b - a)}_{\in P} + \underbrace{(d - c)}_{\in P} \in P \quad \text{nach (P.2).}$$

In c3) steht einfach (P.3) in anderer Formulierung. Im Fall $c = d$ folgt c4) aus $b - a \in P, c \in P$ und (P.3); im Fall $c < d$ ist weiter

$$bd - ac = b(d - c) + c(b - a) \in P$$

wegen (P.2) und (P.3). Mit simpler Induktion erhält man c5).
Zum Nachweis von d1) beachte im Fall $a > 0, b < 0$, dass $-b > 0$ und somit

$$-ab = a \cdot (-b) > 0$$

mit Satz (2.3). Falls $a < 0$, $b < 0$, so $-a > 0$, $-b > 0$ und deshalb $ab = (-a)(-b) \in P$ mit (2.3).
Dann ist d2) eine unmittelbare Konsequenz, da $1^2 = 1 \neq 0$.
Zum Nachteil von d3) nehme man $a > 0, a^{-1} < 0$ an. Dann $1 = a \cdot a^{-1} < 0$ nach d1) im Widerspruch zu d2).
d4) folgt aus $(-c)(b - a) > 0$ (wegen c3) und a). Im Fall $a > 0$, $b > 0$ ergibt

sich d5) wie folgt: Aus d3) folgt $a^{-1} > 0$ und $b^{-1} > 0$ und es ist $a^{-1} \neq b^{-1}$ wegen $a \neq b$. Wäre $a^{-1} < b^{-1}$, so $1 = aa^{-1} \overset{c4)}{<} bb^{-1} = 1$ und Widerspruch. Die restlichen Fälle ergeben sich hieraus mit d1), d3) und d4). □

Als Konsequenz ergibt sich, dass nicht jeder Körper angeordnet werden kann:

(2.8) Beispiel. Auf $F_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ existiert keine Anordnung. Dann wäre "$<$" eine solche, so entweder $\overline{0} < \overline{1}$ oder $\overline{1} < \overline{0}$ (da $\overline{1} \neq \overline{0}$).
Im ersten Fall folgt $\overline{1} = \overline{0} + \overline{1} < \overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$ und Widerspruch und der zweite Fall kann nach (2.7) d2) nicht eintreten.

(2.9) Bemerkung. Die Aussagen in (1.5) und (1.18) gelten für jeden angeordneten Körper. Denn in ihrem Beweis wurden nur die Regeln aus (2.7) für die Anordnung verwendet.

Nun kommen wir zur Definition des Betrages in dieser allgemeinen Situation.

(2.10) Definition. Sei K ein angeordneter Körper und $x \in K$. Dann wird der *Betrag* oder *Absolutbetrag* von x, also $|x| \in K$ definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Es gilt also stets $|x| \geqslant 0$. Im Fall $K = \mathbb{Q}$ ist es der gewöhnliche Betrag.

(2.11) Lemma. *Sei K ein angeordneter Körper. Dann gilt für alle $x, y \in K$:*

(i) $|x| \geqslant 0$ *und* $|x| > 0$ *für* $x \neq 0$.

(ii) $|x| = |-x|$ *und* $x \leqslant |x|$.

(iii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(iv) $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$ *und* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ *für* $y \neq 0$.

(v) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung).*

(vi) $|x + y| \geqslant ||x| - |y|| \geqslant |x| - |y|$ *(2. Dreiecksungleichung).*

(vii) $|x| \leqslant y \;\Leftrightarrow\; -y \leqslant x \leqslant y$.

Beweis. (i) Für $x \neq 0$ gilt entweder $x > 0$ oder $x < 0$, d. h. $-x > 0$ nach (2.7).
(ii) Für $x \geqslant 0$ gilt $|x| = |-x| = x$ und für $x < 0$ hat man $|x| = |-x| = -x$, insbesondere $x \leqslant 0 \leqslant |x|$.
(iii) Man führe eine Fallunterscheidung durch und verwende (2.7).
(iv) Man verwende (2.7) (viii).
(v) 1. Fall: Aus $x + y \geqslant 0$ folgt

$$|x + y| = x + y \leqslant |x| + |y|$$

wegen $x \leqslant |x|, y \leqslant |y|$ nach (ii).
2. Fall: Aus $x + y < 0$ folgt

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y \leqslant |x| + |y|$$

wegen $-x \leqslant |-x| = |x|$ und $-y \leqslant |-y| = |y|$ nach (ii).
(vi) Man verwende (v) in den Rechnungen

$$|x| = |x + y + (-y)| \leqslant |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|, \quad \text{also } |x + y| \geq |x| - |y|,$$
$$|y| = |y + x + (-x)| \leq |x + y| + |x|, \quad \text{also } |x + y| \geqslant |y| - |x| = -(|x| - |y|).$$

Es folgt $|x + y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$.
(vii) Es gilt $|x| \leqslant y$ genau dann, wenn $x \leqslant y$ und $-x \leqslant y$, d. h. $x \geqslant -y$. Also gilt insgesamt

$$|x| \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y. \qquad \square$$

Wir kommen nun zu einem wesentlichen Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Der liegt im Vollständigkeitsaxiom.

(2.12) Definition. Sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$. Die Menge M heißt *nach oben beschränkt*, falls ein $C \in K$ existiert, so dass $x \leqslant C$ für alle $x \in M$. Jedes solche C nennt man eine *obere Schranke* von M. Die Menge M heißt *nach unten beschränkt*, wenn ein $c \in K$ existiert mit $c \leqslant x$ für alle $x \in M$. Jedes solche c nennt man eine *untere Schranke* von M. Die Menge M heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Betrachtet man die größere der beiden Zahlen $|c|$, $|C|$, so sieht man sofort, dass M genau dann beschränkt ist, wenn es ein $R > 0$ gibt, so dass $|x| \leqslant R$ für alle $x \in M$. Die leere Menge ist trivialerweise beschränkt.

(2.13) Beispiele. Sei stets $K = \mathbb{Q}$.
a) $\mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt, da z. B. $c = 1$ oder $c = \frac{1}{2}$ untere Schranken sind. Wir werden später beweisen, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist.
b) Ist $M \subset \mathbb{Q}$ endlich, so ist M beschränkt.
c) $M = \{x \mid x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 3\}$ ist beschränkt. Z.B. ist 2 eine obere und -2 eine untere Schranke von M.
d) $\{x \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \frac{1}{m}\}$ ist beschränkt, da z. B. 1 eine obere und 0 eine untere Schranke ist.
e) $\{x \mid x \in \mathbb{Q},\ 0 < x < 1\}$ ist beschränkt.

Wir kommen nun zu einem ganz wesentlichen Begriff, der fundamental für das weitere Vorgehen ist.

(2.14) Definition. Sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$. Ein $C \in K$ heißt *Supremum* oder *kleinste obere Schranke* von M, wenn gilt:
(S.1) C ist eine obere Schranke von M, d. h. $x \leqslant C$ für alle $x \in M$.
(S.2) Ist C' eine obere Schranke von M, so gilt $C \leqslant C'$.
Ein $c \in K$ heißt *Infimum* oder *größte untere Schranke* von M, wenn gilt:
(I.1) c ist eine untere Schranke von M, d. h. $c \leqslant x$ für alle $x \in M$.
(I.2) Ist c' eine untere Schranke von M, so gilt $c' \leqslant c$.
Wir verwenden die Schreibweise $C = \sup M$ und $c = \inf M$.

Man beachte, dass das Supremum und das Infimum nicht zu existieren brauchen.

(2.15) Beispiele. Sei wieder $K = \mathbb{Q}$.
a) Es gilt $\inf \mathbb{N} = 1$ und $\inf \mathbb{N}_0 = 0$.
b) Sei $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$. Dann gilt $\inf M = 0$ und $\sup M = 1$.
(S.1) Es gilt $x \leqslant 1$ für alle $x \in M$. Also ist 1 eine obere Schranke.
(S.2) Sei $C \in \mathbb{Q}$, $C < 1$. Gilt $C \leqslant 0$, so ist C wegen $\frac{1}{2} \in M$ keine obere Schranke. Sei also $0 \leqslant C < 1$. Dann gilt

$$x := \frac{1}{2}(1 + C) \in \mathbb{Q}, \ \ 0 < x < 1,$$

also $x \in M$ und $C < x$. Demnach ist C keine obere Schranke von M. Es folgt $\sup M = 1$. Das Infimum wird analog behandelt.
c) Sei $M = \{x \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \frac{1}{m}\}$. Dann gilt $\inf M = 0$ und $\sup M = 1$.
d) $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant x,\ x^2 < 3\}$ erfüllt $\inf M = 0$, besitzt aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$. Dazu nehmen wir an, dass $a = \sup M$ existiert. Weil $x^2 = 3$ in $\mathbb{Q}$ nicht

lösbar ist, gilt entweder $a^2 < 3$ oder $a^2 > 3$.
1. Fall: $a^2 < 3$. Wegen $1 \in M$ gilt $1 \leqslant a$, also

$$0 < h := \frac{3-a^2}{2a+1} \leqslant \frac{3-1}{2+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

Demnach hat man $h^2 < h \cdot 1 = h < 1$ und

$$(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 < a^2 + h(2a+1) = 3.$$

Es folgt $a + h \in M$, so dass a keine obere Schranke von M ist. Das ist ein Widerspruch.
2. Fall: $a^2 > 3$. Dann betrachte man

$$b := a - \frac{a^2-3}{2a} < a, \quad b \geqslant \frac{a}{2} > 0.$$

Es gilt

$$b^2 = 3 + \left(\frac{a^2-3}{2a}\right)^2 > 3.$$

Demnach gilt $x^2 < 3 < b^2$, also $x < b$ für alle $x \in M$. Daher ist b eine kleinere obere Schranke von M als a. Das ist ein Widerspruch.
Folglich besitzt M kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Die Eindeutigkeit ist enthalten in dem

(2.16) Lemma. *Sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$. Falls M ein Supremum bzw. Infimum besitzt, so ist es eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien C_1 und C_2 Suprema von M. Weil C_2 ein Supremum und C_1 eine obere Schranke ist, gilt $C_2 \leqslant C_1$. Vertauscht man die Rollen, so folgt $C_1 \leqslant C_2$, also insgesamt $C_1 = C_2$. $\square$

Wir geben eine weitere Beschreibung des Supremums, die in Aufgaben häufig verwendet wird.

(2.17) Satz. *Sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$. Ein Element $C \in K$ ist genau dann das Supremum von M, wenn die beiden folgenden Aussagen erfüllt sind:*

(i) Für jedes $x \in M$ gilt $x \leqslant C$.

(ii) Zu jedem $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, existiert ein $x \in M$ mit $C - \varepsilon < x$.

Beweis. "$\Leftarrow$" Nach (i) ist C eine obere Schranke. Sei $C' < C$, also $\varepsilon := C - C' > 0$. Nach (ii) existiert ein $x \in M$ mit $C' = C - \varepsilon < x$. Also ist C' keine obere Schranke. Es folgt $C = \sup M$.
"$\Rightarrow$" Sei $C = \sup M$. Dann ist C eine obere Schranke; also gilt (i). Sei $\varepsilon > 0$, also $C - \varepsilon < C$. Dann ist $C - \varepsilon$ keine obere Schranke von M. Daher existiert ein $x \in M$ mit $C - \varepsilon < x$, d. h. (ii). $\square$

Analog oder durch Übergang zu $M' := \{-x \mid x \in M\}$ folgt das

(2.18) Korollar. *Sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$. Ein Element $c \in K$ ist genau dann das Infimum von M, wenn die beiden folgenden Aussagen erfüllt sind:*

(i) Für jedes $x \in M$ gilt $c \leqslant x$.

(ii) Zu jedem $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, existiert ein $x \in M$ mit $x < c + \varepsilon$.

Ein besonders "schöner" Fall liegt vor, wenn Supremum oder Infimum zur Menge gehören.

(2.19) Definition. Sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$. Existiert ein $c \in M$ mit $c = \sup M$ [bzw. $c = \inf M$], so nennt man c das *Maximum* von M [bzw. das *Minimum* von M]. Wir verwenden die Bezeichnung $c = \max M$ [bzw. $x = \min M$].

Es gilt also $c = \max M$ [bzw. $c = \min M$] genau dann, wenn

$$c \in M \quad \text{und} \quad x \leqslant c \;\; [\text{bzw.}\;\; x \geqslant c] \;\; \text{für alle} \;\; x \in M.$$

Die Existenz von Suprema formulieren wir nun als so genanntes *Vollständigkeitsaxiom*.

(2.20) Definition. Sei K ein angeordneter Körper. Wenn jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge von K ein Supremum besitzt, so nennt man K *vollständig*.

Dass das Supremum gleichberechtigt zum Infimum ist, besagt das

(2.21) Korollar. *Sei K ein angeordneter Körper. K ist genau dann vollständig, wenn jede nach unten beschränkte, nicht-leere Teilmenge von K ein Infimum besitzt.*

Beweis. $x \leqslant y$ ist nach (2.7) äquivalent zu $-y \leqslant -x$. Ist $M' := \{-x \mid x \in M\}$, so gilt daher $\sup M' = -\inf M$. □

Die Probleme mit $\mathbb{Q}$ werden deutlich in dem

(2.22) Beispiel. $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper, der nicht vollständig ist. Die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant x, x^2 < 3\}$ ist nach oben beschränkt und nicht-leer, besitzt nach (2.15) aber kein Supremum.

Das nehmen wir zum Anlass für die

(2.23) Definition. Die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen* ist ein vollständiger, angeordneter Körper.

Diese Definition birgt durchaus einige Probleme: Die Axiome könnten sich widersprechen. Die Widerspruchsfreiheit ist mit Mitteln der elementaren Logik nicht entscheidbar. Möglicherweise beschreiben die Axiome nicht das, was wir uns unter $\mathbb{R}$ vorstellen. Man kann aber zeigen, dass das Axiomensystem vollständig ist. Die Axiome sind sicher nicht unabhängig.

Wir verwenden im Folgenden nur die angegebene Charakterisierung der reellen Zahlen. Entscheidend sind die Eigenschaften und nicht der zufällige Name oder die Darstellung.

In Kapitel VI, §1 werden z. B. die Einbettung von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ sowie die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie) eines durch (2.23) definierten Körpers diskutiert. Im Folgenden benutzen wir diese einfach.

Wir ziehen zunächst einige Folgerungen aus der Einbettung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$.

(2.24) [. *Satz von* ARCHIMEDES *(287-212 v.Chr.)] Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt.*

Beweis. Wegen $1 \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{N} \neq \varnothing$. Wir schließen indirekt und nehmen an, dass $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert $C = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. In (2.15) setzt man $\varepsilon = 1$ und erhält ein $a \in \mathbb{N}$ mit

$$C - 1 < a \leqslant C, \quad \text{also} \quad C < a + 1.$$

Weil $\mathbb{N}$ induktiv ist, folgt $a + 1 \in \mathbb{N}$. Das ist ein Widerspruch, weil C dann keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ mehr ist. Folglich ist $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt. □

Wir ziehen zwei wichtige Folgerungen

(2.25) Korollar. *a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $b > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na > b$.*
b) Ist $a \in \mathbb{R}$ und gilt $0 \leqslant a < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a = 0$.

Beweis. a) Nach (2.24) existieren ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{b}{a}$. Es folgt $na > b$ wegen $a > 0$.
b) Wir führen den Beweis indirekt und nehmen $a \neq 0$, also $a > 0$ an. Aus $a \leq \frac{1}{n}$ folgt dann $n \leqslant \frac{1}{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ist ein Widerspruch zu (2.24). □

Nun zeigen wir, dass $\mathbb{Q}$ "dicht" in $\mathbb{R}$ liegt.

(2.26) Korollar. *Zu allen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft*

$$a < q < b.$$

Beweis. Wegen $b - a > 0$ existiert nach (2.25) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n(b - a) > 1$, also $0 < \frac{1}{n} < b - a$.
1. Fall: $a > 0$. Dann existiert wieder nach (2.25) ein $l \in \mathbb{N}$ mit $l \cdot \frac{1}{n} > a$. Also ist

$$M = \{k \in \mathbb{N} \mid \frac{k}{n} > a\}$$

nicht leer. Sei $m = \inf M = \min M$. Dann gilt $a < \frac{m}{n}$. Wäre $\frac{m}{n} \geqslant b$, so würde

$$\frac{m-1}{n} \geqslant b - \frac{1}{n} > b - (b - a) = a > 0$$

folgen. Dann erhält man $m - 1 \in \mathbb{N}$ und $m - 1 \in M$ als Widerspruch. Also gilt $a < \frac{m}{n} < b$.

2. Fall: $a \leqslant 0$. Wegen (2.24) existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $r > -a$, also $0 < a + r < b + r$. Nach dem 1. Fall existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < a + r < \frac{m}{n} < b + r, \quad \text{also} \quad a < \frac{m}{n} - r = \frac{m - rn}{n} < b, \quad \frac{m}{n} - r \in \mathbb{Q}. \qquad \square$$

Zwischen zwei reellen Zahlen liegen damit auch unendlich viele rationale Zahlen, nämlich in obiger Notation mit $q \in \mathbb{Q}$ auch

$$q + \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k > \frac{1}{b - q}.$$

Als erste Anwendung des Vollständigkeitsaxioms wollen wir die Existenz von n-ten Wurzeln beweisen, die wir schon beim geometrischen Mittel in (1.18) verwendet hatten. Dafür notieren wir zunächst den

(2.27) [. *Hilfssatz] Seien $n \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$. Dann existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft*

$$1 < a \quad \textit{und} \quad a^n < b.$$

Beweis. Wir verwenden eine Induktion nach n.
(IA) Im Fall $n = 1$ sei $a := \frac{1}{2}(1 + b)$.
(IS) Es gelte $1 < a$ und $a^n < b$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$, also $b/a^n > 1$. Wir wählen nun ein $A \in \mathbb{R}$ mit $1 < A < \min\{a, b/a^n\}$. Dann gilt

$$A^{n+1} = A^n \cdot A < a^n \cdot \frac{b}{a^n} = b. \qquad \square$$

Als Anwendung erhalten wir den

(2.28) Satz. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert zu jeder nicht-negativen reellen Zahl $x \in \mathbb{R}_+$ genau eine nicht-negative reelle Zahl $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$ mit der Eigenschaft $(\sqrt[n]{x})^n = x$. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt*

a) $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$.

b) $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \;\Leftrightarrow\; x < y$.

c) $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.

d) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$.

Beweis. 0 ist die einzige reelle Zahl u mit $u^n = 0$ wegen der Nullteilerfreiheit des Körpers $\mathbb{R}$. Sei also $x > 0$ und

$$M := \{a \in \mathbb{R}_+ \mid a^n \leqslant x\}.$$

Wegen $0 \in M$ gilt $M \neq \varnothing$. Für $a \geqslant 1$ gilt $a^n \geqslant 1$. Also hat man $a \leqslant 1$ für alle $a \in M$ im Fall $x \leqslant 1$. Gilt $a > x \geqslant 1$, so folgt $a^n > x^n \geqslant x$. Also hat man $a \leqslant x$ für alle $a \in M$ im Fall $x \geqslant 1$.

Demnach ist M nach oben beschränkt. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert daher

$$u := \sup M.$$

1. Fall: $u^n > x$.
Dann gilt $1 < u^n/x$, so dass nach (2.27) ein $A > 1$ mit $A^n < u^n/x$ existiert. Es folgt

$$x < u^n/A^n = (u/A)^n.$$

Für $a \geqslant u/A$ gilt $a^n \geqslant u^n/A^n > x$, also $a \notin M$. Demnach ist u/A bereits eine obere Schranke von M. Wegen $u/A < u$ ist das ein Widerspruch zu $u = \sup M$.
2. Fall: $u^n < x$.
Dann gilt $1 < x/u^n$, so dass nach (2.27) ein $A > 1$ mit $A^n < x/u^n$ existiert. Es folgt

$$(uA)^n < x, \quad \text{also} \quad uA \in M.$$

Wegen $uA > u$ ist das ein Widerspruch zu $u = \sup M$.
Nach den beiden betrachteten Fällen verbleibt nur die Möglichkeit $u^n = x$.
Ist $v \in \mathbb{R}_+$ mit $v^n = x$, so folgt aus $u < v$ auch $x = u^n < v^n = x$ und aus $v < u$ auch $x = v^n < u^n = x$ als Widerspruch. Somit hat die Gleichung $w^n = x$ genau eine Lösung $w \in \mathbb{R}_+$.
a) Es gilt $(\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y})^n = (\sqrt[n]{x})^n \cdot (\sqrt[n]{y})^n = x \cdot y$. Wegen $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \in \mathbb{R}_+$ muss $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ die n-te Wurzel aus $x \cdot y$ sein.
b) Aus $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$ folgt $x = (\sqrt[n]{x})^n < (\sqrt[n]{y})^n = y$ mit (2.7). Aus $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$ ergibt sich $x = (\sqrt[n]{x})^n > (\sqrt[n]{y})^n = y$ mit (2.7).
c) Es gilt $(\sqrt[n]{x})^m \in \mathbb{R}_+$ mit $\big((\sqrt[n]{x})^m\big)^n = \sqrt[n]{x}^{mn} = \big((\sqrt[n]{x})^n\big)^m = x^m$, also $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.
d) Man hat $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} \in \mathbb{R}_+$ mit $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}})^{mn} = \left((\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}})^m\right)^n = (\sqrt[n]{x})^n = x$, also $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$. □

Wir schreiben natürlich wieder $\sqrt{y} := \sqrt[2]{y}$ für $y \in \mathbb{R}_+$.
Es gilt $x^2 = |x|^2$. Weil die Wurzel nicht negativ ist, formulieren wir die

(2.29) Bemerkung. Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2} &= |x| \quad \text{für alle } \; x \in \mathbb{R}, \\ \sqrt[n]{x^n} &= x \quad \text{für alle } \; x \in \mathbb{R}_+, \; n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Aus (1.18) und der Monotonieeigenschaft der Wurzel (2.28) b) ergibt sich direkt

(2.30) Satz. *(Ungleichung zwischen arithmetrischem und geometrischem Mittel, zweite Version)*
Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$, so gilt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a_1 = \ldots = a_n$.

§3. Reelle Funktionen

Wir verwenden den Funktions- und Abbildungsbegriff synonym. Allgemeine Eigenschaften von Abbildungen werden als bekannt vorausgesetzt. Sie können diese in Anhang B nachlesen.

(3.1) Definition. Eine Abbildung $f : A \to B$ mit $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ nennt man eine *reelle* oder *reellwertige Funktion einer reellen Variablen* oder *Veränderlichen*. $f(x)$ heißt auch *Funktionswert* von f an der Stelle x. Gilt $f(x) = 0$, so nennt man x eine *Nullstelle* der Funktion f.

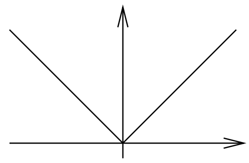
Wir betrachten ein paar einfache

(3.2) Beispiele. a) Sei $c \in \mathbb{R}$ fest. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto f(z) = c$, heißt *konstante Funktion*.

b) Wir betrachten die *Betragsfunktion*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ z \mapsto |z|,$$

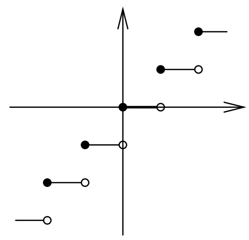
mit dem nebenstehenden Graphen.



c) Die Entier-Funktion oder *Größte-Ganze-Funktion* wird gegeben durch

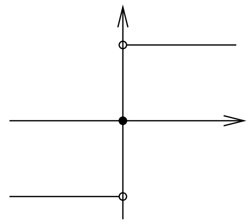
$$\mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto [x] := \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}.$$

Man nennt $[x]$ auch die GAUSS-*Klammer* von x.



d) Die *Signum-Funktion* ist definiert durch

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$



e) Die DIRICHLET*sche Sprungfunktion* ist definiert durch

$$D : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Man kann ihren Graphen nicht zeichnen.

f) Sei $M \subset \mathbb{R}$. Dann nennt man

$$\chi_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in M, \\ 0, & \text{falls } x \notin M, \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion* von M. Es gilt $D = \chi_{\mathbb{Q}}$ in e).

g) Weitere Funktionen sind für $n \in \mathbb{N}$ z.B.

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n, \quad \text{und} \quad \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$

Auf naheliegende Weise kann man Funktionen addieren und multiplizieren (und unter geeigneten Voraussetzungen dividieren). Diese intuitiv naheliegenden Operationen definieren wir formal wie folgt:

(3.3) Definition. Es seien $D \subset \mathbb{R}$ nicht-leer und $f\colon D \to \mathbb{R}$ sowie $g\colon D \to \mathbb{R}$; weiter $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Man definiert Funktionen $f + g\colon D \to \mathbb{R}$ und $\alpha f\colon D \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned}(f+g)(x)\colon &= f(x) + g(x);\\ (\alpha f)(x)\colon &= \alpha f(x),\end{aligned}$$

wobei rechts jeweils die Operationen in $\mathbb{R}$ gemeint sind.

b) Man definiert $f \cdot g\colon D \to \mathbb{R}$ durch

$$(f \cdot g)(x)\colon = f(x) \cdot g(x)$$

(wobei rechts die Multiplikation in $\mathbb{R}$ gemeint ist). Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so definiert man

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)\colon = \frac{f(x)}{g(x)},$$

wobei rechts die Division in $\mathbb{R}$ gemeint ist.

(3.4) Bemerkungen. (a) Dies ist etwas gewöhnungsbedürftig, aber beachten Sie, dass durch die jeweiligen Vorschriften in der Tat jedem $x \in D$ eindeutig eine reelle Zahl zugeordnet wird. Dass für die so definierten Verknüpfungen auf der Menge aller Funktionen von D nach $\mathbb{R}$ die üblichen Rechenregeln gelten, lässt sich leicht nachweisen.
(b) Aus Teil a) der Definition ergibt sich insbesondere, dass die Menge der Abbildungen von D nach $\mathbb{R}$ mit den dort eingeführten Operationen (Addition und Skalarmultiplikation) einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet. (Siehe Kurzinformation in Anhang C, sowie (später) die Veranstaltung Lineare Algebra.)

Eine wichtige Beispielklasse betrachten wir in der

(3.5) Definition. Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ein *reelles Polynom*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$, sowie $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{1}$$

Die Menge der reellen Polynome wird mit $\mathbb{R}[X]$ bezeichnet. Gilt $a_n \neq 0$ in (1), so nennt man n den *Grad* des Polynoms. Gilt $a_0 = \ldots = a_n = 0$ in (1), so spricht man vom *Nullpolynom*. Jede Restriktion eines Polynoms heißt eine *Polynomfunktion*.

Weil Vielfache, Summen und Produkte von Polynomen im (Sinne von (3.3)) wieder Polynome sind, ist $\mathbb{R}[X]$ wiederum ein $\mathbb{R}$-Vektorraum oder allgemeiner eine $\mathbb{R}$-Algebra (vgl. Anhang C und Lineare Algebra).

(3.6) Satz. *Ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ hat höchstens n Nullstellen.*

Beweis. Wir beweisen zunächst folgende Hilfsaussage: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p(X)$ ein Polynom vom Grad n mit einer Nullstelle α. Dann existiert ein Polynom $q(X)$ vom Grad $n-1$ mit $p(x) = (x-\alpha) \cdot q(x)$ für alle x. Für $x \neq \alpha$ hat man mit (1.9)

$$\frac{p(x)}{x-\alpha} = \frac{p(x)-p(\alpha)}{x-\alpha} = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^k - \alpha^k}{x-\alpha} = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k-1} x^j \alpha^{k-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j =: q(x)$$

$$b_j = \sum_{k=j+1}^{n} a_k \alpha^{k-1-j}, \ \ b_{n-1} = a_n \,.$$

Also $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ und dies gilt auch für $x = \alpha$. □

Nun zum eigentlichen Beweis, der mit Induktion nach n geführt wird. Im Fall $n = 0$ ist das Polynom eine Konstante $\neq 0$, also ohne Nullstelle. Sei nun $n > 0$ und p Polynom vom Grad n. Hat p keine Nullstelle, so ist die Aussage richtig. Hat p eine Nullstelle α, so gibt es ein Polynom q vom Grad $n-1$, so dass

$$p(x) = (x-\alpha)q(x) \quad \text{für alle } \ x.$$

Nach Induktionsvoraussetzung hat q höchstens $n-1$ Nullstellen, also p höchstens n.

Reelle Polynome müssen nicht unbedingt Nullstellen haben, wie das Beispiel $p(x) = x^2 + 1$ zeigt. Als Anwendung von (3.6) erhalten wir das

(3.7) Korollar. *(Identitätssatz für Polynome)*
Seien $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ zwei reelle Polynome. Gibt es mindestens $n+1$ verschiedene reelle Zahlen $x_0, \ldots, x_n$ mit $p(x_j) = q(x_j)$ für $j = 0, 1, \ldots, n$, so folgt

$$a_k = b_k \quad \text{für} \quad k = 0, \ldots, n.$$

Insbesondere ist der Grad eines Polynoms eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $r(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k - b_k)x^k = p(x) - q(x)$. Da $r(x)$ mindestens $n+1$ verschiedene Nullstellen $x_0, \ldots, x_n$ hat, folgt $r(x) = 0$ für alle x sowie $a_k = b_k$ für alle k aus (3.6). □

Als nächstes leiten wir eine Wachstumsaussage für Polynome her.

(3.8) Satz. *Sei*

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

ein reelles Polynom vom Grad n mit $a_n > 0$ *und* $0 < \varepsilon < 1$.

a) Es gibt ein $r \in \mathbb{R}_+$, *so dass*

$$\begin{array}{rcll} (1-\varepsilon)\cdot a_n \cdot x^n & \leqslant & p(x) \leqslant (1+\varepsilon)\cdot a_n \cdot x^n & \textit{für alle} \quad x \geqslant r, \\ (1-(-1)^n\varepsilon)\cdot a_n \cdot x^n & \leqslant & p(x) \leqslant (1+(-1)^n\varepsilon)\cdot a_n \cdot x^n & \textit{für alle} \quad x \leqslant -r, \\ (1-\varepsilon)\cdot |a_n| \cdot |x|^n & \leqslant & |p(x)| \leqslant (1+\varepsilon)\cdot |a_n| \cdot |x|^n & \textit{für alle} \quad |x| \geqslant r. \end{array}$$

b) Es gibt ein $M > 0$, *so dass*

$$|p(x)| \leqslant M \cdot |x|^n \quad \textit{für alle} \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; |x| \geqslant \varepsilon.$$

Beweis. Für $n = 0$ ist die Behauptung klar mit $r = 0$, $M = a_0$. Sei also $n \geqslant 1$.
a) Wir definieren

$$r := 1 + \big(|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|\big)/\varepsilon a_n\,.$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant r$ nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} p(x) &\leqslant |a_0| + |a_1| \cdot x + \ldots + |a_{n-1}| \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n \\ &\leqslant \big(|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|\big)x^{n-1} + a_n x^n \\ &= a_n x^n \left[1 + \frac{|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|}{a_n \cdot x}\right] \leqslant (1+\varepsilon)a_n x^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) &\geqslant a_n x^n - |a_{n-1}|x^{n-1} - \ldots - |a_0| \\ &\geqslant a_n x^n \left[1 - \frac{|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|}{a_n x}\right] \geqslant (1-\varepsilon)a_n x^n. \end{aligned}$$

Die zweite Abschätzung erhält man, wenn man die erste Abschätzung auf das Polynom $q(x) := (-1)^n p(-x)$ anwendet. Die Abschätzung für den Betrag folgt

ganz analog aus obiger Rechnung.
b) Die Behauptung folgt wie in a) mit der Dreiecksungleichung und

$$M := |a_0| \cdot \varepsilon^{-n} + |a_1| \cdot \varepsilon^{1-n} + \ldots + |a_{n-1}| \cdot \varepsilon^{-1} + |a_n|. \qquad \square$$

Gilt $a_n < 0$, so betrachtet man $-p(x)$ und erhält analoge Aussagen.

Wichtig ist in diesem Zusammenhang auch noch das folgende

(3.9) Beispiel. Eine *rationale Funktion* ist der Quotient zweier Polynomfunktionen. Seien also $p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]$, $q(X) \neq 0$ und $M := \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$ die (endliche) Nullstellenmenge. Dann hat die rationale Funktion die Form

$$\mathbb{R}\backslash M \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}.$$

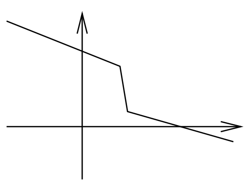
Wir bezeichnen die rationalen Funktionen mit $\mathbb{R}(X)$. Man kann zeigen, dass $\mathbb{R}(X)$ (mit den in (3.3) eingeführten Operationen) ein Körper ist.

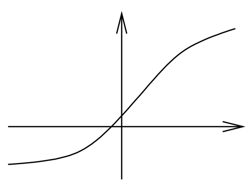
Wir kommen nun zu neuen Begriffen.

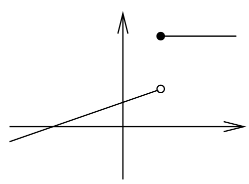
(3.10) Definition. Gegeben sei eine Funktion $f : D \to E$ mit $D, E \subset \mathbb{R}$. Man nennt f *monoton wachsend* oder *monoton steigend* [bzw. *monoton fallend*], wenn für alle $x, y \in D$ mit $x \leqslant y$ stets $f(x) \leqslant f(y)$ [bzw. $f(x) \geqslant f(y)$] gilt. f heißt *streng monoton wachsend* oder *streng monoton steigend* [bzw. *streng monoton fallend*], wenn für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ stets $f(x) < f(y)$ [bzw. $f(x) > f(y)$] gilt. f heißt [*streng*] *monoton*, wenn f [streng] monoton wachsend oder [streng] monoton fallend ist. Man nennt f *nach oben beschränkt* bzw. *nach unten beschränkt* bzw. *beschränkt*, wenn die Wertemenge $W = f(D)$ die entsprechende Eigenschaft hat, wenn es also ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) \leqslant c \quad \text{bzw.} \quad f(x) \geqslant c \quad \text{bzw.} \quad |f(x)| \leqslant c \quad \text{für alle } x \in D.$$

Als Beispiele für Monotonie sollen die folgenden Graphen dienen.


streng monoton fallend


streng monoton wachsend


monoton wachsend

Als direkte Anwendung von (2.28) erhalten wir das

(3.11) Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^n$, streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $y \mapsto \sqrt[n]{y}$. Sie ist ebenfalls streng monoton wachsend. Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ ist auch die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, und die Umkehrfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \sqrt[n]{y}$, streng monoton wachsend.
Allgemeiner gilt das

(3.12) Lemma. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, streng monoton wachsend [bzw. fallend] mit $W = f(D)$. Dann ist f injektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to D$ ist ebenfalls streng monoton wachsend [bzw. fallend].*

Beweis. Seien $x, x' \in D$ mit $x \neq x'$. Dann gilt entweder $x < x'$ oder $x' < x$. Daraus folgt $f(x) < f(x')$ oder $f(x') < f(x)$, in jedem Fall aber $f(x) \neq f(x')$. Demnach ist f injektiv. Seien nun $w, w' \in W$ mit $w < w'$. Seien $x, x' \in D$ mit $f(x) = w$ und $f(x') = w'$. Aus $w \neq w'$ ergibt sich $x \neq x'$. Wäre $x' < x$, so würde $w' = f(x') < f(x) = w$ als Widerspruch folgen. Also muss $x < x'$ gelten, d. h.

$$f^{-1}(w) = x < x' = f^{-1}(w').$$

Demnach ist f^{-1} ebenfalls streng monoton wachsend. □

§4. Abzählbarkeit

Abbildungen, die im Zusammenhang mit den natürlichen Zahlen stehen, spielen eine besondere Rolle. Das wird im nächsten Kapitel bei den Folgen noch deutlich werden. In diesem Paragrafen betrachten wir den mengentheoretischen Kontext.

(4.1) Definition. Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn $M = \varnothing$ oder wenn eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ existiert. Eine abzählbare Menge, die nicht endlich ist, heißt *abzählbar unendlich*. Eine nicht abzählbare Menge nennt man *überabzählbar*.

Eine Charakterisierung beinhaltet das folgende

(4.2) Lemma. *Eine Menge $M \neq \varnothing$ ist genau dann abzählbar, wenn eine injektive Abbildung $g : M \to \mathbb{N}$ existiert.*

Beweis. "$\Leftarrow$" Sei $W = g(M)$. Man definiert mit der Umkehrabbildung $g^{-1} : W \to M$ für ein festes $x_0 \in M$ die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to M,\ f(n) := \begin{cases} g^{-1}(n), & \text{falls } n \in W, \\ x_0, & \text{falls } n \notin W. \end{cases}$$

Dann ist f surjektiv.
"$\Rightarrow$" Sei $f : \mathbb{N} \to M$ surjektiv. Dann ist die Abbildung

$$g : M \to \mathbb{N},\ x \mapsto \inf\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = x\},$$

wohldefiniert und injektiv. □

Wir diskutieren ein paar

(4.3) Beispiele. a) $\mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich.
b) Die Abbildung

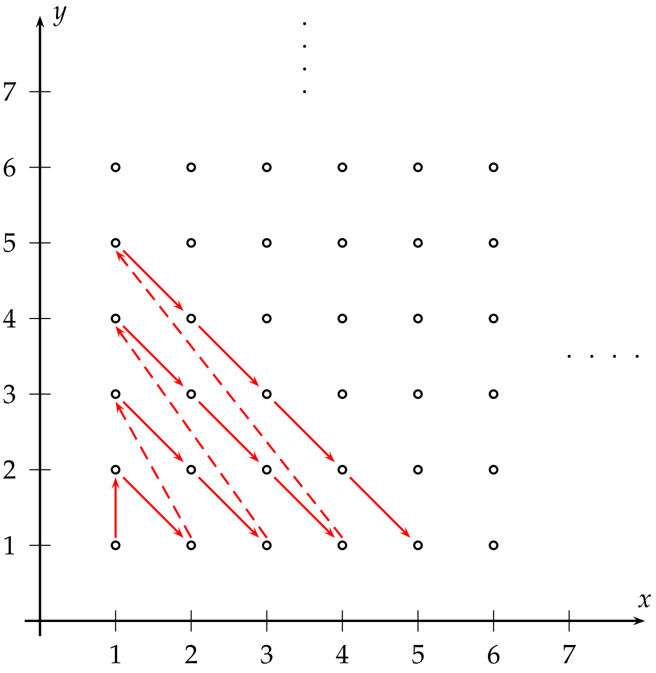
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{1-n}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

ist bijektiv, so dass $\mathbb{Z}$ ebenfalls abzählbar unendlich ist.
c) Jede endliche Menge $M = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ist abzählbar, denn

$$f : \mathbb{N} \to M,\ f(j) := x_j,\ 1 \leqslant j \leqslant m,\ f(j) := x_m \text{ für } j > m,$$

ist eine surjektive Abbildung.

Wir wollen nun zeigen, dass auch das Kartesische Produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist. Hinter dem Beweis steckt als Idee das sogenannte Cantorsche Diagonalverfahren (G. CANTOR 1845-1918).



Visualisiert man $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als die Menge der positiv ganzzahligen Punkte in der Koordinatenebene, dann ist das "Durchlaufen" von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gut zu veranschaulichen und der Name Diagonalverfahren wird verständlich.

Jetzt soll die Abbildung aber formal korrekt angegeben werden.

(4.4) Satz. *(a) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein Paar (m, l) mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leqslant l \leqslant m+1$, so dass*

$$n = \frac{m(m+1)}{2} + l.$$

(b) Durch

$$\varphi(n) = \varphi\left(\frac{m(m+1)}{2} + l\right) = (l, m+2-l)$$

ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gegeben. Insbesondere ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar.

Beweis. (a) Sei $A_k = \left\{n \in \mathbb{N};\ \frac{k(k+1)}{2} < n \leqslant \frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\mathbb{N}$ disjunkte Vereinigung der A_k und für $n \in A_k$ ist

$$n - \tfrac{k(k+1)}{2} \leqslant \tfrac{(k+2)(k+1)}{2} - \tfrac{k(k+1)}{2} = k+1.$$

(b) Surjektivität: Ein Urbild von $(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist

$$\frac{(j+k-2)(j+k-1)}{2} + j,$$

wie Nachrechnen zeigt.
Injektivität: Seien

$$n = \frac{m(m+1)}{2} + l \quad \text{und} \quad n' = \frac{m'(m'+1)}{2} + l' \quad \text{mit} \;\; \varphi(n) = \varphi(n').$$

Dann folgt $(l, m+2-l) = (l', m'+2-l')$, also $m+2 = m'+2$ (Addieren der Einträge) und $m = m'$. Vergleich der ersten Einträge zeigt $l = l'$. □

(4.5) Korollar. *Eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar.*

Beweis. Sei $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, ohne Einschränkung $M_n \neq \emptyset$ und $f_n : \mathbb{N} \to M_n$ surjektiv für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung φ aus (4.4) werde Komponentenweise mit $\varphi(n) = \big(\varphi_1(n), \varphi_2(n)\big)$ angegeben. Definiere

$$g : \mathbb{N} \to M$$

durch $g(n) = f_{\varphi_1(n)}\big(\varphi_2(n)\big)$. Nach (4.4) und Konstruktion ist jedes $f_j(k)$ mit $j,k \in \mathbb{N}$ im Bild von g enthalten. Also ist g surjektiv. □

(4.6) Korollar. *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Man hat

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \quad M_n := \left\{ \frac{x}{n} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Mit $\mathbb{Z}$ ist jedes M_n, also nach (4.5) auch $\mathbb{Q}$ abzählbar. □

Als weitere Anwendung formulieren wir das

(4.7) Korollar. *Sei M abzählbar und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $M^{(n)} = \underbrace{M \times \ldots \times M}_{n-mal}$ abzählbar.*

Beweis. Sei ohne Einschränkung $M \neq \emptyset$. Wir verwenden eine Induktion nach n, wobei der Induktionsanfang $n = 1$ trivial ist. Sei $n \geqslant 1$ und $f : \mathbb{N} \to M^{(n)}$ sowie $g : \mathbb{N} \to M$ surjektiv. Dann gilt

$$\begin{aligned} M^{(n+1)} &= M^{(n)} \times M = \{(f(k), g(l)) \mid k, l \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} X_l, \\ X_l : &= \{(f(k), g(l)) \mid k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Da jedes X_l abzählbar ist, ist $M^{(n+1)}$ nach (4.5) ebenfalls abzählbar. □

Als erstes Negativbeispiel erhalten wir den

(4.8) Satz. *Die Potenzmenge* $\operatorname{Pot}(\mathbb{N})$ *ist überabzählbar.*

Beweis. Angenommen, es gibt eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \operatorname{Pot}(\mathbb{N})$. Nun betrachten wir $A := \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$. Wegen der Surjektivität von f existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f(m) = A$.
1. Fall: $m \in f(m) = A$. Dann folgt $m \notin A = f(m)$ als Widerspruch.
2. Fall: $m \notin f(m) = A$. Dann folgt $m \in A = f(m)$ als Widerspruch.
Also kann kein solches f existieren. □

Um die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ nachzuweisen, müssen wir zuerst die Theorie noch ein wenig vorantreiben.

Kapitel III.

Folgen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit reellen (und komplexen) Folgen. Folgen sind in der Mathematik durchaus von praktischem Wert, etwa wenn es darum geht, sukzessive bessere Näherungswerte (z. B. für die Lösung einer Gleichung) zu bestimmen. Schon in der Antike wurden auch Näherungen für den Umfang des Einheitskreises bestimmt (Archimedes; siehe Kapitel VI, §2). Andererseits gingen die Griechen nicht so weit, "Grenzübergänge" durchzuführen: Der Grenzwertbegriff (in solider mathematischer Version) wurde erst Mitte des 19. Jahrhunderts eingeführt. Dass man ohne eine Vorstellung von Grenzwerten zu seltsamen Schlüssen kommen kann, zeigt das folgende Paradoxon, das (nach Aristoteles) auf Zeno von Elea zurückgeht:

Der griechische Held ACHILLES liefert sich ein Wettrennen mit einer Schildkröte. Da ACHILLES zehn Mal so schnell wie die (durchaus flotte) Schildkröte läuft, erhält die Schildkröte einen Vorsprung von 90 m. Man argumentiert nun so: Wenn Achilles diese 90 m zurückgelegt hat, ist die Schildkröte schon wieder ein Stück weiter (nämlich 9 m). Bis Achilles diese 9 m zurückgelegt hat, ist aber die Schildkröte wieder ein Stück weiter, et cetera. Also: Achilles kann die Schildkröte nie einholen, von Überholen ganz zu schweigen.
Um zu sehen, wo das Problem bei diesem Schluss liegt, wollen wir die Strecke iterativ berechnen, die zurückgelegt wird, bis ACHILLES die Schildkröte erreicht. Dabei sei a_n bzw. s_n die von ACHILLES bzw. der Schildkröte zurückgelegte Strecke. Wir starten mit

$$a_0 = 0, \quad s_0 = 90$$

und betrachten nun den Zeitpunkt, zu dem ACHILLES die Ausgangsmarke der Schildkröte erreicht hat

$$a_1 = 90, \quad s_1 = 90 + \tfrac{1}{10} \cdot 90 = 99\,.$$

Jetzt betrachten wir den Zeitpunkt, zu dem ACHILLES diese Marke erreicht hat

$$a_2 = 99, \quad s_2 = 99 + 9 \cdot \tfrac{1}{10} = 90 \cdot \left[1 + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{100}\right] = 99,9\,.$$

Wiederholt man diesen Prozess, so kommt man auf

$$a_3 = 99,9, \quad s_3 = 99,9 + \tfrac{1}{10} \cdot 0,9 = 90 \cdot \left[1 + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{100}\right] = 99,99\,.$$

Nach n Schritten hat man dann

$$a_n = s_{n-1}, \quad s_n = 90 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{10}\right)^k = 90 \cdot \frac{1 - \left(\tfrac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \left(\tfrac{1}{10}\right)} = 100 \cdot \left(1 - \left(\tfrac{1}{10}\right)^{n+1}\right)\,.$$

Diese Betrachtung könnte wegen $a_n < s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu dem Schluss verleiten, dass ACHILLES die Schildkröte nie erreicht, was natürlich nicht richtig ist. Man muss den „Grenzwert“ $n \to \infty$ betrachten. Weil $\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}$ beliebig klein wird, kommt man intuitiv auf den „Grenzwert“

$$a = s = 100.$$

Wenn ACHILLES 100 m zurücklegt, schafft die Schildkröte ebenfalls

$$90 + \tfrac{1}{10} \cdot 100 = 100$$

Meter. Nach 100 m hat ACHILLES die Schildkröte also eingeholt, unabhängig von der Zerlegung seines Weges, die vorgenommen wurde.

Der Grenzwertbegriff ist nicht ganz einfach, aber grundlegend für die Analysis. Wir werden Grenzwerte im Folgenden auch dazu nutzen, um die reellen Zahlen beser zu verstehen.

§1. Konvergenz reeller Folgen

In diesem Paragrafen geht es um den Konvergenzbegriff und um elementare Eigenschaften.

(1.1) Definition. Eine (reelle) *Folge* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Statt $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, schreibt man für die Folge kurz $(a_n)_{n \geqslant 1}$. Man nennt die Wertemenge dieser Abbildung $W = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ auch die *Wertemenge der Folge*. Gilt $W \subset M$, so spricht man von einer *Folge in M*.

Definitionsgemäß sind also zwei Folgen $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ genau dann gleich, wenn $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Als leichte Verallgemeinerung von (1.1) spricht man für $n_0 \in \mathbb{Z}$ auch im Fall einer Abbildung $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant n_0\} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, von einer Folge und schreibt dafür $(a_n)_{n\geqslant n_0}$.

(1.2) Beispiele. (i) Ist $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ die konstante Folge mit Wertemenge $W = \{1\}$.
(ii) Sei $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n)_{n\geqslant 1} = ((-1)^n)_{n\geq 1}$ mit Wertemenge $W = \{1, -1\}$.
(iii) Die Folge $(n-1)_{n\geqslant 1}$ hat die Wertemenge $\mathbb{N}_0$.
(iv) $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1-n}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$ definiert eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ mit Wertemenge $\mathbb{Z}$.
(v) Nach I(4.6) existiert eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, also eine Folge mit Wertemenge $\mathbb{Q}$.
(vi) $(\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$, $(\sqrt[n]{n})_{n\geqslant 1}$ und $\left(\frac{n^3-1}{n^2+1}\right)_{n\geqslant 1}$ sind weitere Beispiele reeller Folgen.
(vii) Für $u, v \in \mathbb{R}$ nennt man $(a_n)_{n\geqslant 1}$, definiert durch

$$a_n := u + nv, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine *arithmetische Folge*. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass die Differenz aufeinanderfolgender Folgeglieder

$$a_{n+1} - a_n = v$$

konstant ist.
(viii) Für $u, q \in \mathbb{R}^*$ nennt man $(b_n)_{n\geqslant 1}$, definiert durch

$$b_n := u \cdot q^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine *geometrische Folge*. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass der Quotient aufeinanderfolgender Folgeglieder

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

konstant ist.

Wir machen uns den Begriffsapparat von Funktionen aus Kapitel I zunutze.

(1.3) Bemerkungen. a) Gemäß I(3.10) ist der Begriff *monoton wachsend* bereits für reelle Folgen $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definiert durch die Eigenschaft $a_m \leqslant a_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leqslant n$. Eine Induktion zeigt sofort, dass die Bedingung äquivalent ist zu der Aussage $a_n \leqslant a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da $a_m \leqslant a_n$ und $a_n \leqslant a_{n+1}$ im Induktionsschritt auch $a_m \leqslant a_{n+1}$ impliziert. Entsprechend gelten die Beschränktheitsbegriffe in I(3.10) auch für Folgen.
b) Es kommt bei Folgen nicht auf die Benennung des Index an, d. h. $(a_n)_{n\geqslant 1} = (a_k)_{k\geqslant 1}$.
c) Aus der Gleichheit der Wertemengen kann man nicht auf die Gleichheit der Folgen schließen: Die Folgen $((-1)^n)_{n\geqslant 1}$ und $((-1)^{n+1})_{n\geqslant 1}$ sind verschieden, haben aber beide die Wertemenge $\{1, -1\}$.

Einen neuen Begriff formulieren wir in der

(1.4) Definition. Eine reelle Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ heißt *konvergent*, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geqslant n_0.$$

Man nennt a den *Limes* oder *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Man sagt auch, dass $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *gegen a konvergiert*. Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt *Nullfolge*. Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

Da die Aussage für jedes $\varepsilon > 0$ gelten muss, kann man äquivalent auch

$$|a_n - a| \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } n \geqslant n_0$$

verlangen.

Die Konvergenzbedingung besagt, dass fast alle Folgeglieder, d. h. alle bis auf endlich viele, von a höchstens den Abstand ε haben.

(1.5) Beispiele. (i) Gilt $a_n = c \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. Man kann nämlich stets $n_0(\varepsilon) = 1$ wählen.
(ii) Die Folge $((-1)^n)_{n\geqslant 1}$ ist divergent. Zu $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es nämlich unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|(-1)^n - a| > \frac{1}{2}$.

(iii) Für $(a_n)_{n\geqslant 1} = (\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Zu $\varepsilon > 0$ wählt man nach I(2.24) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geqslant n_0.$$

(iv) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$. Zu $\varepsilon > 0$ wählt man nach I(2.24) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Dann gilt

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon \quad \text{für alle } \ n \geqslant n_0.$$

Obwohl $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ für alle n gilt, hat man $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
(v) Für $u, v \in \mathbb{R}, v \neq 0$, ist die arithmetische Folge $(u + vn)_{n\geqslant 1}$ unbeschränkt und divergent. Für $u \neq 0$, $|q| > 1$ ist die geometrische Folge $(u \cdot q^n)_{n\geqslant 1}$ unbeschränkt und divergent.

(1.6) Bemerkung. Folgende abkürzende Sprechweise ist nützlich. Ist eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ gegeben, so sagt man, sie habe eine gewisse Eigenschaft *für fast alle* n, wenn diese Eigenschaft höchstens für endlich viele n nicht erfüllt ist. Zum Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ für fast alle n gilt.

In der Folge wollen wir uns mit Eigenschaften konvergenter Folgen und über Grenzwerte befassen.

(1.7) Satz. *a) Eine (reelle) Folge besitzt höchstens einen Grenzwert. D. h., wenn $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert, dann ist der Limes eindeutig bestimmt.*
b) Eine konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis. a) Seien a und a' Grenzwerte von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $\varepsilon > 0$. Man wählt $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für alle $n \geqslant n_0$ und $|a_n - a'| < \varepsilon/2$ für alle $n \geqslant n_1$. Sei $m \geqslant \max\{n_0, n_1\}$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$|a - a'| = |a - a_m + a_m - a'| \leqslant |a - a_m| + \ |a_m - a'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt daraus $a = a'$.
b) Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\varepsilon = 1$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| - |a| \leqslant |a_n - a| < 1,$$

wenn man die 2. Dreiecksungleichung I(2.11) verwendet. Also gilt $|a_n| < |a| + 1$ für alle $n \geqslant n_0$. Sei $c := \max\{|a| + 1, |a_1|, \ldots, |a_{n_0}|\}$. Dann gilt

$$|a_n| \leqslant c \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

$((-1)^n)_{n\geqslant 1}$ ist ein Beispiel einer beschränkten Folge, die nicht konvergiert.

(1.8) Satz. *(Limitenregeln)*
Seien $c \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\geqslant 1}, (b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergente (reelle) Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:
a) $(a_n + b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.
b) $(ca_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = ca$.
c) $(a_n \cdot b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
d) Falls $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so konvergiert $(a_n/b_n)_{n\geqslant 1}$ mit

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

Beweis. a) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant n_2$. Sei $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung I(2.11) für alle $n \geqslant n_0$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

b) Im Fall $c = 0$ gilt $ca_n = 0$, also $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = 0 = ca$. Sei also $c \neq 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ für alle $n \geqslant n_0$, also

$$|ca_n - ca| = |c| \cdot |a_n - a| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

c) Nach (1.7) sind beide Folgen beschränkt. Es existiert also ein $M > 0$ mit der Eigenschaft $|b| \leqslant M$ und $|a_n| \leqslant M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann wählt man $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ für alle $n \geqslant n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$ für alle $n \geqslant n_2$. Sei $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung für alle $n \geqslant n_0$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leqslant |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

d) Wegen c) genügt es, $\lim\limits_{n\to\infty}(1/b_n) = 1/b$ zu beweisen. Wegen $b \neq 0$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|$ für alle $n \geq n_1$, also nach der 2. Dreiecksungleichung I(2.11)

$$|b| - |b_n| \leqslant |b - b_n| < \frac{1}{2}|b| \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}|b| < |b_n| \quad \text{für alle } \ n \geqslant n_1.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|^2\varepsilon$ für alle $n \geqslant n_2$. Setzt man $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, so folgt für alle $n \geqslant n_0$

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\Big| = \Big|\frac{b - b_n}{b_n b}\Big| = \frac{1}{|b_n|} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot |b_n - b| < \frac{2}{|b|} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon. \qquad \square$$

Erinnert man sich an Kapitel I, (3.3) und (3.4), so bildet die Menge der reellen Folgen $\mathcal{F}$ (als Abbildungen von $D = \mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$) mit „komponentenweiser“ Addition und Skalarmultiplikation einen Vektorraum. Aus (1.8) a) und b) folgt nun, dass die Menge $\mathcal{F}_k$ der konvergenten Folgen ein Unterraum von $\mathcal{F}$, also selbst ein Vektorraum ist. (Siehe Anhang C und - später - Lineare Algebra.)

(1.9) Beispiele. a) Mit einer Induktion nach k folgt für $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^k = 0^k = 0.$$

b) Sei

$$a_n = \frac{4n^2 - 3n - 15}{3n^2 + n + 7} = \frac{4 - (3/n) - (15/n^2)}{3 + (1/n) + (7/n^2)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(4 - \frac{3}{n} - \frac{15}{n^2}) = 4$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^2}) = 3$, also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}$ nach (1.7).
c) Auf $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$ ist (1.7) nicht direkt anwendbar. Es folgt aber $b_n = -\sqrt{n} - \sqrt{n+1}$. Also ist $(b_n)_{n\geqslant 1}$ unbeschränkt und damit divergent.

Als einfache Anwendung formulieren wir das

(1.10) Korollar. *a) Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$. Die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert genau dann gegen a, wenn $(a_n - a)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge ist.*
b) Ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ eine beschränkte Folge, so ist $(a_n b_n)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge.

Beweis. a) Weil die konstante Folge $(a)_{n\geqslant 1}$ gegen a konvergiert, folgt die Behauptung direkt aus der Limitenregel für die Summe.

b) Sei $|b_n| < B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| < \varepsilon/B$ für alle $n \geqslant n_0$. Dann gilt für alle $n \geqslant n$

$$|a_n b_n| \leqslant |a_n| \cdot B < (\varepsilon/B) \cdot B = \varepsilon,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. □

Sehr nützlich ist auch das folgende

(1.11) [. *Sandwich-Lemma]* *Gegeben seien reelle Folgen $(a_n)_{n\geqslant 1}, (b_n)_{n\geqslant 1}, (c_n)_{n\geqslant 1}$ mit der Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$. Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \quad \text{für alle} \quad n \geqslant n_0,$$

so ist auch $(b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Beweis. Es gilt für alle $n \geqslant n_0$.

$$b_n - A \leqslant c_n - A, \;\; A - b_n \leqslant A - a_n \quad \text{also} \quad |b_n - A| \leqslant \max\{|a_n - A|,\ |c_n - A|\}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $n_1 \geqslant n_0$ mit der Eigenschaft $|a_n - A| < \varepsilon$ und $|c_n - A| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_1$. Es folgt $|b_n - A| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$. □

Als Anwendung formulieren wir zwei wichtige Beispiele als

(1.12) Lemma. *a) Für $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$, ist $(q^n)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge.*

b) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

c) Für $q \in \mathbb{R}, q > 0$, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

Beweis. a) Für $q = 0$ ist die Behauptung klar. Sei also $q \neq 0$. Aus $|q| < 1$ folgt $\frac{1}{|q|} = 1 + h$ mit $h > 0$. Mit der BERNOULLIschen Ungleichung I(1.5) ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|\frac{1}{q^n}| = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n \geqslant 1 + nh = 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > n\frac{1 - |q|}{|q|}.$$

Daraus folgt $0 \leqslant |q^n| < \frac{|q|}{1-|q|} \cdot \frac{1}{n}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|q|}{1-|q|} \cdot \frac{1}{n} = 0$ ist nach (1.11) auch $(|q^n|)_{n\geqslant 1}$ und damit $(q^n)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge.
b) Es gilt $1 \leqslant \sqrt[n]{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der binomischen Formel I(1.13) erhält man für alle $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned} n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n &= [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{n} - 1)^k \geqslant \binom{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2, \\ (\sqrt[n]{n} - 1)^2 &\leqslant \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n-1}, \qquad \sqrt[n]{n} - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \\ 1 \leqslant \sqrt[n]{n} &\leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \end{aligned}$$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ nach (1.5), also $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) = 1$ mit (1.8). Dann erhält man $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ aus (1.11).
c) Gilt $q \geqslant 1$, so hat man $1 \leqslant q \leqslant n$ für alle $n \geqslant n_0 := [q] + 1$. Wegen $1 \leqslant \sqrt[n]{q} \leqslant \sqrt[n]{n}$ für $n \geqslant n_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ folgt die Behauptung aus (1.11). Gilt $0 < q < 1$, so hat man $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/q} = \lim\limits_{n\to\infty} {}^{1}\!/\!\sqrt[n]{q} = 1$ nach dem bewiesenen Fall. Dann ergibt sich $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$ aus den Limitenregeln. $\square$

Wir diskutieren weitere

(1.13) Beispiele. a) Sei $c_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. Dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.
b) Sei $0 < \alpha \leqslant \beta$ und $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge mit der Eigenschaft $\alpha \leqslant x_n \leqslant \beta$ für alle $n \geqslant 1$. Dann gilt $\sqrt[n]{\alpha} \leqslant \sqrt[n]{x_n} \leqslant \sqrt[n]{\beta}$. Aus (1.12) c) und dem Sandwich-Lemma (1.11) ergibt sich dann

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

c) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ rationaler Zahlen, die gegen x konvergiert. Wir wählen $x_n \in \left(x, x + \frac{1}{n}\right) \cap \mathbb{Q}$ nach I(2.26).

Wir kommen zu einem weiteren neuen Begriff.

(1.14) Definition. Eine Folge $(a'_k)_{k\geqslant 1}$ heißt *Teilfolge* einer Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$, wenn es eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\geqslant 1}$ in $\mathbb{N}$ gibt mit $a'_k = a_{n_k}$ für alle $k \geqslant 1$.

Die Teilfolge entsteht aus der ursprünglichen Folge durch "Streichen" von Folgegliedern. Die am häufigsten verwendeten Teilfolgen sind $(a_{2k})_{k\geqslant 1}$ und $(a_{2k-1})_{k\geq 1}$.

Man beachte, dass aus der strengen Monotonie von $(n_k)_{k\geqslant 1}$ in $\mathbb{N}$ auch $n_k \geqslant k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt.

(1.15) Lemma. *Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine konvergente Folge mit Limes a. Dann konvergiert auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ gegen a.*

Beweis. Sei $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geqslant 1}$. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Wegen $n_k \geqslant k$ folgt $n_k \geqslant N$ für alle $k \geqslant N$, also $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geqslant N$. Das bedeutet $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. □

Als Verallgemeinerung des Konvergenzbegriffs haben wir die

(1.16) Definition. Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine (reelle) Folge. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$, wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ existiert, die gegen a konvergiert.

Betrachtet man die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1} = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ und die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\geqslant 1} = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)_{k\geqslant 1}$ sowie $(a_{2k-1})_{k\geqslant 1} = \left(-1 + \frac{1}{2k-1}\right)_{k\geqslant 1}$, so sieht man, dass 1 und -1 Häufungspunkte dieser Folge sind. Ein Kriterium beweisen wir in dem

(1.17) Lemma. *Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*
a) a ist genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geqslant 1}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ existieren.
b) a ist genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geqslant 1}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n > n_0$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ existiert.
c) Konvergiert $(a_n)_{n\geqslant 1}$ gegen a, so ist a der einzige Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

Beweis. a) "$\Rightarrow$" Wir wählen eine Teilfolge mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geqslant k_0$. Dann gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n = n_k, k \geqslant k_0$, also insbesondere für unendlich viele Folgeglieder.
"$\Leftarrow$" Sei $n_1 = 1$. Für $k \in \mathbb{N}$ seien $n_1 < \ldots < n_k$ bereits konstruiert. Nach Voraussetzung ist die Menge $M = \{n \in \mathbb{N};\ |a_n - a| < \frac{1}{k}\}$ unendlich. Also gibt es ein $n_{k+1} \in M$ mit $n_{k+1} > n_k$. Auf diese Weise haben wir rekursiv eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ konstruiert. Sei $\varepsilon > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $k_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $k > k_0$

$$|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k-1} < \varepsilon, \quad \text{also} \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

b) Weil eine Teilmenge μ von $\mathbb{N}$ genau dann unendlich ist, wenn es zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \in M$ mit $n > n_0$ gibt, folgt die Aussage aus a).
c) Das ist die Aussage (1.15). □

Zum Abschluss dieses Paragrafen diskutieren wir ein

(1.18) Beispiele. a) Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge mit Wertemenge $\mathbb{Q}$ (vgl. (1.2)). Dann ist jedes $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geqslant 1}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach I(2.26) ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $a - \varepsilon < q < a + \varepsilon$, also auch unendlich viele, z. B. $q + \frac{1}{k}$, $k \geqslant k_0$ geeignet, und somit unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$.

b) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, so folgt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ aus (1.15), da $(a_{n+k})_{n\geqslant 1}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist.

Eine wichtige Klasse von Beispielen beinhaltet die

(1.19) Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht-leer. Eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in M heißt *rekursiv definiert*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $f\colon M^k \to M$ gibt, so dass

$$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k+1}) \quad \text{für alle} \quad n \geqslant k.$$

Wir haben bereits einige rekursive Folgen kennen gelernt.

(1.20) Beispiele. a) Eine arithmetische Folge $(u + vn)_{n\geqslant 1}$ kann rekursiv definiert werden durch

$$a_1 = u + v, \quad a_{n+1} = a_n + v, \quad n \geqslant 1.$$

b) Eine geometrische Folge $(u \cdot q^n)_{n\geqslant 1}$ kann rekursiv definiert werden durch

$$b_1 = u \cdot q, \quad b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad n \geqslant 1.$$

§2. Monotone Folgen und das CAUCHY-Kriterium

In diesem Paragrafen werden wir uns, unter Benutzung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, mit monotonen Folgen beschäftigen und daraus ein weiteres fundamentales Konvergenzkriterium herleiten, das so genannte CAUCHY-*Kriterium*.

(2.1) Lemma. *Seien $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergente reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ sowie $c \in \mathbb{R}$.*
a) Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leqslant b_n$ für alle $n \geqslant N$, so folgt $a \leqslant b$.
b) Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leqslant c$ [bzw. $a_n \geqslant c$] für alle $n \geqslant N$, so folgt $a \leqslant c$ [bzw. $a \geqslant c$].

Beweis. a) Es gilt $d_n := b_n - a_n \geqslant 0$ für alle $n \geqslant N$ und $d = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = b - a$ nach (1.8). Wäre $d < 0$, so würden fast alle Folgeglieder $|d_n - d| < |d|$ erfüllen. Aus $|x - d| < |d|$ folgt wegen $d < 0$ auch $x < 0$, so dass es nur endlich viele Folgeglieder d_n mit dieser Eigenschaft geben kann. Das ist ein Widerspruch. Also gilt $d \geqslant 0$ und damit $a \leq b$.
b) Man verwende a) mit $b_n = c$. □

Einfach zu beweisen, aber fundamental ist der

(2.2) Satz. *Jede monotone, beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist konvergent. Ist W die Wertemenge von $(a_n)_{n\geqslant 1}$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup W, & \textit{falls } (a_n)_{n\geqslant 1} \textit{ monoton wachsend ist,} \\ \inf W, & \textit{falls } (a_n)_{n\geqslant 1} \textit{ monoton fallend ist.} \end{cases}$$

Beweis. Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ohne Einschränkung monoton wachsend, da wir andernfalls einfach $(-a_n)_{n\geq 1}$ betrachten. Sei $a = \sup M$ und $\varepsilon > 0$. Weil $a - \varepsilon$ keine obere Schranke ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Da a eine obere Schranke von W und $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton wachsend ist, gilt

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant a_n \leqslant a \quad \text{für alle } n \geqslant n_0.$$

Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. □

Nun wollen wir beliebige Folgen auf Monotonie untersuchen.

(2.3) Lemma. *Jede reelle Folge besitzt eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine reelle Folge. Zur Abkürzung nennen wir einen Index $k \in \mathbb{N}$ eine Spitze, wenn $a_k \geqslant a_n$ für alle $n \geqslant k$ gilt.
1. Fall: Es gibt unendlich viele Spitzen. Diese bilden dann eine streng monoton wachsende Teilfolge $(n_k)_{k\geqslant 1}$ in $\mathbb{N}$. Aus der Definition der Spitze und $n_{k+1} > n_k$ folgt $a_{n_k} \geqslant a_{n_{k+1}}$. Also ist $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ eine monoton fallende Teilfolge von $(a_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Fall: Es gibt nur endlich viele Spitzen. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass kein $n \geqslant N$ eine Spitze ist. Sei $n_1 = N$. Sind $n_1 < \ldots < n_k$ bereits konstruiert, so wissen wir, dass n_k keine Spitze ist. Also existiert ein $n_{k+1} > n_k$ mit $a_{n_k} < a_{n_{k+1}}$. Auf diese Weise erhalten wir eine streng monoton wachsende Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$. □

Als unmittelbare Konsequenz aus (2.2) und (2.3) erhalten wir eine wichtige Aussage, die auf Bernard BOLZANO (1781-1848) und Karl Theodor Wilhelm WEIERSTRASS (1815-1897) zurückgeht.

(2.4) [. *Satz von* BOLZANO-WEIERSTRASS*] (Folgenversion) Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungspunkt.*

Diese Aussage führt darüber hinaus zu einer Art Umkehrung von (1.17) b).

(2.5) Korollar. *Für eine (reelle) Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sind äquivalent:*
(i) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist konvergent.
(ii) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist beschränkt und hat genau einen Häufungspunkt.

Der Häufungspunkt in (ii) ist dann auch der Limes der Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Man verwende (1.7) und (1.15).
"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei a der Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $\varepsilon > 0$. Angenommen, es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \geq \varepsilon$. Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ mit $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Demnach ist a kein Häufungspunkt der Folge $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$. Die Folge $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ besitzt nach (2.4) aber einen Häufungspunkt b, der also von a verschieden ist und ebenfalls ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist. Das ist ein Widerspruch. Also muss $|a_n - a| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gelten, d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. □

Zur Veranschaulichung diskutieren wir einige Beispiele, die von zentraler Bedeutung sind.

(2.6) Beispiele. a) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n \geqslant 1}$ monoton fallend und beschränkt, also konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$.
b) Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ rekursiv durch $a_1 := \frac{1}{4}$ und $a_{n+1} := a_n^2 + \frac{1}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beh. Es gilt $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{2}$ und $a_n \leqslant a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bew. Es gilt $0 \leqslant a_1 = \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2}$. Aus $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{2}$ folgt $0 \leqslant a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, also die erste Behauptung per Induktion. Darüber hinaus hat man

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + \tfrac{1}{4} - a_n = \big(a_n - \tfrac{1}{2}\big)^2 \geqslant 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

also auch $a_n \leqslant a_{n+1}$. $\square$
Nach (2.2) existiert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \big(a_n^2 + \tfrac{1}{4}\big) = a^2 + \tfrac{1}{4}.$$

Es folgt $(a - \frac{1}{2})^2 = 0$, also $a = \frac{1}{2}$.
c) Sei $x \in \mathbb{R}, x \geqslant 1$ und $a_1 := x$ sowie $a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.
Beh. Es gilt $1 \leqslant a_n \leqslant x \leqslant a_n^2$ und $a_n \geqslant a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bew. Wegen $x \geqslant 1$ gilt $1 \leqslant a_1 = x \leqslant x^2 = a_1^2$. Gilt nun $1 \leqslant a_n \leqslant x \leq a_n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so hat man insbesondere $a_n \neq 0$ und

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{x}{a_n}\big) \geqslant \frac{1}{2}(1+1) = 1, \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{x}{a_n}\big) \leqslant \frac{1}{2}(x+x) = x, \\ a_{n+1}^2 &= \left[\frac{1}{2}\big(a_n + \frac{x}{a_n}\big)\right]^2 \geqslant \left[\sqrt{a_n \cdot \frac{x}{a_n}}\,\right]^2 = x \end{aligned}$$

nach I(1.8). Nun gilt

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{x}{a_n}\big) = \frac{a_n^2 - x}{2a_n} \geqslant 0.$$

$\square$

Demnach ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton fallend und beschränkt. Nach (2.2) existiert der Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant 1$ und es gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}\big(a_n + \frac{x}{a_n}\big) = \tfrac{1}{2}\big(a + \frac{x}{a}\big).$$

Es folgt $a^2 = x$, also $a = \sqrt{x}$ wegen $a \geqslant 1$. $\square$

d) Sei π_n die Anzahl der Primzahlen $p \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. Also $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 1$, $\pi_3 = \pi_4 = 2$, $\pi_5 = \pi_6 = 3$, $\pi_7 = \pi_8 = \pi_9 = \pi_{10} = 4$. Dann ist die Folge $(\pi_n)_{n\geqslant 1}$ monoton wachsend, aber unbeschränkt, weil es unendlich viele Primzahlen gibt. Dagegen ist $(\pi_n/n)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge. In der analytischen Zahlentheorie zeigt man, dass die Folge $(\pi_n \ \ln n/n)_{n\geqslant 1}$ gegen 1 konvergiert.

Ein weiteres zentrales Beispiel formulieren wir als

(2.7) Satz. *Die Folge* $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\geqslant 1}$ *ist monoton wachsend und erfüllt*

$$2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \text{für alle} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Es existiert

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828182\ldots.$$

e heißt EULER*sche Zahl nach Leonhard* EULER *(1707-1783).*

Beweis. Sei $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, also $a_1 = 2$ und $a_n \geqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.$$

Nach der BERNOULLIschen Ungleichung I(1.5) gilt nun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n+1}{n}\left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1,$$

d. h. $a_{n+1} \geqslant a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $(a_n)_n$ monoton wachsend und damit $a_n \geqslant a_1 = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach der binomischen Formel I(1.13) gilt für $n \geqslant 2$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}.$$

Für $2 \leqslant k \leqslant n$ hat man

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} < \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}},$$

denn $k! = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \geqslant 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 2^{k-1}$. Daraus folgt

$$a_n < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + 2 = 3$$

mit der geometrischen Summenformel I(1.9). Dann folgt die Behauptung aus (2.2). □

Wir kommen zu einem weiteren Begriff, der auf Augustin-Louis CAUCHY (1789-1857) zurückgeht.

(2.8) Definition. Eine (reelle) Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ heißt CAUCHY-*Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geqslant N.$$

Der fundamentale Zusammenhang wird dargestellt in dem

(2.9) Satz. *(CAUCHY-Kriterium)*
Für eine (reelle) Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sind äquivalent:
(i) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist konvergent.
(ii) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist eine CAUCHY-Folge.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant N$. Mit der Dreiecksungleichung folgt für alle $m, n \geqslant N$

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leqslant |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine CAUCHY-Folge.
"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine CAUCHY-Folge. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_N| < 1$, also $|a_n| < |a_N| + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geqslant N$. Daher ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ beschränkt. Nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS (2.4) besitzt $(a_n)_{n\geqslant 1}$ einen Häufungspunkt a und damit eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$, die gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geqslant k_0$ und ein n_0 mit $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m, n \geqslant n_0$. Sei nun $N := \max\{n_0, k_0\}$. Dann gilt für alle $k \geqslant N$ wegen $n_k \geqslant k \geqslant N$

$$|a_k - a| = |a_k - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leqslant |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es folgt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$. □

Der große Vorteil des CAUCHY-Kriteriums, das besonders bei Reihen im nächsten Kapitel noch eine Rolle spielt, liegt in der Tatsache, dass man die Konvergenz einer Folge beweisen kann, ohne den Limes explizit zu nennen.

Wir wollen uns noch mit einer Verallgemeinerung des Limes-Konzepts beschäftigen, das wesentlich von der Tatsache Gebrauch macht, dass wir reelle Folgen betrachten.

Es ist nun zweckmäßig, ∞ und $-\infty$ als neue Symbole festzulegen und $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ zu betrachten. Wir legen noch fest: $-\infty < a < \infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(2.10) Definition. Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine reelle, divergente Folge. Man nennt $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *bestimmt divergent gegen* ∞ [bzw. *gegen* $-\infty$] und schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ [bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$], wenn es zu jedem $M \in \mathbb{R}, M > 0$, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$a_n \geqslant M \quad [\text{bzw. } a_n \leqslant -M] \quad \text{für alle } n \geqslant n_0.$$

Andernfalls nennen wir $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *unbestimmt divergent*.

Dem Verständnis dienen die

(2.11) Beispiele. a) Sei $a_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ unbestimmt divergent, also

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

b) Die Folge $((-2)^n)_{n\geqslant 1}$ ist unbestimmt divergent.
c) Die Folge $((-1)^n)_{n\geqslant 1}$ ist unbestimmt divergent.
d) Sei $p(X) = a_m X^m + \ldots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad $m > 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_m > 0, \\ -\infty, & \text{falls } a_m < 0. \end{cases}$$

Diese Aussage folgert man aus I(3.8).
e) Sei π_n die Anzahl der Primzahlen $\leqslant n$. Da die Folge $(\pi_n)_{n\geqslant 1}$ monoton wachsend und unbeschränkt ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n = \infty.$$

In der Folge ist es bequem, Supremum und Infinum pro forma auch für unbeschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ einzuführen:
Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so setze

$$\sup A :\, = \infty.$$

Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach unten beschränkt, so setze

$$\inf A :\ = -\infty.$$

Wir wollen nun spezielle Häufungspunkte einer Folge betrachten.

(2.12) Lemma. *Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine reelle Folge. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ setze*

$$s_m :\ = \sup\{a_n;\ n \geqslant m\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$
$$i_m :\ = \inf\{a_n;\ n \geqslant m\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

a) *Falls $s_k \in \mathbb{R}$ für ein k, so $s_m \in \mathbb{R}$ für alle m und $(s_m)_{m\geqslant 1}$ ist monoton fallend, besitzt also einen Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.*

b) *Falls $i_k \in \mathbb{R}$ für ein k, so $i_m \in \mathbb{R}$ für alle m und $(i_m)_{m\geqslant 1}$ ist monoton wachsend, besitzt also einen Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Beweis. a) Für $l < m$ ist $\{a_n;\ n \geqslant l\} \supset \{a_n;\ n \geqslant m\}$, also $s_l \geqslant s_m$. Aus $s_k < \infty$ folgt

$$s_1 \leqslant \max\{a_1, \ldots, a_{k-1}, s_k\} < \infty,$$

somit alle $s_m \leqslant s_1 < \infty$.
b) analog. □

(2.13) Definition. Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine reelle Folge.

(i) *Limes superior:* Falls $s_m = \sup\{a_n;\ n \geqslant m\} = \infty$ für alle m, ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n :\ = \infty.$$

Falls $s_m \in \mathbb{R}$ für alle m, ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n :\ = \lim_{m\to\infty} s_m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

(ii) *Limes inferior:* Falls $i_m = \inf\{a_n;\ n \geqslant m\} = -\infty$ für alle m, ist

$$\liminf_{n\to\infty} a_n :\ = -\infty.$$

Falls $i_m \in \mathbb{R}$ für alle m, ist

$$\liminf_{n\to\infty} a_n :\ = \lim_{m\to\infty} i_m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

(2.14) Satz. *a) Ist* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *nach oben unbeschränkt, dann ist* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ *und vice versa. Ist* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$*, dann ist dies ein Häufungspunkt und für jeden Häufungspunkt* c *von* (a_n) *gilt* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant c$*.*
b) Ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *nach unten unbeschränkt, dann ist* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *und vice versa. Ist* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$*, dann ist dies ein Häufungspunkt der Folge und für jeden Häufungspunkt* c *gilt* $c \geqslant \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$*.*

Beweis. a) Die erste Aussage ist eine direkte Konsequenz der Definitionen. Falls $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, ist insbesondere jedes $s_m \in \mathbb{R}$ und es gibt ein $i_m \geqslant m$ derart, dass

$$|a_{i_m} - s_m| < \frac{1}{m}.$$

Es folgt $\lim\limits_{m\to\infty} s_m = \lim\limits_{m\to\infty} a_{i_m}$, also ist dies ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geqslant 1}$.
Ist andererseits c ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geqslant 1}$, so $c = \lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j}$ für eine Teilfolge a_{n_j}. Wegen $a_{n_j} \leqslant s_{n_j}$ und Konvergenz von $(s_m)_{m\geqslant 1}$ folgt

$$c \leqslant \lim_{m\to\infty} s_m.$$

b) wird analog bewiesen. □

Wir halten noch fest:

(2.15) Korollar. *Für eine beschränkte reelle Folge* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *sind äquivalent:*

(i) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *konvergiert.*

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$*.*

Es ist dann der Wert in (ii) gleich $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$*.*

Beweis. "(i) ⇒ (ii)": Wenn (a_n) konvergiert, dann hat (a_n) genau einen Häufungspunkt; vgl. (2.5). Also $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

"(ii) ⇒ (i)": Wenn $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, dann besitzt (a_n) nach (2.15) genau einen Häufungspunkt. Mit (2.5) folgt Konvergenz. □

In Kapitel VI, §3 finden Sie weitere Eigenschaften von Häufungspunkten, Limes inferior und Limes superior.

§3. Topologie

In diesem Paragrafen werden wir Folgen benutzen, um topologische Eigenschaften von $\mathbb{R}$ zu beschreiben.

(3.1) Definition. Ein *Intervall* ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ der folgenden Form

(i) $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},\ a < b,$

(ii) $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\},\ a < b,$

(iii) $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\},\ a < b,$

(iv) $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\},\ a \leqslant b,$

(v) $(-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\},\ b \in \mathbb{R},$

(vi) $(-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\},\ b \in \mathbb{R},$

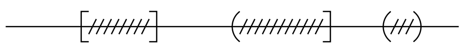
(vii) $(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},\ a \in \mathbb{R},$

(viii) $[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\},\ a \in \mathbb{R},$

(ix) $(-\infty,\infty) := \mathbb{R}.$

Man nennt (i)-(iv) *endliche Intervalle* und in diesem Fall $\frac{1}{2}(a+b)$ den *Intervallmittelpunkt* sowie $b-a$ die *Intervalllänge*. In den Fällen (v)-(ix) spricht man von *uneigentlichen Intervallen*.

In der Literatur sind auch die Bezeichnungen $]a,b[$ statt (a,b) usw. üblich. Man beachte, dass in unserer Definition die leere Menge kein Intervall ist, wohl aber eine einpunktige Menge $\{a\} = [a,a]$, die man manchmal als *entartetes Intervall* bezeichnet. Diese Vereinbarungen werden in der Literatur nicht einheitlich verwendet. Auf dem Zahlenstrahl veranschaulicht man sich Intervalle wie folgt.



Verwechslungen von (a,b) mit Zahlenpaaren und von $[1,2]$ mit der GAUSS-Klammer sind aufgrund des Kontextes stets ausgeschlossen.

(3.2) Lemma. *Der Durchschnitt zweier Intervalle ist wieder ein Intervall oder die leere Menge.*

Beweis. Mit $\alpha = \max\{a,c\}$ und $\beta = \min\{b,d\}$ gilt

$$(a,b) \cap (c,d) = \begin{cases} (\alpha,\beta), & \text{falls } \alpha < \beta, \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die anderen Fälle werden per Fallunterscheidung nachgerechnet. □

Wir formalisieren nun einen Begriff, der bereits bei der Limes-Definition in (1.4) eine Rolle spielte.

(3.3) Definition. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Dann heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

die *ε-Umgebung von x_0*. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ heißt *Umgebung* von x_0, wenn ein $\varepsilon = \varepsilon(x_0, U) > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x_0) \subset U$.

Eine Umformulierung von (1.4) ergibt das

(3.4) Lemma. *Eine reelle Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn in jeder Umgebung von a fast alle Folgeglieder liegen.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei U eine Umgebung von a und $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subset U$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$, also $a_n \in U_\varepsilon(a) \subset U$ für alle $n \geqslant n_0$.
"$\Leftarrow$" Betrachtet man speziell alle ε-Umgebungen von a, so folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ aus (1.4). □

Es folgt eine allgemeine, aber wichtige

(3.5) Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}$. Ein Element $x_0 \in M$ heißt *innerer Punkt* von M, wenn M eine Umgebung von x_0 ist, d. h., wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $U_\varepsilon(x_0) \subset M$. Mit $\overset{\circ}{M}$ ("Inneres von M") bezeichnen wir die Menge der inneren Punkte von M. Man nennt M *offen*, wenn alle Elemente von M innere Punkte von M sind, d. h. wenn $M = \overset{\circ}{M}$.

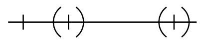
Der Illustration dienen die

(3.6) Beispiele. a) Ein Intervall (a, b) mit $a < b$ ist offen, denn zu $x \in (a, b)$ sei $\varepsilon := \min\left\{\frac{x-a}{2}, \frac{b-x}{2}\right\}$. Dann gilt $\varepsilon > 0$ und $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$, denn

$$x - \varepsilon \geq x - \frac{x-a}{2} = \frac{x+a}{2} > a \quad \text{und} \quad x + \varepsilon \leqslant x + \frac{b-x}{2} = \frac{b+x}{2} < b$$

wegen $a < x < b$. Die Intervalle $(-\infty, b)$, (a, ∞) und $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ sind ebenfalls offen, wie analoge Argumente zeigen.

b) Sei $M = (0, 1]$. Dann ist jedes $x \in (0, 1)$ ein innerer Punkt von M, wie man analog zu a) sieht. Aber $x = 1$ ist kein innerer Punkt. Ist nämlich $\varepsilon > 0$, so gilt $y := 1 + \frac{\varepsilon}{2} \in U_\varepsilon(1)$ und $y \notin M$, also $U_\varepsilon(1) \not\subset M$.



c) Für ein Intervall $I = [a, b]$ oder $[a, b)$ oder $(a, b]$ oder (a, b) mit $a < b$ gilt $\overset{\circ}{I} = (a, b)$, wie man analog zu b) nachrechnet.

d) Die leere Menge ist offen. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind nicht offen.

e) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist nicht offen, da in jedem Intervall positiver Länge nach I(2.24) rationale Zahlen liegen. $\mathbb{Q}$ ist ebenfalls nicht offen.

Die folgende Aussage ist auf die Vorlesung *Topologie* zugeschnitten.

(3.7) Satz. *(i) Die leere Menge und $\mathbb{R}$ sind offen.*

(ii) Sind $U_1, \ldots, U_n \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, offen, so ist $\bigcap_{i=1}^n U_i$ offen.

(iii) Ist $U_i \subset \mathbb{R}$ offen für jedes $i \in I$, $I \neq \emptyset$, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Beweis. (i) Man verwende (3.6) a) und c).

(ii) Sei $x_0 \in U := \bigcap_{i=1}^n U_i$. Wegen $x_0 \in U_i$ existiert ein $\varepsilon_i > 0$ mit $U_{\varepsilon_i}(x_0) \subset U_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$, also $\varepsilon > 0$. Dann gilt $U_\varepsilon(x_0) \subset U_{\varepsilon_i}(x_0) \subset U_i$ für $i = 1, \ldots, n$, also $U_\varepsilon(x_0) \subset U$. Demnach ist U ebenfalls offen.

(iii) Sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und $x_0 \in U$. Dann existiert ein $i_0 \in I$ mit $x_0 \in U_{i_0}$. Weil U_{i_0} offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subset U_{i_0} \subset U$. Demnach ist U ebenfalls offen. $\square$

Man kann in (ii) auf die Endlichkeit nicht verzichten. Die Intervalle $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ sind offen, aber

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

ist nicht offen.

(3.8) Definition. Man nennt $M \subset \mathbb{R}$ *abgeschlossen*, wenn für jede Folge in M, die konvergiert, der Limes ebenfalls in M liegt. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ (wobei $x_0 \in M$ zugelassen, aber nicht notwendig ist) heißt *Häufungspunkt von M*, wenn x_0 Limes einer Folge in $M \backslash \{x_0\}$ ist. Ein Punkt $x_0 \in M$, der kein Häufungspunkt von M ist, wird *isolierter Punkt von M* genannt.

(3.9) Bemerkung. Man muss bei einer Folge $(a_n)_{n \geqslant 1}$ mit Wertebereich W zwischen Häufungspunkten der Folge und Häufungspunkten von W unterscheiden: Ein Häufungspunkt von W ist (nach Definition) stets ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \geqslant 1}$. Aber die Umkehrung gilt nicht immer. Das einfachste Beispiel ist eine konstante Folge.

Wir geben einige äquivalente Charakterisierungen an.

(3.10) Lemma. *Sei $M \subset \mathbb{R}$.*

a) Für $x_0 \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:

(i) x_0 ist ein Häufungspunkt von M.

(ii) In jeder Umgebung von x_0 liegen unendlich viele Punkte von M.

(iii) In jeder Umgebung von x_0 liegt ein von x_0 verschiedener Punkt aus M.

(iv) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $(M \backslash \{x_0\}) \cap U_\varepsilon(x_0) \neq \varnothing$.

b) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist genau dann kein Häufungspunkt von M, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit der Eigenschaft $M \cap U_\varepsilon(x_0) \subset \{x_0\}$.

c) M ist genau dann abgeschlossen, wenn alle Häufungspunkte von M bereits in M liegen.

d) Ist M endlich, so hat M keine Häufungspunkte und ist abgeschlossen.

Beweis. a) "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge in $M\backslash\{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert, und U eine Umgebung von x_0. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \geqslant n_0$. Wäre die Menge $V = \{x_n \mid n \geqslant n_0\}$ endlich, so wäre $\varepsilon := \min\{|x_0 - x_n|;\, n \geqslant n_0\} > 0$ und in $U_\varepsilon(x_0)$ würde kein Folgeglied liegen. Das ist ein Widerspruch.
"(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv)" Trivial.
"(iv) $\Rightarrow$ (i)" Wir wählen $x_n \in (M\backslash\{x_0\}) \cap U_{1/n}(x_0)$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.
b) Das ist die Verneinung von a) (iv).
c) "$\Rightarrow$" Ist x_0 ein Häufungspunkt von M, so existiert eine Folge in $M\backslash\{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert. Es folgt $x_0 \in M$ aus der Abgeschlossenheit von M.
"$\Leftarrow$" Sei $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge in M, die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.
1. Fall: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n = a$. Dann folgt $a \in M$.
2. Fall: $x_n \neq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist a ein Häufungspunkt von M, also $a \in M$.
d) M hat nach a)(ii) keine Häufungspunkte. Also ist M nach c) auch abgeschlossen. $\square$

Eine wesentliche Charakterisierung der Abgeschlossenheit beinhaltet der

(3.11) Satz. *a) $M \subset \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $M^c = \mathbb{R}\backslash M$ offen ist.*
b) $M \subset \mathbb{R}$ ist genau dann offen, wenn M^c abgeschlossen ist.

Beweis. a) "$\Rightarrow$" Sei M abgeschlossen und $y \in M^c$. Dann ist y nach (3.10)c) kein Häufungspunkt von M. Also existiert nach (3.10)b) ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(y) \cap M = \varnothing$. Es folgt $U_\varepsilon(y) \subset M^c$, so dass M^c offen ist.
"$\Leftarrow$" Sei M^c offen und $y \in M^c$. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(y) \subset M^c$, d. h. $U_\varepsilon(y) \cap M = \varnothing$. Daher ist y kein Häufungspunkt von M und M nach (3.10)c) abgeschlossen.
b) Man verwende a) und $(M^c)^c = M$. $\square$

Nun diskutieren wir einige

(3.12) Beispiele. a) Die Intervalle $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ und $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ sind abgeschlossen. Ist $(x_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent mit $a \leqslant x_n \leqslant b$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant b$ aus (2.1).
b) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind abgeschlossen, da z. B. $\mathbb{Z}^c = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n, n+1)$ offen ist.
c) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sind nicht abgeschlossen, da die Komplemente nach (3.6) nicht offen sind.
d) Ein halboffenes Intervall $(a, b]$ oder $[a, b)$ mit $a < b$ ist weder offen noch abgeschlossen.

Aus den De Morganschen Regeln, (3.11) und (3.7) folgt direkt das

(3.13) Korollar. *a)* $\varnothing$ *und* $\mathbb{R}$ *sind abgeschlossen.*
b) Sind $n \in \mathbb{N}$ *und* $A_1, \dots, A_n$ *abgeschlossen, so ist auch* $\bigcup_{i=1}^n A_i$ *abgeschlossen.*
c) Sei $I \neq \varnothing$ *und* A_i *abgeschlossen für alle* $i \in I$*. Dann ist auch* $\bigcap_{i \in I} A_i$ *abgeschlossen.*

Beweis. Es gilt $\varnothing^c = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^c = \varnothing$, $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$ und $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$. □

Nun beschäftigen wir uns mit Suprema.

(3.14) Lemma. *Sei* $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \varnothing$.
a) Ist die Menge M *nach oben beschränkt, so ist* $\sup M$ *ein Häufungspunkt von* M *oder es gilt* $\sup M \in M$*, d. h.* $\sup M = \max M$*. Es gibt eine Folge in* M*, die gegen* $\sup M$ *konvergiert.*
b) Ist die Menge M *nach unten beschränkt, so ist* $\inf M$ *ein Häufungspunkt von* M *oder es gilt* $\inf M \in M$*, d. h.* $\inf M = \min M$*. Es gibt eine Folge in* M*, die gegen* $\inf M$ *konvergiert.*

Beweis. a) Sei $a = \sup M \notin M$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von M. Also existiert ein $m \in M$ mit $a - \varepsilon < m \leqslant a$, d. h. $m \in M \cap U_\varepsilon(a)$. Daher ist a ein Häufungspunkt von M nach (3.10). Die Existenz der Folge ergibt sich aus (3.8) bzw. als konstante Folge $(a)_n$.
b) Man gehe analog vor oder betrachte $-M = \{-x \mid x \in M\}$. □

Wir formulieren nun (2.4) als

(3.15) [. ***Satz von* Bolzano-Weierstrass*]*** *(Mengenversion)*
Jede beschränkte, unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ *besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis. Weil M unendlich ist, existieren paarweise verschiedene $a_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(a_n)_{n \geqslant 1}$ ist beschränkt und besitzt nach (2.4) einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$. Also existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \geqslant 1}$ mit $a_{n_k} \neq a$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = a$. Demnach ist a ein Häufungspunkt von M. □

Als weitere wichtige Eigenschaft abgeschlossener Intervalle erhalten wir den

(3.16) Satz. *(Intervallschachtelungsprinzip)*
Seien $I_n := [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, abgeschlossene Intervalle, so dass $I_n \supset I_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dass die Folge der Intervalllängen $(b_n - a_n)_{n \geqslant 1}$ gegen 0 konvergiert. Dann existiert genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{y\}.$$

Beweis. Aus $I_n \supset I_{n+1}$ folgt $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$. Also ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine monoton wachsende und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ eine monoton fallende Folge, die beide durch a_1 nach unten und durch b_1 nach oben beschränkt sind. Daher sind beide Folgen nach (2.2) konvergent. Sei $y = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Aus $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ folgt dann

$$y = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} b_n$$

mit (1.8). Mit (2.2) ergibt sich auch noch

$$\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = y.$$

Es gilt also $a_n \leqslant y \leqslant b_n$, d. h. $y \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.
Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Ist $x < y$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x < a_m \leqslant y$, da y das Supremum ist. Es folgt $x \notin I_m$, also $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Ist $y < x$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $y \leqslant b_m < x$, da y das Infimum ist. Es folgt $x \notin I_m$, also $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ und damit

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{y\}.$$

□

Als Anwendung erhalten wir den

(3.17) Satz. *Jedes Intervall positiver Länge ist überabzählbar. Insbesondere ist $\mathbb{R}$ überabzählbar.*

Beweis. Es genügt, ein Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ zu betrachten. Angenommen, $[a, b]$ ist abzählbar. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ mit Wertemenge $[a, b]$. Sei $I_0 = [a, b]$. Sind $I_0, \ldots, I_n = [a_n, b_n]$ bereits konstruiert, so betrachten wir die Zerlegung

$$[a_n, a_n + \varepsilon],\ [a_n + \varepsilon, b_n - \varepsilon],\ [b_n - \varepsilon, b_n], \quad \varepsilon = \frac{1}{3}(b_n - a_n).$$

Das Folgeglied x_{n+1} kann in höchstens zwei der drei Intervalle liegen. Daher kann man ein Intervall I_{n+1} unter diesen dreien auswählen mit $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. Wegen $I_{n+1} \subset I_n$ gilt $x_k \notin I_{n+1}$, für $1 \leqslant k \leqslant n+1$. Per Induktion zeigt man, dass I_{n+1} die Länge $(b-a)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ hat, so dass die Folge der Intervalllängen nach (1.12) gegen 0 konvergiert.
Aufgrund von (3.16) existiert ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Nach Konstruktion gilt $y \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ist ein Widerspruch. □

Daraus ergibt sich das

(3.18) Korollar. *a) Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen liegen überabzählbar viele irrationale Zahlen.*
b) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ irrationaler Zahlen, die gegen x konvergiert.

Beweis. a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Mit $\mathbb{Q}$ nach I(4.6) ist auch $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ abzählbar. Wäre $[a,b] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ auch abzählbar, dann ebenfalls $[a,b]$ nach II(4.5). Das ist ein Widerspruch zu (3.17).
b) Wir wählen $x_n \in \left(x, x+\frac{1}{n}\right) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ nach a).

§4. Die komplexen Zahlen

Wir verwenden nun die aus den Mathematischen Grundlagen bekannten komplexen Zahlen.

(4.1) Bemerkung. Die Menge $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen* wird gegeben durch

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

und durch $i^2 = -1$ charakerisiert. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ nennt man

$x := \mathrm{Re}(z)$ den *Realteil* von z
$y := \mathrm{Im}(z)$ den *Imaginärteil* von z
$\bar{z} := x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl.*

Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ erhalten wir für $\mathbb{C}$ den

(4.2) Satz. *Der Körper $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden.*

Beweis. Angenommen, es existiert eine Anordnung "$<$" auf $\mathbb{C}$. Dann gilt $0 \leqslant i^2 = -1$ nach I(2.7). Aus I(2.7) folgt aber auch $0 < 1$, also $-1 < 0$ als Widerspruch. $\square$

Nun betrachten wir die Eigenschaften der Konjugation.

(4.3) Lemma. *Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ gilt*

a) $x = Re\,(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\ y = Im\,(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad \overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, falls $w \neq 0$.

c) $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_+$ und $z \cdot \overline{z} > 0$ für $z \neq 0$.

d) $z = \overline{z}$ ist äquivalent zu $z \in \mathbb{R}$.

Beweis. a) Es gilt $\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = x$ und $\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}(x + iy - x + iy) = y$.
b) Man hat

$$\begin{aligned} \overline{z} + \overline{w} &= (x - iy) + (u - iv) = (x + u) - i(y + v) = \overline{z + w}, \\ \overline{\overline{z}} &= \overline{x - iy} = x + iy = z, \\ \overline{z} \cdot \overline{w} &= (x - iy) \cdot (u - iv) \\ &= (xu - yv) + i(-xv - yu) = (xu - yv) - i(xv + yu) = \overline{z \cdot w}. \end{aligned}$$

Gilt $w \neq 0$, so hat man $1 = w \cdot \frac{1}{w}$ und daher

$$1 = \overline{1} = \overline{w} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)}, \quad \text{also} \quad \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \frac{1}{\overline{w}}.$$

Damit folgt

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z \cdot \frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

c) Es gilt $z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 \geqslant 0$. Aus $z \neq 0$ ergibt sich $(x, y) \neq (0, 0)$, also $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 > 0$.
d) Es gilt $z = x + iy = x - iy = \overline{z}$ genau dann, wenn $y = 0$, d. h. wenn $z = x \in \mathbb{R}$. $\square$

Insbesondere c) nehmen wir zum Anlass für die

(4.4) Definition. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist der *Betrag von z*

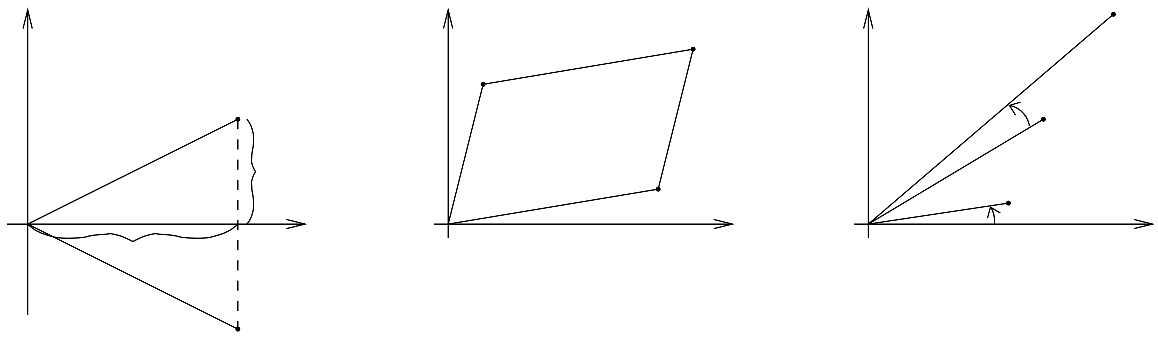
$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$$

nach (4.3) und I(2.28) wohldefiniert.

Man sollte bemerken, dass für $z = x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ diese Definition mit I(2.10) übereinstimmt, denn es gilt $\sqrt{x^2} = |x|$. Man hat zum Beispiel

$$|1 + i| = \sqrt{2}, \quad |-3 + 4i| = 5, \quad |8 - 6i| = 10.$$

Wir können uns die komplexen Zahlen als GAUSSsche Zahlenebene vorstellen. Dazu identifizieren wir den Punkt $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit dem Paar $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann erhalten die obigen Definitionen auch eine geometrische Bedeutung. Sie geht zurück auf C.F. GAUSS (1777-1855).



Nach dem Satz des PYTHAGORAS (ca. 580-500 v. Chr.) ist $|z|$ der Abstand von z zum Nullpunkt. $\overline{z}$ entsteht aus z durch Spiegelung an der x-Achse. Für je zwei $z, w \in \mathbb{C}^*$ mit $\frac{z}{w} \notin \mathbb{R}$ bilden die Punkte $0, z, w, z + w$ die Ecken eines Parallelogramms. Die Veranschaulichung der Multiplikation folgt später (vgl. IV(5.11)).

(4.5) Satz. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

a) $|Re\,(z)| \leqslant |z|,\ |Im\,(z)| \leqslant |z|,\ |z| \leqslant |Re\,(z)| + |Im\,(z)|.$

b) $|z| \geqslant 0$ *und es ist* $|z| = 0$ *äquivalent zu* $z = 0$.

c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|,\ |\overline{z}| = |z|$ *und* $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, *falls* $w \neq 0$.

d) Es gelten die Dreiecksungleichungen

$$|z + w| \leqslant |z| + |w| \quad \textit{und} \quad \big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|.$$

e) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, *falls* $z \neq 0$.

Beweis. a) Aus $x^2 \leqslant x^2 + y^2$ folgt $|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ mit I(2.28). Analog erhält man $|y| \leqslant |z|$. Darüber hinaus gilt $|z|^2 = x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2$, also $|z| \leqslant |x| + |y|$.
b) Man verwende (4.3) c).
c) Aus
$$|z \cdot w|^2 = (zw)\overline{(zw)} = z\overline{z} \cdot w\overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$$
folgt durch Wurzelziehen
$$|zw| = |z| \cdot |w|.$$
Wendet man den Betrag auf die Gleichung $w \cdot \frac{1}{w} = 1$ an, so erhält man
$$1 = |1| = |w| \cdot \left|\frac{1}{w}\right|, \quad \text{also} \quad \left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{|w|}$$
und damit $\left|\frac{z}{w}\right| = \left|z \cdot \frac{1}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$. Weiterhin gilt $|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z}\,\overline{\overline{z}}} = \sqrt{\overline{z}z} = |z|$.
d) Es gilt
$$\begin{aligned}(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 &= |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2 - (z + w)\overline{(z + w)} \\ &= 2|z|\,|w| - z\overline{w} - w\overline{z} = 2(|z\overline{w}| - Re\,(z\overline{w})) \geqslant 0\end{aligned}$$
nach a) und c). Also hat man $|z| + |w| \geqslant |z + w|$. Aus dem bewiesenen Teil folgt
$$\begin{aligned}|z - w| + |w| &\geqslant |(z - w) + w| = |z|, \\ |z - w| + |z| &= |w - z| + |z| \geqslant |w|.\end{aligned}$$
Also hat man $\pm(|z| - |w|) \leqslant |z - w|$, d. h. $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|$.
e) Es gilt
$$z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = 1, \quad \text{also} \quad \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}.$$
□

Wir wollen zeigen, dass man mit den komplexen Zahlen zumindest alle quadratischen Gleichungen lösen kann.

(4.6) Lemma. *Jede Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$ hat eine Lösung $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Nach quadratischer Ergänzung ist die Gleichung äquivalent zu

$$w^2 = D \quad \text{mit} \quad w = z + \frac{p}{2}, \quad D = \frac{p^2}{4} - q = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}.$$

Im Fall $D \in \mathbb{R}$ kann man $w = \sqrt{D}$ für $D \geq 0$ bzw. $w = i\sqrt{-D}$ für $D < 0$ wählen. Sei also $D \notin \mathbb{R}$, d. h. $\beta \neq 0$ und $\alpha + |D| > 0$. Nun definiert man

$$w := \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha + |D|)} + i\frac{\beta}{\sqrt{2(\alpha + |D|)}}.$$

Damit verifiziert man $w^2 = D$. □

In der Funktionentheorie beweisen wir eine deutliche Verallgemeinerung davon, den so genannten *Fundamentalsatz der Algebra*, der besagt, dass jede Gleichung

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0, \quad a_j \in \mathbb{C}, \;\; a_n \neq 0, \;\; n \geqslant 1,$$

eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ besitzt.

Wir wollen nun das Folgenkonzept auch für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$ entwickeln.

(4.7) Definition. Eine (komplexe) *Folge* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{C}, n \mapsto a_n$, die wir wieder einfach mit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ bezeichnen. Gilt $a_n \in M \subset \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so spricht man von einer *Folge in M*.

Natürlich ist jede reelle Folge auch eine komplexe Folge. Neue Beispiele sind etwa $(i^n)_{n\geqslant 1} = (i, -1, -i, 1, i, \ldots)$ oder $((1+i)^n)_{n\geq 1} = (1+i, 2i, 2(-1+i), -4, -4(1+i), \ldots)$.

(4.8) Definition. Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine komplexe Folge. $(a_n)_{n\geqslant 1}$ heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in \mathbb{C}$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geqslant n_0.$$

Man nennt a *Limes* oder *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und schreibt dafür $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, so heißt $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine *Nullfolge*. Man nennt $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine CAUCHY-*Folge* , wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad m, n \geqslant n_0.$$

$(a_n)_{n\geqslant 1}$ heißt *beschränkt*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$|a_n| \leqslant c \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man mache sich klar, dass die Begriffe “nach oben beschränkt” oder “monoton” für komplexe Folgen keinen Sinn machen.

Das folgende Lemma erlaubt es uns, die Resultate über reelle Folgen zu verwenden.

(4.9) Lemma. *Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine komplexe Folge und $a \in \mathbb{C}$.*
a) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert genau dann gegen a, wenn die beiden reellen Folgen $(Re(a_n))_{n\geqslant 1}$ gegen $Re(a)$ und $(Im(a_n))_{n\geqslant 1}$ gegen $Im(a)$ konvergieren.
b) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist genau dann eine CAUCHY-*Folge, wenn $(Re(a_n))_{n\geqslant 1}$ und $(Im(a_n))_{n\geqslant 1}$* CAUCHY-*Folgen sind.*
c) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist genau dann beschränkt, wenn $(Re(a_n))_{n\geqslant 1}$ und $(Im(a_n))_{n\geqslant 1}$ beschränkt sind.
d) Konvergiert $(a_n)_{n\geqslant 1}$ als komplexe Folge gegen a und gilt $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $a_n = x_n + iy_n$, $a = x + iy$.
a) “$\Rightarrow$” Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Aus (4.5) folgt $|x_n - x| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon$ und $|y_n - y| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$.
“$\Leftarrow$” Zu $\varepsilon > 0$ existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant n_1$ und $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant n_2$. Ist $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, so folgt aus (4.5) für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - a| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

b), c) Man geht völlig analog vor.
d) Wegen $Im(a_n) = 0$ folgt die Behauptung aus a). □

Damit können wir die Ergebnisse der ersten 3 Paragrafen anwenden. Aus (1.7), (1.8) und (2.9) ergibt sich der

(4.10) Satz. *a) Der Grenzwert einer konvergenten komplexen Folge ist eindeutig bestimmt.*
b) Eine konvergente komplexe Folge ist beschränkt.
c) Eine komplexe Folge ist genau dann eine CAUCHY*-Folge, wenn sie konvergiert.*
d) Sind $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ komplexe Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, so gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b.$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$

(iii) Gilt $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}.$

Beweis. Zur Illustration erläutern wir
(ii) Sei $a_n = x_n + iy_n$, $a = x + iy$, $b_n = u_n + iv_n$, $b = u + iv$. Es gilt

$$\begin{aligned} Re(a_n b_n) &= x_n u_n - y_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} xu - yv = Re(ab), \\ Im(a_n b_n) &= x_n v_n + y_n u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} xv + yu = Im(ab), \end{aligned}$$

wenn man (1.8) und (4.9) verwendet. Man erhält (ii) aus (4.9). □

Als Anwendung formulieren wir das

(4.11) Korollar. *Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine komplexe Folge und $a \in \mathbb{C}$.*
a) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert genau dann gegen a, wenn $(a_n - a)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge ist.
b) Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n = \overline{a}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Beweis. a) Man verwende (4.10) und die konstante Folge $(a)_{n\geqslant 1}$.
b) Sei $a_n = x_n + iy_n$, $a = x + iy$. Dann gilt $\overline{a}_n = x_n - iy_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x - iy = \overline{a}$ nach (4.9). Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Dann folgt

$$\big||a_n| - |a|\big| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } \ n \geqslant N$$

aus der Dreiecksungleichung (4.5), also $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |a|$. □

Wie in (1.14) und (1.16) formulieren wir die

(4.12) Definition. $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sei eine komplexe Folge. Man nennt $(a'_k)_{k\geqslant 1}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\geqslant 1}$, wenn es eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\geqslant 1}$ in $\mathbb{N}$ gibt mit $a'_k = a_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* von $(a_n)_{n\geqslant 1}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ gibt, die gegen a konvergiert.

Wie zuvor gilt das

(4.13) Korollar. *Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine komplexe Folge und $a \in \mathbb{C}$.*
a) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ gegen a.
b) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert genau dann gegen a, wenn $(a_n)_{n\geqslant 1}$ beschränkt ist und a der einzige Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist.
c) a ist genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geqslant 1}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ gibt.

Beweis. Man verwende (4.9), (1.15), (1.17), (2.5). □

Ein klein wenig mehr Aufmerksamkeit erfordert der

(4.14) [. ***Satz von* Bolzano-Weierstrass**] *(Komplexe Folgenversion)*
Eine beschränkte, komplexe Folge besitzt einen Häufungspunkt.

Beweis. Sei $a_n = x_n + iy_n$. Dann sind $(x_n)_{n\geqslant 1}$ und $(y_n)_{n\geqslant 1}$ nach (4.9) beschränkt. Nach (2.4) existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$, die gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Wendet man (2.4) auf $(y_{n_k})_{k\geqslant 1}$ an, so erhält man eine Teilfolge $(y_{n_{k_l}})_{l\geqslant 1}$, die gegen ein $y \in \mathbb{R}$ konvergiert. Aus (4.13) und (4.9) ergibt sich dann $\lim\limits_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} = x + iy$.□

Schließlich diskutieren wir noch einige

(4.15) Beispiele. a) Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Da $(|q|^n)_{n\geqslant 1}$ nach (1.12) eine reelle Nullfolge ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$.
b) Die Folge $\left(1 + \frac{i^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ konvergiert gegen 1, da $|1 + \frac{i^n}{n} - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geqslant \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Wir schließen den Paragrafen mit einigen Bemerkungen über die Topologie in $\mathbb{C}$. Man hat hier Intervalle durch Kreise zu ersetzen.

(4.16) Definition. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Dann heißt

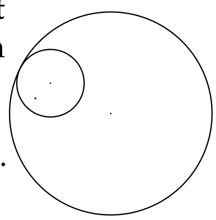
$$U_\varepsilon^{\mathbb{C}}(z_0) := \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < \varepsilon\}$$

die *ε-Umgebung von z_0 in* $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$. Sei $M \subset \mathbb{C}$. Ein Punkt $z_0 \in M$ heißt *innerer Punkt* von M (in $\mathbb{C}$), wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon^{\mathbb{C}}(z_0) \subset M$. Besteht M nur aus inneren Punkten, so nennt man M *offen* (in $\mathbb{C}$). M heißt *abgeschlossen* (in $\mathbb{C}$), wenn für jede Folge in M, die konvergiert, der Limes ebenfalls zu M gehört. Man nennt $a \in \mathbb{C}$ einen *Häufungspunkt* von M (in $\mathbb{C}$), wenn es eine Folge in $M \backslash \{a\}$ gibt, die gegen a konvergiert. $a \in M$ heißt *isolierter Punkt von M*, wenn a kein Häufungspunkt von M ist. Die Menge M heißt *beschränkt*, wenn es ein $r > 0$ gibt mit $|z| \leqslant r$ für alle $z \in M$.

Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, ob man reelle oder komplexe Umgebungen betrachtet, schreibt man einfach nur $U_\varepsilon(z_0)$ auch für $z_0 \in \mathbb{C}$.

Die Aussagen (3.4), (3.7), (3.10), (3.13) und (3.15) gelten dann ebenfalls sinngemäß für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$, wenn man im Beweis jeweils $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt.

(4.17) Beispiele. a) $\varnothing$ und $\mathbb{C}$ sind offen und abgeschlossen in $\mathbb{C}$.
b) Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon^{\mathbb{C}}(z_0)$ offen in $\mathbb{C}$. Ist nämlich $z \in U_\varepsilon^{\mathbb{C}}(z_0)$, so sei $\delta := \varepsilon - |z - z_0| > 0$. Dann gilt $U_\delta^{\mathbb{C}}(z) \subset U_\varepsilon^{\mathbb{C}}(z_0)$. Für $w \in U_\delta^{\mathbb{C}}(z)$ gilt $|w - z| < \delta$, also nach der Dreiecksungleichung



$$|w - z_0| = |w - z + z - z_0| \leqslant |w - z| + |z - z_0| < \delta + |z - z_0| = \varepsilon.$$

Das bedeutet $w \in U_\varepsilon^{\mathbb{C}}(z_0)$ und damit $U_\delta^{\mathbb{C}}(z_0) \subset U_\varepsilon^{\mathbb{C}}(z_0)$.

c) $\mathbb{R}$ ist nicht offen in $\mathbb{C}$, denn $U_\varepsilon^{\mathbb{C}}(x)$ enthält für jedes $x \in \mathbb{R}$ den Punkt $x + i\frac{1}{2}\varepsilon \notin \mathbb{R}$. Aber $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{C}$. Für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, also $z = x + iy$, $y \neq 0$, gilt $U_{|y|}^{\mathbb{C}}(z) \cap \mathbb{R} = \varnothing$. Demnach ist z kein Häufungspunkt von $\mathbb{R}$.

Kapitel IV.

Reihen

In diesem Kapitel werden wir Reihen untersuchen. Reihen sind das zentrale Hilfsmittel, um Funktionen zu studieren. Wie beim Beispiel von ACHILLES und der Schildkröte betrachten wir in diesem Fall Summen. Ist eine Folge $(a_k)_{k\geqslant 1}$ gegeben, so konstruieren wir als neue Folge

$$(s_n)_{n\geqslant 1} \quad \text{mit} \quad s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Man untersucht nun die Frage, unter welchen Bedingungen an $(a_k)_{k\geqslant 1}$ die Summenfolge $(s_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert.

§1. Konvergenz von Reihen

Reihen sind abzählbar unendliche Summen, deren Konvergenz auf die Konvergenz von Folgen zurückgeführt wird. Im Gegensatz zu unserem Vorgehen bei Folgen beschäftigen wir uns sogleich mit komplexen Reihen.

(1.1) Definition. Eine (*unendliche*) *Reihe* ist ein Paar $((a_k)_{k\geqslant 1}, (s_n)_{n\geqslant 1})$ von komplexen Folgen mit der Eigenschaft

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir nennen s_n die *n-te Partialsumme* und schreiben abkürzend $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für die Reihe.

Man beachte, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bisher nur ein Symbol ist. Ganz im Sinne der Folgen, kann eine Reihe natürlich auch z. B. bei $k = 0$ oder allgemeiner bei $k = k_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen.

(1.2) Definition. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent*, wenn es ein $S \in \mathbb{C}$ gibt mit der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

wenn also die Folge $(s_n)_{n\geqslant 1}$ der Partialsummen gegen S konvergiert. Wir schreiben dafür auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S, \quad \text{d. h.} \quad S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Eine Reihe heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergiert.
Sind alle a_k, $k \in \mathbb{N}$, reell, so sagt man, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *bestimmt divergent* ist, wenn die Folge der Partialsummen bestimmt divergent ist.

Der Begriffsklärung dient die

(1.3) Bemerkung. Das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wird also einerseits für die Folge der Partialsummen (die Reihe) benutzt, andererseits auch für ihren Grenzwert, falls dieser existiert. Diese Doppeldeutigkeit ist historisch bedingt; sie macht in der Praxis keine Probleme.

Zunächst diskutieren wir ein einfaches

(1.4) Beispiel. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1,$$

denn für $n \in \mathbb{N}$ hat man

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Das zentrale Beispiel ist enthalten in dem

(1.5) Satz. *(Geometrische Reihe)*
Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ *konvergiert für alle* $q \in \mathbb{C}$ *mit* $|q| < 1$ *und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \textit{für } |q| < 1.$$

Beweis. Es gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

für $q \neq 1$ nach I(1.9). Weiterhin hat man $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$ nach II(4.15), also

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

□

Wer pedantisch sein will, schreibt $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ statt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$. Ein wesentliches Negativbeispiel ist enthalten in dem

(1.6) Satz. *Die harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *divergiert bestimmt gegen* ∞.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k} \geq 1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{2^j} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{2^j - 2^{j-1}}{2^j} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Sei $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geqslant 2(M-1)$, also $1 + \frac{N}{2} \geqslant M$. Für $n \geqslant n_0 := 2^N$ gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{N}{2} \geqslant M.$$

□

Die Linearität des Limes formulieren wir für Reihen als

(1.7) Lemma. *Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$ konvergente Reihen, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ gegen $\alpha A + \beta B$, d. h.*

$$\alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k).$$

Beweis. Seien $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Für die Partialsummen der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ gilt dann nach II(1.8) bzw. II(4.10)

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha A_n + \beta B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha A + \beta B.$$

□

Algebraisch kann man den Inhalt von (1.7) so formulieren, dass die Menge

$$V = \{(a_k)_{k\geqslant 1} \mid a_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert}\}$$

mit den üblichen Operationen ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.
Man muss in (1.7) die Existenz von A und B voraussetzen. Z. B. gilt

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \neq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1},$$

da die beiden letzten Reihen nach (1.6) divergieren.

Als notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe erhalten wir den

(1.8) Satz. *Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist $(a_k)_{k\geqslant 1}$ eine Nullfolge.*

Beweis. Sei $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, also $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$. Dann gilt nach II(1.8) bzw. II(4.10)

$$0 = A - A = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

□

Die Bedingung, dass $(a_k)_{k\geqslant 1}$ eine Nullfolge ist, ist aber nicht hinreichend für die Konvergenz einer Reihe, wie die harmonische Reihe in (1.6) zeigt. Andererseits kann man aus (1.8) schließen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ für $q \in \mathbb{C}$, $|q| \geqslant 1$, divergiert, weil $(q^k)_{k\geqslant 0}$ keine Nullfolge ist.

(1.9) Satz. *(CAUCHY-Kriterium für Reihen)*
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} a_k\Big| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad n \geqslant m \geqslant n_0.$$

Beweis. Es gilt

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \text{für alle} \quad n \geqslant m.$$

Also besagt die angegebene Bedingung, dass $(s_n)_{n\geqslant 1}$ eine CAUCHY-Folge ist. Dann folgt die Behauptung aus II(4.10). □

Wir kommen nun zu zwei Kriterien für reelle Reihen.

(1.10) Satz. *Sei $(a_k)_{k\geqslant 1}$ eine reelle Folge mit $a_k \geqslant 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $(s_n)_{n\geqslant 1}$ der Partialsummen nach oben beschränkt ist.*

Beweis. Wegen $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geqslant 0$ ist die Folge $(s_n)_{n\geqslant 1}$ monoton wachsend. Dann folgt die Behauptung aus II(2.2) und II(1.7). □

Nun behandeln wir so genannte alternierende Reihen und ein Kriterium, das auf Gottfried von LEIBNIZ (1646-1716) zurückgeht.

(1.11) Satz. *(LEIBNIZ-Kriterium)*
Sei $(a_k)_{k\geqslant 1}$ eine reelle, monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Big|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k\Big| \leqslant a_n.$$

(Ebenso konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$, mit analoger Abschätzung für den Reihenrest.)

Beweis. Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$. Betrachte die Teilfolgen $(s_{2m})_{m\geqslant 1}$ und $(s_{2m+1})_{m\geqslant 0}$. Dann gilt

$$\begin{array}{llll} (i) & s_{2m+2} - s_{2m} & = a_{2m+2} - a_{2m+1} & \leqslant 0; \\ (ii) & s_{2m+3} - s_{2m+1} & = - a_{2m+3} + a_{2m+2} & \geqslant 0; \\ (iii) & s_{2m+1} - s_{2m} & = - a_{2m+1} & \leqslant 0. \end{array}$$

Also ist (s_{2m}) monoton fallend, (s_{2m+1}) monoton wachsend und (s_{2m}) durch s_1 nach unten beschränkt sowie (s_{2m+1}) durch s_2 nach oben beschränkt. Die Folgen (s_{2m}) und (s_{2m+1}) konvergieren somit nach dem Monotoniekriterium; wegen $\lim\limits_{m\to\infty}(s_{2m+1} - s_{2m}) = 0$ haben sie den gleichen Grenzwert. Es folgt die Konvergenz von $(s_n)_{n\geqslant 1}$.

Weiter ist (Induktion nach l)

$$(-1)^n \sum_{k=n}^{l}(-1)^k a_k = a_n - (\underbrace{a_{n+1} - a_{n+2}}_{\geqslant 0}) - (\cdots) \leqslant a_n,$$

woraus die Abschätzung für den Reihenrest folgt. □

(1.12) Beispiel. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Wir werden später sehen, dass sie den Wert $\ln 2$ hat.

In Kapitel VI, §4 finden sich Verfeinerungen des Leibniz-Kriteriums.

§2. Absolute Konvergenz

In diesem Paragrafen beschäftigen wir uns mit der absoluten Konvergenz von Reihen und mit weiteren Konvergenzkriterien. Die absolute Konvergenz ist eine Spezialität von Reihen, die bei Folgen nicht auftritt.

(2.1) Definition. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Eine Reihe, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, nennt man *bedingt konvergent*.

Zunächst diskutieren wir zwei

(2.2) Beispiele. a) Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $q \in \mathbb{C}, |q| < 1$, nach (1.5) absolut, da die Absolutreihe ebenfalls eine geometrische Reihe ist. Sie divergiert für $|q| \geqslant 1$ nach (1.8), da dann $(q^k)_{k \geqslant 1}$ keine Nullfolge ist.

b) Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| = 1, q \neq 1$, ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k}$ bedingt konvergent, da die Absolutreihe nach (1.6) nicht konvergiert.

Aus der Konvergenz folgt nicht die absolute Konvergenz einer Reihe, wie (2.2) b) zeigt. Es gilt aber der

(2.3) Satz. *Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.*

Beweis. Wir verwenden das CAUCHY-Kriterium (1.9) für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$ für alle $m \geqslant n \geqslant n_0$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} a_k\Big| \leqslant \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geqslant n \geqslant n_0.$$

Nach (1.9) konvergiert dann auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. □

Wir kommen nun zu den wichtigen Vergleichskriterien.

(2.4) Satz. *(Majoranten-/Minorantenkriterium)*
Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$.
a) Gegeben sei eine konvergente reelle Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$. Wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_k| \leqslant c_k \quad \textit{für alle} \;\; k \geqslant N,$$

dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
b) Gegeben sei eine divergente reelle Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$. Wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_k| \geqslant d_k \geqslant 0 \quad \textit{für alle} \;\; k \geqslant N,$$

dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergent.

Man nennt $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ in a) eine *Majorante* und $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ in b) eine *Minorante* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis. a) Wir verwenden das CAUCHY-Kriterium (1.9). Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \geqslant N$ mit $\left|\sum_{k=n}^{m} c_k\right| < \varepsilon$ für alle $m \geq n \geqslant n_0$. Es folgt

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| \leqslant \sum_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geqslant n \geq n_0.$$

Also konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ nach (1.9).
b) Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Es gilt $0 \leqslant d_k \leqslant |a_k|$ für alle $k \geqslant N$. Dann folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ aus a). Das ist ein Widerspruch.□

Eine Variante formulieren wir in der

(2.5) Bemerkung. Man kann Majoranten- und Minorantenkriterium in folgender Weise noch leicht verallgemeinern.

a) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergente reelle Reihe. Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $M \in \mathbb{R}_+^*$ derart, dass

$$|a_k| \leqslant M \cdot c_k \quad \text{für alle } \ k \in \mathbb{N},$$

dann ist $\sum a_k$ absolut konvergent.

b) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ divergente reelle Reihe. Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $M \in \mathbb{R}_+^*$ derart, dass

$$|a_k| \geqslant M \cdot d_k \quad \text{für alle } \ k \in \mathbb{N},$$

dann ist $\sum a_k$ absolut divergent.

Dies ist offensichtlich, indem man in (2.4) jeweils $\sum c_k$ durch $\sum Mc_k$ bzw. $\sum d_k$ durch $\sum Md_k$ ersetzt. In manchen Fällen ist diese Version aber praktischer.

Wir diskutieren ein paar konkrete

(2.6) Beispiele. a) Es gilt $2k^2 \geqslant k(k+1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$ eine konvergente Majorante zur Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, die nach (2.4) damit ebenfalls konvergiert. Allgemeiner konvergiert demnach $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}$, $r \geqslant 2$. Später werden wir sogar die Konvergenz für $r > 1$ beweisen.
b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt{k} \leqslant k$, also $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$. Nach (1.6) ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ eine divergente Minorante von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, so dass die letzte Reihe nach (2.4) ebenfalls divergiert. Allgemeiner divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}$, $r \leqslant 1$.

Wir leiten nun weitere Konvergenzkriterien her, indem wir (2.4) auf die geometrische Reihe anwenden.

(2.7) Satz. *(Quotientenkriterium)*
Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und es gebe ein $N_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $a_k \neq 0$ für alle $k \geqslant N_1$.

a) *Gibt es ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta < 1$ und ein $N \geqslant N_1$, so dass*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqslant \beta \quad \text{für alle } \; k \geqslant N,$$

so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

b) *Gibt es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma \geqslant 1$ und ein $N \geqslant N_1$, so dass*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geqslant \gamma \quad \text{für alle } \; k \geqslant N,$$

so divergiert $\sum a_k$.

Beweis. a) Für alle $k > N$ gilt

$$\begin{aligned} |a_k| &= \left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| \cdot |a_N| \\ &\leqslant \beta \cdot \beta \cdot \ldots \cdot \beta \cdot |a_N| = \beta^{k-N} \cdot |a_N|. \end{aligned}$$

Es folgt $|a_k| \leqslant \frac{|a_N|}{\beta^N} \cdot \beta^k$ für alle $k > N$. Die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \beta^k = \frac{\beta}{1-\beta}$ ist nach (1.5) konvergent. Also folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ aus (2.4) und (2.5).
b) Es gilt $|a_{k+1}| \geqslant |a_k|$ für alle $k \geqslant N$, also $|a_k| \geqslant |a_N| > 0$ für alle $k \geqslant N$. Daher ist $(a_k)_{k\geqslant 1}$ keine Nullfolge und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nach (1.8) divergent. $\square$

(2.8) Korollar. *Gegeben sei eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und es gebe ein $N_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $a_k \neq 0$ für alle $k \geqslant N_1$. Sei*

$$r\colon \liminf_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|, \qquad R\colon \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|,$$

also $0 \leqslant r \leqslant R \leqslant \infty$.

a) *a1) Aus $R < 1$ folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*
a2) Aus $r > 1$ folgt die Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

b) *Falls $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existiert, so ist die Reihe $\sum a_k$ im Fall $\rho < 1$ absolut konvergent und im Fall $\rho > 1$ divergent.*

Beweis. a1) Sei $R < 1$ und $\beta \in \mathbb{R}$ mit $R < \beta < 1$. Dann existiert ein $N > N_1$ so, dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqslant \beta \quad \text{für alle } \ k > N,$$

denn R ist der größte Häufungspunkt der Folge $\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)_{k \geqslant N_1}$.

Die Behauptung folgt nun mit (2.7).
Der Beweis von a2) verläuft analog und b) folgt sofort aus II(2.15). □

Im Fall $r \leqslant 1 \leqslant R$ sind sowohl Konvergenz als auch Divergenz möglich. Mit (1.6) und (1.3) erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{divergiert;} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1; \quad \text{also } \ r = R = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{konvergiert;} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)} = 1; \quad \text{also } \ r = R = 1.$$

Das zweite wesentliche Beispiel neben der geometrischen Reihe ist enthalten in dem

(2.9) Satz. *Die Exponentialreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k =: \exp(z)$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut.

Beweis. Für $z = 0$ ist die Behauptung mit $\exp(0) = 1$ klar. Sei nun $z \neq 0$, also $a_k := \frac{1}{k!} z^k \neq 0$. Es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{z^k}\right| = \frac{|z|}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Dann folgt die absolute Konvergenz aus (2.7). □

Reihen dieses Typs werden in §4 intensiv studiert. Analog zum Quotientenkriterium erhält man den

(2.10) Satz. *(Wurzelkriterium)*

a) Sei $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \beta < 1$, so dass

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leqslant \beta \quad \text{für alle } k \geqslant N,$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

b) Sei $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ und es existiere $A := \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Gilt $A < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Beweis. a) Die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \beta^k$ ist nach (1.5) eine konvergente Majorante. Dann folgt die Behauptung aus (2.4).

b) Sei $\beta = (1 + A)/2 > A$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leqslant \beta$ für alle $k \geqslant N$ und die Behauptung folgt aus a). $\square$

Gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \geqslant 1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$, so ist $(a_k)_{k>1}$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert nach (1.8). Aus der Bedingung $\sqrt[k]{|a_k|} < 1$ kann noch nicht auf die Konvergenz der Reihe geschlossen werden, wie das Beispiel der harmonischen Reihe (1.6) zeigt.

(2.11) Beispiel. a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+1/k)^{k^2}}$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium (2.10), da

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{(1+1/k)^{k^2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e} < 1.$$

b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium (2.7), da

$$\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1.$$

Wir kommen nun zu einer wesentlichen Eigenschaft absolut konvergenter Reihen. Dazu benötigen wir die

(2.12) Definition. Eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto n_k$, heißt eine *Umordnung* der Folge $(n)_{n\geqslant 1}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Damit formulieren wir den

(2.13) Satz. *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ eine absolut konvergente Reihe. Dann ist auch jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ absolut konvergent und hat den gleichen Grenzwert A.*

Beweis. Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto n_k$, die Umordnung. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{n=p}^{q} |a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } q \geqslant p > N.$$

Daraus folgt

$$\sum_{n \in M} |a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } M \subset \mathbb{N}, M \, \text{endlich}, \; M \cap \{1, \dots, N\} = \varnothing.$$

Dann ist $\varphi^{-1}(\{1, \dots, N\}) \subset \mathbb{N}$ endlich und besitzt ein Maximum k_0. Für alle $q \geqslant p > k_0$ ist dann $M := \{n_k \mid p \leqslant k \leqslant q\} \subset \mathbb{N}$ endlich mit $M \cap \{1, \dots, N\} = \varnothing$. Es folgt

$$\sum_{k=p}^{q} |a_{n_k}| = \sum_{n \in M} |a_n| < \varepsilon.$$

Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}|$ konvergent.

Da φ surjektiv ist, existiert ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $\{1, \dots, N\} \subset \{n_k \mid 1 \leqslant k \leqslant k_1\}$. Es gilt $k_1 \geqslant N$ und für alle $m \geqslant k_1$

$$\Big| \sum_{n=1}^{m} a_n - \sum_{k=1}^{m} a_{n_k} \Big| = \Big| \sum_{n \in M} \pm a_n \Big| \leq \sum_{n \in M} |a_n| < \varepsilon,$$

denn

$$M := (\{1, \dots, m\} \cup \{n_1, \dots, n_m\}) \backslash (\{1, \dots, m\} \cap \{n_1, \dots, n_m\})$$

erfüllt $\sharp M \leqslant 2m$ und $M \cap \{1, \dots, N\} = \varnothing$. Es folgt

$$\lim_{m \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{m} a_n - \sum_{k=1}^{m} a_{n_k} \right) = 0, \quad \text{also} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}.$$

$\square$

Völlig anders sieht das Ergebnis für bedingt konvergente Reihen aus. In Kapitel VI §5 werden wir einen Satz von Bernhard RIEMANN (1826-1866) diskutieren. Wir werden auch absolut konvergente Doppelreihen betrachten.

Bisher haben wir uns noch nicht mit Produkten von Reihen beschäftigt. Wenn man alle Summanden formal ausmultipliziert, wird man wieder ein Diagonalverfahren zur Abzählung verwenden.

(2.14) Definition. Gegeben seien Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Das CAUCHY-*Produkt* dieser beiden Reihen ist definiert durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{mit} \quad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j.$$

Als Anwendung erhalten wir den

(2.15) Satz. *Sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, so ist auch das* CAUCHY-*Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und es gilt*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

Beweis. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k| = \sum_{k=0}^{n} \Big|\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\Big| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} |a_j| \cdot |b_{k-j}|$$

$$= \sum_{\substack{(j,l)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \\ j+l\leqslant n}} |a_j| \cdot |b_l| \leqslant \sum_{\substack{(j,l)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \\ j\leqslant n, l\leqslant n}} |a_j| \cdot |b_l| = \left(\sum_{j=0}^{n} |a_j|\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{n} |b_l|\right).$$

Weil $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ konvergieren, sind die Partialsummen von $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ beschränkt. Also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ nach (1.10).

Seien nun $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und $C = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$. Zu zeigen bleibt $AB = C$, also

$$A_n B_n - C_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Dazu benötigen wir geeignete Abschätzungen. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&|A_nB_n - C_n| = |\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{l=0}^{n} b_l - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}| \\
= &\ |\sum_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \\ k\leqslant n, l\leqslant n}} a_k b_l - \sum_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \\ k+l\leqslant n}} a_k b_l| = |\sum_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \\ k\leqslant n, l\leqslant n, k+l>n}} a_k b_l| \\
\leqslant &\sum_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \\ k\leqslant n, l\leqslant n, k+l>n}} |a_k||b_l|.
\end{aligned}
$$

Aus $0 \leqslant k, l \leqslant n$ und $k + l > n$ folgt $k \geqslant \frac{n}{2}$ oder $l \geqslant \frac{n}{2}$. Also gilt

$$
\begin{aligned}
|A_nB_n - C_n| &\leqslant \sum_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \\ k\leqslant n, \frac{n}{2}\leqslant l\leqslant n}} |a_k||b_l| + \sum_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \\ l\leqslant n, \frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n}} |a_k||b_l| \\
&\leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right) \cdot \left(\sum_{\frac{n}{2}\leqslant l\leqslant n} |b_l|\right) + \left(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l|\right) \cdot \left(\sum_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n} |a_k|\right).
\end{aligned}
$$

Nach dem CAUCHY-Kriterium für die Absolutreihen existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$
\sum_{\frac{n}{2}\leqslant l\leqslant n} |b_l| < \frac{\varepsilon}{2 + 2\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|} \qquad \text{und} \qquad \sum_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2 + 2\sum\limits_{l=0}^{\infty} |b_l|}.
$$

für alle $n \geqslant n_0$, also $|A_nB_n - C_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$. □

Zum Beweis der Konvergenz des CAUCHY-Produktes reicht es schon aus, wenn eine der Reihen absolut konvergiert und die andere konvergiert. Konvergieren beide Reihen bedingt, so braucht das CAUCHY-Produkt nicht zu konvergieren.

Zum Abschluss dieses Paragrafen wollen wir die uns allen geläufige Dezimaldarstellung reeller Zahlen herleiten. Wir gehen etwas allgemeiner vor und nehmen eine beliebige Grundzahl $g \geqslant 2$ statt 10.

(2.16) Satz. *Sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geqslant 2$. Dann besitzt jede reelle Zahl x eine Darstellung*

$$
(*) \qquad x = \varepsilon \sum_{k=N}^{\infty} a_k g^{-k}; \quad \varepsilon = \pm 1,\ N \in \mathbb{Z},\ a_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\},\ k \geqslant N.
$$

Man nennt $(*)$ eine *unendliche g-adische Bruchdarstellung* von x.

Beweis. Wegen $|a_k| \leqslant g-1$ ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} g^{-k}$ eine Majorante von $(*)$, so dass die Reihe für jede Wahl von a_k und N nach (2.4) absolut konvergiert in $\mathbb{R}$.
Sei nun $x \in \mathbb{R}$ und ohne Einschränkung $x > 0$. Weil $(g^k)_{k\geqslant 0}$ unbeschränkt ist, existiert ein minimales $N \in \mathbb{Z}$ mit $g^N x \geqslant 1$, d. h.

$$1 \leqslant g^N x < g\,, \quad a_N := [g^N x] \in \{1, \ldots, g-1\}.$$

Dann gilt

$$0 \leqslant g^N x - a_N < 1, \quad 0 \leqslant x - a_N g^{-N} < g^{-N}.$$

Sind $a_N, \ldots, a_r$ bereits konstruiert mit

$$0 \leqslant y := x - \sum_{k=N}^{r} a_k g^{-k} < g^{-r},$$

also $0 \leqslant g^{r+1} y < g$, so sei

$$a_{r+1} := [g^{r+1} y] \in \{0, \ldots, g-1\}, \text{ also } \quad 0 \leqslant y - a_{r+1} g^{-(r+1)} < g^{-(r+1)}.$$

Weil $(g^{-n})_{n\geqslant 0}$ eine Nullfolge ist, ist $(s_n)_{n\geqslant 0} = \left(\sum_{k=N}^{n} a_k g^{-k}\right)_{n\geqslant 0}$ eine Folge, die gegen x konvergiert. □

Für $g = 10$ sind die a_k genau die Ziffern der bekannten Dezimaldarstellung.
Die Darstellung ist i. A. nicht eindeutig, da z. B.

$$0{,}\overline{9} = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1 = 1{,}\overline{0}.$$

§3. Elementare Funktionen

Die bisherigen Resultate erlauben es uns, eine Reihe von Funktionen einzuführen. Aus (2.8) erhalten wir die

(3.1) Definition. Die *Exponentialfunktion* ist definiert durch

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k.$$

Als erste Anwendung beweisen wir den

(3.2) Satz. *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt*
a) $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$,
b) $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$.

Beweis. a) Da die Exponentialreihe nach (2.8) absolut konvergiert dürfen wir das CAUCHY-Produkt aus (2.15) verwenden:

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} w^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k \frac{1}{(n-k)!} w^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \frac{1}{n!} (z+w)^n,$$

wie man der binomischen Formel I(1.13) entnimmt. Es folgt

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = \exp(z+w).$$

b) Man setze $w = -z$ in a) und benutze $\exp(0) = 1$. $\square$

Wir stellen damit auch Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion $\exp\big|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zusammen.

(3.3) Satz. *a) Die reelle Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend und erfüllt* $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
b) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ *gilt* $\exp(n) = e^n$ *mit* $e = \lim\limits_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

Beweis. a) Es gilt $\exp(0) = 1$ und $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k > 1$ für $x > 0$. Mit (3.2) erhält man dann $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$ für $x < 0$. Seien nun $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u < v$. Dann gilt

$$\exp(v) = \exp(v-u) \cdot \exp(u) > \exp(u),$$

da $\exp(u) > 0$ und $\exp(v-u) > \exp(0) = 1$ wegen $v - u > 0$.
b) Es gilt nach der binomischen Formel I(1.13)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \exp(1),$$

also $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \exp(1)$ mit II(2.7). Sei $m \in \mathbb{N}$. Für alle $n > m$ gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} > \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Rechts stehen $m+1$ Summanden mit höchstens $m+1$ Faktoren. Also kann man auf beiden Seiten den Limes $n \to \infty$ bilden und erhält mit II(2.1)

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}.$$

Nun liefert der Limes $m \to \infty$ noch $e \geqslant \exp(1)$, also $e = \exp(1)$.
Für $n \in \mathbb{N}$ folgt $e^n = \exp(n)$ per Induktion mit (3.2). Für $n < 0$ verwende man $\exp(n) = (\exp(-n))^{-1} = (e^{-n})^{-1} = e^n$. □

Wir werden in Zukunft auch e^z statt $\exp(z)$ schreiben.

Als Folgerung notieren wir das

(3.4) Korollar. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\left|\exp(z)\right| = \exp(\mathrm{R}e(z)).$$

Beweis. Aus II(4.11) erhält man

$$\overline{\exp(z)} = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, \overline{z}^k = \exp(\overline{z})$$

und dann mit (3.2)

$$\begin{aligned} |\exp(z)|^2 &= \exp(z)\cdot\overline{\exp(z)} = \exp(z)\cdot\exp(\overline{z}) = \exp(z+\overline{z}) \\ &= \exp(2\mathrm{R}e(z)) = (\exp(\mathrm{R}e(z))^2. \end{aligned}$$

Wegen $\exp(\mathrm{R}e(z)) > 0$ nach (3.3) folgt die Behauptung. □

Mit der Exponentialfunktion definieren wir die *Winkelfunktionen* gleich für komplexe Argumente.

(3.5) Definition. Die *Sinus*- und *Cosinus-Funktion* sind definiert durch

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad &, \quad z \mapsto \sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)), \\ \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad &, \quad z \mapsto \cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)). \end{aligned}$$

Die ersten Eigenschaften sind enthalten in dem

(3.6) Satz. *a)* sin *ist eine ungerade und* cos *eine gerade Funktion, d.h. für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\sin(-z) = -\sin(z) \quad \textit{und} \quad \cos(-z) = \cos(z).$$

b) Es gelten die für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergenten Reihendarstellungen

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

c) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1.$$

d) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \sin(z)\cdot\cos(w) + \cos(z)\cdot\sin(w), \\ \cos(z+w) &= \cos(z)\cdot\cos(w) - \sin(z)\cdot\sin(w). \end{aligned}$$

e) Es gilt

$$\exp(iz) = \cos z + i\sin z \quad \textit{für alle} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Beweis. a) Man setze die Definition ein.
b) Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \frac{1}{2i}(\exp(iz)-\exp(-iz)) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-iz)^k}{k!}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k-(-i)^k}{2i}\frac{z^k}{k!} = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{z^{2l+1}}{(2l+1)!},\end{aligned}$$

wenn man im letzten Schritt $k = 2l+1$ für die ungeraden k setzt. Es gilt

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz)+\exp(-iz)) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k+(-i)^k}{2}\frac{z^k}{k!} = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{z^{2l}}{(2l)!},$$

wenn man im letzten Schritt $k = 2l$ für die geraden k setzt. Die absolute Konvergenz folgt für $z \neq 0$ wieder mit dem Quotientenkriterium in (2.7)

$$\begin{aligned}\left|(-1)^{l+1}\frac{z^{2l+3}}{(2l+3)!}\frac{(2l+1)!}{(-1)^l z^{2l+1}}\right| &= \frac{|z|^2}{(2l+2)(2l+3)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0,\\ \left|(-1)^{l+1}\frac{z^{2l+2}}{(2l+2)!}\frac{(2l)!}{(-1)^l z^{2l}}\right| &= \frac{|z|^2}{(2l+1)(2l+2)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

c) Es gilt nach (3.2)

$$\sin^2(z)+\cos^2(z) = -\frac{1}{4}(\exp(2iz)-2+\exp(-2iz))+\frac{1}{4}(\exp(-2iz)+2+\exp(2iz)) = 1.$$

d), e) Man setze die Definitionen ein und verwende (3.2). □

Anhand der Reihendarstellungen sieht man, dass die Restriktionen von sin und cos auf $\mathbb{R}$ reellwertig sind.

(3.7) Korollar. *Die Restriktionen* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *erfüllen*

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1, \quad \cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}), \quad \sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Der erste Teil folgt aus $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$. Beim zweiten Teil verwendet man $\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix)$. □

Man kann die Additionstheoreme für $x, y \in \mathbb{R}$ auch wie folgt beweisen:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= \exp(i(x+y)) = \exp(ix+iy) = \exp(ix)\cdot\exp(iy)\\ &= (\cos(x)+i\sin(x))\cdot(\cos(y)+i\sin(y))\\ &= [\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)] + i[\cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)].\end{aligned}$$

Nun vergleicht man die Real- und Imaginärteile auf beiden Seiten.

Sie sind es von der Schule vielleicht gewohnt, bei den trigonometrischen Funktionen das *Winkelmaß* als Argument einzusetzen. Wir verwenden stets das *Bogenmaß*, wobei $360°$ dem Umfang 2π des Einheitskreises entspricht. [Die letzte Tatsache werden wir in Analysis II beweisen.] Der Sinus von $n°$ wird damit gegeben durch

$$\sin\left(\frac{n}{360}\cdot 2\pi\right).$$

§4. Potenzreihen

Eine sehr effektive Möglichkeit, Funktionen zu definieren, ist, wie wir bereits im letzten Paragrafen gesehen haben, das Konstruktionsprinzip der Potenzreihen.

(4.1) Definition. Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

eine *Potenzreihe* mit *Entwicklungspunkt* z_0. Sind alle $z_0, z, a_n \in \mathbb{R}$, so spricht man von einer *reellen Potenzreihe*.

Man beachte, dass die obige Potenzreihe stets für $z = z_0$ konvergiert und den Wert a_0 hat. Beispiele solcher Potenzreihen mit Entwicklungspunkt 0 sind die Exponentialfunktion und die Winkelfunktionen.

Als ein erstes weiteres Beispiel erhalten wir das

(4.2) Lemma. *Für $l \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^l z^n \quad \begin{cases} \text{für } |z| < 1 \text{ absolut konvergiert,}\\ \text{für } |z| > 1 \text{ divergiert.}\end{cases}$$

Beweis. Für $z = 0$ ist die Behauptung klar. Für $z \neq 0$ verwenden wir das Quotientenkriterium

$$\left|\frac{(n+1)^l z^{n+1}}{n^l z^n}\right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^l |z| \xrightarrow[n\to\infty]{} |z|.$$

Dann folgt die Behauptung aus (2.7). $\square$

Ein wesentliches Hilfsmittel zur Behandlung von Potenzreihen ist der folgende Satz, der auf Niels Henrik ABEL (1802-1829) zurckgeht.

(4.3) Satz. *(ABELsches Lemma)*
Seien $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}_0$ und $0 \neq w \in \mathbb{C}$, so dass die Folge $(a_n w^n)_{n\geqslant 0}$ beschränkt ist. Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < |w|$. Dann konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^l a_n z^n$$

absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leqslant r$ und $\sum_{n=0}^{\infty} n^l |a_n| r^n$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leqslant r$ eine konvergente Majorante.

Beweis. Man wähle ein $\rho \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < \rho < |w|$. Für $|z| \leqslant r$ gilt

$$|n^l a_n z^n| \leqslant n^l |a_n| r^n = |a_n w^n| \cdot n^l \left(\frac{\rho}{|w|}\right)^n \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Nach Voraussetzung existiert ein $K \in \mathbb{R}$ mit $|a_n w^n| \leqslant K$. Aus (4.2) und (1.8) folgt, dass $\left(n^l \left(\frac{\rho}{|w|}\right)^n\right)_{n\geqslant 0}$ eine Nullfolge, also insbesondere ebenfalls beschränkt ist. Dann ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ (vgl. (1.5)) eine konvergente Majorante von

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^l |a_n| r^n.$$

Also folgt die Behauptung aus (2.4). $\square$

Man darf über r in (4.3) frei verfügen. Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |w|$, so definiert man etwa $r = \frac{1}{2}(|z| + |w|)$. Daraus ergibt sich das

(4.4) Korollar. *Ist $0 \neq w \in \mathbb{C}$, so dass die Folge $(a_n w^n)_{n\geqslant 0}$ beschränkt ist, dann konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} n^l a_n z^n, l \in \mathbb{N}_0$, und $\sum_{n=1}^{\infty} P(n) a_n z^n$ für jedes Polynom $P(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |w|$ absolut.*

Beweis. Mit $P(x) = \sum_{i=0}^{r} b_i x^i$ folgt dies sofort aus (4.3). □

Betrachtet man $w = 1, a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so erhält man aus (4.4) die absolute Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} n^l z^n, l \in \mathbb{N}_0$, für $|z| < 1$ wie in (4.2).
Mit $w = 1, l = 0$ und $a_n = 0$ oder 1 geeignet, folgt auch die absolute Konvergenz der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \quad \text{für } |z| < 1.$$

(4.5) Satz. *Zu jeder komplexen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, z_0 \in \mathbb{C}$ fest, gibt es ein eindeutig bestimmtes $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, so dass gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \begin{cases} \textit{konvergiert absolut für alle } z \in \mathbb{C} \textit{ mit } |z - z_0| < R, \\ \textit{divergiert für alle } z \in \mathbb{C} \textit{ mit } |z - z_0| > R. \end{cases}$$

Es gilt

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+;\ (a_n r^n)_{n\geqslant 0} \textit{ ist beschränkt}\}.$$

R heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Beweis. Ist $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ für alle $r \in \mathbb{R}_+$ beschränkt, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ nach (4.4) absolut. In diesem Fall ist die Behauptung richtig mit $R = \infty$.
Andernfalls existiert ein $r_0 \in \mathbb{R}_+$, so dass $(a_n r_0^n)_{n\geqslant 0}$ nicht beschränkt ist. Für $r \geqslant r_0$ gilt $r^n \geqslant r_0^n$, so dass $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ ebenfalls nicht beschränkt ist. Sei

$$M := \{r \in \mathbb{R}_+;\ (a_n r^n)_{n\geqslant 0} \text{ ist beschränkt}\}.$$

Dann gilt $0 \in M$ und $M \subset [0, r_0)$. Also existiert

$$R := \sup M.$$

1. Fall: Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$. Dann existiert ein $r \in M$ mit $|z - z_0| < r \leqslant R$. Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ nach (4.4) mit $l = 0$ absolut.
2. Fall: Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$. Dann ist $(a_n (z - z_0)^n)_{n\geqslant 0}$ unbeschränkt, also auch keine Nullfolge. Nun folgt die Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ aus (1.8). □

Die Bedeutung des Konvergenzradius wird erläutert in der

(4.6) Bemerkung. In (4.5) heißt $K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C};\ |z-z_0| < R\}$ *Konvergenzkreis* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Also definiert die Potenzreihe eine Funktion

$$K_R(z_0) \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Sind alle $a_n, n \in \mathbb{N}_0$, und $z_0 = x_0$ reell, so ist $U_R(x_0) = (x_0 - R, x_0 + R)$ das *Konvergenzintervall* der reellen Potenzreihe und man erhält eine reellwertige Funktion

$$U_R(x_0) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Wir diskutieren einige

(4.7) Beispiele. a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ hat den Konvergenzradius $R = 0$, da $(n^n z^n)_{n\geqslant 0}$ für jedes $z \neq 0$ unbeschränkt ist.
b) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat den Konvergenzradius 1. Für $0 \neq c \in \mathbb{C}$ hat $\sum_{n=0}^{\infty} c^{-n} z^n$ daher den Konvergenzradius $|c|$.
c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ hat den Konvergenzradius ∞ und $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} z^n$ ebenfalls.

Wir leiten nun eine Formel für den Konvergenzradius her, die auf Agustin-Louis CAUCHY (1789-1857) und Jacques HADAMARD (1865-1963) zurückgeht.

(4.8) [. *Satz von* CAUCHY-HADAMARD*] Die komplexe Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *hat den Konvergenzradius*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

wobei $\frac{1}{0} := \infty$ *und* $\frac{1}{\infty} := 0$.
Existiert insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *in* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, *so gilt*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Beweis. (i) Gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, so ist $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\geqslant 1}$ unbeschränkt, d. h. zu $M > 0$ gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} > M$. Für $z \in \mathbb{C}, z \neq z_0$, sei $M := \frac{1}{|z-z_0|}$. Dann gilt $|a_n(z-z_0)^n| > 1$ für unendlich viele n. Also ist $(a_n(z-z_0)^n)_{n\geqslant 0}$ keine Nullfolge und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ nach (1.8) divergent.
(ii) Gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, so folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Nach dem Wurzelkriterium (2.10) ist die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.
(iii) Es gelte $0 < \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} := \tilde{R} < \infty$.
Sei $0 < r < \tilde{R}$, also $\frac{1}{r} > \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r}$, also $|a_n r^n| < 1$ für alle $n \geqslant n_0$. Daher ist $(a_n r^n)_{n\geqslant 1}$ beschränkt. Es folgt $r \leq R$ aus (4.5). Weil $r < \tilde{R}$ beliebig war, erhält man $\tilde{R} \leqslant R$.
Sei nun $\tilde{R} < r < \infty$, also $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{r}$. Dann existieren unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{r}$, also $|a_n r^n| > 1$. Daher ist $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ keine Nullfolge und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ divergent nach (1.8). Es folgt $R \leqslant r$ und damit $R \leq \tilde{R}$. Insgesamt hat man $R = \tilde{R}$.
Die letzte Aussage ist klar. □

Als Anwendung betrachten wir die Exponentialreihe.

(4.9) Korollar. *Die Folge* $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\geqslant 1}$ *divergiert bestimmt gegen* ∞.

Beweis. Da die Exponentialreihe den Konvergenzradius ∞ hat, folgt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$, also $\liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ aus (4.8). □

Für den Beweis von CAUCHY-HADAMARD wurde da Wurzelkriterium verwendet. Man kann auch – unter geeigneten Voraussetzungen – das Quotientenkriterium zur Bestimmung des Konvergenzradius benutzen.

(4.10) Satz. *Gegeben sei die komplexe Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. *Gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$, *so dass* $a_n \neq 0$ *für alle* $n > N$ *und existiert*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =: \rho \quad \text{in } \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

so ist dieser Grenzwert gleich dem Konvergenzradius R.

Beweis. Es ist

$$\left| \frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |z-z_0|.$$

Nach Voraussetzung existiert der Grenzwert dieser Folge und ist gleich $\rho^{-1} \cdot |z-z_0|$. Aus (2.8) folgt nun (absolute) Konvergenz der Reihe für $|z-z_0| < \rho$ und Divergenz für $|z-z_0| > \rho$. Nach (4.5) gilt $R = \rho$. □

Nun beschäftigen wir uns mit dem Produkt von Potenzreihen.

(4.11) Satz. *Gegeben seien komplexe Potenzreihen*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \ |z-z_0| < R_f, \\ g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n, \ |z-z_0| < R_g \end{aligned}$$

mit einem gemeinsamen Entwicklungspunkt z_0 *sowie Konvergenzradien* $R_f > 0$ *und* $R_g > 0$. *Setzt man*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

so hat die Potenzreihe

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

einen Konvergenzradius $R_h \geqslant \min\{R_f, R_g\}$ *und es gilt*

$$h(z) = f(z) \cdot g(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z-z_0| < \min\{R_f, R_g\}.$$

Beweis. Für $|z-z_0| < \min\{R_f, R_g\}$ konvergieren $f(z)$ und $g(z)$ nach (4.5) absolut. $h(z)$ ist das CAUCHY-Produkt von $f(z)$ und $g(z)$, das nach (2.15) ebenfalls absolut konvergiert und $h(z) = f(z) \cdot g(z)$ für alle $|z-z_0| < \min\{R_f, R_g\}$ erfüllt. Aus (4.5) erhält man wieder $R_h \geqslant \min\{R_f, R_g\}$. □

Offenbar kann man Potenzreihen mit demselben Entwicklungspunkt addieren und auch mit einem Skalar multiplizieren. Dann besagt (4.11), dass für jedes $R > 0, z_0 \in \mathbb{C}$ die Menge

$$\mathcal{A} := \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n;\ f(z) \text{ hat Konvergenzradius } \geqslant R \right\}$$

mit komponetenweiser Addition und Skalarmultiplikation und dem CAUCHY-Produkt eine $\mathbb{C}$-Algebra ist.

Wir diskutieren noch einige

(4.12) Beispiele. a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat $R_f = 1$ und $g(z) = 1 - z$ natürlich $R_g = \infty$. Dann gilt

$$h(z) = f(z) \cdot g(z) = 1 \quad \text{für alle } |z| < 1.$$

Es gilt aber $R_h = \infty > \min\{R_f, R_g\}$.
b) Sei $f(z) = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Dann gilt $R_f = R_g = 1$ und $c_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$. Es folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)^2 = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{für } |z| < 1.$$

c) Analog folgt für $|z| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^3} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (k+1) \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} z^n. \end{aligned}$$

d) Allgemeiner kann man für $k \in \mathbb{N}_0$ und $|z| < 1$ zeigen

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n.$$

Kapitel V.

Stetigkeit

In diesem Kapitel werden wir erste Eigenschaften stetiger Funktionen zusammenstellen.

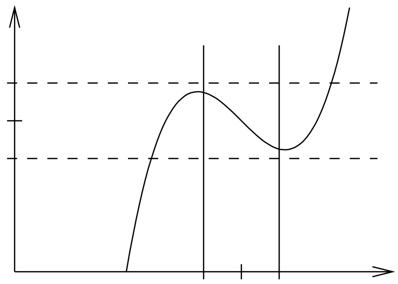
§1. Definition und elementare Eigenschaften

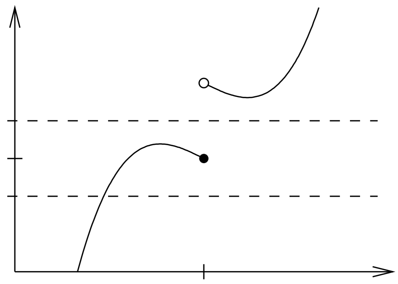
Wir führen zunächst den Begriff der Stetigkeit ein und leiten dann einige elementare Eigenschaften stetiger Funktionen her. Dazu sei stets $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \varnothing$.

(1.1) Definition. Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Die Funktion f heißt *stetig in* x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

f heißt *stetig auf* E, falls $E \subset D$ und f in jedem Punkt $x_0 \in E$ stetig ist. Man nennt f *stetig*, wenn f stetig auf D ist.





Die obigen Skizzen sollen der Veranschaulichung dienen. Anschaulich gesprochen wird eine stetige Funktion auf einem Intervall dadurch charakterisiert, dass man ihren Graphen "durchzeichnen" kann, dass also keine Sprünge auftreten.

(1.2) Beispiele. a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$, konstant. Zu $\varepsilon > 0$ wähle man z. B. $\delta = 1$. Dann gilt für alle $x, x_0 \in D$ bereits

$$|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon.$$

Also ist f stetig auf D.
b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta := \varepsilon/|a|$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |ax + b - ax_0 - b| = |a| \cdot |x - x_0| < |a| \cdot \delta = \varepsilon.$$

Also ist f stetig auf $\mathbb{R}$.
c) Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Für $x_0 \in [-1, 1]$ und $\varepsilon > 0$ sei $\delta := \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Dann gilt für alle $x \in [-1, 1]$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| \leqslant |x - x_0| \cdot (|x| + |x_0|) \leqslant 2|x - x_0| < 2\delta = \varepsilon.$$

Also ist f stetig auf $[-1, 1]$.
d) Sei

$$D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

die DIRICHLETsche Sprungfunktion (vgl. I(3.2)).
Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, also $f(x_0) = 0$. Zu jedem $\delta > 0$ gibt es dann nach I(2.26) ein $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathbb{Q}$. Es folgt $|f(x_1) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon$. Also ist D nicht stetig in x_0.
Sei nun $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $x_0 \in \mathbb{Q}$, also $f(x_0) = 1$. Zu jedem $\delta > 0$ existiert nach II(3.18) ein $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$. Es folgt $|f(x_1) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon$. Also ist D nicht stetig in x_0. Demnach ist D in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

Eine triviale Umformulierung von (1.1) ergibt das

(1.3) Lemma. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn es zu jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(f(x_0))$ von $f(x_0)$ eine δ-Umgebung $U_\delta(x_0)$ von x_0 gibt, so dass*

$$f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)) \quad \text{für alle } x \in D \cap U_\delta(x_0),$$

d. h.

$$f(D \cap U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0)).$$

Einfach zu verstehen sind die folgenden

(1.4) Bemerkungen. a) Statt für ε- und δ-Umgebungen kann man (1.3) auch für beliebige Umgebungen formulieren.
b) Sei x_0 ein isolierter Punkt von D, d. h. es gibt ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \cap D = \{x_0\}$. Dann ist f (für jedes $\varepsilon > 0$ mit diesem δ) stetig in x_0. Dies wird in der Literatur zum Teil anders definiert.

Nun bringen wir den Stetigkeitsbegriff mit Folgen in Zusammenhang.

(1.5) Satz. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann sind äquivalent:*
(i) f ist stetig in x_0.
(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0).$$

Die Stetigkeit besagt also die Vertauschbarkeit von f mit der Limesbildung von Folgen. Man beachte, dass (ii) für alle Folgen (und nicht etwa nur für ein spezielles Beispiel) gefordert wird.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine beliebige Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Aus (i) folgt die Existenz eines $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D \cap U_\delta(x_0)$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x_0| < \delta$, d. h. $x_n \in U_\delta(x_0)$, für alle $n \geqslant n_0$. Es folgt $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für

alle $n \geqslant n_0$, also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Wir nehmen an, dass f nicht stetig in x_0 ist. Dann existiert ein $\rho > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0$ ein $x = x(\delta) \in D$ existiert mit

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{und} \quad |f(x) - f(x_0)| \geqslant \rho.$$

Zu $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, existiert somit ein $x_n \in D$ mit

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \rho.$$

Aus $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ erhält man $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Wegen $|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \rho$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ aber nicht gegen $f(x_0)$. Das ist ein Widerspruch zu (ii). Demnach ist f stetig in x_0. $\square$

Man nennt (1.1) das *ε-δ-Kriterium* und (1.5) das *Folgenkriterium* der Stetigkeit.

(1.6) Beispiele. a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto [x]$, ist unstetig in allen $x_0 \in \mathbb{Z}$. Sei $x_n := x_0 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ und

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left[x_0 - \frac{1}{n}\right] = x_0 - 1 \neq x_0 = f(x_0).$$

Ist $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, so ist f stetig in x_0. Für $\varepsilon > 0$ sei $\delta := \min\{x_0 - [x_0], [x_0] + 1 - x_0\} > 0$. Für $x \in U_\delta(x_0)$ gilt dann $[x] = [x_0]$, also $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.
b) Wir betrachten die Signum-Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto sgn\, x = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass f in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, stetig ist (mit $\delta := |x_0|$ für jedes $\varepsilon > 0$). Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0 = f(0)$ ist f nicht stetig in 0.

Als leichte Verallgemeinerung von (1.1) formulieren wir die

(1.7) Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Man nennt f *linksseitig stetig* in x_0 [bzw. *rechtsseitig stetig* in x_0], wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $x_0 - \delta < x \leqslant x_0$ [bzw. mit $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta$].

(1.8) Lemma. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.*
a) f ist genau dann linksseitig [bzw. rechtsseitig] stetig in x_0, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $x_n \leqslant x_0$ [bzw. $x_n \geqslant x_0$] für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
b) f ist genau dann stetig in x_0, wenn f linksseitig und rechtsseitig stetig in x_0 ist.

Beweis. a) wird wie in (1.5) bewiesen. Zum Beweis der nichttrivialen Richtung in b) nehmen wir an, dass f in x_0 linksseitig und rechtsseitig stetig ist. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also $\delta_+ > 0$, $\delta_- > 0$ so, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ zum einen für alle $x \in D$ mit $x < x_0$ und $|x - x_0| < \delta_-$, zum anderen für alle $x \in D$ mit $x > x_0$ und $|x - x_0| < \delta_+$. Mit

$$\delta :\, = \min\{\delta_+, \delta_-\}$$

folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. □

Wir wissen aus Kapitel I, (3.3) und (3.4), dass die Menge $\{f : D \to \mathbb{R};\ f$ Funktion$\}$ eine $\mathbb{R}$-Algebra ist bezüglich der Multiplikation mit Konstanten als Skalarmultiplikation sowie punktweiser Addition und Multiplikation.

Sind $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ und $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ Funktionen und gilt $f(D_f) \subset D_g$, so ist die Komposition erklärt durch

$$g \circ f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))\,.$$

Im Zusammenhang mit der Stetigkeit erhalten wir den

(1.9) Satz. *a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist auch αf stetig in x_0. Es existiert eine Umgebung U von x_0, so dass $f\big|_{D\cap U}$ beschränkt ist, d. h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leqslant c$ für alle $x \in U \cap D$.*
b) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Ist $f(x_0) > 0$ [bzw. $f(x_0) < 0$], so existiert eine Umgebung U von x_0 und ein $\rho > 0$, so dass

$$f(x) > \rho \quad [\text{bzw. } f(x) < -\rho] \quad \text{für alle} \ \ x \in D \cap U.$$

c) Seien $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ beide stetig in $x_0 \in D_f \cap D_g$. Dann sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ stetig in x_0 und im Fall $g(x_0) \neq 0$ ebenfalls f/g.
d) Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Es gelte $f(D_f) \subset D_g$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ sei stetig in $y_0 := f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ stetig in x_0.

Der Satz besagt insbesondere, dass $\{f : D \to \mathbb{R};\ f \text{ stetig auf } D\}$ eine $\mathbb{R}$-Algebra ist.

Beweis. a) Da f stetig in x_0 ist, existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < 1$ für alle $x \in D \cap U_\delta(x_0)$. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$|f(x)| < |f(x_0)| + 1 =: c \quad \text{für alle} \quad x \in D \cap U_\delta(x_0).$$

Ist $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, so folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ aus (1.5) und $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha f(x_n) = \alpha f(x_0)$ aus II(1.8).
b) Sei $\rho = \frac{1}{2} f(x_0) > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \rho, \quad \text{also} \quad f(x) \in (\rho, 3\rho)$$

für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Also folgt die Behauptung mit $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
c) Sei $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge in $D_f \cap D_g$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann folgt wiederum aus (1.5) und II(1.8)

$$\begin{aligned} (f+g)(x_0) &= f(x_0) + g(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n), \\ (f \cdot g)(x_0) &= f(x_0) \cdot g(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \cdot \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} (f \cdot g)(x_n). \end{aligned}$$

Also sind $f + g$ und $f \cdot g$ stetig in x_0. Sei $g(x_0) \neq 0$. Dann gibt es nach b) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $g(x_n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$. Mit (1.5) und II(1.8) folgt

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x_n),$$

also die Stetigkeit von f/g in x_0.
d) Sei $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge in D_f mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Nach (1.5) ist $(y_n)_{n\geqslant 1} := (f(x_n))_{n\geqslant 1}$ eine Folge in D_g mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 = f(x_0)$. Wendet man nun (1.5) auf g an, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0) = (g \circ f)(x_0).$$

Also ist auch $g \circ f$ stetig in x_0. $\square$

Als Anwendung erhalten wir das

(1.10) Korollar. *Jedes reelle Polynom ist stetig auf* $\mathbb{R}$.

Beweis. Konstanten und $id_{\mathbb{R}}$ sind nach (1.2) stetig. Aus (1.9) folgt mit einer Induktion dann die Stetigkeit der Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \alpha x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Nun verwenden wir eine Induktion nach dem Grad des Polynoms, wobei wir alle konstanten Funktionen bereits als stetig erkannt haben. Gilt $grad\, p(X) = n+1$, so hat man eine Darstellung

$$p(X) = q(X) + \alpha X^{n+1}$$

mit einem Polynom $q(X)$ von einem Grad $\leqslant n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $q(X)$ stetig, also auch $p(X)$ nach dem bewiesenen Teil und (1.9). $\square$

Nach I(3.7) ist eine rationale Funktion ein Quotient zweier Polynomfunktionen. Aus (1.10) und (1.9) folgt dann sofort das

(1.11) Korollar. *Alle rationalen Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.*

Als weiteres zentrales Beispiel studieren wir die Potenzreihen (III, §4).

(1.12) Satz. *Sei* $x_0 \in \mathbb{R}$ *und* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Dann ist die Funktion*

$$f : U_R(x_0) \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

stetig, wobei $U_\infty(x_0) := \mathbb{R}$.

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in U_R(x_0)$ und $\rho > 0$ so gewählt, dass

$$|x_1 - x_0| \leqslant \rho \leqslant R \quad \text{und} \quad |x_2 - x_0| \leqslant \rho < R.$$

Nach der allgemeinen geometrischen Summenformel I(1.9) gilt dann für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(x_1 - x_0)^n - (x_2 - x_0)^n = (x_1 - x_2) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (x_1 - x_0)^j (x_2 - x_0)^{n-1-j}.$$

Daher gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{N} a_n(x_1-x_0)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n(x_2-x_0)^n\right| &= \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\left[(x_1-x_0)^n - (x_2-x_0)^n\right]\right| \\ &\leqslant |x_1-x_2| \sum_{n=1}^{N} |a_n| \sum_{j=0}^{n-1} |x_1-x_0|^j |x_2-x_0|^{n-1-j} \\ &\leqslant |x_1-x_2| \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{n=1}^{N} |a_n| n\rho^n.\end{aligned}$$

Nach dem ABELschen Lemma III(4.3) konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n\rho^n$. Also existiert ein $C > 0$ mit $C \geqslant (1/\rho) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n\rho^n$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n(x_1-x_0)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n(x_2-x_0)^n\right| \leqslant C \cdot |x_1-x_2| \tag{1}$$

gilt. Wir haben also

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C \cdot |x_1-x_2| \tag{2}$$

für alle $x_1, x_2 \in U_R(x_0)$ mit $|x_1-x_0| \leqslant \rho$, $|x_2-x_0| \leqslant \rho$.
Nun zeigen wir die Stetigkeit von f im Punkt x_1:

Sei $\varepsilon > 0$ und $\rho' > 0$ sei so gewählt, dass $|x_1-x_0| \leqslant \rho' < R$. Dann gibt es ein $\rho > 0$ mit $\rho' < \rho < R$. Wir wählen dann C wie in (1) und setzen $\delta\colon = \min\{\varepsilon/C, \rho-\rho'\} > 0$. Dann sind für alle x_2 mit $|x_1-x_2| < \delta$ die Voruassetzungen aus (2) erfüllt und wir bekommen

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x_2 \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |x_1-x_2| < \delta. \qquad \square$$

Mit III(2.7) und III(3.6) folgt daraus sofort das

(1.13) Korollar. *Die reelle Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

und die Winkelfunktionen

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

sind stetig auf $\mathbb{R}$.

In Bezug auf komplexe Funktionen notieren wir die

(1.14) Bemerkung. Für Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ definiert man Stetigkeit wörtlich wie in (1.1). Dann gelten (1.3), (1.5), (1.9) - (1.13) auch für komplexe Funktionen, wobei man die Beweise wörtlich übernehmen kann. Insbesondere ist jede komplexe Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius $R > 0$ stetig auf ihrem Konvergenzkreis $K_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < R\}$.

Wir beschäftigen uns nun mit der Stetigkeit der Umkehrfunktion.

(1.15) Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone, stetige Funktion mit $W = f(I)$. Dann ist die Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : W \to I$$

ebenfalls stetig.

Beweis. Wir führen den Beweis für den Fall, dass f streng monoton wachsend ist. (Der andere Fall wird analog bewiesen.) Nach I(3.10) existiert f^{-1} und ist streng monoton wachsend. Sei $y_0 \in W = f(I)$. Dann existiert ein $x_0 \in I$ mit $f(x_0) = y_0$.

<u>1. Fall:</u> x_0 ist ein innerer Punkt von I.

Dann existiert ein $r > 0$ mit $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, aber $\varepsilon \leqslant r$. Aus $x_0 \pm \varepsilon \in I$ folgt

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon),$$

da f streng monoton wachsend ist. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) - \delta < f(x_0) + \delta < f(x_0 + \varepsilon).$$

Weil f^{-1} ebenfalls monoton wachsend ist, erhält man

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon \quad \text{für alle } y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap W,$$

also

$$-\varepsilon < f^{-1}(y) - x_0 < \varepsilon.$$

Wegen $x_0 = f^{-1}(y_0)$ heißt das

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in U_\delta(y_0) \cap W.$$

Demnach ist f^{-1} stetig in y_0.
2. Fall: x_0 ist kein innerer Punkt von I.
Nach II(3.1) hat I dann die Form

$$[x_0, b],\ [x_0, b),\ [x_0, \infty),\ (-\infty, x_0],\ (a, x_0] \text{ oder } [a, x_0].$$

Sei ohne Einschränkung $I = [x_0, b]$ mit $x_0 < b < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig mit $\varepsilon < b - x_0$, also $x_0 + \varepsilon \in I$ und damit

$$f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \varepsilon).$$

Nun wählen wir ein $\delta > 0$ mit $f(x_0) < f(x_0) + \delta < f(x_0 + \varepsilon)$. Es folgt

$$y_0 = f(x_0) \leqslant y < f(x_0 + \varepsilon) \quad \text{für alle } y \in U_\delta(y_0) \cap W,$$

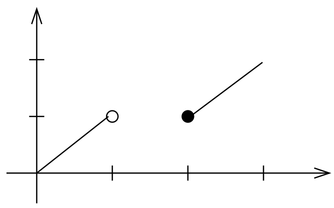
denn $U_\delta(y_0) \cap W \subset [y_0, y_0 + \delta)$, da f monoton wächst. Daraus ergibt sich

$$x_0 \leqslant f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon, \quad \text{d. h.} \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

für alle $y \in U_\delta(y_0) \cap W$. Also ist f^{-1} stetig in y_0. □

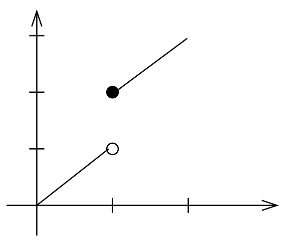
Die strenge Monotonie im Satz ist keine wesentliche Einschränkung. Wir werden später in (3.11) sehen, dass aus der Stetigkeit und der Injektivität von $f : I \to \mathbb{R}$ auch die strenge Monotonie folgt.
Auf die Voraussetzung, dass I ein Intervall ist, kann man jedoch nicht verzichten. Zum Beispiel ist $D = (0, 1) \cup [2, 3)$,

$$f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in (0,1), \\ x - 1, & \text{falls } x \in [2,3), \end{cases}$$



streng monoton wachsend und stetig mit $W = f(D) = (0, 2)$. Aber

$$f^{-1} : (0,2) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \begin{cases} y, & \text{falls } y \in (0,1), \\ y + 1, & \text{falls } y \in [1,2), \end{cases}$$



ist im Punkt $y_0 = 1$ wegen

$$f^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \neq 2 = f^{-1}(1)$$

nicht stetig.

Wir wenden nun (1.15) an auf die Potenzfunktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^n$, und deren Umkehrfunktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbb{N}$. Da die Potenzfunktion als Polynom stetig ist, erhalten wir das

(1.16) Korollar. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Wurzelfunktion*

$$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \sqrt[n]{x},$$

stetig. Ist n ungerade, so ist auch die Wurzelfunktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt[n]{x},$$

stetig.

§2. Grenzwerte von Funktionen

Ähnlich wie Grenzwerte von Folgen kann man Grenzwerte von Funktionen definieren. Man ersetzt dabei die diskrete Variable $n \in \mathbb{N}$ durch die kontinuierliche Variable $x \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir einen neuen Begriff, mit dem wir die Stetigkeit charakterisieren können.

(2.1) Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ∞ Häufungspunkt von D, d. h. zu jedem $R > 0$ gibt es ein $x \in D$ mit $x > R$. Die Funktion f heißt *konvergent gegen $L \in \mathbb{R}$ für $x \to \infty$*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in D$ existiert, so dass

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{für alle } x > x_0.$$

Man schreibt dafür $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.
Ist $-\infty$ Häufungspunkt von D, gibt es also zu jedem $R > 0$ ein $x \in D$ mit $x < -R$, so definiert man $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = M \in \mathbb{R}$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in D$ existiert, so dass

$$|f(x) - M| < \varepsilon \quad \text{für alle } x < x_0.$$

Man ersetzt im Vergleich zur Folgenkonvergenz die Bedingung $n > n_0$ durch $x > x_0$.

Der Veranschaulichung dienen die folgenden

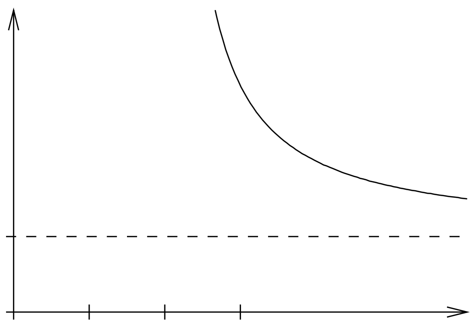
(2.2) Beispiele. a) Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{x-2}$. Dann gilt $(2,\infty) \subset \mathbb{R}\backslash\{2\}$ und man hat $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x-2} = 1$. Zu $\varepsilon > 0$ definiert man $x_0 = 2 + \frac{2}{\varepsilon}$ und erhält für alle $x > x_0$

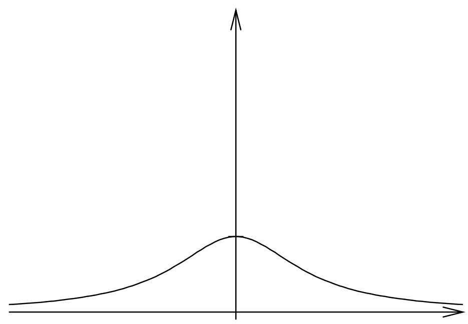
$$|f(x) - 1| = \Big|\frac{x}{x-2} - 1\Big| = \frac{2}{x-2} < \frac{2}{x_0 - 2} = \varepsilon.$$

b) Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$. Zu $\varepsilon > 0$ definiert man $x_0 = \sqrt{1/\varepsilon}$ und folgert für alle $x > x_0$

$$|f(x)| = \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{x_0^2+1} < \frac{1}{x_0^2} = \varepsilon.$$

Analog zeigt man $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$.





Ein Analogon zu (2.1) formulieren wir als

(2.3) Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 Häufungspunkt von D. Die Funktion f heißt *konvergent gegen $L \in \mathbb{R}$ für $x \to x_0$*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Man schreibt dafür $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. In vielen Beispielen wird es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < x_0 < b$ und $(a, x_0) \cup (x_0, b) \subset D$ geben.

Man beachte, dass $0 < |x - x_0|$ vorausgesetzt wird. Daher braucht f in x_0 gar nicht definiert zu sein oder es kann $f(x_0) \neq L$ gelten, obwohl $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ gilt.

(2.4) Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{für } x \neq 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$

Dann gilt

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2,$$

da $f(x) = x + 1$ für $x \neq 1$.

Ist f in x_0 definiert, so folgt aus (1.1) unmittelbar das

(2.5) Lemma. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 Häufungspunkt von D, $x_0 \in D$. Die Funktion f ist genau dann stetig in x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Wörtlich wie in (1.5) zeigt man das

(2.6) Lemma. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D und $L \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*
(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.
(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n \geqslant 1}$ in $D \backslash \{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Ähnlich wie bei Folgen erhält man den

(2.7) Satz. *(CAUCHY-Kriterium für Grenzwerte von Funktionen)*
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 Häufungspunkt von D. Dann sind äquivalent:
(i) Es gibt ein $L \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.
(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, so dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in D \text{ mit } 0 < |x_0 - x_i| < \delta, i = 1, 2.$$

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$. Also gilt für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $0 < |x_0 - x_i| < \delta, i = 1, 2$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - L + L - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - L| + |L - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine beliebige Folge in $D\backslash\{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Nach (ii) ist $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ eine CAUCHY-Folge. Also existiert ein $L \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$. Ist $(y_n)_{n\geqslant 1}$ eine weitere beliebige Folge in $D\backslash\{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$, so betrachte man

$$z_n = \begin{cases} x_k, & \text{falls } n = 2k, \\ y_k, & \text{falls } n = 2k-1. \end{cases}$$

$(z_n)_{n\geqslant 1}$ ist eine Folge in $D\backslash\{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert. Nach (ii) ist $(f(z_n))_{n\geqslant 1}$ eine CAUCHY-Folge, also konvergent. Weil L ein Häufungspunkt dieser Folge ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = L = \lim_{n\to\infty} f(z_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

Demnach gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ aufgrund von (2.6). □

Mit den Limitenregeln II(1.8) und (2.6) folgt der

(2.8) Satz. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 Häufungspunkt von D. Dann gilt:*
a) f besitzt für $x \to x_0$ höchstens einen Grenzwert.
b) Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, dann existiert eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0, so dass f auf $U(x_0) \cap D$ beschränkt ist.
c) Sei $g : D' \to \mathbb{R}$ und x_0 Häufungspunkt von $D \cap D'$. Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_f$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_g$, so folgt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f)(x) = \alpha L_f$.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = L_f \pm L_g$.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = L_f \cdot L_g$.

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_f}{L_g}$, *falls* $L_g \neq 0$.

Beweis. a) Man verwende II(1.7) und (2.6).
b) Man vergleiche (1.9).
c) Die Behauptung folgt aus (2.6) und II(1.8). □

Eine leichte Verallgemeinerung formulieren wir in der

(2.9) Bemerkung. Die Aussagen von (2.6), (2.7) und (2.8) gelten sinngemäß mit analogen Beweisen auch für $x_0 = \infty$, falls ∞ Häufungspunkt von D, bzw. $x_0 = -\infty$, falls $-\infty$ Häufungspunkt von D. In (2.7)(ii) verlangt man statt $\delta > 0$ die Existenz eines $R > 0$ mit der Eigenschaft

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \text{ für alle } x_1, x_2 \in D; \text{ mit } x_1 > R, x_2 > R \text{ bzw. } x_1 < -R, x_2 < -R.$$

In (2.8) b) ist f dann beschränkt auf $(R, \infty) \cap D$ bzw. $(-\infty, -R) \cap D$ für ein geeignetes $R > 0$.

Analog zur Divergenz von Folgen beschäftigen wir uns nun mit dem entsprechenden Begriff für Funktionen.

(2.10) Definition. a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ∞ Häufungspunkt von D. Man sagt, dass f *bestimmt divergent gegen* $+\infty$ [bzw. $-\infty$] ist für $x \to \infty$, falls zu jedem $M > 0$ ein $x_0 \in D$ existiert mit der Eigenschaft

$$f(x) > M \quad \text{für alle } x > x_0.$$

Man schreibt dann $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ [bzw. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$]. Analog definiert man natürlich $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ [bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$].

b) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 Häufungspunkt von D. Man nennt f *bestimmt divergent gegen* ∞ [bzw. $-\infty$] für $x \to x_0$, wenn zu jedem $M > 0$ ein $\delta = \delta(x_0, M) > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt

$$f(x) > M \quad [\text{bzw. } f(x) < -M].$$

Nun definieren wir einseitige Grenzwerte.

(2.11) Definition. a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 Häufungspunkt der Menge $D \cap (-\infty, x_0)$. Man nennt f *linksseitig konvergent gegen* $L \in \mathbb{R}$ *im Punkt* x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } 0 < x_0 - x < \delta.$$

Man schreibt dafür $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = L$.

b) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$. Man nennt f *rechtsseitig konvergent gegen* $R \in \mathbb{R}$ *im Punkt* x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - R| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } 0 < x - x_0 < \delta.$$

Man schreibt dafür $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = R$.

Wir merken an, dass sich auch linksseitige (bzw. rechtsseitige) bestimmte Divergenz in x_0 auf offensichtliche Weise definieren lassen.

Wir betrachten einfache

(2.12) Beispiele. a) Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

die Signum-Funktion. Dann gilt $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = -1$ und $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = 1$.

b) Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Eine triviale Umformulierung von (2.11) und (2.3) ergibt das

(2.13) Lemma. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$ sowie von $D \cap (x_0, \infty)$. Der Limes $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn die beiden einseitigen Limiten $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$ existieren und übereinstimmen.*

Aus (2.13) und (2.5) folgt direkt das

(2.14) Korollar. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein innerer Punkt von D. Die Funktion f ist genau dann stetig in x_0, wenn*

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

§3. Kompaktheit und Stetigkeit

Wir kommen nun zur Definition der Kompaktheit, die wir nicht allgemein fassen wollen, sondern nur in der speziellen Situation von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ als Grundmenge formulieren.

(3.1) Definition. Wir nennen $M \subset \mathbb{R}$ *kompakt*, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.

Der Illustration dienen die

(3.2) Beispiele. a) Die kompakten Intervalle sind die Intervalle $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$.
b) Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, insbesondere auch die leere Menge.
c) $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ ist nicht beschränkt, also nicht kompakt. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist nicht abgeschlossen, also nicht kompakt.

Nach II(3.13) sind endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen. Weil auch die Beschränktheit erhalten bleibt, folgt das

(3.3) Lemma. *Jede endliche Vereinigung kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist wieder kompakt.*

Wir kommen nun zu einer Charakterisierung durch Folgen.

(3.4) Satz. *Für $M \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent:*
(i) M ist kompakt, also abgeschlossen und beschränkt.
(ii) M ist folgenkompakt, d. h. jede Folge in M hat einen Häufungspunkt in M.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge in M. Dann hat $(x_n)_{n\geq 1}$ nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS II(2.4) einen Häufungspunkt $x \in \mathbb{R}$. Weil M abgeschlossen ist, gehört x nach II(3.10) zu M.
"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Wäre M nicht beschränkt, so gäbe es eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in M mit $|x_n| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die dann keinen Häufungspunkt besitzen würde. Ein Häufungspunkt x von M ist nach der Definition II(3.8) Grenzwert einer Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ in $M\backslash\{x\}$. Weil x nach II(2.5) der einzige Häufungspunkt von $(x_n)_{n\geqslant 1}$ ist, folgt $x \in M$ aus (ii). Also ist M nach II(3.10) auch abgeschlossen und somit kompakt. $\square$

Wir nutzen diese Charakterisierung zur Beschreibung des Verhaltens unter stetigen Abbildungen

(3.5) Korollar. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $K \subset D$ kompakt. Dann ist auch $f(K)$ kompakt.*

Beweis. Sei $(y_n)_{n \geqslant 1}$ eine Folge in $f(K)$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \geqslant 1}$ in K mit $f(x_n) = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil K kompakt ist, existiert nach (3.4) eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \geqslant 1}$, die gegen ein $x \in K$ konvergiert. Aus (1.5) erhält man mit der Stetigkeit von f auch

$$\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x) \in f(K).$$

Demnach ist $f(x)$ ein Häufungspunkt von $(y_n)_{n \geqslant 1}$ in $f(K)$ und $f(K)$ nach (3.4) kompakt. □

Eine weitere, ganz wesentliche Anwendung formulieren wir in dem

(3.6) Satz. *Ist $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $K \neq \varnothing$, so besitzt K ein Minimum und ein Maximum, d. h. es gibt $a, b \in K$ mit*

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{für alle } x \in K.$$

Beweis. K ist beschränkt, so dass $\sup K$ und $\inf K$ in $\mathbb{R}$ existieren. Nach II(3.14) sind $\sup K$ und $\inf K$ Häufungspunkte von K, die wegen der Abgeschlossenheit nach II(3.10) zu K gehören und somit das Maximum und Minimum von K sind. □

Als direkte Konsequenz aus (3.5) und (3.6) erhalten wir das äußerst wichtige

(3.7) Korollar. *(Satz vom Minimum und Maximum)*
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $K \subset D$ kompakt, $K \neq \varnothing$. Dann nimmt f auf K Minimum und Maximum an, d. h. es gibt $x_m, x_M \in K$ mit

$$f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) \quad \text{für alle } x \in K.$$

Die Voraussetzung der Kompaktheit von K ist dabei ganz wesentlich, da z. B. die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, stetig ist, aber $f|_{(-1,1)}$ wegen $f((-1,1)) = [0,1)$ zwar ein Minimum, aber kein Maximum annimmt.

Unser nächstes Ziel ist eine Zusammenhangseigenschaft.

(3.8) [. *Zwischenwertsatz]* (Bernhard BOLZANO (1781-1848))
Seien $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a,b] \subset D$.
a) Gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so existiert ein $c \in (a,b)$ mit

$$f(c) = 0.$$

b) Sei $m = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ und $M := \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Dann gilt

$$f([a,b]) = [m, M].$$

Die Aussage b) bedeutet, dass Bilder kompakter Intervalle unter stetigen Funktionen wieder kompakte Intervalle sind.

Beweis. a) Sei $S := \{x \in [a,b] \mid f(x) \leqslant 0\}$. Wegen $S \subset [a,b]$ ist S beschränkt und aus $a \in S$ folgt $S \neq \varnothing$. Demnach existiert

$$c := \sup S.$$

Zu zeigen bleibt $a < c < b$ und $f(c) = 0$. Nach II(3.14) und II(3.8) existiert eine Folge $(x_n)_{n \geqslant 1}$ in S, die gegen c konvergiert. Weil $[a,b]$ abgeschlossen ist und S umfasst, folgt $c \in [a,b]$. Aus $f(x_n) \leqslant 0$ und der Stetigkeit von f ergibt sich mit (1.5)

$$f(c) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \leqslant 0,$$

also auf jeden Fall auch $c < b$.
Wir führen den Beweis indirekt und nehmen $f(c) < 0$ an. Nach (1.9) b) existiert dann ein $\delta > 0$, so dass $f(x) < 0$ für alle $x \in [a,b] \cap U_\delta(c)$ und damit $[a,b] \cap U_\delta(c) \subset S$. Wegen $c < b$ existiert ein $x \in S$ mit $x > c$, was $c = \sup S$ widerspricht. Also muss $f(c) = 0$ und damit auch $a < c$ gelten.
b) Nach (3.7) existieren $c, d \in [a,b]$ mit $f(c) = m$ und $f(d) = M$. Sei ohne Einschränkung $c < d$, da man sonst $-f$ betrachten kann. Für $\mu \in (m, M)$ wende man a) auf die Funktion

$$g : D \to \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x) - \mu,$$

an. Aus $g(c) < 0$ und $g(d) > 0$ folgt die Existenz eines $\xi \in (c,d)$ mit $g(\xi) = 0$, also $f(\xi) = \mu$. Wegen $f([a,b]) \subset [m, M]$ erhält man daraus die Behauptung. $\square$

Als Anwendung des Zwischenwertsatzes erhalten wir das

(3.9) Korollar. *Sei $p(X)$ ein reelles Polynom ungeraden Grades. Dann hat $p(X)$ eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0$, n ungerade und ohne Einschränkung $a_n > 0$. Dann gilt $p(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right)$ für $x \neq 0$ sowie

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) = a_n > 0.$$

Weil n ungerade ist, existiert ein $a < 0$ mit $p(a) < 0$ und ein $b > 0$ mit $p(b) > 0$. Da Polynome stetig sind, existiert nach (3.8) ein $\xi \in (a, b)$ mit $p(\xi) = 0$. $\square$

Wir behandeln nun den angekündigten Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Injektivität.

(3.10) Lemma. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige, injektive Funktion. Ist $I \subset D$ ein Intervall, so ist $f\big|_I$ streng monoton.*

Beweis. Wäre $f\big|_I$ nicht streng monoton, so gäbe es $x_1, x_2, x_3 \in I$ mit $x_1 < x_2 < x_3$ und $f(x_1) \leqslant f(x_2), f(x_2) \geqslant f(x_3)$ bzw. $f(x_1) \geqslant f(x_2), f(x_2) \leqslant f(x_3)$. Wir nehmen den ersten Fall an. Aus der Injektivität von f folgt $f(x_1) < f(x_2)$ und $f(x_2) > f(x_3)$. Dann existiert ein $y \in (f(x_1), f(x_2)) \cap (f(x_3), f(x_2))$. Nach dem Zwischenwertsatz (3.8) gibt es ein $x \in (x_1, x_2)$ und ein $x' \in (x_2, x_3)$ mit $f(x) = f(x') = y$. Das widerspricht der Injektivität von f. Den zweiten Fall behandelt man analog. $\square$

Als Verschärfung der Stetigkeit formulieren wir die

(3.11) Definition. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in D \text{ mit } |x_1 - x_2| < \delta.$$

Für $E \subset D$ nennt man f *gleichmäßig stetig auf E*, wenn $f\big|_E$ gleichmäßig stetig ist.

Man beachte, dass δ nur von ε, nicht aber vom Argument x abhängt und somit global gewählt werden kann. Eine gleichmäßig stetige Funktion ist trivialerweise auch stetig. Die Umkehrung gilt nicht.

(3.12) Beispiele. a) $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, ist als rationale Funktion stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Sei nämlich $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$. Für $x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt nämlich $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$ und

$$|f(x_1) - f(x_2)| = n - \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{\delta}{2}} = \frac{n\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2} + \frac{1}{n}} > 1,$$

falls $n\frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{2} + \frac{1}{n}$, d. h. $n^2 - n - \frac{2}{\delta} > 0$, d. h. $n > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{\delta} + \frac{1}{4}}$.
b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$, ist gleichmäßig stetig, denn zu $\varepsilon > 0$ wählt man $\delta = \varepsilon/2$ und erhält für $|x_1 - x_2| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left|\frac{1}{x_1^2+1} - \frac{1}{x_2^2+1}\right| = \frac{|x_2^2 - x_1^2|}{(x_1^2+1)\cdot(x_2^2+1)} \\ &\leqslant |x_1 - x_2| \cdot \frac{|x_1| + |x_2|}{(x_1^2+1)\cdot(x_2^2+1)} \leqslant |x_1 - x_2| \cdot \left(\frac{|x_1|}{x_1^2+1} + \frac{|x_2|}{x_2^2+1}\right) \\ &\leqslant |x_1 - x_2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

da offensichtlich $\frac{|x|}{1+x^2} \leqslant 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
c) Man nennt $f : D \to \mathbb{R}$ LIPSCHITZ-*stetig* (nach Rudolf LIPSCHITZ (1832-1903)) oder *dehnungsbeschränkt*, wenn ein $L > 0$ existiert, so dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L \cdot |x_1 - x_2| \quad \text{für alle } \ x_1, x_2 \in D.$$

In diesem Fall ist f gleichmäßig stetig, wenn man zu $\varepsilon > 0$ nun $\delta := \varepsilon/L$ wählt. Eine zentrale Aussage ist nun der folgende

(3.13) Satz. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f gleichmäßig stetig auf jedem Kompaktum $K \subset D$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass f nicht gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum $K \subset D$ ist. Dann gibt es ein $\rho > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0$ Punkte $x(\delta), y(\delta) \in K$ existieren mit $|x(\delta) - y(\delta)| < \delta$ und $|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geqslant \rho$. Zu $\delta = \frac{1}{n}$ wählt man also $x_n, y_n \in K$ mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \rho \quad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N}.$$

Weil K kompakt ist, hat die Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nach (3.4) einen Häufungspunkt $z \in K$. Also existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = z$. Wegen $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leqslant \frac{1}{k}$ ist $(x_{n_k} - y_{n_k})_{k\geqslant 1}$ eine Nullfolge, so dass auch

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} - \lim_{k\to\infty} (x_{n_k} - y_{n_k}) = z$$

folgt. Daraus ergibt sich mit der Stetigkeit von f

$$\lim_{k\to\infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) - f(\lim_{k\to\infty} y_{n_k}) = f(z) - f(z) = 0$$

im Widerspruch zu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \rho$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Folglich muss f gleichmäßig stetig auf K sein. $\square$

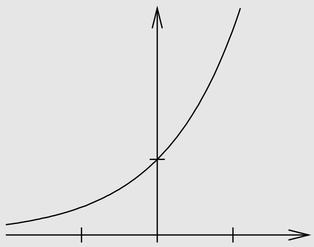
§4. Exponentialfunktion und Logarithmus

In diesem Paragrafen werden wir uns intensiver mit den elementaren Funktionen beschäftigen. Dazu betrachten wir zunächst die Einschränkung der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$.

(4.1) Satz. *Es gilt*

a) Die reelle Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$



ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.
b) Die Exponentialfunktion wächst schneller als jedes Polynom. Ist $P(X)$ ein reelles Polynom, so gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{\exp(x)} = \lim_{x\to-\infty} P(x) \cdot \exp(x) = 0.$$

Beweis. a) Die strenge Monotonie (und damit die Injektivität) wurde bereits in III(3.3) bewiesen. Aus der Reihendarstellung folgt $\exp(x) \geqslant x$ für alle $x \geqslant 0$, also $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ und

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{w\to\infty} \frac{1}{\exp(w)} = 0.$$

Da exp nach (1.13) stetig ist, folgt $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ aus dem Zwischenwertsatz (3.8).
b) Sei $P(X)$ ein Polynom vom Grad n. Nach I(3.8) gibt es ein $c > 0$ und ein $R > 0$ mit $|P(x)| \leqslant c|x|^n$ für alle $|x| \geqslant R$. Aufgrund der Reihendarstellung gilt $\exp(x) > \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$ für alle $x \geqslant 0$, also

$$\left|\frac{P(x)}{\exp(x)}\right| \leqslant \frac{cx^n}{\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}} = \frac{c\cdot(n+1)!}{x} \qquad \text{für alle } x \geqslant R.$$

Es folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{\exp(x)} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x)\exp(x) = \lim_{w\to\infty} \frac{P(-w)}{\exp(w)} = 0. \qquad \square$$

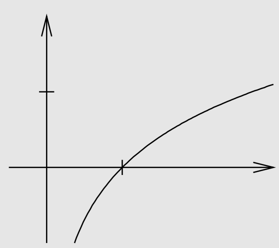
Aus der Bijektivität folgt die Existenz der Umkehrfunktion.

(4.2) Definition. Die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$
heißt *natürlicher Logarithmus* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

Natürlich kann man nun die Eigenschaften der Exponentialfunktion auf den Logarithmus übertragen.

(4.3) Satz. *Die Funktion* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Für alle* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *und alle* $w \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x,$$
$$\exp(\ln x) = x, \qquad \ln(\exp(w)) = w.$$



Es gilt $\ln 1 = 0$ *und* $\ln e = 1$ *sowie*

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x\downarrow 0} \ln x = -\infty.$$

Beweis. Da ln die Umkehrfunktion von exp ist, gilt $\ln(\exp(w)) = w$ für alle $w \in \mathbb{R}$ und $\exp(\ln x) = x$ für alle $x > 0$. Sei $u := \ln x, v := \ln y$, also $\exp(u) = x, \exp(v) = y$. Dann gilt $\exp(u+v) = \exp(u) \cdot \exp(v) = xy$, also

$$\ln(xy) = u + v = \ln x + \ln y.$$

Aus $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$ erhält man $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$ sowie

$$\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0, \quad \text{also} \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x.$$

Strenge Monotonie und Stetigkeit ergeben sich aus I(3.12) und (1.15). Weil ln streng monoton wachsend ist mit $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$, folgt notwendig

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow 0} \ln x = -\infty.$$

□

Wir verwenden schon lange die Bezeichnung $e^x := \exp(x)$. Allgemeiner ist die folgende

(4.4) Definition. Für $a \in \mathbb{R}_+^*$ ist die *Exponentialfunktion* zur Basis a definiert durch

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, \; x \mapsto a^x := \exp(x \ln a).$$

Wegen $\ln 1 = 0$ gilt natürlich $1^x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus $\exp(0) = 1$ folgt $a^0 = 1$ für alle $a > 0$, wie bereits früher vereinbart.

(4.5) Satz. *Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ gilt:*
a) Die Exponentialfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto a^x$, ist stetig.
b) $\ln(a^x) = x \cdot \ln a$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
c) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$, $(ab)^x = (a^x) \cdot (b^x)$, $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}, x, y \in \mathbb{R}$.
d) $a^0 = 1, a^n = \prod_{j=1}^{n} a$ und $a^{-n} = (a^n)^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
e) $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ für alle $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.
f) $e^x = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
g) Die Exponentialfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto a^x$, ist für $a \neq 1$ bijektiv und für $a > 1$ [bzw. $a < 1$] streng monoton wachsend [bzw. streng monoton fallend].

Wegen d) stimmt die Definition von a^x für $x \in \mathbb{Z}$ mit den früheren Definitionen überein.

Beweis. a) Die Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x \ln a$, und exp sind stetig, also auch deren Komposition $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$, nach (1.9).
b) Aus $\exp(x \ln a) = a^x$ folgt $\ln(a^x) = x \ln a$.
c) Man verwendet die entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion in den folgenden Rechnungen

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= \exp((x+y)\ln a) = \exp(x \ln a) \cdot \exp(y \ln a) = a^x \cdot a^y, \\ (a^x)^y &= \exp(y \ln(a^x)) = \exp(yx \ln a) = a^{xy} \\ (ab)^x &= \exp(x \ln(ab)) = \exp(x(\ln a + \ln b)) = a^x \cdot b^x, \\ \left(\frac{1}{a}\right)^x &= (a^{-1})^x = a^{-x}. \end{aligned}$$

d) Wir verwenden eine Induktion nach n und c).
e) Es gilt $a^{p/q} > 0$ und $\left(a^{p/q}\right)^q = a^p$ nach b), also $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ nach I(2.28).
f) Man hat $e^x = \exp(x \ln e) = \exp(x)$.
g) Wegen $\ln a \neq 0$ ergibt sich die Surjektivität aus der Surjektivität der Exponentialfunktion. Aus $a > 1$ folgt $\ln a > \ln 1 = 0$. Aus $x_1 < x_2$ erhält man $x_1 \ln a < x_2 \ln a$ und $a^{x_1} < a^{x_2}$ mit der strengen Monotonie von exp.
Im Fall $0 < a < 1$ hat man $\ln a < 0$ und verfährt analog. □

Nun berechnen wir einige Grenzwerte.

(4.6) Satz. *a) Für $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ gilt*

$$\lim_{x \downarrow 0} x^\alpha = 0, \quad \lim_{x \downarrow 0} x^{-\alpha} = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} x^\alpha = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} x^{-\alpha} = 0.$$

b) Der Logarithmus wächst schwächer als jede positive Potenz, d. h. für $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{x \downarrow 0} x^\alpha \ln x = 0.$$

Beweis. a) Sei $(x_n)_{n \geqslant 1}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}_+^*$. Dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha \ln x_n = -\infty$ nach (4.3). Aus $\lim\limits_{y \to -\infty} \exp(y) = 0$ nach (4.1) folgt

$$\lim_{n \to \infty} x_n^\alpha = \lim_{n \to \infty} \exp(\alpha \ln x_n) = 0.$$

Aus $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$ ergibt sich $\lim\limits_{x \downarrow 0} x^{-\alpha} = \infty$. Der Rest folgt analog.
b) Sei $(x_n)_{n \geqslant 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}_+^*$, die bestimmt gegen ∞ divergiert. Für $y_n :=$

$\alpha \ln x_n$ gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ nach (4.3). Wegen $x_n^\alpha = \exp(y_n)$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha} y_n \exp(-y_n) = 0$$

aus (4.1). Andererseits ergibt sich

$$\lim_{x\downarrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{y\to\infty} \left(\frac{1}{y^\alpha}\right) \ln \frac{1}{y} = -\lim_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y^\alpha} = 0. \qquad \square$$

Abschließend notieren wir die

(4.7) Bemerkung. Wegen (4.6) a) definieren wir

$$0^\alpha := 0 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0.$$

Wegen der Konvention $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also auch $0^0 = 1$, ist dann die Funktion

$$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^\alpha,$$

für jedes $\alpha \geqslant 0$ stetig.

§5. Trigonometrische Funktionen

Wir hatten die Winkelfunktionen

$$\sin x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{und} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x \in \mathbb{R},$$

bereits in III(3.6) studiert. Nun betrachten wir zunächst Näherungen.

(5.1) Lemma. *Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2N(x)}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2N+1}(x),$$

wobei für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leqslant n+1$ gilt

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!},\ n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Es gilt

$$r_{2N}(x) = \sum_{k=N}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = (-1)^N \frac{x^{2N}}{(2N)!}(1 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots)$$

mit

$$a_1 = \frac{x^2}{(2N+1)(2N+2)}, \ a_{k+1} = a_k \cdot \frac{x^2}{(2N+2k+1)(2N+2k+2)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für $|x| \leqslant 2N+1$ gilt $1 > a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$ und $0 \leqslant a_k \leqslant a_1^k$, $k \in \mathbb{N}$. Also ist $(a_k)_{k\geqslant 0}$, $a_0 := 1$, eine monoton fallende Nullfolge. Aus dem LEIBNIZ-Kriterium III(1.10) erhält man

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leqslant a_0 = 1.$$

Es folgt

$$|r_{2N}(x)| \leqslant \frac{x^{2N}}{(2N)!} \quad \text{für} \quad |x| \leqslant 2N+1.$$

Die Abschätzung für den Sinus verläuft analog. □

Als einfache Anwendung notieren wir das

(5.2) Korollar. *Es gilt*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x) - 1}{x} = 0.$$

Beweis. Für $0 < |x| \leqslant 3$ gilt nach (5.1)

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = \left|\frac{r_3(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{6}x^2 \quad \text{und} \quad \left|\frac{(\cos x) - 1}{x}\right| = \left|\frac{r_2(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{2}|x|.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Die nächste Anwendung betrifft den Cosinus.

(5.3) Lemma. *a)* $\cos 2 \leqslant -\frac{1}{3}$.
b) $\sin x > 0$ *für alle* $x \in (0, 2]$.
c) $\cos\big|_{[0,2]}$ *ist streng monoton fallend.*

Beweis. a) Nach (5.1) gilt

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + r_4(x) \quad \text{mit} \quad |r_4(x)| \leqslant \frac{1}{24}x^4 \quad \text{für} \ |x| \leqslant 5.$$

Also hat man $\cos 2 = -1 + r_4(2), |r_4(2)| \leqslant \frac{2}{3}$, d. h. $\cos 2 \leqslant -\frac{1}{3}$.
b) Für $x \neq 0$ gilt

$$\sin x = x + r_3(x) = x\left(1 + \frac{r_3(x)}{x}\right) \quad \text{mit} \quad |\frac{r_3(x)}{x}| \leqslant \frac{x^2}{6} \leqslant \frac{2}{3} \quad \text{für} \ x \in (0,2]$$

nach (5.1). Es folgt $\sin x \geqslant \frac{1}{3}x$ für $x \in [0,2]$.
c) Für $u := \frac{x+y}{2}$ und $v := \frac{x-y}{2}$ gilt nach dem Additionstheorem in III(3.6)

$$\begin{aligned}
\cos x - \cos y &= \cos(u+v) - \cos(u-v) \\
&= (\cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v) - \big(\cos u \cdot \cos(-v) - \sin u \cdot \sin(-v)\big) \\
&= -2 \sin \cdot u \sin v.
\end{aligned}$$

Für $0 \leqslant y < x \leqslant 2$ erhält man damit

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right) < 0$$

nach b), da $0 < \frac{x-y}{2} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant 2$. Es folgt $\cos x < \cos y$. □

Daraus folgert man das

(5.4) Korollar. cos *hat genau eine Nullstelle im Intervall* $[0,2]$.

Beweis. Wegen $\cos 0 = 1$ und $\cos 2 < 0$ folgt die Existenz der Nullstelle aus dem Zwischenwertsatz (1.10) b) und die Eindeutigkeit aus der strengen Monotonie gemäß (5.3). □

Diese Aussage nutzen wir für die

(5.5) Definition. Die nach (5.4) eindeutig bestimmte Nullstelle von cos im Intervall $[0,2]$ wird mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet. π heißt LUDOLPH*sche Zahl*, nach Ludolph VAN CEULEN (1540-1610).

Es gilt

$$\pi = 3,14159265\ldots .$$

Zu beachten ist, dass unsere (auf E. LANDAU zurückgehende) Einführung von π zunächst nichts mit Kreisumfang, Kreisfläche o. Ä. zu tun hat. Siehe aber Kapitel VI, §2 und Analysis II.

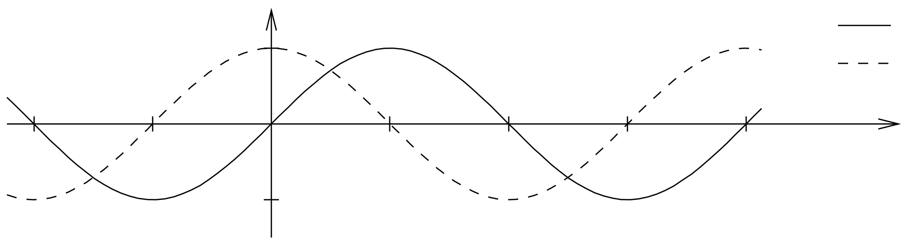
Wegen $\cos 1 \geqslant 1 - \frac{1}{2} - |r_4(1)| \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{24} > 0$ haben wir $2 < \pi < 4$ bewiesen. Die ersten Eigenschaften von π erhalten wir in dem

(5.6) Satz. *a) Es gilt*

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\exp(ix)$	1	$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+i)$	$\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$	i	-1	$-i$	1

b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos(z+2\pi) = \cos z, \qquad \sin(z+2\pi) = \sin z,$$
$$\cos(z+\pi) = -\cos z, \qquad \sin(z+\pi) = -\sin z,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z.$$



Beweis. a) Es gilt $\sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1$ nach III(3.6). Wegen $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ nach (5.5) und $\sin \frac{\pi}{2} > 0$ nach (5.3) hat man $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Die Werte $\sin x, \cos x$ für $x = \pi, 3\pi/2, 2\pi$ folgen daraus mit dem Additionstheorem. Für $A := \sin \frac{\pi}{4}$ gilt nach dem Additionstheorem und (5.3)

$$1 = \sin \tfrac{\pi}{2} = \sin(2\tfrac{\pi}{4}) = 2 \sin \tfrac{\pi}{4} \cos \tfrac{\pi}{4} = 2A\sqrt{1 - A^2}\,,$$

also wegen $A \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
&0 = A^4 - A^2 + \tfrac{1}{4} = \left(A^2 - \tfrac{1}{2}\right)^2, \quad A^2 = \tfrac{1}{2}, \quad A = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\
&\cos\tfrac{\pi}{4} = \sqrt{1 - \sin^2\tfrac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Für $B = \sin\frac{\pi}{6}$ hat man analog

$$\begin{aligned}
1 &= \sin(3\tfrac{\pi}{6}) = \sin\tfrac{2\pi}{6}\cos\tfrac{\pi}{6} + \cos\tfrac{2\pi}{6}\sin\tfrac{\pi}{6} \\
&= 3\sin\tfrac{\pi}{6}\cos^2\tfrac{\pi}{6} - \sin^3\tfrac{\pi}{6} \\
&= 3B - 4B^3
\end{aligned}$$

also

$$0 = B^3 - \tfrac{3}{4}B + \tfrac{1}{4} = (B - \tfrac{1}{2})^2(B+1).$$

Aus $B > 0$ folgt $B = \frac{1}{2}$ und

$$\cos\tfrac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \sin^2\tfrac{\pi}{6}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Die Werte für $\frac{\pi}{3}$ folgen mit dem Additionstheorem und schließlich bekommt man die letzte Zeile aus

$$\exp(ix) = \cos x + i\sin x.$$

b) Man verwende die Additionstheoreme III(3.6) sowie a). □

Als Nächstes bestimmen wir die Nullstellen von Sinus und Cosinus sowie die Periodenmenge der Exponentialfunktion.

(5.7) Korollar. *a)* $\{z \in \mathbb{C} \mid \sin z = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}\pi.$
b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \cos z = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi.$
c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \exp(z) = 1\} = \{2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\} = 2\pi i\mathbb{Z}.$

Beweis. a) "$\supset$" Es gilt $\sin\pi = \sin 2\pi = 0$ und $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ nach (5.6). Also erhält man $\sin(k\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit einer Induktion.
"$\subset$" Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $y > 0$. Nach III(3.5) gilt

$$|\sin z| = |\sin(-z)| = \left|\frac{1}{2i}(\exp(-iz) - \exp(iz))\right| \geqslant \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) > 0.$$

Demnach sind alle Nullstellen des Sinus reell.
Nach Definition von $\frac{\pi}{2}$ und wegen $\cos(-x) = \cos x$ gilt $\cos x > 0$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Wegen $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ hat man

$$\sin x > 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi.$$

Aus $\sin(x+\pi) = -\sin x$ folgt $\sin x < 0$ für $\pi < x < 2\pi$. Demnach sind 0 und π die einzigen Nullstellen des Sinus im Intervall $[0, 2\pi)$. Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig mit $\sin x = 0$ und $n := \left[\frac{x}{2\pi}\right]$. Dann gilt

$$x = 2n\pi + \xi \quad \text{mit} \quad 0 \leqslant \xi < 2\pi.$$

Aus $\sin x = \sin \xi$ folgt $\xi \in \{0, \pi\}$, also $x = 2n\pi$ oder $x = (2n+1)\pi$, d. h. $x \in \mathbb{Z}\pi$.
b) Man verwende a) und $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
c) Es gilt $|\exp(z)| = e^{Re(z)}$. Also ist $\exp(z) = 1$ äquivalent zu $z = iy$ und

$$\exp(iy) = \cos y + i \sin y = 1,$$

d. h. zu $\sin y = 0$ und $\cos y = 1$. Nun verwendet man a) und $\cos(k\pi) = (-1)^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Also muss $z = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$, gelten. $\square$

Damit können wir auch die anderen (vielleicht noch) von der Schule bekannten Winkelfunktionen einführen.

(5.8) Definition. Wir definieren den *Tangens* und *Cotangens* durch

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},\ z \in \mathbb{C}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right), \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}\pi.$$

Nach (5.6) gilt insbesondere

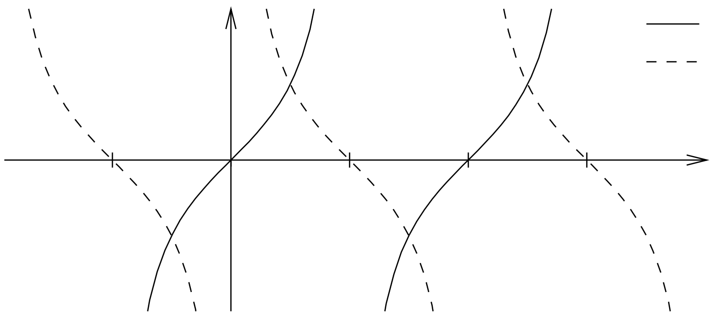
$$\tan 0 = 0, \quad \tan\tfrac{\pi}{4} = 1, \quad \cot\tfrac{\pi}{4} = 1, \quad \cot\tfrac{\pi}{2} = 0, \quad \tan z = \frac{1}{\cot z},\ \ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}\pi/2\,.$$

Wegen $\sin(z+\pi) = -\sin z$ und $\cos(z+\pi) = -\cos z$ folgt mit (5.7) und (5.6) sofort das

(5.9) Lemma. *a) Es gilt*

$$\begin{aligned} \tan(z+\pi) &= \tan z = -\tan(-z) && \textit{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \left(\tfrac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right), \\ \cot(z+\pi) &= \cot z = -\cot(-z) && \textit{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi, \\ \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - z\right) &= \cot z && \textit{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi. \end{aligned}$$

b) $\{z \in \mathbb{C}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi\right) \mid \tan z = 0\} = \mathbb{Z}\pi$, $\{z \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{Z}\pi) \mid \cot z = 0\} = \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$.



Nun wenden wir uns noch einmal den reellen Funktionen und ihren Umkehrfunktionen zu.

(5.10) Satz (und Definition). *a) Die Funktion* cos *ist im Intervall* $[0,\pi]$ *stetig, streng monoton fallend und bildet es bijektiv auf das Intervall* $[-1,1]$ *ab. Die Umkehrfunktion*

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

ist stetig, streng monoton fallend und heißt Arcus-Cosinus.
b) Die Funktion sin *ist im Intervall* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *stetig, streng monoton wachsend und bildet es bijektiv auf das Intervall* $[-1,1]$ *ab. Die Umkehrfunktion*

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

ist stetig, streng monoton wachsend und heißt Arcus-Sinus.
c) Die Funktion tan *ist im Intervall* $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *stetig, streng monoton wachsend und bildet es bijektiv auf* $\mathbb{R}$ *ab. Die Umkehrfunktion*

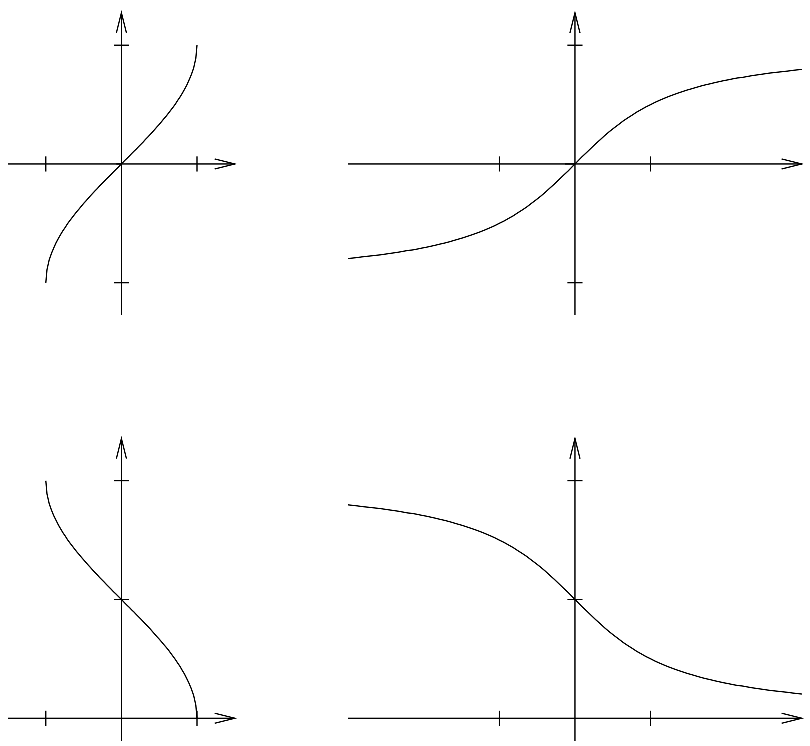
$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

ist stetig, streng monoton wachsend und heißt Arcus-Tangens.
d) Die Funktion cot *ist im Intervall* $(0, \pi)$ *stetig, streng monoton fallend und bildet es bijektiv auf* $\mathbb{R}$ *ab. Die Umkehrfunktion*

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

ist stetig, streng monoton fallend und heißt Arcus-Cotangens.
e) Es gilt

$$\begin{aligned} \arccos x + \arcsin x &= \tfrac{\pi}{2} \quad \textit{für alle} \;\; x \in [-1, 1], \\ \operatorname{arccot} x + \arctan x &= \tfrac{\pi}{2} \quad \textit{für alle} \;\; x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Beweis. a) Nach (5.3) ist cos auf $[0, 2]$, also insbesondere auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton fallend, wegen $\cos x = -\cos(\pi - x)$ aber auch auf $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Wegen $\cos 0 = 1$ und $\cos \pi = -1$ wird $[0, \pi]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ abgebildet. Die Eigenschaften der Umkehrfunktion folgen in allen Fällen aus I(3.12) und (1.15).

b) Wegen $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ erhält man die Behauptung aus a).
c) Sei $0 \leqslant x < y < \frac{\pi}{2}$. Dann gilt $0 \leqslant \sin x < \sin y$ und $\cos x > \cos y > 0$, also

$$0 \leqslant \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y.$$

Wegen $\tan(-x) = -\tan x$ ist tan auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend.
Sei $(x_n)_{n \geqslant 1}$ eine Folge in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$. Dann gilt $\cos x_n > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n = 1$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \tan x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{\cos x_n} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \tan(-x_n) = -\infty.$$

Also wird das Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abgebildet, da mit sin und cos auch tan nach (1.9) stetig ist.
d) Man verwende c) und $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ aufgrund von (5.9).
e) Sei $\varphi = \arcsin x$ für $x \in [-1, 1]$. Dann gilt $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ und $\sin\varphi = x$. Es folgt $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = x$ aus (5.6) und $\frac{\pi}{2} - \varphi \in [0, \pi]$, also $\frac{\pi}{2} - \varphi = \arccos x$.
Die zweite Identität beweist man analog mit (5.9). □

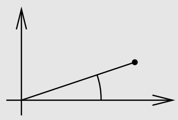
Als spezielle Werte notieren wir gemäß (5.6)

$$\arctan 1 = \operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \arctan \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = \operatorname{arccot} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \quad \arctan \sqrt{3} = \operatorname{arccot} \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Nun geben wir eine Anwendung auf die Darstellung komplexer Zahlen.

(5.11) [. *Satz über die Polarkoordinaten]*
Jedes $z \in \mathbb{C}$ lässt sich in der Form

(V.1)
$$(*) \qquad z = r\,\exp(i\varphi) \quad \textit{mit} \quad r = |z| \in \mathbb{R}_+ \quad \textit{und} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$



darstellen. Ist $z \neq 0$, so ist die Darstellung eindeutig.

Man nennt $(*)$ die *Polarkoordinatendarstellung* von z. Dabei ist r die *Länge* und φ das *Argument* von z.

Beweis. Für $z = 0$ gilt $z = 0 \cdot \exp(i\varphi)$ für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$. Sei nun

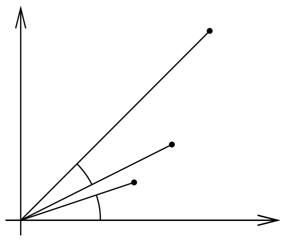
$$z \neq 0, \quad r = |z| \in \mathbb{R}_+^*, \quad w := \frac{z}{r} \in \mathbb{C}, \quad |w| = \frac{|z|}{r} = 1.$$

Ist $w = u + iv$, so folgt $u^2 + v^2 = |w|^2 = 1$, also $u \in [-1, 1]$. Sei $\varphi = \arccos u \in [0, \pi]$ nach (5.10). Wegen $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = 1 - u^2 = v^2$ folgt $\sin \varphi = v$ oder $\sin \varphi = -v$. Im 1. Fall folgt die Darstellung. Im 2. Fall mit $v \neq 0$ gilt $\varphi \neq 0$ und $\cos(2\pi - \varphi) = \cos \varphi = u$, $\sin(2\pi - \varphi) = v$, also $\exp(i(2\pi - \varphi)) = w$, $2\pi - \varphi \in [0, 2\pi)$.
Gilt $r \exp(i\varphi) = r \exp(i\psi)$, so folgt $\exp(i(\varphi - \psi)) = 1$, also $i(\varphi - \psi) = 2\pi i k, k \in \mathbb{Z}$, aus (5.7). Wegen $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$ ergibt sich $\varphi = \psi$, also die Eindeutigkeit. $\square$

Man kann mit $(*)$ die Multiplikation komplexer Zahlen geometrisch interpretieren. Aus $z = re^{i\varphi}$ und $w = r'e^{i\psi}$ folgt

$$z \cdot w = rr' \cdot e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Man multipliziert die Längen und addiert die Argumente (Winkel).

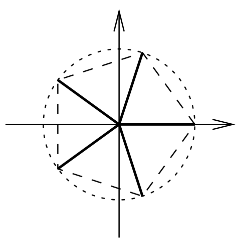


(5.12) Korollar. *(Einheitswurzeln)*
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $z^n = 1$ genau n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$, nämlich

$$z = \zeta_k = \exp\left(2\pi i k / n\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Beweis. Wegen $\zeta_k^n = \exp(2\pi i k) = 1$ sind die ζ_k Lösungen und nach (5.11) paarweise verschieden. Das Polynom $Z^n - 1$ hat nach I(3.6) aber höchstens n Nullstellen. Also haben wir bereits alle Lösungen. $\square$

Geometrisch bilden die ζ_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks.



Damit kommen wir auch auf die Folgen $(A_n)_{n \geqslant 1}$, $(B_n)_{n \geqslant 1}$ aus dem Satz von ARCHIMEDES zurück.

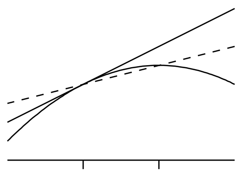
Kapitel VI.

Differentialrechnung

In diesem Kapitel soll die Differentialrechnung von reellwertigen Funktionen einer reellen Variablen beschrieben werden. Dazu sei stets $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$.

§1. Die Ableitung einer Funktion

Geometrisch gesehen, möchte man eine Funktion in der Nähe eines Punktes durch eine Gerade approximieren. Die Tangente liefert die beste Approximation. Man versucht nun, die Steigung der Tangente als Grenzwert der Steigung von Sekanten auszurechnen. Für $h \neq 0$ ist die Steigung der Sekante, also der Geraden durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, gegeben durch



$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

(1.1) Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein innerer Punkt von $D \subset \mathbb{R}$. Man nennt f in x_0 *differenzierbar*, wenn der Limes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

[im Sinne von IV(2.3)] existiert. Dieser Grenzwert heißt *Ableitung* von f im Punkt x_0 oder an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet. Man nennt dann die Gerade

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)\}$$

die *Tangente* an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Die Tangente ist eine lineare Approximation an den Graphen von f. Der leicht zu berechnende Wert $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ sollte in der Nähe des i. A. schwer zu berechnenden Funktionswertes $f(x)$ liegen, solange x nahe bei x_0 ist. Diesen anschaulichen Sachverhalt werden wir in (1.3) mathematisch präzisieren.

Elementar sind die

(1.2) Beispiele. a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

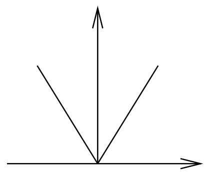
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h \xrightarrow[h\to 0]{} 2x_0.$$

Also ist f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = 2x_0$.
b) Wir betrachten $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\frac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h} = \exp(x_0) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x_0) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} h^{k-1} \xrightarrow[h\to 0]{} \exp(x_0),$$

da die Potenzreihe in h stetig ist. Also ist exp in x_0 differenzierbar mit $\exp'(x_0) = \exp(x_0)$.
c) Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, und $x_0 = 0$. Dann gilt

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{für } h > 0, \\ -1 & \text{für } h < 0. \end{cases}$$



Also existiert kein Limes für $h \to 0$. Demnach ist f im Punkt 0 nicht differenzierbar. f ist aber stetig, insbesondere auch im Punkt 0.
d) Wir betrachten $f(x) = \sin x$. Dann folgt aus den Additionstheoremen III(3.6) sowie IV(5.2)

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos x. \end{aligned}$$

Also ist der Sinus differenzierbar in jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin' x = \cos x$. Analog zeigt man, dass der Cosinus differenzierbar in jedem $x \in \mathbb{R}$ ist mit $\cos' x = -\sin x$.

Anschaulich gesprochen, hat der Graph einer differenzierbaren Funktion keine "Ecken".

Wir fügen eine physikalische Interpretation hinzu. Die Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto s(t)$, gebe den zurückgelegten Weg zum Zeitpunkt t an. Der Differenzenquotient

$\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ beschreibt die Durchschnittsgeschwindigkeit in der Zeit zwischen t und $t+h$. Mit dem Limes $h \to 0$ erhält man natürlich die Momentangeschwindigkeit $s'(t)$ zum Zeitpunkt t.

Wir geben nun eine Charakterisierung der Differenzierbarkeit.

(1.3) Satz. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein innerer Punkt von $D \subset \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist differenzierbar in x_0.

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

(iii) Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft

$$\left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - a\right| < \varepsilon \quad \textit{für alle } 0 < |h| < \delta.$$

(iv) Es gibt ein $b \in \mathbb{R}$ und eine in x_0 stetige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = 0$ und

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)b + (x - x_0)\varphi(x) \quad \textit{für alle } x \in D.$$

In diesem Fall gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b = f'(x_0).$$

Beweis. "(i) $\Leftrightarrow$ (ii)" Wir setzen $h = x - x_0$, also $x = x_0 + h$. Dann ist $h \to 0$ äquivalent zu $x \to x_0$.
"(i) $\Leftrightarrow$ (iii)" Man verwende die Definition IV(2.3) des Funktionenlimes.
"(ii) $\Rightarrow$ (iv)" Sei $b = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Wir definieren

$$\varphi : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - b, & \text{falls } x \neq x_0, \\ 0, & \text{falls } x = x_0. \end{cases}$$

Dann gilt $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)b + (x - x_0)\varphi(x)$ für alle $x \in D$. Aus

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - b = 0 = \varphi(x_0)$$

folgt die Stetigkeit von φ im Punkt x_0.
"(iv) $\Rightarrow$ (ii)" Aus der Darstellung in (iv) ergibt sich

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(b+\varphi(x)) = b+\varphi(x_0) = b$$

aufgrund der Stetigkeit von φ in x_0. □

Wir ziehen sofort zwei einfache Folgerungen.

(1.4) Korollar. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in einem inneren Punkt x_0 von $D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Dann gilt:*
a) f ist stetig in x_0.
b) Es gibt ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset D$ und ein $M > 0$, so dass

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant M\cdot|x-x_0| \quad \textit{für alle } x \in U_\delta(x_0).$$

Beweis. Wir verwenden für f die Darstellung aus (1.3) (iv).
a) Die rechte Seite ist nach IV(1.9) stetig in x_0. Also ist auch f stetig in x_0.
b) Nach IV(1.9) gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset D$ und ein $L > 0$ mit $|\varphi(x)| < L$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Es folgt mit $M = |b| + L$

$$|f(x)-f(x_0)| = |(x-x_0)b + (x-x_0)\varphi(x)| \leqslant |x-x_0|\cdot(|b|+|\varphi(x)|) \leqslant M\cdot|x-x_0|.$$

□

Aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit, sogar die (lokale) LIPSCHITZ-Stetigkeit in einer geeigneten Umgebung des Punktes x_0. Die Umkehrung ist nicht richtig, wie (1.2) c) zeigt. Es gibt sogar stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in keinem Punkt differenzierbar sind. Man vergleiche BARNER/FLOHR, §8.1.

Wir kommen nun analog zum Limesbegriff für Funktionen zur einseitigen Differenzierbarkeit.

(1.5) Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $[x_0, x_0+\delta) \subset D$ (bzw. $(x_0-\delta, x_0] \subset D$). Man nennt f *rechtsseitig* (bzw. *linksseitig*) *differenzierbar* in x_0, wenn der Limes

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \left[\text{bzw. } \lim_{h\uparrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]$$

existiert. Wir verwenden dafür die Bezeichnung $f'_+(x_0)$ [bzw. $f'_-(x_0)$].

Aus IV(2.12) folgt dann unmittelbar das

(1.6) Lemma. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein innerer Punkt von $D \subset \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*
(i) f ist differenzierbar in x_0.
(ii) $f'_+(x_0)$ und $f'_-(x_0)$ existieren und haben den gleichen Wert.

Wenn man sich $f(x) = |x|$ im Nullpunkt anschaut, so hat man natürlich $f'_+(0) = 1$ und $f'_-(0) = -1$ (vgl. (1.2)).

Nun führen wir globale Differenzierbarkeit ein.

(1.7) Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $D \subset \mathbb{R}$ enthalte keine isolierten Punkte.
a) f heißt *differenzierbar auf D*, wenn f in jedem inneren Punkt von D differenzierbar ist und in jedem Randpunkt, der zu D gehört, einseitig differenzierbar ist.
b) Ist f differenzierbar auf D, so heißt die Funktion

$$f' : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x) \text{ (bzw. } f'_+(x) \text{ oder } f'_-(x), \text{ falls } x \text{ Randpunkt)},$$

die *Ableitung von f*.
Man schreibt auch $f' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f$.

Wir formulieren die Rechenregeln in dem

(1.8) Satz. *Gegeben seien Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$, die in einem inneren Punkt x_0 von $D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar sind. Dann gilt*
a) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist αf differenzierbar in x_0 mit $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.
b) $f + g$ ist differenzierbar in x_0 mit $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
c) (Produktregel) $f \cdot g$ ist differenzierbar in x_0 mit

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

d) (Quotientenregel) Gilt $g(x_0) \neq 0$, so ist auch f/g differenzierbar in x_0 mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis. a) Es gilt

$$\frac{(\alpha f)(x_0+h)-(\alpha f)(x_0)}{h} = \alpha \cdot \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \alpha f'(x_0).$$

b) Man hat

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\ &\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)+g'(x_0).\end{aligned}$$

c) Weil g nach (1.4) auch stetig in x_0 ist, folgt

$$\begin{aligned}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h) + f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\ &\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).\end{aligned}$$

d) Nach IV(3.9) existiert wegen der Stetigkeit von g in x_0 ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(x_0) \subset D$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Für $0 < |h| < \delta$ folgert man dann

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{h} \\ =\ &\frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)}\cdot\left[g(x_0)\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right] \\ \xrightarrow[h\to 0]{}\ &\frac{1}{g(x_0)^2}[g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)].\end{aligned}$$

□

Der Satz besagt, dass die Menge der auf D differenzierbaren Funktionen eine $\mathbb{R}$-Algebra ist. Die Ableitung ist eine lineare Abbildung, wegen c) jedoch kein Algebrenhomomorphismus.

(1.9) Korollar. *a) Jede konstante Funktion ist differenzierbar und die Ableitung ist identisch* 0.
b) Sei $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, *ein reelles Polynom. Dann ist* $p(x)$ *differenzierbar in jedem Punkt* $x_0 \in \mathbb{R}$ *mit*

$$p'(x_0) = a_1 + 2a_2x_0 + \ldots + na_nx_0^{n-1},$$

d. h.

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} a_kx^k = \sum_{k=1}^{n} ka_kx^{k-1}.$$

Beweis. a) Aus $f(x) = c$ folgt

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0 = f'(x_0).$$

b) Wir verwenden eine Induktion nach n, wobei die Behauptung für $n = 0$ nach a) richtig ist. Für $n = 1$ haben wir

$$\frac{p(x_0+h) - p(x_0)}{h} = \frac{a_0 + a_1(x_0+h) - (a_0 + a_1 x_0)}{h} = a_1 = p'(x_0).$$

Durch Induktion folgt mit (1.8)

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x \cdot x^n) = \left(\frac{d}{dx}x\right) \cdot x^n + x \cdot \left(\frac{d}{dx}x^n\right) = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Die Behauptung für $\mathit{grad}\, p = n+1$ erhält man nun aus (1.8) mit der Zerlegung $p(x) = q(x) + a_{n+1}x^{n+1}, \mathit{grad}\, q \leqslant n$ oder $q \equiv 0$. □

Als "Grenzwert" von Polynomen erhalten wir Potenzreihen.

(1.10) Satz. *Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist f auf $U_R(a)$ differenzierbar mit*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-a)^k$$

und diese Potenzreihe hat ebenfalls den Konvergenzradius R.

Beweis. Sei R' der Konvergenzradius von $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$. Dann folgt $R' = R$ aus dem ABELschen Lemma III(4.3). Sei ohne Einschränkung $a = 0$ und $x_0 \in U_R(0)$ sowie $\delta > 0$, so dass $r := |x_0| + \delta < R$. Für $|h| < \delta$, $n \geqslant 2$ gilt dann

$$\left|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-2}x_0^{n-k}\right| = \left|\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)}{k(k-1)}\binom{n-2}{k-2}h^{k-2}x_0^{n-k}\right|$$
$$\leqslant n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}|h|^{k-2}|x_0|^{n-k} = n(n-1)(|h|+|x_0|)^{n-2} \leqslant n(n-1)r^{n-2}.$$

Damit folgt für $0 < |h| < \delta$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - g(x_0)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} - n x_0^{n-1}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k}\right| \quad \leq |h| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left|\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2} x_0^{n-k}\right| \\
&\leq |h| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| r^{n-2} \qquad \xrightarrow[h\to 0]{} 0,
\end{aligned}$$

denn $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|r^{n-2}$ konvergiert nach dem ABELschen Lemma III(4.3). Also ist f differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = g(x_0)$. □

Nun wenden wir den Satz auf bekannte Potenzreihen an

(1.11) Korollar. *a) Die Funktion* exp, sin *und* cos *sind auf* $\mathbb{R}$ *differenzierbar mit*

$$\exp'(x) = \exp(x),\ \sin' x = \cos x,\ \cos' x = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}.$$

b) Der Tangens tan *ist auf* $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$ *differenzierbar mit*

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Der Cotangens cot *ist auf* $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi$ *differenzierbar mit*

$$\cot' x = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x.$$

Beweis. a) Die Funktionen werden durch Potenzreihen auf $\mathbb{R}$ gegeben und können nach (1.10) differenziert werden. Es folgt

$$\begin{aligned}
\exp'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \exp(x), \\
\sin'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x, \\
\cos'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} = -\sin x.
\end{aligned}$$

b) Man verwende a) und die Quotientenregel (1.8)

$$\begin{aligned}
\tan' x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \\
\cot' x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x.
\end{aligned}$$ □

Nun beschäftigen wir uns mit der Differentiation bei Komposition.

(1.12) Satz. *(Kettenregel)*
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in einem inneren Punkt x_0 von $D \subset \mathbb{R}$. Ist $g : D' \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(D) \subset D'$, die in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar ist, so ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 mit

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Weil g differenzierbar in y_0 ist, ist

$$h : D' \to \mathbb{R},\ y \mapsto \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & \text{falls } y \neq y_0, \\ g'(y_0), & \text{falls } y = y_0, \end{cases}$$

stetig in y_0 mit der Eigenschaft

$$g(y) - g(y_0) = (y - y_0) \cdot h(y) \quad \text{für alle} \quad y \in D'.$$

Setzt man nun $y = f(x)$, so folgt für alle $x \in D, x \neq x_0$:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot h(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0) \cdot g'(y_0),$$

denn es gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$ wegen der Stetigkeit von f in x_0. □

Es folgt eine einfache

(1.13) Bemerkung. Könnte man voraussetzen, dass es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft gibt, dass $f(x) - f(x_0) \neq 0$ für alle $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$, so liefe ein (intuitiv einsichtiger) Beweis wie folgt:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) \cdot f(x_0)}{x - x_0}.$$

Da $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$ (Stetigkeit von f), liefert der Grenzübergang die Behauptung.
Der tatsächliche (allgemein gültige) Beweis von (1.12) umschifft diese Problematik von $f(x) - f(x_0)$ elegant. □

In der Praxis gilt es, g und f zu bestimmen, wenn man einen konkreten Ausdruck zu differenzieren hat.

(1.14) Beispiele. a) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x^2 + x)$. Man hat

$$h = g \circ f \quad \text{mit} \quad g(y) = \sin y \quad \text{und} \quad f(x) = x^2 + x.$$

Dann gilt $g'(y) = \cos y$ und $f'(x) = 2x + 1$, also mit (1.12)

$$h'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) = (2x + 1) \cdot \cos(x^2 + x).$$

b) Sei $a > 0$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x = \exp(x \ln a)$. Man hat

$$h = g \circ f \quad \text{mit} \quad g(y) = \exp y \quad \text{und} \quad f(x) = x \ln a.$$

Dann gilt $g'(y) = \exp y$ und $f'(x) = \ln a$, also mit (1.12)

$$\frac{d}{dx}(a^x) = h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \exp(x \ln a) \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Nun beschäftigen wir uns mit der Ableitung der Umkehrfunktion.

(1.15) Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, injektiv sowie differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to \mathbb{R}$, $W = f(I)$, differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. f und f^{-1} sind nach I(3.12), IV(1.15) und IV(3.10) stetig und streng monoton. Sei $(y_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge in $W\backslash\{y_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Weil f^{-1} injektiv ist, ist $(x_n)_{n\geqslant 1} := (f^{-1}(y_n))_{n\geqslant 1}$ eine Folge in $I\backslash\{x_0\}$. Da f^{-1} stetig ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = f^{-1}(y_0) = x_0$. Weil f in x_0 differenzierbar ist, erhält man

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} &= \frac{f^{-1}(f(x_n)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.\end{aligned}$$ □

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, ist differenzierbar und bijektiv. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x} = sgn\, x \cdot \sqrt[3]{|x|}$, ist in $x_0 = 0$ aber nicht differenzierbar.

Die Ergebnisse von (1.15) verwenden wir in dem

(1.16) Korollar. *a)* $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ *für* $x > 0$.

b) $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ *für* $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

c) $\frac{d}{dx}(x^x) = (1 + \ln x) \cdot x^x$ *für* $x > 0$.

d) $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *für* $|x| < 1$.

e) $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ *für* $|x| < 1$.

f) $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ *für* $x \in \mathbb{R}$.

g) $\frac{d}{dx} arccot x = \frac{-1}{1+x^2}$ *für* $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. a) Es gilt $\ln x = f^{-1}(x)$ für $f(x) = \exp\, x = f'(x)$. Also gilt

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 0.$$

b) Es gilt nach der Kettenregel und a) für $x > 0$:

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha \ln x}\right) = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

c) Man hat für $x > 0$:

$$\frac{d}{dx}(x^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \ln x}) = e^{x \ln x}\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = (1 + \ln x) \cdot x^x.$$

d) Für $f(x) = \sin x$ gilt $f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0,\ |x| < \frac{\pi}{2}$. Also folgt für $|y| < 1$

$$\frac{d}{dy} \arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

e) Für $f(x) = \cos x$ gilt $f'(x) = -\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} < 0,\ 0 < x < \pi$. Also hat man für $|y| < 1$

$$\frac{d}{dy} \arccos y = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

f) Es gilt $\tan' x = 1 + \tan^2 x > 0$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$ nach (1.11). Demnach erhält man für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

g) Man hat $\cot' x = -1 - \cot^2 x$ für $0 < x < \pi$ nach (1.11). Daher folgt für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dy} arccot\, y = \frac{-1}{1 + \cot^2(arccot\, y)} = \frac{-1}{1 + y^2}.$$

□

§2. Mittelwertsätze der Differentialrechnung

In diesem Paragrafen sollen die Mittelwertsätze für differenzierbare Funktionen mit ihren Anwendungen hergeleitet werden.

(2.1) Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Man sagt, dass f in x_0 ein *relatives* oder *lokales Maximum* [bzw. *Minimum*] hat, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass

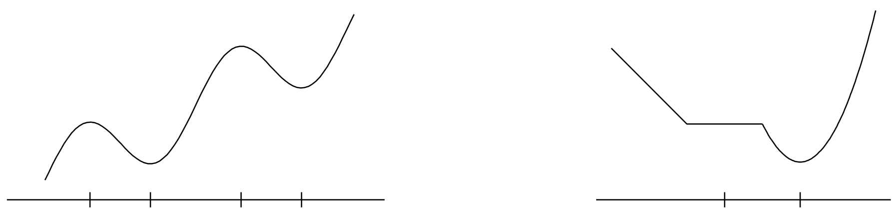
$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad [\text{bzw. } f(x) \geqslant f(x_0)] \quad \text{für alle} \quad x \in U_\delta(x_0) \cap D.$$

f hat in x_0 ein *absolutes* oder *globales Maximum* [bzw. *Minimum*], wenn

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad [\text{bzw. } f(x) \geqslant f(x_0)] \quad \text{für alle} \quad x \in D.$$

Ein *relatives* (*absolutes*) *Extremum* ist ein relatives (absolutes) Minimum oder Maximum.

Der Veranschaulichung dienen die folgenden Graphen



(2.2) Satz. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, x_0 ein innerer Punkt von D und f differenzierbar in x_0. Wenn f in x_0 ein relatives Extremum hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. f habe in x_0 ohne Einschränkung ein relatives Maximum. Sei $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset D$ und $f(x) \leqslant f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Dann gilt für alle $0 < h < \delta$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0, \quad \text{also } f'_+(x_0) \leqslant 0,$$
$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \geqslant 0, \quad \text{also } f'_-(x_0) \geqslant 0.$$

Weil f in x_0 differenzierbar ist, folgt mit (1.6)

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0. \qquad \square$$

Auf die Voraussetzungen des Satzes gehen wir ein in den

(2.3) Bemerkungen. a) Die Bedingung, dass x_0 ein innerer Punkt von D ist, ist wesentlich, da z. B. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, in $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ relative Extrema hat. Es gilt aber $f'(x_0) = f'(x_1) = 1$.
b) Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz eines relativen Extremums in x_0. Man betrachte

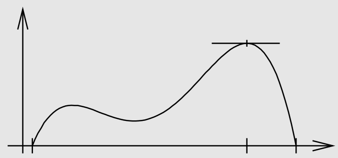
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3,\ f'(x) = 3x^2,\ x_0 = 0,\ f'(0) = 0.$$

c) Es kann auch ein Extremum vorliegen, ohne dass die Funktion in x_0 differenzierbar ist. Man betrachte

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|,\ x_0 = 0.$$

Wie man auf die Existenz von Nullstellen der Ableitung schließen kann, zeigt der

(2.4) [. *Satz von Michel* ROLLE *(1652-1719)]*
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar mit $f(a) = f(b) = 0$. Dann existiert (mindestens) ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.



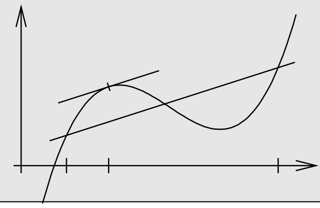
Beweis. Falls $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, wählt man $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Andernfalls existiert ohne Einschränkung ein $x_1 \in (a,b)$ mit $f(x_1) > 0$ (sonst betrachte man $-f$). Nach dem Satz vom Minimum und Maximum IV(3.7) gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x) \le f(x_0)$ für alle $x \in [a,b]$. Wegen $f(x_1) > 0$ gilt $x_0 \in (a,b)$. Dann hat f in x_0 ein Extremum und $f'(x_0) = 0$ folgt aus (2.2). □

Man kann den Satz von ROLLE auch so formulieren, dass zwischen je zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion auf einem Intervall stets eine Nullstelle der Ableitung liegt.

(2.5) [. ***Mittelwertsatz der Differentialrechnung]***

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert (mindestens) ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Die Steigung der Tangente in x_0 ist gleich der Steigung der Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Nun ist (2.4) wegen $f(a) = f(b) = 0$ ein Spezialfall von (2.5).

Beweis. Wir definieren

$$F : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - f(a) - (x-a) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Mit f ist F stetig und auf (a,b) differenzierbar. Wegen $F(a) = F(b) = 0$ kann man (2.4) anwenden und erhält ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$0 = F'(x_0) = f'(x_0) - 1 \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

(2.6) Beispiel. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\cos x_1 - \cos x_2| \leqslant |x_1 - x_2|.$$

Zum Nachweis sei o. B. d. A. $x_1 < x_2$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (x_1, x_2)$ derart, dass

$$\frac{\cos x_2 - \cos x_1}{x_2 - x_1} = \cos'(\xi) = -\sin \xi.$$

Übergang zum Betrag und die (allgemein gültige) Abschätzung $|\sin \xi| \leqslant 1$ ergibt die Behauptung.

Das spezielle Beispiel ist hier nicht so wichtig, aber die Art, wie der Mittelwertsatz hier für Abschätzungen verwendet wurde, sollte man sich merken.

Eine weitere Verallgemeinerung ist der

(2.7) Satz. *(Verallgemeinerter Mittelwertsatz)*
Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf (a,b) differenzierbar sind. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$g'(x_0) \cdot (f(b) - f(a)) = f'(x_0) \cdot (g(b) - g(a)).$$

Mit $g(x) = x$ erhält man auch (2.5) als Spezialfall von (2.7).

Beweis. Wir definieren

$H : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (f(b) - f(a)) \cdot (g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a)) \cdot (g(b) - g(a)).$

Mit f und g ist auch H stetig und auf (a,b) differenzierbar. Wegen $H(a) = H(b) = 0$ kann man (2.4) anwenden und erhält ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$0 = H'(x_0) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(x_0) - f'(x_0) \cdot (g(b) - g(a)). \qquad \square$$

Für ein Intervall I bezeichne $\overset{\circ}{I}$ das zugehörige offene Intervall mit den gleichen Grenzen. Als wichtige Folgerung aus dem Mittelwertsatz erhalten wir den

(2.8) Satz. *Seien I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar sind. Dann gilt:*

a) $f'(x) = 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$ ist äquivalent zur Existenz eines $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = c$ für alle $x \in I$.

b) $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$ ist äquivalent zur Existenz eines $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in I$.

c) f ist genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$.

d) f ist genau dann monoton fallend, wenn $f'(x) \leqslant 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$.

e) f ist streng monoton wachsend, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$.

f) f ist streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$.

Beweis. Sei ohne Einschränkung $I = [a,b]$ mit $a < b$.
a) Sei $d \in (a,b]$. Nach dem Mittelwertsatz (2.5) existiert ein $x_0 \in (a,d) \subset (a,b)$ mit

$$0 = f'(x_0) = \frac{f(d) - f(a)}{d - a}, \quad \text{also} \quad f(d) = f(a).$$

Demnach ist f konstant. Umgekehrt hat ein konstantes f die Ableitung 0.
b) Man wende a) auf $f(x) - g(x)$ an.
c), e) Wenn f monoton wächst, so gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \quad \text{für alle} \quad x \in I,\ x \neq x_0,$$

also auch $f'(x_0) \geqslant 0$.

Nun gelte andererseits $f'(x) \geqslant 0$ [bzw. $f'(x) > 0$] für alle $x \in \overset{\circ}{I}$. Sind $\alpha, \beta \in [a,b]$

mit $\alpha < \beta$, so existiert nach (2.5) ein $x_0 \in (\alpha, \beta)$ mit

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(x_0) \geqslant 0 \quad [\text{bzw. } > 0].$$

Es folgt $f(\beta) \geqslant f(\alpha)$ [bzw. $f(\beta) > f(\alpha)$], so dass f [streng] monoton wachsend ist.
d), f) Man wende c), e) auf $-f$ an. □

Als erste Folgerungen notieren wir das

(2.9) Korollar. *Es gilt*

a) $$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \textit{für } |x| < 1,$$

b) $$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \textit{für } |x| < 1.$$

Beweis. Beide Reihen haben die geometrische Reihe als Majorante und konvergieren daher für $|x| < 1$ absolut.
a) Bezeichnet man die Reihe mit $f(x)$, so folgt aus (1.10) und (1.16) sowie III(1.5)

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x)$$

für $|x| < 1$. Nach (2.8) existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (\arctan x) + c \quad \text{für } |x| < 1.$$

Aus $f(0) = \arctan 0 = 0$ folgt $c = 0$.
b) Bezeichnet man die Reihe mit $g(x)$, so folgt aus (1.10) und (1.16) sowie III(1.5)

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x} = \ln'(1+x)$$

für $|x| < 1$. Nach (2.8) existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \ln(1+x) + c.$$

Aus $g(0) = \ln 1 = 0$ folgt $c = 0$. □

Einen neuen Begriff erhalten wir aus der

(2.10) Definition. Gegeben seien Funktionen $F : D \to \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Man nennt F eine *Stammfunktion von f*, wenn F auf D differenzierbar ist mit $F' = f$.

Aus (2.8) b) folgt direkt das

(2.11) Korollar. *Sei I ein Intervall. Gegeben seien Funktionen $f, F, G : I \to \mathbb{R}$, so dass F eine Stammfunktion von f ist. Dann sind äquivalent:*

(i) G ist ebenfalls eine Stammfunktion von f.

(ii) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F(x) = G(x) + c \quad \text{für alle} \quad x \in I.$$

Als weitere Anwendung lösen wir eine einfache Differentialgleichung.

(2.12) Satz. *Für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, I Intervall und $\alpha \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:*
(i) f ist differenzierbar mit $f' = \alpha f$.
(ii) Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f(x) = ce^{\alpha x}$ für alle $x \in I$.

Beweis. "(ii) $\Rightarrow$ (i)" Aus $f(x) = ce^{\alpha x}$ folgt $f'(x) = \alpha ce^{\alpha x} = \alpha f(x)$ für alle $x \in I$.
"(i) $\Rightarrow$ (ii)" Wir betrachten $g : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-\alpha x} f(x)$. Dann ist g differenzierbar mit

$$g'(x) = -\alpha e^{-\alpha x} f(x) + e^{-\alpha x} f'(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in I.$$

Nach (2.8) ist $g(x)$ konstant c. Also hat man

$$g(x) = c, \quad \text{d. h. } f(x) = ce^{\alpha x} \quad \text{für alle } x \in I.$$ □

Wir hatten bereits $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ gezeigt. Jetzt soll eine einfache Methode angegeben werden, wie man solche Grenzwerte berechnen kann.

(2.13) Satz. *(Regel von Guillaume de* L'HOSPITAL (1661-1704)*)*
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ oder $a = -\infty$. Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Gilt

$$\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} g(x) = 0 \quad \textit{oder} \quad \lim_{x\downarrow a} f(x),\ \lim_{x\downarrow a} g(x) \in \{\infty, -\infty\}$$

und existiert

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

so gilt

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Eine entsprechende Aussage gilt für linksseitige Limiten.

Beweis. Für $a < \alpha < \beta < b$ gilt nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} = g'(x_0) \neq 0 \quad \text{für ein } \ x_0 \in (a, b),$$

also insbesondere $g(\alpha) \neq g(\beta)$. Daher ist g injektiv.
1. Fall: $a \in \mathbb{R},\ A = 0$.
Wir setzen $f(a) = g(a) = 0$. Dann sind $f, g : [a, x] \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$. Nach (2.7) existiert ein $\overline{x} \in (a, x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\overline{x})}{g'(\overline{x})} \xrightarrow[x\downarrow a]{} L,$$

denn $x \downarrow a$ impliziert $\overline{x} \downarrow a$.
2. Fall: $a = -\infty,\ A = 0$.
Sei ohne Einschränkung $b < 0$. Wir betrachten dann $\overline{f} : \left(0, -\frac{1}{b}\right) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f\left(-\frac{1}{x}\right)$, und $\overline{g} : \left(0, -\frac{1}{b}\right) \to \mathbb{R},\ x \mapsto g\left(-\frac{1}{x}\right)$. Aus dem 1. Fall folgt

$$\lim_{x\downarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\overline{f}'(x)}{\overline{g}'(x)} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{f'\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2}}{g'\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\downarrow 0} \frac{f'\left(-\frac{1}{x}\right)}{g'\left(-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\downarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

3. Fall: $a \in \mathbb{R},\ A = \pm\infty,\ L \in \mathbb{R}$.
Sei ohne Einschränkung $A = \infty$. Weil g injektiv und stetig ist, ist g nach IV(3.10) streng monoton und wegen $\lim\limits_{x \downarrow a} g(x) = \infty$ ist g dann streng monoton fallend. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert dann nach Definition des Funktionenlimes ein $\delta > 0$ mit

$$g(t) > 0,\ \Big|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\Big| < \varepsilon \quad \text{für alle } a < t < a + \delta.$$

Für alle $a < x < y < a + \delta$ existiert nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz (2.7) ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)}, \quad \text{also} \quad \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Nun gilt $\frac{g(y)-g(x)}{-g(x)} > 0$, also

$$(L - \varepsilon) \cdot \frac{g(y) - g(x)}{-g(x)} < \frac{f(y) - f(x)}{-g(x)} < (L + \varepsilon) \cdot \frac{g(y) - g(x)}{-g(x)},$$
$$(L - \varepsilon) \cdot \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < (L + \varepsilon) \cdot \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Sei nun Œ $\varepsilon < 1$, y fest und $\delta > 0$ so, dass

$$\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon \quad \text{sowie} \quad \left|\frac{f(y)}{f(x)}\right| < \varepsilon$$

für alle $x \in (a, a + \delta)$. Dann ist $1 - \frac{g(y)}{g(x)} > 1 - \varepsilon > 0$ und damit

$$(L - \varepsilon)(1 - \varepsilon) - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < (L + \varepsilon)(1 + \varepsilon) + \varepsilon.$$

Für $\varepsilon \to 0$ konvergieren die linke und die rechte Seite der Abschätzungskette gegen 0. Also $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

4. Fall: $a \in \mathbb{R}$, $A = \pm\infty$, $L = \pm\infty$.
Die Behauptung wird analog zum 3. Fall gezeigt.
5. Fall: $a = -\infty$, $A = \pm\infty$.
Die Behauptung wird wie im 2. Fall auf den 3. und 4. Fall zurückgeführt.
Für linksseitige Limiten verwende man

$$\lim_{x \uparrow x_0} F(x) = \lim_{x \downarrow -x_0} F(-x).$$

□

Als einfache Anwendungen erhalten wir aus (2.13)

(i) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1,$$

(iii) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=\frac{e^0}{\cos 0}=1,$$

(ii) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1}=\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R},$$

(iv) $$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)-1}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2\cos x-x\sin x}=-\frac{1}{2},$$

da man (2.13) für beide einseitigen Limiten verwenden kann. Man sollte aber den Grenzwert (i) nicht mit der Regel von L'HOSPITAL berechnen, da es sich hier um Differenzenquotienten handelt, die natürlich gegen die Ableitung der Funktion an der betreffenden Stelle konvergieren.

(2.14) Korollar. *Es gilt* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$ *für jedes* $a\in\mathbb{R}$*, insbesondere*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a.$$

Beweis. Es gilt $\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^{F(x)}$ mit

$$F(x)=x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)=\ln 1=0=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ kann man (2.13) anwenden und erhält

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+a/x}\cdot\frac{-a}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1+\frac{a}{x}}=a.$$

Weil die Exponentialfunktion stetig ist, folgt

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\exp\left(\lim_{x\to\infty}F(x)\right)=e^a.$$ □

§3. TAYLOR-Reihen

Die Tangente ist eine lineare Approximation eines Graphen in einem Punkt. Es ist zu erwarten, dass man eine bessere Approximation erhält, wenn man Polynome betrachtet, d. h. höhere Ableitungen einbezieht.

(3.1) Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge ohne isolierte Punkte und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f auf D differenzierbar (für Randpunkte ist einseitige Differenzierbarkeit gemeint), so ist die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ definiert. Ist f' ebenfalls differenzierbar, so nennt man die Ableitung von f' die *zweite Ableitung* von f und schreibt

$$(f')'(x_0) = f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0), \ x_0 \in D.$$

Rekursiv definiert man die *n-te Ableitung von f* für $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$f^{(0)}(x_0) := f(x_0), \ f^{(1)}(x_0) := f'(x_0), \ f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0),$$

sofern die Ableitungen existieren. Man schreibt auch

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0).$$

Wohl bekannt sind die

(3.2) Beispiele. a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, für festes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, $f^{(k)}(x) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)x^{n-k}$ für $1 \le k < n$ und $f^{(n)}(x) = n!$ sowie $f^{(k)}(x) = 0$ für alle $k > n$.
b) Sei $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$. Dann gilt $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2}$, $f'''(x) = 2x^{-3}$, $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$ für alle $x > 0$.
c) $\sin' x = \cos x$, $\sin'' x = -\sin x$, $\sin''' x = -\cos x$, $\sin^{(4)} x = \sin x$.
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{sgn} x \cdot x^2$, ist differenzierbar mit $f'(x) = 2 \operatorname{sgn} x \cdot x = 2|x|$. Also ist f' zwar stetig, aber im Nullpunkt nicht differenzierbar.
e) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

ist differenzierbar mit

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Die Ableitung f' ist in 0 nicht einmal stetig, da

$$\lim_{x \to 0} 2x \sin(1/x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0} \cos(1/x) \quad \text{nicht existiert.}$$

Zur einfacheren Formulierung von Aussagen benötigen wir die

(3.3) Definition. Für $D \subset \mathbb{R}$ ohne isolierte Punkte und $n \in \mathbb{N}_0$ bestehe $C^{(n)}(D)$ aus allen Funktionen auf D, die *n-mal stetig differenzierbar* sind, d. h.

$$C^{(n)}(D) := \{ f : D \to \mathbb{R} \mid f \ n\text{-mal differenzierbar}, \ f^{(n)} \text{ stetig} \}.$$

Schließlich sei

$$C^{\infty}(D) := \bigcap_{n=0}^{\infty} C^{(n)}(D)$$

die Menge der unendlich oft (d. h. beliebig oft) stetig differenzierbaren Funktionen auf D.

Algebraisch gesehen folgt aus den Differenzierbarkeitsregeln (1.8), dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die Menge $C^{(n)}(D)$ eine $\mathbb{R}$-Algebra ist. Diesen Sachverhalt, den man leicht per Induktion beweisen kann, formulieren wir in dem

(3.4) Lemma. *Seien $D \subset \mathbb{R}$ ohne isolierte Punkte, $n \in \mathbb{N}_0, f, g \in C^{(n)}(D)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(i) $\alpha f \in C^{(n)}(D)$ *mit* $(\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}$.

(ii) $f + g \in C^{(n)}(D)$ *mit* $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

(iii) $f \cdot g \in C^{(n)}(D)$ *mit* $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$.

(iv) Gilt $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in D$, *so folgt* $\frac{f}{g} \in C^{(n)}(D)$.

Unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen geben wir nun eine Approximation von f durch ein Polynom an.

(3.5) Satz. *(TAYLORsche Formel mit dem Restglied von LAGRANGE)*
Seien I ein Intervall, $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(n)}(I)$ und $a \in I$. Dann gibt es eine Funktion $R_{n,a} : I \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n,a}(x), \quad x \in I.$$

Zu jedem $x \in I, x \neq a$, existiert ein $\xi = \xi_{a,x}$ echt zwischen a und x (d. h. $\xi \in (a, x)$ bzw. $\xi \in (x, a)$), so dass

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n.$$

Man nennt $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ das $(n-1)$*te* TAYLOR-*Polynom* von f zum Entwicklungspunkt a. Für ξ gibt es eine Darstellung $\xi = a + \vartheta \cdot (x-a)$ mit $0 < \vartheta < 1$.

Beweis. Sei

$$R_{n,a}(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Dann gilt trivialerweise die obige Gleichung. Sei nun $x \in I, x \neq a$, und ohne Einschränkung $x > a$. Dann existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit

$$(*) \qquad R_{n,a}(x) = \frac{M}{n!}(x-a)^n.$$

Wir wollen den Satz von ROLLE (2.4) anwenden und betrachten

$$F : [a, x] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{M}{n!}(x-t)^n.$$

Dann gilt $F(a) = F(x) = 0$ nach $(*)$. Wegen $f \in C^{(n)}(I)$ ist F stetig und auf (a, x) differenzierbar. Nach (2.4) existiert ein $\xi \in (a, x)$ mit

$$\begin{aligned} 0 = F'(\xi) &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!}(x-\xi)^{k-1} + \frac{M}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} \\ &= -\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} + \frac{M}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}. \end{aligned}$$

Aus $x \neq \xi$ folgt $M = f^{(n)}(\xi)$, also die Behauptung. □

Dieser Satz stammt von Brook TAYLOR (1685-1731). Im Fall $n = 1$ hat man

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x - a),$$

also den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

(3.6) Beispiele. a) Sei $I = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x, a = 0$. Dann gilt $f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k + e^{\xi} \frac{x^n}{n!}$$

mit einem ξ zwischen 0 und x. Man beachte $e^{\xi} \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Der Limes $n \to \infty$ ergibt daher

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \ x \in \mathbb{R}.$$

Man kann die TAYLORsche Formel aber für Approximationen der konkreten Funktionswerte nutzen. Wegen $e^x \leqslant 1$ für $x \leqslant 0$ hat man z. B.

$$e^{-0,1} = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} (-0,1)^k + R = 0,904.837.5 + R$$

mit

$$R = \frac{e^{\xi}}{5!} (-0,1)^5, \quad R \leqslant 0, \quad |R| \leqslant \frac{1}{120} \cdot 10^{-5} \leqslant 10^{-7}.$$

Damit haben wir die ersten 6 Nachkommastellen des exakten Wertes

$$e^{-0,1} = 0,904.837.418.03\ldots$$

bestimmt. Wegen $e \leqslant 3$ hat man $e^{1/2} \leqslant \sqrt{3} \leqslant 2$, also

$$\sqrt{e} = e^{1/2} = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k + R = 1,648.697\ldots + R$$

mit

$$0 \leqslant R = \frac{e^{\xi}}{6!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \leqslant \frac{1}{6! \cdot 2^5} \leqslant 10^{-4},$$

wobei

$$\sqrt{e} = 1,648.772\ldots.$$

b) Sei $I = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \ln x$, $a = 1$. Dann gilt $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)! \cdot x^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, also

$$\ln x = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} \xi^{-n}$$

für ein ξ zwischen 1 und x. Wegen $\left|\frac{x-1}{\xi}\right| \leqslant 1$ für $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$ erhält man

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}, \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2, \qquad \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Die in (2.9) b) gefundene Identität gilt damit auch für $x = 1$.

Als Anwendung von (3.5) betrachten wir Extrema.

(3.7) Satz. *(Kurvendiskussion)*
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, x_0 ein innerer Punkt von I und $f \in C^{(n)}(I)$. Es gelte

$$f^{(k)}(x_0) = 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

a) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f ein relatives Minimum an der Stelle x_0.
b) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f ein relatives Maximum an der Stelle x_0.
c) Ist n ungerade, so hat f kein relatives Extremum in x_0.

Beweis. Man wendet (3.5) an auf $a = x_0$ und erhält

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

für ein ξ echt zwischen x und x_0. Weil $f^{(n)}$ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass $f^{(n)}(x) > 0$ bzw. $f^{(n)}(x) < 0$ für alle $|x - x_0| < \delta$.
a) Es gilt $f(x) - f(x_0) > 0$ für alle $0 < |x - x_0| < \delta$.
b) Es gilt $f(x) - f(x_0) < 0$ für alle $0 < |x - x_0| < \delta$.
c) Gilt $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat man

$$\begin{aligned} &f(x) - f(x_0) > 0 \quad \text{für alle} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \quad \text{und} \\ &f(x) - f(x_0) < 0 \quad \text{für alle} \quad x_0 - \delta < x < x_0. \end{aligned}$$

Gilt $f^{(n)}(x_0) < 0$, so schließt man durch Betrachtung von $-f$ analog. □

Wir diskutieren ein konkretes

(3.8) Beispiel. Wir betrachten $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n \ln x$, $n \in \mathbb{N}$. Für $x > 0$ hat man $f'(x) = nx^{n-1} \ln x + x^{n-1} = 0$ genau dann, wenn $\ln x = -\frac{1}{n}$, also $x = e^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$. Es gilt

$$f_n''(x) = x^{n-2}(n(n-1)\ln x + 2n - 1), \qquad f_n''(e^{-1/n}) = n\, e^{-(n-2)/n} > 0.$$

Also hat f_n an der Stelle $\frac{1}{\sqrt[n]{e}}$ ein lokales Minimum.

(3.9) Bemerkung. Das Vorgehen nach Satz (3.7) ist nicht immer optimal. Oft kommt man mit der Beobachtung schneller zum Ziel, dass das Vorzeichenverhalten von f' die Art der kritischen Punkte bestimmt:

- Wechselt das Vorzeichen von f' bei x_0 von "$+$" nach "$-$" (gibt es also ein $\rho > 0$, so dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \rho, x_0)$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \rho)$, so liegt in x_0 ein lokales Maximum vor.
- Wechselt das Vorzeichen von f' bei x_0 von "$-$" nach "$+$", so liegt in x_0 ein lokales Minimum vor.
- Wechselt das Vorzeichen von f' bei x_0 nicht, so liegt kein lokales Extremum vor.

(3.10) Beispiel. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x^8)$. Dann wechselt

$$f'(x) = \cos(x^8) \cdot 8x^7$$

bei 0 sein Vorzeichen von "$-$" nach "$+$" (beachte $\cos 0 > 0$), also liegt ein lokales Minimum vor. (Dies geht schneller als acht Ableitungen auszurechnen.)

Als direkte Anwendung von (3.5) erhält man in dem Fall, dass das Restglied 0 ist, das

(3.11) Korollar. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C^{(n)}(I)$. Dann sind äquivalent:*
(i) $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $x \in I$.
(ii) f ist eine Polynomfunktion von einem Grad $< n$ oder $f \equiv 0$.

Nun untersuchen wir TAYLOR-Reihen.

(3.12) Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f \in C^{\infty}(I)$. Dann heißt

$$T_{f,a}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die TAYLOR-*Reihe von f mit Entwicklungspunkt a.*

Bevor wir zu Beispielen kommen, notieren wir die

(3.13) Bemerkungen. a) Der Konvergenzradius der TAYLOR-Reihe ist nicht notwendig > 0.
b) Falls die TAYLOR-Reihe konvergiert, konvergiert sie - außer für den Entwicklungspunkt - nicht notwendig gegen $f(x)$ (vgl. (3.15) d)).
c) Die TAYLOR-Reihe konvergiert genau für diejenigen $x \in I$ gegen $f(x)$, für die das Restglied $R_{n,a}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ in (3.5).

Eine ganze Klasse von Beispielen behandeln wir in dem

(3.14) Satz. *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a und Konvergenzradius $R > 0$. Dann stimmt die* TAYLOR*-Reihe mit Entwicklungspunkt a mit f überein, d. h.*

$$T_{f,a}(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \quad \textit{für} \quad |x-a| < R.$$

Beweis. Aus (1.10) folgt $f \in C^\infty(I)$, $I = (a-R, a+R)$. Es gilt $a_0 = f(a)$. Durch Induktion nach k zeigt man leicht

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}, \qquad f^{(k)}(a) = k!\cdot a_k,$$

wenn man (1.10) verwendet. Es folgt

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = a_k \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

□

Nun diskutieren wir einige

(3.15) Beispiele. a) Wir kennen schon einige Potenzreihen

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= T_{\exp,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n,\ x \in \mathbb{R},\\
\sin x &= T_{\sin,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ x \in \mathbb{R},\\
\cos x &= T_{\cos,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

b) Wir hatten für einige Umkehrfunktionen in (2.9) bereits Potenzreihenentwicklungen hergeleitet:

$$\begin{aligned} \ln x &= T_{\ln,1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n},\ 0<x<2,\\ \arctan x &= T_{\arctan,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1. \end{aligned}$$

Obwohl arctan zu $C^\infty(\mathbb{R})$ gehört, konvergiert die TAYLOR-Reihe nur auf $[-1,1]$.
c) Wir betrachten die geometrische Reihe

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x|<1.$$

Durch Differentiation folgt daraus

$$\frac{1}{(1-x)^2} = T_{f',0}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad |x|<1.$$

Eine Induktion nach k liefert

$$\begin{aligned} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} &= T_{f^{(k)},0}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)x^{n-k},\\ \frac{1}{(1-x)^{k+1}} &= \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}x^{n-k} = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+k}{k}x^j,\ |x|<1. \end{aligned}$$

d) Wir betrachten

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{falls } x\neq 0,\\ 0, & \text{falls } x=0,\end{cases}$$

und zeigen $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{(n)}(0)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$. Die TAYLOR-Reihe mit Entwicklungspunkt 0 ist also identisch 0 und konvergiert sicher nicht gegen f. Eine Induktion nach n zeigt, dass es ein Polynom $p_n(x)$ vom Grad $3n$ gibt mit

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}, & \text{falls } x\neq 0,\\ 0, & \text{falls } x=0.\end{cases}$$

Der Fall $n=0$ ist klar mit $p_0(x)=1$. Für $x\neq 0$ hat man

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\left(p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}\right) = \left(-p_n'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}+2p_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^3}\right)e^{-1/x^2}\\ &= p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} \end{aligned}$$

mit
$$p_{n+1}(t) = -p_n'(t)t^2 + 2p_n(t)t^3, \quad \text{grad}\, p_{n+1} = \text{grad}\, p_n + 3.$$

Für $x_0 = 0$ hat man
$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} p_n\left(\frac{1}{h}\right)\frac{1}{h}\, e^{-1/h^2} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{p_n(t)t}{e^{t^2}} = 0$$
nach IV(4.1). Es folgt $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Nun werden wir Potenzreihen "integrieren".

(3.16) Satz. *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a und Konvergenzradius $R > 0$. Dann hat $f(x)$ auf $(a-R, a+R)$ eine Stammfunktion, nämlich*
$$F(x) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}, \quad x \in (a-R, a+R),\ c \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Nach dem ABELschen Lemma III(4.3) hat $F(x)$ ebenfalls den Konvergenzradius R. Es folgt $F'(x) = f(x)$ aus (1.10). □

Als weitere Anwendung erhalten wir den

(3.17) [. *Identitätssatz] Seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ Potenzreihen, die für $|x-x_0| < R$, $R > 0$, konvergieren. Gibt es eine Folge $(x_k)_{k\geq 1}$ in $U_R(x_0)\backslash\{x_0\}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ und $f(x_k) = g(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so folgt bereits*
$$a_n = b_n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad f(x) = g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in U_R(x_0).$$

Beweis. Wir zeigen $a_n = b_n$ durch Induktion nach n. Da $f(x)$ und $g(x)$ auf $U_R(x_0)$ stetig sind, folgt
$$a_0 = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(x_0) = b_0.$$

Wir nehmen an, dass $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, bereits gezeigt wurde. Die beiden Potenzreihen

$$F(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k-n-1}, \quad G(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k-n-1}$$

konvergieren ebenfalls für $|x - x_0| < R$. Für $x \neq x_0$ gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k \right), \\ G(x) &= \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} \left(g(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k \right). \end{aligned}$$

Aus $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$ erhält man $F(x_k) = G(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Stetigkeit ergibt nun

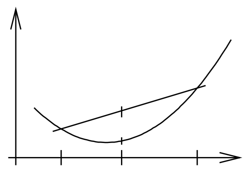
$$a_{n+1} = F(x_0) = \lim_{k \to \infty} F(x_k) = \lim_{k \to \infty} G(x_k) = G(x_0) = b_{n+1}.$$

Damit hat man $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $f = g$. □

Die Voraussetzungen des Identitätssatzes sind natürlich insbesondere erfüllt, wenn es ein $0 < \varepsilon < R$ gibt, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$ gilt.

§4. Konvexität

Mit der Konvexität führen wir einen weiteren recht anschaulichen Begriff ein. Er bedeutet, dass die Verbindungsstrecke zwischen je zwei Punkten des Graphen stets nicht unterhalb des Graphen verläuft. Das formalisieren wir in der



(4.1) Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x_0, x_1 \in I$ und $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ gilt

$$f(x_\lambda) \leqslant (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1) \quad \text{für } x_\lambda := (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1.$$

Man nennt f *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.

Die Bedingung ist offenbar für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ erfüllt. Wegen $x_\lambda = (1-\lambda')x_1 + \lambda' x_0$, $\lambda' = 1-\lambda$, genügt es, $x_0 < x_1$ und $0 < \lambda < 1$ zu betrachten.

Zur Illustration betrachten wir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Für $0 < \lambda < 1$ gilt

$$\begin{aligned}(1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) - f(x_\lambda) &= (1-\lambda)x_0^2 + \lambda x_1^2 - [(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1]^2 \\ = \lambda(1-\lambda)[x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_1] &= \lambda(1-\lambda)(x_0 - x_1)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Wir beweisen ein handliches Kriterium.

(4.2) Satz. *Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar. f ist genau dann konvex, wenn f' auf $\overset{\circ}{I}$ monoton wachsend ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei f konvex. Für $x_0, x_1 \in \overset{\circ}{I}$ mit $x_0 < x_1, x_\lambda := (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$ und $0 < \lambda < 1$ hat man $x_\lambda - x_0 = \lambda(x_1 - x_0)$, $x_1 - x_\lambda = (1-\lambda)(x_1 - x_0)$, also

$$(x_1 - x_0)[(1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) - f(x_\lambda)] \geqslant 0.$$

Daraus erhält man die Ungleichungen

$$\frac{f(x_\lambda) - f(x_0)}{x_\lambda - x_0} \leqslant \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_\lambda)}{x_1 - x_\lambda}.$$

Führt man den Limes $\lambda \downarrow 0$ bzw. $\lambda \uparrow 1$ aus, so folgt aus $x_\lambda \downarrow x_0$ bzw. $x_\lambda \uparrow x_1$ und der Differenzierbarkeit von f

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant f'(x_1).$$

Demnach ist f' monoton wachsend auf $\overset{\circ}{I}$.

„$\Leftarrow$" Sei f' monoton wachsend auf $\overset{\circ}{I}$. Seien $x_0, x_1 \in I, x_0 < x_1$. Für $0 < \lambda < 1$ erhält man aus dem Mittelwertsatz (2.5) $z_0 \in (x_0, x_\lambda)$ und $z_1 \in (x_\lambda, x_1)$ mit

$$\frac{f(x_\lambda) - f(x_0)}{x_\lambda - x_0} = f'(z_0), \qquad \frac{f(x_1) - f(x_\lambda)}{x_1 - x_\lambda} = f'(z_1).$$

Da f' monoton wachsend ist, folgt aus $z_0 < z_1$

$$\frac{f(x_\lambda) - f(x_0)}{x_\lambda - x_0} \leqslant \frac{f(x_1) - f(x_\lambda)}{x_1 - x_\lambda}$$

und daher

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (x_\lambda - x_0)(f(x_1) - f(x_\lambda)) - (x_1 - x_\lambda)(f(x_\lambda) - f(x_0)) \\ &= (x_1 - x_0)[(1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) - f(x_\lambda)]. \end{aligned}$$

Das bedeutet $(1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) \geqslant f(x_\lambda)$. □

Mit (2.7) erhält man sofort das

(4.3) Korollar. *Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall $\overset{\circ}{I}$ zweimal differenzierbar. Dann sind äquivalent:*
(i) f ist konvex.
(ii) $f''(x) \geqslant 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$.

Damit sieht man, dass alle Polynomfunktionen x^n auf $\mathbb{R}_+$ und für gerades $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}$ konvex sind.

Eine weitere Anwendung ist das

(4.4) Lemma. *Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$*

$$x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leqslant \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Im Fall $p = q = 2$ ist das die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel I(1.8).

Beweis. Es genügt, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ zu betrachten, da sonst die linke Seite 0 ist. Wir betrachten

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\ln x, \quad f'(x) = \frac{-1}{x},\ f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \text{ für alle } x > 0.$$

Also ist f konvex nach (4.3). Es folgt

$$-\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \leqslant -\frac{1}{p}\ln x - \frac{1}{q}\ln y.$$

Daraus erhält man

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right)\right) \geqslant \exp\left(\frac{1}{p}\ln x + \frac{1}{q}\ln y\right) = x^{1/p} \cdot y^{1/q}.$$

□

Dies nutzen wir für die

(4.5) Definition. Sei $p \in \mathbb{R},\ p \geqslant 1$ und $z = (z_1, \ldots, z_n)^{tr} \in \mathbb{C}^n$. Dann definiert man die *p-Norm von z* durch

$$\|z\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p \right)^{1/p}.$$

Im Fall $p = 2$ erhält man die gewöhnliche EUKLIDische Norm. Offenbar gilt $\|0\|_p = 0$ und $\|z\|_p > 0$ für $z \neq 0$ sowie $\|\lambda z\|_p = |\lambda| \cdot \|z\|_p$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

(4.6) Satz. *(HÖLDERsche Ungleichung)*
Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle Vektoren $z = (z_1, \ldots, z_n)^{tr}, w = (w_1, \ldots, w_n)^{tr} \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j w_j| \leqslant \|z\|_p \cdot \|w\|_q.$$

Im Fall $p = q = 2$ ist das genau die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung.

Beweis. Wir dürfen $z \neq 0$ und $w \neq 0$ annehmen, da sonst beide Seiten 0 sind. Mit

$$\alpha_j := \frac{|z_j|^p}{\|z\|_p^p} \in \mathbb{R}_+, \quad \beta_j := \frac{|w_j|^q}{\|w\|_q^q} \in \mathbb{R}_+$$

erhält man $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1$ aus (4.5). Aus (4.4) ergibt sich dann

$$\frac{|z_j w_j|}{\|z\|_p \cdot \|w\|_q} = \alpha_j^{1/p} \cdot \beta_j^{1/q} \leq \frac{\alpha_j}{p} + \frac{\beta_j}{q},$$

also

$$\frac{1}{\|z\|_p \cdot \|w\|_q} \sum_{j=1}^{n} |z_j w_j| \leqslant \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Das ist die Behauptung. $\square$

Als Anwendung davon erhalten wir den

(4.7) Satz. *(*M*INKOWSKIsche Ungleichung)*
Ist $p \geq 1$, so gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}^n$ die Dreiecksungleichung

$$\|z+w\|_p \leqslant \|z\|_p + \|w\|_p.$$

Beweis. Im Fall $z + w = 0$ ist die Behauptung klar. Sei also $z + w \neq 0$. Für $p = 1$ folgt die Behauptung aus der Dreiecksungleichung für den Betrag in $\mathbb{C}$, also

$$\|z+w\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |z_j + w_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} (|z_j| + |w_j|) = \|z\|_1 + \|w\|_1.$$

Ist $p > 1$, so wählt man $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_j := |z_j + w_j|^{p-1}$, $j = 1, \ldots, n$. Dann gilt $\frac{p}{q} = p - 1$, $q(p-1) = p$ und

$$x_j^q = |z_j + w_j|^{q(p-1)} = |z_j + w_j|^p, \quad \|x\|_q = \|z+w\|_p^{p/q}.$$

Aus der HÖLDERschen Ungleichung (4.6) ergibt sich

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j + w_j|\,|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |z_j x_j| + \sum_{j=1}^{n} |w_j x_j| \leqslant \|z\|_p \|x\|_q + \|w\|_p \|x\|_q.$$

Dann liefert die Definition von x_j

$$\|z+w\|_p^p = \sum_{j=1}^{n} |z_j + w_j|^p \leqslant (\|z\|_p + \|w\|_p) \cdot \|x\|_q = (\|z\|_p + \|w\|_p) \cdot \|z+w\|_p^{p/q}.$$

Wegen $p - \frac{p}{q} = 1$ hat man

$$\|z+w\|_p \leqslant \|z\|_p + \|w\|_p. \qquad \square$$

Wir erweitern die Aussagen auf Reihen

(4.8) Korollar. *Seien $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$.*

a) Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p$ für jedes $p \geqslant 1$.

b) Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wenn die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p$ und $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^q$ konvergieren, dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k b_k|$ und es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^q \right)^{1/q} .$$

c) Ist $p > 1$ und konvergieren $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p$ und $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^p$, dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k + b_k|^p$ und es gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q \right)^{1/q} .$$

Beweis. a) Wegen der Konvergenz der Reihe ist $(a_k)_{k \geqslant 0}$ eine Nullfolge. Also existiert ein k_0 mit $|a_k| \leqslant 1$, also

$$|a_k^p| \leqslant |a_k| \leqslant 1 \quad \text{für alle } \ k \geqslant k_0.$$

Dann konvergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium.
b),c) Man verwende (4.6) und (4.7) und führe den Limes $n \to \infty$ durch. Die linke Seite konvergiert dann jeweils nach dem Majorantenkriterium. □

Die Ungleichungen gehen zurück auf Otto HÖLDER (1859-1937) und Hermann MINKOWSKI (1864-1909).

Kapitel VII.

Ergänzungen

In diesem Kapitel finden Sie weitere Themen, die nicht unbedingt Gegenstand der Vorlesung sind, aber als Motivation, Weiterführung oder Vertiefung von Interesse sind.

§1. Zur Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$

In I(2.23) wurde $\mathbb{R}$ axiomatisch als vollständiger angeordneter Körper eingeführt, wobei einige Fragen offen blieben:

- Findet man denn ($\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ oder) $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ wieder?
- Gibt es überhaupt einen vollständigen angeordneten Körper?
- Kann es nicht mehrere (“wesentlich”) verschiedene vollständige angeordnete Körper geben?

Die erste und die dritte Frage werden wir hier beantworten. Für die zweite verweisen wir z. B. auf das Skript “Zahlbereichserweiterungen”.

Vor einem Ansatz zur Antwort sollte man die Fragen geeignet formulieren. Sinnvoll ist z. B. die Frage nach Eindeutigkeit nur bis auf Isomorphie (also eine Bijektion, welche die relevanten Strukturen respektiert).

Zunächst aber zur ersten Frage.

(1.1) Satz. *Sei K ein angeordneter Körper und für $n \in \mathbb{N}$, $x \in K$ sei*

$$n \cdot x :\, = \sum_{k=1}^{n} x = \underbrace{x + \ldots + x}_{n-mal}.$$

Dann gibt es genau eine injektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$, welche

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ erfüllt (also ein Homomorphismus von Ringen ist). Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n \cdot 1, \\ \varphi(-n) &= n \cdot (-1) =: (-n) \cdot 1 \quad \textit{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

sowie

$$\varphi(p/q) = (p \cdot 1)(q \cdot 1)^{-1} \quad \textit{für alle} \;\; p \in \mathbb{Z},\; q \in \mathbb{N}.$$

Beweis. (i) Angenommen, φ existiert. Wegen $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0)$ folgt $\varphi(0) = 0$. Weiter ist für alle $a \in \mathbb{Q}$ dann

$$0 = \varphi(a + (-a)) = \varphi(a) + \varphi(-a), \quad \text{also} \quad \varphi(-a) = -\varphi(a).$$

Aus $\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1) \cdot \varphi(1)$ und $\varphi(1) \neq 0$ (Injektivität) folgt $\varphi(1) = 1$.

Schließlich ergibt sich mit einfacher Induktion, dass $\varphi(n \cdot a) = n \cdot \varphi(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Q}$ gilt. Insbesondere

$$\varphi(n) = n \cdot 1 \quad \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Weil K angeordnet ist, folgt $n \cdot 1 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (vgl. I(2.7)), insbesondere $n \cdot 1 \neq 0$ und $n \cdot 1 > m \cdot 1$ für $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$. Weiter ist für alle $n \in \mathbb{N}$ nun $n \cdot (-1) = -(n \cdot 1)$, also

$$\varphi(-n) = -\varphi(n) = n \cdot (-1).$$

Schließlich ist für $q \in \mathbb{N}$:

$$q \cdot \varphi\left(\frac{1}{q}\right) = \varphi\left(q \cdot \frac{1}{q}\right) = 1,$$

also $\varphi(\frac{1}{q}) = (q \cdot 1)^{-1}$ und weiter für $p \in \mathbb{Z}$

$$(*) \qquad \varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \varphi(p) \cdot \varphi\left(\frac{1}{q}\right) = (p \cdot 1)(q \cdot 1)^{-1}.$$

Dies zeigt die Eindeutigkeit (und Injektivität) von φ, falls es existiert.

(ii) Nun **definiere** φ durch (157).
Hierbei ist zunächst Wohldefiniertheit zu zeigen, also:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Rightarrow \varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \varphi\left(\frac{r}{s}\right).$$

Dies geht wie folgt:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Rightarrow ps = rq \Rightarrow \varphi(p)\varphi(s) = \varphi(r)\varphi(q)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & (p \cdot 1)(s \cdot 1) = (r \cdot 1)(q \cdot 1) \\ \Rightarrow \quad & (p \cdot 1)(q \cdot 1)^{-1} = (r \cdot 1)(q \cdot 1)^{-1} \end{aligned}$$

mit den Rechenregeln in Körpern.

Dass φ die Operationen $+$ und $\cdot$ respektiert, zeigt man (mit analogen Argumenten) direkt. □

Hilfreich ist die

(1.2) Bemerkung. Die Abbildung φ respektiert auch die Anordnungen; aus $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$ folgt $\varphi(a) < \varphi(b)$. Dies steckt eigentlich hinter der Injektivitätsaussage.

Wir haben also bewiesen, dass isomorphe Kopien von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ in K enthalten sind.

Nun zur Eindeutigkeit. Vorab merken wir an, dass Folgen und Konvergenzbegriff (II(1.1)) in beliebigen angeordneten Körpern eingeführt werden können.

(1.3) Lemma. *Sei K ein vollständiger angeordneter Körper, $\varphi\colon \mathbb{Q} \to K$ wie in (1.1) und $L\colon = \varphi(\mathbb{Q})$. Dann gilt:*

a) $\varphi(\mathbb{N})$ ist nicht nach oben beschränkt.

b) Zu allen $a, b \in K$ existiert ein $q \in L$ mit der Eigenschaft $a < q < b$.

c) Zu jedem $x \in K$ existiert eine Folge

$$(q_n)_{n \geqslant 1} \quad \text{in} \quad L \quad \text{mit} \quad \lim_{n \to \infty} q_n = x.$$

Beweis. a) und b) siehe I(2.24) und I(2.26), welche ja für alle vollständigen angeordneten Körper gelten.
Für c) kann man sich grundsätzlich auf Kapitel II berufen; wir gehen direkt vor: O. B. d. A. sei $x > 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot 1}\, x = 0$$

nach a) und im Intervall $\big((1-\frac{1}{n})x, x\big)$ existiert ein $q_n \in L$. Wegen

$$|x - q_n| = \frac{1}{n\cdot 1}\, x \to 0$$

folgt Konvergenz von (q_n) gegen x. □

Nun zur Eindeutigkeit.

(1.4) Satz. *Es seien K_1 und K_2 vollständige angeordnete Körper. Dann gibt es einen Isomorphismus $\psi\colon K_1 \to K_2$ von angeordneten Körpern; d. h.*

(i) ψ *ist bijektiv;*

(ii) $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$, $\psi(x\cdot y) = \psi(x)\cdot\psi(y)$ *für alle* $x, y \in K$*;*

(iii) $x < y \;\Rightarrow\; \psi(x) < \psi(y)$ *für alle* $x, y \in K$.

Beweis. Es seien $L_1 \subset K_1$, $L_2 \subset K_2$ die isomorphen Kopien von $\mathbb{Q}$. Definiere zunächst

$$\widetilde{\psi}\colon L_1 \to L_2 \quad \text{durch} \quad \widetilde{\psi}\left(\frac{p}{q}\cdot 1_{K_1}\right) := \frac{p}{q}\cdot 1_{K_2}.$$

Im Folgenden benutzen wir, dass die Ergebnisse aus Kapitel II (sinngemäß) auch für K_1 und K_2 gelten.
Offensichtlich gilt: Ist $(p_n)_{n\geqslant 1}$ eine CAUCHY-Folge oder Nullfolge in L_1, so ist $(\widetilde{\psi}(p_n))_{n\geqslant 1}$ eine CAUCHY-Folge oder Nullfolge in L_2, also auch in K_2.

Sei nun $x \in L_1$ und sei $(q_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge in L_1 mit $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$ (vgl. (1.3) c)). Definiere

$$\psi(x) : = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\psi}(q_n) \in L_2.$$

Zunächst existiert der Grenzwert, weil $(\widetilde{\psi}(q_n))_{n\geqslant 1}$ CAUCHY-Folge ist, also in K_2 konvergiert. Ist $(q_n^*)_{n\geqslant 1}$ eine weitere Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} q_n^* = x$, so ist $(q_n - q_n^*)_{n\geqslant 1}$ Nullfolge, also $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n^*$; damit ist ψ wohldefinert.

Aus den Grenzwertregeln in Kapitel II folgt, dass ψ Addition und Multiplikation respektiert und $\psi(x) \leqslant \psi(y)$ für alle $x, y \in K$ mit $x \leqslant y$. Falls $x < y$, gibt es nach (1.3) $a, b \in L_1$ mit $x < a < b < y$ und $\psi(a) = \widetilde{\psi}(a) < \widetilde{\psi}(b) = \psi(b)$ zeigt nun $\psi(x) < \psi(y)$. Also respektiert ψ die Anordnung und ist insbesondere injektiv. Die Surjektivität folgt mit einer Variante der Konstruktion von ψ: Zu $\widehat{x} \in K_2$ gibt es eine Folge $(\widehat{q}_n)_{n\geqslant 1}$ in L_2 mit $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{q}_n = \widehat{x}$. Dann erhält man mit $q_n :\ = \widetilde{\psi}^{-1}(\widehat{q}_n)$ eine Folge in L_1, die gegen ein $x \in K_1$ konvergiert und es gilt $\psi(x) = \widehat{x}$. □

§2. Kreisumfang, Folgen und LUDOLPHsche Zahl

Wie in Kapitel II erwähnt, werden Folgen oft herangezogen, um (Schritt für Schritt immer besser) Näherungswerte für gewisse Zahlen zu bestimmen. Ein klassisches (auf die alten Griechen zurückgehendes) Beispiel ist die näherungsweise Bestimmung des Umfanges U des Einheitskreises (d. h. Radius 1).

Dazu werden dem Einheitskreis regelmäßige N-Ecke um- bzw. einbeschreiben und im nächsten Approximationsschritt durch Winkelhalbierung regelmäßige $(2N)$-Ecke erzeugt. Sei a_n die halbe Seitenlänge des um- und b_n die halbe Seitenlänge sowie c_n die Höhe des einbeschriebenen N-Ecks, das im n-ten Iterationsschritt auftritt. Wir beginnen mit dem regelmäßigen Viereck.

Aus dem Satz des PYTHAGORAS und dem Strahlensatz erhalten wir

$$(2b_1)^2 = 1^2 + 1^2, \quad c_1^2 + b_1^2 = 1^2, \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{c_1},$$

also

$$(1) \qquad a_1 = 1, \quad b_1 = c_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Nun beschreiben wir allgemein den Übergang vom n-ten zum $(n+1)$-ten Iterationsschritt durch Winkelhalbierung

Der Strahlensatz impliziert wieder

$$(2) \qquad \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{c_n}$$

und der Satz des PYTHAGORAS

$$c_n^2 + b_n^2 = 1, \quad b_n^2 + (1 - c_n)^2 = (2b_{n+1})^2. \tag{3}$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$1 - c_n^2 + (1 - c_n)^2 = 4(1 - c_{n+1}^2),$$

also

$$c_{n+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + c_n)}\,. \tag{4}$$

Mit einer Induktion ergibt sich daraus sofort

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \leqslant c_n < 1 \quad \text{für alle} \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Mit (2) ergibt sich $a_n > 0$, $b_n > 0$ und

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= \frac{b_{n+1}^2}{c_{n+1}^2} = \frac{1 - c_{n+1}^2}{c_{n+1}^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}(1 + c_n)}{\frac{1}{2}(1 + c_n)} = \frac{1 - c_n}{1 + c_n} \\ &= \frac{1 - c_n^2}{(1 + c_n)^2} = \frac{b_n^2}{(1 + c_n)^2} = \frac{b_n^2}{(1 + b_n/a_n)^2} = \frac{a_n^2 b_n^2}{(a_n + b_n)^2}\,, \end{aligned}$$

also

$$a_{n+1} = \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}\,. \tag{6}$$

Weiterhin folgt aus (3) und (2)

$$\begin{aligned} 2b_{n+1}^2 &= \tfrac{1}{2}\left(b_n^2 + 1 - 2c_n + c_n^2\right) = 1 - c_n = \frac{1 - c_n^2}{b_n} \cdot \frac{b_n}{1 + c_n} \\ &= \frac{b_n^2}{b_n} \cdot \frac{b_n}{1 + b_n/a_n} = b_n \cdot \frac{a_n b_n}{a_n + b_n} = b_n a_{n+1}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Wegen $c_n < 1$ hat man sofort

$$0 < b_n < \frac{b_n}{c_n} = a_n\,. \tag{8}$$

Betrachtet man den Umfang A_n des um- und B_n des einbeschriebenen N-Ecks im n-ten Schritt, so hat man wegen $N = 2^{n+1}$

$$A_n = 2^{n+2} a_n, \quad B_n = 2^{n+2} b_n, \ \ n \in \mathbb{N}\,. \tag{9}$$

(2.1) [. *Satz von* ARCHIMEDES *(287-212 v. Chr.)*] *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

(i) $A_1 = 8, \quad B_1 = 4\sqrt{2}, \quad A_{n+1} = \dfrac{2A_nB_n}{A_n + B_n}, \quad B_{n+1}^2 = A_{n+1}B_n.$

(ii) $0 < B_n < A_n, \quad A_n > A_{n+1}, \quad B_n < B_{n+1}.$

(iii) $0 < A_n - B_n < (2 - \sqrt{2}) \cdot 4^{2-n}.$

Beweis. (i) Die Werte für A_1 und B_1 erhält man aus (9) und (1). Mit (9), (6) und (7) ergibt sich

$$A_{n+1} = 2^{n+3}\, a_{n+1} = 2^{n+3}\, \frac{a_nb_n}{a_n + b_n} = \frac{2A_nB_n}{A_n + B_n},$$

$$B_{n+1}^2 = 2^{2n+6}\, b_{n+1}^2 = 2^{2n+5} b_na_{n+1} = B_nA_{n+1}.$$

(ii) Wegen $0 < c_n < 1$ gemäß (5) hat man mit (8)

$$A_n - B_n = 2^{n+2}(a_n - b_n) > 0.$$

Mit (i) ergibt sich daraus

$$A_n - A_{n+1} = A_n - \frac{2A_nB_n}{A_n + B_n} = \frac{A_n(A_n - B_n)}{A_n + B_n} > 0$$

$$B_{n+1} - B_n = \frac{B_{n+1}^2 - B_n^2}{B_{n+1} + B_n} = \frac{B_n(A_{n+1} - B_n)}{B_{n+1} + B_n} > 0\,,$$

denn $A_n > B_n$ impliziert

$$A_{n+1} = \frac{2A_n}{A_n + B_n} B_n > B_n\,.$$

(iii) Nach (i) gilt $A_1 - B_1 = 4(2 - \sqrt{2})$. Also genügt es,

(10) $$\frac{A_{n+1} - B_{n+1}}{A_n - B_n} < \frac{1}{4} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

nachzuweisen. Mit (i) erhält man

$$\frac{A_{n+1}-B_{n+1}}{A_n-B_n} = \frac{A_{n+1}^2-B_{n+1}^2}{(A_n-B_n)\cdot(A_{n+1}+B_{n+1})} = \frac{A_{n+1}\cdot(A_{n+1}-B_n)}{(A_n-B_n)(A_{n+1}+B_{n+1})}$$
$$= \frac{A_{n+1}\left(\frac{2A_nB_n}{A_n+B_n}-B_n\right)}{(A_n-B_n)\cdot(A_{n+1}+B_{n+1})} = \frac{A_{n+1}B_n}{(A_{n+1}+B_{n+1})\cdot(A_n+B_n)}$$
$$= \frac{1}{\left(1+\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}}\right)\cdot\left(1+\frac{A_n}{B_n}\right)} = \frac{1}{(1+c_{n+1})\cdot(1+1/c_n)},$$

denn (2) und (9) implizieren

$$\frac{B_n}{A_n} = \frac{b_n}{a_n} = c_n\,.$$

Also ist (10) äquivalent zu

$$(1+c_{n+1})(1+1/c_n) \geqslant 4, \quad \text{d.h.} \quad c_{n+1}(1+1/c_n) \geqslant 3-1/c_n \quad \text{bzw.} \quad c_{n+1}(c_n+1) \geqslant 3c_n-1.$$

Wegen (5) ist die rechte Seite nicht-negativ und die Aussage nach (4) äquivalent zu

$$\frac{1}{2}(c_n+1)^3-(3c_n-1)^2 \geqslant 0\,.$$

Man rechnet nun nach

$$(c_n+1)^3-2(3c_n-1)^2 = c_n^3-15c_n^2+15c_n-1$$
$$= (c_n-1)(c_n^2-14c_n+1) = (c_n-1)(c_n-7-\sqrt{48})(c_n-7+\sqrt{48})\,.$$

Nach (5) gilt

$$1 > c_n \geqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{2} > 7-\sqrt{48}\,,$$

so dass der obige Ausdruck positiv und die Behauptung damit bewiesen ist. □

Geometrisch anschaulich gilt für den Kreisumfang

$$B_n < U < A_n\,,$$

wobei sich A_n und B_n nach Teil (iii) des Satzes beliebig nahe kommen.

In der Mathematik des klassischen Griechenland wurde der Grenzwertbegriff (auch intuitiv) nicht verwendet. Satz (2.1) wurde nur als Methode gesehen, für den Kreisumfang möglichst gute obere und untere Approximationen zu bestimmen.

Keine Zweifel gab es offenbar grundsätzlich an der Abschätzung des Kreisumfangs durch die Umfänge der ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Polygone. Wir gehen nun einen Schritt weiter, vermerken $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n - B_n) = 0$ und fassen $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$ (welche nach dem Monotoniekriterium II(2.2) existieren) als Kreisumfang auf. (Eine vertiefte Begründung wird in Analysis II gegeben, wenn allgemein Kurvenlängen eingeführt und diskutiert werden.) Mit den Ergebnissen aus Kapitel IV, §5 können wir diese Grenzwerte berechnen.

(2.2) Satz. *Für die Folgen $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$, $(c_n)_{n\geqslant 1}$, $(A_n)_{n\geqslant 1}$, $(B_n)_{n\geqslant 1}$ gilt*

(i) $a_n = \tan(\pi/2^{n+1}), \quad b_n = \sin(\pi/2^{n+1}), \quad c_n = \cos(\pi/2^{n+1}), \ n \in \mathbb{N}.$

(ii) $A_n = 2^{n+2}\tan(\pi/2^{n+1}), \quad B_n = 2^{n+2}\sin(\pi/2^{n+1}), \ n \in \mathbb{N}.$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = 2\pi.$

Beweis. (i) Wir verwenden eine Induktion nach n. Nach IV(5.6) gilt für $n = 1$

$$a_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \sin(\pi/4), \quad c_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \cos(\pi/4), \quad c_1 = 1 = \tan(\pi/4).$$

Sei $\varphi = \pi/2^{n+1}$ und es gelte

$$a_n = \tan\varphi, \quad b_n = \sin\varphi, \quad c_n = \cos\varphi.$$

Mit den Additionstheoremen und Gleichung (4) folgt

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+c_n)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos\varphi)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos(2\cdot\tfrac{\varphi}{2}))} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos^2\tfrac{\varphi}{2} - \sin^2\tfrac{\varphi}{2})} = \sqrt{\cos^2\tfrac{\varphi}{2}} = \cos\tfrac{\varphi}{2} = \cos(\pi/2^{n+2}), \end{aligned}$$

da $\cos\varphi \geqslant 0$. Analog ergibt sich mit Gleichung (7)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-c_n)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos^2\tfrac{2}{\varphi} + \sin^2\tfrac{\varphi}{2})} = \sqrt{\sin^2\tfrac{\varphi}{2}} \\ &= \sin\tfrac{\varphi}{2} = \sin(\pi/2^{n+2}), \end{aligned}$$

da $\sin\frac{\varphi}{2} \geqslant 0$. Aus Gleichung (2) folgt dann

$$a_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{\sin(\pi/2^{n+2})}{\cos(\pi/2^{n+2})} = \tan(\pi/2^{n+2}).$$

(ii) Man verwende (i) und Gleichung (9).
(iii) Es gilt nach (i) und (ii)

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} 2\pi \frac{\sin(\pi/2^{n+1})}{\pi/2^{n+1}} = 2\pi,$$

wenn man IV(5.2) benutzt. Weil $(B_n - A_n)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge ist, folgt die Behauptung auch für $(A_n)_{n\geqslant 1}$. □

Damit haben wir auch die geometrische Interpretation von π als den halben Umfang des Einheitskreises. Dieses Ergebnis rechtfertigt dann auch die Verwendung des Bogenmaßes statt des Winkelmaßes.

§3. Mehr zu Häufungspunkten, lim sup und lim inf

Wir wollen zunächst die Beziehung zwischen Häufungspunkten einer Folge und ihrer Wertemenge genauer betrachten.

(3.1) Satz. *Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine (reelle oder komplexe) Folge mit Wertemenge M.*

a) Ist a Häufungspunkt von M, so auch von $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

b) Ist a Häufungspunkt von (a_n), nicht aber von M, so gibt es eine konstante Teilfolge von (a_n) mit Wert a.

c) Die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist abgeschlossen.

Beweis. a) Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ einen Index n_k so, dass $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ und man kann die Folge der n_k auch streng monoton wachsend wählen (da in $U_{1/k}(a)$ unendlich viele Elemente von M liegen). Also ist $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ Häufungspunkt der Folge.
b) Es gibt ein $\rho > 0$, so dass $U_\rho(a) \cap M$ höchstens das Element a enthält. Andererseits gibt es eine Teilfolge $(n_j)_{j\geqslant 1}$, so dass $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = a$. Es gibt nun ein j_0 so, dass $|a_{n_j} - a| < \rho$ für alle $j > j_0$. Damit $a_{n_j} = a \in M$ für alle $j > j_0$.
c) Es sei N die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $b \in \overline{N}$. Dann gibt es eine Folge $(b_k)_{k\geqslant 1}$ in N so, dass $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$. Zu jedem b_k gibt es ein $n_k \in \mathbb{N}$ derart,

dass $|a_{n_k} - b_k| < \frac{1}{k}$ und man kann annehmen, dass die Folge der n_k strikt monoton wächst. Da $(a_{n_k} - b_k)_{k\geqslant 1}$ eine Nullfolge ist, ist $b = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ Häufungspunkt der Folge. □

Wir wissen aus Kapitel I §4, dass es Folgen mit Wertebereich $\mathbb{Q}$ oder auch mit Wertebereich $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ gibt (Abzählbarkeit); die Menge der Häufungspunkte ist dann gleich $\mathbb{R}$ bzw. $[0,1]$. Wir wollen an einem relativ einfachen Beispiel zeigen, dass auch "natürlich" aussehende Folgen sehr kompliziertes Verhalten bezüglich Häufungspunkten haben können.

(3.2) Beispiel. Die Folge $(a_n)_{n\geqslant 0}$ sei mit $0 \leqslant a_0 \leqslant 1$ rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = 4a_n(1-a_n).$$

Wegen $0 \leqslant 4x(1-x) \leqslant 1$ für alle $x \in [0,1]$ gilt stets $0 \leqslant a_n \leqslant 1$. Es gibt also für jedes n ein $\vartheta_n \in [0,1]$, so dass

$$a_n = \sin^2(\pi \cdot \vartheta_n).$$

(ϑ_n ist i. Allg. nicht eindeutig, aber das stört nicht.)
Für die ϑ_n wird die Rekursion sehr einfach: Man kann $\vartheta_{n+1} = [2\vartheta_n]$ (mit der Gaußklammer $[\,.\,]$) wählen, denn aus $a_n = \sin^2(\pi \cdot \vartheta_n)$ folgt mit trigonometrischen Identitäten

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4\sin^2(\pi\cdot\vartheta_n)\big(1-\sin^2(\pi\cdot\vartheta_n)\big) \\ &= \big(2\sin(\pi\cdot\vartheta_n)\cdot\cos(\pi\cdot\vartheta_n)\big)^2 \\ &= \sin^2(2\pi\cdot\vartheta_n). \end{aligned}$$

Setzt man nun für ϑ_0 eine dyadische Entwicklung (III(2.16) mit $g=2$) an, also

$$\vartheta_0 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k 2^{-k} \quad \text{mit} \quad d_k \in \{0,1\}, \;\; k \in \mathbb{N},$$

so folgt

$$\vartheta_n = \sum_{k=1}^{\infty} d_{k+n} 2^{-k} \quad \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Da man die Folge der d_k beliebig wählen kann, lässt sich bei geeigneter Wahl von ϑ_0 jede beliebige abzählbare Teilmenge $M \subset [0,1]$ als Menge von Häufungspunkten der Folge $(\vartheta_n)_{n\geqslant 0}$ realisieren; mit der stetigen Abbildung $\sin^2$ überträgt sich das auf die Folge $(a_n)_{n\geqslant 0}$.
Das Ausknobeln der Details bleibt Leserin und Leser überlassen. (*Tipp*: Jedem $x \in [0,1]$ kommt man durch einen endlichen dyadischen Bruch $\sum_{l=1}^{N} e_l 2^{-l}$ beliebig nahe. Man kann den "String" $(e_1, \ldots, e_n)$ in die Entwicklung von ϑ_0 an geeigneter Stelle einbauen.)

Als Nächstes wollen wir in Fortsetzung von Kapitel II §2 (insbesondere II(2.12) und II(2.13)) noch etwas mehr über Limes superior und Limes inferior sagen. Es gelten einige Grenzwertregeln:

(3.3) Satz. *Es seien* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *und* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *reelle Folgen und* $\alpha \in \mathbb{R}^*$. *Dann gelten (mit den Konventionen*

$$\begin{aligned}
&c + \infty = \infty = \infty + \infty = \infty \quad \text{für alle } \; c \in \mathbb{R},\\
&a \cdot \infty = \infty \quad \text{für alle } \; a \in \mathbb{R}^*_+,\\
&c - \infty = -\infty - \infty = -\infty \quad \text{für alle } \; c \in \mathbb{R},\\
&a \cdot (-\infty) = -\infty \quad \text{für alle } \; a \in \mathbb{R}^*_+ \quad \text{sowie}\\
&a \cdot \infty = -\infty, \quad a \cdot (-\infty) = \infty \quad \text{für alle } \; a \in \mathbb{R}^*_- \;)
\end{aligned}$$

die folgenden Regeln

a) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$, *so lange nicht* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ *oder vice versa.*

b) $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geqslant \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$, *so lange nicht* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ *oder vice versa.*

c) $\limsup\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ *für* $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$,

$\liminf\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ *für* $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$.

d) $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$,

$\liminf\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Beweis. a) Für $\limsup a_n = \infty$ oder $\limsup b_n = \infty$ ist nichts zu zeigen. Falls etwa $\limsup a_n = -\infty$, ist (a_n) bestimmt divergent gegen $-\infty$ (vgl. II(2.13) und II(2.10)) und wegen

$$\sup\{b_m;\ m \geqslant n\} < \infty \quad \text{für alle } \; n$$

folgt bestimmte Divergenz von $a_n + b_n$ gegen $-\infty$.
Nun seien $A\colon = \limsup a_n$ und $B\colon = \limsup b_n$ reelle Zahlen. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_n - A < \frac{\varepsilon}{2}, \quad b_n - B < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } \; n \geqslant N.$$

Es folgt

$$a_n + b_n < A + B + \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geqslant N,$$

also

$$\sup\{a_n + b_n;\ n \geqslant N\} \leqslant A + B + \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, folgt die Behauptung. Der Beweis von b) läuft analog.
Die Aussagen aus c) und d) folgen aus den leicht verifizierbaren Regeln:

$$\begin{aligned} \sup(\alpha \cdot M) &= \alpha \cdot \sup(M), \quad \inf(\alpha \cdot M) = \alpha \cdot \inf(M), \\ \sup(-M) &= -\inf(M), \quad \inf(-M) \quad = -\sup(M), \end{aligned}$$

für jede nicht-leere Menge M und jedes $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. (Für Letzteres siehe z. B. den Beweis von I(2.21).) □

Hilfreich sind die

(3.4) Bemerkungen. a) Die Ungleichungen in (3.3) a) und b) lassen sich nicht zu Gleichungen verschärfen.
b) Für die ausgesparten Fälle in (3.3) a) und b) lässt sich nichts sagen, da es zum einen keine sinnvolle Definition von $\infty - \infty$ in diesem Kontext gibt und zum anderen etwa für $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ im Fall $\limsup a_n = \infty$, $\limsup b_n = -\infty$ alles möglich ist.

Der Illustration dienen die

(3.5) Beispiele. a) Sei

$$a_n = \begin{cases} -1, & n \text{ gerade} \\ 1, & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und} \quad b_n = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ -1, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann $\limsup a_n = \limsup b_n = 1$, $\liminf a_n = \liminf b_n = -1$ und

$$\limsup(a_n + b_n) = \liminf(a_n + b_n) = 0.$$

Also gelten in (3.3) a) und b) je strikte Ungleichungen.
b) Falls $a_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$, $b_n = -n^2$ $(n \in \mathbb{N})$, so $\limsup a_n = \infty$, $\limsup b_n = -\infty$ und $\limsup(a_n + b_n) = -\infty$. Für $a_n = n^2$, $b_n = -n$ erhält man $\limsup a_n = \infty$, $\limsup b_n = -\infty$ und $\limsup(a_n + b_n) = \infty$. Für $a_n = n$, $b_n = -n + 1$ schließlich ist $\limsup a_n = \infty$, $\limsup b_n = -\infty$ und $\limsup(a_n + b_n) = 1$.

Schließlich wollen wir auch noch lim sup und lim inf für Funktionen einführen. Man kann dies wie folgt angehen.

(3.6) Lemma. *Es sei $D \subset \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D und $f\colon D \to \mathbb{R}$. Für $h > 0$ setze man*

$$\sigma_h \colon = \sup\{f(x);\ x \in (x_0 - h, x_0 + h) \cap D\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$
$$\iota_h \colon = \inf\{f(x);\ x \in (x_0 - h, x_0 + h) \cap D\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

a) *Gibt es ein $h_0 > 0$, so dass $\sigma_{h_0} < \infty$, so ist $\sigma_h < \infty$ für alle $0 < h < h_0$ und $(0, h_0) \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \sigma_h$ ist monoton wachsend.*

b) *Gibt es ein $h_0 > 0$, so dass $\iota_{h_0} > -\infty$, so ist $\iota_h > -\infty$ für alle $0 < h < h_0$ und $(0, h_0) \to \mathbb{R}$, $h \to \iota_h$ ist monoton fallend.*

Beweis. Für $0 < h_1 < h_2$ ist

$M_1 \colon = \big\{f(x); x \in \{x_0 - h_1, x_0 + h_1\} \cap D\big\} \subset \big\{f(x); x \in \{x_0 - h_2, x_0 + h_2\} \cap D\big\} =\colon M_2$,

also $\sup M_1 \leqslant \sup M_2$ und $\inf M_1 \geqslant \inf M_2$. □

Damit ist Folgendes wohldefiniert.

(3.7) Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D und $f\colon D \to \mathbb{R}$.

(i) Falls $\sigma_h = \infty$ für alle $h > 0$, setze

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \colon = \infty.$$

Falls $\sigma_{h_0} < \infty$ für ein $h_0 > 0$, setze

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \colon = \lim_{h \downarrow 0} \sigma_h.$$

(ii) Falls $\iota_h = -\infty$ für alle $h > 0$, setze

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \colon = -\infty.$$

Falls $\iota_{h_0} > -\infty$ für ein $h_0 > 0$, setze

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \colon = \lim_{h \downarrow 0} \iota_h.$$

Man beachte, dass die Grenzwerte je nach dem Monotoniekriterium (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ bzw. in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$) existieren.

(3.8) Beispiel. $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x \to \cos\frac{1}{x}$. Es gilt

$$\sup\{f(x);\ x \in (-h,h)\} = 1$$

für alle $h > 0$, denn es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{2\pi k} < h \quad \text{und} \quad \cos(2\pi k) = 1.$$

Also $\limsup\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Analog zeigt man $\liminf\limits_{x\to 0} f(x) = -1$.

Wir wollen Limes superior und Limes inferior für Funktionen nicht allzu ausführlich diskutieren und beschränken uns nur noch auf zwei Bemerkungen.

(3.9) Bemerkung. Die Aussagen aus (3.3) (mit offensichtlichen Modifikationen) gelten auch für Funktionen.

(3.10) Bemerkung. Auf der Grundlage von (3.6) lassen sich in naheliegender Weise auch

$$\limsup_{x\uparrow x_0} f(x), \quad \liminf_{x\uparrow x_0} f(x) \quad (\text{wobei } \ x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}),$$

sowie

$$\limsup_{x\downarrow x_0} f(x), \quad \liminf_{x\downarrow x_0} f(x) \quad (\text{wobei } \ x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$$

definieren.

§4. Mehr zu bedingt konvergenten Reihen

Wie sich in Kapitel III gezeigt hat, ist mit absolut konvergenten Reihen in gewisser Weise einfacher umzugehen. In diesem Abschnitt blicken wir etwas genauer auf bedingt konvergente Reihen.

Zunächst verallgemeinern wir das LEIBNIZ-Kriterium (auch) für komplexe Reihen. Als Hilfsmittel leiten wir zunächst eine Identität her, die auf Niels Hendrik ABEL (1802-1829) zurückgeht.

(4.1) Satz. *(*ABEL*sche partielle Summation)*
Gegeben seien komplexe Folgen $(a_k)_{k\geqslant 1}$ *und* $(b_k)_{k\geqslant 1}$. *Setzt man* $A_n := \sum_{k=1}^n a_k, n \in \mathbb{N}$, *so gilt für alle* $1 \leqslant p \leqslant q$

$$\sum_{k=p}^{q} a_k b_k = \sum_{k=p}^{q} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_q b_{q+1} - A_{p-1} b_p,$$

insbesondere

$$\sum_{k=1}^{q} a_k b_k = \sum_{k=1}^{q} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_q b_{q+1}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} a_k b_k &= \sum_{k=p}^{q} (A_k - A_{k-1}) b_k &&= \sum_{k=p}^{q} A_k b_k - \sum_{k=p}^{q} A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=p}^{q} A_k b_k - \sum_{k=p-1}^{q-1} A_k b_{k+1} &&= \sum_{k=p}^{q} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_q b_{q+1} - A_{p-1} b_p.\end{aligned}$$

Der Spezialfall folgt mit $A_0 = 0$. □

Als Anwendung beweisen wir ein Kriterium von Johann Peter Gustav Lejeune DIRICHLET (1805-1859), der in Düren geboren wurde.

(4.2) Satz. *(*DIRICHLET*-Kriterium)*
Gegeben sei ein komplexe Folge $(a_k)_{k\geqslant 1}$, *so dass die Folge der Partialsummen* $(A_n)_{n\geqslant 1} = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)_{n\geqslant 1}$ *beschränkt ist. Ist* $(b_k)_{k\geqslant 1}$ *eine reelle, monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k.$$

Beweis. Es gelte $|A_n| \leqslant M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b_k| < \frac{\varepsilon}{2M}$ für alle $k \geqslant n_0$. Mit (4.2) erhält man für alle $q \geqslant p \geqslant n_0$

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{k=p}^{q} a_k b_k\Big| &= \Big|A_q b_{q+1} - A_{p-1} b_p + \sum_{k=p}^{q} A_k (b_k - b_{k+1})\Big| \\ &\leqslant |A_q| \cdot b_{q+1} + |A_{p-1}| \cdot b_p + \sum_{k=p}^{q} |A_k| \cdot (b_k - b_{k+1}), \end{aligned}$$

wenn man die Dreiecksungleichung verwendet und ausnutzt, dass $(b_k)_{k\geqslant 1}$ monoton fallend ist. Daraus folgt

$$\Big|\sum_{k=p}^{q} a_k b_k\Big| \leqslant M \left(b_{q+1} + b_p + \sum_{k=p}^{q} (b_k - b_{k+1}) \right) = 2M b_p < \varepsilon.$$

Nach dem CAUCHY-Kriterium III(1.9) konvergiert die Reihe. □

Hilfreich sind die folgenden

(4.3) Beispiele. a) Setzt man $a_k = (-1)^k$, also $A_n \in \{-1, 0\}$, so erhält man aus (4.2) als Spezialfall einen neuen Beweis für das LEIBNIZ-Kriterium III(1.11).
b) Sei $q \in \mathbb{C}$, $|q| \leqslant 1$, $q \neq 1$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k},$$

denn $(b_k)_{k\geqslant 1} = \left(\frac{1}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ ist eine reelle, monoton fallende Nullfolge und für $a_k = q^k$ hat man wegen $q \neq 1$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = q \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

nach der geometrischen Summenformel I(1.9). Wegen $|q| \leqslant 1$ folgt

$$|A_n| \leqslant |q| \cdot \frac{|q|^n + 1}{|q - 1|} \leqslant \frac{2}{|q - 1|},$$

also die Beschränktheit. Für $q = 1$ gilt die Aussage nicht (vgl. III(1.6)).

Schließlich wollen wir noch das Verhalten bedingt konvergenter Reihen bei Umordnungen betrachten. Der folgende Satz, der auf Bernhard RIEMANN (1826-1866) zurückgeht, zeigt, dass die Lage völlig anders ist als bei absolut konvergenten Reihen.

(4.4) Satz. *(*RIEMANN*scher Umordnungssatz)*
Sei $(a_k)_{k\geqslant 1}$ eine reelle Folge und für $k \in \mathbb{N}$

$$a_k^+ := \frac{1}{2}(a_k + |a_k|) = \max\{0, a_k\}, \quad a_k^- = \frac{1}{2}(|a_k| - a_k) = \max\{0, -a_k\},$$

also $a_k = a_k^+ - a_k^-$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sei bedingt konvergent. Dann gilt:
a) Die beiden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ divergieren bestimmt gegen ∞.
b) Ist $c \in \mathbb{R}$ beliebig oder $c \in \{\pm\infty\}$, dann gibt es eine Umordnung $(n_k)_{k\geqslant 1}$, so dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ gegen c konvergiert bzw. bestimmt divergiert.

Beweis. (Skizze.) a) Würde etwa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ konvergieren, so auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$$

nach III(1.7). Das ist ein Widerspruch, da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.
b) Sei $M = \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \geqslant 0\}$, $c \in \mathbb{R}$. Dann sind M und $\mathbb{N}\backslash M$ nach a) unendlich. Wir setzen $n_1 := 1$. Sind $n_1, \dots, n_k$ bereits konstruiert, so sei

$$n_{k+1} := \begin{cases} \min\,(M\backslash\{n_1, \dots, n_k\}), & \text{falls } \sum\limits_{j=1}^{k} a_{n_j} < c, \\ \min\,(\mathbb{N}\backslash(M \cup \{n_1, \dots, n_k\})), & \text{falls } \sum\limits_{j=1}^{k} a_{n_j} \geqslant c. \end{cases}$$

Wegen a) erhält man auf diese Weise eine Umordnung. Da $(a_k)_{k\geqslant 1}$ nach III(1.8) eine Nullfolge ist, konvergiert die Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ gegen c. Für $c = \pm\infty$ geht man ähnlich vor. □

§5. Doppelreihen

Doppelt indizierte Reihen der Gestalt $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ (oder allgemeiner mehrfach indizierte Reihen mit 2 oder mehr Indizes) kommen in der Mathematik und ihren Anwendungen durchaus vor. Es stellt sich natürlich die Frage, wie (und ob) man hier Konvergenz definieren kann. Aus I(4.4) wissen wir, dass es eine Bijektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt, also könnte man $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ als Grenzwert der

Doppelreihe definieren, wenn dieser denn existiert. Andererseits gibt es auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ keine "natürliche" Anordnung mehr, weshalb die spezielle Wahl der Bijektion φ problematisch erscheint, vor allem mit Blick auf RIEMANNs Umordnungssatz (4.3). Deshalb betrachten wir im Folgenden nur absolute Konvergenz.

Wir starten mit Doppelreihen mit nichtnegativen Gliedern.

(5.1) Definition. Gegeben sei $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $(m,n) \mapsto a_{mn}$. Für $M, N \in \mathbb{N}$ sei

$$A_{MN} := \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_{mn}.$$

Man nennt die Doppelreihe $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ mit nichtnegativen Gliedern *konvergent*, wenn

$$a := \sup\{A_{MN};\ M \in \mathbb{N},\ N \in \mathbb{N}\}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Des Weiteren nennt man dann a den *Grenzwert* der Doppelreihe; in Zeichen

$$a = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}.$$

Wieder findet das Symbol $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ für zwei unterschiedliche Objekte Verwendung.

Zunächst machen wir uns klar, dass diese Definition konsistent ist mit beliebigen Abzählungen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(5.2) Satz. *Seien a_{mn} wie in* (5.1) *gegeben. Ist $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ konvergent mit Grenzwert a und ist $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine (beliebige) Bijektion, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ konvergent im Sinn von* III(1.2), *mit Grenzwert a.*

Beweis. Zu $K \in \mathbb{N}$ existieren $M, N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\{\tau(k);\ 1 \leqslant k \leqslant K\} \subset \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}.$$

Also $\sum_{k=1}^{K} a_{\tau(k)} \leqslant A_{MN}$. Andererseits gibt es zu $M^*, N^* \in \mathbb{N}$ ein $K^* \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\{1, \dots, M^*\} \times \{1, \dots, N^*\} \subset \{\tau(k),\ 1 \leqslant k \leqslant K^*\}$$

und somit $A_{M^*N^*} \leqslant \sum_{k=1}^{K^*} a_{\tau(k)}$. Es folgt

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{K} a_{\tau(k)};\ K \in \mathbb{N}\right\} \leqslant A_{MN} \leqslant \sup\left\{\sum_{k=1}^{K} a_{\tau(k)};\ K \in \mathbb{N}\right\}$$

und die Behauptung. □

Umgekehrt lässt sich genau so zeigen, dass die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ (unter den Voraussetzungen von (5.1) die Konvergenz der Doppelreihe nach sich zieht.

Nun zum eigentlichen Thema.

(5.3) Definition. Gegeben sei $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $(m,n) \mapsto c_{mn}$. Man nennt die Doppelreihe $\sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}$ *absolut konvergent*, wenn $\sum_{m,n=1}^{\infty} |c_{mn}|$ im Sinne von (5.1) konvergiert. (Sinngemäß überträgt sich dies auf $\sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn}$, usw.)

Wichtig ist in diesem Zusammenhang der folgende

(5.4) Satz. *Sei $\sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}$ absolut konvergent. Für jede Bijektion $\tau\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist dann $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\tau(k)}$ absolut konvergent im Sinn von* III(2.1) *und der Grenzwert hängt nicht von der Wahl der Bijektion ab.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\tau(k)}$ eine CAUCHY-Folge bilden. Sei $\varepsilon > 0$. Mit $a_{mn} : = |c_{mn}|$,

$$A_{MN} : = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_{mn} \quad \text{und} \quad a = \sup\{A_{MN};\ M, N \in \mathbb{N}\}$$

gibt es dann $M^*, N^* \in \mathbb{N}$ so, dass $|a - A_{mn}| < \varepsilon$ für alle $M \geqslant M^*$, $N \geqslant N^*$. Es folgt

$$\sum_{m=M+1}^{M'} \sum_{n=N+1}^{N'} a_{mn} < \varepsilon \quad \text{für alle } \ M' > M,\ N' > N.$$

Nun wähle $K^* \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\{\tau(k);\ k > K^*\} \cap \{1, \ldots, M^*\} \cap \{1, \ldots, N^*\} = \emptyset.$$

Für $K^* < K < K'$ gibt es dann $M < M'$, $N < N'$, derart, dass

$$\sum_{k=K+1}^{K'} a_{\tau(k)} \leqslant \sum_{m=M+1}^{M'} \sum_{n=N+1}^{N'} a_{mn} < \varepsilon,$$

also $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\tau(k)}$ absolut konvergent.
Ist $\widetilde{\tau}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine weitere Bijektion, so ist $\tau^{-1} \circ \widetilde{\tau}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, also eine Umordnung von $\mathbb{N}$. Die letzte Aussage des Satzes folgt also aus dem Umordnungsgesetz III(2.13). □

Wir behandeln ein konkretes

(5.5) Beispiel. *Die geometrische Reihe.*
Seien $x, y \in \mathbb{C}$. Die Reihe

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} x^m y^n$$

ist für $|x| < 1$ und $|y| < 1$ absolut konvergent und der Grenzwert ist gleich

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-y}.$$

Denn für $\rho < 1$ und $|x| < \rho$, $|y| < \rho$ ist

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} |x^m y^n| &\leqslant \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \rho^{m+n} \\
&= \sum_{m=0}^{M} \rho^m \left(\sum_{n=0}^{N} \rho^n \right) \\
&= \sum_{m=0}^{M} \rho^m \, \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho} \\
&= \frac{1-\rho^{M+1}}{1-\rho} \cdot \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho} \\
&\leqslant \frac{1}{(1-\rho)^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Mit (5.4) ergibt sich nun für $|x| < 1$, $|y| < 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n=0}^{\infty} x^m y^n &= \lim_{N\to\infty} \sum^{N} S_{m=0} \sum_{n=0}^{N} x^m y^n \\
&= \left(\frac{1-x^{N+1}}{1-x} \right) \left(\frac{1-y^{N+1}}{1-y} \right) \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{1-x} \, \frac{1}{1-y}.
\end{aligned}$$

Eine manchmal nützliche Weiterentwicklung beinhaltet die folgende

(5.6) Bemerkung. Ist $\sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}$ im Sinne von (5.3) absolut konvergent mit Grenzwert c, so existiert auch

$$d_n : = \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und erfüllt $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = c$, also

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} \right).$$

Dies folgt *nicht* automatisch aus (5.4), kann aber ohne allzu großen Aufwand bewiesen werden.

§6. Monotone und konvexe Funktionen

In diesem Abschnitt sollen nochmal monotone und konvexe Funktionen betrachtet werden. Insbesondere geht es um (Un-)Stetigkeitsstellen dieser Klassen von Funktionen. Wie sich zeigt, ergeben die Eigenschaften Monotonie bzw. Konvexität hier starke Restriktionen.

Wir beginnen mit der Charakterisierung einer speziellen Klasse von Unstetigkeitsstellen.

(6.1) Definition. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ innerer Punkt von $D \cup \{x_0\}$. Man nennt x_0 *Sprungstelle* von f, wenn $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$ beide existieren, aber verschieden sind.

Damit lassen sich Unstetigkeitsstellen monotoner Funktionen analysieren; insbesondere "gibt es nicht so viele von diesen".

(6.2) Satz. *Seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion.*
a) Für jedes $x_0 \in (a, b]$ und jedes $x_1 \in [a, b)$ existieren

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \sup\{f(x) \mid a \leqslant x < x_0\} \quad \textit{und} \quad \lim_{x \downarrow x_1} f(x) = \inf\{f(x) \mid x_1 < x \leqslant b\}.$$

b) Ist f nicht stetig in $x_0 \in (a, b)$, so ist x_0 eine Sprungstelle von f.
c) Die Anzahl der Unstetigkeitsstellen von f ist abzählbar.

Beweis. a) Sei $L := \sup\{f(x) \mid a \leqslant x < x_0\}$. Da f monoton wachsend ist, gilt $L \leqslant f(x_0)$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $x' \in [a, x_0)$ mit $L - \varepsilon < f(x') \leqslant L$. Weil f monoton wächst, folgt $L - \varepsilon < f(x) \leqslant L$ für alle $x \in [x', x_0)$. Mit $\delta := x_0 - x'$ erhält man $L - \varepsilon < f(x) \leqslant L$, also $|f(x) - L| < \varepsilon$, für alle x mit $0 < x_0 - x < \delta$. Es folgt $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) = L$.
Der zweite Teil wird analog bewiesen.
b) Man verwende a) und (6.1).
c) Die Menge der Unstetigkeitsstellen in (a, b) ist nach a)

$$M = \{x_0 \in (a, b);\ \lim_{x \uparrow x_0} f(x) < \lim_{x \downarrow x_0} f(x)\}.$$

Zu $x_0 \in M$ wählt man $r(x_0) \in \mathbb{Q}$ mit

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) < r(x_0) < \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$$

nach I(2.26). Dann gilt $f(x) < r(x_0) < f(x')$ für alle $a \leqslant x < x_0 < x' \leqslant b$. Daraus folgt sofort $r(x_0) < r(x_1)$ für alle $x_0, x_1 \in M$ mit $x_0 < x_1$. Demnach ist die Abbildung $r : M \to \mathbb{Q}$ streng monoton wachsend und somit injektiv. Weil $\mathbb{Q}$ nach I(4.6) abzählbar ist, ist dann auch M abzählbar. $\square$

Der Einordnung dienen die

(6.3) Bemerkungen. a) Natürlich kann man monoton fallende Funktionen f analog behandeln (oder $-f$ betrachten). Auf die Monotonie von f kann man in c) nicht verzichten, da die DIRICHLETsche Sprungfunktion in jedem Punkt aus $\mathbb{R}$ unstetig ist.
b) Satz (6.2) gilt auch im Fall, dass x^* innerer Punkt von $[a, b]$ und $f\colon [a, b] \setminus \{x^*\}$ monoton ist. Im Beweis von a) muss nur für $x_0 = x^*$ die Begründung der Existenz von L modifiziert werden. Dazu nimm ein $x_1 > x^*$. Wegen $f(x) \leqslant f(x_1)$ für alle $x \in [a, x^*)$ ist $\{f(x);\ a \leqslant x < x_0\}$ nach oben beschränkt.

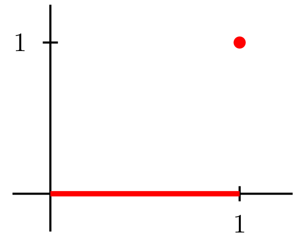
Nun wollen wir konvexe Funktionen betrachten. Nach V(4.1) heißt eine reellwertige Funktion f auf einem Intervall I konvex, wenn für alle $x_0, x_1 \in I$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$f\big((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1\big) \leqslant (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1).$$

Es ist nicht richtig, dass konvexe Funktionen schon stetig sind.

(6.4) Beispiel. Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$

Dann ist f konvex: Für $x_0 < 1$ und $x_1 < 1$ ergibt die Bedingung auf beiden Seiten 0, ist also trivialerweise erfüllt. Für (etwa) $x_0 < 1$und $x_1 = 1$ ergibt die linke Seite Null und die rechte Seite λ, falls $\lambda < 1$, und beide Seiten ergeben 1, wenn $\lambda = 1$. Aber f ist in 1 nicht stetig.



Wir zeigen aber nun, dass Unstetigkeit bei konvexen Funktionen nur in Randpunkten auftreten kann.

(6.5) Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht ausgeartetes Intervall, x^* ein innerer Punkt von I und $f\colon I \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f stetig in x^*.*

Beweis. (i) Betrachte

$$g\colon I\backslash\{x^*\} \to \mathbb{R}, \quad g(x)\colon = \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}.$$

Ist $x_0 < x^* < x_1$ mit $x_0, x_1 \in I$ und $\lambda \in (0,1)$ derart, dass $x^* = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$, so ist

$$g(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x^*)}{x_0 - x^*} \leqslant \frac{f(x_1) - f(x^*)}{x_1 - x^*} = g(x_1)$$

nach dem Beweis von V(4.2), erster Teil. Ist $x^* < x_0 < x_1$ und λ so, dass $x_0 = (1-\lambda)x^* + \lambda x_1$, so ergibt derselbe Beweis

$$\frac{f(x_0) - f(x^*)}{x_0 - x^*} \leqslant \frac{f(x_1) - f(x^*)}{x_1 - x^*}$$

(mit passend geänderten Bezeichnungen). Also ist $g|_{(x^*,\infty)\cap I}$ monoton wachsend und analog folgt, dass $g|_{(-\infty,x^*)\cap I}$ monoton wächst. Also ist g auf $I\backslash\{x^*\}$ monoton wachsend.

(ii) Nach (6.2) existieren nun $\lim\limits_{x \uparrow x^*} g(x)$ und $\lim\limits_{x \downarrow x^*} g(x)$. Wegen $f(x) - f(x^*) = (x - x^*) \cdot g(x)$ und $\lim\limits_{x \to x^*} (x - x^*) = 0$ folgt nun

$$\lim_{x \uparrow x^*} \big(f(x) - f(x^*)\big) = \lim_{x \downarrow x^*} \big(f(x) - f(x^*)\big) = 0.$$

Also ist f in x^* stetig. □

Index der Notationen

Index