

SKRIPT ZUR VORLESUNG

Mathematische Methoden der Physik I

FÜR DIE BACHERLORSTUDIENGÄNGE
PHYSIK, PHYSIK PLUS UND LEHRAMT PHYSIK

WINTERSEMESTER 2024/2025

Dr. Alexander Voigt

Dr. Alexander Voigt
Institut für Theoretische Festkörperphysik
RWTH Aachen
Aachen, Deutschland

Dieses Vorlesungsskript basiert auf dem Skript zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik I“ von Prof. Dr. Volker Meden, RWTH Aachen, gehalten im Wintersemester 2023/2024, sowie zu Teilen auf dem Buch „Mathematik“ von Tilo Arens et. al., 4. Auflage, Springer Spektrum.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	7
1.1	Funktionen	7
1.2	Differentialgleichungen	9
1.3	Komplexe Zahlen	14
1.4	Vektorräume	16
2	Analysis	21
2.1	Mengen und Quantoren	22
2.2	Der Funktionsbegriff	24
2.2.1	Eigenschaften von Funktionen	27
2.2.2	Implizite Funktionen	37
2.2.3	Umkehrfunktion	38
2.2.4	Verkettung von Funktionen	44
2.3	Folgen und Grenzwerte	45
2.4	Grenzwerte von Funktionen	50
2.4.1	Stetigkeit	51
2.5	Spezielle Funktionen	53
2.5.1	Polynome	54
2.5.2	Gebrochenrationale Funktionen	57
2.5.3	Exponentialfunktion	63
2.5.4	Hyperbelfunktionen	67
2.5.5	Trigonometrische Funktionen	68
2.6	Differentiation	73
2.6.1	Definition der Ableitung	73
2.6.2	Ableitungsfunktionen	76
2.6.3	Ableitungsregeln	81
2.7	Integration	87
2.7.1	Unbestimmtes Integral	87
2.7.2	Integrationsmethoden	89
2.7.3	Bestimmtes Integral	101
2.7.4	Uneigentliches Integral	110
3	Reihen	119
3.1	Reihen	120

3.2	Potenzreihen	122
3.2.1	Landau-Symbol	123
3.2.2	Geometrische Reihe	123
3.2.3	Reihendarstellung der Exponentialfunktion	124
3.2.4	Reihendarstellung der Hyperbelfunktionen	126
3.2.5	Reihendarstellung der trigonometrischen Funktionen	128
3.3	Taylorreihe	131
3.3.1	Taylorpolynom	131
3.3.2	Taylorreihe	137
3.3.3	Taylorpolynome zusammengesetzter Funktionen	138
3.3.4	Taylorentwicklung in dimensionsbehafteten Größen	143
4	Komplexe Zahlen	145
4.1	Definition	145
4.2	Polardarstellung komplexer Zahlen	149
4.3	Komplexe Wurzel	154
4.4	Komplexwertige Funktionen mit komplexen Argumenten	156
5	Differentialgleichungen	159
5.1	Differentialgleichungen	160
5.2	Differentialgleichungen 1-ter Ordnung	162
5.2.1	Richtungsfeld	163
5.2.2	Separable Differentialgleichungen	164
5.2.3	Lineare Differentialgleichungen	169
5.2.4	Nicht-lineare Differentialgleichungen	174
5.3	Differentialgleichungen n -ter Ordnung	175
5.3.1	Homogene lineare Differentialgleichung	176
5.3.2	Inhomogene lineare Differentialgleichung	178
5.4	Anwendungen	181
5.4.1	Gedämpfter harmonischer Oszillator	181
5.4.2	Getriebener gedämpfter harmonischer Oszillator	185
6	Lineare Algebra	191
6.1	Der Vektorraum	192
6.1.1	Definition	192
6.1.2	Beispiele für Vektorräume	196
6.1.3	Skalarprodukt	199
6.1.4	Basis eines Vektorraums	204
6.1.5	Vektorprodukt	213
6.1.6	Vektorwertige Funktionen	217

6.2	Lineare Abbildungen	218
6.2.1	Matrizen	219
6.2.2	Matrixprodukt und inverse Matrix	224
6.2.3	Lineare Gleichungssysteme	230
6.2.4	Drehungen und Basiswechsel	236
6.2.5	Das Eigenwertproblem	239

Kapitel 1

Einführung

1.1 Funktionen	7
1.2 Differentialgleichungen	9
1.3 Komplexe Zahlen	14
1.4 Vektorräume	16

Die Physik ist eine Naturwissenschaft, mit deren Hilfe es insbesondere möglich ist, quantitative Aussagen über das Verhalten physikalischer Systeme zu machen. Für diese quantitative Beschreibung wird die Mathematik als formale Sprache verwendet. Mit ihr lassen sich im Rahmen der Theoretischen Physik aus wenigen physikalischen Prinzipien weitreichende Aussagen über Systeme ableiten und physikalische Phänomene erklären.

In den folgenden Unterkapiteln werden Beispiele aus der Physik vorgestellt, aus denen deutlich wird, welche mathematischen Konzepte und Methoden in der Physik von zentraler Bedeutung sind. Diese mathematischen Konzepte und Methoden werden u.a. im Rahmen der Lehrveranstaltung behandelt.

1.1 Funktionen

Zusammenhänge zwischen verschiedenen physikalischen Größen werden mathematisch durch Funktionen beschrieben. Als Beispiel betrachten wir einen Körper der Masse m , der sich reibungsfrei in einer Dimension entlang einer Geraden bewegen kann, siehe Abbildung 1.1. Der Körper sei über eine Feder mit einer Wand verbunden. Zur Beschreibung der Bewegung des Körpers wählen wir zunächst ein Koordinatensystem: Wir positionieren den Koordinatenursprung an der Stelle, an der sich der Körper befindet, wenn die Feder entspannt ist, d.h. die Feder ist weder gestreckt noch gestaucht (Nulllage). Da die Bewegung des Körpers auf eine Dimension eingeschränkt ist, genügt es, nur eine Koordinatenachse einzuführen. Diese sei als x -Achse bezeichnet und wird

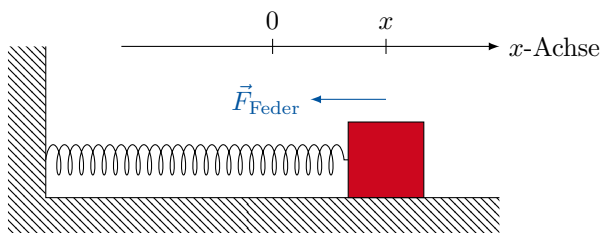


Abbildung 1.1: Federschwingung

so gewählt, dass sie parallel zu der Geraden liegt, entlang der sich der Körper bewegen kann. Mithilfe des so gewählten Koordinatensystems kann nun die Bewegung des Körpers durch eine Funktion f mathematisch beschrieben werden: Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diejenige Funktion, die jedem Zeitpunkt t den Ort x des Schwerpunktes Körpers bezüglich des gewählten Koordinatensystems zuordnet, d.h. $x = f(t)$, siehe Abbildung 1.2. Ist die Funktion f bekannt, so kann der Ort des Körpers zu jedem Zeitpunkt ermittelt werden, d.h. die Bewegung des Körpers entlang der Gerade ist vollständig mathematisch beschrieben.

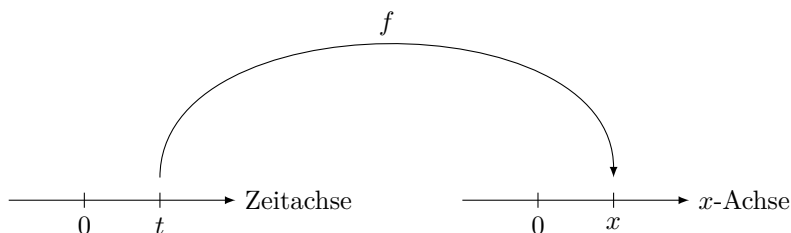


Abbildung 1.2: Funktion f , die einen Zeitpunkt t auf einen Ort x abbildet, $x = f(t)$.

In der Physik und den Ingenieurwissenschaften ist es üblich, der Funktion das gleiche Symbol wie dem Funktionswert zu geben. Im obigen Beispiel würde die Funktion daher als x bezeichnet, d.h. genauso wie ihr Funktionswert (der Ort). Durch diese Benennung bezeichnet $x(t)$ den Ort des Körpers zum Zeitpunkt t .

Ist die Funktion, die den Ort des Körpers zu einem beliebigen Zeitpunkt beschreibt, bekannt, so können aus ihr weitere physikalisch interessante Größen bestimmt werden, z.B. die Geschwindigkeit und die Beschleunigung. Die Geschwindigkeit beschreibt die Änderungsrate des Ortes, d.h. die Änderung des Ortes pro Zeitdauer zu einem bestimmten Zeitpunkt. Diese Definition entspricht mathematisch der Ableitung der Funktion $x(t)$ (oder allgemeiner

$\vec{x}(t)$). D.h. die Geschwindigkeit v_x (entlang der x -Richtung) ist zum Zeitpunkt t mathematisch durch

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (1.1)$$

gegeben. Die Beschleunigung wiederum ist definiert als die Änderungsrate der Geschwindigkeit. D.h. die Beschleunigung beschreibt die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeitdauer zu einem bestimmten Zeitpunkt. Mathematisch entspricht die Beschleunigung a_x (entlang der x -Richtung) daher der Ableitung der Geschwindigkeit v_x ,

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}. \quad (1.2)$$

Durch Bilden der Ableitung(en) der Funktion $x(t)$ erhält man also die Geschwindigkeit und die Beschleunigung.

Betrachtet man die fundamentalen Gesetzmäßigkeiten der Physik, so ist die Situation meistens komplizierter. Häufig kennt man die auf einen Körper wirkenden Kräfte und möchte daraus ermitteln, wie sich der Körper unter der Wirkung der Kräfte im Raum bewegt. Die entsprechende Gesetzmäßigkeit, die diesen Zusammenhang im Rahmen der klassischen Mechanik beschreibt, ist das 2-te Newtonsche Gesetz. Es stellt den Zusammenhang zwischen der Summe aller auf einen Körper wirkenden Kräfte und der Beschleunigung des Körpers dar. In diesem Fall besteht die Herausforderung also darin, aus diesem Zusammenhang die Funktion $x(t)$ (oder allgemeiner $\vec{x}(t)$) zu bestimmen. Dies führt zu auf den Begriff der Differentialgleichung, und die Frage nach ihren Lösungen, siehe Kapitel 1.2.

1.2 Differentialgleichungen

Das Verhalten physikalischer Systeme lässt sich sehr häufig durch sog. *Differentialgleichungen* beschreiben. Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, die Aussagen über eine Funktion macht. Eine Differentialgleichung enthält dabei i.d.R. die Funktion und ihre Ableitungen. Das Lösen einer Differentialgleichung bedeutet, die Funktionen zu ermitteln, die die Differentialgleichung erfüllen. Durch die Angabe von entsprechenden Anfangs- oder Randbedingungen kann die Menge der Funktionen, die die Differentialgleichung lösen, auf eine einzige Funktion reduziert werden, die das Verhalten des physikalischen Systems eindeutig beschreibt.

In der klassischen Mechanik stellt das 2-te Newtonsche Gesetz eine Differentialgleichung für die Bahnkurve eines Massepunktes dar. Für den speziellen Fall, dass der betrachtete Massepunkt eine zeitlich konstante Masse $m > 0$ besitzt

und sich nur entlang der x -Achse bewegen kann, lautet das 2-te Newtonsche Gesetz

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t). \quad (1.3)$$

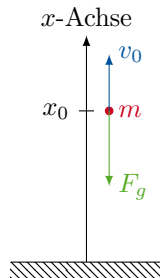
Das 2-te Newtonsche Gesetz in Gl. (1.3) stellt eine Differentialgleichung für die Funktion $x(t)$ dar. Es enthält die Funktion $x(t)$, sowie ihre Ableitungen $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$. Die Ableitungen von $x(t)$ wurden in Gl. (1.3) wie in der Physik üblich mit

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt}, \quad \ddot{x}(t) := \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (1.4)$$

bezeichnet. Die Differentialgleichung (1.3) zu lösen bedeutet, die Funktionen $x(t)$ zu ermitteln, die den Ort x des betrachteten Massepunktes zu jedem beliebigen Zeitpunkt t angeben. Das 2-te Newtonsche Gesetz wird daher auch als *Bewegungsgleichung* bezeichnet.

Das 2-te Newtonsche Gesetz (1.3) lässt sich physikalisch wie folgt interpretieren: Auf der rechten Seite von Gl. (1.3) steht die Summe F aller Kräfte, die auf den Massepunkt wirken. Diese Kräfte hängen i.A. vom Ort $x(t)$, von der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ und von der Zeit t ab. Auf der linken Seite von Gl. (1.3) steht das Produkt aus der Masse m und der Beschleunigung $\ddot{x}(t)$ des Massepunktes. Gl. (1.3) lässt sich nun dahingehend deuten, dass die Summe aller auf den Massepunkt wirkenden Kräfte die Ursache für die Beschleunigung des Massepunktes, d.h. für die zeitliche Änderung seiner Geschwindigkeit, sind.

Beispiel 1.1 Wir betrachten einen Massepunkt der zeitlich konstanten Masse $m > 0$, der sich zum Zeitpunkt $t = 0$ s in der Höhe x_0 über der Erdoberfläche befindet und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 besitzt, siehe Abbildung.



Auf den Massepunkt wirke die Gewichtskraft $F_g = -mg$ mit der zeitlich konstanten Erdbeschleunigung $g > 0$. Einsetzen der Gewichtskraft in das 2-te

Newtonsche Gesetz (1.3) führt auf die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = -g. \quad (1.5)$$

Diese Differentialgleichung ist durch zweimalige Integration nach der Zeit lösbar. Integration von Gl. (1.5) nach der Zeit ergibt

$$\int \frac{d\dot{x}(t)}{dt} dt = \int (-g) dt \quad (1.6)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -gt + c_1 \quad (1.7)$$

mit einer beliebigen Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}$. Nochmalige Integration nach der Zeit ergibt

$$\int \frac{dx(t)}{dt} dt = \int (-gt + c_1) dt \quad (1.8)$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + c_1t + c_2 \quad (1.9)$$

mit einer weiteren beliebigen Konstanten $c_2 \in \mathbb{R}$. Die Konstanten c_1 und c_2 können aus den Anfangsbedingungen

$$x(0\text{ s}) = x_0, \quad \dot{x}(0\text{ s}) = v_0 \quad (1.10)$$

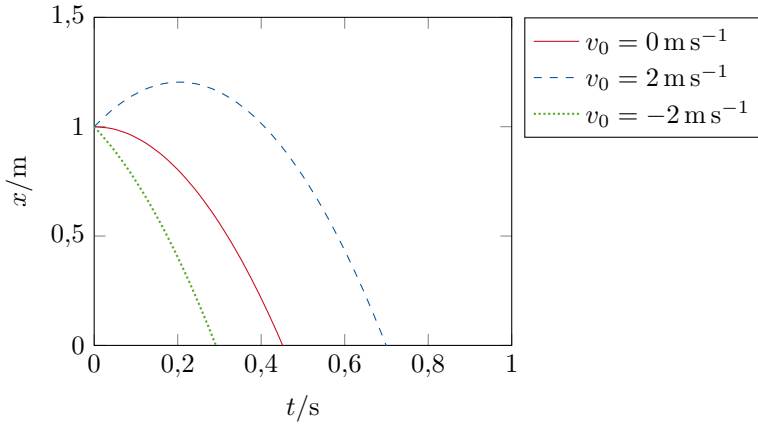
bestimmt werden. Einsetzen von Gl. (1.9) in die Anfangsbedingungen (1.10) führt auf

$$c_2 = x_0, \quad c_1 = v_0. \quad (1.11)$$

Die mit den Anfangsbedingungen (1.10) kompatible Lösung lautet damit

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + x_0. \quad (1.12)$$

Die spezielle Lösung (1.12) ist für $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$, $x_0 = 1 \text{ m}$ und verschiedene Werte von v_0 im folgenden Diagramm dargestellt.



Beispiel 1.2 Wir betrachten den Körper der zeitlich konstanten Masse $m > 0$ aus Abbildung 1.1, der sich reibungsfrei entlang einer Gerade bewegen kann und über eine hookesche (lineare) Feder mit der Federkonstante $k > 0$ mit einer Wand verbunden ist. Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass die Feder entspannt ist, wenn sich der Körper am Ort $x = 0 \text{ m}$ befindet (Nulllage). Wird der Körper aus der Nulllage ausgelenkt, so wirkt auf ihn die Federkraft

$$\vec{F}_{\text{Feder}}(x(t)) = -kx(t). \quad (1.13)$$

Der Betrag der Federkraft ist proportional zur Auslenkung des Massepunktes aus der Nulllage. Das negative Vorzeichen auf der rechten Seite von Gl. (1.13) beschreibt den Umstand, dass die Federkraft entgegen der Auslenkung des Massepunktes aus der Nulllage wirkt. Einsetzen der Federkraft (1.13) in die rechte Seite des 2-ten Newtonschen Gesetzes (1.3) führt auf die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t). \quad (1.14)$$

Gl. (1.14) kann nicht wie in Beispiel 1.1 durch Integration gelöst werden. Die Lösungsfunktion $x(t)$ von Gl. (1.14) muss die Eigenschaft haben, dass ihre 2-fache zeitliche Ableitung (bis auf einen Vorfaktor) gleich $-x(t)$ ist. Die Sinus- und die Kosinusfunktion besitzen diese Eigenschaften und sind somit Lösungen von Gl. (1.14), denn

$$\frac{d}{dt} \sin(t) = \cos(t), \quad \frac{d}{dt} \cos(t) = -\sin(t). \quad (1.15)$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (1.14) besitzt daher die Form einer Linearkombination einer Sinus- und Kosinusfunktion,

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right), \quad (1.16)$$

mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Der Massepunkt führt eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{k/m}$ aus.

Die Konstanten c_1 und c_2 sind durch die Anfangsbedingungen des Systems bestimmt: Angenommen, der Körper befindet sich zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ s am Ort x_0 und besitzt die Geschwindigkeit v_0 , d.h.

$$x(0 \text{ s}) = x_0, \quad \dot{x}(0 \text{ s}) = v_0. \quad (1.17)$$

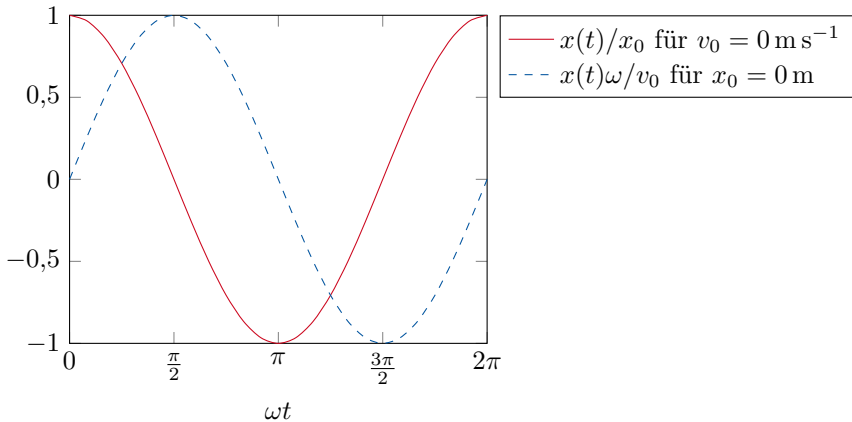
Einsetzen der allgemeinen Lösung (1.16) in die Anfangsbedingungen (1.17) führt auf

$$c_1 = x_0, \quad c_2 \omega = v_0. \quad (1.18)$$

Die mit den Anfangsbedingungen (1.17) kompatible Lösung lautet damit

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \quad (1.19)$$

Die spezielle Lösung (1.19) ist für verschiedene Werte von x_0 und v_0 im folgenden Diagramm dargestellt.



1.3 Komplexe Zahlen

Ein sehr nützliches Werkzeug in der Physik und den Ingenieurwissenschaften sind die sog. *komplexen Zahlen* \mathbb{C} . Sie stellen eine Erweiterung der reellen Zahlen \mathbb{R} dar, d.h. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Mit ihrer Hilfe ist es z.B. möglich, für jede algebraische Gleichung, wie z.B. $z^2 = -1$, eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ anzugeben. Diese Eigenschaft macht man sich z.B. bei Lösungsverfahren für lineare Differentialgleichungen zu Nutze. Darüber hinaus kann die Quantentheorie mit Hilfe komplexer Zahlen auf sehr elegante Weise formuliert werden.

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann in der Form

$$z = x + iy \quad (1.20)$$

dargestellt werden, wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Die Zahl x wird als *Realteil* von z bezeichnet. Die Zahl y wird als *Imaginärteil* von z bezeichnet. Die Größe i heißt *imaginäre Einheit*. Sie besitzt per Definition die zentrale Eigenschaft

$$i^2 = -1. \quad (1.21)$$

Für reelle Zahlen der Form (1.20) gelten die insbesondere folgenden Rechenregeln: Sei $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$, $w = u + iv$ und $x, y, u, v, \lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\lambda z = \lambda(x + iy) = (\lambda x) + i(\lambda y) = z\lambda, \quad (1.22)$$

$$z + w = (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v) = w + z, \quad (1.23)$$

$$zw = (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) = wz. \quad (1.24)$$

Beispiel 1.3 Die Gleichung $z^2 = -1$ besitzt die beiden Lösungen $z = i$ und $z = -i$, denn

$$i^2 = -1, \quad (1.25)$$

$$(-i)^2 = (-i)(-i) = i^2 = -1. \quad (1.26)$$

Man schreibt manchmal auch kurz $\pm i = \sqrt{-1}$.

Beispiel 1.4 Wir suchen die Nullstellen des Polynoms $z^2 - 2z + 2$:

$$0 = z^2 - 2z + 2 = (z - 1)^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 = (z - 1)^2. \quad (1.27)$$

Gemäß Beispiel 1.3 besitzt Gl. (1.27) die beiden Lösungen $z - 1 = \pm i$. Die beiden Nullstellen des Polynoms lauten somit $z = 1 \pm i$.

Für komplexe Zahlen gilt zudem die *Eulersche Formel*

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad (1.28)$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Mit Hilfe komplexer Zahlen lässt sich eine systematische Methode zur Lösung linearer Differentialgleichungen angeben, die in den folgenden Beispielen illustriert werden soll.

Beispiel 1.5 Wir betrachten die Bewegungsgleichung aus Beispiel 1.14:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (1.29)$$

Für die gesuchte Funktion $x(t)$ setzen wir

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (1.30)$$

an, mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung liefert

$$0 = \frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t}. \quad (1.31)$$

Da es kein $\lambda \in \mathbb{C}$ und $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $e^{\lambda t} = 0$, folgt

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm i\omega. \quad (1.32)$$

Es gibt somit zwei unabhängige Lösungen der Bewegungsgleichung:

$$x_1(t) = e^{i\omega t}, \quad x_2(t) = e^{-i\omega t}. \quad (1.33)$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Linearkombination der beiden unabhängigen Lösungen:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}, \quad (1.34)$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ beliebige Konstanten sind, die durch die Angabe von Anfangsbedingungen bestimmt werden können. Mit Hilfe der Eulerschen Formel lässt sich diese allgemeine Lösung (1.34) in die Form von Gl. (1.16) bringen:

$$x(t) = c_1 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] + c_2 [\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t)] \quad (1.35)$$

$$= (c_1 + c_2) \cos(\omega t) + i(c_1 - c_2) \sin(\omega t) \quad (1.36)$$

$$= a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t) \quad (1.37)$$

mit $a_1 = c_1 + c_2$ und $a_2 = i(c_1 - c_2)$. Hierbei wurde $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$ verwendet.

Beispiel 1.6 Als zweites Beispiel betrachten wir die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) - a^2 x(t) = 0 \quad (1.38)$$

mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Für die gesuchte Funktion $x(t)$ setzen wir wieder

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (1.39)$$

an, mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung liefert

$$0 = (\lambda^2 - a^2) e^{\lambda t} \quad (1.40)$$

und damit

$$\lambda^2 - a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm a. \quad (1.41)$$

Es gibt somit zwei unabhängige Lösungen der Bewegungsgleichung:

$$x_1(t) = e^{at}, \quad x_2(t) = e^{-at}. \quad (1.42)$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Linearkombination der beiden unabhängigen Lösungen:

$$x(t) = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at}, \quad (1.43)$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ beliebige Konstanten sind, die durch die Angabe von Anfangsbedingungen bestimmt werden können. Da $a \in \mathbb{R}$, stellt die Lösung (1.43) der Bewegungsgleichung (1.38) keine harmonische Schwingung dar. Sie beschreibt ein exponentielles Anwachsen der Ortskoordinate x mit der Zeit t .

Wie aus den letzten beiden Beispielen erkennbar ist, besteht der Vorteil komplexer Zahlen darin, dass für ein Polynom vom Grad n stets n Nullstellen angegeben werden können. Die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichungen n -ter Ordnung kann dadurch mit der oben dargestellten Methode systematisch bestimmt werden.

1.4 Vektorräume

Es gibt physikalische Größen, die räumliche Informationen bzw. Richtungsinformationen enthalten. Beispiele für solche *vektoriellen physikalischen Größen* sind der Ort, die Geschwindigkeit, die Beschleunigung, die Kraft, das Drehmo-

ment, der Drehimpuls uvm. Vektorielle physikalische Größen können durch die Angabe einer einzigen reellen Zahl nicht vollständig beschrieben werden; vielmehr ist zu ihrer Beschreibung ein Formalismus nötig, der die räumliche bzw. Richtungsinformation enthält. In der Physik werden hierfür sog. *Vektoren* verwendet. Ein Vektor ist hierbei ein Element eines sog. *Vektorraums*. In der klassischen Mechanik wird für die Beschreibung von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Massepunktes in kartesischen Koordinaten der Vektorraum \mathbb{R}^3 verwendet. Dieser ist definiert als eine Menge von 3-Tupeln (Tripel)

$$\mathbb{R}^3 := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}. \quad (1.44)$$

Häufig werden die Vektoren $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ in Form einer Spalte geschrieben:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

Die Elemente (Vektoren) des \mathbb{R}^3 können wie folgt komponentenweise addiert und mit einem Skalar multipliziert werden: Sind $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$ mit

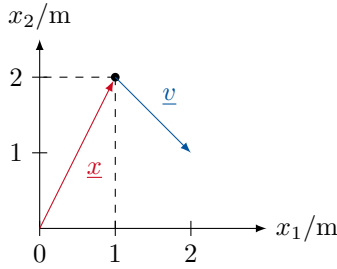
$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist

$$\underline{x} + \underline{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \underline{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Mithilfe der drei verschiedenen Komponenten x_1, x_2, x_3 eines Vektors $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ ist es möglich, die gesamte räumliche bzw. Richtungsinformation einer vektoriellen physikalischen Größe zu beschreiben.

Beispiel 1.7 Ein Massepunkt befinde sich an dem mit einem Punkt markierten Ort in dem folgenden 2-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem ($n = 2$).



Der Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ beschreibe den Ort und der Vektor $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ die Geschwindigkeit des Massepunktes. Bezüglich des dargestellten kartesischen Koordinatensystems besitzen diese beiden Vektoren die Darstellung

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \text{ m} \\ 2 \text{ m} \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \text{ m s}^{-1} \\ -1 \text{ m s}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

Jeder Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ kann als Linearkombination

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \underline{e}_i, \quad (1.49)$$

der sogenannten *Standardbasisvektoren*

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

ausgedrückt werden. Die Standardbasisvektoren besitzen die Länge 1 und sind paarweise orthogonal (senkrecht zueinander). Die Darstellung eines Vektors durch Basisvektoren ist häufig der Darstellung durch 3-Tupel zu bevorzugen, wie wir in Kapitel 6 diskutieren werden.

Beispiel 1.8 Ausgedrückt durch die Standardbasisvektoren besitzen die in Beispiel 1.7 angegebenen Vektoren die Darstellung

$$\underline{x} = 1 \text{ m } \underline{e}_1 + 2 \text{ m } \underline{e}_2 = (\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2) \text{ m}, \quad (1.51)$$

$$\underline{v} = 1 \text{ m s}^{-1} \underline{e}_1 - 1 \text{ m s}^{-1} \underline{e}_2 = (\underline{e}_1 - \underline{e}_2) \text{ m s}^{-1}. \quad (1.52)$$

Die Angabe von Vektoren des \mathbb{R}^3 in Form von Spalten ist darüber hinaus nur dann sinnvoll möglich, wenn die komponentenweise Addition von Spalten und

die komponentenweise Multiplikation einer Spalte mit einer Zahl sinnvoll ist. Dies ist z.B. für kartesische Koordinaten der Fall. In anderen Koordinatensystemen, wie z.B. Polar-, Zylinder- oder Kugelkoordinaten, ist die Darstellung durch Spalten unsinnig, da die o.g. komponentenweisen Rechenoperationen keinen Sinn ergeben. Aus diesem Grund werden wir im Folgenden von den Spalten abstrahieren und Vektoren im 3-dimensionalen Raum in der Form \vec{x} , \vec{v} usw. notieren. Die Standardbasisvektoren werden entsprechend mit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bezeichnet. Ein Vektor \vec{x} im 3-dimensionalen Raum kann dann in der Form

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \quad (1.53)$$

dargestellt werden.

Beispiel 1.9 In abstrakter Schreibweise besitzen die in Beispiel 1.7 angegebenen Vektoren die Darstellung

$$\vec{x} = 1 \text{ m } \vec{e}_1 + 2 \text{ m } \vec{e}_2 = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \text{ m}, \quad (1.54)$$

$$\vec{v} = 1 \text{ m s}^{-1} \vec{e}_1 - 1 \text{ m s}^{-1} \vec{e}_2 = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \text{ m s}^{-1}. \quad (1.55)$$

Kapitel 2

Analysis

2.1	Mengen und Quantoren	22
2.2	Der Funktionsbegriff	24
2.2.1	Eigenschaften von Funktionen	27
2.2.2	Implizite Funktionen	37
2.2.3	Umkehrfunktion	38
2.2.4	Verkettung von Funktionen	44
2.3	Folgen und Grenzwerte	45
2.4	Grenzwerte von Funktionen	50
2.4.1	Stetigkeit	51
2.5	Spezielle Funktionen	53
2.5.1	Polynome	54
2.5.2	Gebrochenrationale Funktionen	57
2.5.3	Exponentialfunktion	63
2.5.4	Hyperbelfunktionen	67
2.5.5	Trigonometrische Funktionen	68
2.6	Differentiation	73
2.6.1	Definition der Ableitung	73
2.6.2	Ableitungsfunktionen	76
2.6.3	Ableitungsregeln	81
2.7	Integration	87
2.7.1	Unbestimmtes Integral	87
2.7.2	Integrationsmethoden	89
2.7.3	Bestimmtes Integral	101
2.7.4	Uneigentliches Integral	110

In diesem Kapitel werden wir uns mit reellen, univariaten Funktionen und ihren Eigenschaften beschäftigen. Hierzu zählen die Begriffe Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von Funktionen. Um diese Eigenschaften genau zu fassen, ist der Begriff des Grenzwertes von zentraler Bedeutung.

2.1 Mengen und Quantoren

Für die folgenden Unterkapitel benötigen wir den Begriff der Menge. Als eine *Menge* bezeichnen wir eine Zusammenfassung wohlunterscheidbarer Objekte. Eine Menge kann dadurch angegeben werden, dass die Elemente aufgezählt werden. Z.B. kann die Menge M , die die Zahlen 1, 3 und 5 enthält wie folgt geschrieben werden:

$$M = \{1, 3, 5\}. \quad (2.1)$$

Eine weitere Möglichkeit für die Angabe von Mengen besteht darin, die Eigenschaften der Elemente der Menge anzugeben. Hierfür verwenden wir die Notation:

$$M = \{x \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}. \quad (2.2)$$

Hierbei werden die Elemente der Menge M mit x bezeichnet, die dadurch gekennzeichnet sind, dass sie alle die Eigenschaft E besitzen. Ist ein Objekt x in einer Menge M enthalten, so schreiben wir $x \in M$. Ist ein Objekt x nicht in einer Menge M enthalten, so schreiben wir $x \notin M$.

Beispiel 2.1

$$\begin{aligned} 2 &\notin \{1, 3, 4, 5\}, \\ a &\in \{a, b, c, d\} \end{aligned}$$

Sind A und B zwei Mengen, so ist A eine Teilmenge von B , geschrieben als $A \subset B$, falls alle Elemente, die in A enthalten sind, auch in B enthalten sind. Zwei Mengen A und B sind gleich, falls $A \subset B$ und $B \subset A$.

Beispiel 2.2 Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Dann ist $A \subset B$.

Sind A und B zwei Mengen, so bezeichnet man als Schnittmenge $A \cap B$ die Menge aller Objekte, die sowohl in A als auch in B enthalten sind:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}. \quad (2.3)$$

Hierbei hat das Symbol \wedge die Bedeutung des logischen „und“.

Beispiel 2.3 Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Dann ist $A \cap B = \{2, 3\}$.

Sind A und B zwei Mengen, so bezeichnet man als Vereinigungsmenge $A \cup B$ die Menge aller Objekte, die in A oder in B enthalten sind:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}. \quad (2.4)$$

Hierbei hat das Symbol \vee die Bedeutung des logischen „oder“.

Beispiel 2.4 Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Dann ist $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Sind A und B zwei Mengen, so bezeichnet man als Differenz $A \setminus B$ die Menge aller Objekte, die in A , aber nicht in B enthalten sind:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}. \quad (2.5)$$

Beispiel 2.5 Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Dann ist $A \setminus B = \{1\}$.

Wichtige Mengen, die wir im Folgenden verwenden sind:

- Die natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}. \quad (2.6)$$

- Die natürlichen Zahlen, einschließlich 0:

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}. \quad (2.7)$$

- Die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}. \quad (2.8)$$

- Die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}. \quad (2.9)$$

- Die reellen Zahlen \mathbb{R}

$$\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \left\{ \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, e, \pi, \dots \right\}. \quad (2.10)$$

Eine präzise Definition der reellen Zahlen wird in den Vorlesungen zur höheren Mathematik gegeben.

In der Mathematik und Physik werden Aussagen über Objekte gemacht. Eine *mathematische Aussage* ist hierbei ein feststellender Satz, dem eindeutig einer der beiden Wahrheitswerte *wahr* oder *falsch* zugeordnet werden kann. Um Aussagen präzise und kompakt zu formulieren verwenden wir *Quantoren*. Sei $A(x)$ eine Aussage über das Objekt x . Soll ausgedrückt werden, dass die Aussage $A(x)$ für mindestens ein Objekt x gilt, so schreiben wir $\exists x : A(x)$. Das Symbol \exists wird als *Existenzquantor* bezeichnet. Soll ausgedrückt werden, dass die Aussage $A(x)$ für jedes Objekt x gilt, so schreiben wir $\forall x : A(x)$. Das Symbol \forall wird als *Allquantor* bezeichnet.

Beispiel 2.6 Sei $A(x) =$ „ x ist durch zwei teilbar“ eine Aussage über das Objekt x . Sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Dann gilt:

$$\exists x : (x \in M \wedge A(x)). \quad (2.11)$$

Gesprochen: Es gibt ein x für das gilt: $x \in M$ und „ x ist durch zwei teilbar“. Abkürzend schreibt man auch: $\exists x \in M : A(x)$. Gesprochen: Es gibt ein $x \in M$, für das gilt: „ x ist durch zwei teilbar“.

Beispiel 2.7 Sei $A(x) =$ „ x ist durch zwei teilbar“ eine Aussage über das Objekt x . Sei $M = \{2, 4, 6, 8\}$. Dann gilt:

$$\forall x : (x \in M \Rightarrow A(x)) \quad (2.12)$$

Gesprochen: Für alle x gilt: Wenn $x \in M$, dann folgt „ x ist durch zwei teilbar“. Abkürzend schreibt man auch: $\forall x \in M : A(x)$. Gesprochen: Für alle x aus M gilt: „ x ist durch zwei teilbar“.

2.2 Der Funktionsbegriff

Definition 2.1 Eine *Funktion* ist eine Vorschrift f , die jedem Element $x \in D_f$ genau eine Zahl $f(x) \in Z$ zuordnet. Die Menge D_f heißt Definitionsmenge von f . Die Menge Z heißt Zielmenge von f .

Abkürzend schreibt man auch $f : D_f \rightarrow Z$. Die Menge

$$W_f := f(D_f) := \{y \in Z \mid \exists x \in D_f : f(x) = y\} \quad (2.13)$$

wird als *Bild* oder *Wertemenge* von f bezeichnet. Die unabhängige Variable

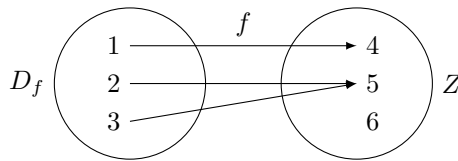


Abbildung 2.1: Beispiel für eine Funktion $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$.

$x \in D_f$ im Ausdruck $f(x)$ wird als *Argument* von f bezeichnet. In [Abbildung 2.1](#) ist eine Funktion $f : D_f \rightarrow Z$ mit $D_f = \{1, 2, 3\}$ und $Z = \{4, 5, 6\}$ dargestellt.

Definition 2.2 Eine Funktion $f : D_f \rightarrow Z$ wird als *reelle Funktion* bezeichnet, wenn $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und $Z \subseteq \mathbb{R}$.

Häufig gibt es einen Ausdruck, mit dem der Funktionswert einer reellen Funktion f an einer beliebigen Stelle $x \in D_f$ ermittelt werden kann. Solch ein Ausdruck kann in Form einer *Funktionsgleichung* angegeben werden:

$$f(x) = \text{Ausdruck zur Berechnung von } f(x). \quad (2.14)$$

Alternativ schreibt man auch

$$x \mapsto \text{Ausdruck zur Berechnung von } f(x). \quad (2.15)$$

Beispiel 2.8 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$. Die Funktionsgleichung von f besitzt dann die Form $f(x) = x^2$.

Häufig wird begrifflich nicht zwischen einer Funktion f und ihrer Funktionsgleichung unterschieden.

Zur Angabe von Definitions- bzw. Wertemengen, die zusammenhängende

Intervalle aus \mathbb{R} darstellen, verwenden wir die folgende Notation:

$$(a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad (\text{offenes Intervall}), \quad (2.16)$$

$$[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad (\text{abgeschlossenes Intervall}), \quad (2.17)$$

$$(a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad (\text{links-offenes Intervall}), \quad (2.18)$$

$$[a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad (\text{rechts-offenes Intervall}), \quad (2.19)$$

$$[a; \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \quad (2.20)$$

$$(a; \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \quad (2.21)$$

$$(-\infty; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \quad (2.22)$$

$$(-\infty; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \quad (2.23)$$

$$(-\infty; \infty) := \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

Reelle Funktionen lassen sich durch einen Graphen darstellen. Als *Graph* einer Funktion f bezeichnet man die Menge

$$\text{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}. \quad (2.25)$$

Der Graph von f ist also die Menge aller 2-Tupel, wobei die erste Komponente eines jeden Tupels ein $x \in D_f$ ist und die zweite Komponente der entsprechende Funktionswert $f(x) \in W_f$ ist. Zur graphischen Darstellung einer reellen Funktion f werden alle Punkte der Menge $\text{Graph}(f)$ in einem 2-dimensionalen Diagramm eingetragen. Hierbei spezifiziert eine Achse die erste Komponente der Tupel, d.h. die Argumente der Funktion (Abszisse, auch: x -Achse). Die andere Achse spezifiziert die entsprechende zweite Komponente der Tupel, d.h. die entsprechenden Funktionswerte (Ordinate, auch: y -Achse).

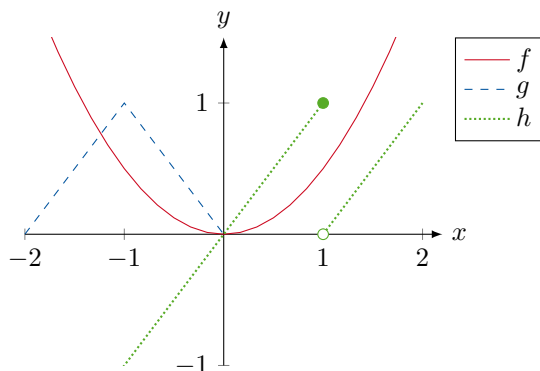
Beispiel 2.9 Seien f, g, h drei reelle Funktionen,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad (2.26)$$

$$g: [-2; 0] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad g(x) = 1 - |x + 1|, \quad (2.27)$$

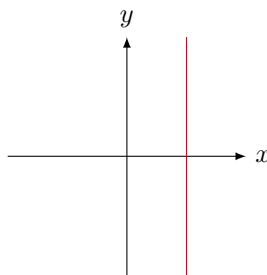
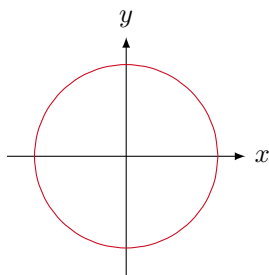
$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad h(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \leq 1, \\ x - 1, & \text{für } x > 1. \end{cases} \quad (2.28)$$

Die Graphen von f, g, h sind in folgendem Diagramm dargestellt, wobei mit y die Funktionswerte bezeichnet werden.



Der grün ausgefüllte Kreis bei $(x, y) = (1, 1)$ bedeutet, dass der dieser Punkt zum Graphen von h gehört. Der nicht-ausgefüllte Kreis bei $(x, y) = (1, 0)$ bedeutet entsprechend, dass der Punkt nicht zum Graphen von h gehört.

Aufgabe 2.1 Geben Sie für jede der in den folgenden Diagrammen dargestellten roten Linien jeweils an, ob diese Funktionsgraphen darstellen. Begründen Sie Ihre Antwort.



Aufgabe 2.2 Sei $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Geben Sie das Bild von f an.

2.2.1 Eigenschaften von Funktionen

Im Folgenden werden Begriffe definiert, mit deren Hilfe sich Eigenschaften von Funktionen beschreiben lassen.

Monotonie

Mit dem Konzept der Monotonie kann ausgedrückt werden, ob die Funktionswerte einer Funktion mit wachsendem Argument ansteigen oder abfallen.

Definition 2.3 Eine reelle Funktion f heißt *monoton wachsend*, falls gilt

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2). \quad (2.29)$$

Eine reelle Funktion f heißt *streng monoton wachsend*, falls gilt

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \quad (2.30)$$

Eine reelle Funktion f heißt *monoton fallend*, falls gilt

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2). \quad (2.31)$$

Eine reelle Funktion f heißt *streng monoton fallend*, falls gilt

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \quad (2.32)$$

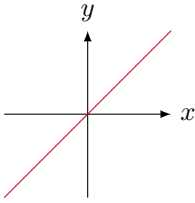
Eine Funktion, die entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist, wird als *monoton* bezeichnet.

Zur Illustration des Monotoniebegriffs sind in Abbildung 2.2 verschiedene Funktionen graphisch dargestellt. Die Funktionen in Abbildung 2.2a–2.2c sind monoton wachsend und 2.2a–2.2b sogar streng monoton wachsend. Die Funktionen in Abbildung 2.2d–2.2f sind monoton fallend und 2.2d–2.2e sogar streng monoton fallend. Die Funktionen in Abbildung 2.2g–2.2i sind nicht monoton, d.h. weder monoton wachsend noch monoton fallend.

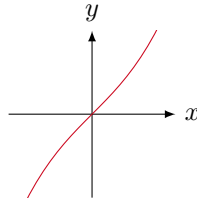
Beispiel 2.10 Wir betrachten den frei fallenden Massepunkt aus Beispiel 1.1, der zum Zeitpunkt $t = 0$ die Höhe x_0 über der Erdoberfläche und die Geschwindigkeit v_0 besitzt. Die Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die die Ortskoordinate x in Abhängigkeit der Zeit t beschreibt besitzt die Form

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + x_0. \quad (2.33)$$

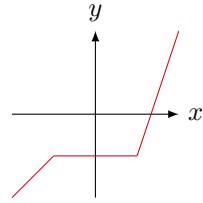
Wie man aus der Abbildung in Beispiel 1.1 erkennen kann, ist die Funktion $x(t)$ i.A. nicht monoton. Z.B. wächst für $x_0 > 0$ und $v_0 > 0$ die Ortskoordinate zunächst an und fällt nach Erreichen eines Maximums zum Zeitpunkt



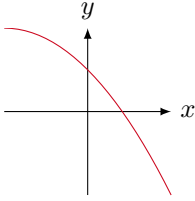
(a) streng monoton wachsend



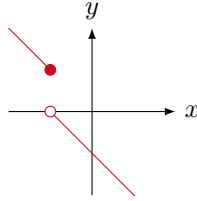
(b) streng monoton wachsend



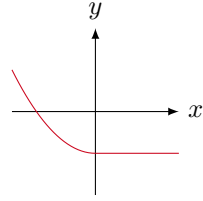
(c) monoton wachsend



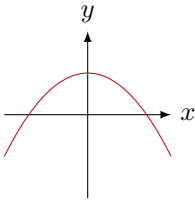
(d) streng monoton fallend



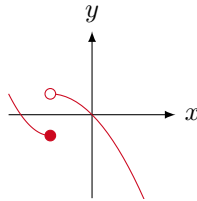
(e) streng monoton fallend



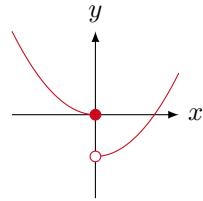
(f) monoton fallend



(g) nicht monoton



(h) nicht monoton



(i) nicht monoton

Abbildung 2.2: Funktionsgraphen zur Illustration des Monotoniebegriffs.

$t_{\max} = v_0/g$ wieder ab. Die bei dieser Bewegung ab dem Startzeitpunkt $t = 0$ zurückgelegte Wegstrecke $s(t)$ ist gegeben durch

$$s(t) = \int_0^t |v_x(x)| \, dx, \quad (2.34)$$

wobei $v_x(t) = \dot{x}(t) = -gt + v_0$ die Geschwindigkeit des Massepunktes zum Zeitpunkt t ist. Die Funktion $s(t)$ ist eine monoton wachsende Funktion: Für $t \leq t_{\max}$ ist $v_x(t) \geq 0$ und es ergibt sich

$$s(t) = \int_0^t v_x(x) \, dx = \left[-\frac{g}{2}x^2 + v_0x \right]_0^t = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t. \quad (2.35)$$

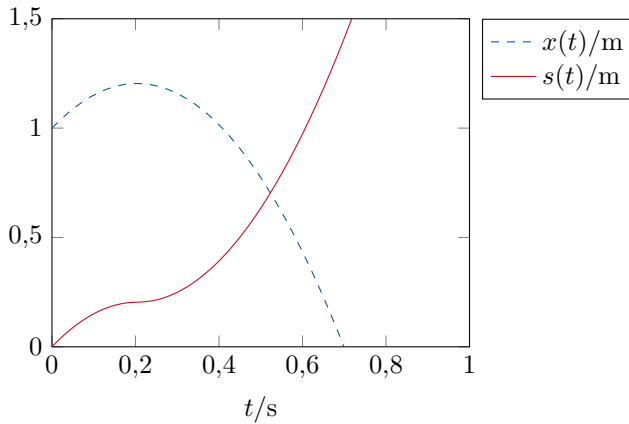
Für $t > t_{\max}$ ist $v_x(t) < 0$ und es ergibt sich entsprechend

$$s(t) = \int_0^{t_{\max}} v_x(x) dx + \int_{t_{\max}}^t [-v_x(x)] dx \quad (2.36)$$

$$= \left[-\frac{g}{2}x^2 + v_0x \right]_0^{t_{\max}} + \left[\frac{g}{2}x^2 - v_0x \right]_{t_{\max}}^t \quad (2.37)$$

$$= \frac{g}{2}t^2 - v_0t + \frac{v_0^2}{g}. \quad (2.38)$$

Die Funktionen $x(t)$ und $s(t)$ sind für $x_0 = 1 \text{ m}$ und $v_0 = 2 \text{ m s}^{-1}$ im folgenden Diagramm dargestellt.

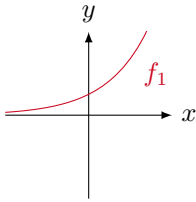


Beschränktheit

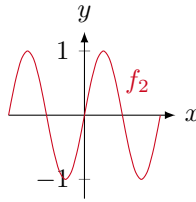
Mit dem Konzept der Beschränktheit kann ausgedrückt werden, ob die Funktionswerte einer Funktion einen bestimmten Wert nicht überschreiten/unterschreiten oder ob die Funktion beliebig große/kleine Werte annehmen kann.

Definition 2.4 Eine reelle Funktion f heißt *nach oben beschränkt*, falls gilt

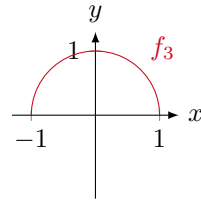
$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f : f(x) \leq a. \quad (2.39)$$



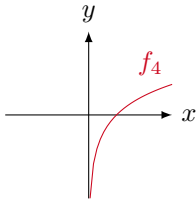
(a) $f_1(x) = e^x$, nach unten Beschränkt, $\inf(f_1) = 0$



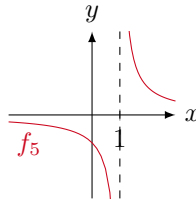
(b) $f_2(x) = \sin(x)$, nach oben und unten beschränkt, $\sup(f_2) = 1$, $\inf(f_2) = -1$



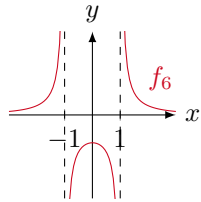
(c) $f_3(x) = \sqrt{1-x^2}$, nach oben und unten beschränkt, $\sup(f_3) = 1$, $\inf(f_3) = 0$



(d) $f_4(x) = \ln(x)$, unbeschränkt



(e) $f_5(x) = 1/(x-1)$, unbeschränkt



(f) $f_6(x) = 1/(x^2-1)$, unbeschränkt

Abbildung 2.3: Funktionsgraphen zur Illustration des Beschränktheitsbegriffs.

Die Zahl a heißt *obere Schranke* von f . Eine reelle Funktion f heißt *nach unten beschränkt*, falls gilt

$$\exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f : f(x) \geq b. \quad (2.40)$$

Die Zahl b heißt *untere Schranke* von f . Eine Funktion, die weder eine obere Schranke noch eine untere Schranke besitzt heißt *unbeschränkt*.

Die kleinste obere Schranke von f wird als *Supremum* von f bzw. $\sup(f)$ bezeichnet. Die größte untere Schranke von f wird als *Infimum* von f bzw. $\inf(f)$ bezeichnet.

In [Abbildung 2.3](#) sind einige Funktionsgraphen dargestellt um den Beschränktheitsbegriff zu illustrieren. [Abbildung 2.3a](#) zeigt die Funktion $f_1(x) = e^x$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist stets $f_1(x) > 0$. Für $x \rightarrow \infty$ wird der Funktionswert $f_1(x)$ beliebig groß. f_1 besitzt somit keine obere Schranke. Für $x \rightarrow -\infty$ strebt der Funktionswert $f_1(x)$ dem Wert 0 entgegen. Es gibt jedoch keinen Wert für x , so dass $f_1(x) = 0$. Somit ist f_1 nach unten beschränkt mit $\inf(f_1) = 0$. In [Abbildung 2.3b](#) ist die Funktion $f_2(x) = \sin(x)$ dargestellt. Für alle $x \in \mathbb{R}$

ist stets $-1 \leq f_2(x) \leq 1$. Somit ist $\inf(f_2) = -1$ und $\sup(f_2) = 1$. In Abbildung 2.3c ist die Funktion $f_3 : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \sqrt{1 - x^2}$ dargestellt. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist stets $0 \leq f_3(x) \leq 1$. Somit ist $\inf(f_3) = 0$ und $\sup(f_3) = 1$. In Abbildung 2.3d–2.3f sind verschiedene unbeschränkte Funktionen dargestellt.

Aufgabe 2.3 Geben Sie eine untere Schranke der Funktion $f(x) = 1/x^2$ an.

Aufgabe 2.4 Geben Sie das Supremum der Funktion $f(x) = 2 \cos(x + 3)$ an.

Aufgabe 2.5 Geben Sie an, ob $a = 2$ eine obere Schranke der Funktion $f(x) = -1/x^2 + 1$ darstellt.

Symmetrie

Symmetrien sind Eigenschaften von Funktionen, die es erlauben, aus der Kenntnis von Funktionswerten auf einem Teil der Definitionsmenge auf die Funktionswerte auf einem anderen Teil der Definitionsmenge zu schließen. Die Kenntnis der Symmetrien einer Funktion ist z.B. bei der Integration nützlich, da sie es u.U. erlauben die Integrationsbereiche einzuschränken.

Definition 2.5 Eine reelle Funktion f heißt *gerade* oder *achsensymmetrisch*, falls gilt

$$\forall x \in D_f : f(-x) = f(x). \quad (2.41)$$

Eine reelle Funktion f heißt *ungerade* oder *punktsymmetrisch*, falls gilt

$$\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x). \quad (2.42)$$

Eine gerade Funktion hat die Eigenschaft, dass der Teil des Graphen mit $x > 0$ zum Teil des Graphen mit $x < 0$ spiegelsymmetrisch bzgl. der Ordinate ist. Bei einer ungeraden Funktion hingegen erhält man den Teil des Graphen mit $x < 0$ aus dem der Teil des Graphen mit $x > 0$ durch Spiegelung an der Ordinate und anschließende erneute Spiegelung an der Abszisse.

In Abbildung 2.4 sind einige Funktionsgraphen dargestellt um den Symmetriebegriffs zu illustrieren. In Abbildung 2.4a ist die Funktion $f_1(x) = x^2$ dargestellt. Die Funktion f_1 ist gerade, denn $f_1(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_1(x)$. Allgemeiner kann man zeigen, dass alle Polynome mit ausschließlich geraden

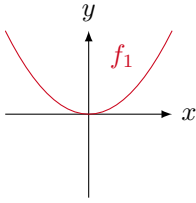
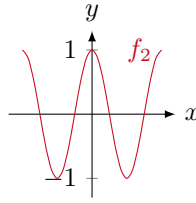
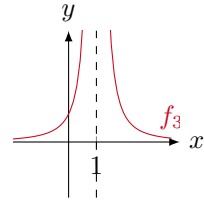
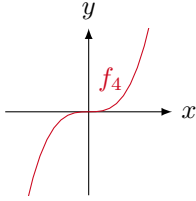
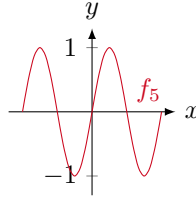
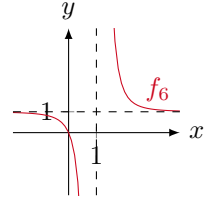

 (a) $f_1(x) = x^2$, gerade

 (b) $f_2(x) = \cos(x)$, gerade

 (c) $f_3(x) = 1/(x-1)^2$ weder gerade noch ungerade;
 $g_3(x) = f_3(x+1)$ ist gerade

 (d) $f_4(x) = x^3$, ungerade

 (e) $f_5(x) = \sin(x)$, ungerade

 (f) $f_6(x) = 1/(x-1)^3 + 1$ weder gerade noch ungerade;
 $g_6(x) = f_6(x+1) - 1$ ist ungerade

Abbildung 2.4: Funktionsgraphen zur Illustration des Symmetriebegriffs.

Potenzen, d.h. von der Form

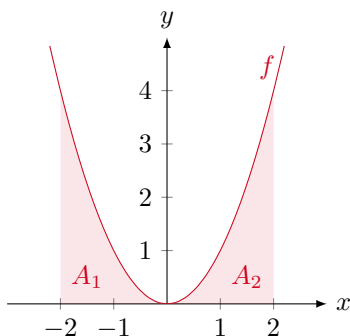
$$p_{2N}(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \cdots + a_{2N}x^{2N} = \sum_{n=0}^N a_{2n}x^{2n} \quad (2.43)$$

mit $N \in \mathbb{N}$ und $a_n \in \mathbb{R}$ gerade sind. Abbildung 2.4b zeigt die Funktion $f_2(x) = \cos(x)$. Auch f_2 ist gerade, denn $f_2(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f_2(x)$. Abbildung 2.4c zeigt die Funktion $f_3(x) = 1/(x-1)^2$, die weder gerade noch ungerade ist. Die um 1 nach links verschobene Funktion $g_3(x) = f_3(x+1)$ ist jedoch gerade, denn $g_3(-x) = f_3(-x+1) = 1/(-x+1-1)^2 = 1/x^2 = 1/(x+1-1)^2 = f_3(x+1) = g_3(x)$. Die in Abbildung 2.4d dargestellte Funktion $f_4(x) = x^3$ ist ungerade, denn $f_4(-x) = (-x)^3 = (-1)^3x^3 = -x^3 = -f_4(x)$. Ebenso ist die Abbildung 2.4e dargestellte Funktion $f_5(x) = \sin(x)$ ungerade, denn $f_5(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f_5(x)$. Die in Abbildung 2.4f dargestellte Funktion $f_6(x) = 1/(x-1)^3 + 1$ ist weder gerade noch ist ungerade. Die um 1 nach links und nach unten verschobene Funktion $g_6(x) = f_6(x+1) - 1$ ist

hingegen ungerade.

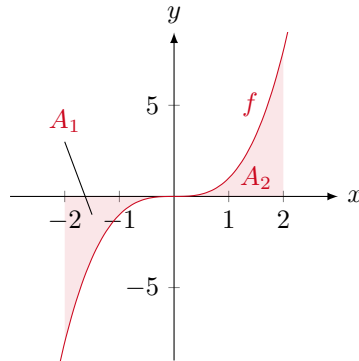
Aufgabe 2.6 Sei $f_6 : \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $f_6(x) = 1/(x-1)^3 + 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g_6 : \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $g_6(x) = f_6(x+1) - 1$ ungerade ist.

Beispiel 2.11 Sei $f(x) = x^2$. Wir betrachten die Fläche $A = A_1 + A_2$ zwischen dem Graphen von f und der Ordinate zwischen $x = -2$ und $x = 2$, siehe folgende Abbildung.



Da f gerade ist, ist die Fläche A_1 zwischen $x = -2$ und $x = 0$ gleich der Fläche A_2 zwischen $x = 0$ und $x = 2$. Somit ergibt sich $A = 2A_2$. Um A zu ermitteln genügt es daher A_2 zu bestimmen und das Ergebnis mit 2 zu multiplizieren; A_1 muss nicht bestimmt werden.

Beispiel 2.12 Sei $f(x) = x^3$. Wir betrachten die Fläche $A = A_1 + A_2$ zwischen dem Graphen von f und der Ordinate zwischen $x = -2$ und $x = 2$, siehe folgende Abbildung.



Flächen oberhalb der Ordinate sind hierbei positiv und Flächen unterhalb der Ordinate sind negativ. Da f ungerade ist, sind die Teilflächen A_1 und A_2 betragsmäßig gleich groß, besitzen jedoch entgegengesetzte Vorzeichen, d.h. $A_2 = -A_1$. Die Gesamtfläche ist somit $A = A_1 + A_2 = A_1 - A_1 = 0$. Für dieses Ergebnis ist die konkrete Form der Funktion irrelevant.

Die Ergebnisse aus Beispiel 2.11–2.12 lassen sich entsprechend formalisieren und verallgemeinern: Für eine integrierbare reelle gerade Funktion f gilt

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx \quad (2.44)$$

für beliebige $a \in \mathbb{R}$. Für eine integrierbare reelle ungerade Funktion g gilt

$$\int_{-a}^a g(x) \, dx = 0. \quad (2.45)$$

Periodizität

Periodische Vorgänge in der Natur lassen sich durch periodische Funktionen beschreiben.

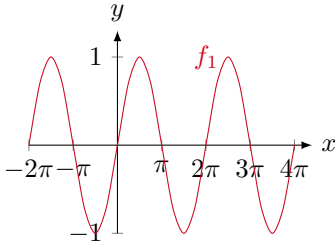
Definition 2.6 Eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *periodisch* mit der Periode $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, falls gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x + T) = f(x). \quad (2.46)$$

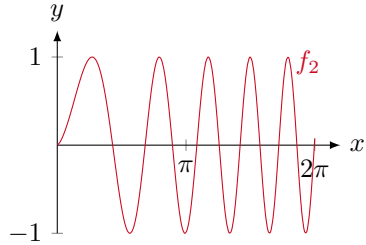
Eine periodische Funktion besitzt also die Eigenschaft, dass nach eine Periode T die Funktion wieder den selben Funktionswert annimmt, unabhängig vom

Startpunkt x . Besitzt das Argument x die Bedeutung der Zeit, so bezeichnet man die feste Zahl T auch als *Periodendauer*.

Aufgabe 2.7 Zeigen Sie, dass für eine periodische Funktion f mit der Periode T die Eigenschaft $f(t + nT) = f(t)$ gilt, wobei $n \in \mathbb{Z}$ beliebig ist.



(a) $f_1(x) = \sin(x)$, periodisch mit Periode $T = 2\pi$

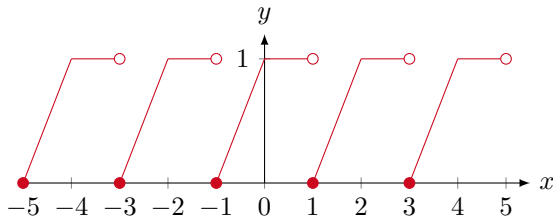


(b) $f_1(x) = \sin(2x^{3/2})$, nicht periodisch

Abbildung 2.5: Funktionsgraphen zur Illustration des Periodizitätsbegriffs.

In Abbildung 2.5a ist die Funktion $f_1(x) = \sin(x)$ dargestellt. Die Funktion f_1 ist periodisch mit der Periode $T = 2\pi$, denn $f_1(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x) = f_1(x)$. In Abbildung 2.5b ist die Funktion $f_2(x) = \sin(2x^{3/2})$ dargestellt. Obwohl die Funktionswerte von f_2 zwischen den Werten -1 und 1 oszillieren, ist f_2 nicht periodisch.

Aufgabe 2.8 Ermitteln Sie, ob die im folgenden Diagramm rot dargestellte Funktion periodisch ist. Geben Sie ggf. die Periode T an.



Beispiel 2.13 Die Lösung (1.19) der Bewegungsgleichung in Beispiel 1.2 besitzt die Form

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (2.47)$$

mit $\omega = \sqrt{k/m} > 0$. Die Funktion $x(t)$ ist periodisch mit der Periode $T = 2\pi/\omega$, denn

$$x(t+T) = x_0 \cos[\omega(t+T)] + \frac{v_0}{\omega} \sin[\omega(t+T)] \quad (2.48)$$

$$= x_0 \cos(\omega t + \omega T) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t + \omega T) \quad (2.49)$$

$$= x_0 \cos(\omega t + 2\pi) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t + 2\pi) \quad (2.50)$$

$$= x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (2.51)$$

$$= x(t). \quad (2.52)$$

Hierbei wurde verwendet, dass $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$. Die Ortskoordinate x des Massepunktes ändert sich somit zeitlich-periodisch mit der Periodendauer $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$.

2.2.2 Implizite Funktionen

Es kommt vor, dass reelle Funktionen nicht in Form einer Funktionsgleichung (2.14) vorliegen, sondern in sog. *impliziter* Form in einem komplizierten Ausdruck vorkommen. Sei f eine Funktion einer Veränderlichen x , dann liegt f in impliziter Form vor, wenn es eine Funktion $F(x, f)$ von zwei Veränderlichen gibt, so dass

$$F(x, f(x)) = 0. \quad (2.53)$$

Gl. (2.53) legt i.A. eine Klasse von Funktionen f fest. Es ist jedoch nicht immer möglich, die Funktionen f , die Gl. (2.53) erfüllen explizit zu ermitteln, d.h. in Form von Funktionsgleichungen anzugeben.

Beispiel 2.14 Sei f eine reelle Funktion von einer Veränderlichen x . Für f gelte die Gleichung

$$x^2 + [f(x)]^2 = 1. \quad (2.54)$$

In der Notation von Gl. (2.53) ist Gl. (2.54) äquivalent zu

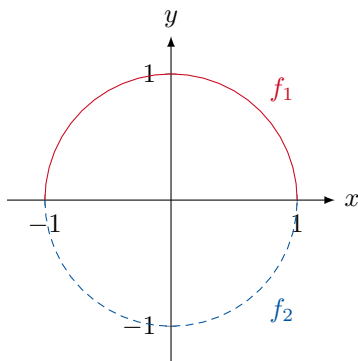
$$F(x, f(x)) = 0 \quad (2.55)$$

mit $F(x, f) = x^2 + f^2 - 1$. Es gibt zwei verschiedene Funktionen, die Gl. (2.54) erfüllen:

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad (2.56)$$

$$f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}. \quad (2.57)$$

Die Definitionsmengen der Funktionen f_1 und f_2 ergeben sich aus der Forderung, dass für die Radikanden jeweils $1 - x^2 \geq 0$ gelten muss. Damit ergibt sich $D_{f_1} = D_{f_2} = [-1; 1]$. Die beiden Funktionen sind in folgendem Diagramm dargestellt.



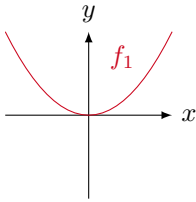
Die Menge aller Punkte (x, y) einer Ebene, die die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (2.58)$$

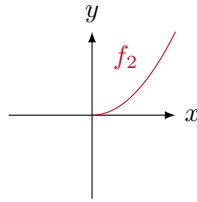
erfüllen bilden einen Kreis mit dem Radius $R = 1$, dessen Kreismittelpunkt sich im Koordinatenursprung befindet. Die beiden Funktionen beschreiben jeweils einen Teil diesen Kreis explizit in Form einer Funktionsgleichung. Da Funktionen eindeutige Zuordnungen sind, d.h. einem Argument wird *genau ein* Funktionswert zugeordnet, sind zwei reelle Funktionen nötig um den Kreis zu beschreiben: Eine Funktion f_1 zur Beschreibung der Punkte mit $y \geq 0$ und eine Funktion f_2 zur Beschreibung der Punkte mit $y \leq 0$.

2.2.3 Umkehrfunktion

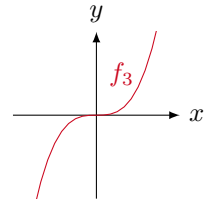
Eine reelle Funktion $f : D_f \rightarrow Z$ ist eine eindeutige Zuordnung von einer Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$ in eine Zielmenge $Z \subseteq \mathbb{R}$. Unter bestimmten Voraussetzungen ist es möglich für f eine Funktion anzugeben, die die Zuordnung



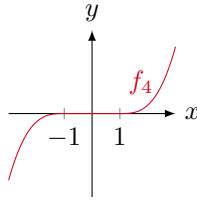
(a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = x^2$, nicht injektiv



(b) $f_2 : [0; \infty)$ mit $f_2(x) = x^2$, injektiv



(c) $f_3(x) = x^3$, injektiv



(d) $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nicht injektiv

Abbildung 2.6: Funktionsgraphen zur Illustration des Injektivitätsbegriffs.

f umkehrt. Diese Funktion wird als *Umkehrfunktion* bezeichnet. Damit solch eine Umkehrfunktion von f existiert, müssen verschiedene Argumente $x \in D_f$ von f auf verschiedene Funktionswerte abgebildet werden. Eine Funktion f , die diese Eigenschaft besitzt, wird als *injektiv* bezeichnet.

Definition 2.7 Eine reelle Funktion $f : D_f \rightarrow Z$ heißt *injektiv*, falls gilt

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2). \quad (2.59)$$

In Abbildung 2.6a ist die gerade Funktion $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = x^2$ dargestellt. Die Funktion f_1 ist nicht injektiv, denn beispielsweise werden die beiden Argumente $x_1 = -1$ und $x_2 = 1 \neq x_1$ auf den selben Funktionswert $f_1(x_1) = f_1(x_2) = 1$ abgebildet. In den meisten Fällen sind gerade Funktionen nicht injektiv. Wird die Definitionsmenge der Funktion f_1 jedoch auf $[0; \infty)$ eingeschränkt, so entsteht eine injektive Funktion, siehe Abbildung 2.6b. In Abbildung 2.6c ist die Funktion $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = x^3$ dargestellt. f_3 ist injektiv, denn es gibt kein Element im Bild von f_3 , das der Funktionswert zweier (oder mehr) verschiedener Elemente der Definitionsmenge D_{f_3} ist. In

Abbildung 2.6d ist die Funktion $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_4(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & \text{für } x < -1, \\ 0 & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^3 & \text{für } x > 1, \end{cases} \quad (2.60)$$

dargestellt. Die Funktion f_4 ist nicht injektiv, denn alle Argumente $x \in [-1; 1]$ werden auf den Funktionswert 0 abgebildet.

Aufgabe 2.9 Geben Sie an, ob die Funktion $f : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \tan(x)$ injektiv ist.

Damit eine reelle Funktion $f : D_f \rightarrow Z$ eine Umkehrfunktion besitzt, muss die Funktion f injektiv sein. Darüber hinaus ist es notwendig, dass jedes Element der Zielmenge Z auch ein Funktionswert von f ist. Diese Eigenschaft wird als *Surjektivität* bezeichnet.

Definition 2.8 Eine reelle Funktion $f : D_f \rightarrow Z$ heißt *surjektiv*, wenn gilt

$$\forall y \in Z : \exists x \in D_f : y = f(x). \quad (2.61)$$

Surjektivität ist gleichbedeutend damit, dass die Zielmenge gleich dem Bild der Funktion ist, d.h. $Z = W_f$. Eine reelle Funktion, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, wird als *bijektiv* bezeichnet.

Tabelle 2.1: Beispielfunktionen $f_n : D_{f_n} \rightarrow Z$ mit $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ zur Illustration der Begriffe Injektivität und Surjektivität.

	nicht surjektiv	surjektiv
nicht injektiv		
injektiv		

In Tabelle 2.1 sind vier Funktionen zur Illustration der Begriffe Injektivität und Surjektivität dargestellt. Die Funktion f_1 in der ersten Zeile und ersten

Spalte der Tabelle ist nicht injektiv, da die Argumente 2 und 3 beide auf den Wert 5 abgebildet werden. f_1 ist darüber hinaus nicht surjektiv, da es zum Wert $5 \in Z$ kein Argument $x \in D_{f_1}$ gibt, so dass $f_1(x) = 5$, d.h. $Z \neq W_{f_1}$. Die Funktion f_2 in der ersten Zeile und zweiten Spalte ist ebenso nicht injektiv. f_2 ist jedoch surjektiv, da $Z = W_{f_2}$. Die Funktion f_3 in der zweiten Zeile und ersten Spalte ist injektiv, jedoch nicht surjektiv, da $Z \neq W_{f_3}$. Die Funktion f_4 in der zweiten Zeile und zweiten Spalte ist sowohl injektiv als auch surjektiv. f_4 ist somit bijektiv.

Aufgabe 2.10 Geben Sie an, ob die Funktion $f : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ surjektiv ist.

Für jede bijektive Funktion kann man zeigen, dass sie eine Umkehrfunktion besitzt. Genauer gilt folgender Satz:

Satz 2.1 Für jede bijektive Funktion $f : D_f \rightarrow W_f$ existiert eine Funktion $f^{-1} : W_f \rightarrow D_f$ mit den Eigenschaften

$$\forall x \in D_f : f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad \forall x \in W_f : f(f^{-1}(x)) = x. \quad (2.62)$$

Die Funktion f^{-1} wird als Umkehrfunktion bezeichnet. Es gilt $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$.

Man kann ebenso zeigen, dass jede streng monotone Funktion $f : D_f \rightarrow W_f$ eine Umkehrfunktion besitzt.

Aufgabe 2.11 Geben Sie an, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ mit $f(x) = \sin(x)$ eine Umkehrfunktion besitzt.

Ist die Funktionsgleichung für eine bijektive Funktion f bekannt, so kann die Umkehrfunktion f^{-1} u.U. mit folgender Methode bestimmt werden:

1. In der Funktionsgleichung für f wird das Symbol $f(x)$ durch das Symbol y ersetzt.
2. Die entstehende Gleichung wird nach x aufgelöst.
3. In der entstehenden Gleichung werden die Symbole x und y vertauscht.
4. In der entstehenden Gleichung wird das Symbol y durch das Symbol $f^{-1}(x)$ ersetzt.

Beispiel 2.15 Sei $f : [1; \infty) \rightarrow [2; \infty)$ mit $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$ eine bijektive, d.h. invertierbare, Funktion. Zur Bestimmung der Umkehrfunktion wird in Schritt 1 in der Funktionsgleichung für f das Symbol $f(x)$ durch das Symbol y ersetzt. Es entsteht die Gleichung

$$y = 2 + \sqrt{x-1}. \quad (2.63)$$

In Schritt 2 wird die entstehende Gleichung nach x aufgelöst. Es ergibt sich

$$x = (y-2)^2 + 1. \quad (2.64)$$

In Schritt 3 werden in der umgestellten Gleichung die Symbole x und y vertauscht. Es ergibt sich

$$y = (x-2)^2 + 1. \quad (2.65)$$

Abschließend wird in Schritt 4 in der entstandenen Gleichung das Symbol y durch das Symbol $f^{-1}(x)$ ersetzt. So ergibt sich die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion:

$$f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1. \quad (2.66)$$

Die Funktion $f^{-1} : [2; \infty) \rightarrow [1; \infty)$ ist die Umkehrfunktion von f , denn für beliebiges $x \in D_f = [1; \infty)$ gilt

$$f^{-1}(f(x)) = [f(x) - 2]^2 + 1 \quad (2.67)$$

$$= [2 + \sqrt{x-1} - 2]^2 + 1 \quad (2.68)$$

$$= (\sqrt{x-1})^2 + 1 \quad (2.69)$$

$$= x - 1 + 1 \quad (2.70)$$

$$= x. \quad (2.71)$$

Ebenso gilt für beliebiges $x \in D_{f^{-1}} = [2; \infty)$ die Relation

$$f(f^{-1}(x)) = 2 + \sqrt{f^{-1}(x) - 1} \quad (2.72)$$

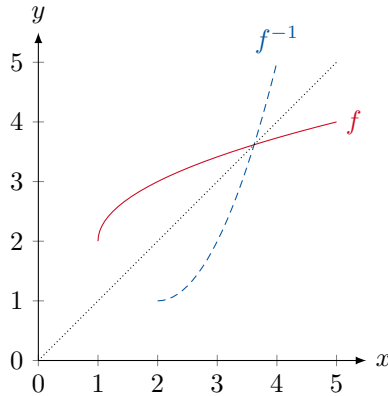
$$= 2 + \sqrt{(x-2)^2 + 1 - 1} \quad (2.73)$$

$$= 2 + \sqrt{(x-2)^2} \quad (2.74)$$

$$= 2 + x - 2 \quad (2.75)$$

$$= x. \quad (2.76)$$

Die Graphen von f und f^{-1} sind in folgendem Diagramm dargestellt.



Aufgabe 2.12 Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$.

Aufgabe 2.13 Zeigen Sie, dass für die Funktion f aus Aufgabe 2.12 und ihre Umkehrfunktion f^{-1} die folgenden Relationen gelten:

$$\forall x \in D_f : f^{-1}(f(x)) = x, \quad (2.77)$$

$$\forall x \in D_{f^{-1}} : f(f^{-1}(x)) = x. \quad (2.78)$$

Beispiel 2.16 Die Funktion $x(t)$ mit $D_x = \mathbb{R}$ aus Beispiel 1.1 ist nicht invertierbar, d.h. es ist i.A. nicht möglich aus der Kenntnis des Ortes x des Massepunktes eindeutig den entsprechenden Zeitpunkt t anzugeben, zu dem sich der Massepunkt an diesem Ort befindet. Der Grund liegt darin, dass es (außer bei $t = t_{\max} = v_0/g$) stets zwei Zeitpunkte gibt, an denen ein vorgegebener Ort erreicht wird. Betrachtet man jedoch nur Zeitpunkte $t \geq t_{\max}$, so ist $x(t)$ invertierbar und es ergibt sich die Umkehrfunktion

$$t(x) = t_{\max} + \sqrt{t_{\max}^2 + 2(x_0 - x)/g}. \quad (2.79)$$

Aus Beispiel 2.15 ist zu erkennen, dass sich aus dem Graph einer gegebenen Funktion f der Graph der entsprechenden Umkehrfunktion f^{-1} durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten bzw. dritten Quadranten ergibt.

2.2.4 Verkettung von Funktionen

Funktionen können unter bestimmten Voraussetzungen ineinander eingesetzt werden. Dieses ineinander Einsetzen wird als *Verkettung* bezeichnet.

Definition 2.9 Seien $f : D_f \rightarrow W_f$ und $g : D_g \rightarrow W_g$ zwei Funktionen. Wenn $W_g \subseteq D_f$, so wird die Funktion $f \circ g : D_{f \circ g} \rightarrow W_{f \circ g}$ mit

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad (2.80)$$

als *Verkettung von f mit g* bezeichnet.

Die Verkettung zweier Funktionen f und g entspricht der Hintereinanderausführung der Funktionen. Bei $(f \circ g)(x)$ wird zuerst g an der Stelle x ausgewertet. Der Funktionswert $g(x)$ wird anschließend als Argument an die Funktion f übergeben.

Beispiel 2.17 Sei $f : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 1. \quad (2.81)$$

Wird die Definitionsmenge von g auf $D_g = [-1; \infty)$ und die Wertemenge entsprechend auf $W_g = D_f = [0; \infty)$ eingeschränkt, so kann die Verkettung

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1} \quad (2.82)$$

mit $D_{f \circ g} = [-1; \infty)$ und $W_{f \circ g} = [0; \infty)$ gebildet werden. Da $W_f \subset D_g$, kann ebenso die Verkettung

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1 \quad (2.83)$$

mit $D_{g \circ f} = [0; \infty)$ und $W_{g \circ f} = [1; \infty)$ gebildet werden.

Aufgabe 2.14 Gibt es reelle Funktionen f und g , für die $f \circ g = g \circ f$ gilt? Geben Sie ggf. ein Beispiel an.

2.3 Folgen und Grenzwerte

Definition 2.10 Eine Funktion $f : D_f \rightarrow Z$ mit $D_f = \mathbb{N}$ und $Z \subseteq \mathbb{R}$ wird als *reelle Folge* bezeichnet.

Das Argument einer Folge wird i.d.R. mit n bezeichnet. Die Funktionswerte $f(n)$ einer Folge werden häufig als a_n notiert, d.h. $a_n := f(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die entsprechende Folge f wird dann auch mit (a_n) bezeichnet. Die a_n mit $n \in \mathbb{N}$ werden *Folenglieder* genannt.

Beispiel 2.18 Sei (a_n) eine Folge mit $a_n = 1/n$. Dann ist $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, $a_4 = 1/4$ usw.

Beispiel 2.19 Sei (a_n) eine Folge mit $a_n = (-1)^n$. Dann ist $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$ usw.

Aufgabe 2.15 Sei (a_n) eine Folge mit $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/4$, $a_3 = 1/8$, $a_4 = 1/16$, $a_5 = 1/32$ usw. Geben Sie eine Funktionsgleichung für diese Folge an, mit der das n -te Folgenglied a_n für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ berechnet werden kann.

Es gibt reelle Folgen, deren Funktionswerte für wachsendes Argument einem bestimmten Wert beliebig nahe kommen, siehe Abbildung 2.7. Solch eine Folge wird als *konvergent* bezeichnet. Der Wert, dem die Funktionswerte der Folge für wachsendes Argument beliebig nahe kommen, wird als *Grenzwert* bezeichnet.

Definition 2.11 Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert* einer Folge (a_n) , wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon. \quad (2.84)$$

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt *konvergent*. Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt *divergent*.

Besitzt eine Folge (a_n) den Grenzwert a , so schreibt man auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a. \quad (2.85)$$

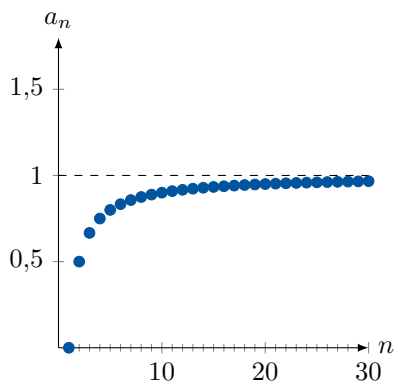
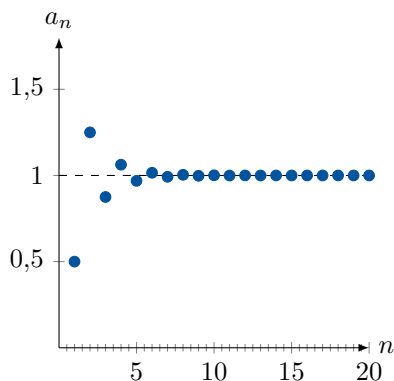

 (a) $a_n = 1 - 1/n$

 (b) $a_n = 1 + (-1/2)^n$

Abbildung 2.7: Zwei konvergente Folgen, die jeweils den Grenzwert $a = 1$ besitzen.

Für eine divergente Folge (a_n) schreibt man auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty. \quad (2.86)$$

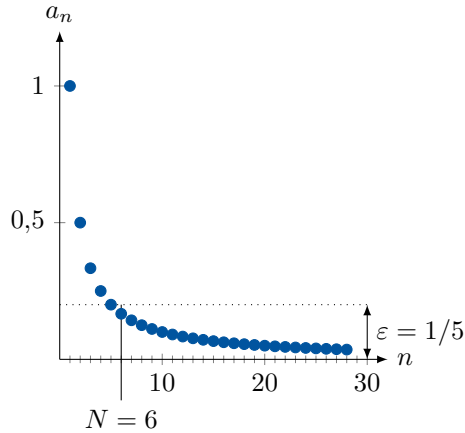
Eine Folge (a_n) , die den Grenzwert $a = 0$ besitzt, wird als *Nullfolge* bezeichnet.

Beispiel 2.20 Die Folge (a_n) mit $a_n = 1/n$ ist eine Nullfolge. Zum Beweis sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, z.B. $N = \lceil 1 + 1/\varepsilon \rceil$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\lceil 1 + 1/\varepsilon \rceil} \leq \frac{1}{1 + 1/\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} < \varepsilon. \quad (2.87)$$

In der folgenden Abbildung ist die Folge (a_n) dargestellt. Beispielsweise gilt für $\varepsilon = 1/5$, dass die Folgenglieder a_n für $n \geq N = 6$ zwischen dem Grenzwert $a = 0$ und ε liegen, d.h.

$$|a_n - 0| < \varepsilon. \quad (2.88)$$



Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (2.89)$$

Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda a, \quad (2.90)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad (2.91)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b, \quad (2.92)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab, \quad (2.93)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}, \quad \text{wenn } b \neq 0. \quad (2.94)$$

Sei (c_n) eine beschränkte Folge und (d_n) eine Nullfolge, dann gilt zudem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n d_n) = 0. \quad (2.95)$$

Zur Bestimmung von Grenzwerten von Folgen sind die folgenden Grenzwerte

nützlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0, \quad (2.96)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda^n) = 0, \quad \text{für } |\lambda| < 1, \quad (2.97)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^p \lambda^n) = 0, \quad \text{für } |\lambda| < 1, p \in \mathbb{N}, \quad (2.98)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\lambda} \right) = 1, \quad \text{für } \lambda > 0, \quad (2.99)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n} \right) = 1, \quad (2.100)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda^n}{n!} \right) = 0. \quad (2.101)$$

Die folgenden Folgen sind Divergent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n!} \right) = \infty, \quad (2.102)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda^n) = \infty, \quad \text{für } |\lambda| > 1, \quad (2.103)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda + n\mu) = \infty, \quad \text{für } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0. \quad (2.104)$$

Mit den o.g. Rechenregeln und den bekannten Grenzwerten lassen sich Grenzwerte komplizierterer, zusammengesetzter Funktionen bestimmen. Hierzu werden die Folgenglieder so umgeschrieben, dass die o.g. Rechenregeln und Grenzwerte verwendet werden können. Bei Brüchen bietet es sich häufig an, im Zähler und Nenner geschickt auszuklammern, so dass nur Konstanten oder Nullfolgen verbleiben.

Beispiel 2.21 Sei (a_n) eine Folge mit

$$a_n = \frac{3n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 4n + 2}. \quad (2.105)$$

Wir bestimmen den Grenzwert von (a_n) durch Ausklammern von n^2 im Zähler

und Nenner und Anwendung der Quotientenregel für Grenzwerte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 4n + 2} \right) \quad (2.106)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}} \right) \quad (2.107)$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} \right)} \quad (2.108)$$

$$= \frac{3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)}{5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^2} \right)} \quad (2.109)$$

$$= \frac{3 + 0 + 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}. \quad (2.110)$$

Beispiel 2.22 Sei (a_n) eine Folge mit

$$a_n = \frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 2}. \quad (2.111)$$

Wir bestimmen den Grenzwert von (a_n) durch Ausklammern von 3^n im Zähler und Nenner und Anwendung der Quotientenregel für Grenzwerte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 2} \right) \quad (2.112)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \frac{2}{3^n}} \right) \quad (2.113)$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3^n} \right)} \quad (2.114)$$

$$= \frac{3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^n} \right)} \quad (2.115)$$

$$= \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3. \quad (2.116)$$

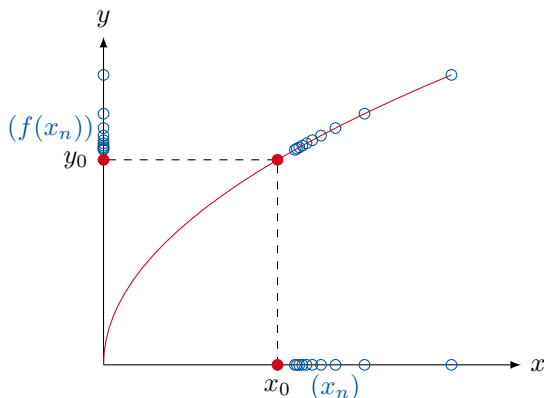


Abbildung 2.8: Illustration der Definition des Grenzwertes einer Funktion: Für jede Folge (x_n) mit $x_n \rightarrow x_0$ konvergiert $f(x_n) \rightarrow y_0$.

2.4 Grenzwerte von Funktionen

Mithilfe des Grenzwertbegriffs für Folgen lässt sich ein Grenzwertbegriff für Funktionen definieren. Der Grenzwert einer reellen Funktion (sofern er existiert) ist eine Zahl, der die Funktionswerte entgegen streben, wenn das Argument der Funktion einem vorgegebenen Wert x_0 entgegen strebt.

Definition 2.12 Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Zahl $y_0 \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0* , falls für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D_f$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ die Eigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0 \quad (2.117)$$

gilt.

Besitzt eine reelle Funktion $f(x)$ für x gegen x_0 den Grenzwert y_0 , so schreibt man auch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \quad \text{oder} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y_0. \quad (2.118)$$

Der Zusammenhang in Definition 2.12 ist in Abbildung 2.8 dargestellt. Für die Bestimmung von Grenzwerten von Funktionen gelten die analogen Rechenregeln wie bei Folgen.

Beispiel 2.23 Wir bestimmen den Grenzwert von $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \quad (2.119)$$

für $x \rightarrow \infty$. Durch Ausklammern von x^2 im Zähler und Nenner ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right) \quad (2.120)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \quad (2.121)$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)} \quad (2.122)$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)}{1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)} \quad (2.123)$$

$$= \frac{0-0}{1-0} = 0. \quad (2.124)$$

Aufgabe 2.16 Bestimmen Sie den Grenzwert von $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \quad (2.125)$$

für $x \rightarrow 1$.

2.4.1 Stetigkeit

Reelle Funktionen können „Sprünge“ besitzen, siehe Abbildung 2.9d. Funktionen mit Sprüngen werden als *unstetig* bezeichnet. Unstetige Funktionen treten in der Physik z.B. bei der idealisierten Beschreibung von Systemen auf. Häufig sind die in der Physik betrachteten Funktionen jedoch stetig, d.h. besitzen keine „Sprünge“. Der Begriff der Stetigkeit kann mathematisch wie folgt präzise gefasst werden.

Definition 2.13 Eine Funktion $f : D_f \rightarrow Z$ heißt an der Stelle $x_0 \in D_f$ *stetig*, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2.126)$$

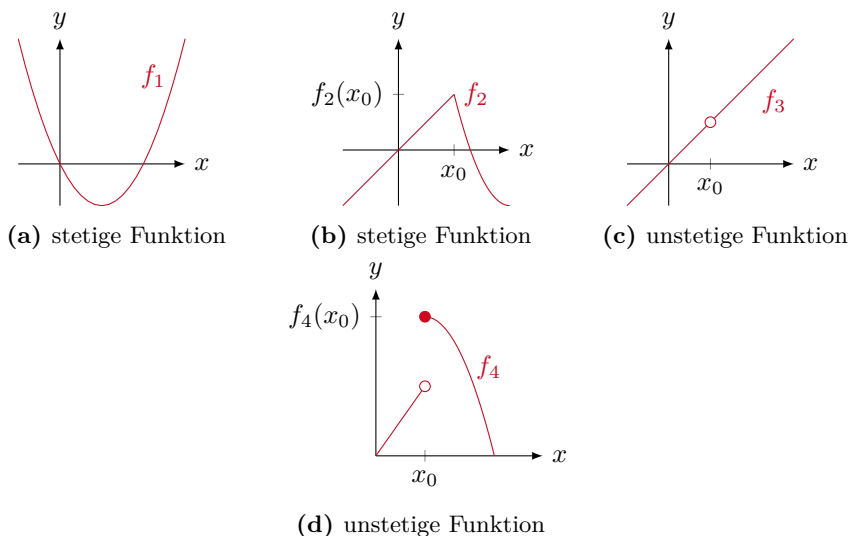


Abbildung 2.9: Funktionsgraphen zur Illustration des Stetigkeitsbegriffs.

Ist f an jedem $x \in D_f$ stetig, so heißt f auf D_f stetig.

In Abbildung 2.9 sind einige Funktionen zur Illustration des Stetigkeitsbegriffs dargestellt. Die Funktion f_1 in Abbildung 2.9a ist an jeder Stelle $x_0 \in D_{f_1}$ stetig, denn Gl. (2.126) gilt an jeder Stelle x_0 der Definitionsmenge von f_1 . Die Funktion f_2 in Abbildung 2.9b besitzt einen „Knick“ an der Stelle x_0 . An der Stelle x_0 ist f_2 aber dennoch stetig, denn für alle Folgen (x_n) , die von links ($\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_0$) oder von rechts ($\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_0$) gegen x_0 konvergieren, konvergiert die Folge der Funktionswerte $(f_2(x_n))$ gegen den eindeutigen Funktionswert $f_2(x_0)$, vgl. Gl. (2.126). Die Funktion f_3 in Abbildung 2.9c besitzt die Definitionsmenge $D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, d.h. f_3 ist an der Stelle x_0 nicht definiert. Somit ist f_3 an der Stelle x_0 unstetig. Zwar konvergiert die Folge $(f_3(x_n))$ gegen einen eindeutigen Wert $y_0 \in \mathbb{R}$ für alle Folgen (x_n) , die gegen x_0 konvergieren. Da f_3 an der Stelle x_0 jedoch nicht definiert ist, ist y_0 kein Funktionswert von f_3 und somit Gl. (2.126) nicht erfüllt. Die Funktion f_4 in Abbildung 2.9d ist an der Stelle x_0 unstetig. Betrachtet man z.B. eine Folge (x_n) , die von links gegen x_0 konvergiert, so konvergiert die entsprechende Folge der Funktionswerte $(f(x_n))$ nicht gegen den Funktionswert $f_4(x_0)$.

Die in Abbildung 2.9d dargestellte Funktion ist an der Stelle x_0 unstetig, denn sie besitzt an der Stelle x_0 einen „Sprung“. Zur Untersuchung von Funktionen mit „Sprüngen“ kann es nützlich sein, einseitige Grenzwerte zu betrachten, d.h. man untersucht den Grenzwert einer Funktion „von links kommend“ bzw. „von rechts kommend“. Hierzu betrachtet man Folgen (x_n) mit $x_n \rightarrow x_0$ von Argumenten der Funktion, wobei die Folgenglieder x_n ausschließlich kleiner als x_0 sind (linksseitiger Grenzwert) oder ausschließlich größer als x_0 sind (rechtsseitiger Grenzwert).

Definition 2.14 Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Zahl $y_0 \in \mathbb{R}$ heißt *linksseitiger Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0* , falls für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D_f$, $x_n < x_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ die Eigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0 \quad (2.127)$$

gilt. Die Zahl $y_0 \in \mathbb{R}$ heißt *rechtsseitiger Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0* , falls für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D_f$, $x_n > x_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ die Eigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0 \quad (2.128)$$

gilt.

Ist y_0 der rechtsseitige Grenzwert einer Funktion $f(x)$ für x gegen x_0 , so schreibt man auch

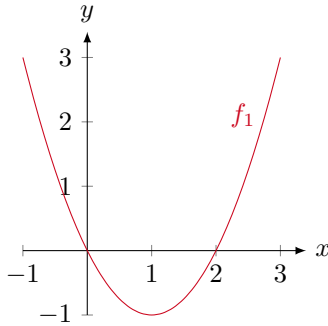
$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = y_0. \quad (2.129)$$

Ist y_0 der linksseitige Grenzwert einer Funktion $f(x)$ für x gegen x_0 , so schreibt man auch

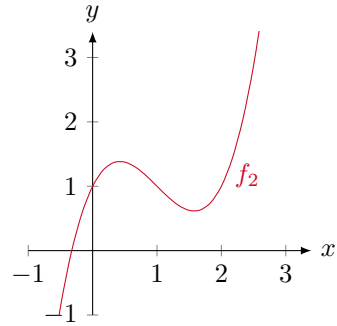
$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = y_0. \quad (2.130)$$

2.5 Spezielle Funktionen

Im folgenden werden einige wichtige reelle Funktionen eingeführt und ihre Eigenschaften diskutiert.



(a) $f_1(x) = -2x + x^2$



(b) $f_2(x) = 1 + 2x - 3x^2 + x^3$

Abbildung 2.10: Funktionsgraphen einiger Polynome.

2.5.1 Polynome

Definition 2.15 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Polynom vom Grad n* , $n \in \mathbb{N}_0$, wenn es für f eine Funktionsgleichung der Form

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \quad (2.131)$$

mit $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ gibt.

Die Zahlen a_0, a_1, \dots, a_n werden als *Koeffizienten* des Polynoms bezeichnet. Für den Grad eines Polynoms $f(x)$ schreibt man auch $\text{grad}(f)$.

Definition 2.16 Ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ der Form $f(x) = x^n$ wird als *Monom vom Grad n* bezeichnet.

Polynome sind auf ihrer gesamten Definitionsmenge \mathbb{R} stetig. Ein Polynom vom Grad n ist nach oben unbeschränkt, wenn n eine gerade Zahl und $a_n > 0$ ist. Ein Polynom vom Grad n ist nach unten unbeschränkt, wenn n eine gerade Zahl und $a_n < 0$ ist. Ein Polynom vom Grad n ist nach oben und nach unten unbeschränkt, wenn n eine ungerade Zahl ist. In Abbildung 2.10 sind verschiedene Polynome dargestellt. Das Polynom f_1 in Abbildung 2.10a ist vom Grad 2 mit $a_2 > 0$ und folglich nach oben unbeschränkt. Das Polynom f_2 in Abbildung 2.10b ist vom Grad 3 und folglich nach oben und nach unten unbeschränkt.

Es gibt viele Anwendungsfälle aus der Physik, in denen die Nullstellen eines gegebenen Polynoms bestimmt werden müssen. Das bedeutet, dass für ein gegebenes Polynom $f(x)$ alle Werte für x bestimmt werden müssen, für die $f(x) = 0$ ist. Im Allgemeinen besitzt ein Polynom vom Grad n genau n komplexe Nullstellen (Fundamentalsatz der Algebra). Hierbei ist es möglich, dass eine oder mehrere Nullstellen mehrfach auftreten. Dies hat zur Folge, dass jedes Polynom vom Grad n in der Form

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n) \quad (2.132)$$

geschrieben werden kann, wobei $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in \mathbb{C}$ die n (nicht notwendigerweise verschiedenen) Nullstellen des Polynoms sind.

Für ein Polynom vom Grad 2, d.h. von der Form $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, gibt es eine einfache Lösungsmethode um alle reellen Nullstellen zu bestimmen. Hierzu formen wir die Gleichung $f(x) = 0$ zur Bestimmung der Nullstellen wie folgt um:

$$0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (2.133)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{a_0}{a_2} + \frac{a_1}{a_2}x + x^2 \quad (2.134)$$

$$\Leftrightarrow 0 = q + px + x^2, \quad q = \frac{a_0}{a_2}, \quad p = \frac{a_1}{a_2} \quad (2.135)$$

$$\Leftrightarrow 0 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2\frac{p}{2}x + x^2 \quad (2.136)$$

$$\Leftrightarrow 0 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \quad (2.137)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \quad (2.138)$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0 \quad (2.139)$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0. \quad (2.140)$$

In Gl. (2.136) wurde 0 in der Form $(p/2)^2 - (p/2)^2$ addiert. Bei der anschließenden Umformung Von Gl. (2.136) zu Gl. (2.137) wurde die erste binomische Formel verwendet. Dieses Verfahren nennt man *quadratische Ergänzung*. Insgesamt ergibt sich somit die folgende Lösungsmethode für die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms vom Grad 2: Ist ein Polynom der Form $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ mit $a_2 \neq 1$ gegeben, so bringt man dieses zunächst in die Form

$$f(x) = a_2 \left(\frac{a_0}{a_2} + \frac{a_1}{a_2}x + x^2 \right) = a_2 (q + px + x^2) = a_2 g(x) \quad (2.141)$$

mit $q = a_0/a_2$, $p = a_1/a_2$ und $g(x) = q + px + x^2$. Anschließend verwendet man den folgenden Satz um die Nullstellen von $g(x)$ zu bestimmen. Die Nullstellen von $g(x)$ sind dann gleich den Nullstellen von $f(x)$.

Satz 2.2 Das Polynom $g(x) = q + px + x^2$ besitzt die beiden reellen Nullstellen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (2.142)$$

wenn $(p/2)^2 - q \geq 0$. Für $(p/2)^2 - q < 0$ besitzt das Polynom keine reellen Nullstellen.

Beispiel 2.24 Das Polynom $f(x) = x^2 - 3x + 2$ mit $p = -3$ und $q = 2$ besitzt die beiden Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \quad (2.143)$$

d.h. $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$. Das Polynom kann daher in der Form

$$f(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2) = (x - 2)(x - 1) \quad (2.144)$$

geschrieben werden.

Beispiel 2.25 Das Polynom $f(x) = x^2 + 1$ mit $p = 0$ und $q = 1$ besitzt keine reellen Nullstellen, denn $(p/2)^2 - q = -1 < 0$.

Beispiel 2.26 Wir betrachten noch einmal den freien Fall eines Massepunktes aus Beispiel 1.1. Die Funktion $x(t)$, die den senkrechten Abstand des Massepunktes von der Erdoberfläche zu einem beliebigen Zeitpunkt t beschreibt lautet

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + x_0, \quad (2.145)$$

vgl. Gl. (1.12). Wir wollen den Zeitpunkt t_B ermitteln, zu dem sich der Massepunkt auf der Erdoberfläche befindet. Zum Zeitpunkt t_B muss somit

gelten $x(t_B) = 0$, d.h.

$$0 = -\frac{g}{2}t_B^2 + v_0 t_B + x_0 \quad (2.146)$$

$$\Leftrightarrow 0 = t_B^2 - \frac{2v_0}{g}t_B - \frac{2x_0}{g}. \quad (2.147)$$

Die gesuchten Zeitpunkte t_B sind somit die Nullstellen eines Polynoms vom Grad 2 mit $p = -2v_0/g$ und $q = -2x_0/g$. Die beiden Nullstellen t_B lauten

$$(t_B)_{1,2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2x_0}{g}}. \quad (2.148)$$

Die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms vom Grad größer als 2 ist i.A. schwieriger. Eine entsprechende Methode wird in Kapitel 2.5.2 vorgestellt.

Aufgabe 2.17 Bestimmen Sie die fünf reellen Nullstellen des Polynoms $f(x) = 2(x-2)^3(x-3)(x-4)$.

Aufgabe 2.18 Bestimmen Sie die drei reellen Nullstellen des Polynoms $f(x) = x(x^2 - 2x + 1)$.

2.5.2 Gebrochenrationale Funktionen

Definition 2.17 Eine reelle Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, deren Funktionsgleichung die Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m} \quad (2.149)$$

besitzt, wobei $p(x)$ ein Polynom vom Grad n und $q(x)$ ein Polynom vom Grad m ist, wird als *gebrochenrationale Funktion* bezeichnet. Ist $n > 0$ und $n < m$ so wird die Funktion auch als *echt gebrochenrationale Funktion* bezeichnet. Die Definitionsmenge von f ist $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

An den Stellen x_0 , für die der Nenner verschwindet, d.h. $q(x_0) = 0$, ist eine gebrochenrationale Funktion nicht definiert. An den Stellen x_0 , an denen $q(x_0) = 0$ und $p(x_0) \neq 0$ liegt eine sog. *Polstelle* vor. An den Stellen x_0 , an denen $p(x_0) = 0$ und $q(x_0) = 0$ liegt eine hebbare Lücke vor. An einer hebbaren

Lücke x_0 kann die Definitionsmenge der Funktion um die Stelle x_0 ergänzt werden, indem die Funktion entsprechend umgeformt wird.

Beispiel 2.27 Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine echt gebrochenrationale Funktion mit

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}. \quad (2.150)$$

Die Funktion ist an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ nicht definiert, da der Nenner von f an diesen Stellen gleich Null ist. An der Stelle $x = 1$ besitzt die Funktion jedoch eine hebbare Lücke, denn durch Umformung ergibt sich

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}. \quad (2.151)$$

Die Definitionsmenge der so umgeformten Funktion kann um die Stelle $x = 1$ ergänzt werden, so dass $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. An der Stelle $x = -1$ ist der Nenner gleich Null, der Zähler jedoch ungleich Null. Die Stelle $x = -1$ ist somit eine Polstelle 1-ter Ordnung.

Polynomdivision

Die Polynomdivision ist ein Verfahren, um eine unecht gebrochenrationale Funktion in eine echt gebrochenrationale Funktion und ein Polynom umzuformen. D.h., wenn

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (2.152)$$

eine unecht gebrochenrationale Funktion ist (der Grad von p ist größer als Null und der Grad von p ist größer oder gleich dem Grad von q), dann soll f in die Form

$$f(x) = r(x) + \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (2.153)$$

gebracht werden, wobei $P(x)/Q(x)$ eine echt gebrochenrationale Funktion und $r(x)$ ein Polynom ist.

Wir wollen das Verfahren der Polynomdivision an einem Beispiel erläutern. Sei

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 2x + 3}{x^2 + 3} \quad (2.154)$$

eine unecht gebrochenrationale Funktion mit $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x + 3$ und $q(x) = x^2 + 3$. Für die Polynomdivision müssen die Summanden im Zähler und Nenner von $f(x)$ zunächst nach Potenzen von x absteigend sortiert werden.

Diese ist in der o.g. Funktionsgleichung für $f(x)$ bereits geschehen. Für die nun folgende Rechnung wird $f(x)$ wie folgt notiert, wobei der Zähler $Q(x) = x^2 + 3$ des Restpolynoms bereits bekannt ist:

$$\left(\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 + 2x \\ + 3 \end{array} \right) / (x^2 + 3) = \quad + \frac{\quad}{x^2 + 3}. \quad (2.155)$$

Im ersten Schritt wird der Summand in $p(x)$ mit der größten Potenz, d.h. $2x^3$, durch den Summanden in $q(x)$ mit der größten Potenz, d.h. x^2 , dividiert. Das Ergebnis dieser Division ist $2x^3/x^2 = 2x$. Dieses Ergebnis ist der erste Term in $r(x)$ und wird entsprechend auf die rechte Seite der Gleichung geschrieben:

$$\left(\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 + 2x \\ + 3 \end{array} \right) / (x^2 + 3) = 2x \quad + \frac{\quad}{x^2 + 3}. \quad (2.156)$$

Das Ergebnis $2x$ der zuletzt ausgeführten Division der beiden Terme höchster Potenz des Zählers und Nenners wird nun mit $q(x)$ multipliziert. Es ergibt sich $2xq(x) = 2x(x^2 + 3) = 2x^3 + 6x$. Dieses Ergebnis wird nun vom Zählerpolynom $p(x)$ subtrahiert. Hierfür wird das Ergebnis mit -1 multipliziert und (wie bei der schriftlichen Addition) unter das Zählerpolynom $p(x)$ geschrieben:

$$\left(\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 + 2x \\ - 2x^3 \qquad - 6x \\ \hline \end{array} \right) / (x^2 + 3) = 2x \quad + \frac{\quad}{x^2 + 3}. \quad (2.157)$$

Die Addition des Zählerpolynom $p(x)$ mit dem Ausdruck $-2x^3 - 6x$ ergibt $p(x) - 2x^3 - 6x = 5x^2 - 4x + 3$. Dieses Ergebnis stellt das neue Zählerpolynom $p(x)$ dar. Es wird durch einen Strich abgetrennt unter das alte Zählerpolynom geschrieben:

$$\left(\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 + 2x \\ - 2x^3 \qquad - 6x \\ \hline 5x^2 - 4x + 3 \end{array} \right) / (x^2 + 3) = 2x \quad + \frac{\quad}{x^2 + 3}. \quad (2.158)$$

Nun beginnt der Algorithmus von vorn, diesmal jedoch mit dem neuen Zählerpolynom $p(x) = 5x^2 - 4x + 3$. Zunächst wird der Summand mit der höchsten Potenz in $p(x)$, d.h. $5x^2$, durch den Summanden mit der höchsten Potenz in $q(x)$, d.h. x^2 dividiert. Es ergibt sich $5x^2/x^2 = 5$. Dieses Ergebnis ist ein weiterer Term in $r(x)$ und wird entsprechend auf der rechten Seite der Gleichung notiert:

$$\left(\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 + 2x \\ - 2x^3 \qquad - 6x \\ \hline 5x^2 - 4x + 3 \end{array} \right) / (x^2 + 3) = 2x + 5 + \frac{\quad}{x^2 + 3}. \quad (2.159)$$

Das Ergebnis 5 wird nun wieder mit $q(x)$ multipliziert. Es ergibt sich $5q(x) = 5x^2 + 15$. Dieses Ergebnis wird vom Zählerpolynom $p(x)$ subtrahiert und man erhält als neues Zählerpolynom $p(x) = -4x - 12$:

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 5x^2 + 2x + 3) \div (x^2 + 3) = 2x + 5 + \frac{-4x - 12}{x^2 + 3} \\ \underline{-2x^3 - 6x} \\ 5x^2 - 4x + 3 \\ \underline{-5x^2 - 15} \\ -4x - 12 \end{array} \quad (2.160)$$

Das erhaltene Zählerpolynom $p(x) = -4x - 12$ ist nicht weiter durch das Nennerpolynom $q(x) = x^2 + 3$ teilbar, da der Grad von $p(x)$ kleiner als der Grad von $q(x)$ ist. Das Zählerpolynom $p(x) = -4x - 12$ stellt somit das Zählerpolynom $P(x)$ des echt gebrochenrationalen Restterms $P(x)/Q(x)$ dar.

Aufgabe 2.19 Führen Sie für die unecht gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{2x^4 + 2x^2 - 3x + 1}{2x^3 - 1} \quad (2.161)$$

die Polynomdivision durch.

Partialbruchzerlegung

Jede echt gebrochenrationale Funktion f kann als Summe sogenannter *Partialbrüche* geschrieben werden. Ein Partialbruch ist eine echt gebrochenrationale Funktion der Form

$$\frac{a_1}{(x-x_1)^n} \quad \text{oder} \quad \frac{a_2x+a_3}{(x^2+r_1x+s_1)^m} \quad (2.162)$$

mit $a_1, a_2, a_3, x_1, r_1, s_1 \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Hierbei sind die Nennerpolynome der Partialbrüche die Faktoren, in die das Nennerpolynom von f zerlegt werden kann. Mithilfe der Zerlegung einer echt gebrochenrationalen Funktion f in eine Summe von Partialbrüchen ist es möglich, auf einfache Weise die Stammfunktion von f zu bestimmen.

Wir diskutieren die Methode der Partialbruchzerlegung anhand der Beispielfunktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = \frac{p(x)}{q(x)}. \quad (2.163)$$

Um $f(x)$ in eine Summe von Partialbrüchen zu zerlegen, muss im ersten Schritt das Nennerpolynom $q(x)$ faktorisiert werden. D.h. das Nennerpolynom soll in

die Form

$$q(x) = a(x-x_1)^{n_1} \cdots (x-x_t)^{n_t} (x^2+r_1x+s_1)^{m_1} \cdots (x^2+r_wx+s_w)^{m_w} \quad (2.164)$$

gebracht werden. Hierbei sind $n_1, \dots, n_t, m_1, \dots, m_w \in \mathbb{N}$ Exponenten, die mithilfe jeweils eines Index durchnummeriert werden. Die Zahl $t \in \mathbb{N}$ gibt die Anzahl der Faktoren der Form $(x-x_i)^{n_i}$ an und $w \in \mathbb{N}$ gibt entsprechend die Anzahl der Faktoren der Form $(x^2+r_ix+s_i)^{m_i}$ an. Die Zahl n_i entspricht somit der Vielfachheit, mit der die Nullstelle x_i im Zählerpolynom auftritt. Die Zahlen $x_1, \dots, x_t \in \mathbb{R}$ sind die reellen Nullstellen des Zählerpolynoms $q(x)$. Die $r_1, \dots, r_w, s_1, \dots, s_w \in \mathbb{R}$ sind die Koeffizienten der quadratischen Polynome, in die das Nennerpolynom faktorisiert werden kann, die jedoch keine reellen Nullstellen besitzen. Die Konstante a kann in der Form $1/a$ in das Zählerpolynom aufgenommen werden. Um das Nennerpolynom $q(x)$ in die faktorisierte Form (2.164) zu bringen, bestimmen wir die Nullstellen von $q(x)$. Durch probieren lesen wir ab, dass $x_1 = -2$ eine Nullstelle von $q(x)$ ist. Daraus können wir schließen, dass $(x-x_1) = (x+2)$ einer der Faktoren von $q(x)$ ist. Um die verbleibenden Faktoren zu bestimmen, führen wir die folgende Polynomdivision aus:

$$\begin{array}{r} q(x)/(x+2) = \left(\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 + x + 2 \\ -x^3 - 2x^2 \end{array} \right) / (x+2) = x^2 + 1 \quad (2.165) \\ \hline x+2 \\ -x-2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Wir erhalten somit die faktorisierte Form des Nennerpolynoms,

$$q(x) = (x+2)(x^2+1). \quad (2.166)$$

Der Faktor (x^2+1) besitzt keine reellen Nullstellen und kann daher nicht weiter faktorisiert werden. Durch Vergleich von Gl. (2.166) mit Gl. (2.164) liest man $t=1$, $n_1=1$, $w=1$, $m_1=1$, $x_1=-2$, $r_1=0$, $s_1=1$ und $a=1$ ab. Die Faktoren von $q(x)$ in Gl. (2.166) stellen die Nennerpolynome der Partialbrüche aus Gl. (2.162) dar. Das bedeutet, dass $f(x)$ in der Form

$$f(x) = \frac{a_1}{x+2} + \frac{a_2x+a_3}{x^2+1} \quad (2.167)$$

geschrieben werden kann. Die Zahlen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ sind zunächst unbekannt. Um a_1 , a_2 und a_3 zu bestimmen, wird der Ausdruck auf der rechten Seite der Funktionsgleichung für $f(x)$ aus Gl. (2.167) auf einen Hauptnenner gebracht:

$$f(x) = \frac{a_1(x^2+1) + (a_2x+a_3)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}. \quad (2.168)$$

Der Ausdruck in Gl. (2.168) ist zu Gl. (2.163) äquivalent. In Gl. (2.168) liegt das Nennerpolynom lediglich in faktorisierter Form vor. Da beide Funktionsgleichungen und die jeweiligen Nennerpolynome äquivalent sind, müssen auch die Zählerpolynome äquivalent sein. Folglich muss gelten

$$p(x) = x^2 - 1 = a_1(x^2 + 1) + (a_2x + a_3)(x + 2). \quad (2.169)$$

Gl. (2.169) muss für alle $x \in D_f$ erfüllt sein. Daher können aus die Unbekannten a_1 , a_2 und a_3 aus Gl. (2.169) durch einen Koeffizientenvergleich ermittelt werden. Hierzu müssen die linke und die rechte Seite von Gl. (2.169) nach Potenzen von x sortiert werden:

$$x^2 - 1 = (a_1 + a_2)x^2 + (2a_2 + a_3)x + (a_1 + 2a_3). \quad (2.170)$$

Die Gleichheit der Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung führt auf die folgenden drei Bestimmungsgleichungen für a_1 , a_2 und a_3 :

$$a_1 + a_2 = 1, \quad (2.171)$$

$$2a_2 + a_3 = 0, \quad (2.172)$$

$$a_1 + 2a_3 = -1. \quad (2.173)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $a_1 = 3/5$, $a_2 = 2/5$, $a_3 = -4/5$. Damit ergibt sich die Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{\frac{3}{5}}{x+2} + \frac{\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}}{x^2+1} = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{x+2} + \frac{2x-4}{x^2+1} \right). \quad (2.174)$$

Eine Koeffizientenvergleich führt stets auf ein Gleichungssystem, aus dem die unbekannten Koeffizienten ermittelt werden können. Die Lösung großer Gleichungssysteme ist aber u.U. langwierig. Um die Koeffizienten zu ermitteln kann man sich alternativ auch zunutze machen, dass Gl. (2.169) für alle $x \in D_f$ erfüllt sein muss. Durch geschickte Wahl spezieller Werte für x kann die Gl. (2.169) deutlich vereinfacht und einzelne Koeffizienten u.U. direkt ermittelt werden. Setzt man in Gl. (2.169) beispielsweise die Nullstelle $x = -2$ ein, so ergibt sich die einfachere Gleichung

$$(-2)^2 - 1 = a_1[(-2)^2 + 1] + [a_2(-2) + a_3](-2 + 2) \quad (2.175)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 = 5a_1 \quad (2.176)$$

und damit sofort der Koeffizient $a_1 = 3/5$.

Bei dem obigen Beispiel tritt $(x^2 + 1)$ als Faktor im Nenner von $f(x)$ auf. Dieser Faktor konnte nicht weiter faktorisiert werden, da der Ausdruck $(x^2 + 1)$

keine reellen Nullstellen besitzt. Der Ausdruck besitzt jedoch die komplexen Nullstellen $x_2 = i$ und $x_3 = -i$, da $i^2 = -1$. Unter Zuhilfenahme komplexer Zahlen kann daher $(x^2 + 1) = (x - i)(x + i)$ faktorisiert werden und die Funktion damit in die Form

$$f(x) = \frac{\frac{3}{5}}{x+2} + \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i}{x-i} + \frac{\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i}{x+i} \quad (2.177)$$

gebracht werden.

Aufgabe 2.20 Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{x+1}{x^4+x^2}. \quad (2.178)$$

Ein Video zu gebrochenrationalen Funktionen finden Sie unter

<https://rwth-aachen.sciebo.de/s/1Yx9yevt1K5zTJm>

Ein Video zur Partialbruchzerlegung finden Sie unter

<https://rwth-aachen.sciebo.de/s/2jYf1gFbv7pALOG>

2.5.3 Exponentialfunktion

Es gibt genau eine Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad (2.179)$$

$$1+x \leq \exp(x). \quad (2.180)$$

Diese Funktion \exp wird als *Exponentialfunktion* bezeichnet. Im Folgenden werden wir aus den definierenden Eigenschaften (2.179) und (2.180) einige wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion ableiten.

Zunächst betrachten wir die Eigenschaften (2.179) und (2.180) an der Stelle $x = y = 0$. Aus beiden ergibt sich

$$1 \leq \exp(0) = \exp(0+0) = [\exp(0)]^2. \quad (2.181)$$

Hieraus folgt zum einen, dass $\exp(0)$ positiv ist. Aus der Gleichung $\exp(0) = [\exp(0)]^2$ folgt zum anderen, dass $\exp(0) = 1$. Weiterhin gilt

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x)\exp(-x). \quad (2.182)$$

Hieraus folgt, dass $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) \neq 0$ und

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}. \quad (2.183)$$

Aus der Ungleichung (2.180) folgt für $x \geq 0$, dass

$$0 \leq 1 + x \leq \exp(x) \quad (2.184)$$

und somit $\forall x \geq 0 : \exp(x) \geq 0$. Da $\exp(-x) = 1/\exp(x) \geq 0$, folgt weiter, dass $\exp(x) \geq 0$ auch für $x < 0$ gilt. Insgesamt ergibt sich, dass $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$.

Aus Gl. (2.179) folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(n) = \exp(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}}) = \underbrace{\exp(1) \cdots \exp(1)}_{n\text{-mal}} = [\exp(1)]^n. \quad (2.185)$$

Der Funktionswert $\exp(1)$ wird als *Eulersche Zahl* bezeichnet,

$$e := \exp(1). \quad (2.186)$$

Die Eulersche Zahl $e \in \mathbb{R}$ ist eine irrationale Zahl, d.h. nicht als rationale Zahl darstellbar. Der numerische Wert der Eulerschen Zahl muss über eine Grenzwertbetrachtung bestimmt werden (vgl. Kapitel 3.3) und beträgt näherungsweise $e \approx 2,718\,281\,828\,459\,045\,2$. Aus Gl. (2.185) ergibt sich mit der Eulerschen Zahl für $n \in \mathbb{N}$

$$e^n = \exp(n). \quad (2.187)$$

Diese Beziehung kann auf alle $x \in \mathbb{R}$ verallgemeinert werden. Dazu betrachten wir die Umformung

$$\exp(x) = \exp\left(\underbrace{\frac{x}{n} + \dots + \frac{x}{n}}_{n\text{-mal}}\right) = \underbrace{\exp\left(\frac{x}{n}\right) \cdots \exp\left(\frac{x}{n}\right)}_{n\text{-mal}} = \left[\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n \quad (2.188)$$

Hieraus folgt, dass $\exp(x)$ die Gleichung

$$\exp\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(x)} \quad (2.189)$$

erfüllt. Mit der Eulerschen Zahl ergibt sich damit

$$e^{x/n} = \sqrt[n]{e^x}. \quad (2.190)$$

Mit den obigen Schema lassen sich die folgenden weiteren Identitäten für $m, n \in \mathbb{N}$ zeigen

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = (\sqrt[n]{e})^m = \sqrt[n]{e^m} = e^{m/n}. \quad (2.191)$$

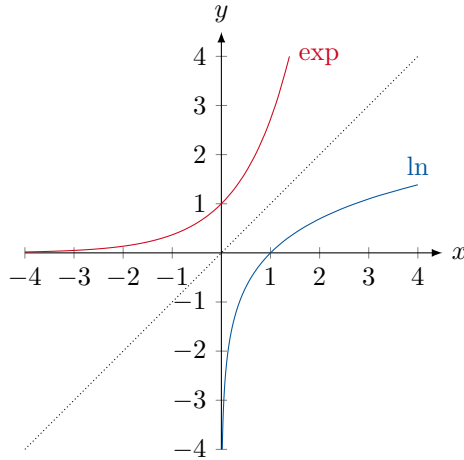


Abbildung 2.11: Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus

Damit sind Potenzen mit rationalem Exponenten und entsprechende Identitäten erklärt. Durch weitere Überlegungen lassen sich die o.g. Relationen auch auf irrationale Zahlen ausdehnen, so dass sich für alle $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\exp(x) = e^x \quad (2.192)$$

mit den bekannten Potenzgesetzen ergibt.

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0; \infty)$ ist auf ihrer gesamten Definitionsmenge $D_{\exp} = \mathbb{R}$ umkehrbar. Die entsprechende Umkehrfunktion wird als natürlicher Logarithmus $\ln : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. Die entsprechenden Umkehreigenschaften lauten

$$\forall x \in (0; \infty) : e^{\ln(x)} = x \quad \text{und} \quad \forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x. \quad (2.193)$$

Für alle $x, y > 0$ lässt sich damit folgende Identität zeigen

$$\ln(xy) = \ln(e^{\ln(x)} e^{\ln(y)}) = \ln(e^{\ln(x) + \ln(y)}) = \ln(x) + \ln(y). \quad (2.194)$$

Die Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus sind in [Abbildung 2.11](#) dargestellt. Aus den Umkehreigenschaften folgt zudem für $x > 0$ und $r \in \mathbb{R}$

$$\ln(x^r) = \ln\left(\left[e^{\ln(x)}\right]^r\right) = \ln\left(e^{r \ln(x)}\right) = r \ln(x). \quad (2.195)$$

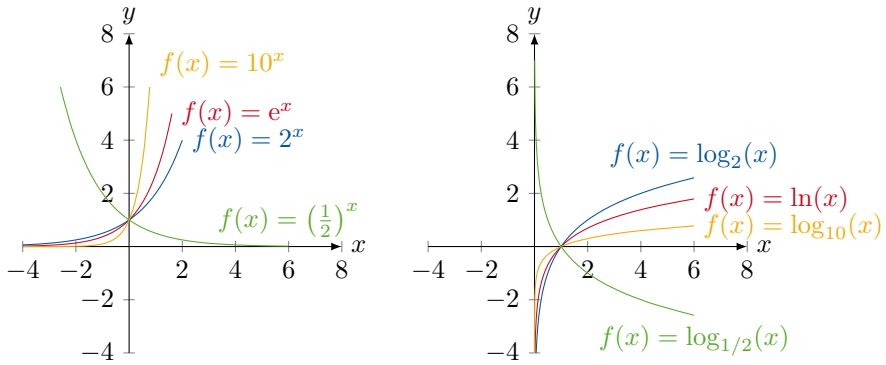


Abbildung 2.12: Allgemeine Potenzfunktion und Logarithmusfunktion

Mit dieser Relation lässt sich die Potenz einer Zahl $a > 0$ mit reellem Exponenten $x \in \mathbb{R}$ wie folgt definieren:

$$a^x := e^{x \ln(a)}. \quad (2.196)$$

Die entsprechende Umkehrfunktion wird als allgemeiner Logarithmus bzw. Logarithmus zur Basis a bezeichnet, $\log_a : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Entsprechend gelten die Umkehreigenschaften

$$\forall a, x \in (0; \infty) : a^{\log_a(x)} = x \quad \text{und} \quad \forall a, x \in \mathbb{R}, a > 0 : \log_a(a^x) = x. \quad (2.197)$$

Die allgemeine Potenzfunktion und der allgemeine Logarithmus sind in Abbildung 2.12 dargestellt. Aus den Umkehreigenschaften folgt der Zusammenhang zwischen dem allgemeinen Logarithmus und dem natürlichen Logarithmus

$$\log_a(a^x) = x = \frac{x \ln(a)}{\ln(a)} = \frac{\ln(e^{x \ln(a)})}{\ln(a)} = \frac{\ln(e^{\ln(a^x)})}{\ln(a)} = \frac{\ln(a^x)}{\ln(a)}. \quad (2.198)$$

Beispiel 2.28 Instabile Atomkerne wandeln sich spontan in anderen Atomkerne um. Dieses Phänomen wird als Radioaktivität bezeichnet. Hierbei gilt, dass die Anzahl N der Atomkerne zum Zeitpunkt t durch das Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (2.199)$$

gegeben ist. Hierbei ist N_0 die Anzahl der instabilen Atomkerne zum Zeitpunkt $t = 0$ und λ ist die Zerfallskonstante der entsprechenden instabilen Atomkernsorte. Die Zeitdauer, nach der sich die Hälfte der Atomkerne umgewandelt hat,

wird als Halbwertszeit $T_{1/2}$ bezeichnet. Es gilt

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}. \quad (2.200)$$

Durch Umformung ergibt sich daraus der Zusammenhang zwischen der Halbwertszeit und der Zerfallskonstante:

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}} \quad (2.201)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda T_{1/2} \quad (2.202)$$

$$\Leftrightarrow -\ln(2) = -\lambda T_{1/2} \quad (2.203)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\lambda} = T_{1/2}. \quad (2.204)$$

Aufgabe 2.21 Berechnen Sie die Differenz $\log_2(6) - \log_2(3)$.

2.5.4 Hyperbelfunktionen

Mithilfe der Exponentialfunktion können weitere Funktionen definiert werden, insbesondere die sog. Hyperbelfunktionen. Hierzu gehört der *Sinus hyperbolicus*, $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (2.205)$$

und der *Kosinus hyperbolicus*, $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}). \quad (2.206)$$

Die entsprechenden Umkehrfunktionen werden als *Areasinus hyperbolicus* arsinh und *Areakosinus hyperbolicus* arcosh bezeichnet. In Analogie zu den trigonometrischen Funktionen definiert man den *Tangens hyperbolicus*, $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \quad (2.207)$$

Die Hyperbelfunktionen sind in Abbildung 2.13 dargestellt.

Aufgabe 2.22 Bestimmen Sie die Wertemenge von \cosh .

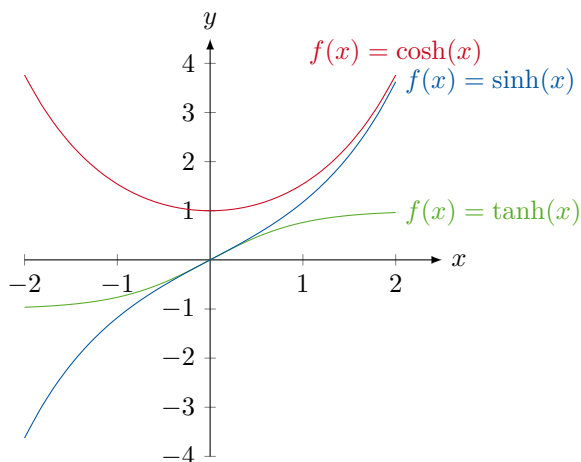


Abbildung 2.13: Hyperbelfunktionen

Aufgabe 2.23 Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x)$.

2.5.5 Trigonometrische Funktionen

Im Folgenden wollen wir die trigonometrischen Funktionen geometrisch plausibilisieren. Eine analytische Definition der trigonometrischen Funktionen wird in Kapitel 3.3 gegeben.

Wir betrachten einen Kreis mit dem Radius R , dessen Kreismittelpunkt sich im Koordinatenursprung eines 2-dimensionalen Koordinatensystems befindet, siehe Abbildung 2.14. Auf dem Kreis ist ein Punkt P markiert, der die Koordinaten (a, b) besitzt. Die drei Punkte $(0, 0)$, $(a, 0)$ und (a, b) definieren ein rechtwinkliges Dreieck. Die Verbindungslinie zwischen dem Punkt $(0, 0)$ und dem Punkt P (grün) wird als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet. Die beiden anderen Seiten des Dreiecks werden als Katheten bezeichnet. Die auf der Abszisse liegende Kathete (rot) und die Hypotenuse (grün) schließen den Winkel $\alpha \in [0; 2\pi)$ ein. Die Koordinaten (a, b) des Punktes P stehen mit dem Winkel α in Zusammenhang. Dieser Zusammenhang wird durch die *Kosinus-* und *Sinusfunktion* beschrieben, die auch als trigonometrischen

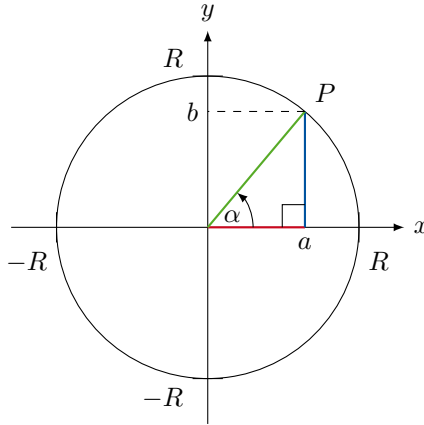


Abbildung 2.14: Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis.

Funktionen bezeichnet werden. Es wird definiert

$$\cos(\alpha) := \frac{a}{R}, \quad (2.208)$$

$$\sin(\alpha) := \frac{b}{R}. \quad (2.209)$$

Zusätzlich definiert man die *Tangensfunktion* und die *Kotangensfunktion*

$$\tan(\varphi) := \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}, \quad (2.210)$$

$$\cot(\varphi) := \frac{1}{\tan(\varphi)}. \quad (2.211)$$

Aus Abbildung 2.14 können die folgenden speziellen Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen abgelesen werden:

$$\cos(0) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad (2.212)$$

$$\sin(0) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1. \quad (2.213)$$

Die Sinus- und Kosinusfunktion werden im Folgenden auf ganz \mathbb{R} definiert, d.h. $D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$. Hierfür werden auch Winkel $\varphi \geq 2\pi$ und $\varphi < 0$ als Argumente zugelassen. Diese Winkel werden hierbei über $\alpha = \varphi \bmod 2\pi$ auf das Intervall $[0; 2\pi)$ abgebildet. Damit können spezielle Funktionswerte

trigonometrischer Funktionen auch allgemeiner formuliert werden. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\cos(n\pi) = (-1)^n, \quad \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0, \quad (2.214)$$

$$\sin(n\pi) = 0, \quad \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^n, \quad (2.215)$$

$$\tan(n\pi) = 0, \quad \tan\left[(2n+1)\frac{\pi}{4}\right] = (-1)^n. \quad (2.216)$$

Aus dem Satz des Pythagoras lässt sich die folgende wichtige Relation für beliebige Argumente $\varphi \in \mathbb{R}$ ableiten:

$$a^2 + b^2 = R^2 \quad (2.217)$$

$$\Leftrightarrow [R \cos(\varphi)]^2 + [R \sin(\varphi)]^2 = R^2 \quad (2.218)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1. \quad (2.219)$$

Aus Abbildung 2.14 ist zudem zu erkennen, dass die trigonometrischen Funktionen periodisch sind,

$$\cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi), \quad (2.220)$$

$$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi), \quad (2.221)$$

$$\tan(\varphi + \pi) = \tan(\varphi). \quad (2.222)$$

Darüber hinaus gelten die Symmetrien

$$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi), \quad (2.223)$$

$$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi), \quad (2.224)$$

$$\tan(-\varphi) = -\tan(\varphi), \quad (2.225)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \quad (2.226)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right). \quad (2.227)$$

In Abbildung 2.15 sind die trigonometrischen Funktionen dargestellt. In Tabelle 2.2 sind zudem spezielle Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen aufgelistet.

Aufgrund ihrer Periodizität sind die trigonometrischen Funktionen auf ihrer Definitionsmenge nicht bijektiv und damit nicht umkehrbar. Erst durch eine entsprechende Einschränkung der Definitionsmenge kann für jede trigonometrische Funktion eine entsprechende Umkehrfunktion angegeben werden. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen werden als *Arkusfunktionen* bezeichnet. Die entsprechend eingeschränkten trigonometrischen

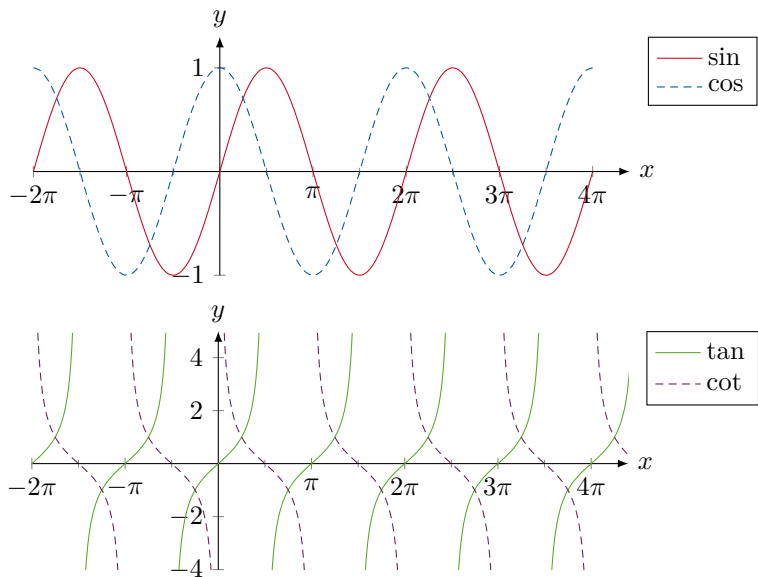


Abbildung 2.15: Trigonometrische Funktionen

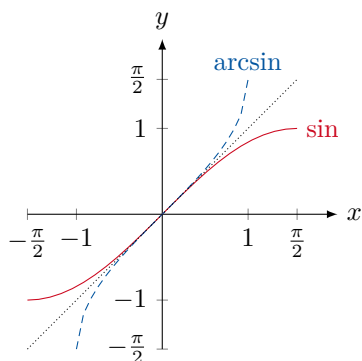
Funktionen und ihre Umkehrfunktionen sind in Tabelle 2.3 aufgelistet und in Abbildung 2.16 dargestellt.

Aufgabe 2.24 Zeigen Sie, dass $\tan(-\varphi) = -\tan(\varphi)$.

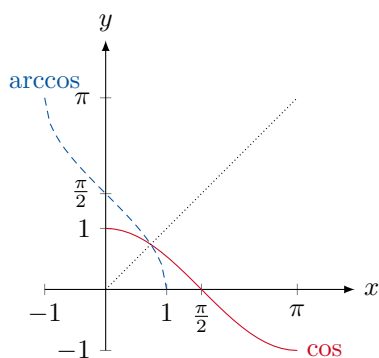
Aufgabe 2.25 Zeigen Sie, dass $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Verwenden Sie hierfür Gl. (2.219).

Tabelle 2.2: Spezielle Funktionswerte trigonometrischer Funktionen.

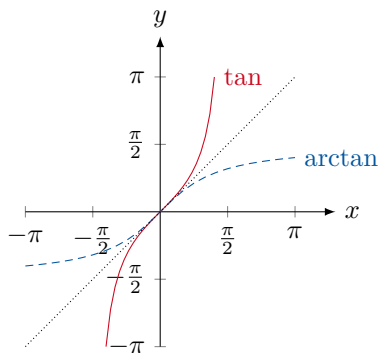
$\varphi =$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin(\varphi) =$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\cos(\varphi) =$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\tan(\varphi) =$	0	1	$\pm\infty$	-1	0	1	$\pm\infty$	-1	0



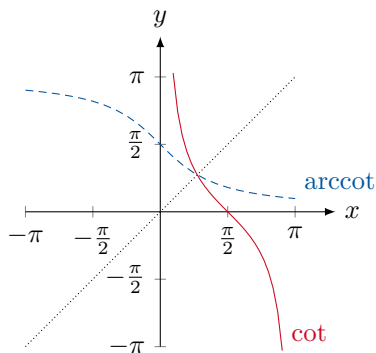
(a) sin und arcsin



(b) cos und arccos



(c) tan und arctan



(d) cot und arccot

Abbildung 2.16: Funktionsgraphen der eingeschränkten trigonometrischen Funktionen und ihre entsprechenden Umkehrfunktionen.

Tabelle 2.3: Trigonometrische Funktionen mit eingeschränkter Definitionsmenge und entsprechend Umkehrfunktionen.

Funktion	Umkehrfunktion
$\sin : [-\pi/2; \pi/2] \rightarrow [-1; 1]$	$\arcsin : [-1; 1] \rightarrow [-\pi/2; \pi/2]$
$\cos : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$	$\arccos : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$
$\tan : (-\pi/2; \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$	$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2; \pi/2)$
$\cot : (0; \pi) \rightarrow \mathbb{R}$	$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0; \pi)$

2.6 Differentiation

2.6.1 Definition der Ableitung

Die im Rahmen der Physik formulierten Naturgesetze sind meist in Form von Zusammenhängen zwischen physikalischen Größen und ihren Änderungsraten formuliert. Die Änderungsrate einer Funktion an einer bestimmten Stelle wird mathematisch durch die Ableitung der Funktion an dieser Stelle beschrieben. Der mathematische Begriff der Ableitung einer Funktion ist somit von zentraler Bedeutung für die mathematische Naturbeschreibung im Rahmen der Physik.

Der Wert der Ableitung einer Funktion f an einer Stelle $x_0 \in D_f$ entspricht dem Wert der Steigung der Tangenten an die Funktion an dieser Stelle. Man spricht auch von der „Steigung“ der Funktion an dieser Stelle. Die Tangente an die Funktion an der Stelle x_0 ergibt sich aus einer Abfolge von Sekanten, bei denen die beiden Stellen x_1 und x_2 , an denen sich die Tangente und die Funktion scheiden, immer näher an x_0 heranrücken (Grenzwertbildung). Dieser Grenzwertprozess ist in Abbildung 2.17 skizziert. Damit die Ableitung an der Stelle x_0 existiert, muss die Funktion an der Stelle x_0 stetig sein. (Wäre f an der Stelle x_0 nicht stetig, dann wäre die Tangentengerade nicht eindeutig.) Für die formale Definition wählen wir $x_1 = x_0$ und bezeichnen $x_2 = x_0 + h$, wobei h positiv oder negativ sein kann. Nun definiert man die Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 wie folgt.

Definition 2.18 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $I \subseteq D_f$ ein offenes Intervall ist. Die Funktion f heißt *an einer Stelle* $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.228)$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *Ableitung von f an der Stelle x_0* und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

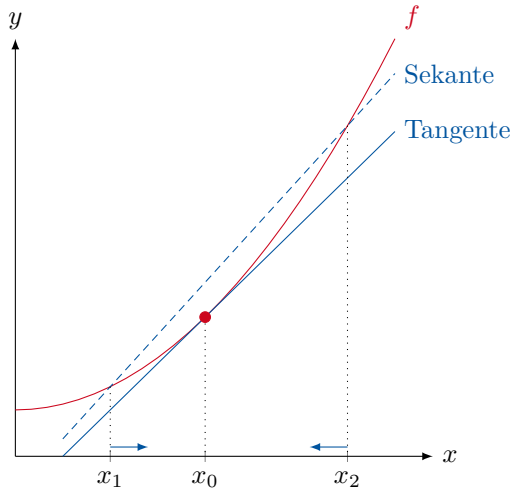


Abbildung 2.17: Konstruktion der Tangente an eine Funktion f an der Stelle x_0 durch eine Abfolge von Sekanten.

Die Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion f an der Stelle x_0 wird häufig auch in den Formen

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) \quad (2.229)$$

geschrieben. Diese alternativen Schreibweisen stellen für explizite Berechnungen zum Teil nützliche Notationen dar.

Aus der Definition der Ableitung erkennt man, dass die Ableitung an einer Stelle nur dann existiert, wenn $f(x_0 + h) \rightarrow f(x_0)$ für $h \rightarrow 0$. Diese Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass f an der Stelle x_0 stetig ist. Stetigkeit an der Stelle x_0 ist somit eine notwendige Voraussetzung dafür, dass die Ableitung von f an der Stelle x_0 existiert.

Falls $f'(x_0)$ existiert, so ist f an der Stelle x_0 durch die Tangente linear approximierbar, d.h. näherungsweise durch eine lineare Funktion der Form $t(x) = a + bx$ beschreibbar, vgl. Abbildung 2.17. Dabei gilt $b = f'(x_0)$. Die Konstante a ist dadurch bestimmt, dass $t(x_0) = f(x_0)$. Damit ergibt sich die Funktionsgleichung der Tangente wie folgt

$$f(x_0) = t(x_0) = a + f'(x_0)x_0 \quad (2.230)$$

$$\Leftrightarrow a = f(x_0) - f'(x_0)x_0 \quad (2.231)$$

$$\Leftrightarrow t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.232)$$

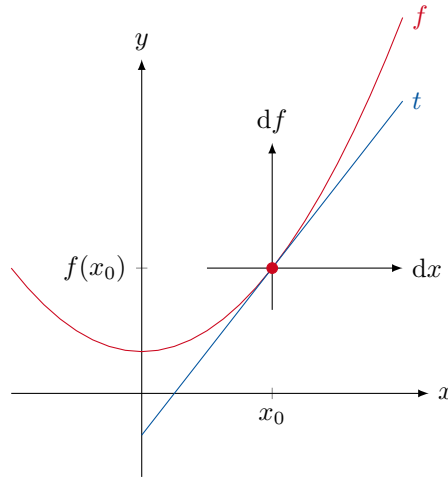


Abbildung 2.18: Illustration des Differentials von f an der Stelle x_0 .

Die Tangente t approximiert die Funktion f in einer kleinen Umgebung von x_0 . D.h. für $x \in D_f$, so dass $|x - x_0|$ „klein“ ist, ist $f(x) \approx t(x)$. Die Approximation einer Funktion durch ein Polynom in einer Umgebung einer Stelle x_0 wird in Kapitel 3.3 genauer betrachtet.

Die Tangente $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an die Funktion f im Punkt x_0 besitzt die Funktionsgleichung

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad (2.233)$$

siehe oben. Sie berührt die Funktion im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Verschiebt man den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt $(x_0, f(x_0))$ und bezeichnet die neuen Koordinaten mit (dx, df) , siehe Abbildung 2.18, so besitzt die Tangente die Funktionsgleichung

$$df = f'(x_0)dx. \quad (2.234)$$

Die Abbildung $df : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $df(dx) = f'(x_0)dx$ wird als *Differential von f in x_0* bezeichnet.

Ist eine reelle Funktion f an einer Stelle x_0 stetig, jedoch nicht differenzierbar, so kann das daran liegen, dass die Funktion an der Stelle x_0 einen „Knick“ hat, siehe Abbildung 2.19. Aufgrund des Knicks von g an der Stelle x_0 ist der Grenzwert (2.228) nicht eindeutig: Betrachtet man eine Abfolge von Sekanten, die g an den Stellen x_0 und $x_0 + h_1$ mit $h_1 < 0$ schneiden, so ergibt sich für $h_1 \rightarrow 0$ die blau gezeichnete Tangente 1 mit positiver Steigung. Betrachtet man hingegen eine Abfolge von Sekanten, die g an den Stellen x_0 und $x_0 + h_2$ mit

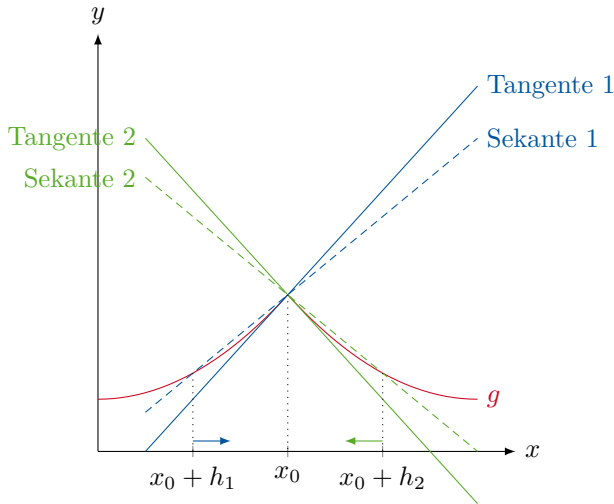


Abbildung 2.19: Konstruktion verschiedener Tangenten an eine Funktion g an der Stelle x_0 durch eine Abfolge von Sekanten.

$h_2 > 0$ schneiden, so ergibt sich für $h_2 \rightarrow 0$ die grün gezeichnete Tangente 2 mit negativer Steigung. Der Grenzwert (2.228) ist somit für beliebige $h \rightarrow 0$ ($h > 0$ oder $h < 0$) nicht eindeutig und g an der Stelle x_0 folglich nicht differenzierbar.

2.6.2 Ableitungsfunktionen

Die Ableitung $f'(x_0)$ einer reellen Funktion f an einer Stelle x_0 ist eine reelle Zahl. Ist die Funktion f an jeder Stelle $x \in I \subseteq D_f$ differenzierbar, so ist es möglich, die gesamte Ableitungsfunktion $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ zu bestimmen. Ist die Ableitungsfunktion f' eine stetige Funktion, so bezeichnet man f als *stetig differenzierbar*. Ist f' wiederum differenzierbar, so heißt

$$f'' = (f')' \quad (2.235)$$

die *zweite Ableitung von f* . Dieses Vorgehen ermöglicht es, Ableitungen beliebig hoher Ordnung $n \in \mathbb{N}$ zu definieren. Die n -te Ableitung einer Funktion f wird auch als

$$f^{(n)} \quad \text{oder} \quad \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{oder} \quad \frac{d^n}{dx^n} f \quad (2.236)$$

geschrieben. Im Folgenden werden wir Funktionsgleichungen von Ableitungsfunktionen mit Hilfe der Definition (2.228) bestimmen.

Ableitungsfunktion der Wurzelfunktion

Wir betrachten die Funktion $f : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ mit $f(x) = \sqrt{x}$. Aus der Definition (2.228) ergibt sich mit $h > 0$ die Ableitung $f'(x_0)$ an einer beliebigen Stelle $x_0 \in (0; \infty)$ zu

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.237)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \quad (2.238)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \quad (2.239)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \quad (2.240)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \quad (2.241)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \quad (2.242)$$

Die Ableitungsfunktion $f' : (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$ ist somit durch

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (2.243)$$

gegeben.

Ableitungsfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$ mit $f(x) = \sin(x)$. Um die Ableitungsfunktion von f zu bestimmen, benötigen wir die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y), \quad (2.244)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y). \quad (2.245)$$

Diese Additionstheoreme werden wir in Kapitel 4 herleiten. Unter Verwendung von Gl. (2.244) ergibt sich für die Ableitungsfunktion zunächst

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \quad (2.246)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cos(h) + \cos(x) \sin(h) - \sin(x)}{h} \quad (2.247)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \right] \quad (2.248)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \right]. \quad (2.249)$$

Die Umformung im letzten Schritt ist erlaubt, da beide Grenzwerte einzeln existieren. Um die beiden Grenzwerte in der letzten Zeile zu bestimmen, kann man $\cos(h)$ und $\sin(h)$ für kleine Werte von h , d.h. für $h \approx 0$, wie folgt approximieren:

$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^4), \quad (2.250)$$

$$\sin(h) = h - \frac{h^3}{6} + \mathcal{O}(h^5). \quad (2.251)$$

Diese Approximationen werden in Kapitel 3.3 hergeleitet. Einsetzen der Approximationen ergibt

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin(x) \frac{1 - \frac{h^2}{2} - 1}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos(x) \frac{h - \frac{h^3}{6} - h}{h} \right] \quad (2.252)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin(x) \frac{h}{2} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos(x) \left(1 - \frac{h^2}{3} \right) \right] \quad (2.253)$$

$$= 0 + \cos(x). \quad (2.254)$$

Analog kann gezeigt werden, dass die Ableitungsfunktion von $g(x) = \cos(x)$ durch

$$g'(x) = -\sin(x) \quad (2.255)$$

gegeben ist.

Ableitungsfunktionen der Exponentialfunktion

Wir betrachten die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$. Mit der Definition (2.228) ergibt sich

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \quad (2.256)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \quad (2.257)$$

$$= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}. \quad (2.258)$$

Den verbleibenden Grenzwert kann man durch eine Approximation der Exponentialfunktion für $h \approx 0$ ermitteln. Es gilt

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3). \quad (2.259)$$

Diese Approximation wird in Kapitel 3.3 hergeleitet. Einsetzen der Approximationen ergibt

$$f'(x) = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h + \frac{h^2}{2} - 1}{h} \quad (2.260)$$

$$= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{2}\right) \quad (2.261)$$

$$= e^x. \quad (2.262)$$

Die Ableitungsfunktionen der Exponentialfunktion ist also die Exponentialfunktion.

Ableitungsfunktionen der Potenzfunktion

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Potenzfunktion mit $f(x) = x^n$. Im Fall $n = 0$ ist f die konstante Funktion mit $f(x) = 1$. Aus der Definition (2.228) ergibt sich

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}. \quad (2.263)$$

Der Ausdruck $(x+h)^n$ lässt sich mit dem *binomischen Lehrsatz* wie folgt in eine Summe von Produkten von Monomen umschreiben:

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k. \quad (2.264)$$

Hierbei sind $\binom{n}{k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$ die *Binomalkoeffizienten*, die über

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (2.265)$$

definiert sind. Mit $n!$ wird für $n \in \mathbb{N}_0$ die *Fakultät von n* bezeichnet, die als

$$n! := n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (2.266)$$

mit $0! := 1$ definiert ist. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ in (2.264) entspricht der Anzahl an Termen der Form $x^{n-k}h^k$, die beim Ausmultiplizieren der linken Seite von Gl. (2.264) entstehen. Die Gültigkeit des binomischen Lehrsatzes wollen wir an einigen Beispielen plausibilisieren. Für den Fall $n = 1$ ergibt sich das erwartete Ergebnis

$$(x+h)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^{1-k} h^k \quad (2.267)$$

$$= \binom{1}{0} x^1 h^0 + \binom{1}{1} x^0 h^1 \quad (2.268)$$

$$= \frac{1!}{0!1!} x + \frac{1!}{1!0!} h \quad (2.269)$$

$$= x + h. \quad (2.270)$$

Für den Fall $n = 2$ ergibt sich die bekannte 2-te binomische Formel

$$(x+h)^2 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} x^{2-k} h^k \quad (2.271)$$

$$= \binom{2}{0} x^2 h^0 + \binom{2}{1} x^1 h^1 + \binom{2}{2} x^0 h^2 \quad (2.272)$$

$$= \frac{2!}{0!2!} x^2 + \frac{2!}{1!1!} xh + \frac{2!}{2!0!} h^2 \quad (2.273)$$

$$= x^2 + 2xh + h^2. \quad (2.274)$$

Für den Fall $n = 3$ ergibt sich

$$(x+h)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} x^{3-k} h^k \quad (2.275)$$

$$= \binom{3}{0} x^3 h^0 + \binom{3}{1} x^2 h^1 + \binom{3}{2} x^1 h^2 + \binom{3}{3} x^0 h^3 \quad (2.276)$$

$$= \frac{3!}{0!3!} x^3 + \frac{3!}{1!2!} x^2 h + \frac{3!}{2!1!} x h^2 + \frac{3!}{3!0!} h^3 \quad (2.277)$$

$$= x^3 + 3x^2 h + 3x h^2 + h^3. \quad (2.278)$$

Dieses Ergebnis lässt sich durch Ausmultiplizieren verifizieren:

$$(x + h)^3 = (x + h)^2(x + h) \quad (2.279)$$

$$= (x^2 + 2xh + h^2)(x + h) \quad (2.280)$$

$$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3. \quad (2.281)$$

Mit dem binomischen Lehrsatz ergibt sich für die Ableitungsfunktion der Potenzfunktion

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \quad (2.282)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \mathcal{O}(h^3) - x^n}{h} \quad (2.283)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{n!}{0!n!} x^n + \frac{n!}{1!(n-1)!} x^{n-1} h + \frac{n!}{2!(n-2)!} x^{n-2} h^2 + \mathcal{O}(h^3) - x^n}{h} \quad (2.284)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h^2 + \mathcal{O}(h^3) - x^n}{h} \quad (2.285)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \mathcal{O}(h^2) \right) \quad (2.286)$$

$$= nx^{n-1}. \quad (2.287)$$

2.6.3 Ableitungsregeln

Im Folgenden werden wir aus der Definition (2.228) verschiedene Rechenregeln für die Bestimmung von Ableitungen ermitteln.

Linearität

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und f, p, q drei differenzierbare Funktionen, wobei

$$f(x) = ap(x) + bq(x). \quad (2.288)$$

Die Funktion f ist somit eine Linearkombination der Funktionen p und q mit den Koeffizienten a und b . Dann gilt für die Ableitung von f nach Definition

(2.228)

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.289)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ap(x_0 + h) + bq(x_0 + h) - ap(x_0) - bq(x_0)}{h} \quad (2.290)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a[p(x_0 + h) - p(x_0)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b[q(x_0 + h) - q(x_0)]}{h} \quad (2.291)$$

$$= ap'(x_0) + bq'(x_0). \quad (2.292)$$

Ableiten ist somit eine lineare Operation.

Produktregel

Seien f, p, q drei differenzierbare Funktionen, wobei

$$f(x) = p(x)q(x). \quad (2.293)$$

Die Funktion f besitzt also die Form eines Produktes aus den beiden Funktionen p und q . Dann folgt aus der Definition (2.228) für die Ableitung von f

$$f'(x_0) = p'(x_0)q(x_0) + p(x_0)q'(x_0). \quad (2.294)$$

Diese Ableitungsregel wird in einer Übungsaufgabe gezeigt.

Beispiel 2.29 Wir berechnen die Ableitung von $f(x) = \sin^2(x)$

$$f'(x) = \sin'(x) \sin(x) + \sin(x) \sin'(x) \quad (2.295)$$

$$= \sin(x) \cos(x) + \sin(x) \cos(x) \quad (2.296)$$

$$= 2 \sin(x) \cos(x). \quad (2.297)$$

Aufgabe 2.26 Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = x \cos(x)$.

Quotientenregel

Seien f, p, q drei differenzierbare Funktionen, wobei

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (2.298)$$

und $q(x) \neq 0$. Dann folgt aus der Produktregel für die Ableitung von f

$$f'(x_0) = \frac{p'(x_0)q(x_0) - p(x_0)q'(x_0)}{[q(x_0)]^2}. \quad (2.299)$$

Diese Ableitungsregel wird ebenfalls in einer Übungsaufgabe gezeigt.

Beispiel 2.30 Wir bestimmen die Ableitung der Tangensfunktion mithilfe der Quotientenregel

$$\tan'(x) = \left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right]' = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} \quad (2.300)$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}. \quad (2.301)$$

Alternativ kann der entstehende Bruch auch in zwei Summanden zerlegt werden, so dass die Ableitung auch in folgender Form geschrieben werden kann

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x). \quad (2.302)$$

Aufgabe 2.27 Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = x/(1+x^2)$.

Kettenregel

Seien f, p, q drei differenzierbare Funktionen, wobei

$$f(x) = (p \circ q)(x) = p(q(x)). \quad (2.303)$$

Die Funktion f stellt also eine Verkettung der Funktionen p und q dar, vgl. Kapitel 2.2.4. Aus der Definition (2.228) für die Ableitung von f folgt zunächst

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(q(x_0 + h)) - p(q(x_0))}{h} \quad (2.304)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(q(x_0 + h)) - p(q(x_0))}{q(x_0 + h) - q(x_0)} \frac{q(x_0 + h) - q(x_0)}{h}. \quad (2.305)$$

Im letzten Schritt wurde hierbei angenommen, dass $q(x_0 + h) \neq q(x_0)$, d.h. q ist keine konstante Funktion. Wäre q eine konstante Funktion, so wäre $p(q(x_0 + h)) - p(q(x_0)) = p(q(x_0)) - p(q(x_0)) = 0$ und damit $f'(x_0) = 0$. Mit

der Abkürzung $\tilde{h} := q(x_0 + h) - q(x_0)$ ergibt sich weiter

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(q(x_0) + \tilde{h}) - p(q(x_0))}{\tilde{h}} \frac{q(x_0 + h) - q(x_0)}{h} \quad (2.306)$$

$$= p'(q(x_0))q'(x_0). \quad (2.307)$$

Hierbei wurde verwendet, dass aufgrund der Stetigkeit von g mit $h \rightarrow 0$ auch $\tilde{h} \rightarrow 0$. Die Kettenregel besagt also, dass die Ableitung von $f = p \circ q$ an der Stelle x_0 durch ein Produkt gegeben ist. Der erste Faktor entspricht der Ableitung von p an der Stelle $q(x_0)$. Der zweite Faktor entspricht der Ableitung von q' an der Stelle x_0 .

Beispiel 2.31 Wir berechnen die Ableitung von $f(x) = \sin(e^{-x^2})$ durch zweifache Anwendung der Kettenregel

$$f'(x) = \sin'(e^{-x^2})(e^{-x^2})' \quad (2.308)$$

$$= \cos(e^{-x^2})e^{-x^2}(-x^2)' \quad (2.309)$$

$$= -2x \cos(e^{-x^2})e^{-x^2}. \quad (2.310)$$

Beispiel 2.32 Wir berechnen die Ableitung von $f(x) = x^x$. Hierzu schreiben wird die Funktion zunächst in die Form

$$f(x) = x^x = \left(e^{\ln(x)}\right)^x = e^{x \ln(x)} \quad (2.311)$$

um. Unter Verwendung der Kettenregel und der Produktregel ergibt sich

$$f'(x) = \left[e^{x \ln(x)}\right]' = e^{x \ln(x)}[x \ln(x)]' = x^x[1 + \ln(x)]. \quad (2.312)$$

Aufgabe 2.28 Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = 2e^{\sin(x^2)}$.

Aufgabe 2.29 Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = x^{(x^x)}$.

Ableitungsfunktion der Umkehrfunktion

Sei f eine differenzierbare Funktion. Aus der Kettenregel lässt sich die Ableitungsfunktion $(f^{-1})'$ der Umkehrfunktion f^{-1} von f ermitteln. Per Definition

der Umkehrfunktion gilt

$$f^{-1}(f(x)) = x. \quad (2.313)$$

Ableiten dieser Identität führt unter Verwendung der Kettenregel auf

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1. \quad (2.314)$$

Setzt man $y = f(x)$ so folgt durch Umstellen und unter Verwendung von $x = f^{-1}(y)$ die Ableitungsfunktion der Umkehrfunktion

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \quad (2.315)$$

Beispiel 2.33 Die Logarithmusfunktion \ln ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion \exp . Setzt man $f = \exp$ und $f^{-1} = \ln$, so ergibt sich mit der obigen Rechenregel die Ableitungsfunktion der Logarithmusfunktion zu

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}. \quad (2.316)$$

Beispiel 2.34 Mit dem Ergebnis aus Beispiel 2.33 lässt sich unter Verwendung der Kettenregel die Ableitungsfunktion der Potenzfunktion $f : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^a$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ bestimmen:

$$f'(x) = (x^a)' = \left[e^{a \ln(x)} \right]' = e^{a \ln(x)} [a \ln(x)]' = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}. \quad (2.317)$$

Beispiel 2.35 Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2; \pi/2)$ ist die Umkehrfunktion der Tangensfunktion. Setzt man $f = \tan$ und $f^{-1} = \arctan$, so ergibt sich mit der obigen Rechenregel die Ableitungsfunktion der \arctan -Funktion zu

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + [\tan(\arctan(x))]^2} = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (2.318)$$

Hierbei wurde das Ergebnis aus Beispiel 2.30 verwendet.

Aufgabe 2.30 Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von $f(x) = \sin(\sqrt{x})e^{-x^2}$.

Implizite Differentiation

Unter Verwendung der Kettenregel können auch Funktionen $y(x)$, die nur in impliziter Form $F(x, y) = 0$ gegeben sind, abgeleitet werden, vgl. Kapitel 2.2.2. Dies wird *implizite Differentiation* genannt. Bei der impliziten Differentiation wird $y'(x)$ bestimmt, indem die Gleichung $F(x, y) = 0$ abgeleitet wird.

Zur Illustration betrachten wir die Beispielfunktion $F(x, y) = y^2 - x$, die die Funktionen $y(x)$ implizit festlegt. Aus der Bestimmungsgleichung $F(x, y) = 0$ folgt, dass es zwei Funktionen $y_{1,2}(x)$ gibt, die diese Gleichung lösen:

$$y_1(x) = \sqrt{x}, \quad (2.319)$$

$$y_2(x) = -\sqrt{x}. \quad (2.320)$$

Im Prinzip können die Ableitungsfunktionen $y'_{1,2}$ aus den expliziten Funktionsgleichungen für $y_{1,2}$ bestimmt werden. Wir gehen jedoch anders vor und ermitteln die Ableitungsfunktionen $y'_{1,2}$ durch Ableiten der Bestimmungsgleichung $F(x, y) = 0$. Umstellen der Bestimmungsgleichung führt zunächst auf

$$F(x, y(x)) = 0 \quad (2.321)$$

$$\Leftrightarrow [y(x)]^2 - x = 0 \quad (2.322)$$

$$\Leftrightarrow [y(x)]^2 = x. \quad (2.323)$$

Ableiten der letzten Gleichung ergibt

$$[y(x)^2]' = 1 \quad (2.324)$$

$$\Leftrightarrow 2y(x)y'(x) = 1 \quad (2.325)$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = \frac{1}{2y(x)}. \quad (2.326)$$

Einsetzen der Funktionen $y_{1,2}$ ergibt die Ableitungen

$$y'_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (2.327)$$

$$y'_2(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (2.328)$$

Numerische implizite Differentiation

Es kommt vor, dass die Funktionsgleichung für eine Funktion $y(x)$, die in impliziter Form durch $F(x, y) = 0$ gegeben sind, nicht bestimmt werden kann, z.B. weil die Gleichung $F(x, y) = 0$ nicht ohne Weiteres nach y aufgelöst

werden kann. In solchen Fällen kann jedoch u.U. für ein gegebenes x der Funktionswert $y(x)$ aus der Gleichung $F(x, y) = 0$ numerisch bestimmt werden. Ist der Wert von x vorgegeben, so bedeutet das Auffinden des Werts von y , so dass $F(x, y) = 0$, die Nullstellen y der Funktion $f(y) = F(x, y)$ zu bestimmen.

Ein bekanntes Verfahren zur numerischen Bestimmung von Nullstellen ist das *Newton-Verfahren*. Hierbei wird zunächst ein beliebiger Startwert y_0 gewählt, der keine Nullstelle von f sein muss, sich jedoch möglichst in der Nähe der gesuchten Nullstelle y von f befinden sollte. Nun betrachtet man die Tangente t_0 an die Funktion f an der Stelle y_0 . Die Funktionsgleichung von t_0 ist gegeben durch

$$t_0(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0). \quad (2.329)$$

Unter gewissen Umständen befindet sich nun die Nullstelle y_1 der Tangente t_0 näher der gesuchten Nullstelle als y_0 , siehe Abbildung 2.20. Dieser Umstand erlaubt es, die gesuchte Nullstelle y von f wie folgt iterativ, d.h. schrittweise zu bestimmen. Die Nullstelle y_1 von t_0 ist gegeben durch

$$t_0(y_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = y_0 - \frac{f(y_0)}{f'(y_0)}. \quad (2.330)$$

Die Nullstelle y_1 kann nun als neue Stelle gewählt werden, um eine neue Tangente t_1 an der Stelle y_1 an die Funktion f zu legen. Unter gewissen Umständen befindet sich die Nullstelle y_2 von t_1 wiederum näher an der gesuchten Nullstelle von f , als y_1 . Führt man dieses Verfahren fort, so nähert man sich iterativ der gesuchten Nullstelle von f . Die entsprechende Iterationsvorschrift zur Bestimmung der Nullstelle y von f lautet

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}. \quad (2.331)$$

Aus Gl. (2.331) kann man bereits erkennen, dass eine notwendige Voraussetzung für die Konvergenz des Newton-Verfahrens ist, dass die Ableitungen $f'(y_n)$ an allen Zwischenstellen nicht Null sein dürfen. Als Abbruchkriterium der Iteration kann man z.B. eine (kleine) Schranke $s_1 > 0$ wählen, so dass $|f(y_n)| < s_1$ ist. Alternativ kann man auch eine (kleine) Schranke $s_2 > 0$ verwenden, so dass $|y_{n+1} - y_n| < s_2$ ist.

2.7 Integration

2.7.1 Unbestimmtes Integral

In diesem Kapitel betrachten wir die Umkehroperation zur Differentiation, die *Integration*. Bei der Integration betrachtet man eine Funktion f , zu der eine

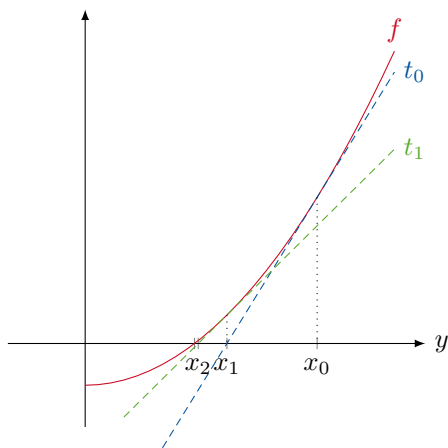


Abbildung 2.20: Konstruktion von Tangenten an f zur Bestimmung der Nullstellen von f mit dem Newton-Verfahren.

Funktion F gesucht wird, so dass

$$F'(x) = f(x). \quad (2.332)$$

Eine Funktion F für die Gl. (2.332) gilt, wird als *Stammfunktion* bezeichnet.

Definition 2.19 Eine differenzierbare Funktion F heißt *Stammfunktion* einer Funktion f , falls $F'(x) = f(x)$.

Die Stammfunktion einer gegebenen Funktion f ist nicht eindeutig. Betrachte als Beispiel die Funktion $f(x) = 2x$. Die beiden Funktionen $F_1(x) = x^2$ und $F_2(x) = x^2 + 1$ sind beide Stammfunktionen von f , denn $F_1'(x) = f(x)$ und $F_2'(x) = f(x)$.

Satz 2.3 ie Stammfunktionen einer Funktion f unterscheiden sich lediglich um eine Konstante.

Aus den in Kapitel 2.6.2 hergeleiteten Ableitungsfunktionen lassen sich die Stammfunktionen verschiedener einfacher Funktionen ablesen, siehe Tabelle 2.4, wobei $c \in \mathbb{R}$ einige beliebige Konstante ist.

Tabelle 2.4: Stammfunktionen einfacher Funktionen.

Funktion f	Stammfunktionen F
$x^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
x^{-1}	$\ln x + c$
$\sin(ax), a \neq 0$	$-\frac{1}{a}\cos(ax) + c$
$\cos(ax), a \neq 0$	$\frac{1}{a}\sin(ax) + c$
$\exp(ax), a \neq 0$	$\frac{1}{a}\exp(ax) + c$
$(1+x^2)^{-1}$	$\arctan(x) + c$

Ist F eine Stammfunktion von f , so schreibt man auch

$$F = \int f. \quad (2.333)$$

Ist die Funktionsvorschrift von f bekannt, so wird für die praktische Bestimmung der Funktionsvorschrift der Stammfunktionen F die Notation

$$F(x) = \int f(x) \, dx \quad (2.334)$$

verwendet. Die rechte Seite von Gl. (2.334) wird auch als *unbestimmtes Integral* bezeichnet. Die Symbole \int und dx in Gl. (2.334) haben keine tiefere Bedeutung. In einigen Lehrbüchern findet man daher auch die Schreibweise $F(x) = \text{SF}[f(x)]$ anstelle von Gl. (2.334).

2.7.2 Integrationsmethoden

Für die Bestimmung von Stammfunktionen gibt es kein „Rezept“, wie bei der Bestimmung von Ableitungen. Im Folgenden werden jedoch nützliche Methoden für die Bestimmung von Stammfunktionen beschrieben.

Linearität

Aus der Definition der Stammfunktion und Linearität der Ableitung folgt, dass die Integration eine lineare Operation ist. Seien f, g, h integrierbare Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = ag(x) + bh(x). \quad (2.335)$$

Dann gilt

$$F(x) = \int f(x) \, dx \quad (2.336)$$

$$= \int [ag(x) + bh(x)] \, dx \quad (2.337)$$

$$= a \int g(x) \, dx + b \int h(x) \, dx \quad (2.338)$$

$$= aG(x) + bH(x), \quad (2.339)$$

wobei G eine Stammfunktion von g und H eine Stammfunktion von h ist.

Beispiel 2.36 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin^2(x)$. Die Funktion f kann zu

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \quad (2.340)$$

umgeformt werden. Daraus ergeben sich für die Stammfunktionen

$$F(x) = \int f(x) \, dx \quad (2.341)$$

$$= \int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right] \, dx \quad (2.342)$$

$$= \frac{1}{2} \int x^0 \, dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx \quad (2.343)$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x) + c \quad (2.344)$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.37 In Beispiel 1.1 wurden die Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = -g$ mit $g = \text{konst.}$ gesucht. Bezeichnet man $v_x(t) = \dot{x}(t)$, so ist die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = -g$ äquivalent zu

$$\dot{v}_x(t) = -g. \quad (2.345)$$

Lösen der Differentialgleichung bedeutet, die Funktionen $v_x(t)$ zu finden, die die Differentialgleichung erfüllen. Nach der Definition der Stammfunktion ist die Funktion $v_x(t)$ die Stammfunktion der konstanten Funktion $f(t) = -g$.

Daraus ergibt sich

$$v_x(t) = \int f(t) dt = \int (-g) dt = -g \int t^0 dt = -gt + c \quad (2.346)$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Setzt man $t = 0$ so ergibt sich $v_x(0) = c$. Die Konstante c besitzt hier also die Bedeutung der Geschwindigkeitskomponente des Massepunktes in x -Richtung zum Zeitpunkt $t = 0$.

Partielle Integration

Seien f, g, h differenzierbare Funktionen mit

$$f(x) = g(x)h(x). \quad (2.347)$$

Dann gilt gemäß Kapitel 2.6.3

$$f'(x) = [g(x)h(x)]' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x). \quad (2.348)$$

Die Funktion $f = gh$ stellt offenbar eine Stammfunktion von $g'h + gh'$ dar. Somit gilt

$$f(x) = g(x)h(x) \quad (2.349)$$

$$= \int [g'(x)h(x) + g(x)h'(x)] dx \quad (2.350)$$

$$= \int g'(x)h(x) dx + \int g(x)h'(x) dx. \quad (2.351)$$

Durch Umstellen ergibt sich

$$\boxed{\int g'(x)h(x) dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x) dx.} \quad (2.352)$$

Gl. (2.352) wird als *partielle Integration* bezeichnet. Ist also eine Stammfunktion von $g(x)h'(x)$ bekannt, so kann mit Gl. (2.352) die Stammfunktion von $g'(x)h(x)$ bestimmt werden.

Beispiel 2.38 Wir bestimmen die Stammfunktion von $f(x) = x \cos(x)$. Die Funktion f kann als $f(x) = g'(x)h(x)$ mit $g'(x) = \cos(x)$ und $h(x) = x$ geschrieben werden. Es ist somit $g(x) = \sin(x)$ und $h'(x) = 1$. Daraus ergibt

sich mit Gl. (2.352)

$$\int f(x) \, dx = \int g'(x)h(x) \, dx \quad (2.353)$$

$$= \int \cos(x)x \, dx \quad (2.354)$$

$$= g(x)h(x) - \int g(x)h'(x) \, dx \quad (2.355)$$

$$= \sin(x)x - \int \sin(x) \cdot 1 \, dx \quad (2.356)$$

$$= \sin(x)x + \cos(x) + c \quad (2.357)$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.39 Wir bestimmen die Stammfunktion von $f(x) = x^2 e^{-x}$. Wir wählen $g'(x) = e^{-x}$ und $h(x) = x^2$. Es ist somit $g(x) = -e^{-x}$ und $h'(x) = 2x$. Daraus folgt

$$\int x^2 e^{-x} \, dx = -x^2 e^{-x} - \int [-2xe^{-x}] \, dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int xe^{-x} \, dx. \quad (2.358)$$

Um das verbleibende Integral zu bestimmen wählen wir $g'(x) = e^{-x}$ und $h(x) = x$ und somit $g(x) = -e^{-x}$ und $h'(x) = 1$. Daraus folgt

$$\int xe^{-x} \, dx = -xe^{-x} - \int [-e^{-x}] \, dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c \quad (2.359)$$

und somit insgesamt

$$\int x^2 e^{-x} \, dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + c \quad (2.360)$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.40 Wir bestimmen die Stammfunktion von $f(x) = \sin(x) \cos(x)$. Wir wählen $g'(x) = \sin(x)$ und $h(x) = \cos(x)$. Es ist somit $g(x) = -\cos(x)$

und $h'(x) = -\sin(x)$. Daraus folgt

$$\int \sin(x) \cos(x) \, dx = -\cos^2(x) - \int [-\sin(x)][-\cos(x)] \, dx \quad (2.361)$$

Das verbliebene Integral auf der rechten Seite ist das gesuchte Integral, das auch auf der linken Seite der Gleichung auftritt. Durch Umstellen ergibt sich daher

$$2 \int \sin(x) \cos(x) \, dx = -\cos^2(x) + c \quad (2.362)$$

bzw.

$$\int \sin(x) \cos(x) \, dx = -\frac{1}{2} \cos^2(x) + \frac{c}{2}. \quad (2.363)$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Die Beispiele zeigen, dass die partielle Integration dabei helfen kann, die Stammfunktionen von Produkten von Funktionen zu ermitteln. Hierzu ist eine geschickte Zuweisung der Faktoren von f an die Funktionen g' und h nötig. Ist die Zuweisung geschickt gewählt, so ergibt sich nach partieller Integration (2.352) ein neues Integral, dass (hoffentlich) einfacher zu lösen ist als das Ausgangsintegral. In Beispiel 2.38–2.39 war einer der Faktoren von f ein Polynom. Dieses Polynom wurde der Funktion h zugewiesen. Nach der partiellen Integration tritt in dem verbleibenden Integral h' auf, dass ebenfalls ein Polynom ist, jedoch mit einem um eins reduzierten Grad. Das verbleibende Integral ist somit einfacher lösbar gewesen.

Die Aufteilung der Faktoren von f auf die Funktionen g' und h bei der partiellen Integration ist jedoch keineswegs eindeutig. Ein Beispiel ist die Funktion $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. Hier kann z.B. $g'(x) = x^2$ und $h(x) = e^{-x^2}$ oder $g'(x) = x$ und $h(x) = x e^{-x^2}$ gewählt werden. Keine dieser Aufteilungen führt jedoch zu einem geschlossen lösbaren Integral, siehe Beispiel 2.44. Die partielle Integration führt daher nicht immer zum Ziel.

Aufgabe 2.31 Bestimmen Sie die Stammfunktionen von $f(x) = \ln(x)$. Hinweis: Schreiben Sie f als $f(x) = g'(x)h(x)$ mit $g'(x) = 1$ und $h(x) = \ln(x)$.

Integration nach Substitution

Sei G eine Stammfunktion von g und h eine differenzierbare Funktion. Dann gilt die Kettenregel

$$[G(h(x))]' = G'(h(x))h'(x) = g(h(x))h'(x). \quad (2.364)$$

Hieraus folgt, dass $G(g(x))$ eine Stammfunktion von $g(h(x))h'(x)$ ist. Somit gilt

$$G(h(x)) = \int g(h(x))h'(x) dx. \quad (2.365)$$

Gl. (2.365) wird *Substitutionsregel* genannt.

Beispiel 2.41 Wir bestimmen die Stammfunktion von $f(x) = 2x \sin(x^2)$. Die Funktion f besitzt die Form $g(h(x))h'(x)$ mit $g(x) = \sin(x)$, $h(x) = x^2$ und $h'(x) = 2x$. Die Stammfunktion G von g ist $G(x) = -\cos(x)$. Somit folgt

$$\int 2x \sin(x^2) dx = -\cos(x^2) + c. \quad (2.366)$$

Beispiel 2.42 Wir bestimmen die Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-1}. \quad (2.367)$$

Die Funktion f besitzt die Form $g(h(x))h'(x)$ mit $g(x) = 1/x$, $h(x) = x^2+2x-1$ und $h'(x) = 2x+2$. Die Stammfunktion G von g ist $G(x) = \ln|x|$. Somit folgt

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x-1} dx = \ln|x^2+2x-1| + c. \quad (2.368)$$

Beispiel 2.43 Wir bestimmen die Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \quad (2.369)$$

Die Funktion f besitzt die Form $g(h(x))h'(x)/2$ mit $g(x) = 1/\sqrt{x}$, $h(x) = x^2+1$ und $h'(x) = 2x$. Die Stammfunktion G von g ist $G(x) = 2\sqrt{x}$. Somit folgt

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} 2\sqrt{x^2+1} + c = \sqrt{x^2+1} + c. \quad (2.370)$$

Wie man aus den Beispielen erkennen kann, erfordert die Anwendung der Substitutionsregel etwas Erfahrung. Um sie anzuwenden muss man prüfen, ob die zu integrierende Funktion die Form eines Produkts hat, wobei ein Faktor eine Verkettung $g(h(x))$ ist und der andere Faktor proportional zur Ableitung $h'(x)$ ist.

Beispiel 2.44 Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. Die Funktion besitzt die Form $f(x) = g'(x)h(x)$ mit $g'(x) = x e^{-x^2}$ und $h(x) = x$. Partielle Integration führt auf

$$\int x^2 e^{-x^2} dx = xg(x) - \int g(x) dx. \quad (2.371)$$

Die Funktion g kann mithilfe der Substitutionsregel bestimmt werden, denn $g'(x) = -j(k(x))k'(x)/2$ mit $j(x) = e^x$, $k(x) = -x^2$ und $k'(x) = -2x$. Mit $J(x) = e^x$ ergibt sich

$$g(x) = \int g'(x) dx = -\frac{1}{2} \int j(k(x))k'(x) dx = -\frac{1}{2} J(k(x)) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}. \quad (2.372)$$

Damit folgt

$$\int x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{x}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} \int e^{-x^2} dx. \quad (2.373)$$

Das verbliebene Integral auf der rechten Seite ist nicht geschlossen lösbar und muss numerisch bestimmt werden. Da es in der Mathematik und Physik häufig vorkommt, erhält es eine eigene Bezeichnung:

$$\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x) + c \quad (2.374)$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Insgesamt ergibt sich somit

$$\int x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{x}{2} e^{-x^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erf}(x) + c. \quad (2.375)$$

Beispiel 2.45 Wir bestimmen die Stammfunktion von $f(x) = x\sqrt{1-x}$. Wir schreiben $f(x) = g'(x)h(x)$ mit $g'(x) = \sqrt{1-x}$ und $h(x) = x$. Partielle

Integration führt dann auf

$$\int x\sqrt{1-x} \, dx = xg(x) - \int g(x) \, dx. \quad (2.376)$$

Zur Bestimmung von g schreiben wir $g'(x) = -j(k(x))k'(x)$ mit $j(x) = \sqrt{x}$, $k(x) = 1-x$ und $k'(x) = -1$. Mit $J(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ folgt

$$g(x) = \int g'(x) \, dx = - \int j(k(x))k'(x) \, dx = -J(k(x)) + c = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + c \quad (2.377)$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$\int g(x) \, dx = -\frac{2}{3} \int (1-x)^{3/2} \, dx = -\frac{2}{3} \frac{2}{5} (1-x)^{5/2} \quad (2.378)$$

und somit insgesamt

$$\int x\sqrt{1-x} \, dx = -\frac{2}{3}x(1-x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1-x)^{5/2} + c. \quad (2.379)$$

Die linke Seite der Substitutionsregel Gl. (2.365) kann in der Form

$$G(h(x)) = G(y) \Big|_{y=h(x)} = \int g(y) \, dy \Big|_{y=h(x)} \quad (2.380)$$

geschrieben werden. Hierbei bedeutet die Notation $A(y)|_{y=h(x)}$, dass im Ausdruck $A(y)$ das Symbol y durch $h(x)$ ersetzt werden soll. Diese Ersetzung wird auch als *Rücksubstitution* bezeichnet. Die Substitutionsregel kann daher auch wie folgt geschrieben werden:

$$\boxed{\int g(y) \, dy \Big|_{y=h(x)} = \int g(h(x))h'(x) \, dx.} \quad (2.381)$$

Aufgabe 2.32 Bestimmen Sie die Stammfunktionen von $f(x) = 1/(1-2x)$.

Integration nach Partialbruchzerlegung

Mithilfe der Partialbruchzerlegung lässt sich eine echt gebrochenrationale Funktion f der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (2.382)$$

wobei $p(x), q(x)$ Polynome sind, in eine Summe von Termen der Form

$$\frac{a}{(x-x_0)^n} \quad \text{oder} \quad \frac{bx+c}{(x^2+rx+s)^m} \quad (2.383)$$

zerlegen, vgl. (2.162). Die einzelnen Partialbrüche lassen sich einzeln integrieren. Somit ist es möglich, eine beliebige gebrochenrationale Funktion f zu integrieren. Ist die Funktion unecht gebrochenrational, wird zuerst eine Polynomdivision durchgeführt, vgl. Kapitel 2.5.2. Anschließend wird eine Partialbruchzerlegung durchgeführt und danach die einzelnen Partialbrüche integriert. Im Folgenden bestimmen wir die Stammfunktionen der möglichen auftretenden Partialbrüche.

Wir betrachten zunächst Partialbrüche der Form $f(x) = (x-x_0)^{-k}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 1$ ergibt sich mit der Substitutionsregel und den Stammfunktionen aus Tabelle 2.4

$$\int \frac{1}{x-x_0} dx = \ln |x-x_0| + c. \quad (2.384)$$

Für $k \geq 2$ ergibt sich

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^k} dx = -\frac{1}{k-1} \frac{1}{(x-x_0)^{k-1}} + c. \quad (2.385)$$

Betrachten wir nun einen Partialbruch der Form

$$f(x) = \frac{bx+c}{x^2+rx+s}. \quad (2.386)$$

Wir werden diesen Partialbruch umformen, so dass die Substitutionsregel sowie die Stammfunktionen aus Tabelle 2.4 verwendet werden können. Hierzu zerlegen wir den Partialbruch (2.386) in zwei Partialbrüche. Einer dieser beiden Partialbrüche soll im Zähler den Term $2x+r$ enthalten. Der andere soll im Zähler eine von x unabhängige Konstante enthalten:

$$f(x) = \frac{bx+c}{x^2+rx+s} \quad (2.387)$$

$$= \frac{b}{2} \frac{2x+r-r+2c/b}{x^2+rx+s} \quad (2.388)$$

$$= \frac{b}{2} \frac{2x+r}{x^2+rx+s} + \frac{b}{2} \frac{-r+2c/b}{x^2+rx+s} \quad (2.389)$$

$$= \frac{b}{2} \frac{2x+r}{x^2+rx+s} + \left(c - \frac{rb}{2}\right) \frac{1}{(x+r/2)^2 + s - r^2/4} \quad (2.390)$$

$$= \frac{b}{2} \frac{2x+r}{x^2+rx+s} + \frac{c-rb/2}{s-r^2/4} \frac{1}{(x+r/2)^2/(s-r^2/4) + 1}. \quad (2.391)$$

In der vorletzten Zeile wurde eine quadratische Ergänzung durchgeführt. Der erste Term in der letzten Zeile kann mithilfe der Substitutionsregel integriert werden:

$$\int \frac{b}{2} \frac{2x+r}{x^2+rx+s} dx = \frac{b}{2} \ln |x^2+rx+s| + c. \quad (2.392)$$

Um den zweiten Term in der letzten Zeile zu integrieren muss der Ausdruck

$$\frac{(x+r/2)^2}{s-r^2/4} = \left(\frac{x+r/2}{\sqrt{s-r^2/4}} \right)^2 \quad (2.393)$$

substituiert werden. Da der Ausdruck x^2+rx+s keine reellen Nullstellen besitzt, ist $s-r^2/4 > 0$ und der Wurzelausdruck wohldefiniert. Man erhält so

$$\begin{aligned} \int \frac{c-rb/2}{s-r^2/4} \frac{1}{(x+r/2)^2/(s-r^2/4)+1} dx \\ = \frac{c-rb/2}{\sqrt{s-r^2/4}} \arctan \left(\frac{x+r/2}{\sqrt{s-r^2/4}} \right) + c. \end{aligned} \quad (2.394)$$

Um Partialbrüche der Form

$$f(x) = \frac{bx+c}{(x^2+rx+s)^l}. \quad (2.395)$$

mit $l > 1$ zu integrieren, ist es nützlich den Ausdruck (2.395) wie folgt durch die Ableitung eines Partialbruchs niedrigerer Ordnung auszudrücken:

$$\frac{bx+c}{(x^2+rx+s)^l} = -\frac{1}{l-1} \frac{d}{ds} \frac{bx+c}{(x^2+rx+s)^{l-1}}. \quad (2.396)$$

Da die Ableitung nach s und die Integration nach x vertauscht werden dürfen ergibt sich

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+rx+s)^l} dx = -\frac{1}{l-1} \frac{d}{ds} \int \frac{bx+c}{(x^2+rx+s)^{l-1}} dx. \quad (2.397)$$

Für $l > 2$ kann der Ableitungstrick (2.396) erneut angewendet werden, bis ein Partialbruch der Form (2.386) entsteht, dessen Stammfunktion bekannt ist, s.o.

Beispiel 2.46 Wir bestimmen die Stammfunktionen von

$$f(x) = \frac{4x + 4}{2x^2 + 4x} = \frac{4x + 4}{x(2x + 4)} \quad (2.398)$$

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch:

$$f(x) = \frac{A}{2x + 4} + \frac{B}{x} = \frac{Ax + B(2x + 4)}{x(2x + 4)} \quad (2.399)$$

Für alle x muss gelten $4x + 4 = Ax + B(2x + 4)$. Einsetzen von $x = 0$ und $x = -2$ ergibt $A = 2$ und $B = 1$. Damit lautet die Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{2}{2x + 4} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x}. \quad (2.400)$$

Die Stammfunktionen von f lauten damit

$$\int f(x) \, dx = \ln |x + 2| + \ln |x| + c. \quad (2.401)$$

Beispiel 2.47 Wir bestimmen die Stammfunktionen von

$$f(x) = \frac{3x^3 + 10x^2 + 10x - 3}{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2}. \quad (2.402)$$

Wir raten die Nullstelle $x_1 = -1$ des Nennerpolynoms. Mit dieser führen wir eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\begin{array}{r} (x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2) : (x + 1) = x^3 - 3x - 2 \\ \underline{-(x^4 + x^3)} \\ -3x^2 - 5x - 2 \\ \underline{-(3x^2 + 3x)} \\ -2x - 2 \\ \underline{-(2x + 2)} \\ 0 \end{array} \quad (2.403)$$

Der verbleibende Faktor $x^3 - 3x - 2$ besitzt die Nullstelle $x_2 = -1$. Eine

entsprechende Partialbruchzerlegung liefert

$$\begin{array}{r}
 \left(\frac{x^3}{-x^3 - x^2} - 3x - 2 \right) / (x + 1) = x^2 - x - 2 \\
 \hline
 -x^2 - 3x \\
 x^2 + x \\
 \hline
 -2x - 2 \\
 2x + 2 \\
 \hline
 0
 \end{array} \quad (2.404)$$

Die Nullstellen des verbleibende Faktor $x^2 - x - 2$ können mit der p - q -Formel (2.142) ermittelt werden. Man erhält $x_3 = 2$ und $x_4 = -1$. Somit tritt die Nullstelle $x = -1$ insgesamt dreimal auf und $x = 2$ einmal auf. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet damit

$$\frac{3x^3 + 10x^2 + 10x - 3}{(x + 1)^3(x - 2)} = \frac{A}{(x + 1)^3} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{x - 2}. \quad (2.405)$$

Die Gleichheit der linken und rechten Seite ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
 3x^3 + 10x^2 + 10x - 3 \\
 = A(x - 2) + B(x + 1)(x - 2) + C(x + 1)^2(x - 2) + D(x + 1)^3. \quad (2.406)
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $x = 2$ ergibt sich $D = 3$. Durch Einsetzen von $x = -1$ ergibt sich $A = 2$. Ein Koeffizientenvergleich des x^3 -Terms liefert mit $D = 3$ den Wert $C = 0$. Einsetzen von $x = 0$ sowie der Werte für A, C, D ergibt $B = 1$. Damit lautet die Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{2}{(x + 1)^3} + \frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{3}{x - 2} \quad (2.407)$$

und damit die Stammfunktionen

$$\int f(x) \, dx = -\frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{1}{x + 1} + 3 \ln |x - 2| + c. \quad (2.408)$$

Beispiel 2.48 Wir bestimmen die Stammfunktionen von

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+2}. \quad (2.409)$$

Das Nennerpolynom besitzt keine reelle Nullstelle. Zur Bestimmung der Stammfunktionen lesen wir $b = 1$, $c = 1$, $r = -2$ und $s = 2$ ab. Damit ergibt sich $b/2 = 1/2$, $c - rb/2 = 2$, $s - r^2/4 = 1$ und mit dem obigen allgemeinen Ergebnis

$$\int f(x) \, dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x + 2| + 2 \arctan(x - 1) + c. \quad (2.410)$$

2.7.3 Bestimmtes Integral

Definition über Flächenberechnung

Die Stammfunktionen einer Funktion f besitzen eine graphische Bedeutung: Sie beschreiben den Flächeninhalt zwischen dem Graph von f und der Abszisse. Dieser Zusammenhang wird im Folgenden beschrieben.

Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf ihrem gesamten Definitionsbereich D_f stetige und beschränkte Funktion. Wir betrachten den Flächeninhalt $A_{[c, x_0]}$ zwischen dem Graphen von f und der Abszisse, beginnend bei der festen Stelle $c \in D_f$ bis zur Stelle $x_0 \in D_f$, siehe Abbildung 2.21a. Die Funktion, die den Flächeninhalt $A_{[c, x_0]}$ in Abhängigkeit vom Wert x_0 beschreibt, sei mit F bezeichnet, d.h. $F(x_0) = A_{[c, x_0]}$. Für die Ableitung von F gilt per Definition

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}. \quad (2.411)$$

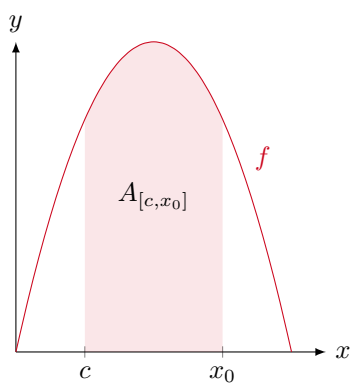
Die Differenz $F(x_0 + h) - F(x_0)$ entspricht dem Flächeninhalt $A_{[c, x_0+h]} - A_{[c, x_0]} = A_{[x_0, x_0+h]}$, siehe Abbildung 2.21b. Man kann zeigen, dass es ein $\alpha \in (0, 1]$ gibt, so dass $A_{[x_0, x_0+h]}$ gleich dem Flächeninhalt $hf(x_0 + \alpha h)$ eines Rechtecks ist, siehe Abbildung 2.21c (Mittelwertsatz der Integralrechnung), d.h.

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = A_{[x_0, x_0+h]} = hf(x_0 + \alpha h). \quad (2.412)$$

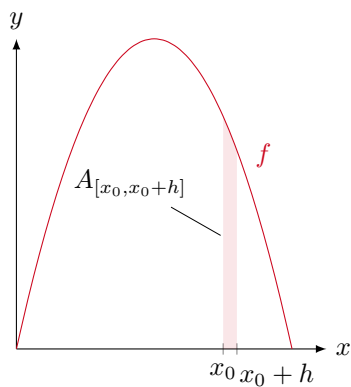
Daraus folgt für die Ableitung von F an der Stelle x_0 :

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(x_0 + \alpha h)}{h} = f(x_0). \quad (2.413)$$

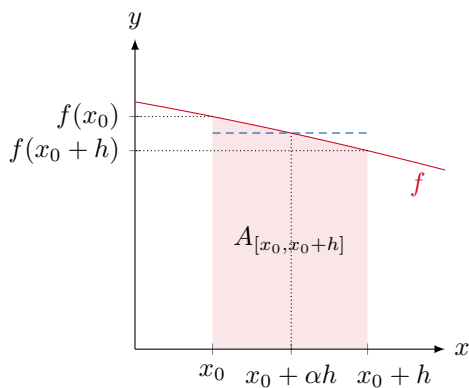
Die Funktion F ist somit eine Stammfunktion von f . Die konkrete Form von F hängt dabei vom Wert von c ab. Da sich die Stammfunktionen von f



(a) Intervall $[c, x_0]$



(b) Intervall $[x_0, x_0 + h]$



(c) Intervall $[x_0, x_0 + h]$ (Vergrößerung)

Abbildung 2.21: Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der Abszisse für verschiedene Intervalle.

jedoch lediglich um eine additive Konstante unterscheiden, führt eine Änderung des Wertes von c lediglich zu einer konstanten additiven Verschiebung der Stammfunktion. Die Fläche $A_{[a,b]}$ zwischen dem Graphen von f und der Abszisse zwischen den Stellen $x = a$ und $x = b$ ist folglich durch

$$A_{[a,b]} = F(b) - F(a) \quad (2.414)$$

gegeben. Man schreibt hierfür auch

$$F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b =: \int_a^b f(x) \, dx \equiv \int_{[a,b]} f(x) \, dx. \quad (2.415)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. (2.415) wird als *bestimmtes Integral von f von a bis b* bezeichnet. In Gl. (2.415) wird $f(x)$ als *Integrand* bezeichnet. Die Zahl a wird als *obere Grenze* und b als *untere Grenze* bezeichnet. Gl. (2.415) ist der sog. *Hauptsatz der Integralrechnung*. Er stellt eine Beziehung zwischen dem Problem der Bestimmung einer Stammfunktion und der oben beschriebenen Berechnung von Flächeninhalten her: Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der Abszisse zwischen den Stellen a und b ist durch die Differenz der Funktionswerte einer Stammfunktion F zu f an der oberen und unteren Grenze gegeben.

Bei einem bestimmten Integral ist die Bezeichnung der Integrationsvariablen willkürlich. Dies liegt daran, dass das bestimmte Integral von f von a bis b für eine vorgegebene Funktion f und vorgegebene Werte für die Grenzen a und b eine Zahl und keine Funktion ist. Für eine gegebene Funktion f hängt der Wert dieser Zahl ausschließlich von den Grenzen a und b ab. Die Bezeichnung der unabhängigen Variable in der Funktionsgleichung von f ist für den Wert des bestimmten Integrals somit irrelevant. Daher sind die Ausdrücke

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f(y) \, dy \quad (2.416)$$

alle äquivalent.

Aus Gl. (2.415) kann man eine Reihe von Eigenschaften bestimmter Integrale ermitteln. Ist z.B. die obere Grenze gleich der unteren Grenze, d.h. $a = b$, so folgt

$$\int_a^a f(x) \, dx = F(a) - F(a) = 0. \quad (2.417)$$

Weiterhin folgt für einen Wert $c \in [a; b]$

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) \quad (2.418)$$

$$= F(b) - F(c) + F(c) - F(a) \quad (2.419)$$

$$= \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx. \quad (2.420)$$

Zudem ergibt sich bei Vertauschung der Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x) \, dx. \quad (2.421)$$

Ist der Funktionswert von f in einem Intervall $[a; b]$ negativ, d.h. $\forall x \in [a; b] : f(x) < 0$, so ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der Abszisse im Intervall $[a; b]$ negativ, denn

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b [-|f(x)|] \, dx = -\int_a^b |f(x)| \, dx < 0. \quad (2.422)$$

Die Ableitung eines bestimmten Intergrals nach der oberen Grenze ergibt den Integranden,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = \frac{d}{dx} [F(x) - F(a)] = F'(x) = f(x). \quad (2.423)$$

Beispiel 2.49 Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ und der Abszisse zwischen den Stellen $x = 0$ und $x = \pi$ ist gegeben durch

$$\int_0^\pi \sin(x) \, dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) - [-\cos(0)] = -(-1) - (-1) = 2. \quad (2.424)$$

Beispiel 2.50 Wir bestimmen den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ und der Abszisse im Intervall $[0; 2\pi]$. Für $x \in [0; \pi]$ ist $f(x) \geq 0$. Für $x \in [\pi; 2\pi]$ ist $f(x) \leq 0$. Um den Flächeninhalt zu bestimmen, muss das Integral an der Nullstelle von f bei $x = \pi$ in zwei Integrale aufgeteilt werden. Vom Integral über das Intervall $[\pi; 2\pi]$ muss der Betrag ermittelt

werden, damit sich ein positiver Flächeninhalt ergibt:

$$\begin{aligned}
 A_{[0;2\pi]} &= \int_0^\pi \sin(x) \, dx + \left| \int_\pi^{2\pi} \sin(x) \, dx \right| \\
 &= 2 + \left| [-\cos(x)]_\pi^{2\pi} \right| \\
 &= 2 + |-\cos(2\pi) - [-\cos(\pi)]| \\
 &= 2 + |-1 - [-(-1)]| \\
 &= 2 + 2 = 4.
 \end{aligned}$$

Beispiel 2.51 Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Exponentialfunktion und der Abszisse zwischen den Stellen $x = a$ und $x = b$ ist gegeben durch

$$\int_a^b e^x \, dx = [e^x]_a^b = e^a - e^b. \quad (2.425)$$

Entsprechend beschreibt die Funktion

$$F_0(x) = e^x - e^0 = e^x - 1 \quad (2.426)$$

den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Exponentialfunktion und der Abszisse, beginnend bei der Stelle a bis zur Stelle x .

Definition über Riemannsumme

Das bestimmte Integral einer reellen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von a bis b kann formal über den Grenzwert einer Summe, der sog. *Riemannsumme* definiert werden. In der Mathematik wird das so definierte Integral als *Riemannintegral* bezeichnet. Hierzu wird das Intervall $[a; b]$ in N äquidistante Teilintervalle unterteilt, die jeweils die Breite $\Delta x = (b - a)/N$ besitzen. So ergibt sich eine entsprechende Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b, \quad (2.427)$$

wobei $x_{i-1} - x_i = \Delta x$ mit $i \in \{1, \dots, N\}$. Nun konstruiert man auf jedem Teilintervall i ein Rechteck der Breite Δx . Das Rechteck im i -ten Teilintervall besitzt die Höhe $f(\xi_i)$, wobei $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ eine beliebige Stelle im i -ten Teilintervall ist, siehe Abbildung 2.22. Die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke ist eine Approximation des Flächeninhalts zwischen dem Graphen von f und der Abszisse im Intervall $[a; b]$. Diese Approximation ist umso

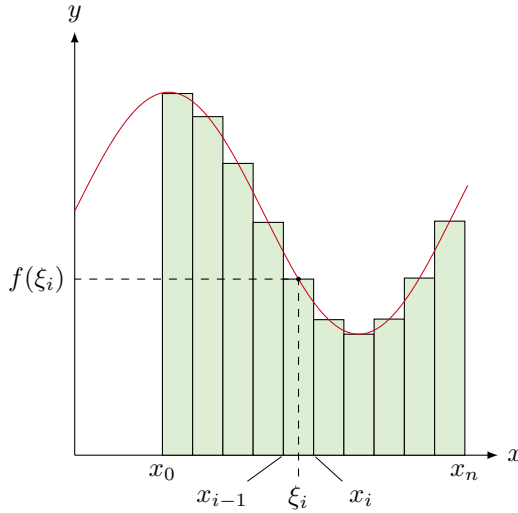


Abbildung 2.22: Zerlegung des Intervalls $[a; b]$ zur Berechnung der Riemannsumme.

genauer, je größer N ist, d.h. je „feiner“ die Zerlegung des Intervalls $[a; b]$ ist. Das bestimmte Integral von f von a bis b ergibt sich dann als Grenzfalle der Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke für $N \rightarrow \infty$. Die Summe S_N der Flächeninhalte aller Rechtecke ist gegeben durch

$$S_N = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \Delta x. \quad (2.428)$$

Die Summe S_N wird als *Riemannsumme* bezeichnet. Damit definiert man das bestimmte Integral (*Riemannintegral*) von f von a bis b als

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{N \rightarrow \infty} S_N, \quad (2.429)$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Die Definition (2.429), zusammen mit dem Ausdruck für S_N aus Gl. (2.428), macht die Notation des bestimmten Integrals auf der linken Seite von Gl. (2.429) plausibel: Im Grenzfalle $N \rightarrow \infty$ wird $\Delta x \rightarrow dx$ und aus dem Summenzeichen wird ein langgezogenes S, $\Sigma \rightarrow \int$. Die Symbole \int und dx stellen somit ausschließlich eine Notation für das Integral von f dar und besitzen im Rahmen des Integrals keine eigenständige Bedeutung.

Mithilfe der Riemannsumme S_N aus Gl. (2.428) ist es möglich, ein bestimmtes Integral numerisch zu bestimmen. Hierbei macht man sich zunutze, dass S_N eine Approximation des bestimmten Integrals darstellt, die umso genauer ist, je größer N ist. Eine Animation dazu finden Sie unter folgendem Link:

<https://rwth-aachen.sciebo.de/s/lKXfnxT8Zs08Gzt>

Die Riemannsumme ist aber bei weitem nicht die einzige Möglichkeit der numerischen Berechnung eines bestimmten Integrals. Weiter Integrationsmethoden sind die Trapezregel, die Simpsonregel oder Monte-Carlo-Integration.

Rechenregeln für bestimmte Integrale

Die Definition (2.415) gibt im Prinzip die Vorschrift an, wie ein bestimmtes Integral ermittelt werden kann: Für den Integranden $f(x)$ muss eine Stammfunktion $F(x)$ ermittelt werden. Aus der Differenz der Funktionswerte von F an der oberen und unteren Integrationsgrenze ergibt sich das bestimmte Integral. Für praktische Berechnungen bietet es sich jedoch an, die Integrationsmethoden aus Kapitel 2.7.2 direkt für bestimmte Integrale zu formulieren. Diese Formulierungen werden im folgenden beschrieben.

Substitutionsregel. Aus der Substitutionsregel (2.365)

$$G(h(x)) = \int g(h(x))h'(x) dx \quad (2.430)$$

folgt

$$G(h(b)) - G(h(a)) = \int_{h(a)}^{h(b)} g(u) du = \int_a^b g(h(x))h'(x) dx, \quad (2.431)$$

wobei G eine Stammfunktion von g ist.

Für die Substitutionsregel gibt es eine „Merkregel“, die sich für praktische Berechnung eignet. Hierbei „substituiert“ man die innere Funktion $h(x)$ durch ein neues Symbol u , d.h.

$$u = h(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = h'(x). \quad (2.432)$$

Nun formt man den Integranden auf der rechten Seite von Gl. (2.431) wie folgt skrupellos um

$$g(h(x))h'(x) dx = g(u) \frac{du}{dx} dx = g(u) du, \quad (2.433)$$

wobei im letzten Schritt dx „gekürzt“ wurde. Es ist wichtig festzuhalten, dass Gl. (2.433) lediglich eine Merkmregel darstellt. Insbesondere ist das Kürzen von Differentialen in Gl. (2.433) nicht definiert. Zudem muss bei der Umformung in Gl. (2.433) beachtet werden, dass die Integrationsgrenzen abgeändert werden müssen. Im Folgenden betrachten wir einige Beispiele, in der wir die Anwendung der Merkmregel illustrieren.

Beispiel 2.52 Wir berechnen

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \sin(x^2) dx. \quad (2.434)$$

Aus Beispiel 2.41 ist bekannt, dass die Substitution $u = h(x) = x^2$ mit $du/dx = h'(x) = 2x$ zum Ziel führt. Die neuen Integrationsgrenzen sind entsprechend $h(0) = 0^2 = 0$ und $h(\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}^2 = \pi$. Somit folgt

$$I = \int_0^{\pi} \sin(u) du = [-\cos(u)]_0^{\pi} = 2. \quad (2.435)$$

Beispiel 2.53 Wir berechnen

$$A = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx. \quad (2.436)$$

Der Integrand $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ stellt einen Halbkreisbogen im 1-ten und 2-ten Quadranten dar, vgl. Beispiel 2.14. Bezeichnet man den Funktionswert $f(x) = y$, so folgt durch Quadrieren die Kreisgleichung für einen Kreis mit dem Radius $R = 1$,

$$y^2 = 1 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1. \quad (2.437)$$

Da der Integrand einen Halbkreisbogen beschreibt, bietet sich zur Berechnung von A eine Substitution an, für die $x = \sin(u)$ gilt.^a Daraus ergibt sich $dx/du = \cos(u)$. Um die Integrationsgrenzen zu bestimmen, lösen wir nach u auf und erhalten $u = \arcsin(x)$. Daraus folgen die Integrationsgrenzen

$u(-1) = \arcsin(-1) = -\pi/2$ und $u(1) = \arcsin(1) = \pi/2$. Somit folgt

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(u)} \cos(u) \, du \quad (2.438)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(u)} \cos(u) \, du \quad (2.439)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos(u)| \cos(u) \, du \quad (2.440)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u) \, du. \quad (2.441)$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass $\cos(x) \geq 0$ für alle $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ im Integrationsintervall. Analog zu Beispiel 2.36 kann man mithilfe eines geeigneten Additionstheorems den Integranden umformen, so dass

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u) \, du \quad (2.442)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 + \cos(2u)] \, du \quad (2.443)$$

$$= \frac{1}{2} [u]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{4} [\sin(2v)]_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad (2.444)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] + 0 \quad (2.445)$$

$$= \frac{\pi}{2}. \quad (2.446)$$

Dieses Ergebnis entspricht dem halben Flächeninhalt des Einheitskreises, $A = \pi R^2/2 = \pi/2$.

^aHier wurde $x(u)$ angegeben und nicht $u(x)$ wie im vorherigen Beispiel.

Partielle Integration. Aus der Produktregel (2.294),

$$[g(x)h(x)]' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \quad (2.447)$$

folgt durch Integration

$$\int_a^b [g(x)h(x)]' \, dx = [g(x)h(x)]_a^b = \int_a^b [g'(x)h(x) + g(x)h'(x)] \, dx. \quad (2.448)$$

Durch Verwendung der Linearität des Integrals ergibt sich durch Umstellen die als *partielle Integration* bekannte Rechenregel für das bestimmte Integral,

$$\int_a^b g'(x)h(x) \, dx = [g(x)h(x)]_a^b - \int_a^b g(x)h'(x) \, dx. \quad (2.449)$$

Gl. (2.449) entspricht Gl. (2.352), wobei alle Terme an den Integrationsgrenzen a und b ausgewertet werden.

Ein Video mit vorgerechneten Übungsaufgaben zu bestimmten Integralen finden Sie unter

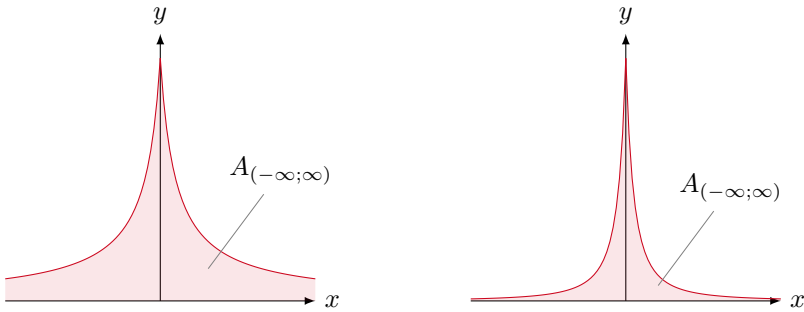
<https://rwth-aachen.sciebo.de/s/Dq2G9uM15Qmrxl6>

2.7.4 Uneigentliches Integral

In Kapitel 2.7.3 haben kennengelernt, wie mithilfe des bestimmten Integrals der (vorzeichenbehaftete) Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion f und der Abszisse in einem Intervall $[a; b] \subset D_f$ bestimmt werden kann. Hierbei haben wir einerseits angenommen, dass die Integrationsgrenzen $a, b \in D_f$ zur Definitionsmenge der Funktion gehören und die Funktion f auf ihrer Definitionsmenge beschränkt ist. Im Folgenden werden wir diese Beschränkungen fallen lassen.

Integration über unendlich große Intervalle

Zunächst betrachten wir den Fall, dass eine oder beide Integrationsgrenzen betragsmäßig unendlich groß sind. Wir nehmen zudem an, dass die zu integrierende Funktion f auf ihrer Definitionsmenge beschränkt ist. Unter diesen Bedingungen stellt sich die Frage, ob der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der Abszisse im betrachteten Integrationsintervall überhaupt endlich ist. Anschaulich ist klar, dass $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ als notwendige Voraussetzung für die Endlichkeit des Flächeninhaltes gelten muss. Diese Bedingung ist aber keineswegs hinreichend, vgl. Abbildung 2.23. In Abbildung 2.23a ist die Funktion $f_1(x) = (|x| + 1)^{-1}$ mit $D_{f_1} = \mathbb{R}$ dargestellt. Die Funktion konvergiert gegen Null für $x \rightarrow \pm\infty$, d.h. die notwendige Bedingung für einen endlichen Flächeninhalt $A_{(-\infty; \infty)}$ zwischen dem Graphen von f_1 und der Abszisse ist erfüllt. Dennoch ist $A_{(-\infty; \infty)}$ unendlich groß, da f_1 für $x \rightarrow \pm\infty$ nicht „schnell genug“ gegen Null konvergiert. In Abbildung 2.23b ist die Funktion $f_2(x) = (|x| + 1)^{-2}$ mit $D_{f_2} = \mathbb{R}$ dargestellt. Für f_2 gilt ebenfalls $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_2(x) = 0$. Der entsprechende Flächeninhalt $A_{(-\infty; \infty)}$ zwischen dem Graphen von f_2 und der Abszisse ist hier endlich, da f_2 für $x \rightarrow \pm\infty$ „schnell genug“ gegen Null konvergiert. Die



(a) $f_1(x) = (|x|+1)^{-1}$; $A_{(-\infty; \infty)}$ ist nicht endlich.

(b) $f_2(x) = (|x|+1)^{-2}$; $A_{(-\infty; \infty)}$ ist endlich.

Abbildung 2.23: Unendlich bzw. endlich große Flächeninhalte zwischen Funktionsgraphen und der Abszisse.

Existenz eines entsprechenden Integrals für unendlich große Integrationsgrenzen ist also keinesfalls gesichert.

Zur genaueren Untersuchung der Flächeninhalte zwischen dem Graphen einer reellen Funktion und der Abszisse definieren wir die folgenden sog. *uneigentlichen Integrale*.

Definition 2.20 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf D_f beschränkte reelle Funktion und $a, b \in D_f$. Die Ausdrücke

$$\int_a^\infty f(x) \, dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx, \quad (2.450)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx, \quad (2.451)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx \quad (2.452)$$

werden als *uneigentliche Integrale* bezeichnet, sofern die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren.

Es ist wichtig zu betonen, dass die beiden Grenzwerte in Gl. (2.452) nacheinander betrachtet werden müssen. Die Reihenfolge der Grenzwerte darf dabei keine Rolle spielen. Insbesondere ist es nicht erlaubt z.B. $a = -b$ zu setzen und anschließend nur den Grenzwert $b \rightarrow \infty$ zu untersuchen.

Beispiel 2.54 Das folgende uneigentliche Integral existiert nicht:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [2\sqrt{x}]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (2\sqrt{b} - 2). \quad (2.453)$$

Beispiel 2.55 Das folgende uneigentliche Integral existiert nicht:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln |x|]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b). \quad (2.454)$$

Beispiel 2.56 Das folgende uneigentliche Integral existiert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1. \quad (2.455)$$

Die in Beispiel 2.54 und 2.55 untersuchten uneigentlichen Integrale existieren nicht, da die zu integrierenden Funktionen nicht „schnell genug“ für $x \rightarrow \infty$ gegen Null konvergieren. Die Funktion in Beispiel 2.56 fällt jedoch schnell genug ab, so dass das betrachtete uneigentliche Integral existiert. Im Allgemeinen gilt, dass Funktionen der Form $f(x) = 1/x^{1+\epsilon}$ für $\epsilon > 0$ schnell genug abfallen, so dass die entsprechenden uneigentlichen Integrale existieren:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1+\epsilon}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^{1+\epsilon}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\epsilon} \frac{1}{x^\epsilon} \right]_1^b = \frac{1}{\epsilon} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b^\epsilon} \right) = \frac{1}{\epsilon}. \quad (2.456)$$

Beispiel 2.57 Das folgende uneigentliche Integral existiert, da der Integrand für große x wie $1/x^2$ abfällt:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan(x)]_0^b = \frac{\pi}{2}. \quad (2.457)$$

Beispiel 2.58 Das folgende uneigentliche Integral existiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx \quad (2.458)$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan(x)]_a^b \quad (2.459)$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan(b) - \arctan(a)] \quad (2.460)$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(a) \right] \quad (2.461)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi. \quad (2.462)$$

Aufgabe 2.33 Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx. \quad (2.463)$$

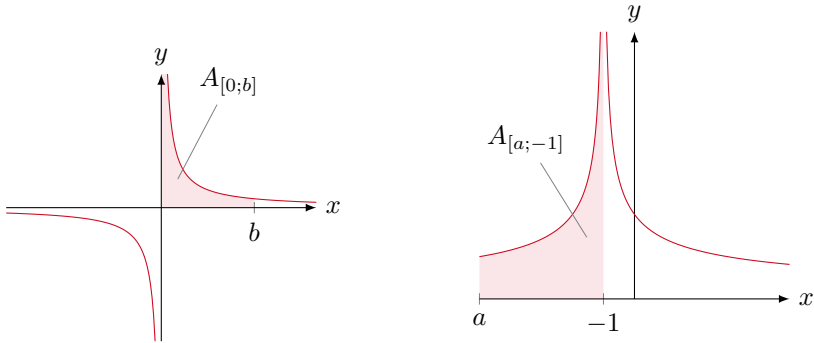
Das uneigentliche Integral existiert, da e^{-x} für $x \rightarrow \infty$ „schneller“ als jede Funktion der Form $1/x^n$ für beliebiges $n > 0$ abfällt.

Integration über singuläre Stellen

Der Begriff des uneigentlichen Integrals kann auch auf Fälle erweitert werden, bei denen die zu integrierende Funktion unbeschränkt ist. Dies ist z.B. der Fall, wenn die Funktion endlich viele singuläre Stellen besitzt, siehe Abbildung 2.23. In Abbildung 2.24a ist die Funktion $f_1(x) = 1/x$ gezeichnet, die bei $x = 0$ singulär ist. Der Flächeninhalt $A_{[0;b]}$ zwischen dem Graphen von f_1 und der Abszisse im Intervall $[0; b]$ ist nicht endlich, da f_1 für $x \rightarrow 0$ divergiert und „zu schnell“ ansteigt. In Abbildung 2.24b ist die Funktion $f_2(x) = 1/\sqrt{|x+1|}$ gezeichnet, die bei $x = -1$ singulär ist. Der Flächeninhalt $A_{[a;-1]}$ zwischen dem Graphen von f_2 und der Abszisse im Intervall $[a; -1]$ ist endlich, da f_2 für $x \rightarrow -1$ „langsam genug“ ansteigt.

Zur genaueren Untersuchung der Flächeninhalte zwischen dem Graphen einer reellen Funktion und der Abszisse für unbeschränkte Funktionen definieren wir die folgenden *uneigentlichen Integrale*.

Definition 2.21 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $a, b \in D_f$. Besitzt f



- (a) $f_1(x) = 1/x$; $A_{[0;b]}$ ist nicht endlich. (b) $f_2(x) = 1/\sqrt{|x+1|}$; $A_{[a;-1]}$ ist endlich.

Abbildung 2.24: Unendlich bzw. endlich große Flächeninhalte zwischen Funktionsgraphen und der Abszisse.

an der Stelle x_0 mit $a < x_0 < b$ eine Singularität, so werden die Ausdrücke

$$\int_{x_0}^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[\int_{x_0+\epsilon}^b f(x) dx \right], \quad (2.464)$$

$$\int_a^{x_0} f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[\int_a^{x_0-\epsilon} f(x) dx \right], \quad (2.465)$$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0+} \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0+} \left[\int_a^{x_0-\epsilon_1} f(x) dx + \int_{x_0+\epsilon_2}^b f(x) dx \right] \quad (2.466)$$

als *uneigentliche Integrale* bezeichnet, sofern die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren.

Auch hier ist es wichtig zu betonen, dass die beiden Grenzwerte in Gl. (2.466) nacheinander betrachtet werden müssen. Die Reihenfolge der Grenzwerte darf dabei keine Rolle spielen. Insbesondere ist es nicht erlaubt z.B. $\epsilon_1 = \epsilon_2$ zu setzen und anschließend nur den Grenzwert $\epsilon_2 \rightarrow 0+$ zu untersuchen. Besitzt die Funktion im Intervall $[a; b]$ mehrere singuläre Stellen, so wird das Intervall an den singulären Stellen entsprechend in Teilintervalle zerlegt und die einzelnen uneigentlichen Integrale auf den Teilintervallen betrachtet.

Beispiel 2.59 Die Funktion $f(x) = 1/\sqrt{x}$ besitzt eine Singularität an der Stelle $x = 0$. Das folgende uneigentliche Integral existiert:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{\epsilon}^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} [2\sqrt{x}]_{\epsilon}^4 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (4 - 2\sqrt{\epsilon}) = 4. \quad (2.467)$$

Beispiel 2.60 Die Funktion $f(x) = (x - 1)^{-1}$ besitzt eine Singularität an der Stelle $x = 1$. Das folgende uneigentliche Integral existiert nicht:

$$\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0+} \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0+} \left[\int_0^{1-\epsilon_1} \frac{1}{x-1} dx + \int_{1+\epsilon_2}^2 \frac{1}{x-1} dx \right] \quad (2.468)$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0+} \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0+} \left\{ [\ln|x-1|]_0^{1-\epsilon_1} + [\ln|x-1|]_{1+\epsilon_2}^2 \right\} \quad (2.469)$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0+} \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0+} [\ln(\epsilon_1) - \ln(\epsilon_2)]. \quad (2.470)$$

Hierbei ist es wichtig, dass die Grenzwerte $\epsilon_1 \rightarrow 0+$ und $\epsilon_2 \rightarrow 0+$ getrennt voneinander existieren müssen.

Aufgabe 2.34 Untersuchen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral existiert:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx. \quad (2.471)$$

Symmetrische Grenzwerte

Das uneigentliche Integral in Beispiel 2.60 existiert nicht, da die Grenzwerte $\epsilon_1 \rightarrow 0$ und $\epsilon_2 \rightarrow 0$ getrennt voneinander nicht existieren. Hätte man $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ gewählt, so wäre das Ergebnis

$$\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[\int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{x-1} dx + \int_{1+\epsilon}^2 \frac{1}{x-1} dx \right] \quad (2.472)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} [\ln(\epsilon) - \ln(\epsilon)] = 0. \quad (2.473)$$

In diesem Fall nähert man sich symmetrisch von beiden Seiten der singulären Stelle $x = 1$. Bei diesem symmetrischen Grenzwertprozess löschen sich der negative Flächeninhalt (links der singulären Stelle) und der positive Flächeninhalt (rechts der singulären Stelle) zwischen dem Graphen der Funktion und

der Abszisse genau aus. Dieser Grenzwert stellt kein uneigentliches Integral dar. Er wird stattdessen als *Cauchyscher Hauptwert* bezeichnet.

Definition 2.22 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $a, b \in D_f$. Besitzt f an der Stelle x_0 mit $a < x_0 < b$ eine Singularität, so wird der Ausdruck

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[\int_a^{x_0-\epsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\epsilon}^b f(x) dx \right] \quad (2.474)$$

als *Cauchyscher Hauptwert* bezeichnet, sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Ebenso wird der Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) dx \quad (2.475)$$

als *Cauchyscher Hauptwert* bezeichnet, sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Der Cauchysche Hauptwert kann z.B. existieren, wenn sich bei einem Grenzwertprozess positive und negative Flächeninhalte zwischen dem Graphen einer Funktion und der Abszisse genau auslöschen, obwohl beide Flächeninhalte einzeln betragsmäßig unendlich groß sind.

Beispiel 2.61 Der Cauchysche Hauptwert des Integrals aus Beispiel 2.60 ist

$$\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx = 0. \quad (2.476)$$

Beispiel 2.62 Wir berechnen den Cauchyschen Hauptwert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|+1} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{1}{|x|+1} dx \quad (2.477)$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} [\ln(|x|+1)]_{-a}^a \quad (2.478)$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} [\ln(a+1) - \ln(a+1)] \quad (2.479)$$

$$= 0. \quad (2.480)$$

Beispiel 2.63 Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x^3$ besitzt an der Stelle $x = 0$ eine Singularität. Wir berechnen den Cauchyschen Hauptwert von

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{\epsilon}^2 \frac{1}{x^3} dx \right) \quad (2.481)$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\left[\frac{1}{x^2} \right]_{-1}^{-\epsilon} + \left[\frac{1}{x^2} \right]_{\epsilon}^2 \right) \quad (2.482)$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{\epsilon^2} \right) \quad (2.483)$$

$$= \frac{3}{8}. \quad (2.484)$$

Aufgabe 2.35 Berechnen Sie den Cauchyschen Hauptwert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx. \quad (2.485)$$

Kapitel 3

Reihen

3.1	Reihen	120
3.2	Potenzreihen	122
3.2.1	Landau-Symbol	123
3.2.2	Geometrische Reihe	123
3.2.3	Reihendarstellung der Exponentialfunktion	124
3.2.4	Reihendarstellung der Hyperbelfunktionen	126
3.2.5	Reihendarstellung der trigonometrischen Funktionen	128
3.3	Taylorreihe	131
3.3.1	Taylorpolynom	131
3.3.2	Taylorreihe	137
3.3.3	Taylorpolynome zusammengesetzter Funktionen	138
3.3.4	Taylorentwicklung in dimensionsbehafteten Größen	143

In Kapitel 2 haben wir einfache Funktionen, insbesondere Polynome oder gebrochenrationale Funktionen kennengelernt. Diese beiden Funktionstypen zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Funktionswerte sehr einfach exakt bestimmt werden können. Betrachtet man z.B. ein Polynom 2-ten Grades der Form

$$f(x) = 1 + 2x + 4x^2, \quad (3.1)$$

so sind zur Berechnung des Funktionswertes $f(2)$ lediglich Additionen und Multiplikationen notwendig. Diese Grundrechenoperationen lassen sich insbesondere sehr einfach „per Hand“ oder mit einem Computer ausführen.

Sehr viele der in der Physik auftretenden Funktionen besitzen jedoch keine so einfache Form wie Polynome oder gebrochenrationale Funktionen. Sie lassen sich jedoch häufig durch unendliche Summen (sog. *Reihen*) von Polynomen oder gebrochenrationalen Funktionen darstellen und dadurch numerisch auswerten.

Ein Beispiel hierfür ist die Exponentialfunktion, die die Reihendarstellung

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots \quad (3.2)$$

besitzt. Entscheidend hierbei ist, dass für einen gegebenen Wert von x die (unendlich vielen) Terme mit den höheren Potenzen $x^{n>5}$ hinreichend „klein“ sind, so dass man beim Aufsummieren der Reihe ein endliches Ergebnis erhält. Durch Abbrechen der Reihe an einer geeigneten Stelle lässt sich so der Funktionswert der Exponentialfunktion für ein beliebiges Argument $x \in \mathbb{R}$ numerisch beliebig genau bestimmen.

Beispiel 3.1 Wir berechnen den Wert der Exponentialfunktion an der Stelle $x = 1$ mit Hilfe der Reihendarstellung (3.2):

$$e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} \quad (3.3)$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \cdots \quad (3.4)$$

$$= \frac{685}{252} + \cdots \quad (3.5)$$

$$\approx 2,7182 + \cdots \quad (3.6)$$

Hierbei wurden Terme der Ordnung $x^8/8! \approx 2,5 \cdot 10^{-5}$ und höher weggelassen. Das Ergebnis (3.6) besitzt somit eine Unsicherheit von weniger als $3 \cdot 10^{-5}$.

In diesem Kapitel werden wir eine Methode kennenlernen, mit der Reihendarstellungen (genauer: Potenzreihendarstellungen) unendlich oft differenzierbarer Funktionen bestimmt werden können.

3.1 Reihen

Wir werden zunächst den Begriff der *Reihe* sowie weitere verwandte Begriffe und Konzepte einführen.

Definition 3.1 Sei (a_n) eine Folge. Die Folge (s_n) der Partialsummen

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

heißt *Reihe*. Konvergiert die Folge (s_n) , so heißt die Reihe *konvergent*. Der entsprechende Grenzwert wird als *Wert* der Reihe bezeichnet und als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

geschrieben. Ist die Folge (s_n) divergent, so heißt die Reihe *divergent*.

Wenn eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist notwendigerweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (Nullfolgenkriterium). Die Umkehrung dieser Aussage ist nicht wahr. Es gibt viele Reihen, für die zwar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, die aber dennoch divergieren. Ein Beispiel ist die *harmonische Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty. \quad (3.7)$$

Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty \quad (3.8)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ sind hingegen konvergent.

Um die Konvergenz von Reihen zu untersuchen, gibt es mehrere Kriterien.

Satz 3.1 Sei (a_n) eine reelle, positive, monoton fallende Nullfolge. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad (3.9)$$

konvergent (*Leibnitz-Kriterium*).

Satz 3.2 Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (3.10)$$

Ist $a < 1$, so ist die Reihe absolut konvergent. Ist $a > 1$, so ist die Reihe divergent. (*Wurzel-Kriterium*).

Satz 3.3 Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \quad (3.11)$$

Ist $a < 1$, so ist die Reihe absolut konvergent. Ist $a > 1$, so ist die Reihe divergent. (*Quotienten-Kriterium*).

Beispiel 3.2 Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (3.12)$$

ist absolut konvergent, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1. \quad (3.13)$$

3.2 Potenzreihen

Im Folgenden betrachten wir Reihen, deren Summanden von einer unabhängigen Variablen x abhängen, d.h. die Summanden sind Funktionen.

Definition 3.2 Sei (a_n) eine Folge und $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (3.14)$$

wird als *Potenzreihe* bezeichnet.

Im Allgemeinen konvergiert eine Potenzreihe nicht für alle Werte von x . Die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die eine Potenzreihe konvergiert, wird als *Konvergenzbereich* bezeichnet. Zudem definiert man den sog. *Konvergenzradius* wie folgt.

Definition 3.3 Zu jeder Potenzreihe gehört eine eindeutige Zahl $R \in [0; \infty]$, die als *Konvergenzradius* bezeichnet wird. Für alle x mit $|x - x_0| < R$ konvergiert die Potenzreihe absolut. Für alle x mit $|x - x_0| > R$ divergiert die

Potenzreihe.

3.2.1 Landau-Symbol

Um eine Funktion mit einem Polynom zu vergleichen, welches die Funktion in einer Umgebung einer Stelle x_0 approximiert, verwenden wir im Folgenden die Landaunotation $\mathcal{O}(\cdot)$. Wir schreiben

$$f(x) = \mathcal{O}((x - x_0)^n) \quad \text{für} \quad x \rightarrow x_0, \quad (3.15)$$

falls die Funktion

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^n} \quad (3.16)$$

beschränkt ist für alle x aus einer Umgebung von x_0 und $x \neq x_0$. Die Notation in Gl. (3.15) bedeutet also, dass $f(x)$ im Grenzfall $x \rightarrow x_0$ genauso schnell oder schneller gegen Null konvergiert wie $(x - x_0)^n$.

Beispiel 3.3 Die Funktion $t(x) = 3(x - 1) + 1$ stellt die Tangente von $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 1$ dar. Somit gilt

$$f(x) = t(x) + \mathcal{O}((x - 1)^3), \quad (3.17)$$

denn

$$\frac{f(x) - t(x)}{(x - 1)^3} = \frac{x^3 - [3(x - 1) + 1]}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{x^3 - 3x + 4}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \quad (3.18)$$

ist beschränkt in einer Umgebung von x_0 .

3.2.2 Geometrische Reihe

Als *geometrische Reihe* bezeichnet man die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (3.19)$$

Sie tritt in der Physik häufig auf. Um die Konvergenz der geometrischen Reihe zu untersuchen, betrachten wir die Summe

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k. \quad (3.20)$$

Wir multiplizieren mit x und erhalten

$$xs_n(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n+1} \quad (3.21)$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1} - 1 \quad (3.22)$$

$$= s_n(x) + x^{n+1} - 1. \quad (3.23)$$

Durch Umstellen nach $s_n(x)$ ergibt sich

$$s_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \quad (3.24)$$

Für alle x mit $|x| < 1$ verschwindet der Term x^{n+1} im Zähler im Grenzfalle $n \rightarrow \infty$, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \frac{1}{1 - x}. \quad (3.25)$$

Insgesamt erhält man für die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{für } |x| < 1, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.26)$$

Beispiel 3.4 Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - 1/2} = 2. \quad (3.27)$$

3.2.3 Reihendarstellung der Exponentialfunktion

Eine in der Physik sehr wichtige Reihendarstellung ist diejenige der Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$. Im Folgenden soll diese ermittelt werden.

Für die Reihendarstellung der Exponentialfunktion machen wir den Ansatz

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (3.28)$$

mit zunächst unbekannten Koeffizienten a_k . Da für die Exponentialfunktion

$\exp'(x) = \exp(x)$ gilt, folgt

$$\exp'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (3.29)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad (3.30)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad (3.31)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) a_{l+1} x^l \quad (3.32)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k. \quad (3.33)$$

Hierbei wurde im ersten Schritt die Reihe gliedweise differenziert. Dabei wurde angenommen, dass die Ableitung und die Grenzwertbildung der Reihe vertauschbar sind. Dies ist bei der Exponentialfunktion der Fall. Im zweiten Schritt wurde die Summation bei $k = 1$ begonnen, anstatt bei $k = 0$. Die Reihe ändert sich hierbei nicht da der Term $k a_k x^{k-1}$ für $k = 0$ verschwindet. Im vorletzten Schritt wurde der Summationsindex k durch $k = l + 1$ ersetzt und über l summiert. Hierbei beginnt die Summation bei $l = 0$. Im letzten Schritt wurde der Summationsindex in k umbenannt. Aus der Differentialgleichung $\exp'(x) = \exp(x)$ folgt damit

$$0 = \exp'(x) - \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)a_{k+1} - a_k] x^k. \quad (3.34)$$

Da diese Gleichung für alle Werte $x \in \mathbb{R}$ gelten muss, müssen die Koeffizienten von x^k einzeln verschwinden, d.h.

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : (k+1)a_{k+1} - a_k = 0. \quad (3.35)$$

Gl. (3.35) stellt eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Potenzreihe der Exponentialfunktion dar. D.h., wird der Wert a_0 vorgegeben, so können mit Gl. (3.35) alle weiteren a_k für $k > 0$ bestimmt werden. Allgemein ergibt

sich

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+1} a_k \quad (3.36)$$

$$= \frac{1}{k+1} \frac{1}{k} a_{k-1} \quad (3.37)$$

$$= \frac{1}{k+1} \frac{1}{k} \frac{1}{k-1} a_{k-2} \quad (3.38)$$

$$= \dots \quad (3.39)$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} a_0. \quad (3.40)$$

Damit ergibt sich die Lösung der Differentialgleichung zu

$$\exp(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad (3.41)$$

Aus der Bedingung $\exp(0) = 1$ folgt $a_0 = 1$. Damit ergibt sich die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion

$$\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad (3.42)$$

Die Reihe (3.42) konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Grund hierfür ist, dass für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ der Term $x^k/k!$ für $k \rightarrow \infty$ „schnell genug“ gegen Null konvergiert.

Wie am Anfang des Kapitels beschrieben, stellen die ersten Terme der Reihe (3.42) eine Approximation der Exponentialfunktion dar, siehe Abbildung 3.1. Die Approximation ist hierbei umso besser, je mehr Summanden der Reihe berücksichtigt werden. Für eine feste Anzahl an berücksichtigten Termen ist die Approximation zudem für Werte x mit $|x| \ll 1$ besser als für Werte x mit $|x| \gg 1$.

3.2.4 Reihendarstellung der Hyperbelfunktionen

In Kapitel 2.5.4 wurden die Hyperbelfunktionen \sinh und \cosh über die Exponentialfunktion definiert:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad (3.43)$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}). \quad (3.44)$$

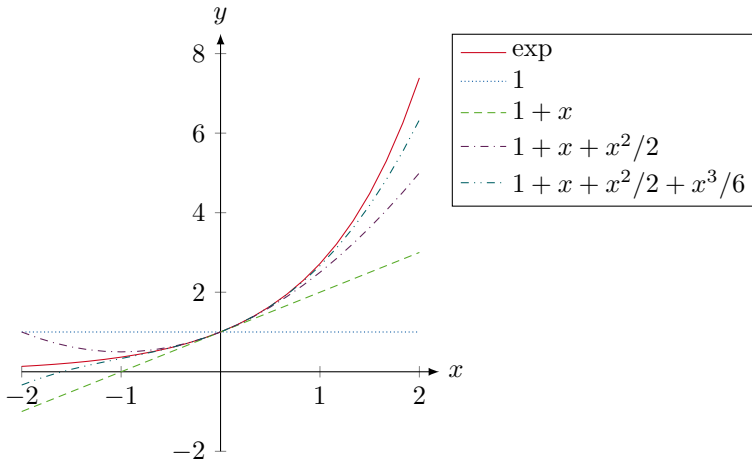


Abbildung 3.1: Approximation der Exponentialfunktion durch Polynome.

Mithilfe der Reihendarstellung der Exponentialfunktion ist es nun möglich, eine Reihendarstellung der Hyperbelfunktionen anzugeben. Für den Kosinus hyperbolicus ergibt sich

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \right) \quad (3.45)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} [1 + (-1)^k] \frac{x^k}{k!} \quad (3.46)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \quad (3.47)$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass

$$\frac{1}{2} [1 + (-1)^k] = \begin{cases} 1 & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (3.48)$$

Analog ergibt sich für den Sinus hyperbolicus

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \right) \quad (3.49)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} [1 - (-1)^k] \frac{x^k}{k!} \quad (3.50)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (3.51)$$

Weitere Aufgaben zu den Hyperbelfunktionen finden Sie unter

<https://rwth-aachen.sciebo.de/s/D6oPoUCSQg5dMr2>

3.2.5 Reihendarstellung der trigonometrischen Funktionen

Wie in Kapitel 1 erwähnt, steht die Exponentialfunktion mit den trigonometrischen Funktionen \sin und \cos über Gl. (1.28) in Zusammenhang:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x). \quad (3.52)$$

Hierbei ist i die sog. *imaginäre Einheit*, die die Eigenschaft $i^2 = -1$ besitzt. Gl. (3.52) ermöglicht es, die Reihendarstellungen der trigonometrischen Funktionen zu ermitteln. Hierzu wird (3.42) in (3.52) eingesetzt:

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \quad (3.53)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (3.54)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (3.55)$$

Durch Vergleich mit (3.52) liest man ab:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad (3.56)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (3.57)$$

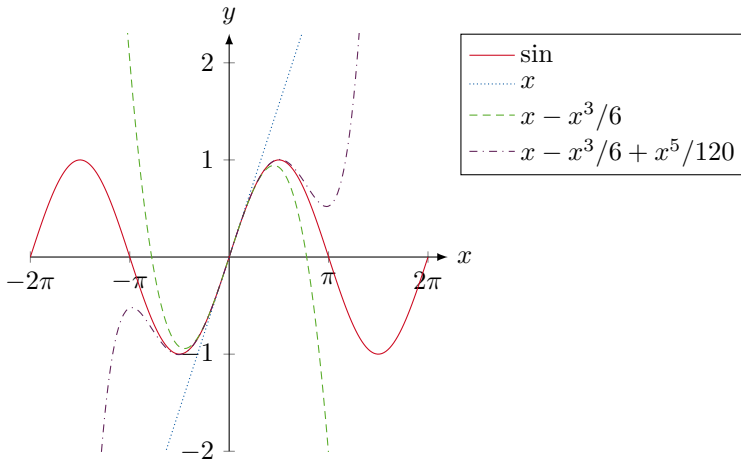


Abbildung 3.2: Approximation der Sinusfunktion durch Polynome.

Die Reihen (3.56) und (3.57) sind für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent. Sie können daher dazu verwendet werden, die Sinus- und Kosinusfunktion zu definieren.

Aus den Reihen (3.56) und (3.57) lassen sich die Ableitungsregeln für die Sinus- und Kosinusfunktion herleiten, die in Kapitel 2.6.2 angegeben wurden:

$$\sin'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (3.58)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1) x^{2k}}{(2k+1)(2k)!} \quad (3.59)$$

$$= \cos(x). \quad (3.60)$$

Die ersten Terme der Reihen (3.56) und (3.57) stellen eine Approximation der Sinus- und Kosinusfunktion dar. Für kleine Werte x mit $|x| \ll 1$ gilt

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad (3.61)$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}. \quad (3.62)$$

Die Sinus- und Kosinusfunktion sowie sie approximierende Polynome sind in Abbildung 3.2 und Abbildung 3.3 dargestellt. Weitere Aufgaben zu den trigonometrischen Funktionen finden Sie unter

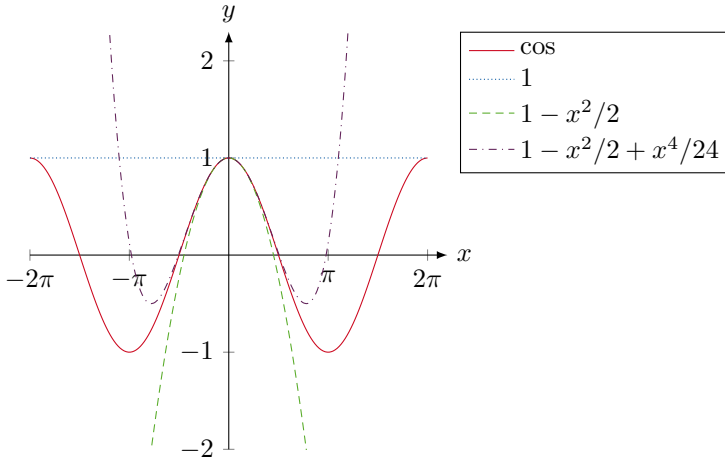


Abbildung 3.3: Approximation der Kosinusfunktion durch Polynome.

<https://rwth-aachen.sciebo.de/s/VBuDteMKUp1zwiR>

Beispiel 3.5 Wir berechnen den Wert der Sinusfunktion an der Stelle $x = 1/10$. Aus Gl. (3.57) folgt

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7). \quad (3.63)$$

Damit ergibt sich

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{6 \cdot 10^3} + \frac{1}{120 \cdot 10^5} \quad (3.64)$$

$$\approx 0,099\,833\,416\,6 \quad (3.65)$$

Der fehlende Term nächst höherer Ordnung ist $-x^7/5040 \approx 2 \cdot 10^{-11}$. Das Ergebnis besitzt daher eine Genauigkeit von ca. $2 \cdot 10^{-11}$.

Aufgabe 3.1 Zeigen Sie mit Hilfe der Reihen (3.56) und (3.57), dass $\cos'(x) = -\sin(x)$.

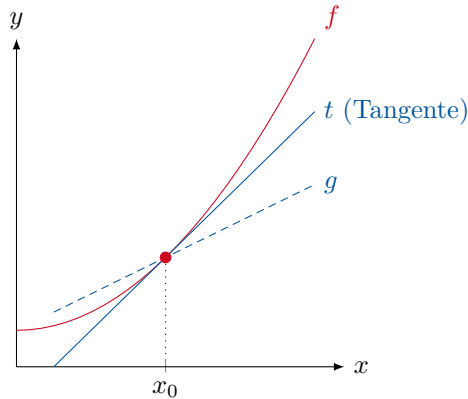


Abbildung 3.4: Approximation einer Funktion f an der Stelle x_0 durch zwei lineare Funktionen t und g . Für die Tangente t gilt $t'(x_0) = f'(x_0)$. Für Funktion g gilt $g'(x_0) \neq f'(x_0)$.

3.3 Taylorreihe

3.3.1 Taylorpolynom

In Kapitel 2.6.1 haben wir kennengelernt, wie eine differenzierbare Funktion f an einer Stelle x_0 durch die Tangente $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, d.h. eine lineare Funktion, approximiert werden kann. Diese Approximation ist aufgrund von zwei Eigenschaften der Tangente t vergleichsweise genau: Zum einen berührt/schneidet die Tangente t die Funktion f an der Stelle x_0 , d.h. es gilt $t(x_0) = f(x_0)$. Zum anderen sind die Steigungen von t und f an der Stelle x_0 gleich, d.h. $t'(x_0) = f'(x_0)$. Wären die Steigungen beider Funktionen ungleich, so wäre die Approximation ungenauer, siehe Abbildung 3.4.

Eine Approximation von f in einer Umgebung der Stelle x_0 muss nicht auf lineare Funktionen beschränkt sein. Beispielsweise könnte man versuchen f durch ein Polynom p_2 vom Grad 2 mit

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (3.66)$$

zu approximieren. Damit sich die Approximationsfunktion p_2 in der Umgebung von x_0 besonders gut an f „anschmiegt“ sollten neben der Gleichheit der Funktionswerte, $p_2(x_0) = f(x_0)$, und der Gleichheit der Steigungen, $p_2'(x_0) = f'(x_0)$, auch die Krümmungen gleich sein, d.h. $p_2''(x_0) = f''(x_0)$. Hieraus folgt,

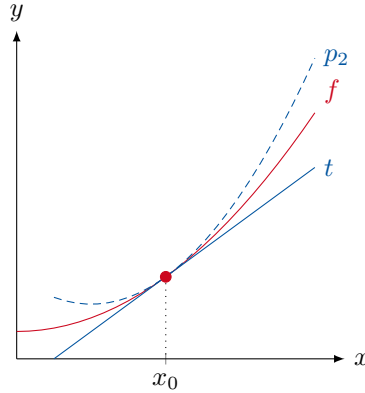


Abbildung 3.5: Approximation einer Funktion f an der Stelle x_0 durch die Tangente t und ein quadratisches Polynom p_2 .

dass p_2 die Form

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \quad (3.67)$$

haben muss. Denn damit gilt

$$p_2(x_0) = f(x_0), \quad (3.68)$$

$$p_2'(x_0) = \frac{d}{dx} \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \right]_{x=x_0} \quad (3.69)$$

$$= [f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)]_{x=x_0}, \quad (3.70)$$

$$= f'(x_0), \quad (3.71)$$

$$p_2''(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \right]_{x=x_0} \quad (3.72)$$

$$= f''(x_0). \quad (3.73)$$

Eine entsprechende Approximationsfunktion p_2 für eine Funktion f ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

Wählt man für eine Approximation ein Polynom p_n vom Grad n , $n \in \mathbb{N}_0$, und fordert die Gleichheit aller n Ableitungen, d.h. $p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für $k \in \{0, \dots, n\}$, so ergibt sich entsprechend

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (3.74)$$

Das Polynom (3.74) wird als *Taylorpolynom* bezeichnet.

Definition 3.4 Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq D_f$ n -mal stetig differenzierbar, dann heißt

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (3.75)$$

das *Taylorpolynom* vom Grad n zu f um die Entwicklungsstelle x_0 .

Das Taylorpolynom $T_n f(x)$ und alle seine Ableitungen bis einschließlich Ordnung n stimmt im Punkt x_0 mit den Funktions- und Ableitungswerten von f überein, d.h. $(T_n f)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für $k \in \{0, \dots, n\}$. Die Funktionsgleichung des Taylorpolynoms hängt dabei von der Wahl der Stelle x_0 ab. Daher schreiben wir für das Taylorpolynom auch $T_n f(x; x_0)$ um den Wert der Stelle explizit anzugeben.

Beispiel 3.6 Wir bestimmen das Taylorpolynom der Exponentialfunktion bis einschließlich 3-ter Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$.

$$T_3 \exp(x; 0) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 \quad (3.76)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}. \quad (3.77)$$

Das Ergebnis stimmt mit den ersten vier Termen der Reihe (3.2) überein.

Beispiel 3.7 Wir bestimmen das Taylorpolynom der Funktion $f(x) = (1 - x)^{-1}$ bis einschließlich 3-ter Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$. Die Ableitungen von f lauten

$$f^{(0)}(x) = (1 - x)^{-1}, \quad f^{(0)}(0) = 1 = 0!, \quad (3.78)$$

$$f^{(1)}(x) = (1 - x)^{-2}, \quad f^{(1)}(0) = 1 = 1!, \quad (3.79)$$

$$f^{(2)}(x) = 2!(1 - x)^{-3}, \quad f^{(2)}(0) = 2!, \quad (3.80)$$

$$f^{(3)}(x) = 3!(1 - x)^{-4}, \quad f^{(3)}(0) = 3!. \quad (3.81)$$

Damit ergibt sich

$$T_3 f(x; 0) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 \quad (3.82)$$

$$= \frac{0!}{0!} 1 + \frac{1!}{1!} x + \frac{2!}{2!} x^2 + \frac{3!}{3!} x^3 \quad (3.83)$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3. \quad (3.84)$$

Das Ergebnis stimmt mit den ersten vier Termen der Reihe (3.19) überein.

Aufgabe 3.2 Geben Sie die Funktionsgleichung für $f^{(n)}(x)$ für die Funktion f aus Beispiel 3.7 an.

Beispiel 3.8 Wir bestimmen das Taylorpolynom der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ bis einschließlich 3-ter Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$. Die Ableitungen von f lauten

$$f^{(0)}(x) = (1+x)^{1/2}, \quad f^{(0)}(0) = 1, \quad (3.85)$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f^{(1)}(0) = \frac{1}{2}, \quad (3.86)$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, \quad f^{(2)}(0) = -\frac{1}{4}, \quad (3.87)$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}, \quad f^{(3)}(0) = \frac{3}{9}. \quad (3.88)$$

Damit ergibt sich

$$T_4 f(x; 0) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 \quad (3.89)$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}. \quad (3.90)$$

Beispiel 3.9 Wir bestimmen das Taylorpolynom der Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ bis einschließlich 4-ter Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$. Die Ablei-

tungen von f lauten

$$f^{(0)}(x) = \ln(1+x), \quad f^{(0)}(0) = 0, \quad (3.91)$$

$$f^{(1)}(x) = (1+x)^{-1}, \quad f^{(1)}(0) = 1 = (-1)^0 0!, \quad (3.92)$$

$$f^{(2)}(x) = (-1)(1+x)^{-2}, \quad f^{(2)}(0) = -1 = (-1)^1 1!, \quad (3.93)$$

$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}, \quad f^{(3)}(0) = 2 = (-1)^2 2!, \quad (3.94)$$

$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}, \quad f^{(4)}(0) = 6 = (-1)^3 3!. \quad (3.95)$$

Damit ergibt sich

$$T_4 f(x; 0) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 \quad (3.96)$$

$$= 0 + \frac{(-1)^0 0!}{0! \cdot 1} x + \frac{(-1)^1 1!}{2 \cdot 1!} x^2 + \frac{(-1)^2 2!}{3 \cdot 2!} x^3 + \frac{(-1)^3 3!}{4 \cdot 3!} x^4 \quad (3.97)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}. \quad (3.98)$$

Die Funktion f und die Taylorpolynome von f an der Stelle x_0 vom Grad $n \in \{1, 2, 3\}$ sind in Abbildung 3.6 dargestellt.

Aus Abbildung 3.6 ist zu erkennen, dass ein Taylorpolynom einer Funktion an einer Stelle x_0 die Funktion nur in einer „kleinen“ Umgebung von x_0 gut approximiert. Für Werte x mit $|x - x_0| \gg 1$ ist die Approximation i.A. sehr ungenau. M.a.W. ein Taylorpolynom stellt eine *lokale* Approximation einer Funktion in einer kleinen Umgebung einer Stelle x_0 dar.

Beispiel 3.10 Wir bestimmen das Taylorpolynom der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ bis einschließlich 3-ter Ordnung an der Stelle $x_0 = 1$. Die Ableitungen von f lauten $f^{(n)}(x) = e^x$. Damit folgt $f^{(n)}(1) = e$ und somit

$$T_3 f(x; 1) = \frac{f^{(0)}(1)}{0!} (x-1)^0 + \frac{f^{(1)}(1)}{1!} (x-1)^1 + \frac{f^{(2)}(1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!} (x-1)^3 \quad (3.99)$$

$$= e \left[1 + \frac{1}{1!} (x-1) + \frac{1}{2!} (x-1)^2 + \frac{1}{3!} (x-1)^3 \right]. \quad (3.100)$$

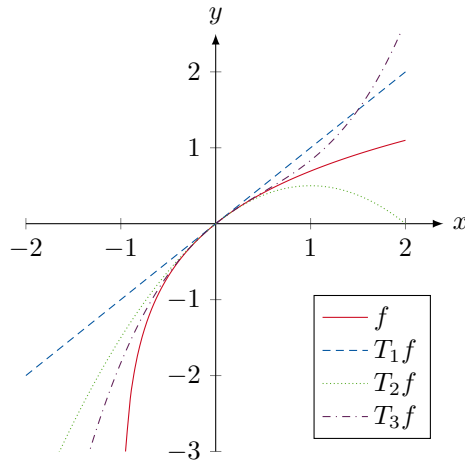


Abbildung 3.6: Die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ und ihre Taylorpolynome an der Stelle $x_0 = 0$

Beispiel 3.11 Wir bestimmen das Taylorpolynom der Funktion $f(x) = -x e^{-x}$ bis einschließlich 2-ter Ordnung an der Stelle x_0 ihres Minimums. Die Stelle x_0 ist bestimmt durch

$$0 = f'(x_0) = -e^{-x_0} + x_0 e^{-x_0} \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 1. \quad (3.101)$$

Die Stelle $x_0 = 1$ ist eine Minimalstelle, denn $f''(x_0) = e^{-1} > 0$. Damit ergibt sich

$$f^{(0)}(x) = -x e^{-x}, \quad f^{(0)}(1) = -e^{-1}, \quad (3.102)$$

$$f^{(1)}(x) = (x-1)e^{-x}, \quad f^{(1)}(1) = 0, \quad (3.103)$$

$$f^{(2)}(x) = (2-x)e^{-x}, \quad f^{(2)}(1) = e^{-1}. \quad (3.104)$$

Damit ergibt sich das Taylorpolynom

$$T_2 f(x; 0) = \frac{f^{(0)}(1)}{0!} (x-1)^0 + \frac{f^{(1)}(1)}{1!} (x-1)^1 + \frac{f^{(2)}(1)}{2!} (x-1)^2 \quad (3.105)$$

$$= -e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} (x-1)^2. \quad (3.106)$$

Der Term linear in $(x-1)$ verschwindet an der Minimalstelle. Die Funktion f und das Taylorpolynom $T_2 f$ ist in [Abbildung 3.7](#) dargestellt.

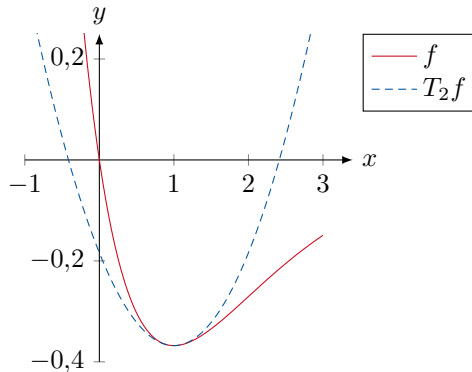


Abbildung 3.7: Die Funktion $f(x) = -xe^{-x}$ und ihre Taylorpolynom $T_2f(x; 1)$ an der Minimalstelle $x_0 = 1$.

Die Beobachtung aus Beispiel 3.11 lässt sich wie folgt verallgemeinern: Das Taylorpolynom vom Grad 2 einer Funktion f um eine Extremstelle x_0 ist stets quadratisch in $(x - x_0)$. Der Term linear in $(x - x_0)$ verschwindet an allen Extremstellen von f . Der Grund hierfür ist, dass an einer Extremstelle x_0 von f stets $f'(x_0)$ gilt.

3.3.2 Taylorreihe

Betrachtet man die Taylorpolynome $T_n f$ einer Funktion f um eine Stelle x_0 im Grenzfall $n \rightarrow \infty$, so ergibt sich die *Taylorreihe*.

Definition 3.5 Sei $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a; b)$ eine Entwicklungsstelle. Dann heißt die Reihe

$$Tf(x; x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (3.107)$$

Taylorreihe von f um x_0 .

Es gibt Funktionen, die mit ihren Taylorreihen übereinstimmen, d.h. die Taylorreihe konvergiert gegen die Funktion. (In diesem Fall kann die Funktion auch über ihre Taylorreihe definiert werden.) Beispiele hierfür sind die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen.

Beispiel 3.12 Aus Beispiel 3.9 kann man ablesen, dass die n -te Ableitung von $f = \ln(1+x)$ durch

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} \quad (3.108)$$

gegeben ist. Damit lautet die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$:

$$Tf(x; x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (3.109)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k \quad (3.110)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k. \quad (3.111)$$

Es gibt auch Funktionen, deren Taylorreihe nicht mit der Funktion übereinstimmt. Ein Beispiel hierfür ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (3.112)$$

Jede Ableitung von f besitzt die Form

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{p_k(x)}{x^{2k}} \exp(-1/x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (3.113)$$

wobei p_k ein Polynom vom Grad $\leq k$ ist. Betrachtet man die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ so hat man $f^{(k)}(0) = 0$. D.h. jedes Taylorpolynom von f an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ ist das Nullpolynom. Allgemeiner kann man zeigen, dass für keinen Wert $x_0 > 0$ die Taylorpolynome $T_n f(x; x_0)$ gegen die Funktion konvergieren.

3.3.3 Taylorpolynome zusammengesetzter Funktionen

Das Taylorpolynom einer aus mehreren Funktionen zusammengesetzten Funktion kann u.U. sehr einfach bestimmt werden, wenn die Taylorpolynome der einzelnen Teilfunktionen bekannt sind. Dies soll im Folgenden an verschiedenen Beispielen illustriert werden.

Wir wollen das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1-x} \quad (3.114)$$

an der Stelle $x_0 = 0$ bestimmen. Durch Ableiten der Funktion ergibt sich

$$f^{(0)}(x) = \frac{\sin(x)}{1-x}, \quad f^{(0)}(0) = 0, \quad (3.115)$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{\sin(x) + (1-x)\cos(x)}{(1-x)^2}, \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad (3.116)$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{(1+2x-x^2)\sin(x) + 2(1-x)\cos(x)}{(1-x)^3}, \quad f^{(2)}(0) = 2. \quad (3.117)$$

Damit ergibt sich das Taylorpolynom

$$T_2 f(x; 0) = x + x^2. \quad (3.118)$$

Die Bestimmung der höheren Ableitungen von f ist recht aufwändig. Mit Hilfe der bekannten Taylorpolynome von $\sin(x)$ und $1/(1-x)$ lässt sich das Taylorpolynom vom f deutlich einfacher bestimmen:

$$f(x) = \sin(x) \frac{1}{1-x} \quad (3.119)$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) \right] [1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^5)] \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} &= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x\mathcal{O}(x^5) \\ &\quad - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{3!} - \frac{x^5}{3!} - \frac{x^6}{3!} - \frac{x^7}{3!} - \frac{x^3}{3!}\mathcal{O}(x^5) \\ &\quad + \mathcal{O}(x^5) + x\mathcal{O}(x^5) + x^2\mathcal{O}(x^5) + x^3\mathcal{O}(x^5) + x^4\mathcal{O}(x^5) \\ &\quad + \mathcal{O}(x^5)\mathcal{O}(x^5) \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} &= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \mathcal{O}(x^6) \\ &\quad - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{3!} - \frac{x^5}{3!} - \frac{x^6}{3!} - \frac{x^7}{3!} + \mathcal{O}(x^8) \\ &\quad + \mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^6) + \mathcal{O}(x^7) + \mathcal{O}(x^8) + \mathcal{O}(x^9) + \mathcal{O}(x^{10}) \end{aligned} \quad (3.122)$$

$$= x + x^2 + \left(1 - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(1 - \frac{1}{3!}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^5). \quad (3.123)$$

Im ersten Schritt wurde das Produkt der Taylorpolynome von $\sin(x)$ und $1/(1-x)$ bis einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(x^4)$ eingesetzt und im zweiten Schritt ausmultipliziert. Im dritten Schritt wurden Produkte aus Potenzen von x und Landausymbolen zusammengefasst zu $x^n\mathcal{O}(x^k) = \mathcal{O}(x^{n+k})$. Gl. (3.122) enthält nun Terme mit Potenzen in x von x^1 bis einschließlich x^7 und Landausymbole der Ordnung $\mathcal{O}(x^5)$ bis $\mathcal{O}(x^{10})$. Das Auftreten des Landausymbols $\mathcal{O}(x^5)$ in

Gl. (3.122) bedeutet, dass das Taylorpolynom bis einschließlich $\mathcal{O}(x^4)$ korrekt ist. Terme der Ordnung $\mathcal{O}(x^5)$ und höher sind nicht vollständig enthalten und müssen folglich weggelassen werden. Somit ergibt sich das in Gl. (3.123) gezeigte Polynom, dass alle Terme bis einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(x^4)$ korrekt enthält.

Aufgabe 3.3 Bis zu welcher Ordnung müsste man die Taylorpolynome von $\sin(x)$ und $1/(1-x)$ in Gl. (3.120) einsetzen, damit man das Taylorpolynom $T_5 f(x; 0)$ erhält, d.h. alle Terme bis einschließlich $\mathcal{O}(x^5)$ in $T_5 f(x; 0)$ korrekt enthalten sind?

Als zweites Beispiel betrachten wir das Taylorpolynom der Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{1-x}. \quad (3.124)$$

Wir verwenden der Taylorpolynome aus Beispiel 3.8 und Beispiel 3.7,

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + \mathcal{O}(y^4), \quad (3.125)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4). \quad (3.126)$$

Mit $y = -2x$ ergibt sich

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{1-x} \quad (3.127)$$

$$= \left[1 + \frac{-2x}{2} - \frac{(-2x)^2}{8} + \frac{(-2x)^3}{16} + \mathcal{O}(x^4) \right] [1 + x + x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4)] \quad (3.128)$$

$$= \left[1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^4) \right] [1 + x + x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4)] \quad (3.129)$$

$$= 1 + (1-1)x + \left(1 - \frac{1}{2} - 1\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}\right)x^3 + \mathcal{O}(x^4) \quad (3.130)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 + \mathcal{O}(x^4). \quad (3.131)$$

Der Ausdruck $\sqrt{1-2x} = g(h(x))$ mit $g(x) = \sqrt{1+x}$ und $h(x) = -2x$ stellt eine Verkettung dar. Die Ersetzung $y = h(x) = -2x$ wird auch als Substitution bezeichnet. Die innere Funktion $h(x) = -2x$ ist hierbei mit ihrer Taylorreihe identisch.

Ein weiteres Beispiel für die Anwendung einer Substitution ist die Taylorentwicklung von

$$f(x) = \sqrt{1 + ax + bx^2} \quad (3.132)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion f kann als $f(x) = g(h(x))$ mit $g(x) = \sqrt{1+x}$ und $h(x) = ax + bx^2$ geschrieben werden. Substituiert man $y = h(x)$ so ergibt sich dem Ergebnis aus Beispiel 3.8

$$f(x) = \sqrt{1+y} \quad (3.133)$$

$$= 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \mathcal{O}(y^3) \quad (3.134)$$

$$= 1 + \frac{ax + bx^2}{2} - \frac{(ax + bx^2)^2}{8} + \mathcal{O}((ax + bx^2)^3) \quad (3.135)$$

$$= 1 + \frac{a}{2}x + \left(\frac{b}{2} - \frac{a^2}{8}\right)x^2 + \mathcal{O}(x^3). \quad (3.136)$$

Da $\mathcal{O}((ax + bx^2)^3) = \mathcal{O}(a^3x^3 + \mathcal{O}(x^4)) = \mathcal{O}(x^3)$, sind in Gl. (3.136) lediglich die Terme bis einschließlich $\mathcal{O}(x^2)$ vollständig enthalten.

Ein komplexeres Beispiel für die Anwendung einer Substitution ist die Taylorentwicklung von

$$f(x) = \frac{1}{1 - \ln(1+x)}. \quad (3.137)$$

Die Funktion f kann als $f(x) = g(h(x))$ mit $g(x) = 1/(1-x)$ und $h(x) = \ln(1+x)$ geschrieben werden. Substituiert man $y = h(x)$ so ergibt sich mit dem Ergebnis aus Beispiel 3.9

$$f(x) = \frac{1}{1-y} \quad (3.138)$$

$$= 1 + y + y^2 + y^3 + \mathcal{O}(y^4) \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) \right] + \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) \right]^2 \\ &\quad + \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) \right]^3 + \mathcal{O}(x^4) \end{aligned} \quad (3.140)$$

$$= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right)x^3 + \mathcal{O}(x^4) \quad (3.141)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4). \quad (3.142)$$

Hierbei wurde verwendet, dass

$$\mathcal{O}(y^4) = \mathcal{O}\left(\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)\right]^4\right) = \mathcal{O}(x^4 + \mathcal{O}(x^5)) = \mathcal{O}(x^4). \quad (3.143)$$

Bei Verkettungen der Form $f(x) = g(h(x)) = g(y)$ mit $y = h(x)$ kann es auch vorkommen, dass die Funktion g um eine andere Stelle entwickelt werden muss als die Funktion h . Ein Beispiel hierfür ist die Entwicklung der Funktion

$$f(x) = \exp[\cos(x)] \quad (3.144)$$

um die Stelle $x_0 = \pi/2$. Für die Entwicklung der inneren Funktion $h(x) = \cos(x)$ um $x_0 = \pi/2$ ergibt sich

$$\cos(x) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left[x - \frac{\pi}{2}\right]^5\right). \quad (3.145)$$

Für $x \approx x_0 = \pi/2$ ist $|\cos(x)| \ll 1$. Folglich muss die Exponentialfunktion $g(y) = \exp(y)$ um $y_0 = 0$ entwickelt werden. Mit der Taylorreihe für die Exponentialfunktion aus Gl. (3.2) ergibt sich damit

$$f(x) = g(y) \quad (3.146)$$

$$= 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \mathcal{O}(y^4) \quad (3.147)$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \left[-\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left[x - \frac{\pi}{2}\right]^5\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[-\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left[x - \frac{\pi}{2}\right]^5\right)\right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}\left[-\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left[x - \frac{\pi}{2}\right]^5\right)\right]^3 \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\left[x - \frac{\pi}{2}\right]^4\right) \end{aligned} \quad (3.148)$$

$$= 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left[x - \frac{\pi}{2}\right]^4\right) \quad (3.149)$$

$$= 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left[x - \frac{\pi}{2}\right]^4\right). \quad (3.150)$$

3.3.4 Taylorentwicklung in dimensionsbehafteten Größen

Bisher haben wir angenommen, dass die Funktionsargumente x und die Entwicklungsstellen x_0 dimensionslose Größen sind, wie in der Mathematik üblich. Angaben der Form $|x - x_0| \ll 1$ sind unter dieser Voraussetzung sinnvoll. Die in der Physik auftretenden Größen sind jedoch i.d.R. dimensionsbehaftet. Z.B. könnte das Funktionsargument x die Dimension einer Länge haben. Die Taylorentwicklung einer Funktion um eine Stelle x_0 bedeutet dann, dass die Funktion in einer Umgebung mit $|x - x_0| \ll a$ durch Polynome approximiert wird. Hierbei ist a eine charakteristische Längenskala des betrachteten physikalischen Systems. M.a.W. muss bei der Aussage „ $|x - x_0|$ ist klein“ stets eine Bezugsgröße angegeben werden, im Vergleich zu der $|x - x_0|$ „klein“ ist.

Um die Taylorentwicklung in einer dimensionsbehafteten Variablen x durchzuführen, müssen die entsprechenden Ausdrücke zunächst dimensionslos gemacht werden. Anschließend kann in der dimensionslosen Größe entwickelt werden. Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{l^2 + x^2}} = \frac{1}{l} \frac{1}{\sqrt{1 + (x/l)^2}}, \quad (3.151)$$

wobei l eine dimensionsbehaftete Längenskala des Systems ist. Durch die Einführung der dimensionslosen Größe $\lambda = x/l$ kann die Funktionsgleichung von f in der Form

$$f(x) = \frac{1}{l} g(x/l) \quad (3.152)$$

mit

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \quad (3.153)$$

geschrieben werden. Die Funktion g kann nun in dem dimensionslosen Argument λ um eine Stelle λ_0 entwickelt werden. Eine Entwicklung um die Stelle $\lambda_0 = 0$ bedeutet dann beispielsweise, dass f für Werte für λ mit $|\lambda - \lambda_0| = |\lambda| = |x/l| \ll 1$ durch Polynome approximiert wird. Physikalisch entspricht das Werten für die dimensionsbehaftete Größe x , die betragsmäßig klein im Vergleich zu $|l|$ sind.

Ein weiteres Beispiel für eine Taylorentwicklung finden Sie unter folgendem Link

<https://rwth-aachen.sciebo.de/s/IfnSybH0JKDcjQ8>

Ein Video, was die Anwendung der Taylorentwicklung in der Physik erläutert finden Sie unter

<https://rwth-aachen.sciebo.de/s/IeHHI7hmmQVwq6c>

Kapitel 4

Komplexe Zahlen

4.1	Definition	145
4.2	Polardarstellung komplexer Zahlen	149
4.3	Komplexe Wurzel	154
4.4	Komplexwertige Funktionen mit komplexen Argumenten .	156

4.1 Definition

Die komplexen Zahlen stellen eine Erweiterung der reellen Zahlen dar. Die Nützlichkeit der komplexen Zahlen liegt zum einen darin, dass sie algebraisch abgeschlossen sind. Das hat zur Folge, dass für jedes nicht-konstante Polynom vom Grad n genau n (i.A. komplexwertige) Nullstellen angegeben werden können. Beispielsweise besitzt das quadratische Polynom $p(x) = x^2 + 4$ genau zwei komplexwertige Nullstellen. Darüber hinaus können komplexe Zahlen mithilfe der Exponentialfunktion ausgedrückt werden. Dies ermöglicht einen sehr einfachen Umgang mit komplexen Zahlen, z.B. hinsichtlich der Multiplikation, Division oder Ableitung. Anwendungen der komplexen Zahlen finden sich z.B. bei Lösungsverfahren linearer Differentialgleichungen, in der Elektrotechnik oder bei der Darstellung von Lie-Gruppen zur Beschreibung von Symmetrien physikalischer Systeme.

Die komplexen Zahlen sind definiert als

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2. \quad (4.1)$$

Die erste Komponente a einer komplexen Zahl $(a, b) \in \mathbb{C}$ wird als *Realteil* bezeichnet. Man schreibt hierfür auch $\operatorname{Re}(a, b) = a$. Die Menge aller Realteile aller komplexen Zahlen wird hierbei mit den gewöhnlichen reellen Zahlen \mathbb{R} identifiziert. Die zweite Komponente b einer komplexen Zahl $(a, b) \in \mathbb{C}$ wird als

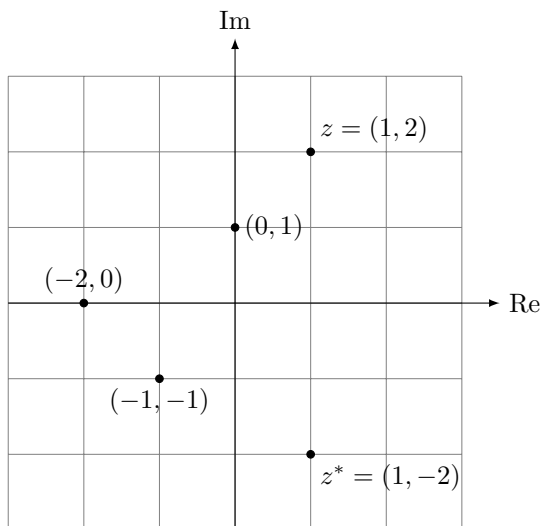


Abbildung 4.1: Darstellung komplexer Zahlen in der komplexen Zahlenebene.

Imaginärteil bezeichnet. Man schreibt hierfür auch $\text{Im}(a, b) = b$. Das Besitzen eines Imaginärteils stellt hierbei die wesentliche Erweiterung gegenüber den reellen Zahlen dar. Für zwei komplexe Zahlen $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind zudem die folgenden Verknüpfungen definiert:

$$\lambda(a, b) := (\lambda a, \lambda b), \quad (4.2)$$

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d), \quad (4.3)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc). \quad (4.4)$$

Für jede komplexe Zahl $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ wird die komplexe Zahl $z^* := (a, -b)$ als die zu z *konjugierte komplexe Zahl* bezeichnet.

Aufgrund der Definition (4.1) komplexer Zahlen als 2-er-Tupel, lässt sich jede komplexe Zahl in einer 2-dimensionalen Ebene, der sog. *komplexen Zahlenebene* darstellen. Hierbei wird der Realteil auf der horizontalen Achse (sog. *Realteilachse*) und der Imaginärteil auf der vertikalen Achse (sog. *Imaginärteilachse*) abgetragen. In Abbildung 4.1 sind einige komplexe Zahlen in der komplexen Zahlenebene dargestellt.

Aus den Definitionen (4.2) und (4.3) folgt, dass jede komplexe Zahl $(a, b) \in \mathbb{C}$ in der Form

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) \quad (4.5)$$

geschrieben werden kann. Die komplexe Zahl $i := (0, 1)$ wird als *imaginäre Einheit* bezeichnet. Identifiziert man die komplexe Zahl $(1, 0) =: 1$ mit der reellen Zahl $1 \in \mathbb{R}$, so folgt aus Gl. (4.5), dass jede komplexe Zahl $(a, b) \in \mathbb{C}$ in der Form

$$(a, b) = a + bi \quad (4.6)$$

geschrieben werden kann. Die Darstellung einer komplexen Zahl in der Form der rechten Seite von Gl. (4.6) wird als *algebraische Darstellung* bezeichnet. Aus der Definition (4.4) folgt zudem, dass

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = (-1)(1, 0) = -1. \quad (4.7)$$

Die Definition (4.4) und die daraus folgende Gl. (4.7) sind die entscheidenden Eigenschaften, die die komplexen Zahlen so nützlich machen. Mit ihrer Hilfe folgt beispielsweise, dass jedes Polynom vom Grad n genau n komplexwertige Nullstellen besitzt.

Beispiel 4.1 Das Polynom $p(z) = z^2 + 4$ besitzt die beiden komplexwertigen Nullstellen $z = \pm 2i$, denn

$$p(2i) = (2i)^2 + 4 = (2i) \cdot (2i) + 4 = 4i^2 + 4 = -4 + 4 = 0, \quad (4.8)$$

$$p(-2i) = (-2i)^2 + 4 = (-2i) \cdot (-2i) + 4 = 4i^2 + 4 = -4 + 4 = 0. \quad (4.9)$$

Die Eigenschaft (4.7) ist hierbei dafür verantwortlich, dass das Quadrat einer komplexen Zahl eine negative reelle Zahl ergeben kann.

Beispiel 4.2 Zur Bestimmung der komplexen Nullstellen eines quadratischen Polynoms kann die p - q -Formel (2.142) verwendet werden. Hierbei wird die Eigenschaft $-1 = i^2 \Leftrightarrow \sqrt{-1} = \pm i$ verwendet. Beispielsweise besitzt das Polynom $p(z) = z^2 + 2z + 2$ die beiden Nullstellen

$$z_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i, \quad (4.10)$$

d.h. $z_1 = -1 + i$ und $z_2 = -1 - i$.

Für eine beliebige komplexe Zahl $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ und ihre konjugierte komplexe Zahl $z^* = (a, -b) \in \mathbb{C}$ folgt allgemein

$$z^* z = (a, b) \cdot (a, -b) = (a^2 + b^2, ab - ab) = (a^2 + b^2, 0) = a^2 + b^2. \quad (4.11)$$

Der Ausdruck $a^2 + b^2 \geq 0$ entspricht dem quadratischen Abstand der komplexen Zahl vom Ursprung in der komplexen Zahlenebene. Dies führt zur Definition des Betrags $|z|$ einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ als

$$|z| := \sqrt{z^* z} = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (4.12)$$

Graphisch entspricht $|z|$ dem Abstand von z vom Ursprung der komplexen Zahlenebene. Mit dem Betrag einer komplexen Zahl lässt sich weiterhin das Inverse einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ wie folgt definieren:

$$\frac{1}{z} := \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{z^*}{z^* z}. \quad (4.13)$$

Damit kann nun wiederum die Division zweier komplexer Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ als

$$\frac{w}{z} := w \frac{1}{z} = w \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{wz^*}{z^* z} \quad (4.14)$$

definiert werden. Für zwei allgemeine komplexe Zahlen $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ und $w = (c, d) \in \mathbb{C}$ mit $z \neq (0, 0)$ ergibt sich

$$\frac{w}{z} = \frac{wz^*}{|z|^2} = \frac{(c + di)(a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - cb}{a^2 + b^2}i. \quad (4.15)$$

Beispiel 4.3 Sei $z = (2, -3) = 2 - 3i$ und $w = (1, 2) = 1 + 2i$. Dann ist $\operatorname{Re}(z) = 2$, $\operatorname{Im}(z) = -3$, $\operatorname{Re}(w) = 1$ und $\operatorname{Im}(w) = 2$. Zudem ist

$$z^* = 2 + 3i, \quad (4.16)$$

$$-2z = -2(2 - 3i) = (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot (-3i) = -4 + 6i, \quad (4.17)$$

$$z + w = (2 - 3i) + (1 + 2i) = (2 + 1) + (-3 + 2)i = 3 - i, \quad (4.18)$$

$$z - w = (2 - 3i) - (1 + 2i) = (2 - 1) + (-3 - 2)i = 1 - 5i, \quad (4.19)$$

$$zw = (2 - 3i)(1 + 2i) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (2i) + (-3i) \cdot 1 + (-3i) \cdot (2i) \quad (4.20)$$

$$= 2 + 4i - 3i - 6i^2 = 2 + 4i - 3i + 6 = 8 + i, \quad (4.21)$$

$$\frac{w}{z} = \frac{wz^*}{|z|^2} = \frac{(1 + 2i)(2 + 3i)}{|2 - 3i|^2} = \frac{2 + 4i + 3i + 6i^2}{\sqrt{2^2 + 3^2}^2} = \frac{2 + 7i - 6}{4 + 9} \quad (4.22)$$

$$= \frac{-4 + 7i}{13} = -\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i. \quad (4.23)$$

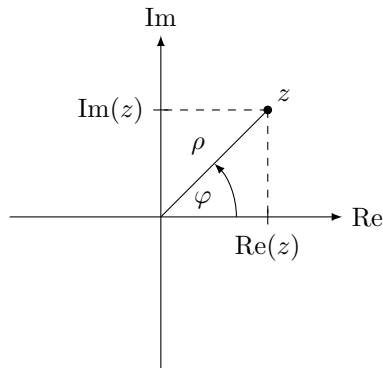


Abbildung 4.2: Polardarstellung einer komplexen Zahl in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 4.1 Berechnen Sie $1/i$.

Aufgabe 4.2 Zeigen Sie, dass für eine beliebige komplexe Zahl $z = (a, b) = a + ib$ die folgenden Relationen gelten:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*),$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*).$$

4.2 Polardarstellung komplexer Zahlen

Neben der algebraischen Darstellung einer komplexen Zahl gibt es noch die sog. *Polardarstellung*. In der Polardarstellung können komplexe Zahlen besonders einfach multipliziert und dividiert werden. Die Polardarstellung komplexer Zahlen eignet sich zudem besonders in Lösungsverfahren für lineare Differentialgleichungen.

Bei der Polardarstellung wird eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ durch ihren Betrag $\rho = |z|$ und den Winkel $\varphi = \arg(z)$ zwischen der Realteilachse und der Verbindungslinie vom Koordinatenursprung zur komplexen Zahl in der komplexen Zahlenebene dargestellt, siehe Abbildung 4.2. Für den Winkel wählen wir

$\varphi \in [0; 2\pi)$.¹ Der Realteil und der Imaginärteil einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ können durch den Betrag $\rho = |z|$ und den Phasenwinkel wie folgt ausgedrückt werden:

$$\operatorname{Re}(z) = \rho \cos(\varphi), \quad (4.24)$$

$$\operatorname{Im}(z) = \rho \sin(\varphi). \quad (4.25)$$

Damit folgt die sog. *trigonometrische Darstellung*

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) = \rho [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]. \quad (4.26)$$

Der Ausdruck $\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ lässt sich durch die Exponentialfunktion ausdrücken. Hierzu setzt man die Taylorreihen der Sinus- und Kosinusfunktionen in Gl. (4.26) ein und fasst beide Reihen zur Taylorreihe der Exponentialfunktion zusammen:

$$\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (4.27)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (4.28)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \quad (4.29)$$

$$= e^{ix}. \quad (4.30)$$

Hierbei wurde $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ und $i^{2k+1} = i \cdot i^{2k} = i(-1)^k$ verwendet. Damit ergibt sich die *Polardarstellung* von z zu

$$z = \rho e^{i\varphi}. \quad (4.31)$$

Eine komplexe Zahl z mit dem Betrag $\rho = |z| = 1$ besitzt folglich die Form $z = e^{i\varphi}$ und wird als *reine Phase* bezeichnet.

Beispiel 4.4 Sei $z = 2e^{i5\pi/4}$. Offenbar ist $\rho = 2$ und $\varphi = 5\pi/4$. Damit

¹Neben der Konvention $\varphi \in [0; 2\pi)$ gibt es weitere Konventionen, z.B. $\varphi \in [-\pi; \pi)$, die für bestimmte Anwendungen besonders nützlich sind.

besitzt z die algebraische Darstellung

$$z = \rho[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] \quad (4.32)$$

$$= 2 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right] \quad (4.33)$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad (4.34)$$

$$= -\sqrt{2} - i\sqrt{2}. \quad (4.35)$$

Aus dem Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl z kann über die Beziehung

$$\rho = \sqrt{[\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2} \quad (4.36)$$

der Betrag $\rho = |z|$ von z ermittelt werden. Um den Winkel $\varphi = \arg(z)$ zu ermitteln, bildet man das Verhältnis von Gln. (4.25) und (4.24) und erhält

$$\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi). \quad (4.37)$$

Mit der Umkehrfunktion \arctan der Tangensfunktion lässt sich hieraus der Winkel φ bestimmen, vgl. Kapitel 2.5.5. Hierbei muss jedoch beachtet werden, dass die Wertemenge der Arkustangensfunktion $W_{\arctan} = (-\pi/2; \pi/2)$ ist. Um den entsprechenden Winkel $\varphi \in [0; 2\pi)$ zu erhalten müssen je nach Quadrant vielfache von π addiert werden. So ergibt sich mit $a = \operatorname{Re}(z)$ und $b = \operatorname{Im}(z)$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{für } a > 0, b \geq 0 \text{ (1. Quadrant),} \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \text{ (2. Quadrant),} \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \text{ (3. Quadrant),} \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi & \text{für } a > 0, b < 0 \text{ (4. Quadrant),} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b > 0, \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } a = 0, b < 0, \\ \text{unbestimmt} & \text{für } a = 0, b = 0. \end{cases} \quad (4.38)$$

Sei $z = \rho e^{i\varphi}$ eine komplexe Zahl in Polardarstellung. Die zu z korrespondierende

konjugierte komplexe Zahl z^* ist durch

$$z^* = [\rho e^{i\varphi}]^* \quad (4.39)$$

$$= [\rho \cos(\varphi) + i\rho \sin(\varphi)]^* \quad (4.40)$$

$$= \rho \cos(\varphi) - i\rho \sin(\varphi) \quad (4.41)$$

$$= \rho \cos(-\varphi) + i\rho \sin(-\varphi) \quad (4.42)$$

$$= \rho e^{-i\varphi} \quad (4.43)$$

gegeben. Hierbei wurden die Symmetrierelationen $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$ und $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ verwendet.

Beispiel 4.5 Sei $z = -1 + i$. Die Zahl z liegt im 2-ten Quadranten der komplexen Zahlenebene. Der Betrag von z ergibt sich zu

$$\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}. \quad (4.44)$$

Da $\operatorname{Re}(z) < 0$ und $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ ergibt sich der Phasenwinkel von z zu.

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}. \quad (4.45)$$

Damit lautet die Polardarstellung von z

$$z = \sqrt{2} e^{i3\pi/4}. \quad (4.46)$$

Aufgabe 4.3 Zeigen Sie, dass $z = -1$ die Polardarstellung $z = e^{i\pi}$ besitzt.

Mithilfe der Polardarstellung können zwei komplexe Zahlen $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ auf sehr einfache Weise multipliziert und dividiert werden:

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (4.47)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (4.48)$$

Bei der Multiplikation werden die Beträge der Faktoren multipliziert und die Phasenwinkel der Faktoren addiert. Entsprechend werden bei der Division die Beträge von Dividend und Divisor dividiert und die Phasenwinkel subtrahiert. Hierbei wurde verwendet, dass $1/e^{i\varphi} = e^{-i\varphi}$. Die Multiplikation und Division komplexer Zahlen ist in Abbildung 4.3 graphisch dargestellt.

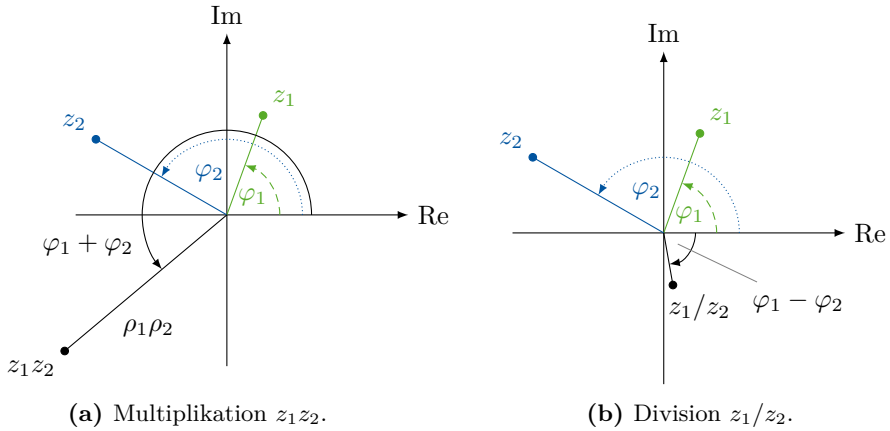


Abbildung 4.3: Visualisierung der Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$.

Beispiel 4.6 Sei $z_1 = 2e^{i\pi/4}$ und $z_2 = 3e^{i\pi/2}$. Dann ergibt sich das Produkt von z_1 und z_2 zu

$$z_1 z_2 = 2e^{i\pi/4} 3e^{i\pi/2} = 6e^{i(\pi/4+\pi/2)} = 6e^{i3\pi/4}. \quad (4.49)$$

Für den Quotienten von z_1 und z_2 ergibt sich

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\pi/4}}{3e^{i\pi/2}} = \frac{2}{3}e^{i(\pi/4-\pi/2)} = \frac{2}{3}e^{-i\pi/4} = \frac{2}{3}e^{i7\pi/4}. \quad (4.50)$$

Hierbei wurde im letzten Schritt 2π zum Phasenwinkel addiert, damit der Phasenwinkel im Intervall $[0; 2\pi)$ liegt.

Beispiel 4.7 Mithilfe der Polardarstellung kann sehr einfach geprüft werden, dass eine reine Phase, d.h. eine komplexe Zahl der Form $z = e^{i\varphi}$ den Betrag 1 besitzt:

$$|z| = \sqrt{z^* z} = \sqrt{e^{-i\varphi} e^{i\varphi}} = \sqrt{e^{i(\varphi-\varphi)}} = \sqrt{e^0} = \sqrt{1} = 1. \quad (4.51)$$

Beispiel 4.8 Mithilfe der Polardarstellung können Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen bewiesen werden. Betrachte dazu den Ausdruck

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y) \quad (4.52)$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$. Andererseits gilt

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} \quad (4.53)$$

$$= [\cos(x) + i \sin(x)][\cos(y) + i \sin(y)] \quad (4.54)$$

$$= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) + i[\sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)]. \quad (4.55)$$

Durch Vergleich der Real- und Imaginärteile beider Ausdrücke ergeben sich die beiden Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y), \quad (4.56)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y). \quad (4.57)$$

Ersetzt man $y \rightarrow -y$ und verwendet die Symmetrierelationen von Kosinus und Sinus, so ergibt sich daraus

$$\cos(x-y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y), \quad (4.58)$$

$$\sin(x-y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y). \quad (4.59)$$

Aufgabe 4.4 Stellt $z = -e^{i\pi/2}$ die Polardarstellung einer komplexen Zahl dar? Begründen Sie Ihre Antwort. Falls Sie der Meinung sind, dass dies nicht der Fall ist, geben Sie die Polardarstellung von z an.

4.3 Komplexe Wurzel

Die komplexen Zahlen ermöglichen in einem gewissen Sinne die Berechnung von Wurzeln aus negativen reellen Zahlen. Sei hierzu $z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ verschiedene Zahlen $w_k \in \mathbb{C}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), die die Gleichung

$$w_k^n = z \quad (4.60)$$

lösen. Diese Lösungen heißen die *n-ten Wurzeln aus z* und sind gegeben durch

$$w_k = |z|^{1/n} e^{i\alpha_k} \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}. \quad (4.61)$$

Dass die Wurzeln w_k die Gl. (4.60) lösen, kann durch Einsetzen gezeigt werden:

$$w_k^n = \left(|z|^{1/n} e^{i\alpha_k} \right)^n = |z| e^{in\alpha_k} = |z| e^{i(\varphi+2\pi k)} = |z| e^{i\varphi} = z. \quad (4.62)$$

Aus Gl. (4.61) kann man erkennen, dass alle n Wurzeln aus z den selben Betrag $|z|^{1/n}$ besitzen. Die n Wurzeln aus z liegen folglich auf einem Kreis mit dem Radius $|z|^{1/n}$, dessen Kreismittelpunkt sich im Ursprung der komplexen Zahlenebene befindet. Die Differenz der Phasenwinkel zweier benachbarter Wurzeln ist konstant, d.h. unabhängig von k , $\alpha_{k+1} - \alpha_k = 2\pi/n$. Folglich bilden die n Wurzeln von z die Eckpunkte regelmäßigen Polygons.

Beispiel 4.9 Wir betrachten die Gleichung $w^6 = z$ mit $z = -64 = 64 e^{i\pi}$. Die Gleichung besitzt die sechs verschiedene Lösungen $w_k \in \mathbb{C}$ ($k = 0, 1, \dots, 5$) mit

$$w_k = 2 e^{i\alpha_k} \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \frac{\pi + 2\pi k}{6} = \frac{\pi}{6}(1 + 2k). \quad (4.63)$$

Damit ergeben sich die sechs Wurzeln

$$w_k = 2 e^{i\pi(1+2k)/6}. \quad (4.64)$$

bzw.

$$k = 0 : \quad w_0 = 2 e^{i\pi/6}, \quad (4.65)$$

$$k = 1 : \quad w_1 = 2 e^{i\pi/2}, \quad (4.66)$$

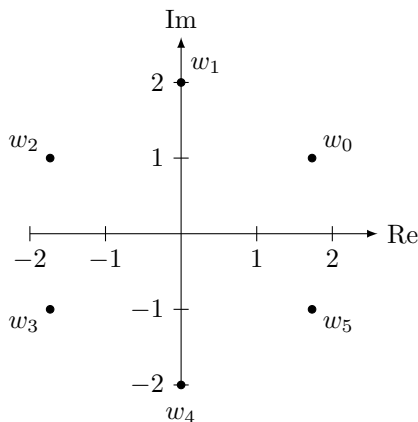
$$k = 2 : \quad w_2 = 2 e^{i5\pi/6}, \quad (4.67)$$

$$k = 3 : \quad w_3 = 2 e^{i7\pi/6}, \quad (4.68)$$

$$k = 4 : \quad w_4 = 2 e^{i3\pi/2}, \quad (4.69)$$

$$k = 5 : \quad w_5 = 2 e^{i11\pi/6} \quad (4.70)$$

Die sechs Wurzeln sind in der folgenden Abbildung dargestellt.



4.4 Komplexwertige Funktionen mit komplexen Argumenten

Die Untersuchung von Funktionen mit Definitions- und Wertemengen aus \mathbb{C} ist Gegenstand des mathematischen Teilgebietes der Funktionentheorie. Wir werden im Folgenden einige komplexwertige Funktionen mit komplexen Argumenten genauer betrachten.

Die reelle Exponentialfunktion \exp wurde in Kapitel 3 über die Reihe (3.2) definiert. Sie kann entsprechend auf $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ verallgemeinert werden

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: e^z. \quad (4.71)$$

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit den Potenzgesetzen hieraus

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x [\cos(y) + i \sin(y)]. \quad (4.72)$$

Entsprechend lassen sich die Sinus- und Kosinusfunktionen über Ihre Reihendarstellung auf die komplexen Zahlen verallgemeinern:

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad (4.73)$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (4.74)$$

Hieraus ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und den Hyperbelfunktionen, wenn die Sinusfunktion an der Stelle $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$ ausgewertet wird:

$$\sin(z) = \sin(iy) \quad (4.75)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (4.76)$$

$$= i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k} y^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (4.77)$$

$$= i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (4.78)$$

$$= i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (4.79)$$

$$= i \sinh(y). \quad (4.80)$$

Hierbei wurde die Reihendarstellung der Sinus hyperbolicus aus Gl. (3.51) verwendet.

Aufgabe 4.5 Zeigen Sie, dass $\cos(iy) = \cosh(y)$ für $y \in \mathbb{R}$.

Kapitel 5

Differentialgleichungen

5.1	Differentialgleichungen	160
5.2	Differentialgleichungen 1-ter Ordnung	162
5.2.1	Richtungsfeld	163
5.2.2	Separable Differentialgleichungen	164
5.2.3	Lineare Differentialgleichungen	169
5.2.4	Nicht-lineare Differentialgleichungen	174
5.3	Differentialgleichungen n-ter Ordnung	175
5.3.1	Homogene lineare Differentialgleichung	176
5.3.2	Inhomogene lineare Differentialgleichung	178
5.4	Anwendungen	181
5.4.1	Gedämpfter harmonischer Oszillator	181
5.4.2	Getriebener gedämpfter harmonischer Oszillator	185

Im Rahmen der theoretischen Physik wird das zeitliche und räumliche Verhalten physikalischer Systeme mathematisch beschrieben. Für diese Beschreibung werden Funktionen verwendet. Diese Funktionen beschreiben die Abhängigkeit physikalischer Größen (z.B. Energie, Temperatur, elektrisches Feld, etc.) von der Zeit an verschiedenen Orten. Die genaue Form dieser Funktionen wird durch die fundamentalen physikalischen Gesetze sowie die Eigenschaften des Systems festgelegt. Die physikalischen Gesetze müssen daher mathematisch so formuliert werden, dass sie die das System beschreibenden Funktionen eindeutig festlegen. Mathematisch wird dies durch sog. *Differentialgleichungen* mit entsprechenden Anfangs- bzw. Randbedingungen realisiert. Eine Differentialgleichung (DGL) ist also eine Gleichung, die *Funktionen* festlegt. Eine Differentialgleichung zu lösen bedeutet, die durch sie bestimmten Funktionen zu ermitteln. Das Besondere an einer Differentialgleichung ist hierbei, dass sie die Funktion und Ableitungen der Funktion enthält. Eine Differentialgleichung kann daher nicht einfach durch „Umstellen nach der Funktion“ gelöst werden. Stattdessen sind

spezielle Methoden nötig, um die durch eine Differentialgleichung bestimmten Funktionen zu ermitteln.

Eine zentrale Differentialgleichung in der klassischen Mechanik ist die (hier 1-dimensionale) Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t), \quad (5.1)$$

vgl. Gl. (1.3), Kapitel 1.2. Sie stellt eine Gleichung dar, durch die die Funktion $x(t)$ festgelegt ist, die den Ort x eines betrachteten Massepunktes in Abhängigkeit der Zeit t beschreibt. Sind die auf das System wirkenden Kräfte $F(x(t), \dot{x}(t), t)$ bekannt, so kann die Funktion $x(t)$ aus der Newtonschen Bewegungsgleichung (5.1) (analytisch oder numerisch) ermittelt werden. (Um die Funktion $x(t)$ eindeutig festzulegen, sind neben der Angabe der Differentialgleichung noch Anfangs- bzw. Randbedingungen nötig.) Beispielsweise wurde in Beispiel 1.2 ein Massepunkt betrachtet, auf den ausschließlich die Federkraft $F(x(t), \dot{x}(t), t) = -kx(t)$ mit $k > 0$ wirkt. Die den Ort des Massepunktes beschreibende Differentialgleichung lautet damit

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t). \quad (5.2)$$

Diese Gleichung wird z.B. durch die Funktion

$$x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0\right) \quad (5.3)$$

gelöst. Hierbei sind A und φ_0 Konstanten, die durch entsprechende Anfangs- bzw. Randbedingungen festgelegt sind.

Die Bestimmung der Lösungen einer Differentialgleichung ist i.A. nicht-trivial. In diesem Kapitel werden daher Methoden vorgestellt, um bestimmte Typen von Differentialgleichungen zu lösen, d.h. die durch sie beschriebenen Funktionen zu ermitteln. Hierbei beschränken wir uns auf Funktionen, die nur von einer Veränderlichen abhängen und durch sog. *gewöhnliche Differentialgleichungen* beschrieben werden.

5.1 Differentialgleichungen

Zunächst werden einige wichtige Begriffe im Zusammenhang mit Differentialgleichungen eingeführt.

Definition 5.1 Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bis einschließlich n -ter Ordnung auftreten ($n \in \mathbb{N}$), heißt *gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) n -ter Ordnung*:

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x)) = 0. \quad (5.4)$$

Beispiel 5.1 Die folgende Gleichung stellt eine gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung dar:

$$\frac{x}{f(x)} + x^2 f'(x) + [f''(x)]^2 = 0. \quad (5.5)$$

Hierbei ist

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x)) = \frac{x}{f(x)} + x^2 f'(x) + [f''(x)]^2. \quad (5.6)$$

Definition 5.2 Die *allgemeine Lösung einer Differentialgleichung* ist die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die die Differentialgleichung auf ihrem Definitionsbereich erfüllen.

Beispiel 5.2 Die Differentialgleichung $f'(x) - f(x) = 0$ besitzt die allgemeine Lösung $f(x) = ce^x$ mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$.

Meistens wird eine Differentialgleichung nicht nur durch eine einzige Funktion gelöst, sondern es gibt eine ganze Klasse von Funktionen, die die Differentialgleichung erfüllen. Durch die Vorgabe von zusätzlichen Bedingungen an die Lösungen, kann die Lösung auf eine einzige Funktion eingeschränkt werden. Diese Bedingungen sind zumeist die Vorgabe der Funktionswerte der Lösungsfunktion und/oder ihren Ableitungen an bestimmten Stellen. Die Differentialgleichung, zusammen mit entsprechenden Bedingungen an die Funktionswerte, wird als Anfangs- bzw. Randwertproblem bezeichnet.

Definition 5.3 Eine gewöhnliche DGL n -ter Ordnung für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zusammen mit n vorgegebenen Werten y_k der Funktionen $f^{(k)}$ an einer Stelle x_0 ($k \in \{0, \dots, n-1\}$),

$$f(x_0) = y_0, \quad f'(x_0) = y_1, \quad f''(x_0) = y_2, \quad \dots, \quad f^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (5.7)$$

heißt *Anfangswertproblem* (AWP).

Beispiel 5.3 Sei $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Die folgende gewöhnliche DGL 2-ter Ordnung sowie die Vorgabe von Werten für $x(0\text{ s})$ und $\dot{x}(0\text{ s})$ stellt ein Anfangswertproblem dar:

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0, \quad x(0\text{ s}) = 1\text{ m}, \quad \dot{x}(0\text{ s}) = 0\text{ m s}^{-1}. \quad (5.8)$$

Dieses Anfangswertproblem entspricht der Vorgabe des Ortes x und der Geschwindigkeit \dot{x} zum selben Zeitpunkt $t_0 = 0\text{ s}$.

Definition 5.4 Eine gewöhnliche DGL n -ter Ordnung für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zusammen mit insgesamt n vorgegebenen Werten y_k der Funktionen $f^{(k)}$ an mindestens zwei verschiedenen Stellen x_0 und $x_1 \neq x_0$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$), z.B.

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad f'(x_0) = y_2, \quad \dots, \quad f^{(n-1)}(x_1) = y_{n-1} \quad (5.9)$$

heißt *Randwertproblem*.

Beispiel 5.4 Sei $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Die folgende gewöhnliche DGL 2-ter Ordnung sowie die Vorgabe von Werten für $x(0\text{ s})$ und $x(1\text{ s})$ stellt ein Randwertproblem dar:

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0, \quad x(0\text{ s}) = 1\text{ m}, \quad x(1\text{ s}) = 0\text{ m}. \quad (5.10)$$

Dieses Randwertproblem entspricht der Vorgabe des Ortes x zu zwei verschiedenen Zeitpunkten $t_1 = 0\text{ s}$ und $t_2 = 1\text{ s}$.

5.2 Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

In diesem Kapitel betrachten wir (gewöhnliche) Differentialgleichungen 1-ter Ordnung der Form

$$f'(x) = R(x, f(x)), \quad (5.11)$$

wobei $R(x, y)$ eine zunächst beliebige Funktion von zwei Veränderlichen ist. Für bestimmte Typen von Funktionen $R(x, y)$ gibt es bekannte Lösungsmethoden, die in diesem Kapitel vorgestellt werden.

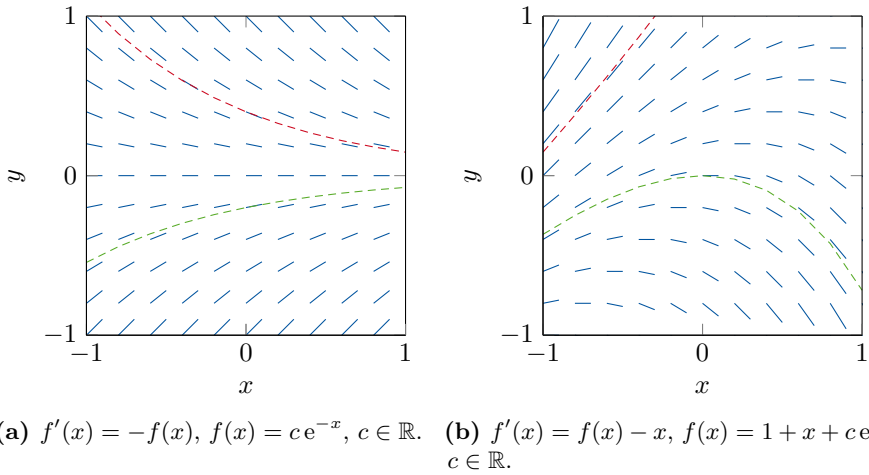


Abbildung 5.1: Richtungsfelder zweier Differentialgleichungen (blau). In jedem Richtungsfeld sind zwei Lösungsfunktionen eingezeichnet (rot und grün).

5.2.1 Richtungsfeld

Die Lösungen der DGL (5.11) lassen sich mit einem sog. *Richtungsfeld* visualisieren. Hierbei wird ein 2-dimensionales Diagramm betrachtet, auf dessen horizontaler Achse der Wert der Veränderlichen x und auf dessen vertikaler Achse der Funktionswert $y = f(x)$ aufgetragen wird. An jedem Punkt (x, y) in dem Diagramm wird ein kurzer Strich (Teilstück einer Gerade) eingezeichnet, dessen Steigung der rechten Seite von Gl. (5.11) entspricht. Der Strich am Punkt (x, y) ist tangential an die Graphen der Lösungsfunktion, die durch diesen Punkt verläuft. Das Richtungsfeld zeigt somit die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Wird ein fester Punkt $(x_0, y_0 = f(x_0))$ in Form einer Anfangsbedingung vorgegeben, so wird eine eindeutige Lösung aus der Klasse der Lösungsfunktionen ausgewählt. Dies entspricht der Auswahl einer bestimmten Trajektorie in dem 2-dimensionalen Richtungsfeld.

In Abbildung 5.1 sind zwei Beispiele für Richtungsfelder zusammen mit jeweils zwei Lösungsfunktionen dargestellt. Abbildung 5.1a zeigt das Richtungsfeld für $R(x, y) = -y$. Die allgemeine Lösung der entsprechenden Differentialgleichung ist $f(x) = ce^{-x}$ mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$. Man erkennt, dass das Richtungsfeld tangential zu die beiden eingezeichneten Lösungsfunktionen verläuft. Abbildung 5.1b zeigt das Richtungsfeld für $R(x, y) = y - x$. Die allge-

meine Lösung der entsprechenden Differentialgleichung ist $f(x) = 1 + x + c e^x$ mit $c \in \mathbb{R}$.

5.2.2 Separable Differentialgleichungen

Als ersten speziellen Typ gewöhnlicher Differentialgleichungen betrachten wir sog. *separable* Differentialgleichungen. Eine gewöhnliche Differentialgleichung 1-ter Ordnung für eine Funktion f in der Form von Gl. (5.11) heißt *separabel*, wenn $R(x, y) = g(x)h(y)$ gilt, wobei g und h zwei Funktionen sind. Eine separable Differentialgleichung besitzt somit die Form

$$f'(x) = g(x)h(f(x)). \quad (5.12)$$

Eine separable Differentialgleichung ist also dadurch ausgezeichnet, dass sich die rechte Seite von Gl. (5.12) als Produkt zweier Funktionen schreiben lässt, wobei eine der Funktionen ausschließlich von der Veränderlichen x und die andere Funktion ausschließlich von der Funktion f abhängt.

Beispiel 5.5 Die Differentialgleichung $f'(x) = -[f(x)]^2$ ist separabel, denn $R(x, y) = -y^2 = g(x)h(y)$ mit $g(x) = 1$ und $h(y) = -y^2$.

Beispiel 5.6 Die Differentialgleichung $f'(x) = f(x) - x$ ist nicht separabel, denn $R(x, y) = y - x$ kann nicht als ein Produkt der Form $g(x)h(y)$ geschrieben werden.

Separable Differentialgleichungen können mit der Methode *Trennung der Variablen* (TdV) gelöst werden. Hierzu wird in einem ersten Schritt Gl. (5.12) durch $h(f(x)) \neq 0$ dividiert. Es ergibt sich

$$\frac{1}{h(f(x))} f'(x) = g(x). \quad (5.13)$$

Im zweiten Schritt wird die entstandene Gl. (5.13) über x integriert, d.h.

$$\int \frac{1}{h(f(x))} f'(x) dx = \int g(x) dx. \quad (5.14)$$

Die linke Seite von Gl. (5.14) kann mit der Substitution $y = f(x)$ wie folgt umgeformt werden, vgl. Gl. (2.381):

$$\int \frac{1}{h(y)} dy \Big|_{y=f(x)} = \int g(x) dx. \quad (5.15)$$

Wenn \tilde{H} eine Stammfunktion von $1/h$ ist (linke Seite von Gl. (5.15)) und G eine Stammfunktion von g ist (rechte Seite von Gl. (5.15)), dann kann Gl. (5.15) in der Form

$$\tilde{H}(y) \Big|_{y=f(x)} = \tilde{H}(f(x)) = G(x) + c \quad (5.16)$$

geschrieben werden, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Integrationskonstante ist. Durch Umstellen von Gl. (5.16) nach $f(x)$ ergibt sich schließlich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$f(x) = \tilde{H}^{-1}(G(x) + c). \quad (5.17)$$

Hierbei wurde angenommen, dass die Funktionsgleichung für die Umkehrfunktion \tilde{H}^{-1} von \tilde{H} analytisch angegeben werden kann. Anstelle eines unbestimmten Integrals, kann Gl. (5.13) auch über ein festes Intervall $[x_0; x]$ integriert werden. In diesem Fall ergibt sich

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{h(f(u))} f'(u) \, du = \int_{x_0}^x g(u) \, du. \quad (5.18)$$

Hierbei wurde die Integrationsvariable mit u bezeichnet, um eine Verwechslung mit der oberen Integrationsgrenze zu vermeiden. Unter Verwendung der Substitutionsregel folgt aus Gl. (5.18)

$$\int_{f(x_0)}^{f(x)} \frac{1}{h(y)} \, dy = \int_{x_0}^x g(u) \, du. \quad (5.19)$$

Integration analog zu Gl. (5.16) liefert

$$\tilde{H}(f(x)) - \tilde{H}(f(x_0)) = G(x) - G(x_0). \quad (5.20)$$

Umstellen nach $f(x)$ führt auf die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$f(x) = \tilde{H}^{-1}\left(G(x) - G(x_0) + \tilde{H}(f(x_0))\right). \quad (5.21)$$

Gl. (5.21) ist analog zu Gl. (5.17), wobei $c = \tilde{H}(f(x_0)) - G(x_0)$. Durch Ableitung können wir uns davon überzeugen, dass Gl. (5.21) tatsächlich die

Differentialgleichung (5.12) löst:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \tilde{H}^{-1} \left(G(x) - G(x_0) + \tilde{H}(f(x_0)) \right) \quad (5.22)$$

$$= (\tilde{H}^{-1})' \left(G(x) - G(x_0) + \tilde{H}(f(x_0)) \right) G'(x) \quad (5.23)$$

$$= (\tilde{H}^{-1})' \left(\tilde{H}(f(x)) \right) g(x) \quad (5.24)$$

$$= \frac{1}{\tilde{H}'(f(x))} g(x) \quad (5.25)$$

$$= h(f(x))g(x). \quad (5.26)$$

Hierbei wurde in der zweiten Zeile die Kettenregel verwendet. In der dritten Zeile wurde Gl. (5.20) benutzt. In der vierten Zeile wurde die Ableitung der Umkehrfunktion aus Gl. (2.315) verwendet. In der letzten Zeile wurde verwendet, dass \tilde{H} eine Stammfunktion von $1/h$ ist, d.h. $\tilde{H}'(x) = 1/h(x)$.

Beispiel 5.7 Wir betrachten die Differentialgleichung $f'(x) = -af(x)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Für die Funktion f soll die Anfangsbedingung $f(x_0) = y_0$ gelten. Durch Umstellen der Differentialgleichung und anschließende Integration ergibt sich

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -a \quad (5.27)$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^x \frac{f'(u)}{f(u)} du = -a \int_{x_0}^x du \quad (5.28)$$

$$\Leftrightarrow \int_{f(x_0)}^{f(x)} \frac{1}{y} dy = -a(x - x_0) \quad (5.29)$$

$$\Leftrightarrow \ln |f(x)| - \ln |f(x_0)| = -a(x - x_0) \quad (5.30)$$

$$\Leftrightarrow \ln |f(x)| = \ln |f(x_0)| - a(x - x_0) \quad (5.31)$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| = \exp[\ln |f(x_0)|] \exp[-a(x - x_0)] \quad (5.32)$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| = |f(x_0)| e^{-a(x-x_0)}. \quad (5.33)$$

Aus der letzten Gleichung folgt zunächst $f(x) = \pm f(x_0) e^{-a(x-x_0)}$. Damit die Gleichung für $x = x_0$ erfüllt ist, muss das positive Vorzeichen gewählt werden. Mit der Anfangsbedingung ergibt sich damit die Lösung

$$f(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)}. \quad (5.34)$$

Beispiel 5.8 Wir betrachten die Differentialgleichung $f'(x) = x[f^2(x) + 1]$ mit der Anfangsbedingung $f(x_0) = y_0$. Durch Umstellen und Integration ergibt sich analog zum vorherigen Beispiel

$$\int_{y_0}^{f(x)} \frac{1}{u^2 + 1} du = \int_{x_0}^x u du \quad (5.35)$$

$$\Leftrightarrow \arctan[f(x)] - \arctan(y_0) = \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) \quad (5.36)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \tan \left[\arctan(y_0) + \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) \right]. \quad (5.37)$$

Beispiel 5.9 Ein Massepunkt bewege sich auf einer Geraden mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$. Der Massepunkt sei sehr groß und von Luft umgeben, so dass auf ihn die (Newtonsche) Reibungskraft $\vec{F} = -c\vec{v}(t)|\vec{v}(t)|$ wirkt. Hierbei ist $c > 0$ eine Konstante mit der Dimension Kraft pro Geschwindigkeit zum Quadrat. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass sich der Körper entlang der x -Achse in positive x -Achsenrichtung bewegt. Damit ist $\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{e}_1$ mit einer skalaren Funktion $v_x(t)$, die die Geschwindigkeit in x -Richtung beschreibt. Zum Zeitpunkt t_0 sei $v_x(t_0) = v_0$. Aus den 2-ten Newtonschen Gesetz folgt für 1-dimensionale Beschreibung

$$m\dot{v}_x(t) = -cv_x^2(t). \quad (5.38)$$

Mit der Methode der Trennung der Variablen ergibt sich

$$m \frac{\dot{v}_x(t)}{v_x^2(t)} = -c \quad (5.39)$$

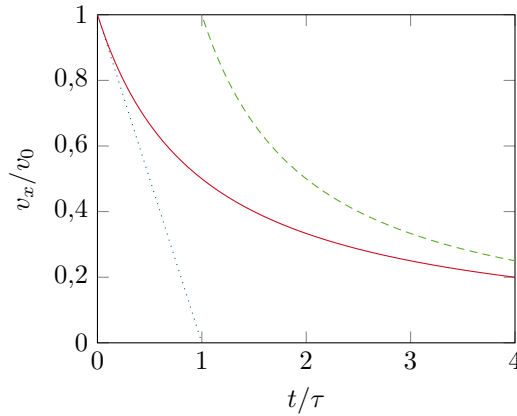
$$\Leftrightarrow m \int_{t_0}^t \frac{\dot{v}_x(t)}{v_x^2(t)} dt = -c \int_{t_0}^t dt \quad (5.40)$$

$$\Leftrightarrow m \int_{v_0}^{v_x(t)} u^{-2} du = -c \int_{t_0}^t dt \quad (5.41)$$

$$\Leftrightarrow -m[v_x^{-1}(t) - v_0^{-1}] = -c(t - t_0) \quad (5.42)$$

$$\Leftrightarrow v_x(t) = \frac{v_0}{1 + (t - t_0)/\tau} \quad (5.43)$$

mit $\tau = m/(cv_0)$. Die Funktion $v_x(t)$ ist für $t_0 = 0$ in der folgenden Abbildung in rot dargestellt.



Für $t \ll \tau$ ist die Taylorentwicklung von $v_x(t)$ durch $v_x(t) = 1 - t/\tau + \mathcal{O}([t/\tau]^2)$ gegeben. Für Zeiten, die klein im Vergleich zu τ sind, fällt die Geschwindigkeit in x -Richtung daher linear mit der Zeit ab (blauer Graph in obiger Abbildung). Für $t \gg \tau$ geht die Geschwindigkeit wie $v(t)/v_0 \approx \tau/t$ gegen Null (grüner Graph in obiger Abbildung).

In der Literatur findet man häufig eine Merkregel, mit der die Verwendung der Kettenregel bei der Integration übersprungen werden kann. Hierzu betrachten wir noch einmal die Differentialgleichung (5.12). Bezeichnet man $y = f(x)$, so kann die Differentialgleichung mit der Leibnitzschreibweise für die Ableitung in der Form

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad (5.44)$$

geschrieben werden. Die Merkregel besteht nun darin, dass man den Differentialquotienten auf der linken Seite von Gl. (5.44) als einen Bruch zweier (endlicher) Differentiale im Sinne von Gl. (2.234) auffasst. Durch Multiplikation mit dx und Division durch $h(y) \neq 0$ folgt damit die Gleichung

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx. \quad (5.45)$$

Durch Hinzufügen des Integralzeichens auf beiden Seiten ergibt sich daraus

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx. \quad (5.46)$$

Gl. (5.46) ist im Sinne von Gl. (5.15) zu verstehen, d.h. auf der linken Seite von Gl. (5.46) muss nach der Integration y durch $f(x)$ ersetzt werden. Man

verfährt nun weiter wie oben und erhält die allgemeine Lösung (5.17). Anstelle eines unbestimmten Integrals kann in Gl. (5.46) auch ein bestimmtes Integral verwendet werden,

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{h(u)} du = \int_{x_0}^x g(u) du. \quad (5.47)$$

Hierbei wurde die Integrationsvariable in u umbenannt, um eine Verwechslung mit den Integrationsgrenzen zu vermeiden. Gl. (5.47) ist identisch zu Gl. (5.19), wobei in Gl. (5.47) die Integrationsgrenzen als $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$ zu verstehen sind.

5.2.3 Lineare Differentialgleichungen

Als zweiten speziellen Typ gewöhnlicher Differentialgleichungen 1-ter Ordnung betrachten wir *lineare* Differentialgleichungen. Eine gewöhnliche Differentialgleichung 1-ter Ordnung für eine Funktion f in der Form von Gl. (5.11) heißt *linear*, wenn $R(x, y) = a(x)f(x) + g(x)$ gilt, wobei a und g zwei reelle Funktionen sind. Eine lineare Differentialgleichung 1-ter Ordnung besitzt somit die Form

$$f'(x) = a(x)f(x) + g(x). \quad (5.48)$$

Ist $\forall x : g(x) = 0$, so wird die Differentialgleichung als *homogen* bezeichnet. Andernfalls wird die Differentialgleichung als *inhomogen* bezeichnet. Die Funktion $g(x)$ wird entsprechend als *Inhomogenität* bezeichnet.

Homogene lineare Differentialgleichungen

Eine lineare, homogene Differentialgleichung 1-ter Ordnung besitzt die Form

$$f'(x) = a(x)f(x). \quad (5.49)$$

Die Differentialgleichung (5.49) ist separabel und kann mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden, siehe Kapitel 5.2.2. Bezeichnet man mit A die Stammfunktion von a , so ergibt sich

$$\int_{f(x_0)}^{f(x)} \frac{1}{u} du = \int_{x_0}^x a(u) du \quad (5.50)$$

$$\Leftrightarrow \ln |f(x)| - \ln |f(x_0)| = A(x) - A(x_0) \quad (5.51)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) e^{A(x) - A(x_0)}. \quad (5.52)$$

Beispiel 5.10 Wir betrachten die lineare, homogene Differentialgleichung 1-ter Ordnung $f'(x) = 2xf(x)$. Hierbei ist $a(x) = 2x$ und $A(x) = x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Für f gelte die Anfangsbedingung $f(x_0) = 2$ mit $x_0 = 1$. Somit lautet die allgemeine Lösung

$$f(x) = 2e^{x^2-1}. \quad (5.53)$$

Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Inhomogene lineare Differentialgleichungen 1-ter Ordnung der Form (5.48) sind nicht separabel. Folglich kann die Methode der Trennung der Variablen aus Kapitel 5.2.2 nicht angewendet werden. Um dennoch die allgemeine Lösung von Gl. (5.48) zu finden, nutzt man die folgende Beobachtung: Gl. (5.48) entspricht einer homogenen linearen DGL, zu der eine Inhomogenität $g(x)$ addiert wurde. Die allgemeine Lösung von Gl. (5.48) besitzt daher die Form

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x). \quad (5.54)$$

Hierbei ist f_h die allgemeine Lösung der homogenen DGL (5.49), d.h. für f_h gilt

$$f'_h(x) = a(x)f_h(x). \quad (5.55)$$

Die Funktion f_p ist eine spezielle (auch: partikuläre) Lösung der inhomogenen DGL (5.48), d.h. für f_p gilt

$$f'_p(x) = a(x)f_p(x) + g(x). \quad (5.56)$$

Dass die Funktion f aus Gl. (5.54) die inhomogene Differentialgleichung (5.48) löst, lässt sich durch Einsetzen prüfen:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[f_h(x) + f_p(x)] \quad (5.57)$$

$$= f'_h(x) + f'_p(x) \quad (5.58)$$

$$= a(x)f_h(x) + a(x)f_p(x) + g(x) \quad (5.59)$$

$$= a(x)[f_h(x) + f_p(x)] + g(x) \quad (5.60)$$

$$= a(x)f(x) + g(x). \quad (5.61)$$

In der Tatsache, dass die (inhomogene) Differentialgleichung (5.48) linear ist, liegt der Grund dafür, dass die Summe aus der allgemeinen Lösung f_h der homogenen DGL und einer speziellen Lösung f_p der inhomogenen DGL die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL darstellt.

Aufgabe 5.1 Die Funktion f_p stellt eine Lösung der inhomogenen DGL (5.48) dar. Erläutern Sie, warum es dennoch nicht genügt, ausschließlich f_p zu bestimmen. Erläutern Sie also, warum erst die Summe $f_h + f_p$ die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL (5.48) darstellt.

Um die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL (5.48) zu bestimmen, muss also f_h und f_p bestimmt werden. Die Funktion f_h kann mit der in Methode der Trennung der Variablen bestimmt werden, wie im vorherigen Abschnitt dargestellt. Um f_p zu bestimmen, verwendet man einen geschickten Ansatz: Die Funktionsgleichung für f_p besitzt die Form von f_h , wobei die Integrationskonstante $f(x_0)$ durch eine (noch unbekannte) Funktion $k(x)$ ersetzt wird, d.h.

$$f_p(x) = k(x) e^{A(x)-A(x_0)}. \quad (5.62)$$

Dieser Ansatz wird als *Variation der Konstanten* (VdK) bezeichnet. Durch Einsetzen von f_p in die inhomogene Differentialgleichung (5.48) ergibt sich eine neue Differentialgleichung, aus der die Funktion k bestimmt werden kann:

$$\frac{df_p(x)}{dx} = a(x)f_p(x) + g(x) \quad (5.63)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left[k(x) e^{A(x)-A(x_0)} \right] = a(x)k(x) e^{A(x)-A(x_0)} + g(x) \quad (5.64)$$

$$\Leftrightarrow k'(x) e^{A(x)-A(x_0)} + a(x)k(x) e^{A(x)-A(x_0)} = a(x)k(x) e^{A(x)-A(x_0)} + g(x) \quad (5.65)$$

$$\Leftrightarrow k'(x) e^{A(x)-A(x_0)} = g(x) \quad (5.66)$$

$$\Leftrightarrow k'(x) = g(x) e^{A(x_0)-A(x)} \quad (5.67)$$

$$\Leftrightarrow k(x) = \int_{x_0}^x g(u) e^{A(x_0)-A(u)} du. \quad (5.68)$$

Hierbei wurde auf der linken Seite im ersten Schritt die Produktregel verwendet. Im zweiten Schritt wurde die Kettenregel und $A'(x) = a(x)$ benutzt. Einsetzen

von $k(x)$ in den Ansatz für f_p liefert die partikuläre Lösung

$$f_p(x) = \left(\int_{x_0}^x g(u) e^{A(x_0)-A(u)} du \right) e^{A(x)-A(x_0)} \quad (5.69)$$

$$= \left(\int_{x_0}^x g(u) e^{A(x_0)} e^{-A(u)} du \right) e^{A(x)} e^{-A(x_0)} \quad (5.70)$$

$$= \left(\int_{x_0}^x g(u) e^{-A(u)} du \right) e^{A(x)}. \quad (5.71)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (5.48) lautet damit

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) \quad (5.72)$$

$$= f(x_0) e^{A(x)-A(x_0)} + \left(\int_{x_0}^x g(u) e^{-A(u)} du \right) e^{A(x)}. \quad (5.73)$$

Beispiel 5.11 Wir betrachten einen Massepunkt der Masse m , der sich ausschließlich auf einer vertikalen Achse bewegen kann. Auf den Massepunkt wirken die Gewichtskraft $\vec{F}_g = m\vec{g}$ und die Reibungskraft $\vec{F}_R = -d\vec{v}$, wobei $g > 0$ und $d > 0$ Konstanten sind. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die z -Achse entlang der vertikalen Achse verläuft und vom Erdmittelpunkt weg gerichtet ist. Damit ergibt sich $\vec{F}_g = -mg\vec{e}_3$ und $\vec{F}_R = -dv(t)\vec{e}_3$. Die Newtonsche Bewegungsgleichung liefert damit eine Differentialgleichung für die unbekannte Funktion $v(t)$,

$$m\dot{v}(t) = -mg - dv(t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{v}(t) = -\frac{1}{\tau}v(t) - g, \quad (5.74)$$

mit $\tau = m/d$. Durch ablesen ergibt sich $a(t) = -1/\tau$ und damit $A(t) = -t/\tau$. Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$\dot{v}_h(t) = -\frac{1}{\tau}v_h(t). \quad (5.75)$$

Für den Massepunkt gelte $v(t_0 = 0) = v_0$. Die homogene DGL wird somit durch die Funktion

$$v_h(t) = v_h(0) e^{A(t)-A(0)} = v_0 e^{-t/\tau} \quad (5.76)$$

gelöst. Die Funktion $v_h(t)$ entspricht der Geschwindigkeitskomponente in z -Richtung bei Abwesenheit der Gewichtskraft. Es gilt $v_h(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Für

die Lösung der inhomogenen DGL, d.h. bei Anwesenheit der Gewichtskraft folgt

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) \quad (5.77)$$

$$= v_0 e^{-t/\tau} + \left[\int_0^t (-g) e^{u/\tau} du \right] e^{-t/\tau} \quad (5.78)$$

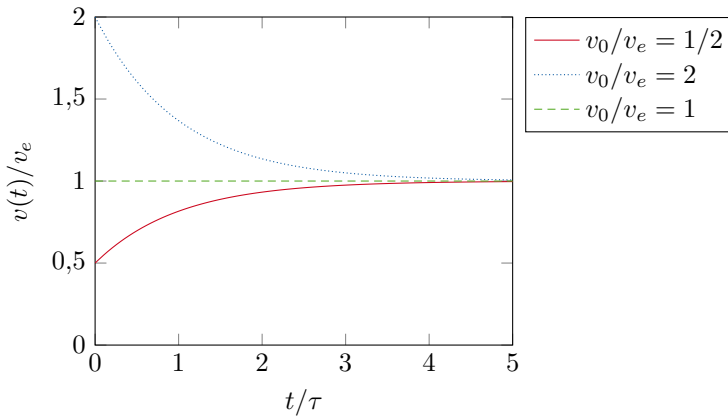
$$= v_0 e^{-t/\tau} - g\tau \left(e^{t/\tau} - 1 \right) e^{-t/\tau} \quad (5.79)$$

$$= v_0 e^{-t/\tau} + v_e \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad (5.80)$$

mit der Endgeschwindigkeit $v_e = -g\tau = -mg/d$ für $t \rightarrow \infty$. Die Endgeschwindigkeit v_e stellt die charakteristische Geschwindigkeit des Systems dar, da sie durch die Systemparameter festgelegt ist. Um die Funktion zu zeichnen, bietet es sich an, die Gleichung für $v(t)$ wie folgt dimensionslos zu machen:

$$\frac{v(t)}{v_e} = 1 - \left(1 - \frac{v_0}{v_e} \right) e^{-t/\tau}. \quad (5.81)$$

Die dimensionslose Funktion $v(t)/v_e$ ist in der folgenden Abbildung für verschiedene Werte von v_0/v_e dargestellt.



Für $v_0 < v_e$ wächst die Geschwindigkeit exponentiell an und nähert sich für $t \rightarrow \infty$ dem Wert v_e . Für $v_0 > v_e$ wird die Geschwindigkeit exponentiell kleiner und nähert sich ebenfalls für $t \rightarrow \infty$ dem Wert v_e . Für $v_0 = v_e$ bleibt die

Geschwindigkeit zeitlich konstant. Eine Taylorentwicklung von Gl. (5.81) ergibt

$$\frac{v(t)}{v_e} = 1 - \left(1 - \frac{v_0}{v_e}\right) \left\{ 1 - \frac{t}{\tau} + \mathcal{O}\left(\left[\frac{t}{\tau}\right]^2\right) \right\} \quad (5.82)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{v_0}{v_e}\right) + \left(1 - \frac{v_0}{v_e}\right) \frac{t}{\tau} + \mathcal{O}\left(\left[\frac{t}{\tau}\right]^2\right) \quad (5.83)$$

$$= \frac{v_0}{v_e} + \left(1 - \frac{v_0}{v_e}\right) \frac{t}{\tau} + \mathcal{O}\left(\left[\frac{t}{\tau}\right]^2\right). \quad (5.84)$$

Die Steigung der Funktion $v(t)/v_e$ bei $t_0 = 0$ hängt also vom Verhältnis v_0/v_e ab.

5.2.4 Nicht-lineare Differentialgleichungen

Nichtlineare, nicht-separable Differentialgleichungen lassen sich nur in Ausnahmefällen analytisch lösen. Ein Beispiel für eine nicht-lineare, nicht-separable Differentialgleichung ist die Bernoulli-Gleichung

$$f'(x) = a(x)f(x) + b(x)f^\alpha(x) \quad (5.85)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \{0, 1\}$. Sie lässt sich durch die Substitution $u(x) = f^{1-\alpha}(x)$ in eine lineare Differentialgleichung überführen. Hierzu wird Gl. (5.85) zunächst durch $f^\alpha(x) \neq 0$ dividiert,

$$f^{-\alpha}(x)f'(x) = a(x)f^{1-\alpha}(x) + b(x). \quad (5.86)$$

Durch Verwendung der Substitution und $u'(x) = (1 - \alpha)f^{-\alpha}(x)f'(x)$ ergibt sich die lineare Differentialgleichung für die Funktion u :

$$\frac{1}{1 - \alpha}u'(x) = a(x)u(x) + b(x). \quad (5.87)$$

Diese lineare Differentialgleichung lässt sich für einen vorgegebenen Wert von α mit der im vorherigen Abschnitt beschriebenen Methode lösen.

Beispiel 5.12 Wir betrachten die Bernoulli-Gleichung mit $\alpha = 2$, $a(x) = a > 0$, $b(x) = b > 0$ und der Anfangsbedingung $f(0) = y_0 > 0$. Mit der o.g. Substitution folgt die lineare Differentialgleichung

$$-u'(x) = au(x) + b \quad (5.88)$$

mit der Anfangsbedingung $u(0) = 1/y_0$. Die Lösung der linearen Differentialgleichung lautet

$$u(x) = \left(\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a} \right) e^{-ax} + \frac{b}{a}. \quad (5.89)$$

Durch Rücksubstitution folgt

$$f(x) = \frac{1}{u(x)} = \left[\left(\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a} \right) e^{-ax} + \frac{b}{a} \right]^{-1}. \quad (5.90)$$

Aufgabe 5.2 Lösen Sie die Differentialgleichung (5.88) und zeigen Sie, dass die Funktion $u(x)$ aus Gl. (5.89) die Lösung des Anfangswertproblems darstellt.

5.3 Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Differentialgleichungen der Ordnung $n > 1$ sind i.A. sehr schwierig analytisch zu lösen. Wir beschränken uns daher im Folgenden auf lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, für die bekannte Lösungsmethoden existieren. Hierbei betrachten wir Differentialgleichungen für komplexe Funktionen, da für diese die Lösungsmethoden besonders elegant sind.

Definition 5.5 Seien $g, f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplexwertige Funktionen. Eine Differentialgleichung vom Typ

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1f'(x) + a_0f(x) = g(x) \quad (5.91)$$

mit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ heißt *lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*. Ist $\forall x : g(x) = 0$, so heißt die Differentialgleichung *homogen*. Ist $g(x) \neq 0$, so heißt die Differentialgleichung *inhomogen*.

In Analogie zu linearen Differentialgleichung 1-ter Ordnung besitzt die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung der Form (5.91) die Struktur

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x), \quad (5.92)$$

wobei f_h die allgemeine Lösung der homogenen, und f_p eine partikuläre Lösung der inhomogen Differentialgleichung ist.

5.3.1 Homogene lineare Differentialgleichung

Wir betrachten zunächst homogene, lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten,

$$f_h^{(n)}(x) + a_{n-1}f_h^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1f_h'(x) + a_0f_h(x) = 0. \quad (5.93)$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (5.93) bezeichnen wir mit f_h . Die allgemeine Lösung f_h kann mithilfe eines Exponentialansatzes der Form $f_h(x) = e^{\lambda x}$ gefunden werden, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine zunächst unbekannte Konstante ist. Um die möglichen Werte für λ zu bestimmen, wird der Ansatz für f_h in die Differentialgleichung (5.93) eingesetzt. Man erhält

$$0 = \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} \quad (5.94)$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x} \quad (5.95)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0. \quad (5.96)$$

Hierbei wurde im letzten Schritt verwendet, dass $\forall \lambda, x \in \mathbb{C} : e^{\lambda x} \neq 0$. Das Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 \quad (5.97)$$

heißt *charakteristisches Polynom* der Differentialgleichung. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt das charakteristische Polynom vom Grad n genau n (i.A. komplexe) Nullstellen. Unter diesen n Nullstellen können einige mehrfach auftreten. Seien daher $\lambda_k \in \mathbb{C}$ mit $k \in \{1, \dots, r\}$ die r verschiedenen Nullstellen von $P(\lambda)$, mit ihrer jeweiligen Vielfachheit n_k . Es gilt folglich $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Das charakteristische Polynom kann daher in der Form

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r} \quad (5.98)$$

geschrieben werden. Aus der Existenz von n Nullstellen des charakteristischen Polynoms folgt, dass die homogene Differentialgleichung (5.93) genau n linear unabhängige Lösungen besitzt. Diese n linear unabhängigen Lösungen werden als *Basisfunktionen* bezeichnet. Sie bilden zusammen das sog. *Fundamentalsystem* der Differentialgleichung:

$$\begin{array}{ll} n_1 \text{ Basisfunktionen zu } \lambda_1: & e^{\lambda_1 x}, \quad x e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \quad x^{n_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\ n_2 \text{ Basisfunktionen zu } \lambda_2: & e^{\lambda_2 x}, \quad x e^{\lambda_2 x}, \quad \dots, \quad x^{n_2-1} e^{\lambda_2 x}, \\ & \vdots \\ n_r \text{ Basisfunktionen zu } \lambda_r: & e^{\lambda_r x}, \quad x e^{\lambda_r x}, \quad \dots, \quad x^{n_r-1} e^{\lambda_r x}. \end{array}$$

Die allgemeine Lösung f_h der homogenen Differentialgleichung (5.93) ist die Linearkombination all dieser n Basisfunktionen.

Beispiel 5.13 Die homogene Differentialgleichung $f_h'(x) + 2f_h(x) = 0$ besitzt das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda + 2$ mit der Nullstelle $\lambda_1 = -2$. Die allgemeine Lösung der DGL lautet somit

$$f_h(x) = c_1 e^{-2x} \quad (5.99)$$

mit $c_1 \in \mathbb{C}$.

Beispiel 5.14 Die homogene Differentialgleichung $f_h''(x) - 3f_h'(x) + 2f_h(x) = 0$ besitzt das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Die allgemeine Lösung der DGL lautet somit

$$f_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad (5.100)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Beispiel 5.15 Die homogene Differentialgleichung $f_h''(x) - 4f_h'(x) + 4f_h(x) = 0$ besitzt das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Die allgemeine Lösung der DGL lautet somit

$$f_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} = (c_1 + c_2 x) e^{2x} \quad (5.101)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Beispiel 5.16 Die homogene Differentialgleichung $f_h''(x) + f_h(x) = 0$ besitzt das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$. Die allgemeine Lösung der DGL lautet somit

$$f_h(x) = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix} \quad (5.102)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Mit der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ lässt sich die komplexwertige Exponentialfunktion durch die Sinus- und Kosinusfunktion ausdrücken:

$$\begin{aligned} f_h(x) &= c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix} \\ &= c_1 [\cos(x) + i \sin(x)] + c_2 [\cos(x) - i \sin(x)] \\ &= (c_1 + c_2) \cos(x) + i(c_1 - c_2) \sin(x) \\ &= a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x) \end{aligned}$$

mit $a_1 = c_1 + c_2$, $a_2 = i(c_1 - c_2)$.

Beispiel 5.17 Die homogene Differentialgleichung $f_h''(x) + 2f_h'(x) + 2f_h(x) = 0$ besitzt das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = -1 + i$ und $\lambda_2 = -1 - i$. Die allgemeine Lösung der DGL lautet somit

$$f_h(x) = c_1 e^{(-1+i)x} + c_2 e^{(-1-i)x} \quad (5.103)$$

$$= (c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}) e^{-x} \quad (5.104)$$

$$= [a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x)] e^{-x}. \quad (5.105)$$

mit $a_1 = c_1 + c_2$, $a_2 = i(c_1 - c_2)$.

Aufgabe 5.3 Bestimmen Sie aus dem Fundamentalsystem die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $f_h^{(3)}(x) = 0$.

5.3.2 Inhomogene lineare Differentialgleichung

Eine partikuläre Lösung f_p der inhomogenen Differentialgleichung (5.91) kann durch einen geschickten Ansatz gefunden werden. Als Ansatz verwendet man meist eine Funktion, die ähnlich der allgemeinen Lösung f_h der homogenen Differentialgleichung ist. Mathematisch kann man zeigen, dass für bestimmte Klassen von Inhomogenitäten entsprechende Ansätze für f_p existieren, die die inhomogene Differentialgleichung lösen. Besitzt die Inhomogenität beispielsweise die Form

$$g(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m) e^{\omega x}, \quad (5.106)$$

wobei ω die k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ der Differentialgleichung ist ($k = 0$ bedeutet, dass $P(\omega) \neq 0$, d.h. ω ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms), dann besitzt die Differentialgleichung eine Lösung der Form

$$y_p(x) = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m) x^k e^{\omega x} \quad (5.107)$$

mit $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \{0, \dots, m\}$. Der Ausdruck $e^{\omega x}$ auf der rechten Seite von Gl. (5.107) besitzt für komplexwertiges $\omega = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Form

$$e^{\omega x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)]. \quad (5.108)$$

Beispiel 5.18 In der folgenden Tabelle sind für verschiedene inhomogene Differentialgleichungen entsprechende Ansätze für die partikuläre Lösung f_p angegeben.

DGL	ω	NST von $P(\lambda)$	k	Ansatz $f_p(x)$
$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 1$	0	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$	0	c_0
$f''(x) - 3f'(x) = 1$	0	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$	1	$c_0 x$
$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = e^{3x}$	3	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$	0	$c_0 e^{3x}$
$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = e^x$	1	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$	1	$c_0 x e^x$
$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = e^x$	1	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	2	$c_0 x^2 e^x$
$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = x e^x$	1	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$	1	$(c_0 + c_1 x) x e^x$
$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x e^x$	1	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	2	$(c_0 + c_1 x) x^2 e^x$
$f''(x) + f(x) = e^{i2x}$	$2i$	$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$	0	$c_0 e^{i2x}$
$f''(x) + f(x) = e^{ix}$	i	$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$	1	$c_0 x e^{ix}$

Beispiel 5.19 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = e^{3x}. \quad (5.109)$$

Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$f_h''(x) - 3f_h'(x) + 2f_h(x) = 0. \quad (5.110)$$

Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet damit

$$f_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad (5.111)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Als Ansatz für die partikuläre Lösung wählen wir ($\omega = 3, k = 0$)

$$f_p(x) = c e^{3x} \quad (5.112)$$

mit $c \in \mathbb{C}$. Einsetzen des Ansatz für f_p in die Differentialgleichung liefert

$$9c e^{3x} - 9c e^{3x} + 2c e^{3x} = e^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{2}. \quad (5.113)$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}. \quad (5.114)$$

Beispiel 5.20 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = e^{2x}. \quad (5.115)$$

Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$f_h''(x) - 5f_h'(x) + 6f_h(x) = 0. \quad (5.116)$$

Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet damit

$$f_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad (5.117)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Als Ansatz für die partikuläre Lösung wählen wir ($\omega = 2$, $k = 1$)

$$f_p(x) = cx e^{2x} \quad (5.118)$$

mit $c \in \mathbb{C}$. Einsetzen des Ansatz für f_p in die Differentialgleichung liefert

$$4ce^{2x}(1+x) - 5ce^{2x}(1+2x) + 6cxe^{2x} = e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad c = -1. \quad (5.119)$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - xe^{2x}. \quad (5.120)$$

Beispiel 5.21 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = e^x \cos(2x). \quad (5.121)$$

Wir schreiben die DGL für die reelle Funktion f in eine DGL für die komplexwertige Funktion $z(x) = f(x) + ih(x)$ mit $f(x) = \operatorname{Re}[z(x)]$ um:

$$z''(x) - 2z'(x) + 5z(x) = e^{\omega x} \quad (5.122)$$

mit $\omega = 1 + 2i$. Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$z_h''(x) - 2z_h'(x) + 5z_h(x) = e^{\omega x}, \quad (5.123)$$

Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet damit

$$z_h(x) = c_1 e^{(1+2i)x} + c_2 e^{(1-2i)x} \quad (5.124)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Als Ansatz für die partikuläre Lösung wählen wir ($k = 1$)

$$z_p(x) = c_0 x e^{(1+2i)x} \quad (5.125)$$

mit $c_0 \in \mathbb{C}$. Einsetzen des Ansatz für z_p in die Differentialgleichung liefert $c_0 = -i/4$. Damit lautet die allgemeine Lösung der komplexwertigen Differentialgleichung

$$z(x) = z_h(x) + z_p(x) \quad (5.126)$$

$$= c_1 e^{(1+2i)x} + c_2 e^{(1-2i)x} - \frac{ix}{4} e^{(1+2i)x} \quad (5.127)$$

$$= c_1 e^x [\cos(2x) + i \sin(2x)] + c_2 e^x [\cos(2x) - i \sin(2x)] - \frac{ix}{4} e^x [\cos(2x) + i \sin(2x)] \quad (5.128)$$

$$= e^x [(c_1 + c_2) \cos(2x) + i(c_1 - c_2) \sin(2x)] + \frac{x}{4} e^x [\sin(2x) - i \cos(2x)] \quad (5.129)$$

$$= e^x [a_1 \cos(2x) + a_2 \sin(2x)] + \frac{x}{4} e^x [\sin(2x) - i \cos(2x)] \quad (5.130)$$

mit $a_1 = c_1 + c_2$, $a_2 = i(c_1 - c_2)$. Daraus ergibt sich die reelle Lösung

$$f(x) = \operatorname{Re}[z(x)] = e^x [a_1 \cos(2x) + a_2 \sin(2x)] + \frac{x}{4} e^x \sin(2x). \quad (5.131)$$

5.4 Anwendungen

5.4.1 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Als erste Anwendung betrachten wir einen Massepunkt der Masse m , der über eine Feder mit der Federkonstante $k > 0$ mit einer Wand verbunden ist, siehe Abbildung 5.2. Der Massepunkt kann sich nur entlang einer Geraden bewegen. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die Bewegung entlang der x -Achse stattfindet. Der Koordinatenursprung befinde sich an dem Ort, an dem die Feder entspannt ist. Aufgrund der Feder wirkt auf den Massepunkt die Kraft $\vec{F}_{\text{Feder}} = -k\vec{x}(t) = -kx(t)\vec{e}_1$. Der Massepunkt befinde sich zudem in Luft, so dass auf ihn zusätzlich die Reibungskraft $\vec{F}_R = -d\vec{v}(t) = -d\dot{x}(t)\vec{e}_1$ wirkt. Hierbei ist $d > 0$ eine Konstante, die den Betrag der Reibungskraft beschreibt. Für das System folgt aus dem 2-ten Newtonschen Gesetz die Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - d\dot{x}(t). \quad (5.132)$$

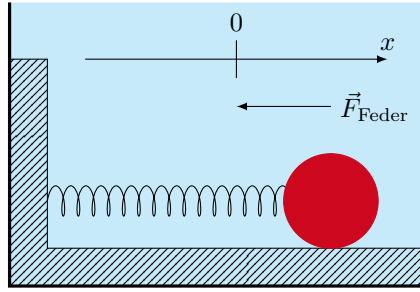


Abbildung 5.2: Gedämpfter harmonischer Oszillator

für die Funktion $x(t)$, die den Ort des Massepunktes in Abhängigkeit der Zeit t beschreibt. Division durch $m > 0$ und Umstellen führt auf die konventionelle Form

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (5.133)$$

wobei $2\delta = d/m$ und $\omega_0^2 = k/m$. Gl. (5.133) stellt eine homogene, lineare Differentialgleichung 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar. Wir verwenden die in Kapitel 5.3 vorgestellte Methode zur Lösung der Differentialgleichung. Das charakteristische Polynom lautet

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 \quad (5.134)$$

und besitzt die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (5.135)$$

Anhand von Gl. (5.135) können die folgenden drei Fälle unterschieden werden, die verschiedene physikalische Charakteristika besitzen:

- Schwingfall: $\delta^2 < \omega_0^2$
- aperiodischer Grenzfall: $\delta^2 = \omega_0^2$
- Kriechfall: $\delta^2 > \omega_0^2$

Diese drei Fälle werden wir im Folgenden einzeln untersuchen.

Schwingfall

Ist die Dämpfung des Systems so klein, dass $\delta^2 < \omega_0^2$, so besitzt das charakteristische Polynom die beiden zwei komplexwertige Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} =: -\delta \pm i\omega_d, \quad (5.136)$$

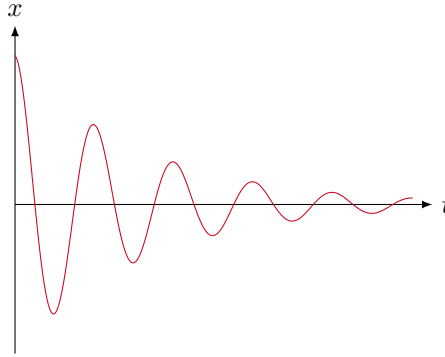


Abbildung 5.3: Ortsfunktion $x(t)$ aus Gl. (5.141) für den Schwingfall.

mit $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Hierbei haben wir in Gl. (5.135) ein Minuszeichen aus der Wurzel herausgezogen. Folglich lautet die allgemeine Lösung Newtonschen Bewegungsgleichung

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5.137)$$

$$= c_1 e^{(-\delta + i\omega_d)t} + c_2 e^{(-\delta - i\omega_d)t} \quad (5.138)$$

$$= e^{-\delta t} [c_1 e^{i\omega_d t} + c_2 e^{-i\omega_d t}] \quad (5.139)$$

$$= e^{-\delta t} \{c_1 [\cos(\omega_d t) + i \sin(\omega_d t)] + c_2 [\cos(\omega_d t) - i \sin(\omega_d t)]\} \quad (5.140)$$

$$= e^{-\delta t} [a_1 \sin(\omega_d t) + a_2 \cos(\omega_d t)] \quad (5.141)$$

mit $a_1 = c_1 + c_2$, $a_2 = i(c_1 - c_2)$. Gl. (5.141) stellt eine Oszillationsbewegung mit der Winkelfrequenz $\omega_d < \omega_0$ um die Nulllage $x = 0$ dar. Dieses Szenario wird daher auch als *Schwingfall* bezeichnet. Aufgrund des Faktors $e^{-\delta t}$ geht die Amplitude der Oszillation mit der Zeit gegen Null. Der Faktor $e^{-\delta t}$ beschreibt somit den Einfluss der Reibung auf das System. Die Funktion $x(t)$ ist in Abbildung 5.3 schematisch dargestellt.

Aperiodischer Grenzfall

Im Fall $\delta^2 = \omega_0^2$ besitzt das charakteristische Polynom eine Nullstelle, die doppelt auftritt,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta. \quad (5.142)$$

Aus dem Fundamentalsystem liest man die Lösung

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_2 t} = (c_1 + c_2 t) e^{-\delta t} \quad (5.143)$$

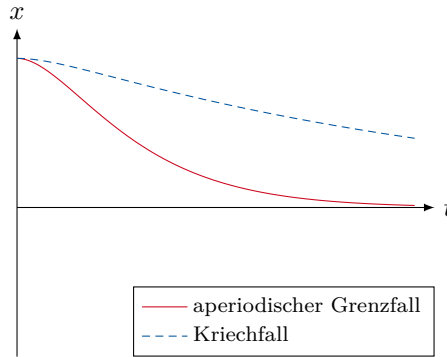


Abbildung 5.4: Ortsfunktion $x(t)$ für den aperiodischen Grenzfall und den Kriechfall.

der Newtonschen Bewegungsgleichung ab. Die Funktion $x(t)$ aus Gl. (5.143) ist in Abbildung 5.4 in rot schematisch dargestellt. Charakteristisch für diese Bewegungsform ist, dass das System ohne zu schwingen und in der minimalen Zeit in die Nulllage zurückkehrt. (Abhängig von den Anfangsbedingungen ist auch ein einmaliges Durchlaufen der Nulllage möglich.) Den Fall $\delta^2 = \omega_0^2$ wird daher auch als *Aperiodischer Grenzfall* bezeichnet. Auch hier geht die Funktion $x(t)$ aufgrund der Reibung, beschrieben durch den Faktor $e^{-\delta t}$, mit der Zeit gegen Null.

Kriechfall

Im Fall $\delta^2 > \omega_0^2$ besitzt das charakteristische Polynom die zwei reellen Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} =: -\delta \pm \kappa. \quad (5.144)$$

Die Konstante $\kappa = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < \delta$ wird als *Kriechkonstante* bezeichnet. Aus dem Fundamentalsystem ergibt sich damit die allgemeine Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung zu

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t} [c_1 e^{\kappa t} + c_2 e^{-\kappa t}]. \quad (5.145)$$

Die Funktion $x(t)$ aus Gl. (5.145) ist in Abbildung 5.4 in blau schematisch dargestellt. Wie auch beim aperiodischen Grenzfall findet in diesem Fall keine Oszillation statt. Stattdessen geht das System für $t \rightarrow \infty$ sehr langsam (insbesondere langsamer als im aperiodischen Grenzfall) in die Nulllage. Dieser Fall wird daher auch als Kriechfall bezeichnet.

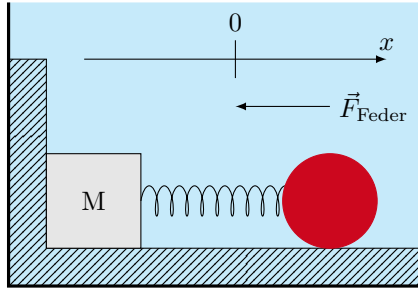


Abbildung 5.5: Getriebener gedämpfter harmonischer Oszillator

Aufgabe 5.4 Überlegen Sie sich Systeme aus dem Alltag, die man so konstruieren sollte, dass ihre Bewegungsform dem aperiodischen Grenzfall bzw. dem Kriechfall entspricht.

5.4.2 Getriebener gedämpfter harmonischer Oszillator

Als zweiten Anwendungsfall soll das im Kapitel 5.4.1 betrachtete System um einen Motor (M) erweitert werden, der auf die Feder eine periodische Kraft der Form $\vec{F}_e = F_0 \sin(\omega_e t) \vec{e}_1$ ausübt, siehe Abbildung 5.5. Hierbei ist ω_e die Kreisfrequenz der Erregung durch den Motor und F_0 ist die Amplitude der Kraft. Die entsprechende Newtonsche Bewegungsgleichung für die Bewegung entlang der x -Achse lautet

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - d\dot{x}(t) + F_0 \sin(\omega_e t). \quad (5.146)$$

Division durch $m > 0$ und Umstellen führt auf die konventionelle Form

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f_0 \sin(\omega_e t), \quad (5.147)$$

mit $f_0 = F_0/m$. Die Differentialgleichung (5.147) stellt eine inhomogene Version der Differentialgleichung (5.133) aus Kapitel 5.4.1 dar. Um die allgemeine Lösung von Gl. (5.147) zu ermitteln, können wir also die Lösung der homogenen Differentialgleichung (5.147) verwendet. Wir müssen lediglich noch eine partikuläre Lösung $x_p(t)$ ermitteln. Um Gl. (5.107) zu verwenden machen wir aus der reellen Differentialgleichung (5.147) eine komplexwertige Differentialgleichung für die Funktion $z(t)$ mit $x(t) = \text{Im}[z(t)]$:

$$\ddot{z}(t) + 2\delta\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = f_0 e^{i\omega_e t}. \quad (5.148)$$

Durch Betrachten des Imaginärteils der Gleichung erhält man daraus die zu lösende Differentialgleichung (5.147) für die reelle Funktion $x(t)$:

$$\operatorname{Im} [\ddot{z}(t) + 2\delta\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t)] = \operatorname{Im} [f_0 e^{i\omega_e t}], \quad (5.149)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Im}[z(t)] + 2\delta \frac{d}{dt} \operatorname{Im}[z(t)] + \omega_0^2 \operatorname{Im}[z(t)] = f_0 \operatorname{Im}[\cos(\omega_e t) + i \sin(\omega_e t)], \quad (5.150)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\delta \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f_0 \sin(\omega_e t). \quad (5.151)$$

Wir betrachten nun den Schwingfall $\delta^2 < \omega_0^2$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms lauten

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_d \quad (5.152)$$

mit $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$, vgl. Gl. (5.136). Um den Ansatz aus Gl. (5.107) zu verwenden, müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1. $i\omega_e$ ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ($k = 0$), d.h. $\lambda_1 \neq i\omega_e$ und $\lambda_2 \neq i\omega_e$. Entweder ist dies der Fall, wenn $\delta > 0$, d.h. es existiert eine Dämpfung im System aufgrund von Reibung. Oder es ist $\delta = 0$ und die Kreisfrequenz ω_e der Anregung ist ungleich der Kreisfrequenz $\omega_d = \omega_0$, mit der das System ohne Dämpfung und Anregung schwingen würde. In beiden Fällen gibt es keine Resonanzkatastrophe.
2. $i\omega_e$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ($k = 1$), d.h. $\lambda_1 = i\omega_e$ und $\lambda_2 \neq i\omega_e$. Dieser Fall tritt ein, wenn $\delta = 0$ und $\omega_e = \omega_d = \omega_0$. Dieser Fall führt zur Resonanzkatastrophe.

Keine Resonanzkatastrophe

Im Fall $\lambda_1 \neq i\omega_e$ und $\lambda_2 \neq i\omega_e$ folgt aus Gl. (5.107) der Ansatz

$$z_p(t) = c_0 e^{i\omega_e t} \quad (5.153)$$

für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung (5.147) liefert

$$c_0 [(i\omega_e)^2 + 2\delta i\omega_e + \omega_0^2] e^{i\omega_e t} = f_e e^{i\omega_e t}. \quad (5.154)$$

Umstellen nach c_0 ergibt

$$c_0 = \frac{f_e}{(i\omega_e)^2 + 2\delta i\omega_e + \omega_0^2} =: a_3 e^{i\varphi} \quad (5.155)$$

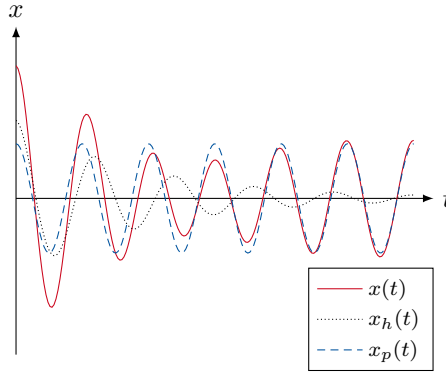


Abbildung 5.6: Ortsfunktion $x(t)$ für den Schwingfall des gedämpften harmonischen Oszillators für $\delta > 0$.

mit

$$a_3(\omega_e) = \left| \frac{f_e}{(i\omega_e)^2 + 2\delta i\omega_e + \omega_0^2} \right| = \frac{|f_e|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\delta\omega_e)^2}}, \quad (5.156)$$

$$\tan[\varphi(\omega_e)] = \frac{\text{Im}(c_0)}{\text{Re}(c_0)} = \frac{2\delta\omega_e}{\omega_e^2 - \omega_0^2}. \quad (5.157)$$

Aus dem Imaginärteil von $z_p(t)$ ergibt sich damit die partikuläre Lösung:

$$x_p(t) = \text{Im}[z_p(t)] = \text{Im}[c_0 e^{i\omega_e t}] = \text{Im}[a_3 e^{i(\omega_e t + \varphi)}] = a_3 \sin(\omega_e t + \varphi). \quad (5.158)$$

Die allgemeine reellwertige Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung lautet damit für den Schwingfall

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (5.159)$$

$$= e^{-\delta t} [a_1 \sin(\omega_d t) + a_2 \cos(\omega_d t)] + a_3 \sin(\omega_e t + \varphi) \quad (5.160)$$

Die Funktion $x(t)$ aus Gl. (5.160) ist in Abbildung 5.6 für $\delta > 0$ schematisch dargestellt. Ist $\delta > 0$, so verschwindet die Lösung $x_h(t)$ der homogenen Differentialgleichung mit der Zeit und das System schwingt mit der Erregerkreisfrequenz ω_e , d.h. $x(t) \rightarrow x_p(t)$ für $t \rightarrow \infty$. Die Amplitude a_3 der Schwingung hängt hierbei insbesondere von der Dämpfungskonstante δ und der Differenz $\omega_0^2 - \omega_e^2$ ab, siehe Abbildung 5.7. Die Amplitude a_3 wird für eine Anregung mit der Resonanzfrequenz $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ maximal. Für $\delta = 0$ ergibt sich i.A. eine Oszillation um die Nulllage, die für $\omega_0/\omega_e \in \mathbb{Q}$ periodisch und sonst nicht-periodisch ist.

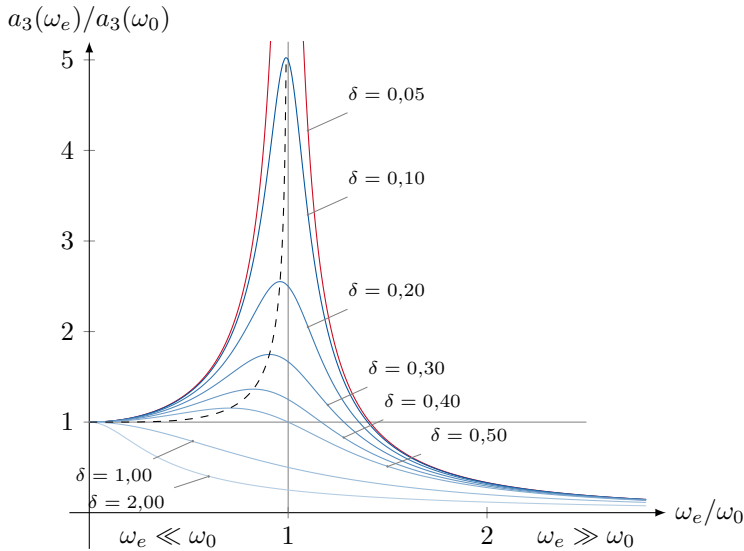


Abbildung 5.7: Amplitude der Schwingung des getriebenen gedämpften harmonischen Oszillators für verschiedene Werte von $\delta > 0$ als Funktion der Erregerkreisfrequenz ω_e .

Resonanzkatastrophe

Im Fall $\lambda_1 = i\omega_d$, $\lambda_2 \neq i\omega_d$ tritt die sog. *Resonanzkatastrophe* auf. In diesem Fall ist $\delta = 0$ und $\omega_e = \omega_d = \omega_0$, d.h. $k = 1$. Aus Gl. (5.107) folgt in diesem Fall der Ansatz

$$z_p(t) = c_0 t e^{i\omega_e t} \quad (5.161)$$

für die partikuläre Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung. Einsetzen von $z_p(t)$ in die Differentialgleichung liefert

$$c_0 [(i\omega_e)^2 t + 2i\omega_e + \omega_e^2 t] e^{i\omega_e t} = f_e e^{i\omega_e t} \quad (5.162)$$

und damit folgt

$$c_0 = \frac{f_e}{2i\omega_e}. \quad (5.163)$$

Damit ergibt sich die komplexwertige partikuläre Lösung

$$z_p(t) = \frac{f_e t}{2i\omega_e} e^{i\omega_e t}. \quad (5.164)$$

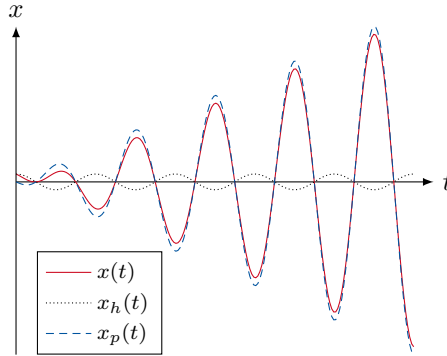


Abbildung 5.8: Ortsfunktion $x(t)$ für die Resonanzkatastrophe des getriebenen gedämpften harmonischen Oszillators.

Durch Bilden des Imaginärteils ergibt sich die reellwertige partikuläre Lösung

$$x_p(t) = \text{Im}[z_p(t)] = \text{Im}[c_0 t e^{i\omega_e t}] = \text{Im} \left[\frac{f_e t}{2i\omega_e} e^{i\omega_e t} \right] = -\frac{f_e t}{2\omega_e} \cos(\omega_e t). \quad (5.165)$$

Die allgemeine Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung für den Schwingfall ergibt sich damit und wegen $\delta = 0$ und $\omega_e = \omega_0$ insgesamt zu

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (5.166)$$

$$= a_1 \sin(\omega_e t) + a_2 \cos(\omega_e t) - \frac{f_e t}{2\omega_e} \cos(\omega_e t). \quad (5.167)$$

Die Funktion $x(t)$ aus Gl. (5.167) ist in Abbildung 5.8 schematisch dargestellt. Das System oszilliert mit der Erregerkreisfrequenz ω_e um die Nulllage. Aufgrund des Faktors t in der partikulären Lösung $x_p(t)$ ist die Lösung $x(t)$ unbeschränkt (Resonanzkatastrophe).

Kapitel 6

Lineare Algebra

6.1	Der Vektorraum	192
6.1.1	Definition	192
6.1.2	Beispiele für Vektorräume	196
6.1.3	Skalarprodukt	199
6.1.4	Basis eines Vektorraums	204
6.1.5	Vektorprodukt	213
6.1.6	Vektorwertige Funktionen	217
6.2	Lineare Abbildungen	218
6.2.1	Matrizen	219
6.2.2	Matrixprodukt und inverse Matrix	224
6.2.3	Lineare Gleichungssysteme	230
6.2.4	Drehungen und Basiswechsel	236
6.2.5	Das Eigenwertproblem	239

Wie bereits in Kapitel 1.4 beschrieben, ist der Vektorbegriff in der Physik von zentraler Bedeutung. In der Mechanik wird er verwendet, um physikalische Größen zu beschreiben, die neben einem Betrag auch durch eine Richtung ausgezeichnet sind (Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, elektrisches Feld, etc.). In der Quantentheorie werden Zustände von Quantenobjekten durch Vektoren beschrieben.

Im Folgenden soll der Vektorbegriff anhand unseres Anschauungsraums zunächst motiviert werden. Anschließend werden wir vom Anschauungsraum abstrahieren und die allgemeinen Eigenschaften von Vektoren einführen und wichtige Anwendungen in der Physik diskutieren.

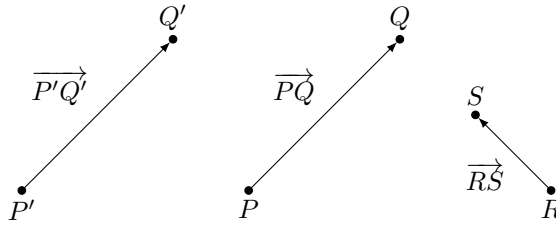


Abbildung 6.1: Pfeile verbinden die Punkte im euklidischen Raum. Die Pfeile \overrightarrow{PQ} und $\overrightarrow{P'Q'}$ sind äquivalent. Die Pfeile \overrightarrow{PQ} und \overrightarrow{RS} sind nicht äquivalent.

6.1 Der Vektorraum

6.1.1 Definition

Der Anschauungsraum aus unserem Alltag ist 3-dimensional. Er kann abstrakt als eine Menge von Punkten P , Q , R , S , usw. aufgefasst werden und wird auch als *euklidischer Raum* bezeichnet. Der euklidische Raum aller Punkte besitzt alleine keine nützliche Struktur. Um ihm eine Struktur zu geben, setzen wir die Punkte miteinander in Beziehung, indem wir sie mit *Pfeilen* verbinden, siehe Abbildung 6.1. Die Pfeile spezifizieren so die Lage der Punkte zueinander und beschreiben mögliche Verschiebungen im Raum. Zwei Pfeile, die die selbe Richtung und die selbe Länge besitzen, beschreiben hierbei die gleiche Verschiebung und werden als *äquivalent* bezeichnet. Äquivalente Pfeile gehen folglich durch Parallelverschiebung auseinander hervor. Ein Repräsentant der Menge aller äquivalenter Pfeile wird als *Vektor* bezeichnet. Die Menge aller Vektoren bezeichnet man als *Vektorraum*. Der Vektorraum der Pfeile im 3-dimensionalen Raum bezeichnen wir im Folgenden mit \mathbb{V}^3 .

Die Hintereinanderausführung von Verschiebungen entlang von Pfeilen wird als *Addition* von Vektoren bezeichnet. Wir betrachten als Beispiel die Verschiebung von Punkt P zu Punkt Q , die durch den Pfeil \overrightarrow{PQ} beschrieben wird und die anschließende Verschiebung von Punkt Q zu Punkt R , die durch den Pfeil \overrightarrow{QR} beschrieben wird, siehe Abbildung 6.2. Die Hintereinanderausführung dieser beiden Verschiebungen kann als Pfeil \overrightarrow{PR} dargestellt werden. Für diese Hintereinanderausführung schreiben wir

$$\overrightarrow{PQ} \oplus \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} \quad (6.1)$$

und nennen dies die *Addition* zweier Vektoren. Die Addition zweier Vektoren ergibt also wieder einen Vektor. Um die Addition auszuführen müssen Vektoren

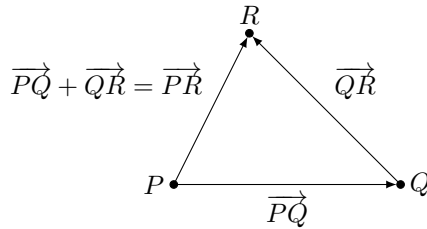
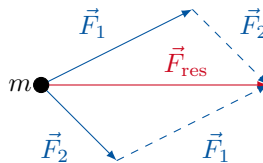


Abbildung 6.2: Addition zweier Pfeile.

u.U. parallel verschoben werden. Hierbei ist die Eigenschaft wichtig, dass sich die Vektoren bei der Parallelverschiebung nicht ändern.

Beispiel 6.1 Auf einen Massepunkt der Masse m wirken die beiden Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 , siehe folgende Abbildung.



Die auf den Massepunkt wirkende resultierende Kraft ist die vektorielle Summe $\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Sie kann durch „Aneinanderhängen“ der Vektoren \vec{F}_1 und \vec{F}_2 durch Parallelverschiebung einer der Vektoren geometrisch konstruiert werden.

Aus der Definition folgt, dass die Addition zweier Vektoren *kommutativ* ist. Seien \vec{a} und \vec{b} zwei Vektoren, so gilt also

$$\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}. \quad (6.2)$$

Bei der Addition mehrerer Vektoren kann zudem die Reihenfolge der Additionen vertauscht werden, d.h.

$$(\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c} = \vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c}). \quad (6.3)$$

Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Assoziativität*. Für eine Verschiebung, die durch die drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} beschrieben wird, ist es also egal, ob entlang $\vec{a} \rightarrow \vec{b} \rightarrow \vec{c}$ oder entlang $\vec{b} \rightarrow \vec{c} \rightarrow \vec{a}$ verschoben wird.

Unter den Vektoren gibt es einen besonderen Vektor, der dadurch ausgezeichnet ist, dass der Anfangspunkt und der Endpunkt des Pfeils zusammenfallen.

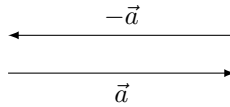


Abbildung 6.3: Ein Vektor und sein inverser Vektor.

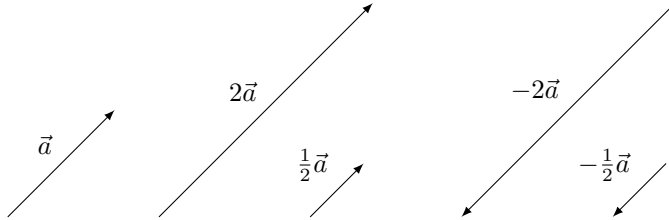


Abbildung 6.4: Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl.

Diesen Vektor bezeichnet man als Nullvektor $\vec{0}$. Er beschreibt folglich keine Verschiebung. Für ihn gilt somit die Eigenschaft $\vec{a} \oplus \vec{0} = \vec{a}$, wobei \vec{a} ein beliebiger Vektor ist.

Zu jedem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ gehört zudem ein Vektor, der die selbe Länge, jedoch die entgegengesetzte Richtung besitzt, siehe Abbildung 6.3. Diesen Vektor nennt man das zu \vec{a} inverse Element und bezeichnet es mit $-\vec{a}$. Er beschreibt eine Verschiebung entgegengesetzt zu \vec{a} . Es gilt also $\vec{a} \oplus (-\vec{a}) = \vec{0}$. Hierfür schreibt man abkürzend auch $\vec{a} \ominus \vec{a} = \vec{0}$.

Die algebraische Struktur, bestehend aus der Menge V aller Vektoren und der Addition \oplus mit den o.g. Eigenschaften, nennt man eine *abelsche Gruppe*.

Neben der Addition zweier Vektoren definiert man noch eine weitere Verknüpfung: die Multiplikation einer (reellen oder komplexen) Zahl λ mit einem Vektor \vec{a} . Für dieses Produkt verwenden wir das Symbol \odot . Eine Zahl λ wird in diesem Kontext auch als ein *Skalar* bezeichnet. Für $\lambda > 0$ soll $\lambda \odot \vec{a}$ ein Vektor sein, der in die selbe Richtung wie \vec{a} zeigt, jedoch die λ -fache Länge von \vec{a} besitzt. Entsprechend soll für $\lambda < 0$ der Vektor $\lambda \odot \vec{a}$ in die entgegengesetzte Richtung von \vec{a} zeigen und die $|\lambda|$ -fache Länge von \vec{a} besitzen, siehe Abbildung 6.4. Für $\lambda = 0$ soll $\lambda \odot \vec{a} = \vec{0}$ gelten. Hieraus ergeben sich die folgenden Rechenregeln für beliebige Zahlen λ, μ und beliebige Vektoren \vec{a}, \vec{b} :

- $1 \odot \vec{a} = \vec{a}$
- $\lambda \odot (\mu \odot \vec{a}) = (\lambda\mu) \odot \vec{a}$
- $\lambda \odot (\vec{a} \oplus \vec{b}) = \lambda \odot \vec{a} \oplus \lambda \odot \vec{b}$

$$\bullet (\lambda + \mu) \odot \vec{a} = \lambda \odot \vec{a} \oplus \mu \odot \vec{a}$$

Beispiel 6.2 Im Rahmen der klassischen Mechanik kann jedem Masspunkt zu jedem Zeitpunkt eine Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ zugeordnet werden. Sie beschreibt die Bewegungsrichtung und das Tempo (bzw. die Schnelligkeit) des Massepunktes zum Zeitpunkt t . Zudem besitzt in der klassischen Mechanik jeder Massepunkte eine skalare Eigenschaft $m > 0$, die als (träge) Masse bezeichnet wird. Das Produkt aus der Masse und der Geschwindigkeit eines Massepunktes bezeichnet man als Impuls $\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$. Da $m > 0$, ist der Impuls stets in Richtung der Geschwindigkeit des Massepunktes gerichtet.

Eine nicht-leere Menge V , deren Elemente mit den beiden o.g. Operationen \oplus und \odot miteinander Verknüpft werden können, nennt man einen *Vektorraum*. Man schreibt hierfür auch (V, \oplus, \odot) .

Definition 6.1 Eine nicht-leere Menge V mit zwei Verknüpfungen $\oplus : V \times V \rightarrow V$ und $\odot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ wird als *Vektorraum* über \mathbb{K} (\mathbb{R} oder \mathbb{C}) bezeichnet, wenn für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

1. $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$ (Kommutativität)
2. $(\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c} = \vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c})$ (Assoziativität)
3. $\exists \vec{0} \in V : \forall \vec{a} \in V : \vec{a} \oplus \vec{0} = \vec{a}$ (Existenz eines neutralen Elements)
4. $\forall \vec{a} \in V : \exists -\vec{a} \in V : \vec{a} \oplus (-\vec{a}) = \vec{0}$ (Existenz eines inversen Elements)
5. $1 \odot \vec{a} = \vec{a}$
6. $\lambda \odot (\mu \odot \vec{a}) = (\lambda\mu) \odot \vec{a}$
7. $\lambda \odot (\vec{a} \oplus \vec{b}) = \lambda \odot \vec{a} \oplus \lambda \odot \vec{b}$ (Distributivität)
8. $(\lambda + \mu) \odot \vec{a} = \lambda \odot \vec{a} \oplus \mu \odot \vec{a}$ (Distributivität)

Im Folgenden werden wir, wie in der Literatur üblich, das Symbol \odot unterdrücken und \oplus durch $+$ und \ominus durch $-$ ausdrücken.

6.1.2 Beispiele für Vektorräume

Vektorraum \mathbb{V}^n

Der uns im Alltag umgebende Anschauungsraum besitzt drei räumliche Dimensionen. Die Menge aller Pfeile in diesem 3-dimensionalen Raum, zusammen mit den o.g. Verknüpfungen, bezeichnen wir als \mathbb{V}^3 . Der Einfachheit halber werden wir uns manchmal auf zwei räumliche Dimensionen beschränken. Den entsprechenden 2-dimensionalen Vektorraum bezeichnen wir mit \mathbb{V}^2 . Die Vektoren aus \mathbb{V}^2 oder \mathbb{V}^3 werden wir mit Buchstaben bezeichnen, über die wir einen Pfeil schreiben, z.B. \vec{a} , \vec{w} usw.

Vektorraum \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n

Ein für konkrete Rechnungen sehr häufig verwendeter Vektorraum ist der Vektorraum der n -Tupel mit reellen oder komplexen Einträgen. Ein n -Tupel mit reellen bzw. komplexen Einträgen ist eine Liste mit n Einträgen der Form (x_1, x_2, \dots, x_n) , wobei $n \in \mathbb{N}$ und $x_i \in \mathbb{R}$ oder $x_i \in \mathbb{C}$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$. Die Menge aller n -Tupel bezeichnet man als \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n ,

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}, \quad (6.4)$$

$$\mathbb{C}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}\}. \quad (6.5)$$

Wie in der Literatur üblich, werden wir n -Tupel in Spaltenform

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

notieren. Diese Spaltendarstellung ist besonders im Zusammenhang linearen Abbildungen von Vektoren nützlich, siehe Kapitel 6.2.1. Sind $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ zwei n -Tupel mit

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

und $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind die für einen Vektorraum nötigen Verknüpfungen definiert als

$$\underline{x} \oplus \underline{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \odot \underline{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Damit stellen $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ und $(\mathbb{C}^n, \oplus, \odot)$ jeweils Vektorräume dar. Wenn vom Vektorraum \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n gesprochen wird, so sind die Vektorräume $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ bzw. $(\mathbb{C}^n, \oplus, \odot)$ gemeint. Wir werden die n -Tupel daher auch als Vektoren bezeichnen. Der Nullvektor ist hierbei durch

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

gegeben. Den Vektoren des \mathbb{R}^n kann darüber hinaus eine Länge zugeordnet werden, die auch als *Betrag* bezeichnet wird. Der Betrag eines Vektors $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

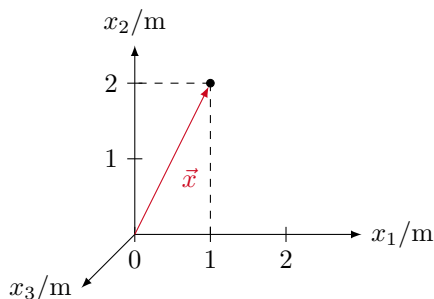
ist hierbei mithilfe des Satz des Pythagoras als

$$|\underline{v}| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \quad (6.11)$$

definiert. Für den Nullvektor folgt hieraus $|\underline{0}| = 0$.

Der Vektorraum $(\mathbb{R}^3, \oplus, \odot)$ wird in der klassischen Mechanik z.B. zur Beschreibung von vektoriellen Größen (z.B. Geschwindigkeit, Impuls, Kraft, Drehimpuls Drehmoment, etc.) in kartesischen Koordinaten verwendet.

Beispiel 6.3 Ein Massepunkt befinde sich an dem mit einem Punkt markierten Ort in dem folgenden 3-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem.



Der Ort Massepunktes soll durch einen Vektor \vec{x} (der Ortsvektor) beschrieben werden. Durch senkrechte Projektion des Ortsvektors auf die (raumfesten) orthogonalen Koordinatenachsen erhält man die drei kartesischen Koordinaten $x_1 = 1 \text{ m}$, $x_2 = 2 \text{ m}$ und $x_3 = 0 \text{ m}$. Um den Ortsvektor mathematisch darzustellen bietet es sich an, die drei kartesischen Koordinaten mithilfe eines 3-Tupels zu beschreiben. Wir wählen also den Vektorraum \mathbb{R}^3 zur Darstellung des Ortsvektors in kartesischen Koordinaten. Im \mathbb{R}^3 besitzt der in der Abbildungen gezeichnete Ortsvektor somit die Darstellung

$$\vec{x} \doteq \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \text{ m} \\ 2 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ m}. \quad (6.12)$$

Das Symbol \doteq bedeutet, dass der Ortsvektor $\vec{x} \in \mathbb{V}^3$ durch das 3-Tupel $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ dargestellt wird. Die Länge des Ortsvektors entspricht dem Abstand des Massepunktes vom Koordinatenursprung und ist durch

$$|\vec{x}| = |\underline{x}| = \sqrt{(1 \text{ m})^2 + (2 \text{ m})^2 + (0 \text{ m})^2} = \sqrt{5} \text{ m} \approx 2,236 \text{ m} \quad (6.13)$$

gegeben.

Aufgabe 6.1 Begründen Sie, warum die reellen Zahlen \mathbb{R} mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation, d.h. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, einen Vektorraum darstellen. Geben Sie den entsprechenden Nullvektor an.

Vektorraum der Monome

Die Menge aller Polynome vom Grad 1 (sog. *Monome*),

$$P_1 = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad (6.14)$$

zusammen mit den Verknüpfungen

$$(ax + b) \oplus (cx + d) := (a + c)x + (b + d), \quad (6.15)$$

$$\lambda \odot (ax + b) := (\lambda a)x + (\lambda b) \quad (6.16)$$

bilden einen Vektorraum, den wir als (P_1, \oplus, \odot) bezeichnen. Dieses Beispiel zeigt, dass ein Vektorraum eine sehr allgemeine Struktur ist und eine Vielzahl von Beispielen umfasst. Insbesondere können Funktionen mit entsprechenden Verknüpfungen einen Vektorraum bilden. In der Physik sind Vektorräume von Funktionen z.B. in der Quantentheorie relevant, in der der Zustand eines Quantenobjekts durch eine Funktion (sog. *Wellenfunktion*) beschrieben wird, die ein Element eines speziellen Vektorraums ist (*Hilbertraum*).

6.1.3 Skalarprodukt

Vektorräume werden häufig um ein weiteres nützliches Produkt ergänzt, mit dessen Hilfe der Betrag eines Vektors und die Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor beschrieben werden kann. Dieses Produkt wird *Skalarprodukt* genannt und besitzt die folgenden Eigenschaften.

Definition 6.2 Sei (V, \oplus, \odot) ein Vektorraum über \mathbb{R} . Eine Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Skalarprodukt*, wenn für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften gelten:

1. $\langle \vec{u} | \vec{v} \oplus \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle$
2. $\langle \vec{u} \oplus \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle + \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$
3. $\langle \lambda \odot \vec{u} | \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$
4. $\langle \vec{u} | \lambda \odot \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$
5. $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle$
6. $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle \geq 0$
7. $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Definition 6.3 Sei (V, \oplus, \odot) ein Vektorraum über \mathbb{C} . Eine Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Skalarprodukt*, wenn für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ die folgenden Eigenschaften gelten:

1. $\langle \vec{u} | \vec{v} \oplus \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle$
2. $\langle \vec{u} \oplus \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle + \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$
3. $\langle \lambda \odot \vec{u} | \vec{v} \rangle = \lambda^* \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$
4. $\langle \vec{u} | \lambda \odot \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$
5. $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle^*$
6. $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle \geq 0$
7. $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Mithilfe des Skalarprodukts wird der *Betrag* (auch: *2-Norm*) eines Vektors allgemein als

$$|\vec{u}| := \sqrt{\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle} \quad (6.17)$$

definiert. In der Mathematik spricht man davon, dass ein Skalarprodukt eine Norm induziert. D.h., hat man ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum definiert, so lässt sich damit über Gl. (6.17) ein Längenbegriff einführen. Mithilfe eines Längenbegriffs kann wiederum ein Abstands begriff (sog. *Metrik*) definiert werden. Man definiert den Abstand d zweier Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in V$ als

$$d(\vec{u}, \vec{v}) := |\vec{u} - \vec{v}|. \quad (6.18)$$

In diesem Sinne ist ein Skalarprodukt eine sehr fundamentale Abbildung, aus der man eine Vielzahl von Strukturen erhält. Mithilfe des Skalarprodukts definiert man zudem den die Orthogonalität von Vektoren: Zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in V$ heißen *orthogonal*, wenn $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 0$. Einen Vektor $\vec{u} \in V$ mit $|\vec{u}| = 1$ nennt man einen *Einheitsvektor*.

Skalarprodukt im \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n

Wir betrachten zunächst Vektoren des \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Für zwei Vektoren $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

ist das (Standard-)Skalarprodukt $\langle \underline{u} | \underline{v} \rangle$ als

$$\langle \underline{u} | \underline{v} \rangle := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad (6.20)$$

definiert. Für zwei komplexe Vektoren $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{C}^n$ ist das Skalarprodukt als

$$\langle \underline{u} | \underline{v} \rangle := u_1^* v_1 + u_2^* v_2 + \cdots + u_n^* v_n = \sum_{i=1}^n u_i^* v_i \quad (6.21)$$

definiert. Im \mathbb{R}^n schreibt man anstatt $\langle \underline{u} | \underline{v} \rangle$ auch $\underline{u} \cdot \underline{v}$. Wir werden diese Notation im folgenden verwenden und den Multiplikationspunkt \cdot entsprechend nur für das Skalarprodukt von Vektoren verwenden.

Für einen Vektor $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ folgt mit der Definition des Skalarprodukts aus Gl. (6.20), dass der Betrag aus Gl. (6.17) durch

$$|\underline{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \quad (6.22)$$

gegeben ist. Dies entspricht dem Satz des Pythagoras in n Dimensionen, vgl. Gl. (6.11).

Beispiel 6.4 Ein Massepunkt bewege sich unter der Wirkung der zeitlich und räumlich konstanten Kraft \vec{F} von einem Anfangsort \vec{x}_a zu einem Endort \vec{x}_e . Wir wählen ein Koordinatensystem und stellen die Vektoren in kartesischen Koordinaten durch 3-Tupel aus dem \mathbb{R}^3 dar. Der Anfangs- und Endort sei dann in kartesischen Koordinaten durch

$$\vec{x}_a \doteq \underline{x}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ m}, \quad \vec{x}_e \doteq \underline{x}_e = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ m} \quad (6.23)$$

gegeben. Die auf den Massepunkt wirkende Kraft sei

$$\vec{F} \doteq \underline{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ N.} \quad (6.24)$$

Die Arbeit W , die durch die Kraft an dem Körper verrichtet wird, ergibt sich damit zu

$$W = \vec{F} \cdot (\vec{x}_e - \vec{x}_a) \quad (6.25)$$

$$= \underline{F} \cdot (\underline{x}_e - \underline{x}_a) \quad (6.26)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \text{ N m} \quad (6.27)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ N m} \quad (6.28)$$

$$= (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 0) \text{ N m} \quad (6.29)$$

$$= 14 \text{ J.} \quad (6.30)$$

Skalarprodukt im \mathbb{V}^2 und \mathbb{V}^3

Für zwei beliebige, vom Nullvektor verschiedene, Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^2$ oder \mathbb{V}^3 definiert man das Skalarprodukt als

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\varphi). \quad (6.31)$$

Hierbei ist $\varphi \in [0; \pi]$ der von \vec{u} und \vec{v} eingeschlossene Winkel, siehe Abbildung 6.5. Für den Winkel zwischen zwei Vektoren \vec{u} und \vec{v} schreibt man auch $\angle(\vec{u}, \vec{v})$. Wenn wir die Vektoren des \mathbb{V}^n ($n \in \{2, 3\}$) durch n -Tupel des \mathbb{R}^n darstellen, so ist die Definition (6.31) äquivalent zu (6.20), wie in Kapitel 6.1.4 zeigen werden.

Der Ausdruck in Gl. (6.31) lässt sich geometrisch wie folgt interpretieren: Wählt man für die Vektoren \vec{u} und \vec{v} den selben Angriffspunkt und projiziert den Vektor \vec{v} senkrecht auf den Vektor \vec{u} , siehe Abbildung 6.5, so ist die Entfernung zwischen der Projektion und dem Angriffspunkt gleich $|\vec{v}| \cos(\varphi)$. Genauer ist $|\vec{v}| \cos(\varphi) > 0$, wenn $0 \leq \varphi < \pi/2$. Entsprechend ist $|\vec{v}| \cos(\varphi) < 0$ wenn $\pi/2 < \varphi \leq \pi$. In diesem Sinne ist das Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{v}$ gleich dem Produkt des Betrags von \vec{u} und der Projektion von \vec{v} auf \vec{u} . Ist das Skalarprodukt gleich Null, so sind die beiden Vektoren orthogonal, d.h. senkrecht zueinander.

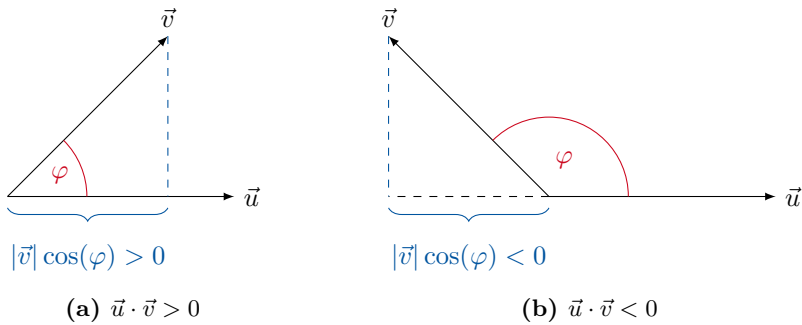


Abbildung 6.5: Geometrische Interpretation des Skalarprodukts.

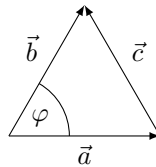


Abbildung 6.6: Dreieck zum Beweis des Kosinussatz, wobei $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Mit der Definition (6.31) des Skalarprodukts im \mathbb{V}^2 lässt sich der bekannte Kosinussatz beweisen. Hierzu betrachten wir ein Dreieck, dessen drei Seiten durch die drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} beschrieben seien, siehe Abbildung 6.6. Es gilt $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$. Dann folgt der Kosinussatz

$$|\vec{c}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} \quad (6.32)$$

$$= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \quad (6.33)$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \quad (6.34)$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos[\angle(\vec{a}, \vec{b})]. \quad (6.35)$$

Weitere Erläuterungen zum Skalarprodukt finden Sie unter

<https://rwth-aachen.sciebo.de/s/tK5grD3o7lJtsBe>

Aufgabe 6.2 Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a} = 2\vec{e}_1$ und $\vec{b} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$.

Aufgabe 6.3 Auf dem reellen Vektorraum (P_1, \oplus, \odot) kann man ein Skalarprodukt wie folgt definieren:

$$\langle f|g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx, \quad (6.36)$$

wobei $f, g \in P_1$ zwei Monome (Vektoren) sind. Zeigen Sie, dass das Produkt in Gl. (6.36) tatsächlich ein Skalarprodukt gemäß Definition 6.2 darstellt.

6.1.4 Basis eines Vektorraums

Vektorräume (mit endlicher Dimension) besitzen die Eigenschaft, dass sich jeder Vektor des Vektorraums durch eine minimale Anzahl endlich vieler Vektoren eindeutig darstellen lässt. Diese endlich vielen Vektoren nennt man eine *Basis* des Vektorraums. Im Folgenden soll der Begriff der Basis eines Vektorraums genauer gefasst werden.

Lineare Unabhängigkeit

Wir betrachten einen beliebigen Vektorraum V über \mathbb{R} . Wählt man aus V endlich viele Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ aus, so heißt der Ausdruck

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i \quad (6.37)$$

Linearkombination von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Hierbei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Aus den Eigenschaften eines Vektorraums folgt, dass eine Linearkombination von Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ einen Vektor aus V liefert.

Endlich viele Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ nennt man *linear unabhängig*, wenn die Gleichung

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i \quad (6.38)$$

nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ besitzt. Eine Menge von Vektoren, die nicht linear unabhängig ist, nennt man *linear abhängig*.

Aufgabe 6.4 Sei (V, \oplus, \odot) ein Vektorraum über \mathbb{R} mit $V = \{\vec{0}\}$, wobei $\vec{0}$ der Nullvektor ist. Ist $\vec{0} \in V$ linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

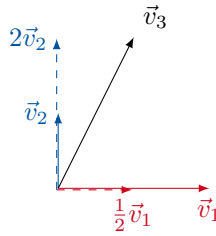


Abbildung 6.7: Linearkombinationen von Vektoren im \mathbb{V}^2 .

Nur wenn eine Menge von Vektoren linear abhängig ist, kann man einen der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen. Betrachten wir z.B. endlich viele vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$, die linear abhängig sind. Dann besitzt Gl. (6.38) nicht nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Nehmen wir an, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, dass $\lambda_1 \neq 0$. Dann folgt aus Gl. (6.38), dass

$$\vec{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v}_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{v}_n, \quad (6.39)$$

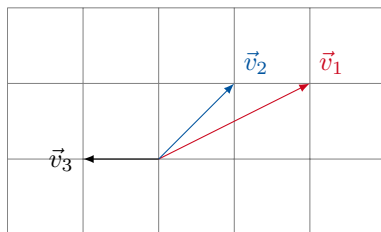
d.h. \vec{v}_1 lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ darstellen. Da nach Voraussetzung $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ ist, muss es ein weiteres $\lambda_i \neq 0$ geben, wobei $i \in \{2, \dots, n\}$.

Man kann zeigen, dass in den Vektorräumen \mathbb{V}^n und \mathbb{R}^n jeweils maximal n Vektoren linear unabhängig sind. D.h., nimmt man zu n linear unabhängigen Vektoren einen weiteren Vektor hinzu, so sind die $n + 1$ Vektoren stets linear abhängig. Als Beispiel sind in Abbildung 6.7 zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{V}^2$ dargestellt. Die drei Vektoren \vec{v}_1, \vec{v}_2 und \vec{v}_3 sind jedoch linear abhängig. Z.B. kann der Vektor \vec{v}_3 als Linearkombination

$$\vec{v}_3 = \frac{1}{2} \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2. \quad (6.40)$$

der Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 dargestellt werden.

Aufgabe 6.5 Betrachten Sie die drei in der folgenden Abbildungen dargestellten Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{V}^2$.



Sind \vec{v}_1 und \vec{v}_2 linear unabhängig? Falls ja, stellen Sie \vec{v}_3 als Linearkombination der Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 dar.

Basis eines Vektorraums

Eine Menge $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ von n linear unabhängigen Vektoren $\vec{b}_i \in \mathbb{V}^n$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$ wird als *Basis* von \mathbb{V}^n bezeichnet. Wir werden uns im Folgenden auf Basen beschränken, deren Vektoren jeweils die Länge 1 besitzen, d.h. die Vektoren sind *normiert*. Normierte Vektoren sind somit Einheitsvektoren. Zudem sollen die Basisvektoren paarweise orthogonal, d.h. senkrecht zueinander sein. Basen aus orthogonalen und normierten Vektoren werden auch als *Orthonormalbasen* bezeichnet. Für die Vektoren $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ einer Orthonormalbasis gilt also $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i = |\vec{b}_i|^2 = 1$ und $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_k = 0$ für $i \neq k$. Diese beiden Eigenschaften einer Orthonormalbasis können mithilfe des *Kronecker-Symbols*

$$\delta_{ik} := \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (6.41)$$

wie folgt ausgedrückt werden:

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_k = \delta_{ik}. \quad (6.42)$$

Jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{V}^n$ kann eindeutig als Linearkombination

$$\vec{v} = v_1 \vec{b}_1 + \dots + v_n \vec{b}_n = \sum_{i=1}^n v_i \vec{b}_i \quad (6.43)$$

von Basisvektoren dargestellt werden, siehe Abbildung 6.8. Die Koeffizienten $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ werden als die *Koordinaten* von \vec{v} bezüglich der Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ bezeichnet. Es ist wichtig zu betonen, dass die Werte der Koordinaten v_1, \dots, v_n von der Wahl der Basis abhängen.

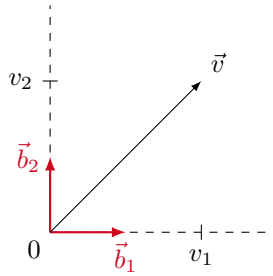


Abbildung 6.8: Darstellung einer orthonormalen Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} \in \mathbb{V}^2$ und der Komponenten eines Vektors \vec{v} bezüglich dieser Basis.

Standardbasis des \mathbb{R}^n . Im \mathbb{R}^n gibt es n spezielle Basisvektoren, die als *Standardbasisvektoren* \underline{e}_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ bezeichnet werden. Diese sind definiert als

$$\underline{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \underline{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.44)$$

Die Standardbasisvektoren sind paarweise orthogonal und normiert, d.h. sie bilden eine Orthonormalbasis. Es gilt somit $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k = \delta_{ik}$.

Standardbasis des \mathbb{V}^n . Im abstrakten \mathbb{V}^n werden die n *Standardbasisvektoren* mit $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ bezeichnet. Sie sind per Definition orthonormal, d.h. es gilt $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$. Die Standardbasisvektoren des \mathbb{V}^n können durch die Standardbasisvektoren des \mathbb{R}^n in Gl. (6.44) dargestellt werden.

Koordinatensysteme und Basiswechsel

Wichtige Anwendungen der Darstellung von Vektoren durch Basisvektoren in der Physik finden sich in der klassischen Mechanik. Ein Beispiel ist die Angabe des Ortes eines Massepunktes im 3-dimensionalen Raum durch einen sog. *Ortsvektor*. Um den Ort eines Massepunktes im Raum anzugeben, muss ein Bezugssystem festgelegt werden. Dieses Bezugssystem wird als *Koordinatensystem* bezeichnet. Um ein Koordinatensystem zu definieren, muss zunächst ein fester Bezugspunkt im Raum festgelegt werden, der als *Koordinatenursprung*

0 bezeichnet wird. Bezüglich des Koordinatenursprungs kann der Ort P des Massepunktes im Raum durch den sog. *Ortsvektor* $\vec{x} = \vec{0P} \in \mathbb{V}^3$ beschrieben werden. Um den Ortsvektor durch Koordinaten zu beschreiben, wählt man ausgehend vom Koordinatenursprung drei orthonormale Basisvektoren, die per Konvention ein Rechtssystem bilden, vgl. Kapitel 6.1.5. Häufig werden als Basisvektoren die Standardbasisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gewählt. Das so festgelegte Koordinatensystem notieren wir als $[0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$. Bezüglich des Koordinatenursprungs und der drei Standardbasisvektoren besitzt der Ortsvektor dann die Darstellung

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3. \quad (6.45)$$

Der Ort des Massepunktes ist dann eindeutig durch die Angabe der drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 festgelegt. Die drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 werden auch als *kartesische Koordinaten* bezeichnet. Die Werte der Koordinaten hängen dabei von der Wahl des Koordinatensystems ab. Arbeitet man stets mit dem selben festen Koordinatensystem, so bietet es sich an, den Ortsvektor $\vec{x} \in \mathbb{V}^3$ durch ein 3-Tupel $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ in der Form

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

darzustellen. Bei der Angabe des Ortsvektors in der Form (6.46) ist es wichtig im Hinterkopf zu behalten, wie das Koordinatensystem definiert ist, da die Basisvektoren in dieser Darstellung nicht mehr sichtbar sind. In der Physik ist es daher manchmal besser, die Darstellung (6.45) zu verwenden. Dies gilt insbesondere für Situationen, bei denen das Koordinatensystem gewechselt wird, z.B. bei der Untersuchung von relativ zueinander bewegten Bezugssystemen.

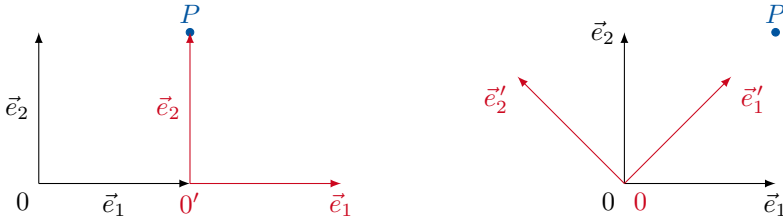
Die Abhängigkeit der Koordinaten des Ortsvektors wollen wir an einem Beispiel illustrieren. Dazu betrachten wir den in Abbildung 6.9a dargestellten Punkt P im 2-dimensionalen euklidischen Raum. Bezüglich des Koordinatensystems $[0; \vec{e}_1, \vec{e}_2]$ besitzt der Ortsvektor $\vec{x} = \vec{0P} \in \mathbb{V}^2$ die Darstellung

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} \doteq \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.47)$$

Bezüglich des Koordinatensystems $[0'; \vec{e}_1', \vec{e}_2']$ besitzt der Ortsvektor die Darstellung

$$\vec{x} = \vec{e}_2' \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} \doteq \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.48)$$

Die Koordinaten des Ortsvektors haben sich also aufgrund der Verschiebung des Koordinatenursprungs verändert. Der Ort des Punktes P im euklidischen



(a) Verschiebung des Koordinatenursprungs um eine Einheit nach rechts. (b) Drehung der Basisvektoren um $\pi/4$ im mathematisch positiven Drehsinn.

Abbildung 6.9: Illustration der Abhängigkeit der Koordinaten des Ortsvektors vom Koordinatensystem.

Raum ist jedoch unverändert. Als zweites Beispiel betrachten wir ein Koordinatensystem $[0; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2]$, dessen Basisvektoren gegenüber dem Koordinatensystem $[0; \vec{e}_1, \vec{e}_2]$ um $\pi/4$ im mathematisch positiven Drehsinn gedreht sind, siehe Abbildung 6.9b. Der Koordinatenursprung befindet sich am selben Ort. Bezüglich dieses rotierten Koordinatensystems besitzt der Ortsvektor die Darstellung

$$\vec{x} = \sqrt{2} \vec{e}'_1 \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} \doteq \underline{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.49)$$

Auch hier haben sich die Koordinaten des Ortsvektors aufgrund der anderen Basisvektoren geändert. Es ist wichtig festzuhalten, dass in der Darstellung des Ortsvektors in der Form (6.46) keine Information über die Basisvektoren enthalten ist. In der Darstellung (6.45) ist zumindest die Information über die Basisvektoren enthalten; die Information über den Ort des Koordinatenursprungs fehlt jedoch auch. Um alle Informationen über das gewählte Koordinatensystem anzugeben schreiben wir daher manchmal auch explizit

$$[0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] : \quad \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3. \quad (6.50)$$

oder

$$[0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] : \quad \vec{x} \doteq \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (6.51)$$

Äquivalenz der Skalarprodukte des \mathbb{V}^n und \mathbb{R}^n

Wir wollen nun zeigen, dass die Definitionen der Skalarprodukte im \mathbb{V}^n und \mathbb{R}^n in Gln. (6.31) und (6.20) für $n \in \{2, 3\}$ äquivalent sind, wenn die Vektoren

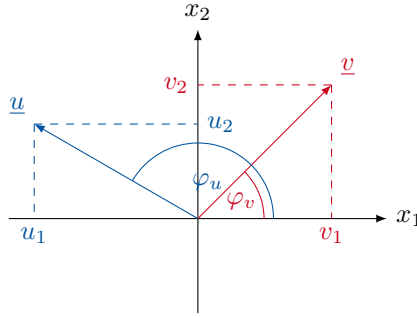


Abbildung 6.10: Bestimmung der kartesischen Koeffizienten eines Vektors.

des \mathbb{V}^n durch n -Tupel des \mathbb{R}^n dargestellt werden. Für den Beweis beschränken wir uns auf $n = 2$. Der Beweis für $n = 3$ ist analog. Für den Beweis betrachten wir einen beliebigen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$. Nun wählen wir ein Koordinatensystem, siehe Abbildung 6.10, und stellen den Vektor \vec{v} durch ein 2-Tupel $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ dar:

$$\vec{v} \doteq \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2. \quad (6.52)$$

Hierbei haben wir uns zunutze gemacht, dass sich jeder Vektor im \mathbb{R}^n (und auch im \mathbb{V}^n) in eindeutiger Weise durch die Standardbasisvektoren ausdrücken lässt, s.o. Die Koordinaten v_1 und v_2 können mithilfe des Winkels φ_v zwischen dem Vektorpfeil \underline{v} und der x_1 -Achse wie folgt ausgedrückt werden, siehe Abbildung 6.10,

$$v_1 = |\underline{v}| \cos(\varphi_v), \quad (6.53)$$

$$v_2 = |\underline{v}| \sin(\varphi_v). \quad (6.54)$$

Wir betrachten nun einen zweiten Vektor $\vec{u} \in \mathbb{V}^2$, den wir ebenfalls als ein 2-Tupel $\underline{u} \in \mathbb{R}^2$ darstellen. Das 2-Tupel \underline{u} kann gemäß

$$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 \quad (6.55)$$

durch die Standardbasisvektoren dargestellt werden, wobei

$$u_1 = |\underline{u}| \cos(\varphi_u), \quad (6.56)$$

$$u_2 = |\underline{u}| \sin(\varphi_u). \quad (6.57)$$

Damit folgt

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad (6.58)$$

$$= |\underline{u}| |\underline{v}| [\cos(\varphi_u) \cos(\varphi_v) + \sin(\varphi_u) \sin(\varphi_v)] \quad (6.59)$$

$$= |\underline{u}| |\underline{v}| \cos(\varphi_u - \varphi_v) \quad (6.60)$$

$$= |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\varphi) \quad (6.61)$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{v}. \quad (6.62)$$

Hierbei haben wir das Additionstheorem aus Gl. (4.56) benutzt. Zudem haben wir verwendet, dass $|\vec{u}| = |\underline{u}|$ und $|\vec{v}| = |\underline{v}|$. Die Definition des Skalarprodukts gemäß Gl. (6.31) ist somit äquivalent zu (6.20) bei der Wahl eines Koordinatensystems und Darstellung der Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^n$ durch n -Tupel $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$. Es ist auch möglich die Äquivalenz der Skalarproduktdefinitionen zu zeigen, indem die Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^2$ durch die abstrakten Standardbasisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathbb{V}^2$ als

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2, \quad (6.63)$$

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \quad (6.64)$$

dargestellt werden. Damit ergibt sich unter Verwendung der Orthonormalität der Standardbasisvektoren und der Eigenschaften des Skalarprodukts

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2) \cdot (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) \quad (6.65)$$

$$= u_1 v_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + u_1 v_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + u_2 v_1 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + u_2 v_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \quad (6.66)$$

$$= u_1 v_1 \delta_{11} + u_1 v_2 \delta_{12} + u_2 v_1 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 \delta_{21} + u_2 v_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \delta_{22} \quad (6.67)$$

$$= u_1 v_1 + 0 + 0 + u_2 v_2. \quad (6.68)$$

Beispiel 6.5 Wir wollen die Arbeit W aus Beispiel 6.4 noch einmal berechnen. Diesmal jedoch verwenden wir die Darstellung der Kraft- und Ortsvektoren in kartesischen Koordinaten durch die abstrakten Standardbasisvektoren des \mathbb{V}^3 . Der Anfangs- und Endort des Massepunktes ist dann durch

$$\vec{x}_a = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)\text{m}, \quad (6.69)$$

$$\vec{x}_e = (4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3)\text{m} \quad (6.70)$$

gegeben. Die auf den Massepunkt wirkende Kraft ist entsprechend

$$\vec{F} = (2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)\text{N}. \quad (6.71)$$

Die Arbeit W , die durch die Kraft an dem Körper verrichtet wird, ergibt sich damit zu

$$W = \vec{F} \cdot (\vec{x}_e - \vec{x}_a) \quad (6.72)$$

$$= (2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) \text{N} \cdot [(4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \text{m} - (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \text{m}] \quad (6.73)$$

$$= (2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) \cdot [(4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3) - (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)] \text{N m} \quad (6.74)$$

$$= (2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) \cdot (3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) \text{N m} \quad (6.75)$$

$$= 2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot (3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) \text{J} \quad (6.76)$$

$$= 2(3\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + 4\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 3\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 + 4\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2) \text{J} \quad (6.77)$$

$$= 2(3 + 0 + 0 + 4 + 0 + 0) \text{J} \quad (6.78)$$

$$= 14 \text{ J}. \quad (6.79)$$

Bestimmung der Koordinaten eines Vektors durch Projektion

Mithilfe des Skalarprodukts lassen sich die Koordinaten eines beliebigen Vektors $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ bzgl. einer Basis bestimmen: Die i -te Koordinate des Vektors \vec{u} ergibt sich durch das Skalarprodukt mit dem Standardbasisvektor \vec{e}_i . Um dies zu zeigen, wird der Vektor \vec{u} durch die Standardbasisvektoren dargestellt und die Orthonormalität der Standardbasisvektoren verwendet:

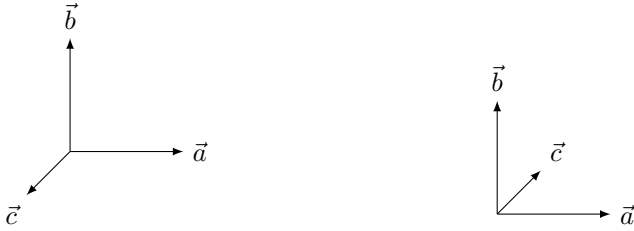
$$\vec{e}_i \cdot \vec{u} = \vec{e}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^n u_k \vec{e}_k \right) \quad (6.80)$$

$$= \sum_{k=1}^n u_k \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k \quad (6.81)$$

$$= \sum_{k=1}^n u_k \delta_{ik} \quad (6.82)$$

$$= u_i. \quad (6.83)$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass bei der Summe von δ_{ik} über k nur der Term mit $k = i$ von Null verschieden ist. Dieses Verfahren zur Bestimmung der Komponenten eines Vektors nennt man auch *Projektion*. Die Projektion ist besonders nützlich um verschiedenen Darstellungen von Vektoren (z.B. kartesische und krummlinige Koordinaten) ineinander umzurechnen.



(a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem. \vec{c} zeigt aus der Bildebene heraus. (b) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Linkssystem. \vec{c} zeigt in die Bildebene hinein.

Abbildung 6.11: Illustration eines Rechts- bzw. Linkssystems dreier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}^3$.

6.1.5 Vektorprodukt

Im Raum \mathbb{V}^3 ist noch ein weiteres Produkt zwischen Vektoren definiert, das sog. *Vektorprodukt* (auch: *Kreuzprodukt*). Das Vektorprodukt $\times : \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$ bildet zwei Vektoren auf einen neuen Vektor ab. Für zwei Vektoren vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}^3$ ist es definiert als

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin[\angle(\vec{a}, \vec{b})]. \quad (6.84)$$

Hierbei ist $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0; \pi]$ der Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} , s.o. Der Vektor $\vec{n} \in \mathbb{V}^3$ besitzt die Länge 1, d.h. $|\vec{n}| = 1$, und ist orthogonal zu \vec{a} und zu \vec{b} , d.h. $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$. Die Richtung von \vec{n} ist so definiert, dass die Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{n} in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, siehe Abbildung 6.11. Die Richtung von \vec{n} lässt sich mit der Rechte-Hand-Regel bestimmen: Die rechte Hand wird so orientiert, dass der Daumen in Richtung \vec{a} und der Zeigefinger in Richtung \vec{b} zeigt. Der abgespreizte Mittelfinger, der senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} steht, zeigt dann in Richtung \vec{n} . Aus der Definition (6.84) folgt, dass für das Vektorprodukt die Eigenschaften

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad (6.85)$$

$$(\lambda \vec{a}) \times (\mu \vec{b}) = (\lambda \mu)(\vec{a} \times \vec{b}), \quad (6.86)$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad (6.87)$$

gelten, wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebige von Null verschiedene reelle Zahlen sind. Aus der letzten Gleichung folgt auch, dass das Kreuzprodukt zwischen parallelen und anti-parallelen Vektoren gleich dem Nullvektor ist.

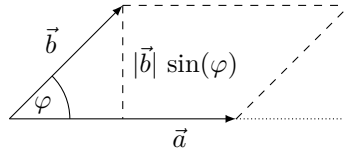


Abbildung 6.12: Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}^3$ spannen ein Parallelogramm auf.

Der Betrag des Vektorprodukts (6.84) zweier Vektoren lässt sich geometrisch als der Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms interpretierten. Hierzu betrachten wir zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}^3$, die weder parallel noch anti-parallel sind. Die beiden Vektoren schließen folglich den Winkel $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \in (0; \pi)$ ein. Die beiden Vektoren spannen ein Parallelogramm auf, siehe Abbildung 6.12. Durch zerteilen des Parallelogramms kann dieses zu einem Rechteck mit den Seitenlängen $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}| \sin(\varphi)$ umgeformt werden. Der Flächeninhalt A des Parallelogramms beträgt folglich

$$A = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\varphi) = |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (6.88)$$

Hierbei wurde verwendet, dass $|\sin(\varphi)| = \sin(\varphi)$ für $\varphi \in (0; \pi)$.

Wählt man ein kartesisches Koordinatensystem, so kann das Vektorprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ durch die kartesischen Koordinaten der Vektoren \vec{u} und \vec{v} ausgedrückt werden. Als Basisvektoren wählen wir die Standardbasisvektoren \vec{e}_i , $i \in \{1, 2, 3\}$. Aus den Eigenschaften des Vektorprodukts folgt sofort

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}. \quad (6.89)$$

Da die Standardbasisvektoren in der Reihenfolge $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ein Rechtssystem bilden und jeweils die Länge 1 besitzen, folgt zudem

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \quad (6.90)$$

siehe Abbildung 6.13. Diese drei Gleichungen können auch in der Form

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_k = \vec{e}_l \quad (6.91)$$

geschrieben werden, wobei (i, k, l) eine zyklische Vertauschung von $(1, 2, 3)$ ist, d.h. $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ oder $(3, 1, 2)$. Aus der Antikommutativität folgt daraus

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2. \quad (6.92)$$

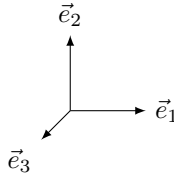


Abbildung 6.13: Die Standardbasisvektoren \vec{e}_1 , \vec{e}_2 und \vec{e}_3 bilden ein Rechtssystem.

Damit ergibt sich das Vektorprodukt zu

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \quad (6.93)$$

$$\begin{aligned} &= a_1b_1\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + a_1b_2\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + a_1b_3\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \\ &\quad + a_2b_1\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + a_2b_2\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + a_2b_3\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \\ &\quad + a_3b_1\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + a_3b_2\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + a_3b_3\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (6.94)$$

$$= a_1b_2\vec{e}_3 - a_1b_3\vec{e}_2 - a_2b_1\vec{e}_3 + a_2b_3\vec{e}_1 + a_3b_1\vec{e}_2 - a_3b_2\vec{e}_1 \quad (6.95)$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3. \quad (6.96)$$

Dargestellt durch 3-Tupel lautet die letzte Gleichung entsprechend

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}. \quad (6.97)$$

Beispiel 6.6 Ein Massepunkt mit der elektrischen Ladung q bewegt sich zum Zeitpunkt t mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0(\vec{e}_1 + \vec{e}_3)$ in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$. Auf ihn wirkt folglich die Kraft

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (6.98)$$

$$= qv_0B_0(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) \times (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \quad (6.99)$$

$$= qv_0B_0(-\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \times \vec{e}_2) \quad (6.100)$$

$$= qv_0B_0(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3). \quad (6.101)$$

Aufgabe 6.6 Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht, die durch die drei Punkte $P = (0, 0, 1)$, $Q = (1, 1, 1)$ und $R = (1, 0, 0)$ verläuft.

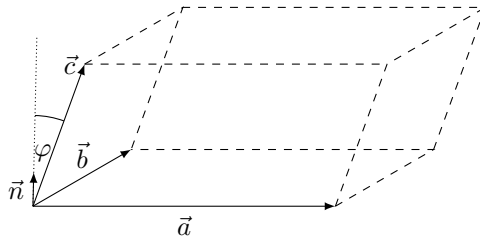


Abbildung 6.14: Ein Parallelepiped wird durch drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannt.

Aufgabe 6.7 Kann das Vektorprodukt auch für Vektoren des \mathbb{V}^2 definiert werden?

Mithilfe des Skalarprodukts und des Vektorprodukts kann das Volumen eines durch drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds berechnet werden. Wir betrachten dazu ein Parallelepiped, dass durch drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannt wird, siehe Abbildung 6.14. Die Grundfläche des Parallelepipeds ist ein Parallelogramm, dass durch \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird. Der Flächeninhalt A der Grundfläche beträgt somit $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Die Höhe des Parallelepipeds beträgt $h = |\vec{c}| \cos(\varphi) = |\vec{n} \cdot \vec{c}|$, wobei

$$\vec{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \quad (6.102)$$

der Einheitsvektor ist, der senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} steht, siehe Abbildung 6.14. Damit folgt für den Volumeninhalt V des Parallelepipeds

$$V = Ah = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{n} \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| \left| \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \cdot \vec{c} \right| = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|. \quad (6.103)$$

Das Produkt

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (6.104)$$

wird auch als *Spatprodukt* bezeichnet. Ein Video zum Spatprodukt finden Sie unter

<https://rwth-aachen.sciebo.de/s/LWjfsM6AFw9QlGh>

6.1.6 Vektorwertige Funktionen

In der Physik, insbesondere in der Mechanik, benötigt man vektorwertige Funktionen, d.h. Abbildungen der Form $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}^3$ bzw. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, bei denen ein Element der reellen Zahlen einen Vektor zugeordnet wird. Ein Beispiel für solch eine Funktion ist die sog. *Bahnkurve* $\vec{x}(t)$, die den Ort $\vec{x} \in \mathbb{V}^3$ eines Massepunktes in Abhängigkeit der Zeit $t \in \mathbb{R}$ beschreibt. Wählt man ein Basis $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$, so kann jede vektorwertige Funktion $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}^3$ in der Form

$$\vec{f}(x) = f_1(x)\vec{e}_1 + f_2(x)\vec{e}_2 + f_3(x)\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 f_i(x)\vec{e}_i \quad (6.105)$$

dargestellt werden. Für eine Funktion $\underline{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist die Darstellung entsprechend

$$\underline{f}(x) = f_1(x)\underline{e}_1 + f_2(x)\underline{e}_2 + f_3(x)\underline{e}_3 = \sum_{i=1}^3 f_i(x)\underline{e}_i = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}. \quad (6.106)$$

Eine vektorwertige Funktion heißt *stetig*, wenn alle ihre Koordinatenfunktionen f_1 , f_2 und f_3 stetig sind. Die Ableitung einer vektorwertigen Funktion $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}^3$ ist definiert als

$$\vec{f}'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x_0 + h) - \vec{f}(x_0)}{h}. \quad (6.107)$$

Drückt man \vec{f} durch die Koordinatenfunktionen aus, so folgt aus Gl. (6.107)

$$\vec{f}'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{f_i(x_0 + h) - f_i(x_0)}{h} \vec{e}_i \quad (6.108)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f_i(x_0 + h) - f_i(x_0)}{h} \right) \vec{e}_i \quad (6.109)$$

$$= \sum_{i=1}^3 f'_i(x_0) \vec{e}_i \quad (6.110)$$

$$= f'_1(x_0)\vec{e}_1 + f'_2(x_0)\vec{e}_2 + f'_3(x_0)\vec{e}_3. \quad (6.111)$$

Die Ableitung $\vec{f}'(x_0)$ ergibt sich also durch komponentenweise Differentiation. Hieraus ergeben sich die folgenden Rechenregeln:

$$\left[\vec{f}(x) + \vec{g}(x) \right]' = \vec{f}'(x) + \vec{g}'(x), \quad (6.112)$$

$$\left[\vec{f}(x) \cdot \vec{g}(x) \right]' = \vec{f}'(x) \cdot \vec{g}(x) + \vec{f}(x) \cdot \vec{g}'(x), \quad (6.113)$$

$$\left[\vec{f}(x) \times \vec{g}(x) \right]' = \vec{f}'(x) \times \vec{g}(x) + \vec{f}(x) \times \vec{g}'(x), \quad (6.114)$$

$$\left[\vec{f}(x)g(x) \right]' = \vec{f}'(x)g(x) + \vec{f}(x)g'(x), \quad (6.115)$$

$$\left[\vec{f}(g(x)) \right]' = \vec{f}'(g(x))g'(x). \quad (6.116)$$

Die Integration einer vektorwertigen Funktion ist als Integration der einzelnen Koordinatenfunktionen zu verstehen,

$$\int_a^b \vec{f}(x) \, dx = \sum_{i=1}^3 \left(\int_a^b f_i(x) \, dx \right) \vec{e}_i. \quad (6.117)$$

6.2 Lineare Abbildungen

In der Physik spielen u.a. räumliche Symmetrien eine wichtige Rolle bei der Formulierung der physikalischen Grundgesetze. Hierzu zählen Verschiebungen oder Drehungen im Raum. Ein physikalisches System besitzt eine Rotationssymmetrie, wenn die Gleichungen, die das System beschreiben, bei einer Raumdrehung ihre Struktur nicht ändern. Bei der Untersuchung eines Systems auf eine Rotationssymmetrie muss man u.a. bestimmen, wie sich physikalische Größen des Systems ändern. Da unter den physikalischen Größen auch vektorielle Größen sind, stellt sich die Frage, wie sich vektorielle Größen unter Rotationen ändern.

Mathematisch wird die Rotation einer vektoriellen Größe \vec{v} durch eine Abbildung $f: \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$ beschrieben, die den Vektor \vec{v} auf einen neuen (rotierten) Vektor \vec{v}' abbildet, d.h. $\vec{v}' = f(\vec{v})$. Im Falle von räumlichen Drehungen (und Verschiebungen) ist diese Abbildung linear, d.h. es gilt

$$f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}). \quad (6.118)$$

für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. In der Mathematik schreibt man anstatt $\vec{v}' = f(\vec{v})$ auch $\vec{v}' = \mathbf{A}\vec{v}$, wobei \mathbf{A} als ein *linearer Operator* bezeichnet wird. Für einen linearen Operator gilt folglich

$$\mathbf{A}(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \mathbf{A}\vec{u} + \mu \mathbf{A}\vec{v}. \quad (6.119)$$

Im Folgenden werden wir lineare Operatoren durch sog. *Matrizen* darstellen und verschiedene Eigenschaften und Anwendungen von Matrizen diskutieren.

6.2.1 Matrizen

Für die folgenden Betrachtungen werden wir Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{V}^n$ durch n -Tupel $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ darstellen. Die Koordinaten eines Vektors \vec{v} bezeichnen wir mit $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\vec{v} \doteq \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (6.120)$$

Wir betrachten zwei Vektoren $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$ und $\underline{v}' \in \mathbb{R}^n$ aus verschiedenen Vektorräumen. Eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, die den Vektor \underline{v} auf den Vektor \underline{v}' abbildet, besitzt die allgemeine Form

$$v'_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1m}v_m, \quad (6.121a)$$

$$v'_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2m}v_m, \quad (6.121b)$$

$$\vdots \quad (6.121c)$$

$$v'_n = a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + a_{nm}v_m, \quad (6.121d)$$

wobei $a_{ik} \in \mathbb{R}$ Zahlen sind. Die Gln. (6.121) kann man auch in der Form

$$v'_i = \sum_{k=1}^m a_{ik}v_k \quad (6.122)$$

schreiben, wobei mit $i \in \{1, \dots, n\}$ die Koordinaten des Vektors \underline{v}' durchnummeriert werden. Gl. (6.122) stellt n unabhängige Gleichungen dar, die auch als *lineares Gleichungssystem* bezeichnet werden. Die Gl. (6.122) für die n Komponenten von \underline{v}' kann auch kompakter in der Form

$$\underline{v}' = \underline{\underline{A}} \underline{v} \quad (6.123)$$

geschrieben werden. Das Symbol $\underline{\underline{A}}$ wird als $(n \times m)$ -*Matrix* bezeichnet. Es stellt die konkrete Form des linearen Operators \mathbf{A} dar, der den Vektor \vec{v} auf den Vektor \vec{v}' in der Form $\vec{v}' = \mathbf{A}\vec{v}$ abbildet, wenn beide Vektoren durch n -Tupel ausgedrückt werden. Die Matrix $\underline{\underline{A}}$ wird als rechteckiges Zahlenschema der Form

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (6.124)$$

dargestellt. Die Zahlen $a_{ik} \in \mathbb{R}$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \{1, \dots, m\}$ werden als *Komponenten* von $\underline{\underline{A}}$ bezeichnet. Matrizen aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ werden als *quadratisch* bezeichnet. Setzt man die Spaltendarstellung der Vektoren $\underline{v}, \underline{v}'$ und die Darstellung der Matrix $\underline{\underline{A}}$ in Gl. (6.122) ein, so ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}. \quad (6.125)$$

Die Vorschrift zur Berechnung des Ausdrucks auf der rechten Seite dieser Gleichung ergibt sich aus Gl. (6.121) zu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k} v_k \\ \sum_{k=1}^m a_{2k} v_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{nk} v_k \end{pmatrix}. \quad (6.126)$$

Dieses Produkt wird als *Matrixprodukt* (auch: *Matrixmultiplikation*) einer Matrix mit einem Vektor bezeichnet. Das Matrixprodukt ist linear, wie wir nun zeigen wollen. Seien $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^m$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\underline{\underline{A}}(\lambda \underline{u} + \mu \underline{v}) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k}(\lambda u_k + \mu v_k) \\ \sum_{k=1}^m a_{2k}(\lambda u_k + \mu v_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{nk}(\lambda u_k + \mu v_k) \end{pmatrix} \quad (6.127)$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k} u_k \\ \sum_{k=1}^m a_{2k} u_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{nk} u_k \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k} v_k \\ \sum_{k=1}^m a_{2k} v_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{nk} v_k \end{pmatrix} \quad (6.128)$$

$$= \lambda \underline{\underline{A}} \underline{u} + \mu \underline{\underline{A}} \underline{v}. \quad (6.129)$$

Hierbei wurde verwendet, dass n -Tupel im \mathbb{R}^n komponentenweise addiert und mit Skalaren (hier: reellen Zahlen) multipliziert werden können. Gl. (6.129) zeigt also, dass die Matrixmultiplikation die Linearitätseigenschaft aus Gl. (6.119) erfüllt und somit eine lineare Abbildung vom $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ darstellt.

Die Menge aller $(n \times m)$ -Matrizen wird als $\mathbb{R}^{n \times m}$ bezeichnet. Sie kann durch Definition entsprechender Verknüpfungen zu einem Vektorraum gemacht werden. Zum einen definiert man die Addition zweier Matrizen $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

als

$$\underline{\underline{A}} \oplus \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \quad (6.130)$$

$$:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}. \quad (6.131)$$

Matrizen werden also komponentenweise addiert. Für die Komponenten c_{ik} der Matrix $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \oplus \underline{\underline{B}}$ gilt also

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}. \quad (6.132)$$

Zum anderen definiert man die Multiplikation einer Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ als

$$\lambda \odot \underline{\underline{A}} = \lambda \odot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}. \quad (6.133)$$

Hierbei wird also jede Komponente der Matrix mit dem Skalar λ multipliziert. Für die Komponenten der Matrix $\underline{\underline{B}} = \lambda \odot \underline{\underline{A}}$ gilt also

$$b_{ik} = \lambda a_{ik}. \quad (6.134)$$

Der Raum aller $(n \times m)$ -Matrizen mit den beiden Verknüpfungen \oplus und \odot bildet den Vektorraum $(\mathbb{R}^{n \times m}, \oplus, \odot)$. Der Nullvektor dieses Vektorraums wird mit $\underline{\underline{0}}_{n \times m}$ bezeichnet und ist durch die Matrix

$$\underline{\underline{0}}_{n \times m} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (6.135)$$

gegeben, die n Zeilen und m Spalten besitzt und deren Komponenten alle gleich Null sind. Wie in der Literatur üblich, werden wir im Folgenden anstatt des Symbols \oplus das Symbol $+$ verwenden und das Symbol \odot unterdrücken.

Transponierte Matrix

Zu jeder Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gibt es eine Matrix $\underline{\underline{A}}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, deren Komponenten durch

$$(\underline{\underline{A}}^T)_{ik} = (\underline{\underline{A}})_{ki} \quad (6.136)$$

gegeben sind, wobei $i \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. Die Matrix $\underline{\underline{A}}^T$ nennt man die zu $\underline{\underline{A}}$ *transponierte Matrix*. Beim Transponieren werden also die Zeilen von $\underline{\underline{A}}$ zu den Spalten von $\underline{\underline{A}}^T$. Ausgedrückt durch Zahlenschemata heißt das

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}. \quad (6.137)$$

Aus der Definition der transponierten Matrix folgt, dass zweimaliges transponieren wieder die ursprüngliche Matrix liefert, d.h.

$$(\underline{\underline{A}}^T)^T = \underline{\underline{A}}. \quad (6.138)$$

Für die transponierte eines Produkts von Matrizen gilt

$$(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^T. \quad (6.139)$$

Um dies zu zeigen, betrachten wir die (i, k) -Komponente von $(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^T$:

$$[(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^T]_{ik} = (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})_{ki} \quad (6.140)$$

$$= \sum_p (\underline{\underline{A}})_{kp} (\underline{\underline{B}})_{pi} \quad (6.141)$$

$$= \sum_p (\underline{\underline{B}})_{pi} (\underline{\underline{A}})_{kp} \quad (6.142)$$

$$= \sum_p (\underline{\underline{B}}^T)_{ip} (\underline{\underline{A}}^T)_{pk} \quad (6.143)$$

$$= (\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{B}}^T)_{ik}. \quad (6.144)$$

Beispiel 6.7 Seien

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}. \quad (6.145)$$

Dann ist

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad -3\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}. \quad (6.146)$$

Beispiel 6.8 Sei

$$x + 2y = 1, \quad (6.147)$$

$$-3x - y = 4 \quad (6.148)$$

ein lineares Gleichungssystem. Das Gleichungssystem kann mit

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.149)$$

in der Form

$$\underline{\underline{A}} \underline{v} = \underline{b} \quad (6.150)$$

geschrieben werden.

Beispiel 6.9 Sei

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad (6.151)$$

Dann ist

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (6.152)$$

Aufgabe 6.8 Wie viele Zeilen und Spalten besitzt eine Matrix, die einen Vektor aus dem \mathbb{R}^7 auf einen Vektor aus dem \mathbb{R}^2 abbildet?

Aufgabe 6.9 Berechnen Sie $2\underline{\underline{A}}\underline{v}$, wobei

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.153)$$

Aufgabe 6.10 Berechnen Sie $\underline{\underline{A}}\underline{v}$, wobei

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.154)$$

Aufgabe 6.11 Stellen Sie das lineare Gleichungssystem

$$ax_2 = b, \quad cx_1 + dx_2 = e \quad (6.155)$$

mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ für die Unbekannten x_1, x_2 in Form eines Matrixprodukts dar.

Aufgabe 6.12 Sei $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Geben Sie $\underline{\underline{A}}^T$ an.

6.2.2 Matrixprodukt und inverse Matrix

Wie in Kapitel 6.2.1 dargestellt, sind Matrizen Zahlenschemata, mit deren Hilfe lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ beschrieben werden können. Mit einer Matrix kann also ein Vektor auf einen anderen Vektor abgebildet werden. Manchmal ist es nötig, mehrere solcher Abbildungen hintereinander auszuführen. Diese Hintereinanderausführung kann mithilfe des allgemeinen Matrixprodukts beschrieben werden, welches wir im Folgenden einführen.

Wir betrachten als Beispiel einen Vektor $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$, der mithilfe einer Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ auf einen Vektor $\underline{v}' \in \mathbb{R}^n$ abgebildet wird, d.h.

$$\underline{v}' = \underline{\underline{A}} \underline{v}. \quad (6.156)$$

Der Vektor \underline{v}' soll nun mithilfe einer Matrix $\underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ auf einen Vektor $\underline{v}'' \in \mathbb{R}^p$ abgebildet werden, d.h.

$$\underline{v}'' = \underline{\underline{B}} \underline{v}'. \quad (6.157)$$

Durch Einsetzen von Gl. (6.156) in Gl. (6.157) ergibt sich

$$\underline{v}'' = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}} \underline{v}. \quad (6.158)$$

Gl. (6.158) stellt die Hintereinanderausführung der beiden durch die Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ vermittelten Abbildungen dar. Definiert man $\underline{\underline{C}} := \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$, so vermittelt die Matrix $\underline{\underline{C}} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ die Abbildung $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Das Produkt $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$ wird als *Matrixprodukt* (auch: *Matrixmultiplikation*) bezeichnet. Um die Komponenten der Matrix $\underline{\underline{C}}$ zu bestimmen, betrachten wir die i -te Komponente v''_i des Vektors \underline{v}'' auf der linken Seite von Gl. (6.158). Aus der Gleichung $\underline{v}'' = \underline{\underline{C}} \underline{v}$ folgt einerseits

$$v''_i = \sum_{l=1}^m c_{il} v_l. \quad (6.159)$$

Aus der Gleichung $\underline{v}'' = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}} \underline{v}$ folgt andererseits

$$v''_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} (\underline{\underline{A}} \underline{v})_k \quad (6.160)$$

$$= \sum_{k=1}^n b_{ik} \left(\sum_{l=1}^m a_{kl} v_l \right) \quad (6.161)$$

$$= \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kl} \right) v_l. \quad (6.162)$$

Aus dem Vergleich von Gln. (6.159) und (6.162) folgt, dass die Komponenten c_{il} der Matrix $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$ durch

$$c_{il} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kl} \quad (6.163)$$

gegeben sind. Hierbei ist $i \in \{1, \dots, p\}$ und $l \in \{1, \dots, m\}$. Aus Gl. (6.163) ergibt sich folgendes Rechenschema zur Berechnung des Matrixprodukts $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}}$:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \leftarrow n \rightarrow \\ \updownarrow p \\ \left(\begin{array}{c} \bullet \dots \bullet \end{array} \right) \\ \text{Zeile } i \end{array} & \cdot & \begin{array}{c} \leftarrow m \rightarrow \\ \updownarrow n \\ \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array} \right) \\ \text{Spalte } l \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow m \rightarrow \\ \updownarrow p \\ \left(\begin{array}{c} \bullet \end{array} \right) \\ \text{= } (i, l)\text{-Komponente} \end{array} \end{array} \quad (6.164)$$

Zur Berechnung der Komponente c_{il} verwendet man die i -te Zeile der Matrix $\underline{\underline{B}}$ und die l -te Spalte der Matrix $\underline{\underline{A}}$. Die Einträge dieser Zeile und Spalte werden komponentenweise Multipliziert und die einzelnen Produkte addiert.

Nicht-Kommutativität des Matrixprodukts

Das Matrixprodukt ist i.A. nicht kommutativ, d.h. i.A. ist $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$. Dies lässt sich anhand eines Beispiels zeigen. Seien

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.165)$$

zwei quadratische Matrizen des $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Dann ist

$$\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad (6.166)$$

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad (6.167)$$

also $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}$.

Assoziativität des Matrixprodukts

Das Matrixprodukt ist assoziativ, d.h. es gilt $(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}})$. Für den Beweis betrachten wir die (i, k) -Komponente der Matrix $(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}}$ und verwenden wir die Definition des Matrixprodukts:

$$[(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}}]_{ik} = \sum_l (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})_{il} c_{lk} \quad (6.168)$$

$$= \sum_l \left(\sum_p a_{ip} b_{pl} \right) c_{lk} \quad (6.169)$$

$$= \sum_p a_{ip} \left(\sum_l b_{pl} c_{lk} \right) \quad (6.170)$$

$$= \sum_p a_{ip} (\underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}})_{pk} \quad (6.171)$$

$$= [\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}})]_{ik}. \quad (6.172)$$

Distributivität des Matrixprodukts

Für das Matrixprodukt gilt das Distributivgesetz $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}}$, denn

$$[(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}}]_{ik} = \sum_l (a_{il} + b_{il}) c_{lk} \quad (6.173)$$

$$= \sum_l (a_{il} c_{lk} + b_{il} c_{lk}) \quad (6.174)$$

$$= (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}})_{ik}. \quad (6.175)$$

Einselement des Matrixprodukts

Für die Matrixmultiplikation zwischen quadratischen Matrizen des $\mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es ein Einselement, das mit $\underline{\underline{1}}_{n \times n}$ bezeichnet wird. Für eine beliebige Matrix $\underline{\underline{A}} \in$

$\mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{1}}_{n \times n} = \underline{\underline{1}}_{n \times n} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$. Das Einselement wird auch als *Einheitsmatrix* bezeichnet und ist durch

$$\underline{\underline{1}}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.176)$$

gegeben. Die Einheitsmatrix besitzt also auf allen Hauptdiagonalpositionen den Wert 1 und auf allen anderen Positionen den Wert 0. Die Komponenten der Einheitsmatrix $\underline{\underline{1}}_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind entsprechend durch

$$\left(\underline{\underline{1}}_{n \times n} \right)_{ik} = \delta_{ik} \quad (6.177)$$

mit $i, k \in \{1, \dots, n\}$ gegeben. Dass $\underline{\underline{1}}_{n \times n}$ aus Gl. (6.176) das Einselement der Matrixmultiplikation ist, lässt sich wie folgt zeigen:

$$\left(\underline{\underline{1}}_{n \times n} \underline{\underline{A}} \right)_{ik} = \sum_{p=1}^n \delta_{ip} a_{pk} = a_{ik} = \left(\underline{\underline{A}} \right)_{ik}. \quad (6.178)$$

Spaltenvektoren als Matrizen

Die in Kapitel 6.1.2 eingeführten n -Tupel des \mathbb{R}^n können in ihrer Spaltendarstellung als $(n \times 1)$ -Matrizen aus dem Raum $\mathbb{R}^{n \times 1}$ aufgefasst werden. Das Produkt $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{v}}$ aus einer Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einem Vektor $\underline{\underline{v}} \in \mathbb{R}^n$ stellt dann einen Spezialfall des hier dargestellten Matrixprodukts dar. Fasst man die n -Tupel $\underline{\underline{v}} \in \mathbb{R}^n$ als Matrizen des $\mathbb{R}^{n \times 1}$ auf, d.h. $\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{v}}$, so kann das Skalarprodukt zweier Vektoren $\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}} \in \mathbb{R}^n$ wie folgt mit dem Matrixprodukt berechnet werden:

$$\underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{v}} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n u_i v_i. \quad (6.179)$$

Statt $\underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{v}}$ schreiben wir auch $\underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{v}}$, sofern Missverständnisse ausgeschlossen sind.

Aufgabe 6.13 Sei $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ und $\underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{q \times r}$. Wie viele Zeilen und Spalten besitzt die Matrix $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$?

Aufgabe 6.14 Zeigen Sie, dass die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ nicht das Einselement der Matrixmultiplikation im $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ darstellt.

Inverse Matrix

Wie in Kapitel 6.2.1 beschrieben kann mithilfe einer Matrix ein Vektor $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$ auf einen Vektor $\underline{v}' \in \mathbb{R}^n$ in der Form

$$\underline{\underline{A}}\underline{v} = \underline{v}' \quad (6.180)$$

abgebildet werden. Häufig stellt sich die Frage, ob es eine Rücktransformation gibt, d.h. ob eine Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existiert, so dass

$$\underline{v} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{v}'. \quad (6.181)$$

Die Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ wird als die zu $\underline{\underline{A}}$ *inverse Matrix* bezeichnet. Würde solch eine inverse Matrix existieren, so würde gelten

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{1}_{n \times n}. \quad (6.182)$$

Mit dieser Eigenschaft könnte man Gl. (6.180) durch Matrixmultiplikation von links mit $\underline{\underline{A}}^{-1}$ nach \underline{v} auflösen:

$$\underline{\underline{A}}\underline{v} = \underline{v}' \quad (6.183)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}\underline{v} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{v}' \quad (6.184)$$

$$\Leftrightarrow \underline{v} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{v}'. \quad (6.185)$$

Man kann zeigen, dass eine inverse Matrix höchstens für quadratische Matrizen existiert, d.h. für $m = n$. Doch auch nicht jede quadratische Matrix ist invertierbar. Als Kriterium für die Invertierbarkeit einer Matrix kann man die sog. *Determinante* verwenden. Die Determinante \det ist eine Abbildung $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir werden uns im Folgenden auf die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ beschränken. Die Determinante $\det(\underline{\underline{A}})$ einer Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (6.186)$$

ist definiert als

$$\det(\underline{\underline{A}}) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (6.187)$$

Die Determinante $\det(\underline{\underline{B}})$ einer Matrix $\underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (6.188)$$

ist definiert als

$$\det(\underline{\underline{B}}) := a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad (6.189)$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ &\quad + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}. \end{aligned} \quad (6.190)$$

Man kann zeigen, dass für eine quadratische Matrix $\underline{\underline{A}}$ ein eindeutiges Inverses existiert, wenn $\det(\underline{\underline{A}}) \neq 0$. Für zwei quadratische invertierbare Matrizen $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}. \quad (6.191)$$

Um dies zu zeigen betrachten wir die Matrix $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$. Dann folgt

$$\underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{1}}_{n \times n} \quad (6.192)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{1}}_{n \times n} \quad (6.193)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{X}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}\underline{\underline{B}}^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \quad (6.194)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{X}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \quad (6.195)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{X}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1} \quad (6.196)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}. \quad (6.197)$$

Hierbei wurde in der dritten Zeile die Gleichung von rechts mit $\underline{\underline{B}}^{-1}$ multipliziert. In der vorletzten Zeile wurde die Gleichung von rechts mit $\underline{\underline{A}}^{-1}$ multipliziert.

Beispiel 6.10 Die Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.198)$$

besitzt die Determinante $\det(\underline{\underline{A}}) = 3 + 1 = 4$.

Aufgabe 6.15 Ermitteln Sie, ob die Matrix $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ein Inverses besitzt.

Aufgabe 6.16 Zeigen Sie, dass die Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mit

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (6.199)$$

invers zueinander sind.

6.2.3 Lineare Gleichungssysteme

Ein System aus n Gleichungen für m Unbekannte x_1, \dots, x_m der Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \quad (6.200a)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2, \quad (6.200b)$$

$$\vdots \quad (6.200c)$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \quad (6.200d)$$

wird als *lineares Gleichungssystem* (LGS) bezeichnet, wobei $a_{ik}, b_i \in \mathbb{R}$ mit $i \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, m\}$. Definiert man eine Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und zwei n -Tupel $\underline{x}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (6.201)$$

so kann das lineare Gleichungssystem (6.200) in der Form

$$\underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{b} \quad (6.202)$$

geschrieben werden. Die Matrix \underline{A} wird als *Koeffizientenmatrix* bezeichnet. Den Vektor \underline{b} nennt man manchmal die *rechte Seite* des linearen Gleichungssystems. Im Folgenden betrachten wir quadratische lineare Gleichungssystem, d.h. $m = n$.

Es ist möglich, dass ein quadratisches Gleichungssystem keine, eine oder unendlich viele Lösungen \underline{x} besitzt. Man kann zeigen, dass ein quadratisches lineares Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt, wenn für die Koeffizientenmatrix $\det(\underline{A}) \neq 0$ gilt. Ist $\det(\underline{A}) = 0$, so besitzt das Gleichungssystem entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

Ein bekanntes Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme ist das *Gauß-Verfahren*. Ziel des Gauß-Verfahrens ist es, das Gleichungssystem (6.200) in folgendes Dreiecksform (auch: Stufenform) zu überführen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 c_{11}x_1 & +c_{12}x_2 & +c_{13}x_3 & +\cdots & +c_{1(n-1)}x_{n-1} & +c_{1n}x_n & = d_1, \\
 & c_{22}x_2 & +c_{23}x_3 & +\cdots & +c_{2(n-1)}x_{n-1} & +c_{2n}x_n & = d_2, \\
 & & c_{33}x_3 & +\cdots & +c_{3(n-1)}x_{n-1} & +c_{3n}x_n & = d_3, \\
 & & & & & \vdots & \\
 & & & & c_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & +c_{(n-1)n}x_n & = d_{n-1}, \\
 & & & & & c_{nn}x_n & = d_n.
 \end{array} \tag{6.203}$$

Aus dieser Dreiecksform können die Unbekannten x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, durch sog. *Rücksubstitution* ermittelt werden. Hierbei wird zuerst die letzte Gleichung nach x_n umgestellt. Man erhält

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}. \tag{6.204}$$

Das Ergebnis für x_n wird anschließend in die vorletzte Gleichung eingesetzt. Diese wird anschließend nach x_{n-1} umgestellt. Man erhält

$$x_{n-1} = \frac{d_{n-1} - c_{(n-1)n}x_n}{c_{(n-1)(n-1)}} = \frac{d_{n-1} - c_{(n-1)n} \frac{d_n}{c_{nn}}}{c_{(n-1)(n-1)}}. \tag{6.205}$$

Nun verfährt man weiter mit der vorletzten Gleichung usw. Um das Gleichungssystem in die Dreiecksform (6.203) zu bringen dürfen ausschließlich Rechenoperationen durchgeführt werden, die die Lösung(en) des Gleichungssystems nicht verändern. Diese erlaubten Rechenoperationen sind:

- Zeilen des Gleichungssystems dürfen vertauscht werden.
- Zeilen dürfen addiert oder subtrahiert werden.
- Eine Zeile darf mit einer reellen Zahl $c \neq 0$ multipliziert werden.

Um die Durchführung des Gauß-Verfahrens kompakt darzustellen, wird das Gleichungssystem (6.202) im Folgenden in der Form der sog. *erweiterten Koeffizientenmatrix*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right) \quad (6.206)$$

notiert. Als Beispiel betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & +6x_2 & -2x_3 & = -4, \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 0, \\ \frac{3}{2}x_1 & +5x_2 & -5x_3 & = -9. \end{array} \quad (6.207)$$

Die entsprechende erweiterte Koeffizientenmatrix lautet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & -5 & -9 \end{array} \right). \quad (6.208)$$

Wir multiplizieren die 2-te Gleichung mit (-1) und addieren die 1-te Gleichung zur 2-ten Gleichung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & -5 & -9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & -5 & -9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \\ \frac{3}{2} & 5 & -5 & -9 \end{array} \right). \quad (6.209)$$

Wir multiplizieren die 3-te Gleichung mit (-2) und addieren die 1-te Gleichung zur 3-ten Gleichung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \\ \frac{3}{2} & 5 & -5 & -9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \\ -3 & -10 & 10 & 18. \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & 14 \end{array} \right). \quad (6.210)$$

Wir addieren die 2-te Gleichung zur 3-ten Gleichung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & 14 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right). \quad (6.211)$$

Nun besitzt das Gleichungssystem die o.g. Dreiecksform. Das Gleichungssystem lautet nun

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & +6x_2 & -2x_3 & = -4 \\ & 4x_2 & -3x_3 & = -4 \\ & & 5x_3 & = 10 \end{array} \quad (6.212)$$

Wir führen nun die Rücksubstitution durch. Aus der letzten Zeile ergibt sich $x_3 = 2$. Einsetzen in die vorletzte Zeile liefert die Gleichung $4x_2 - 6 = -4$ und damit $x_2 = 1/2$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert $3x_1 + 3 - 4 = -1$ und damit $x_1 = -1$. Das Gleichungssystem besitzt folglich genau eine Lösung

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (6.213)$$

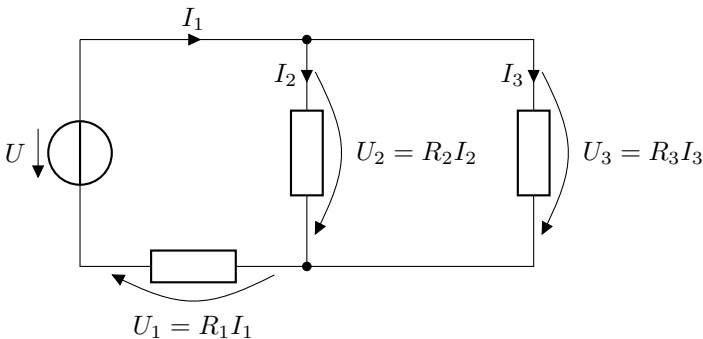
Bei Gleichungssystemen, die keine Lösung besitzen, entstehen bei der Durchführung des Gauß-Verfahrens falsche Aussagen, z.B. $1 = 0$ o.ä. In diesem Fall widersprechen sich die Gleichungen. Bei Gleichungssystemen, die unendlich viele Lösungen besitzen, entsteht bei der Durchführung des Gauß-Verfahrens eine (oder mehrere) Gleichung(en) der Form $0 = 0$. Das Gleichungssystem ist also unterbestimmt, d.h. es gibt mehr unbekannte als Gleichungen. In diesem Fall parametrisiert man die unendlich vielen Lösungen, siehe Kapitel 6.2.5.

Anstelle des Gauß-Verfahrens kann die Lösung \underline{x} auch mithilfe der inversen Matrix bestimmt werden. Hierzu wird das Gleichungssystem (6.202) von links mit der zu \underline{A} inversen Matrix \underline{A}^{-1} multipliziert. Man erhält

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}. \quad (6.214)$$

Die Lösung des Gleichungssystems durch Bestimmung der inversen Matrix ist häufig jedoch aufwändiger als das Gauß-Verfahren.

Beispiel 6.11 Ein elektrischer Schaltkreis bestehe aus einer Spannungsquelle ($U = \text{konst.}$) und drei bekannten elektrischen Widerständen R_1, R_2, R_3 , die in folgender Form geschaltet sind:



Aus der Knotenregel und der Maschenregel ergibt sich das folgende Gleichungs-

system:

$$\begin{array}{llll} \text{Knotenregel:} & I_1 & -I_2 & -I_3 = 0, \\ \text{Maschenregel:} & R_1 I_1 & +R_2 I_2 & = U, \\ & & R_2 I_2 & -R_3 I_3 = 0. \end{array} \quad (6.215)$$

Das Gleichungssystem für die unbekannten Stromstärken I_1, I_2, I_3 kann in der Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & 0 & U \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 \end{array} \right) \quad (6.216)$$

geschrieben werden. Multiplikation der ersten Zeile mit $-R_1$ und Addition zur zweiten Zeile ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & 0 & U \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & R_1 + R_2 & R_1 & U \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 \end{array} \right). \quad (6.217)$$

Multiplikation der zweiten Zeile mit $-R_2/(R_1 + R_2)$ und Addition zur dritten Zeile liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & R_1 + R_2 & R_1 & U \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & R_1 + R_2 & R_1 & U \\ 0 & 0 & -R_3 - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{U R_2}{R_1 + R_2} \end{array} \right). \quad (6.218)$$

Die dritte Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix lautet

$$\left(-R_3 - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_3 = -\frac{R_3(R_1 + R_2) + R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_3 = -\frac{U R_2}{R_1 + R_2}. \quad (6.219)$$

Daraus folgt

$$I_3 = \frac{U R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}. \quad (6.220)$$

Einsetzen von I_3 in die zweite Gleichung führt auf die Gleichung

$$(R_1 + R_2) I_2 + R_1 I_3 = (R_1 + R_2) I_2 + R_1 \frac{U R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = U. \quad (6.221)$$

Umstellen nach I_2 ergibt

$$I_2 = \frac{U R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}. \quad (6.222)$$

Einsetzen von I_2 und I_3 in die erste Gleichung liefert

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3) U}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}. \quad (6.223)$$

Beispiel 6.12 Im Rahmen der Mechanik können bestimmte Systeme durch eine skalare Funktion L beschrieben werden, die von den Koordinaten des Systems und ihren zeitlichen Ableitungen abhängt. Diese Funktion wird *Lagrangefunktion* genannt. Wir betrachten ein physikalisches System, dass durch die Lagrangefunktion

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \dot{x}_1 \dot{x}_2) - V(x_1, x_2) \quad (6.224)$$

beschrieben sei, wobei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ die beiden Koordinaten des Systems sind und $m > 0$ eine Konstante ist. Die Funktion $V(x_1, x_2)$ stellt das Potential des Systems dar. Aus der Lagrangefunktion lassen sich zudem wie folgt die (kanonischen) Impulse des Systems bestimmen:

$$p_1 := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{m}{2}(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad p_2 := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{m}{2}(2\dot{x}_2 - \dot{x}_1). \quad (6.225)$$

Die Gln. (6.225) stellen ein lineares Gleichungssystem dar, mit dessen Hilfe die Geschwindigkeiten \dot{x}_1, \dot{x}_2 aus den (kanonischen) Impulsen p_1, p_2 bestimmt werden können. Lösen des Gleichungssystems nach \dot{x}_1 und \dot{x}_2 ergibt:

$$\dot{x}_1(p_1, p_2) = \frac{4p_1 + 2p_2}{3m}, \quad \dot{x}_2(p_1, p_2) = \frac{4p_2 + 2p_1}{3m}. \quad (6.226)$$

Aus dem Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten und den Impulsen lässt sich die sog. *Hamiltonfunktion* des Systems ermitteln:

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) := \sum_{i=1}^2 p_i \dot{x}_i(p_1, p_2) - L(x_1, x_2, \dot{x}_1(p_1, p_2), \dot{x}_2(p_1, p_2)) \quad (6.227)$$

$$= \frac{2}{3m} (p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2) + V(x_1, x_2). \quad (6.228)$$

Aufgabe 6.17 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen des lineare Gleichungssystems $x - y = 1$, $2x - 2y = 1$.

Aufgabe 6.18 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen des lineare Gleichungssystems $x - y = 1$, $2x - 2y = 2$.

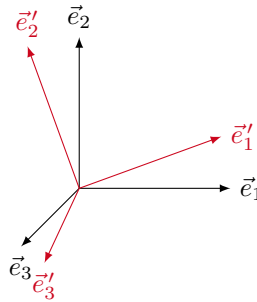


Abbildung 6.15: Rotation des Koordinatensystems Σ' in Bezug auf Σ .

6.2.4 Drehungen und Basiswechsel

Eine wichtige Anwendung linearer Operatoren in der Physik ist die Untersuchung physikalischer Systeme unter räumlichen Drehungen. Räumliche Drehungen von vektoriellen Größen können mit Drehmatrizen beschrieben werden, die im Folgenden näher beschrieben werden.

Als Beispiel betrachten wir einen Massepunkt, dessen Ort im Raum bzgl. des Koordinatensystems $\Sigma = [0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$ durch den Ortsvektor \vec{x} beschrieben sei. Wir betrachten nun ein zweites Koordinatensystem $\Sigma' = [0; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3]$, dessen Basisvektoren im Bezug zu Σ räumlich gedreht sind, siehe Abbildung 6.15. Der Koordinatenursprung beider Koordinatensysteme ist der selbe. Wir wollen herausfinden, wie die Koordinaten des Ortsvektors \vec{x}' bzgl. Σ' mit den Koordinaten von \vec{x} bzgl. Σ zusammenhängen. Die Ortsvektoren \vec{x} und \vec{x}' beschreiben den selben Punkt im Raum bezüglich des selben Koordinatenursprungs. Folglich gilt $\vec{x} = \vec{x}'$. Ausgedrückt durch die Standardbasisvektoren beider Koordinatensysteme ergibt sich

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}'_3 = \vec{x}'. \quad (6.229)$$

Um den Zusammenhang zwischen den Koordinaten x_i und x'_i zu ermitteln, drücken wir die Standardbasisvektoren von Σ' durch die Standardbasisvektoren von Σ aus:

$$\vec{e}'_i = a_{i1} \vec{e}_1 + a_{i2} \vec{e}_2 + a_{i3} \vec{e}_3, \quad (6.230)$$

wobei $i \in \{1, 2, 3\}$. Da $\vec{e}'_i \in \mathbb{V}^3$ und die Vektoren \vec{e}_i eine Basis von \mathbb{V}^3 bilden, ist die Zerlegung (6.230) immer möglich. Die Koeffizienten a_{ik} können in Form

einer Matrix $\underline{\underline{A}}$ dargestellt werden,

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.231)$$

Multipliziert man Gl. (6.230) skalar mit \vec{e}_k , so ergibt sich aufgrund der Orthonormalität der Standardbasisvektoren der Zusammenhang

$$\vec{e}_k \cdot \vec{e}'_i = \vec{e}_k \cdot \left(\sum_{l=1}^3 a_{il} \vec{e}_l \right) \quad (6.232)$$

$$= \sum_{l=1}^3 a_{il} \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l \quad (6.233)$$

$$= \sum_{l=1}^3 a_{il} \delta_{kl} \quad (6.234)$$

$$= a_{ik}. \quad (6.235)$$

Andererseits gilt gemäß Gl. (6.31)

$$\vec{e}_k \cdot \vec{e}'_i = \cos[\angle(\vec{e}_k, \vec{e}'_i)], \quad (6.236)$$

da $|\vec{e}_k| = |\vec{e}'_i| = 1$. Die Matrix $\underline{\underline{A}}$ enthält somit die Information über alle Winkel zwischen den Basisvektoren von Σ und Σ' . Da die Standardbasisvektoren orthonormal sind, d.h. $\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_k = \delta_{ik}$, folgt aus Gl. (6.230) für alle $i, k \in \{1, 2, 3\}$

$$\delta_{ik} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_k \quad (6.237)$$

$$= \left(\sum_{l=1}^3 a_{il} \vec{e}_l \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^3 a_{kn} \vec{e}_n \right) \quad (6.238)$$

$$= \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{kn} \vec{e}_l \cdot \vec{e}_n \quad (6.239)$$

$$= \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{kn} \delta_{ln} \quad (6.240)$$

$$= \sum_{l=1}^3 a_{il} a_{kl}. \quad (6.241)$$

Für $k = i$ folgt daraus speziell

$$1 = \sum_{l=1}^3 a_{il}^2. \quad (6.242)$$

Um den Zusammenhang zwischen den Koordinaten x_i und x'_k zu ermitteln, bilden wir auf beiden Seiten von Gl. (6.229) das Skalarprodukt mit \vec{e}'_i . Einerseits ergibt sich

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{x}' = x'_i. \quad (6.243)$$

Andererseits ergibt sich

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{x} = \vec{e}'_i \cdot \left(\sum_{k=1}^3 x_k \vec{e}_k \right) \quad (6.244)$$

$$= \sum_{k=1}^3 x_k \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_k \quad (6.245)$$

$$= \sum_{k=1}^3 x_k \vec{e}_k \cdot \vec{e}'_i \quad (6.246)$$

$$= \sum_{k=1}^3 x_k a_{ik}. \quad (6.247)$$

Hierbei wurde im letzten Schritt Gl. (6.235) verwendet. Somit folgt insgesamt

$$x'_k = \sum_{i=1}^3 a_{ki} x_i. \quad (6.248)$$

Die rechte von Gl. (6.248) entspricht dem der Matrixmultiplikation $\underline{\underline{A}} \underline{x}$. Gl. (6.248) kann somit in der Form

$$\underline{x}' = \underline{\underline{A}} \underline{x} \quad (6.249)$$

geschrieben werden. Gl. (6.249) beschreibt die Transformation der Koordinaten des Ortsvektors bei Rotation der Koordinatenachsen, d.h. bei Wechsel des Koordinatensystems $\Sigma \rightarrow \Sigma'$. Eine Rotationsmatrix besitzt dabei stets die charakteristische Eigenschaft (6.241). Diese kann in Matrixform auch als

$$\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^T \quad (6.250)$$

geschrieben werden. Eine Matrix mit der Eigenschaft (6.250) wird als *orthogonal* bezeichnet. Aus der Eigenschaft (6.250) folgt jedoch nicht, dass die orthogonale Matrix ein Rechtssystem in ein Rechtssystem transformiert. Hierfür muss die orthogonale Matrix eine weitere Eigenschaft besitzen, die wir abschließend erläutern wollen. Die Standardbasisvektoren des Koordinatensystems Σ bilden ein Rechtssystem und spannen einen Parallelepiped mit dem Volumeninhalt

$$V(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 = 1 \quad (6.251)$$

auf, siehe Gl. (6.104). Gleiches muss für den durch die Rotation der Standardbasisvektoren von Σ' entstandenen Parallelepiped gelten, d.h.

$$1 = V(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3) \quad (6.252)$$

$$= (\vec{e}'_1 \times \vec{e}'_2) \cdot \vec{e}'_3 \quad (6.253)$$

$$= [(a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3) \times (a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3)] \cdot (a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) \quad (6.254)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \quad (6.255)$$

$$= \det(\underline{\underline{A}}). \quad (6.256)$$

Eine orthogonale Matrix $\underline{\underline{A}}$, die ein Rechtssystem in ein Rechtssystem transformiert, besitzt somit zusätzlich die Eigenschaft $\det(\underline{\underline{A}}) = 1$.

6.2.5 Das Eigenwertproblem

Das Eigenwertproblem und die Hauptachsentransformation spielen in der Mechanik ausgedehnter, starrer Körper und bei der Lösung gekoppelter linearer Differentialgleichungen eine große Rolle. Wir werden das Eigenwertproblem im Folgenden für symmetrische Matrizen näher behandeln und seine Bedeutung in der Mechanik darstellen.

Definition und geometrische Bedeutung

Als Beispiel betrachten wir eine reelle (3×3) -Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (6.257)$$

Die Matrix $\underline{\underline{A}}$ besitzt die interessante Eigenschaft, dass

$$\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.258)$$

$$\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.259)$$

$$\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.260)$$

D.h. die Standardbasisvektoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ werden von der Matrix $\underline{\underline{A}}$, bis auf einen Skalierungsfaktor, auf sich selbst abgebildet. Die Standardbasisvektoren werden durch $\underline{\underline{A}}$ also lediglich gestaucht (bei \underline{e}_1) oder gestreckt (bei \underline{e}_2 und \underline{e}_3) und/oder in ihrer Richtung umgekehrt (bei \underline{e}_3). Die Matrix $\underline{\underline{A}}$ besitzt diese Eigenschaft ausschließlich in Bezug auf die Standardbasisvektoren. Für andere Vektoren gilt dies nicht. Z.B. ergibt sich für

$$\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.261)$$

Allgemein bezeichnet man einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{V}^n$ bzw. $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, für den

$$\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{A}}\underline{v} = \lambda\underline{v} \quad (6.262)$$

gilt, als *Eigenvektor* von \mathbf{A} bzw. $\underline{\underline{A}}$. Die Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ wird *Eigenwert* zum Eigenvektor \vec{v} bzw. \underline{v} genannt. Die Standardbasisvektoren sind also Eigenvektoren zur obigen Matrix $\underline{\underline{A}}$ mit den Eigenwerten $1/2$, 4 und -2 . Die Eigenvektoren einer Matrix geben die für die Matrix charakteristischen Richtungen an, in denen bei der Abbildung nur eine Streckung oder Stauchung, möglicherweise kombiniert mit einer Richtungsumkehr, auftritt.

Die Eigenvektoren einer Matrix sind nicht eindeutig. Ist \vec{v} ein Eigenvektor von \mathbf{A} mit dem Eigenwert λ , so ist $c\vec{v}$ ebenfalls ein Eigenvektor von \mathbf{A} zum Eigenwert $c\lambda$, sofern $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, denn

$$\mathbf{A}(c\vec{v}) = c\mathbf{A}\vec{v} = c\lambda\vec{v} = \lambda(c\vec{v}). \quad (6.263)$$

Eigenvektoren sind somit nur bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt. In der Physik ist es üblich, die Eigenvektoren auf die Länge 1 zu normieren, d.h. $|\vec{v}| = 1$. Dies werden wir im Folgenden annehmen.

Symmetrische Matrizen

Im Folgenden werden wir das Eigenwertproblem für sog. *symmetrische* Matrizen diskutieren. Eine quadratische Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *symmetrisch*, falls gilt $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$. Besitzt die symmetrische Matrix $\underline{\underline{A}}$ die Komponenten a_{ik} mit $i, k \in \{1, \dots, n\}$, so gilt für die Komponenten einer symmetrischen Matrix $a_{ik} = a_{ki}$.

Beispiel 6.13 Die Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (6.264)$$

ist symmetrisch.

Beispiel 6.14 Die Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad (6.265)$$

ist nicht symmetrisch.

Aufgabe 6.19 Sei $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.266)$$

Geben Sie alle Bedingungen an, die für die Komponenten $a_{ik} \in \mathbb{R}$ mit $i, k \in \{1, 2\}$ gelten müssen, damit $\underline{\underline{A}}$ symmetrisch ist.

Aufgabe 6.20 Sei $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.267)$$

wobei $a_{ik} \in \mathbb{R}$ für $i, k \in \{1, 2, 3\}$. Geben Sie die allgemeine Struktur von $\underline{\underline{A}}$ an, so dass $\underline{\underline{A}}$ symmetrisch ist. Schränken Sie hierzu die nicht näher spezifizierten Komponenten der Matrix entsprechend ein.

Das Eigenwertproblem einer symmetrischen Matrix

Wir betrachten nun das Eigenwertproblem einer symmetrischen Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n > 1$. Für die Matrix $\underline{\underline{A}}$ gilt somit $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$. Angenommen $\underline{\underline{A}}$ besitzt (mindestens) zwei verschiedene normierte Eigenvektoren \underline{v}_i und \underline{v}_k , d.h. $\underline{v}_i \neq \pm \underline{v}_k$, mit entsprechenden Eigenwerten λ_i und λ_k . Unter Verwendung der Eigenwertgleichung (6.262) folgt damit einerseits

$$\underline{v}_i^T \underline{\underline{A}} \underline{v}_k = \underline{v}_i^T \lambda_k \underline{v}_k = \lambda_k (\underline{v}_i \cdot \underline{v}_k). \quad (6.268)$$

Andererseits folgt

$$\underline{v}_i^T \underline{\underline{A}} \underline{v}_k = (\underline{\underline{A}}^T \underline{v}_i)^T \underline{v}_k = (\underline{\underline{A}} \underline{v}_i)^T \underline{v}_k = (\lambda_i \underline{v}_i)^T \underline{v}_k = \lambda_i (\underline{v}_i \cdot \underline{v}_k), \quad (6.269)$$

wobei Gl. (6.139) und $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$ verwendet wurden. Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$(\lambda_i - \lambda_k)(\underline{v}_i \cdot \underline{v}_k) = 0. \quad (6.270)$$

Es gibt zwei mögliche Fälle, unter denen diese Gleichung erfüllt ist:

1. Wenn $\lambda_i \neq \lambda_k$, dann folgt $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_k = 0$, d.h. die beiden Eigenvektoren sind orthogonal.
2. Wenn $\lambda_i = \lambda_k =: \lambda$, dann spannen \underline{v}_i und \underline{v}_k eine 2-dimensionale Ebene $E \subset \mathbb{R}^n$ auf. Jeder Vektor $\underline{x} \in E$ lässt sich dann als

$$\underline{x} = a_1 \underline{v}_i + a_2 \underline{v}_k \quad (6.271)$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ darstellen. Der Vektor \underline{x} aus Gl. (6.271) ist ebenfalls ein Eigenvektor von $\underline{\underline{A}}$, denn

$$\underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{\underline{A}}(a_1 \underline{v}_i + a_2 \underline{v}_k) = a_1 \underline{\underline{A}} \underline{v}_i + a_2 \underline{\underline{A}} \underline{v}_k = a_1 \lambda \underline{v}_i + a_2 \lambda \underline{v}_k = \lambda \underline{x}. \quad (6.272)$$

Somit sind alle Vektoren aus E Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$. Als Eigenvektoren zum Eigenwert λ können daher zwei beliebige Vektoren aus E ausgewählt werden. Wir wählen in diesem Fall im Folgenden zueinander orthogonale (und normierte) Vektoren.

Die Menge aller Eigenvektoren zu einem Eigenwert, zzgl. Nullvektor, bilden einen Vektorraum, der als *Eigenraum* bezeichnet wird,

$$\text{Eig}_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) := \{\underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{\underline{A}} \underline{v} = \lambda \underline{v}\}. \quad (6.273)$$

Sind alle Eigenwerte einer Matrix $\underline{\underline{A}}$ verschieden (Fall 1), so sind die entsprechenden Eigenräume jeweils 1-dimensionale Vektorräume. Sind zwei Eigenwerte

gleich (Fall 2), so ist der Eigenraum zu dem Eigenwert ein 2-dimensionaler Vektorraum. Sind drei Eigenwerte gleich, so ist der Eigenraum entsprechend 3-dimensional usw.

Man kann zeigen, dass eine reelle, symmetrische $(n \times n)$ -Matrix $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau n Eigenvektoren mit entsprechenden Eigenwerten besitzt. Für beliebige (nicht-reelle oder nicht-symmetrische) $(n \times n)$ -Matrizen ist dies i.A. nicht der Fall.

Beispiel 6.15 Die nicht-symmetrische Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.274)$$

besitzt keine Eigenvektoren. Um dies zu zeigen betrachten wir das Gleichungssystem

$$\underline{\underline{A}} \underline{v} = \lambda \underline{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (6.275)$$

In Komponenten lautet das Gleichungssystem

$$-v_2 = \lambda v_1, \quad v_1 = \lambda v_2. \quad (6.276)$$

Wenn $\lambda = 0$ wäre, so würde $v_1 = v_2 = 0$ folgen. Für ein beliebiges $\lambda \neq 0$ ist die einzige Lösung des Gleichungssystems $v_1 = v_2 = 0$. In beiden Fällen würde sich

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (6.277)$$

ergeben. Der Nullvektor ist per Definition jedoch kein Eigenvektor. Somit besitzt $\underline{\underline{A}}$ keine Eigenvektoren.

Aus den obigen beiden Fällen 1 und 2 folgt, dass für eine reelle, symmetrische $(n \times n)$ -Matrix $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau n verschiedene, normierte, paarweise orthogonale Eigenvektoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ angegeben werden können. D.h. für die n Eigenvektoren gilt $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_k = \delta_{ik}$ mit $i, k \in \{1, \dots, n\}$. Die Menge dieser n Eigenvektoren $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ stellt folglich eine orthonormale Basis (Rechtssystem) des \mathbb{R}^n dar. Dieses Rechtssystem geht bei festgehaltenem Koordinatenursprung durch Drehung aus der Basis $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ der Standardbasisvektoren hervor. Es gibt somit eine Drehmatrix $\underline{\underline{R}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\underline{\underline{R}} \underline{v}_i = \underline{e}_i. \quad (6.278)$$

Diese Drehmatrix ist orthogonal, d.h. es gilt $\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T$, siehe Gl. (6.250). Mithilfe der Drehmatrix $\underline{\underline{R}}$ kann die reelle symmetrische $(n \times n)$ -Matrix $\underline{\underline{A}}$ *diagonalisiert* werden. Um dies zu zeigen betrachten wir den Spezialfall einer reellen, symmetrischen (3×3) -Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Die Matrix $\underline{\underline{A}}$ besitzt drei orthonormale Eigenvektoren $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ mit entsprechenden Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Die Eigenvektoren besitzen die Komponenten

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.279)$$

Die Drehmatrix $\underline{\underline{R}}$ kann aus den (transponierten) Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$ wie folgt konstruiert werden:

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \\ \underline{v}_3^T \end{pmatrix}. \quad (6.280)$$

Für die Drehmatrix $\underline{\underline{R}}$ gilt somit

$$\underline{\underline{R}}^T = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \underline{v}_3). \quad (6.281)$$

Die Drehmatrix $\underline{\underline{R}}$ ist per Konstruktion orthogonal, denn

$$\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}^T = \begin{pmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \\ \underline{v}_3^T \end{pmatrix} (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \underline{v}_3) \quad (6.282)$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{v}_1^T \underline{v}_1 & \underline{v}_1^T \underline{v}_2 & \underline{v}_1^T \underline{v}_3 \\ \underline{v}_2^T \underline{v}_1 & \underline{v}_2^T \underline{v}_2 & \underline{v}_2^T \underline{v}_3 \\ \underline{v}_3^T \underline{v}_1 & \underline{v}_3^T \underline{v}_2 & \underline{v}_3^T \underline{v}_3 \end{pmatrix} \quad (6.283)$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 & \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 & \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_3 \\ \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 & \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_3 \\ \underline{v}_3 \cdot \underline{v}_1 & \underline{v}_3 \cdot \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \cdot \underline{v}_3 \end{pmatrix} \quad (6.284)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.285)$$

$$= \underline{\underline{1}}. \quad (6.286)$$

Die Drehmatrix $\underline{\underline{R}}$ beschreibt also eine Rotation im \mathbb{R}^3 . Mithilfe von $\underline{\underline{R}}$ kann

die nicht-diagonale Matrix $\underline{\underline{A}}$ wie folgt auf Diagonalform gebracht, d.h. diagonalisiert werden:

$$\underline{\underline{R}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{R}}^T = \begin{pmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \\ \underline{v}_3^T \end{pmatrix} \underline{\underline{A}} (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \underline{v}_3) \quad (6.287)$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \\ \underline{v}_3^T \end{pmatrix} (\lambda_1 \underline{v}_1 \quad \lambda_2 \underline{v}_2 \quad \lambda_3 \underline{v}_3) \quad (6.288)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \underline{v}_1^T \underline{v}_1 & \lambda_2 \underline{v}_1^T \underline{v}_2 & \lambda_3 \underline{v}_1^T \underline{v}_3 \\ \lambda_1 \underline{v}_2^T \underline{v}_1 & \lambda_2 \underline{v}_2^T \underline{v}_2 & \lambda_3 \underline{v}_2^T \underline{v}_3 \\ \lambda_1 \underline{v}_3^T \underline{v}_1 & \lambda_2 \underline{v}_3^T \underline{v}_2 & \lambda_3 \underline{v}_3^T \underline{v}_3 \end{pmatrix} \quad (6.289)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (6.290)$$

$$=: \underline{\underline{D}}. \quad (6.291)$$

Die Diagonaleinträge der Diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}$ sind genau die Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$. Anschaulich gesprochen, wird mit der Drehmatrix $\underline{\underline{R}}$ ein Basiswechsel vorgenommen, indem die Basisvektoren räumlich gedreht werden. Die neue (gedrehte) Basis besteht aus den orthonormalen Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$. In der Basis der Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$ wird die lineare Abbildung $\underline{\underline{A}}$ somit durch die diagonale Matrix $\underline{\underline{D}}$ dargestellt. Die Diagonaleinträge von $\underline{\underline{D}}$ sind die Eigenwerte. Die durch $\underline{\underline{R}}$ beschriebene Koordinatentransformation wird als *Hauptachsentransformation* bezeichnet.

Bestimmung von Eigenvektoren und Eigenwerten

Im Folgenden wird eine Methode beschrieben, um die Eigenwerte und Eigenvektoren einer reellen symmetrischen Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu bestimmen. D.h. wir suchen nach Vektoren $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ und reellen Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass die Eigenwertgleichung

$$\underline{\underline{A}} \underline{v} = \lambda \underline{v} = \lambda \underline{\underline{1}} \underline{v} \quad \Leftrightarrow \quad (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) \underline{v} = \underline{0} \quad (6.292)$$

erfüllt ist.

Bestimmung der Eigenwerte. Die Eigenwertgleichung (6.292) stellt ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen dar. Das Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung, falls $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) \neq 0$. Die entsprechende Lösung ist der Nullvektor $\underline{v} = \underline{0}$. Diese Lösung ist uninteressant und wird auch als

triviale Lösung bezeichnet. Nicht-triviale Lösungen von Gl. (6.292) existieren, falls $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = 0$ ist. Diese Bedingung kann verwendet werden, um die Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$ zu bestimmen.

Beispiel 6.16 Wir bestimmen die Eigenwerte der symmetrischen Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (6.293)$$

Die Bedingung $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = 0$ führt auf die Gleichung

$$0 = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) \quad (6.294)$$

$$= \det \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] \quad (6.295)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \quad (6.296)$$

$$= (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 \quad (6.297)$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 2. \quad (6.298)$$

Die Lösungen der Gleichung lauten $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}$ und $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$. Dies sind die Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$.

Bestimmung der Eigenvektoren. Ist ein Eigenwert λ einer Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bekannt, so kann mithilfe der Eigenwertgleichung (6.292) der zugehörige Eigenvektor bestimmt werden. Hierzu wird der Eigenwert in die Eigenwertgleichung eingesetzt und die unbekannten Koordinaten des entsprechenden Eigenvektors bestimmt.

Beispiel 6.17 Wir bestimmen die Eigenwerte der symmetrischen Matrix $\underline{\underline{A}}$ aus Beispiel 6.16. Die Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$ sind $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}$ und $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$. Die Eigenwertgleichung für den Eigenwert λ_1 lautet

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{1}}) \underline{\underline{v}}_1 = \underline{\underline{0}} \quad (6.299)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.300)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - 2 - \sqrt{2} & -1 \\ -1 & 3 - 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.301)$$

Die erste Gleichung dieses Gleichungssystems liefert

$$(1 - 2 - \sqrt{2})v_{11} - v_{12} = 0 \quad (6.302)$$

$$\Leftrightarrow v_{12} = -(1 + \sqrt{2})v_{11}. \quad (6.303)$$

Die zweite Gleichung des Gleichungssystems liefert dasselbe Ergebnis. Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_1 lauten damit

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ -(1 + \sqrt{2})v_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} v_{11}, \quad (6.304)$$

wobei v_{11} unbestimmt ist. Der Betrag von v_{11} kann aus der Forderung ermittelt werden, dass \underline{v}_1 die Länge 1 besitzen soll:

$$1 = |\underline{v}_1| = \sqrt{1^2 + (1 + \sqrt{2})^2} |v_{11}| = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} |v_{11}| \quad (6.305)$$

$$\Leftrightarrow |v_{11}| = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}. \quad (6.306)$$

Wählt man das Vorzeichen von v_{11} positiv, so folgt der Eigenvektor

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (6.307)$$

Der Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 ergibt sich aus der Eigenwertgleichung

$$(\underline{A} - \lambda_2 \underline{1}) \underline{v}_2 = \underline{0} \quad (6.308)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - 2 + \sqrt{2} & -1 \\ -1 & 3 - 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.309)$$

Die erste Zeile dieses Gleichungssystems liefert

$$(-1 + \sqrt{2})v_{21} - v_{22} = 0 \quad (6.310)$$

$$\Leftrightarrow v_{22} = (-1 + \sqrt{2})v_{21}. \quad (6.311)$$

Die zweite Gleichung des Gleichungssystems liefert dasselbe Ergebnis. Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_2 lauten damit

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{21} \\ (-1 + \sqrt{2})v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} v_{21}, \quad (6.312)$$

wobei v_{21} unbestimmt ist. Der Betrag von v_{21} kann wieder aus der Forderung ermittelt werden, dass \underline{v}_2 auf die Länge 1 normiert ist:

$$1 = |\underline{v}_2| = \sqrt{1^2 + (-1 + \sqrt{2})^2} |\underline{v}_{21}| = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} |\underline{v}_{21}| \quad (6.313)$$

$$\Leftrightarrow |\underline{v}_{21}| = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}. \quad (6.314)$$

Wählt man das Vorzeichen von v_{21} erneut positiv, so folgt für den Eigenvektor

$$\underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (6.315)$$

Aufgabe 6.21 Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren \underline{v}_1 und \underline{v}_2 aus Beispiel 6.17 orthogonal sind.

Aufgabe 6.22 Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren \underline{v}_1 und \underline{v}_2 aus Beispiel 6.17 mit den entsprechenden Eigenwerten die Eigenwertgleichung (6.292) erfüllen.

Beispiel 6.18 Aus den Eigenvektoren aus Beispiel 6.17 folgt die Drehmatrix

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}. \quad (6.316)$$

Aufgabe 6.23 Zeigen Sie mit der Drehmatrix aus Beispiel 6.18, dass für die Matrix $\underline{\underline{A}}$ aus Beispiel 6.16 gilt:

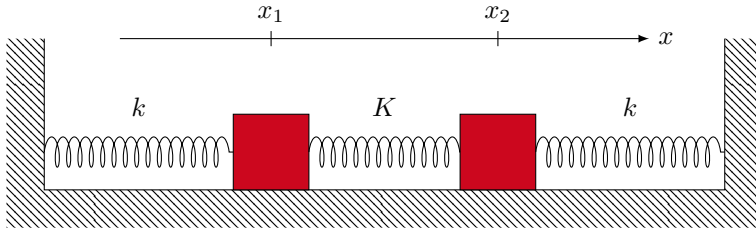
$$\underline{\underline{R}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{R}}^T = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (6.317)$$

Für die in den Beispielen 6.16–6.18 betrachtete Matrix finden Sie unter folgendem Link ein Video zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren

<https://rwth-aachen.sciebo.de/s/pJAYbSqtGBw6bin>

Aufgabe 6.24 Geben Sie die Eigenwerte und entsprechende Eigenvektoren der Nullmatrix $\underline{0}_{2 \times 2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ an.

Beispiel 6.19 Wir betrachten zwei Massepunkte mit der Masse m , die sich ausschließlich entlang der x -Achse bewegen können. Beide Massepunkte sind miteinander über eine lineare Feder mit der Federkonstante K verbunden. Zudem sind beide Massepunkte jeweils über eine lineare Feder mit der Federkonstante k mit einer Wand verbunden, siehe Abbildung.



Das 2-te Newtonsche Gesetz liefert für die Koordinatenfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der beiden Massepunkte das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$m\ddot{x}_1(t) = -kx_1(t) + K[x_2(t) - x_1(t)], \quad (6.318)$$

$$m\ddot{x}_2(t) = -kx_2(t) + K[x_1(t) - x_2(t)]. \quad (6.319)$$

Da zu erwarten ist, dass beide Massepunkte eine Schwingung ausführen, machen wir für die Koordinatenfunktionen den Ansatz

$$x_1(t) = c_1 e^{i\omega t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{i\omega t}. \quad (6.320)$$

Einsetzen des Ansatz in das Differentialgleichungssystem liefert das Gleichungssystem

$$(k + K)c_1 - Kc_2 = m\omega^2 c_1, \quad (6.321)$$

$$-Kc_1 + (k + K)c_2 = m\omega^2 c_2, \quad (6.322)$$

für die Unbekannten c_1, c_2, ω . Das Gleichungssystem besitzt die Form einer Eigenwertgleichung

$$\underline{\underline{A}} \underline{c} = \omega^2 \underline{c} \quad (6.323)$$

wobei $\underline{c} = (c_1 \ c_2)^T$ die Eigenvektoren und ω^2 die Eigenwerte sind und

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k + K & -K \\ -K & k + K \end{pmatrix}. \quad (6.324)$$

Die Kreisfrequenzen ω^2 werden auch als Eigenfrequenzen bezeichnet. Für die folgende Rechnung verwenden wir die Abkürzungen $f = k/m$, $F = K/m$ und $\lambda = \omega^2$, so dass die Eigenwertgleichung die Form

$$\underline{\underline{A}} \underline{c} = \lambda \underline{c} \quad (6.325)$$

mit

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} f + F & -F \\ -F & f + F \end{pmatrix} \quad (6.326)$$

annimmt. Die Eigenwerte λ werden aus der Gleichung

$$0 = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{1}) \quad (6.327)$$

$$= \det \begin{pmatrix} f + F - \lambda & -F \\ -F & f + F - \lambda \end{pmatrix} \quad (6.328)$$

$$= (f + F - \lambda)^2 - F^2 \quad (6.329)$$

bestimmt. Auflösen nach λ liefert die Eigenwerte

$$\lambda_1 = f, \quad \lambda_2 = f + 2F \quad (6.330)$$

und damit die Eigenfrequenzen

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \pm \sqrt{\frac{k + 2K}{m}}. \quad (6.331)$$

Wir bestimmen zuerst den Eigenvektor \underline{c}_1 zum Eigenwert λ_1 . Die Eigenwertgleichung lautet

$$\begin{pmatrix} f + F - \lambda_1 & -F \\ -F & f + F - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.332)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} F & -F \\ -F & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.333)$$

Hieraus folgt $c_1 = c_2$. Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_1 sind damit durch

$$\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_2 \quad (6.334)$$

gegeben. Durch Normierung ergibt sich der Eigenvektor

$$\underline{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.335)$$

Für den Eigenwert λ_2 ergibt sich die Eigenwertgleichung zu

$$\begin{pmatrix} f + F - \lambda_2 & -F \\ -F & f + F - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.336)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -F & -F \\ -F & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.337)$$

Hieraus folgt $c_1 = -c_2$. Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_2 sind damit durch

$$\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} c_2 \quad (6.338)$$

gegeben. Durch Normierung ergibt sich der Eigenvektor

$$\underline{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.339)$$

Die allgemeine Lösung der gekoppelten Bewegungsgleichungen ergibt sich aus einer Linearkombination der Teillösungen

$$c_1 e^{i\omega_1 t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \quad (6.340)$$

$$c_2 e^{i\omega_2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t}. \quad (6.341)$$

Die Teillösung (6.340) beschreibt eine Schwingung, bei der sich beide Massepunkte stets in die selbe Richtung bewegen, so dass die Feder zwischen den Massepunkten stets entspannt ist. Die Massepunkte schwingen „in Phase“. Die entsprechende Kreisfrequenz dieser Schwingung, $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, ist somit gleich derjenigen, die man erhält, wenn es ausschließlich die Kopplung mit der Wand geben würde und es keine die Massepunkte koppelnde Feder gibt. Die Teillösung (6.341) beschreibt eine Schwingung, bei der die Phasenwinkel der Schwingungen der Massepunkte um π relativ zueinander verschoben sind. D.h. die Massepunkte bewegen sich stets mit gleicher Amplitude aufeinander zu oder voneinander weg. Die Massepunkte schwingen somit „gegenphasig“. Die Kreisfrequenz dieser Schwingung, $\omega_2 = \sqrt{(k + 2K)/m}$, ist entsprechend größer als ω_1 .

Index

- Ableitung, 73
- Allquantor, 24
- Anfangswertproblem, 162
- Aussage, 24

- Bahnkurve, 217
- Basis, 204, 206
- Beschränktheit, 30
- Bewegungsgleichung, 10
- Binomalkoeffizienten, 80
- Binomischer Lehrsatz, 79

- Cauchyscher Hauptwert, 116

- Differential, 75, 168
- Differentialgleichung, 9, 159
 - Anfangswertproblem, 162
 - aperiodischer Grenzfall, 184
 - Basisfunktion, 176
 - charakteristisches Polynom, 176
 - Fundamentalsystem, 176
 - homogene, 169
 - inhomogene, 169
 - lineare, 169
 - Randwertproblem, 162
 - Resonanzkatastrophe, 189
 - Richtungsfeld, 163
 - Schwingfall, 183
 - separable, 164
 - Trennung der Variablen, 164
 - Variation der Konstanten, 171

- Euklidischer Raum, 192

- Eulersche Zahl, 64
- Existenzquantor, 24

- Fakultät, 80
- Folge
 - divergente, 45
 - Glieder, 45
 - Grenzwert, 45
 - konvergente, 45
 - Nullfolge, 46
 - reelle, 45

- Funktion, 7, 24
 - Ableitung, 73
 - implizite, 76
 - achsensymmetrische, 32
 - Argument, 25
 - Arkus-, 70
 - Beschränktheit, 30
 - bijektive, 40
 - Bild, 24
 - Exponentialfunktion, 63
 - gebrochenrationale, 57
 - gerade, 32
 - Gleichung, 25
 - Graph, 26
 - Grenzwert, 50
 - injektive, 39
 - Kosinus-, 68
 - Kotangens-, 69
 - linksseitiger Grenzwert, 53
 - Monotonie, 28
 - periodische, 35

- Polstelle, 57
 - Polynom, 54
 - punktsymmetrische, 32
 - rechtsseitiger Grenzwert, 53
 - reelle, 25
 - Sinus-, 68
 - Stetigkeit, 51, 217
 - surjektive, 40
 - Symmetrie, 32
 - Tangens-, 69
 - ungerade, 32
 - unstetige, 51
 - Verkettung, 44
 - Wertemenge, 24
- Gauß-Verfahren, 231
- Hamiltonfunktion, 235
- Hauptachsentransformation, 245
- Hilbertraum, 199
- Infimum, 31
- Integral
- bestimmtes, 103
 - Cauchyscher Hauptwert, 116
 - unbestimmtes, 89
 - uneigentliches, 111, 114
- Integrand, 103
- Integration, 87
- Hauptsatz der I., 103
 - partielle, 91, 110
 - Substitution, 94
- Kartesische Koordinaten, 208
- Komplexe Zahl
- algebraische Darstellung, 147
 - Betrag, 148
 - imaginäre Einheit, 147
 - Imaginärteil, 146
 - konjugierte, 146
 - Polardarstellung, 149, 150
 - Realteil, 145
 - trigonometrische Darstellung, 150
 - Zahlenebene, 146
- komplexe Zahl
- reine Phase, 150
 - Wurzel, 154
- Konvergenzbereich, 122
- Konvergenzradius, 122
- Koordinaten, 206
- kartesische, 19
- Koordinatensystem, 207
- Koordinatenursprung, 207
- Kosinusfunktion, 68
- Kotangensfunktion, 69
- Kreuzprodukt, 213
- Kronecker-Symbol, 206
- Lagrangefunktion, 235
- Landausymbol, 123
- Lineares Gleichungssystem, 230
- Lineares Gleichungssystem, 219
- Linearkombination, 204
- Matrix, 219
- Determinante, 228
 - Diagonalisierung, 244
 - Eigenraum, 242
 - Einheitsmatrix, 227
 - Hauptachsentransformation, 245
 - inverse, 228
 - Komponenten, 220
 - orthogonale, 238
 - Produkt, 220, 224
 - quadratische, 220
 - symmetrische, 240
 - transponierte, 222
- Menge, 22
- Metrik, 200
- Monom, 54, 199
- Monotonie, 28

- Newton-Verfahren, 87
- Operator, 218
- Orthonormalbasis, 206
- Ortsvektor, 207
- Partialbruch, 60
- Partialbruchzerlegung, 60
- Periodendauer, 36
- Periodizität, 35
- physikalische Größe
 - vektorielle, 16
- Polynom, 54
 - Koeffizienten, 54
 - Monom, 54, 199
- quadratische Ergänzung, 55
- Quantor, 24
- Randwertproblem, 162
- Reihe, 121
 - geometrische, 123
 - Potenz-, 122
- Richtungsfeld, 163
- Riemannintegral, 105
- Riemannsumme, 105
- Schranke
 - obere, 31
 - untere, 31
- Sinus hyperbolicus, 67
- Sinusfunktion, 68
- Skalar, 194
- Skalarprodukt, 199, 200
- Spatprodukt, 216
- Stammfunktion, 88
- Supremum, 31
- Symmetrie, 32
- Tangensfunktion, 69
- Taylorpolynom, 133
- Taylorreihe, 137
- Vektor, 17, 192
 - 2Norm, 200
 - Basis, 204, 206
 - Betrag, 197, 200
 - Eigenvektor, 240
 - Eigenwert, 240
 - Einheitsvektor, 200
 - Koordinaten, 206
 - Kreuzprodukt, 213
 - lineare Unabhängigkeit, 204
 - Linearkombination, 204
 - Metrik, 200
 - Orthogonalität, 200
 - Orthonormalbasis, 206
 - Ortsvektor, 207
 - Projektion, 212
 - Spatprodukt, 216
 - Standardbasis-, 18
 - Vektorprodukt, 213
- Vektorprodukt, 213
- Vektorraum, 17, 192, 195
- Wellenfunktion, 199
- Zahl
 - komplexe, 14