二重积分

二重积分 设函数$f(x,y)$在平面区域D上有界,

(1) 将D划分成n个小区域$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots\Delta\sigma_n$

(2) 任取$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$,作和$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

(3) 记$\lambda=max\{\Delta\sigma_i\}$,当$\lambda\to0$即所有小区域无限小,分区数$n\to\infty$无穷增多,若极限$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在,则称此极限为函数$f(x,y)$在平面区域D上的二重积分,记为$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

注解

① 二重积分是一个数,当$f(x,y)\geq0$时它表示以D为底,以曲面$z=f(x,y)$为顶的柱体体积

② 对闭区域D的划分是任意的,在直角坐标系中,面积元素$d\sigma=dxdy$;在极坐标系中,$d\sigma=\rho d\rho d\theta$

③ 若$f(x,y)$在有限闭区域D上连续,则$f(x,y)$在D上一定可积,反之不成立

④ 设$D=\{(x,y)|0\leq x\leq1,0\leq y\leq1\}$,则$\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(\frac{i}{m},\frac{j}{n})=\iint_D f(x,y)dxdy$

二重积分的性质 设函数$f(x,y)$, $g(x,y)$在平面有界闭区域D上可积,则

① $\iint_D[af(x,y)+bg(x,y)]d\sigma=a\iint_D f(x,y)d\sigma+b\iint_D g(x,y)d\sigma$

② $\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)d\sigma$,其中$D=D_1+D_2$,且$D_1$与$D_2$没有交集

③ $\iint_D d\sigma=A$, A为积分区域D的面积,若$m\leq f(x,y)\leq M$,则$mA\leq\iint_D f(x,y)d\sigma\leq MA$

④ 若$f(x,y)\leq g(x,y)$,则$\iint_D f(x,y)d\sigma\leq\iint_D g(x,y)d\sigma$,特殊地$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right|\leq\iint_D|f(x,y)|d\sigma$

若$f(x,y)$, $g(x,y)$在D上连续,$f(x,y)\leq g(x,y)$且不恒等,则$\iint_D f(x,y)d\sigma<\iint_D g(x,y)d\sigma$

⑤ 若$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$,且D的x、y表达式中不含彼此,则$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{D_x}f_1(x)dx\cdot\int_{D_y}f_2(y)dy$

二重积分中值定理 设D为平面有限闭区域,$f(x,y)$在D上连续,A为积分区域D的面积,则存在$(\xi,\eta)\in D$,使得$\iint_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\cdot A$

① 含二重积分的计算常用积分中值定理去掉二重积分符号

二重积分的对称性质

① 若D关于x轴对称，则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0$，$f(x,y)$关于y奇；$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=2\iint\limits_{D_y} f(x,y)d\sigma$，$f(x,y)$关于y偶

② 若D关于y轴对称，则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0$，$f(x,y)$关于x奇；$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=2\iint\limits_{D_x} f(x,y)d\sigma$，$f(x,y)$关于x偶

变量的轮换对称性 有的积分用其他方法无法计算

① 若D关于$y=x$对称，则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(y,x)d\sigma$，$I=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_D f(x,y)d\sigma+\iint\limits_D f(y,x)d\sigma\right]$

对极坐标，若关于$\theta=\frac{\pi}{4}$对称，则$\iint\limits_D f(\sin\theta,\cos\theta,\rho)d\sigma=\iint\limits_D f(\cos\theta,\sin\theta,\rho)d\sigma$

② 若D关于$y=-x$对称，则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(-y,-x)d\sigma$

二重积分计算 将二重化成两个单次的定积分来计算

① $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$，则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$

② $D=\{(x,y)\mid \varphi_1(y)\le x\le\varphi_2(y),\ a\le y\le b\}$，则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx$

有的定积分无法计算(函数不可积)，需要先改变积分次序再计算

③ 令$\begin{matrix}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{matrix}$，$D=\{(r,\theta)\mid \alpha\le\theta\le\beta,\ r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)\}$，则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr$

适用于：被积函数中含x^2+y^2、$\frac{x}{y}$、$\frac{y}{x}$，积分区域D为$r^2\le x^2+y^2\le R^2$、$x^2+y^2\le 2ax$、$x^2+y^2\le 2by$

二重积分的几何应用

① 平面区域的面积，D的面积$A=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$

② 曲顶柱体的体积，设曲顶柱体$\Sigma: z=f(x,y)\ge 0$，体积$V=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$

③ 空间曲面的面积，设空间曲面$\Sigma: z=f(x,y)$，面积$A=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$

④ 形心坐标，设平面区域D，则其

形心坐标为$(\bar{x},\bar{y})=\left(\dfrac{\iint\limits_D x\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy},\dfrac{\iint\limits_D y\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}\right)$，质心坐标为$\left(\dfrac{\iint\limits_D x\rho\,dxdy}{\iint\limits_D \rho\,dxdy},\dfrac{\iint\limits_D y\rho\,dxdy}{\iint\limits_D \rho\,dxdy}\right)$