费马引理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义,并且在 x_0 处可导,如果对任意的 $x\in U(x_0)$,有

$$f(x)\leqslant f(x_0) \quad (\text{或 } f(x)\geqslant f(x_0)),$$

那么 $f'(x_0)=0$.

证 不妨设 $x\in U(x_0)$ 时,$f(x)\leqslant f(x_0)$(如果 $f(x)\geqslant f(x_0)$,可以类似地证明). 于是,对于 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$,有

$$f(x_0+\Delta x)\leqslant f(x_0),$$

从而当 $\Delta x>0$ 时,

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0;$$

当 $\Delta x<0$ 时,

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

根据函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的条件及极限的保号性,便得到

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0,$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

所以,$f'(x_0)=0$. 证毕.

罗尔定理 如果函数$f(x)$满足

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) 在开区间(a,b)内可导;

(3) 在区间端点处的函数值相等,即$f(a)=f(b)$,

那么在(a,b)内至少有一点ξ $(a<\xi<b)$,使得$f'(\xi)=0$.

证 由于$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,根据闭区间上连续函数的最大值最小值定理,$f(x)$在闭区间$[a,b]$上必定取得它的最大值M和最小值m.这样,只有两种可能情形:

(1) $M=m$.这时$f(x)$在区间$[a,b]$上必然取相同的数值M:$f(x)=M$.由此,$\forall x\in(a,b)$,有$f'(x)=0$.因此,任取$\xi\in(a,b)$,有$f'(\xi)=0$.

(2) $M>m$.因为$f(a)=f(b)$,所以M和m这两个数中至少有一个不等于$f(x)$在区间$[a,b]$的端点处的函数值.为确定起见,不妨设$M\neq f(a)$(如果设$m\neq f(a)$,证法完全类似),那么必定在开区间(a,b)内有一点ξ使$f(\xi)=M$.因此,$\forall x\in[a,b]$,有$f(x)\leqslant f(\xi)$,从而由费马引理可知$f'(\xi)=0$.

定理证毕.

拉格朗日中值定理 如果函数$f(x)$满足

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) 在开区间(a,b)内可导,

那么在(a,b)内至少有一点ξ $(a<\xi<b)$,使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

成立.

定理的证明 引进辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

容易验证函数$\varphi(x)$适合罗尔定理的条件:$\varphi(a)=\varphi(b)=0$,$\varphi(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

根据罗尔定理,可知在(a,b)内至少有一点ξ,使$\varphi'(\xi)=0$,即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

由此得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

定理证毕.

柯西中值定理 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 对任一 $x\in(a,b)$, $F'(x)\neq 0$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

成立.

证 首先注意到 $F(b)-F(a)\neq 0$. 这是由于

$$F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a),$$

其中 $a<\eta<b$,根据假定 $F'(\eta)\neq 0$,又 $b-a\neq 0$,所以

$$F(b)-F(a)\neq 0.$$

设辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x),$$

显然,$\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,且

$$\varphi(a)=\varphi(b)=\frac{F(b)f(a)-F(a)f(b)}{F(b)-F(a)},$$

故 $\varphi(x)$ 适合罗尔定理的条件,因此在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)=0,$$

由此得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

定理证毕.

泰勒(Taylor)中值定理 1 **如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数,那么存在 x_0 的一个邻域,对于该邻域内的任一 x,有**

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n).$$

证 记 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$,则

$$R_n(x_0)=R'_n(x_0)=R''_n(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0.$$

由于 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数,因此 $f(x)$ 必在 x_0 的某邻域内存在 $(n-1)$ 阶导数,从而 $R_n(x)$ 也在该邻域内 $(n-1)$ 阶可导,反复应用洛必达法则,得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}&=\lim_{x\to x_0}\frac{R'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{R''_n(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}\\&=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!\ (x-x_0)}\\&=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)-R_n^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}\\&=\frac{1}{n!}R_n^{(n)}(x_0)=0,\end{aligned}$$

因此 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$,定理证毕.

泰勒(Taylor)中值定理 2 **如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 阶导数,那么对任一 $x\in U(x_0)$,有**

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证 记 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$. 只需证明

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间}).$$

由假设可知,$R_n(x)$ 在 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 阶导数,且

$$R_n(x_0)=R'_n(x_0)=R''_n(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0.$$

对两个函数 $R_n(x)$ 及 $(x-x_0)^{n+1}$ 在以 x_0 及 x 为端点的区间上应用柯西中值定理(显然,这两个函数满足柯西中值定理的条件),得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}\ (\xi_1\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间}),$$

再对两个函数 $R'_n(x)$ 与 $(n+1)(x-x_0)^n$ 在以 x_0 及 ξ_1 为端点的区间上应用柯西中值定理,得

$$\begin{aligned}\frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}&=\frac{R'_n(\xi_1)-R'_n(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}\\&=\frac{R''_n(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}\ (\xi_2\text{ 在 }x_0\text{ 与 }\xi_1\text{ 之间}).\end{aligned}$$

照此方法继续做下去,经过 $(n+1)$ 次后,得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ (\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }\xi_n\text{ 之间,因而也在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间}).$$

注意到 $R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$ (因 $p_n^{(n+1)}(x)=0$),则由上式得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间}),$$

定理证毕.

在泰勒公式中,如果取 $x_0=0$,那么有带有佩亚诺余项的麦克劳林(Maclaurin)公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

在泰勒公式中,如果取 $x_0=0$,那么 ξ 在 0 与 x 之间. 因此可以令 $\xi=\theta x$ $(0<\theta<1)$,从而泰勒公式变成较简单的形式,即所谓带有拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

中值定理的几个推广形式

导数零点定理 设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，且$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，则存在ξ，使得$f'(\xi)=0$

不妨设$f'_+(a)>0$，$f'_-(b)<0$

因$f'_+(a)>0$，所以存在$x_1\in(a,b)$，使得$f(x_1)>f(a)$

因$f'_-(b)<0$，所以存在$x_2\in(a,b)$，使得$f(x_2)>f(b)$

因$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以$f(x)$的最大值在(a,b)内取到，即存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)$最大，

故$f'(\xi)=0$

导数介值定理 设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，且$f'_+(a)\neq f'_-(b)$，不妨设$f'_+(a)<f'_-(b)$，则对于任意的$\eta\in(f'_+(a),f'_-(b))$，存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\eta$

令$\varphi(x)=f(x)-\eta x$，$\varphi'(x)=f'(x)-\eta$

$\varphi'_+(a)=f'_+(a)-\eta<0$，$\varphi'_-(b)=f'_-(b)-\eta>0$

因$\varphi'_+(a)\cdot\varphi'_-(b)<0$，由导数零点定理，存在$\xi\in(a,b)$，使得$\varphi'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=\eta$

一般地，若$f^{(n)}(x)\neq0$，则方程$f(x)=0$至多有n个不同根，用罗尔定理反证