11. **Разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Одношаговые и многошаговые методы (Эйлера, Рунге-Кутты, Адамса). Понятие устойчивости численного решения ОДУ.**

Общий подход. Решаем след. задачу Каши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), \quad a \le x \le b, \\ y(a) = y_a. \end{cases} \tag{1}$$

Построение численных алгоритмов решения уравнения (1) опирается на дискретизацию задачи. Введем в области расчета $x \in [a,t]$ дискретный набор точек $x_i = a + hi$, $i = 0,1,\dots,N$, $h = (h-a)/N$, в которых будет вычисляться приближенное решение.

Точки x_i будем называть *узлами интегрирования* или *узлами сетки*, расстояние *h* между узлами – *шагом интегрирования* или *шагом сетки*. Совокупность всех узлов $\{x_i,\ i = 0,1,\dots N\}$ будем называть *сеточной областью* или просто *сеткой узлов*.

Мы также будем пользоваться другими обозначениями:

$\{y_i,\ i = 0,1,\dots,N\}$ – совокупность искомых приближенных значений решения задачи (5.6) в узлах сетки;

$\{f_i = f(x_i, y_i),\ i = 0,1,\dots,N\}$ – совокупность значений правой части уравнения (1) в узлах.

Различные совокупности величин, отнесенных к узлам сетки, называются *сеточными функциями*.

Для характеристики точности численных методов определим погрешность приближенного решения следующим образом:

$\delta = \max\limits_i |y_i - y(x_i)|$, где $y(x_i)$ – значение точного решения в узле сетки.

Определения. Будем говорить, что численное решение сходится к точному, если $\delta \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$. Будем также говорить, что метод, по которому получено численное решение, является методом *p*-го порядка точности, если выполняется неравенство $\delta \le \mathrm{const} \cdot h^p$.

Переходим к обсуждению конкретных методов получения приближенного решения задачи (1) в узлах сетки. Простейший способ их конструирования опирается на замену производной в левой части уравнения (1) в окрестности каждого узла приближенным разностным отношением по формулам численного дифференцирования .

Метод Эйлера. Заменяя в (1) производную в окрестности каждого *i*-го узла сетки правым разностным отношением, приходим к методу Эйлера:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad i = 0,1,\ldots,N-1, \\ y_0 = y_a \,. \end{cases} \tag{2}$$

¬ Замечание. Алгебраические соотношения между компонентами сеточной функции, которыми заменяются исходные дифференциальные уравнения в окрестности каждого узла сетки, будем называть *разностными уравнениями* (*соотношениями*).

Замкнутую систему разностных уравнений вместе с дополнительными условиями (начальными или краевыми) называют *разностной схемой*. Таким образом, (2) – это разностная схема Эйлера. ■

Последовательные значения y_i вычисляются по формуле

$$y_{i+1} - y_i + hf(x_i, y_i), \tag{3}$$

которая непосредственно следует из верхнего соотношения (2).

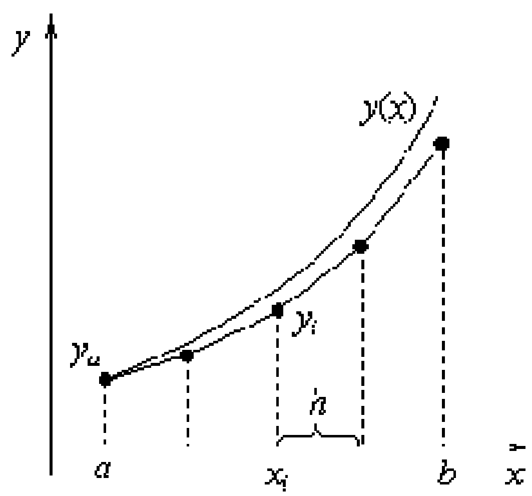

Рис. 5.1.

Метод Эйлера имеет очень простую геометрическую интерпретацию. Искомая интегральная кривая $y(x)$ на отрезке $[a,b]$ приближается ломаной (рис. 5.1), наклон которой на каждом элементарном участке $[x_i, x_{i+1}]$ определяется наклоном интегральной кривой уравнения (3) в точке (x_i, y_i).

¬ Замечание. К этому же методу можно придти, заменяя производную в уравнении (5.7) левым разностным отношением

$$\begin{cases} \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(x_i, y_i), \quad i = 0,1,\ldots,N-1, \\ y_0 = y_a . \end{cases}$$

Последовательные значения y_i в этом случае вычисляются по формуле

$$y_i - y_{i-1} + hf(x_i, y_i).$$

Однако при этом возникают некоторые трудности, связанные с тем, что искомая величина y_i входит в правую часть уравнения, причем, в общем случае, нелинейным образом. Эти трудности непринципиальны, достаточно вспомнить о методах решения нелинейных уравнений. Например, можно предложить следующий итерационный процесс, для вычисления приближенного решения в очередном *i*-ом узле

$$y_i^{(k)} = y_{i-1} + hf(x_k, y_i^{(k-1)}), \quad y_i^{(0)} = y_{i-1}.$$

Такого рода методы, в которых для вычисления приближенного решения в очередном *i*-ом узле необходимо дополнительно решать некоторые уравнения (линейные или нелинейные) называются *неявными методами*. В противоположность этому методы, в которых приближенное решения в очередном *i*-ом узле явно выражается через предыдущие значения $y_{i-1}, y_{i-2}, \ldots$ называются *явными методами*. При этом, если для вычисления y_i используется только одно предыдущее значение y_{i-1}, то метод называется *одношаговым*, а если несколько предыдущих значений – *многошаговым*. Таким образом, метод Эйлера (2) является явным одношаговым методом. ■

Оставляя вопрос оценки погрешности методов численного интегрирования за рамками нашего изложения отметим, что рассмотренный метод Эйлера обладает первым порядком точности, т.е. $\delta \sim h$.

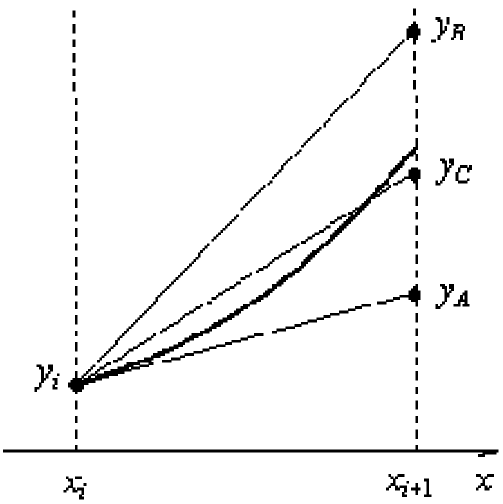

Рис. 5.2.

Чтобы понять, как можно строить методы обладающие большей точностью обратимся к рис. 5.2. Здесь в пределах отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ в увеличенном масштабе изображена интегральная кривая, выходящая из точки с координатами (x_i, y_i); y_A – приближенное значение (при x_{i+1}), которое получается по явному методу Эйлера; y_B – значение, вычисляемое по неявному методу Эйлера (соответствующий отрезок, проведен из точки (x_i, y_i) с наклоном, равным наклону касательной к интегральной кривой в точке x_{i+1}); y_C – значение, которое соответствует пересечению $x = x_{i+1}$ с прямой, проведенной из точки (x_i, y_i) с наклоном, равным наклону касательной к интегральной кривой в середине отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. Исходя из приведенного рисунка можно предположить, что точность y_C больше, нежели y_A или y_B. Опираясь на эти простые геометрические соображения, сконструируем другие расчетные схемы.

Методы Рунге-Кутта. Рассмотренные выше метод Эйлера и его модификации являются частными случаями однопараметрического семейства схем Рунге-Кутта различного порядка точности. Схема Рунге-Кутта второго порядка точности, которые определяются следующим разностным соотношением:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = (1-\alpha) p_1 + \alpha p_2, \qquad (4)$$

где α – свободный параметр, а p_1 и p_2 – вспомогательные величины, вычисляемые по формулам

$$p_1 = f(x_i, y_i), \qquad p_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha} p_1\right). \qquad (4')$$

Широкое распространение на практике получил метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Расчетные формулы этого метода имеют следующий вид:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 - p_4), \\ p_1 = f(x_i, y_i), \\ p_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} p_1), \\ p_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} p_2), \\ p_4 = f(x_i + h, y_i + h p_3), \end{cases} \qquad (5)$$

где p_k – вспомогательные величины.

Метод Рунге-Кутта (5) требует существенно большего объема вычислений по сравнению с методом Эйлера и его модификациями, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить вычисления с бóльшим шагом. Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге-Кутта.

Представление о многошаговых методах. Многошаговые методы решения задачи Коши характерны тем, что вычисляемое значение решения в текущем узле зависит от данных не только в одном предыдущем узле, но и в ряде предшествующих. В качестве примера построим простейший многошаговый метод. Заменяя в (1) производную в окрестности каждого *i*-го узла сетки центральным разностным отношением получим следующую разностную схему:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = f(x_i, y_i), \quad i = 1,2,\ldots N-1, \\ y_0 = y_a \end{cases} \tag{6}$$

Эта система незамкнута так как значение y_1 не определено. Выразим из (6) значение y_{i+1} :

$$y_{i+1} = y_{i-1} - 2h f(x_i, y_i). \tag{7}$$

Видно, что искомое значение y_{i+1} зависит от двух предыдущих значений y_i и y_{i-1}. Для того, чтобы начать вычисления по формуле (7) при заданном значении y_0 необходимо каким-то образом доопределить значение y_1. Это можно сделать, например, воспользовавшись методом Эйлера: $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$. Формула (7) является простейшим многошаговым (двухточечным) методом решения задачи Коши и обладает вторым порядком точности.

Коснемся коротко принципиально иного подхода, который также позволяет конструировать методы решения задачи Коши различной точности. Заметим, что решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ удовлетворяет интегральному соотношению

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\,dx.$$

Если решение в узлах вплоть до *i*-го уже вычислено, то по известным значениям $f_k = f(x_k, y_k)$, $k = i, i-1, \ldots$ можно интерполировать подынтегральную функцию полиномами различной степени. Вычисляя интеграл от выбранного полинома, будем получать различные расчетные формулы, называемые *формулами Адамса*.

Например, заменяя подынтегральную функцию ее значением в точке x_i (полиномом нулевой степени), получим

$$y_{i+1} - y_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i\,dx - f_i h \qquad \text{или} \qquad y_{i+1} = y_i + h f_i$$

– метод Эйлера (полученный новым способом).

Заменяя подынтегральную функцию полиномом третьей степени можно получить метод Адамса четвертого порядка:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{24}\left(55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3}\right). \qquad (8)$$

Любопытен вопрос: какой из двух теперь известных нам методов четвертого порядка точности предпочтительней – метод Адамса (8) или метод Рунге-Кутта (4)? При ответе на этот вопрос нужно принимать следующие соображения: метод Адамса требует меньших затрат (арифметических операций) при определении очередного значения y_{i+1}, так как при счете по формуле (8) нужно лишь один раз вычислять значение функции $f_i - f(x_i, y_i)$, другие значения – $f_{i-1}, f_{i-2}, f_{i-3}$ – к этому моменту уже вычислены (достаточно их сохранять в памяти компьютера), в то время как метод Рунге-Кутта требует в обязательном порядке вычислять четыре вспомогательных значения функции *f* (см. формулы (4)).

С другой стороны, чтобы начать вычисления по формулам Адамса, необходимо помимо заданного значения y_0 как-то определить (например, по тем же формулам Рунге-Кутта) значения y_1, y_2, y_3 в первых трех узлах интегрирования.

<u>Оценка погрешности численного решения</u>

Рассмотрим задачу Lu=f; заменяем ее на дискретную задачу $L_n \tilde{u}_n \; f_n$

Разностная схема устойчива, если существует C_s>0 (независимая от h – шага сетки): $\| u_h \| \; C_s \; \| f_h \|$; это означает непрерывную зависимость от входных данных.

Аналогично, вводится понятие аппроксимации дифференциальной задачи с порядком a: $\| f_h \| \; C_a \|h\|^a$

Сходимость решения разностной задачи: $\| u_h \| \; C_d \|h\|^d$

Th Лакса (бесполезная): Cd=Cs*Ca, т.е. устойчивая схема обеспечивает сходимость решения с порядком аппроксимации.