Пусть в некоторой области D поставлена некоторая дифференциальная краевая задача

$$Lu = f\,, \qquad (1)$$

где через L обозначен некоторый заданный дифференциальный оператор, действующий на искомую функцию u, через f - правая часть. Примем, что оператор L включает как дифференциальное уравнение, так и граничные условия.

Обозначим через $[u]^h$ таблицу значений искомого решения u в узлах сетки D_h. Тогда соответствующая (8.1) разностная краевая задача (разностная схема) запишется в виде

$$L_h u^h = f^h. \quad (2)$$

Сходимость

Будем говорить, что решение u^h разностной краевой задачи (8.2) при сгущении сетки *сходится* к решению u дифференциальной краевой задачи (8.1), если

$$\left\| [u]^h - u^h \right\| \to 0$$

Сходимоть порядка к

Если, сверх того, выполнено неравенство $\left\| [u]^h - u^h \right\| \le Ch^k$,

где $C > 0,\; k > 0$– некоторые постоянные, не зависящие от h, то будем говорить, что имеет место *сходимость* порядка h^k или, что разностная схема имеет k - й порядок точности. как правило, систему

Аппроксимация

Не всегда (2) удается выбрать так, чтобы $[u]^h$ в точности ей удовлетворяла. При подстановке в уравнение (8.2) возникает некоторая *невязка*:

δf^{h} *- невязка*

$$L_h[u]^h = f^{h} + \delta f^{h} \qquad (3)$$

<u>Определение 8.2</u>

Будем говорить, что разностная схема (8.2) ***аппроксимирует*** исходную дифференциальную задачу (8.1) на решении u, если

$\left\|\delta f^{h}\right\| \to 0$ при $h \to 0$, т.е. норма невязки стремится к нулю при стремлении к нулю шага разностной сетки.

Сходимость порядка k

Если, сверх того, имеет место неравенство $\left\|\delta f^{h}\right\| \le ch^{k}$,

где $C > 0,\ k > 0$ – некоторые постоянные, не зависящие от h, то будем говорить, что имеет место *аппроксимация* порядка h^{k} или порядка k относительно величины h.

Устойчивость

Будем называть разностную схему (2) *устойчивой*, если существуют такие постоянные h_0 и δ_0, что при любом $h < h_0$ и любой сеточной функции ε^{h}, такой, что $\left\|\varepsilon^{h}\right\| \le \delta_0$ разностная задача

$$L_h z^{h} = f^{h} + \varepsilon^{h},$$

полученная из (8.2) добавление к правой части возмущения ε^{h} имеет место и имеет только одно решение z^{h}, причем справедлива оценка

$$\left\|z^{h} - u^{h}\right\| \le C_1 . \left\|\varepsilon^{h}\right\|, \qquad (8.4)$$

где C_1– некоторая постоянная, не зависящая от h.

Малое возмущение ε^h правой части разностной схемы (2) вызывает равномерно относительно h малое возмущение $(z^h - u^h)$ решения u^h.

Теорема (теорема Лакса о сходимости).

Пусть разностная схема (8.2) *аппроксимирует* задачу (8.1) на решении u с порядком h^k и *устойчива*.

Тогда решение разностной задачи $L_h u^h = f^h$ сходится к решению дифференциальной задачи $Lu = f$, причем имеет место оценка $\left\| [u]^h - u^h \right\| \le Ch^k$, где C – некоторая постоянная, не зависящая от h.

Эта теорема позволяет свести вопрос о важнейшей с практической точки зрения проблемы исследования *сходимости* к вопросу исследования *аппроксимации* и *устойчивости*.

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Методы решения уравнений в частных производных

В данной главе изложены основные понятия и методы, используемые при конечно-разностном решении уравнений в частных производных. Основой метода конечных разностей является дискретизация - замена непрерывной области совокупностью изолированных точек (сеткой), причем решение уравнений ищется лишь в этих точках (узлах сетки).

Производные аппроксимируются конечными разностями и решение уравнений в частных производных сводится к решению системы алгебраических уравнений.

Основные особенности получающейся системы алгебраических уравнений определяются типом исходного уравнения (или системы уравнений) в частных производных. Стационарные задачи обычно сводятся к системам алгебраических уравнений, которые приходится решать одновременно во всей области, учитывая заданные граничные условия. Нестационарные (маршевые) задачи часто сводятся к алгебраическим уравнениям, которые можно решать последовательно.

Основные понятия теории разностных схем

Пусть в некоторой области *D* поставлена некоторая дифференциальная краевая задача, определяемая дифференциальным уравнением и краевыми (граничными) условиями.

$$Lu = f\ , \tag{8.1}$$

где через L обозначен некоторый заданный дифференциальный оператор, действующий на искомую функцию u, через f - правая часть. Примем, что оператор L включает как дифференциальное уравнение, так и граничные условия.

На некоторой разностной сетке D_h строим разностный оператор L_h, действующий на сеточную функцию u^h.

Обозначим через $[u]^h$ таблицу значений искомого решения u в узлах сетки D_h. Тогда соответствующая (8.1) разностная краевая задача (разностная схема) запишется в виде

$$L_h u^h = f^h. \tag{8.2}$$

<u>Определение 8.1</u>

Будем говорить, что решение u^h разностной краевой задачи (8.2) при сгущении сетки *сходится* к решению u дифференциальной краевой задачи (8.1), если

$\left\| [u]^h - u^h \right\| \to 0$ при $h \to 0$, т. е. если норма разности точного и приближенного решений стремится к нулю при стремлении к нулю шага разностной сетки.

Если, сверх того, выполнено неравенство $\left\| [u]^h - u^h \right\| \le Ch^k$, где $C > 0$, $k > 0$ – некоторые постоянные, не зависящие от h, то будем говорить, что имеет место *сходимость* порядка h^k или, что разностная схема имеет k - й порядок точности.

В этом определении $[u]^h$ - проекция точного решения задачи (8.1) на сетку D_h ($[u]^h$ - сеточная функция, компоненты которой есть значения точного решения u в узлах сетки D_h).

Предположим, что разностная задача (8.2) имеет единственное решение u^h.

Если бы при подстановке в левую часть (8.2) вместо сеточной функции u^h проекции точного решения на сетку - $[u]^h$ равенство (8.2) оказалось бы в точности выполненным, то ввиду единственности решения имело бы место равенство $[u]^h = u^h$, идеальное с точки зрения сходимости.

Это означало бы, что решение u^h разностной задачи (8.2) совпадает с искомой сеточной функцией $[u]^h$, которую мы условились считать точным решением.

Однако, как правило, систему (8.2) не удается выбрать так, чтобы $[u]^h$ в точности ей удовлетворяла. При подстановке в уравнение (8.2) возникает некоторая *невязка*:

Величина δf^h называется *невязкой*, и при подстановке точного решения уравнения (8.1) в оператор L_h имеем

$$L_h[u]^h = f^h + \delta f^h \tag{8.3}$$

<u>Определение 8.2</u>

Будем говорить, что разностная схема (8.2) ***аппроксимирует*** исходную дифференциальную задачу (8.1) на решении u, если

$\left\|\delta f^h\right\| \to 0$ при $h \to 0$, т.е. норма невязки стремится к нулю при стремлении к нулю шага разностной сетки.

Если, сверх того, имеет место неравенство $\left\|\delta f^h\right\| \le ch^k$,

где $C > 0$, $k > 0$ – некоторые постоянные, не зависящие от h, то будем говорить, что имеет место *аппроксимация* порядка h^k или порядка k относительно величины h.

В случае аппроксимации можно считать, что уравнение (8.3) которому удовлетворяет $[u]^h$, получается из уравнения (8.2) путем прибавления к правой части некоторой малой (при малом h) добавки δf^h.

Следовательно, если решение u^h задачи (8.2) *устойчиво* относительно возмущения правой f^h, т.е. мало изменяется при малом изменении правой части, то решение u^h задачи (8.2) и решение $[u]^h$ задачи (8.3) отличаются мало, так что из *аппроксимации* $\delta f^h \to 0$ при $h \to 0$ следует *сходимость,* т.е. $u^h \to [u]^h$ при $h \to 0$.

Определение 8. 3

Будем называть разностную схему (8.2) *устойчивой*, если существуют такие постоянные h_0 и δ_0, что при любом $h < h_0$ и любой сеточной функции ε^h, такой, что $\left\|\varepsilon^h\right\| \le \delta_0$ разностная задача

$$L_h z^h = f^h + \varepsilon^h,$$

полученная из (8.2) добавление к правой части возмущения ε^h имеет место и имеет только одно решение z^h, причем справедлива оценка

$$\left\|z^h - u^h\right\| \le C_1 . \left\|\varepsilon^h\right\|, \tag{8.4}$$

где C_1 – некоторая постоянная, не зависящая от h.

Последнее неравенство означает, что малое возмущение ε^h правой части разностной схемы (8.2) вызывает равномерно относительно h малое возмущение $(z^h - u^h)$ решения u^h.

Теорема (теорема Лакса о сходимости).

Пусть разностная схема (8.2) *аппроксимирует* задачу (8.1) на решении u с порядком h^k и *устойчива*.

Тогда решение разностной задачи $L_h u^h = f^h$ сходится к решению дифференциальной задачи $Lu = f$, причем имеет место оценка $\left\| [u]^h - u^h \right\| \le Ch^k$, где C – некоторая постоянная, не зависящая от h.

Эта теорема позволяет свести вопрос о важнейшей с практической точки зрения проблемы исследования *сходимости* к вопросу исследования *аппроксимации* и *устойчивости*.

Заметим, что оба этих свойства разностных схем являются независимыми друг от друга.

Установить устойчивость разностной схемы с использованием данного выше определения на практике весьма затруднительно. Поэтому предложен ряд способов исследования устойчивости, позволяющих получить достаточные, а в ряде случаев необходимые и достаточные условия устойчивости разностных схем. Из методов исследования устойчивости рассмотрим спектральный признак, метод гармоник ряда Фурье.

Разностные схемы для уравнений параболического типа

Классическим примером уравнения в частных производных параболического типа является одномерное уравнение теплопроводности (уравнение диффузии). Рассмотрим смешанную задачу для однородного уравнения теплопроводности. Задача состоит в отыскании функции $u(x,t)$, удовлетворяющей в области $D=\{0\le x\le l, 0\le t\le T\}$ уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+f(x,t),\quad \alpha=const>0,$$

$$x\in(0,X),\quad t\in(0,T], \qquad (8.20)$$

(α - коэффициент теплопроводности)

начальному условию $u(x,0)=\varphi(x)$ (8.21) и краевым условиям

$$U(0,t)=g_1(t),$$
$$U(X,t)=g_2(t).\quad t\in[0,T],$$

либо

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0}=g_1(t),\quad \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=X}=g_2(t), \qquad (8.22)$$

К задаче (8.20)-(8.22) (первая краевая задача с начальными данными) приводит, в частности, задача о распространении тепла в однородном стержне длины l, на концах которого поддерживается заданный температурный режим.

Введем разностную сетку $x_i = x_0 + ih, \quad h = 1/M$, $t^n = t^o + n\tau, \quad \tau = T/N$, $i = 0,1,\ldots,M, \quad n = 0,1,\ldots,N$.

1. Явная схема.

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \alpha \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2}.$$

Погрешность аппроксимации равна $O(\tau, h^2)$, множитель перехода $\lambda = 1 - 4rSin^2 \frac{kh}{2}$.

Явная схема оказывается устойчивой только при $r \le 1/2$, где $r = \alpha\tau/h^2$, т.е. при $\tau \le \alpha h^2/2$.

Это означает, что вычисления по явной схеме придется вести с очень малым шагом по τ, что, конечно, может привести к большим затратам машинного времени.

2. Неявная схема.

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \alpha \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2}. \qquad (8.23)$$

Перепишем ее в виде:

$$rU_{i+1}^{n+1} - (1 + 2r)U_i^{n+1} + rU_{i-1}^{n+1} = -U_i^n. \qquad (8.24)$$

Погрешность аппроксимации порядка $O(\tau, h^2)$, здесь $r = \alpha\tau/h^2$.

Множитель перехода равен $\lambda = \dfrac{1}{1 - 4rSin^2 \frac{kh}{2}}$.

Схема является абсолютно устойчивой.

Схема (8.23) *неявная*, поэтому значения U_i^{n+1} находят как решение системы линейных уравнений (8.24).

Для решения системы (8.24) можно применять метод прогонки (по пространственной переменной x), так как матрица при искомых неизвестных является *трехдиагональной.* Таким образом, решив систему разностных уравнений, найдем значения функции u на временном слое $n+1$, если известно решение на временном слое n.

В неявной схеме вычисления на одном шаге требуют больше операций, чем в явной схеме, но зато величину шага по времени можно выбрать как угодно большой без риска нарушить устойчивость схемы. Все это позволяет значительно уменьшить машинное время, необходимое для решения задачи.

Разностные схемы для уравнений эллиптического типа

Уравнение Лапласа является модельным для эллиптических уравнений в частных производных. Некоторые важные задачи, часто встречающиеся в приложениях, сводятся к решению одного эллиптического уравнения. К ним относятся задачи расчета дозвукового безвихревого (потенциального) течения газа и определения стационарного поля температуры в твердом теле, задачи гидродинамики и теплообмена.

Задача Дирихле (граничные условия первого рода) для уравнения Лапласа в прямоугольной области:

найти непрерывную функцию ***U(x,y),*** удовлетворяющую внутри прямоугольной области ***D{(x,y),*** $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$, уравнению Лапласа:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

и принимающую на границе области заданные значения:

$U(0,y)=f_1(y), \qquad U(a,y)=f_2(y),\ y\in[0,b]$

$U(x,0)=f_3(x), \qquad U(x,b)=f_4(x), x\in[0,a],$

где f_i - заданные функции.

Будем считать, что $U(x,y)$ непрерывна на границе области, т.е.

$f_1(0)=f_3(0),\ f_1(b)=f_4(0),$

$f_2(0)=f_3(a),\ f_2(b)=f_4(a).$

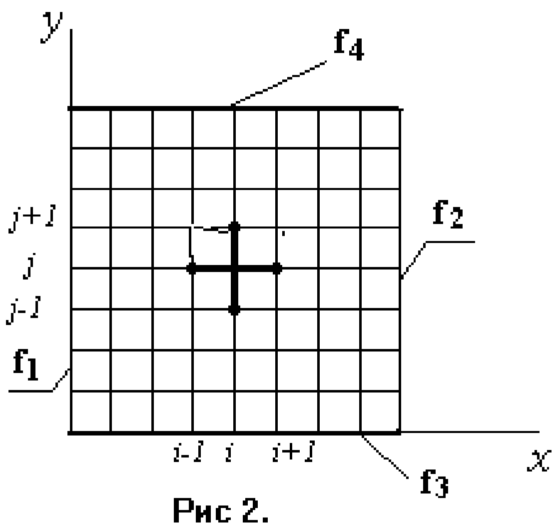

Рис 2.

Выбрав шаги h и k - по x и по y соответственно, строим сетку

$x_i=ih,\ \ i= 0, 1, ..., n;$

$y_i=jk,\ \ \ j= 0, 1, ..., m;$

$x_n=nh=a;\ \ y_m=mk=b.$

Обозначим $U_{i,j}=U(x_i\,, y_j),$ аппроксимируем частные производные $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ в каждом внутреннем узле сетки центральными производными второго порядка

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{U_{i+1\,j} - 2U_{i\,j} + U_{i-1\,j}}{h^2} + o(h^2)$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{U_{i\,j+1} - 2U_{i\,j} + U_{i\,j-1}}{k^2} + o(k^2)$$

Заменим уравнение Лапласа его конечно - разностным аналогом

1. Пятиточечная разностная схема

$$\frac{U_{i+1j}-2U_{ij}+U_{i-1j}}{h^2}+\frac{U_{ij+1}-2U_{ij}+U_{ij-1}}{k^2}=0 \qquad (1)$$

$$i=1, \ldots, n-1, \qquad j=1, \ldots, m-1.$$

Погрешность аппроксимации разностного уравнения составляет $O(h^2+k^2)$.

Уравнение (1) вместе со значениями $U_{i,j}$ в граничных узлах образуют систему алгебраических уравнений относительно приближенных значений функции $U(x,y)$ в узлах сетки (x_i,y_j).

Наиболее простой вид имеет эта система при $h=k$:

$$U_{ij}=\frac{U_{i+1j}+U_{i-1j}+U_{ij+1}+U_{ij-1}}{4}$$

$U_{i0}=f_3(x_i)$, $\qquad U_{im}=f_4(x_i)$,

$U_{0j}=f_1(y_j)$, $\qquad U_{nj}=f_2(y_j)$,

$i=1, \ldots, n-1; \qquad j=1, \ldots, m-1$

Для определения величин $U_{i,j}$ требуется решить систему линейных алгебраических уравнений. Методы решения разделяются на **прямые и итерационные**.

Прямые методы: Метод Гаусса и его модификации, прогонки.

Итерационные методы: метод итераций, метод Зейделя

Итерационный метод Зейделя:

$$U_{ij}^{(s+1)}=\frac{1}{4}\left[U_{i-1j}^{(s+1)}+U_{i+1j}^{(s)}+U_{ij+1}^{(s)}+U_{ij-1}^{(s+1)}\right],$$

где верхний индекс s - номер итерации.

При $s\to\infty$ последовательность $U_{i,j}^{(s)}$ сходится к точному решению системы.

В качестве условия окончания итерационного процесса можно

принять $$\max |U_{i,j}^{(s)} - U_{i,j}^{(s+1)}| < \varepsilon, \quad 1 \le i \le n-1, \quad 1 \le j \le m-1.$$

Погрешность приближенного решения, получаемого конечно-разностным методом, складывается из двух погрешностей: *погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностным и погрешности итерационного процесса.*

Разностные схемы для уравнений гиперболического типа

Одномерным волновым уравнением называется следующее гиперболическое уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{8.24}$$

$$D = \{0 \le x \le a, 0 \le t \le T\}$$

Это уравнение описывает распространение звуковых волн в однородной среде со скоростью c.

Рассмотрим смешанную краевую задачу, которая состоит в отыскании функции $u(x,t)$, удовлетворяющей уравнению (8.24) (однородному уравнению колебаний струны), начальным условиям

$$u(x,0) = f(x), \ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = g(x), 0 \le x \le l, \tag{8.25}$$

и краевым условиям

$$U(0,t) = \mu_1(t), \quad U(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{8.26}$$

Так как замена переменных $t \to ct$ приводит уравнение (8.24) к виду $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, то в дальнейшем будем считать $c = 1$.

Для построения разностной схемы решения задачи (8.24) – (8.26) построим в области $D = \{0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ разностную сетку $x_i = x_0 + ih, \quad h = 1/M$, $t^n = t^o + n\tau, \quad \tau = T/N$, $i = 0,1,\ldots,M$, $n = 0,1,\ldots,N$.

Используя для аппроксимации частных производных центральные разностные производные, получаем следующую разностную аппроксимацию уравнения (8.24):

$$\frac{U_i^{n+1} - 2U_i^n + U_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2}.$$

(8.27)

Здесь U_i^j - приближенное значение функции $u(x,t)$ в узле x_i, t^n.

Полагая $r = \tau/h$, получаем трехслойную разностную схему:

$$U_i^{n+1} = 2(1 - r^2)U_i^n + r^2(U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) - U_i^{n-1},$$
$$i = 1,2.,,,.M - 1, \quad n = 1,2,\ldots,N - 1$$

Схема (8.27) называется *трехслойной* потому, что связывает между собой значения U_i^j функции $u(x,t)$ на трех временных слоях (с номерами $n-1, n, n+1$). Схема (8.27) *явная,* т.е. позволяет в явном виде выразить U_i^j через значения функции с предыдущих двух слоев.

Для получения решения на первом слое ($n = 1$) можно принять простейший способ, состоящий в том, что если положить

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,0)=\frac{U(x,t)-U(x,0)}{\tau}, \qquad (8.28)$$

то $U_i^1 = U_i^0 + \tau g(x_i), \quad i=1,2,..M$. Теперь для вычисления решений на следующих слоях можно применить формулу (8.27).

Предложенная схема аппроксимирует задачу (8.24) – (8.26) с точностью $O(\tau,h^2)$, Невысокий порядок аппроксимации по τ объясняется использованием слишком грубой аппроксимацией производной в (8.28).

Схема устойчива, если выполнено условие Куранта $r=\tau/h\le 1$. Это означает, что малые погрешности, возникающие, например, при вычислении решения на первом слое, не будут неограниченно возрастать при переходах к следующим временным слоям.

При выполнении условий Куранта схема обладает равномерной сходимостью, т.е. при $h\to 0$ решение разностной задачи равномерно стремится к решению исходной задачи (8.24) – (8.26).

Рассмотрим простейшее линейное уравнение гиперболического типа $\frac{\partial U}{\partial t}+c\frac{\partial U}{\partial x}=0, \quad c>0$, (8.29)

свойства решений которого близки к свойствам решения волнового уравнения (8.24). Это уравнение называют одномерным линейным уравнение переноса, описывающим распространение волны со скоростью c вдоль оси x.

Непосредственно проверяется, что при условиях

$$u(x,0)=f(x), \quad 0\le x\le X$$
$$u(0,t)=f(-t), \quad 0\le t\le T$$

точное аналитическое решение уравнения (8.29) с начальными данными (задача Коши) имеет вид

$$U(x,t) = f(x - ct)\,. \tag{8.30}$$

Рассмотрим конечно-разностные схемы для решения одномерного *линейного* волнового уравнения первого порядка.

1. Явные методы Эйлера.

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + c\,\frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{h} = 0,$$

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + c\,\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} = 0.$$

Погрешность аппроксимации: $O(\tau, h)$ и $O(\tau, h^2)$ соответственно. $\lambda = 1 - i2rSinkh$ - множитель перехода для схемы с центральной разностью.

Разностные схемы *явные,* так как в каждое разностное уравнение входит лишь одно неизвестное.

Анализ устойчивости разностных схем с помощью спектрального признака приводит к тому, что они обе *абсолютно неустойчивы* и, следовательно, для численного решения волнового уравнения непригодны.

2. Метод использования разностей против потока.

Простую явную схему Эйлера можно сделать устойчивой, если при аппроксимации производной по пространственной переменной использовать не разности вперед, а *разности назад* в тех случаях, когда скорость волны $c > 0$ (*положительна).* Если скорость волны $c < o$ (*отрицательна)*, то устойчивость схемы обеспечивается при использовании *разностей вперед*.

При использовании разностей назад разностные уравнения принимают вид

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\tau}+c\frac{U_i^n-U_{i-1}^n}{h}=0, \quad c>0.$$

Эта разностная схема имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации $O(\tau,h)$. Множитель перехода равен

$\lambda=(1-r+rCoskh)-irSinkh$ и

$|\lambda|^2=(1-r+rCoskh)^2+r^2Sin^2kh.$

Из условия устойчивости (8.14) следует, что схема устойчива при $r=c\dfrac{\tau}{h}, \quad 0<r\le 1$ то есть $c\dfrac{\tau}{h}\le 1.$

3. Схема Лакса.

Разностную схему Эйлера можно сделать устойчивой, если заменить U_j^n на пространственное среднее $(U_{j+1}^n+U_{j-1}^n)/2.$

В результате получим широко известную схему Лакса:

$$\frac{U_i^{n+1}-(U_{i+1}^n+U_{i-1}^n)/2}{\tau}+c\frac{U_{i+1}^n-U_{i-1}^n}{2h}=0.$$

Это явная одношаговая схема с погрешность аппроксимации $O(\tau,h^2/\tau)$. Множитель перехода равен $\lambda=Coskh-irSinkh.$

Схема устойчива при $0<r\le 1, \quad r=\dfrac{c\tau}{2h}$ – число Куранта.

4. Неявный метод Эйлера.

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\tau}+c\frac{U_{i+1}^{n+1}-U_{i-1}^{n+1}}{2h}=0$$

Погрешность аппроксимации $O(\tau, h^2)$. Множитель перехода равен

$$\lambda = \frac{1 - irSinkh}{1 + r^2 Sin^2 kh}, \quad r = \frac{c\tau}{2h}.$$

Схема *абсолютно устойчива*, при использовании этой схемы приходится решать систему линейных алгебраических уравнений на каждом шаге по времени:

$$\frac{r}{2}U_{j+1}^{n+1} + U_j^{n+1} - \frac{r}{2}U_{j-1}^{n+1} = U_j^n.$$

Начальные условия заданы, матрица системы трехдиагональная, для решения применяется *метод прогонки.*

При использовании неявных схем на каждом шаге по t приходится проводить больше вычислений, чем при использовании явных схем, но зато можно проводить расчеты с существенно большим шагом τ.

Спектральный признак устойчивости разностных схем

В предыдущем параграфе, представив разностную схему в виде $u^{n+1} = R_h u^n + \tau\rho^n$, получили достаточное условие ее устойчивости как требование равномерной ограниченности норм степеней оператора перехода:

$$\left\| R_h^n \right\| \le K, \quad n = 1,2,\dots, N = T/\tau, \quad \tau, h \to 0 \qquad (8.11)$$

где постоянная K не зависит от параметров сетки (в этом и существо дела), так как для каждых фиксированных h, n, τ величина $\left\| R_h^n \right\|$, естественно, конечна.

В более сложных случаях применить этот признак удается не всегда.

Пусть сеточная функция V_k – *собственная* функция оператора перехода R_h, соответствующая *собственному значению* λ_k, т.е. выполняется равенство $R_h V_k = \lambda_k V_k$.

Тогда $\left\| R_h^n V_k \right\| = \left\| \lambda_k^n V_k \right\| = |\lambda_k|^n \|V_k\| \le \left\| R_h^n \right\| \|V_k\|$

и
$$|\lambda_k|^n \le \left\| R_h^n \right\|$$

Поскольку λ_k - произвольное собственное число оператора R_h,

то
$$[\max_k |\lambda_k|]^n \le \left\| R_h^n \right\|, \qquad (8.12)$$

где $\max_k |\lambda_k|$- максимальное по модулю собственное значение оператора R_h.

В силу (8.12) очевидно, что для выполнения условия устойчивости (8.11) должен существовать круг

$$|\lambda_k| \le 1 + c\tau \qquad (8.13)$$

на комплексной плоскости, в котором лежат все собственные числа оператора R_h.

На практике часто используют более сильное, но легче проверяемое условие

$$|\lambda_k| \le 1, \quad \forall k \qquad (8.14)$$

Очевидно, (8.13) всегда следует из (8.14). Собственное значение λ_k оператора перехода R_h называют еще множителем перехода (со слоя на слой).

Таким образом, условия (8.13) и (8.14) необходимы для выполнения (8.11) и, значит, для устойчивости разностной схемы независимо от выбора нормы.