

## 18. Взаимная информация и ее свойства. Примеры вычисления. Информационная емкость и пропускная способность. Теоремы кодирования. Симметричные каналы. Пропускная способность гауссовского канала.

<http://books.ifmo.ru/file/pdf/723.pdf>

Для заданного произведения  $XY = \{(x, y), p(x, y)\}$  дискретных ансамблей  $X$  и  $Y$  нужно количественно измерить информацию об элементах  $x \in X$  входного ансамбля, содержащуюся в выходных символах  $y \in Y$ . Подходящей мерой такой информации является взаимная информация, определяемая для любых пар  $(x, y) \in XY$  соотношением  $I(x; y) = I(x) - I(x|y)$  (где  $I(x) = -\log p(x)$  – собственная информация,  $H(X) = M[-\log p(x)] = -\sum_{x \in X} p(x) \log p(x)$  – энтропия,  $I(x|y) = -\log p(x|y)$  – условная собственная информация).

Уменьшаемое  $I(x)$  представляет собой количество собственной информации, содержащейся в сообщении  $x$ . Вычитаемое – условная собственная информация при известном  $y$ , иными словами, это количество информации, оставшейся в  $x$  после получения  $y$ . Разность  $I(x; y)$  представляет собой изменение информации в  $x$  благодаря получению  $y$ .

Свойства взаимной информации:

1. Симметричность:  $I(x; y) = I(y; x)$ .
2. Если  $x$  и  $y$  независимы, то  $I(x; y) = 0$ .

*Средней взаимной информацией* между ансамблями  $X$  и  $Y$  называется величина  $I(X; Y) = M[I(x; y)]$ , где  $I(X; Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log \frac{p(x|y)}{p(y)}$ .

Свойства:

1. Симметричность  $I(X; Y) = I(Y; X)$
2. Неотрицательность  $I(X; Y) \geq 0$
3. Тождество  $I(X; Y) = 0$  тогда и только тогда, когда ансамбли  $X$  и  $Y$  независимы.
4.  $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(XY)$
5.  $I(X; Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$

6.  $I(X; Y) \leq \min\{\log |X|, \log |Y|\}$
7.  $I(X; Y)$  – выпуклая вверх функция  $p(x)$
8.  $I(X; Y)$  – выпуклая вниз функция  $p(y|x)$

## Информационная емкость и пропускная способность

Рассмотрим дискретный стационарный канал. Мы знаем, что количество информации о входных символах  $X$  канала, содержащееся в выходных символах  $Y$  определяется средней взаимной информацией  $I(X; Y)$ . Это верно при передаче одного символа канала. При использовании кодов длины  $n$  количество информации, получаемой декодером при передаче одного слова в среднем составит  $I(X^n; Y^n)$  бит, что соответствует скорости передачи информации  $\frac{1}{n}I(X^n; Y^n)$  бит/символ канала. Эта величина зависит от переходных вероятностей  $\{p(y|x), y \in Y^n, x \in X^n\}$  и от распределения вероятностей на входе канала  $\{p(x), x \in X^n\}$ . Результирующая скорость получается  $\max_{\{p(x)\}} \frac{1}{n}I(X^n; Y^n)$  бит/символ канала. Величина  $C_0 = \sup_n \max_{\{p(x)\}} \frac{1}{n}I(X^n; Y^n)$  называется *информационной емкостью* канала.

Допустим, у нас есть код канала длины  $n$ , количеством последовательностей  $M$  (*мощность* кода),  $R = \frac{\log M}{n}$  – скорость кода. Число  $C$  называется *пропускной способностью* канала, если при любой скорости кода  $R < C$  существуют коды, обеспечивающие сколь угодно малую вероятность ошибки и, напротив, при  $R > C$  существует константа  $\varepsilon > 0$ , что вероятность ошибки любого кода ограничена снизу величиной  $\varepsilon$ .

Обратная теорема кодирования утверждает, что информационная ёмкость  $C_0$  ограничивает сверху скорость, при которой достижима сколь угодно малая вероятность ошибки. Прямая теорема кодирования утверждает, что при скорости, сколь угодно близкой к  $C_0$  достижима сколь угодно малая вероятность ошибки.

## Теоремы кодирования

**Обратная теорема кодирования.** Для дискретного стационарного канала с информационной емкостью  $C_0$  для любого  $\delta > 0$

существует число  $\varepsilon > 0$ , такое, что для любого кода со скоростью  $R > C_0 + \delta$  средняя вероятность ошибки удовлетворяет неравенству  $\overline{P_e} \geq \varepsilon$ , где  $\overline{P_e} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_{ei}$  (то есть среднее по  $N$  сообщениям).

В частности, для дискретных постоянных каналов ёмкость вычисляется по формуле  $C_0 = \max_{\{p(x)\}} I(X; Y)$ , а для двоичного симметричного канала информационная ёмкость вычисляется по формуле  $C_0 = 1 - \eta(p)$

**Прямая теорема кодирования.** Для дискретного постоянного канала с информационной ёмкостью  $C_0$  для любых  $\varepsilon, \delta > 0$  существует достаточно большое число  $n_0$  такое, что для любого натурального числа  $n > n_0$  существует код длины  $n$  со скоростью  $R \geq C_0 - \delta$ , средняя вероятность ошибки которого  $P_e \leq \varepsilon$ .

## Непрерывные каналы дискретного времени

Пусть модель канала задается условными плотностями распределения вида  $f(\bar{y}|\bar{x}) = f(y_1, \dots, y_n | x_1, \dots, x_n)$ . Пусть это канал стационарный и без памяти. Также допустим, что у нас *аддитивный* шум, то есть  $\bar{y} = \bar{x} + \bar{z}$ ,  $f(\bar{y}|\bar{x}) = f(\bar{z})$ . Такая модель называется *каналом с аддитивным шумом*.

Энергия входной последовательности —  $\sum_{i=1}^n x_i^2$ . Мощность на отсчет —  $E(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$ . Информационная ёмкость непрерывного стационарного канала дискретного времени с ограничением  $E$  на мощность входных сигналов —  $C_0 = \sup_n \max_{f(\bar{x})} : M[E(\bar{x})] \leq E \frac{1}{n} I(X^n; Y^n)$ . В частности, для канала без памяти  $C_0 = \max_{f(x): M[E(x)] \leq E} I(X; Y)$ .

Канал называется *гауссовским*, если шум в канале имеет гауссовское распределение, в общем случае многомерное. Для одномерного случая  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{z^2}{2N_0}}$ . Для такого канала информационная ёмкость  $C_0 = \frac{1}{2} \log(1 + \frac{E}{N_0})$ .