1.8. Классификация погрешностей вычислений. Корректность вычислительных задач и алгоритмов. Понятия устойчивости и обусловленности.

Причины возникновения погрешностей:
1) приближённость математической модели;
2) погрешность входных данных;
3) погрешность метода решения;
4) погрешность машинного округления.
Первые два вида — *устранимые*, последние два — *неустранимые*.

Пусть x — неизвестное точное значение, x^* — приближённое значение.
Def. 1. $\Delta(x^*) = |x - x^*|$ — абсолютная погрешность.
Def. 2. $\delta(x^*) = \Delta(x^*) / |x^*|$ — относительная погрешность.
Сами погрешности неизвестны, рассматривают их оценки сверху $\bar{\Delta}(x^*)$ и $\bar{\delta}(x^*)$.

Пусть x^* — приближённое условие задачи, y^* — её приближённое решение.
Def. 3. Задача называется вычислительно устойчивой, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \Delta(x^*) \le \delta \Rightarrow \Delta(y^*) \le \varepsilon$ (непрерывность решения по входным данным).
Здесь δ (не путать с δ из Def. 2), по существу, представляет собой $\bar{\Delta}(x^*)$, а ε — $\bar{\Delta}(y^*)$.

Def. 4. $\nu_\Delta = \dfrac{\bar{\Delta}(y^*)}{\bar{\Delta}(x^*)} = \dfrac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}$ — абсолютное число обусловленности.

Def. 5. $\nu_\delta = \dfrac{\bar{\delta}(y^*)}{\bar{\delta}(x^*)}$ — относительное число обусловленности.

Задача хорошо обусловлена, если число обусловленности порядка 1 или меньше. Если оно $\gg 1$, то задача плохо обусловлена. Обусловленность задачи — «чувствительность» погрешности решения к погрешности входных данных. Бесконечно плохо обусловленная задача — вычислительно неустойчива.
Def. 6. Задача называется корректной, если:
1) её решение существует и единственно;
2) она вычислительно устойчива.

Пример 1. Задача вычисления ранга матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

$$r_A = 1, \quad r_{A^*} = 2.$$

Задача вычислительно неустойчива.

Пример 2. Нахождение корней многочлена $(x - 1)^4 - \varepsilon$. Кратные корни снижают обусловленность (при $\varepsilon = 0$ есть один 4-кратный корень; при малых, но ненулевых ε есть 4 однократных корня).

Пример 3. Пусть a — набор из N элементов (точный), a^* — его приближение.

$$S = \sum_{n=1}^{N} a_n, \quad S^* = \sum_{n=1}^{N} a_n^*.$$

$$\Delta\left(a^*\right) = \max_{n=\overline{1;N}} \left| a_n - a_n^* \right|.$$

$$|S|\delta\left(S^*\right) = \Delta\left(S^*\right) = \left|S - S^*\right| = \left|\sum_{n=1}^{N}\left(a_n - a_n^*\right)\right| \le N\Delta\left(a^*\right) = N\langle|a|\rangle\delta\left(a^*\right) = \bar{\Delta}\left(S^*\right).$$

$$\delta\left(S^*\right) \le \tfrac{N\langle|a|\rangle}{|S|}\delta\left(a^*\right) = \bar{\delta}\left(S^*\right).$$

$$\nu_\Delta = \frac{\bar{\Delta}\left(S^*\right)}{\Delta\left(a^*\right)} = N, \quad \nu_\delta = \frac{\bar{\delta}\left(S^*\right)}{\delta\left(a^*\right)} = \frac{N\langle|a|\rangle}{|S|} = \frac{\sum_{n=1}^{N}|a_n|}{\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right|}.$$

Пусть $x = -10,\ N = 10,\ a_n = \frac{x^n}{n!}$.

$$\nu_\delta = \frac{\sum_{n=1}^{10}\frac{|x|^n}{n!}}{\left|\sum_{n=1}^{10}\frac{x^n}{n!}\right|} \approx \frac{e^{|x|}}{e^{-|x|}} = e^{2|x|} = e^{20} \quad \Rightarrow \quad \text{плохая обусловленность.}$$

Пример 4.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx, \quad I^* = \int_a^b f^*(x)\,dx.$$

$$\Delta\left(f^*\right) = \max_{x\in[a;b]}\left|f(x) - f^*(x)\right|.$$

$$\Delta\left(I^*\right) = \left|I - I^*\right| = \left|\int_a^b \left(f - f^*\right)(x)\,dx\right| \le \int_a^b \left|f(x) - f^*(x)\right|dx \le \Delta\left(f^*\right)\int_a^b dx = (b-a)\Delta\left(f^*\right) = \bar{\Delta}\left(I^*\right).$$

$$\nu_\Delta = \frac{\bar{\Delta}\left(I^*\right)}{\Delta\left(f^*\right)} = b - a.$$

Задача хорошо обусловлена по абсолютному числу, но плохо — по относительному (пример входа с большим относительным числом обусловленности — sin).