Прикладная математика: Вопрос №4.

Скалярные и векторные поля. Основные дифференциальные операторы (градиент, дивергенция, ротор, оператор Лапласа). Основные интегральные теоремы.

Владимир Лоторейчик

24 мая 2008 г.

1 Скалярные и векторные поля

Если с каждой точкой M определенной пространственной области (которая может охватывать и все пространство) связана некоторая скалярная или векторная величина, то говорят что задано поле этой величины соответственно скалярное или векторное.

Примером скалярного поля может служить поле температуры или потенциала. Если ввести систему координат, то задание поля эквивалентно заданию числовой функции $U(x, y, z)$. При определенных условиях уравнение

$$U(x, y, z) = C \ (C = const)$$

задает некоторую поверхность, которая называется поверхностью уровня. Через каждую точку пространства проходит только одна поверхность уровня. Ясно, что поверхности уровня между собой не пересекаются.

Примером векторного поля может служить силовое поле или поле скоростей. Задание поля векторной величины $\overrightarrow{A}$ может быть осуществленно путем задания ее проекций на оси

$$A_x(x, y, z) \quad A_y(x, y, z) \quad A_z(x, y, z)$$

как функций от координат точки M. При изучении векторного поля важную роль играют векторные линии (в современных книжках пишут "интегральная кривая"). Векторная линия — кривая, направление которой в каждой ее точке совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{A}$, отвечающего этой точке. Опираясь на теорему существования из теории дифференциальных уравнений можно показать, что для "хорошего"поля (непрерывные производные), вся рассматриваемая область заполняется векторными линиями, через аждую точку проходит одна и только одна линия, векторные линии не пересекаются.

2 Основные дифференциальные операторы

Пусть задано скалярное поле $U(M)$. Положим в основу некоторую координатную систему $Oxyz$. Введем вектор $\overrightarrow{g}$, с проекциями на оси

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

его называют градиентом поля U и обозначают

$$\overrightarrow{g} = grad(U)$$

Направление градиента совпадает с направлением нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку. Итак, скалярное поле $U(M)$ порождает векторное поле $grad(U)$. Если ввести наблу $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, то градиент запишется в виде

$$grad(U) = \nabla U$$

Рассмотрим векторное поле $\overrightarrow{A}(M)$ тогда скалярное поле

$$div\overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

называется дивергенцией или расходимостью поля $\overrightarrow{A}$.

Можно дать независимое от координатных систем определение дивергенции

$$div\overrightarrow{A} = \lim_{(V)\to M} \frac{\iint_S A_n ds}{V}$$

где в правой части в числителе стоит поток поля A_n через поверхность натянутую на объем V, а предел берется при стягивании этого объема в точку M.

Через наблу дивергенция выражается следующим образом

$$div\overrightarrow{A} = \nabla \cdot \overrightarrow{A};$$

Ротор (вихрь) векторного поля $\overrightarrow{A}$ — это векторное поле следующего вида

$$rot\overrightarrow{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

Также можно дать независиоме от системы координат определение. Возьмем некоторое направление n, исходящее из данной точки M, окружим ее в перпендикулярной к n плоскости площадкой (σ) с контуром (λ) тогда

$$rot_n\overleftrightarrow{A} = \lim_{(v)\to M} \frac{\int_{(\lambda)} A_\lambda d\lambda}{\sigma}$$

где в числителе стоит циркуляция вектора по контуру, а предел берется при стягивании контура в точку M. Таким образом можно получить проекцию ротора на любой ось, а следовательно и сам ротор. С помощью набла ротор запишется так

$$rot\overrightarrow{A} = \nabla \times \overrightarrow{A}$$

Введем систему координат $Oxyz$. Оператор Лапласа сопоставляет скалярному полю скалярное поле по следующему правилу

$$\triangle U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Через наблу лапласиан выражается следующим образом $\triangle = \nabla^2$

3 Основные интегральные теоремы

Для дивергенции и ротора мы вводили определения, не зависящие от системы координат. Эквивалентность этих определений и определений через системы координат следует из формул Гаусса-Остроградского и Стокса.

Формула Гаусса-Остроградского

$$\iint_{(S)} A_n dS = \iiint_{(V)} div \overrightarrow{A} dV \tag{1}$$

Словами: "Интеграл дивергенции векторного поля по объему равен потоку этого поля через поверхность, ограничивающую объем".

Формула Стокса

$$\int_l A_l dl = \iint_{(S)} rot_n \overrightarrow{A} dS \tag{2}$$

Словами: "Поток ротора векторного поля через некоторую поверхность равен циркуляции этого поля по контуру, ограничивающему эту поверхность".

В матфизике активно используется формула Грина. Пусть в трехмерном пространстве заданы два скалярных поля u и v, тогда

$$\iiint_{(V)} (u\triangle v - v\triangle u) = \iint_{(S)} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}) dS \tag{3}$$