Вопрос 1.14

Решение линейного и нелинейного уравнений теплопроводности разностными методами в одномерном и многомерном случаях. Метод прогонки. Понятие о методах расщепления.

Глава II

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этой главе изучаются разностные схемы для простейших нестационарных уравнений: одномерного уравнения теплопроводности и уравнения колебаний струны. Построены двухслойные и трехслойные схемы с погрешностью аппроксимации $O(\tau + h^2)$, $O(\tau^2 + h^2)$ и $O(\tau^2 + h^4)$ для первой, второй и третьей краевых задач. Излагаются два способа исследования устойчивости разностных схем: метод разделения переменных и метод энергетических неравенств.

§ 1. Уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами

Для выяснения методов построения разностных схем в случае нестационарных задач, а также методов их исследования рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами.

1. Исходная задача. Процесс распространения тепла на прямой описывается уравнением теплопроводности (см., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [6])

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \bar{f}, \qquad (1)$$

где $u = u(x, t)$ — температура, c — теплоемкость единицы массы, ρ — плотность, k — коэффициент теплопроводности, $\bar{f}$ — плотность тепловых источников, т. е. количество тепла, выделяющегося в единицу времени на единице длины. Коэффициенты теплопроводности и теплоемкости могут зависеть не только от x, t, но и от температуры u (в этом случае уравнение называется квазилинейным). Если k и $c\rho$ постоянны, то уравнение (1) записывают в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{f}, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad \tilde{f} = \frac{\bar{f}}{c\rho}, \tag{2}$$

где a^2 — коэффициент температуропроводности.

Без ограничения общности можно считать $a = 1$ и записывать уравнение (2) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f. \tag{3}$$

В самом деле, вводя $x' = x/a$ и вновь обозначая x' через x, получим (3). Если ищется решение уравнения (2) на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$, то обычно пользуются безразмерными переменными

$$x' = x/l, \quad t' = a^2 t/l^2.$$

В этих переменных уравнение (2) записывается в виде (3), причем $0 \leqslant x' \leqslant 1$, а $f = l^2 \tilde{f}/a^2$.

Мы будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения (3) в прямоугольнике

$$\overline{D} = (0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant t \leqslant T).$$

Требуется найти непрерывное в $\overline{D}$ решение $u = u(x, t)$ задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leqslant T, \\ &u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ &u(0, t) = u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

2. Семейство шеститочечных схем. Введем сетки

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \ i = 0, 1, \ldots, N\}, \quad \omega_\tau = \{t_j = j\tau, \ j = 0, 1, \ldots, j_0\}$$

и сетку в $\overline{D}$:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau = \{(ih, j\tau), \ i = 0, 1, \ldots, N, \ j = 0, 1, \ldots, j_0\}$$

с шагами $h = 1/N$ и $\tau = T/j_0$. Обозначим через y_i^j значение в узле (x_i, t_j) сеточной функции y, определенной на $\bar{\omega}_{h\tau}$. Заменяя производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ первой разностной производной, а $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ — второй разностной производной $u_{\bar{x}x}$ и вводя произвольный вещественный параметр σ, рассмотрим однопараметрическое семейство разностных схем

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda\left(\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma) y_i^j\right) + \varphi_i^j, \ 0 < i < N, \ 0 \leqslant j < j_0. \tag{4}$$

Схему (4) будем называть иногда *схемой с весами.*

Краевые и начальные условия аппроксимируем точно

$$y_0^j = u_1^j, \quad y_N^j = u_2^j, \tag{5}$$

$$y_i^0 = y(x_i, 0) = u_0(x_i). \tag{6}$$

Здесь φ_i^j — сеточная функция, аппроксимирующая правую часть f уравнения (3), например,

$$\varphi_i^j = f(x_i, t_{j+0,5}), \; t_{j+0,5} = t_j + 0,5\tau,$$

а

$$\Lambda y_i = y_{\bar{x}x, i} = (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})/h^2.$$

Разностную задачу, определяемую условиями (4)—(6), будем называть задачей (II).

Разностная схема (4) написана на шеститочечном шаблоне, состоящем из узлов

$$(x_{i\pm 1}, t_{j+1}), \quad (x_i, t_{j+1}), \quad (x_{i\pm 1}, t_j), \quad (x_i, t_j)$$

(см. рис. 5, *в*) с центром в точке (x_i, t_{j+1}). Уравнение (4) пишется в узлах (x_i, t_{j+1}), $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $j+1 = 1, 2, \ldots, j_0$, называемых внутренними узлами. Множество всех внутренних узлов сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$ будем обозначать

$$\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j), \; 1 \leqslant i \leqslant N-1, \; 1 \leqslant j \leqslant j_0\}.$$

Краевые и начальные условия (5) и (6) пишутся в граничных узлах сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$.

Множество узлов сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$, лежащих на прямой $t = t_j$, обычно называют *слоем*. Схема (4) содержит значения искомой функции y на двух слоях и поэтому называется *двухслойной* схемой.

От выбора параметра σ, как мы убедимся в дальнейшем, зависят точность и устойчивость схемы (4).

Рассмотрим схемы, соответствующие частным значениям σ. При $\sigma = 0$ получаем четырехточечную схему (рис. 5, *а*)

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda y_i^j + \varphi_i^j,$$

или

$$y_i^{j+1} = (1 - 2\gamma)\, y_i^j + \gamma\,(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^j, \qquad \gamma = \tau/h^2, \tag{7}$$

определенную на шаблоне (x_i, t_{j+1}), (x_i, t_j), $(x_{i\pm1}, t_j)$. Значение y_i^{j+1} в каждой точке слоя $t = t_{j+1}$ (нового слоя) выражается по явной формуле (7) через значения y_i^j на слое $t = t_j$ (на старом слое). Так как при $t = 0$ задано начальное значение $y_i^0 = u_0(x_i)$, то формула (7) позволяет последовательно определить значения y на любом слое. Схема (7) называется *явной*.

Если $\sigma \neq 0$, то схема (4) называется *неявной двухслойной схемой*. При $\sigma \neq 0$ для определения y_i^{j+1} на новом слое получаем систему алгебраических уравнений

$$\sigma \Lambda y_i^{j+1} - \frac{1}{\tau} y_i^{j+1} = -F_i^j, \quad F_i^j = \frac{1}{\tau} y_i^j + (1-\sigma) \Lambda y_i^j + \varphi_i^j, \tag{8}$$
$$i = 1, \ldots, N-1$$

с краевыми условиями

$$y_0^{j+1} = u_1^{j+1}, \quad y_N^{j+1} = u_2^{j+1}.$$

Решение этой системы находится методом прогонки (см. гл. I, § 1, п. 9). Укажем еще две схемы.

При $\sigma = 1$ имеем *схему с опережением* или *чисто неявную схему*

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda y_i^{j+1} + \varphi_i^j. \tag{9}$$

При $\sigma = 0{,}5$ получаем *шеститочечную симметричную схему*

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda \left(y_i^{j+1} + y_i^j\right) + \varphi_i^j \tag{10}$$

(называемую иногда схемой Кранка — Никольсона).

Перейдем к выяснению вопросов о погрешности аппроксимации и точности схемы с весами (4).

3. Погрешность аппроксимации. Чтобы ответить на вопрос о точности схемы (4) — (6), нужно сравнить решение $y = y_i^j$ задачи (4) — (6) с решением $u = u(x, t)$ задачи (I). Так как $u(x, t)$ — непрерывное решение задачи (I), то положим $u_i^j = u\left(x_i, t_j\right)$ и рассмотрим разность

$$z_i^j = y_i^j - u_i^j.$$

Для оценки сеточной функции z_i^j на слое выберем некоторую норму $\|\cdot\|$, например, одну из следующих норм:

$$\|z\| = \|z\|_C = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} |z_i|, \quad \|z\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} z_i^2 h\right)^{1/2}.$$

Перейдем к безиндексным обозначениям, полагая (см. гл. I, § 1, п. 2)

$$y_i^j = y, \quad y_i^{j+1} = \hat{y}, \quad y_t = (\hat{y} - y)/\tau.$$

Перепишем задачу (4) — (6) в виде

$$\left.\begin{aligned} &y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1-\sigma) y) + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ &y(0, t) = u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t), \quad t \in \omega_\tau, \\ &y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h. \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Найдем условия, определяющие $z = y - u$. Подставляя $y = z + u$ в (II) и считая u заданной функцией, получим для z задачу

$$\left.\begin{aligned} &z_t = \Lambda(\sigma\hat{z} + (1-\sigma)z) + \psi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ &z(0, t) = z(1, t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \\ &z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

где

$$\psi = \Lambda(\sigma\hat{u} + (1-\sigma)u) - u_t + \varphi \tag{11}$$

— погрешность аппроксимации схемы (II) на решении $u = u(x, t)$ уравнения (I).

Напомним определение порядка аппроксимации (см. гл. I, § 1, п. 3). Схема (II) аппроксимирует уравнение (I) с порядком (m, n) или имеет аппроксимацию $O(h^m + \tau^n)$ на решении $u = u(x, t)$ уравнения (I), если $\|\psi(x, t)\|_{(2)} = O(h^m + \tau^n)$ или $\|\psi\|_{(2)} \leqslant M(h^m + \tau^n)$ для всех $t \in \omega_\tau$, где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ, а норма $\|\cdot\|_{(2)}$ — некоторая норма на сетке ω_h.

Перейдем к оценке порядка аппроксимации схемы (II), предполагая, что $u = u(x, t)$ имеет нужное по ходу изложения число производных по x и t. Будем пользоваться обозначениями:

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \bar{u} = u(x_i, t_{j+0,5}).$$

Разложим $u = u(x, t)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(x_i, \bar{t} = t_{j+0,5})$. Пользуясь формулами

$$\begin{aligned} \hat{u} &= 0{,}5(\hat{u} + u) + 0{,}5(\hat{u} - u) = 0{,}5(\hat{u} + u) + 0{,}5\tau u_t, \\ u &= 0{,}5(\hat{u} + u) - 0{,}5\tau u_t, \\ \sigma\hat{u} + (1-\sigma)u &= 0{,}5(\hat{u} + u) + (\sigma - 0{,}5)\tau u_t, \end{aligned}$$

перепишем ψ в виде

$$\psi = 0{,}5\Lambda(\hat{u} + u) + (\sigma - 0{,}5)\tau\Lambda u_t - u_t + \varphi.$$

Подставляя сюда выражения

$$\Lambda u = u'' + \frac{h^2}{12}u^{(4)} + O(h^4) = Lu + \frac{h^2}{12}L^2 u + O(h^4), \quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\hat{u} = \bar{u} + 0{,}5\tau\bar{\dot{u}} + \frac{\tau^2}{8}\bar{\ddot{u}} + O(\tau^3),$$

$$u = \bar{u} - 0{,}5\tau\bar{\dot{u}} + \frac{\tau^2}{8}\bar{\ddot{u}} + O(\tau^3),$$

$$0{,}5(\hat{u} + u) = \bar{u} + \frac{\tau^2}{8}\bar{\ddot{u}} + O(\tau^3), \quad u_t = \bar{\dot{u}} + O(\tau^2),$$

получим

$$\psi = (L\bar{u} - \bar{\dot{u}} + \varphi) + (\sigma - 0{,}5)\tau L\bar{\dot{u}} + \frac{h^2}{12}L^2\bar{u} + O(\tau^2 + h^4). \tag{12}$$

Отсюда видно, что $\psi = (\sigma - 0{,}5)\tau L\bar{\ddot{u}} + O(h^2+\tau^2)$ при $\varphi = \bar{f} = f(x, t_{j+0,5})$, так как $\dot{u} = Lu + f$. Учитывая, что $L\dot{u} = L^2u + Lf = u^{(4)} + f''$ и $L^2u = L\dot{u} - Lf$, из (12) получаем

$$\psi = (\varphi - \bar{f}) + \left[(\sigma - 0{,}5)\tau + \frac{h^2}{12}\right] L\bar{\ddot{u}} - \frac{h^2}{12} L\bar{f} + O(h^4+\tau^2). \qquad (13)$$

Приравняем нулю выражение в квадратных скобках и найдем

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} = \sigma_*. \qquad (14)$$

При этом значении $\sigma = \sigma_*$ и φ, равном

$$\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12} L\bar{f},$$

схема (II) имеет аппроксимацию $O(h^4+\tau^2)$, т. е. $\psi = O(h^4+\tau^2)$. Порядок аппроксимации схемы не нарушится, если мы заменим f'' выражением $f_{\bar{x}x} = \Lambda f$, т. е. положим $\varphi = \bar{f} + (h^2\Lambda f)/12$ или

$$\varphi_i^j = \frac{5}{6} f_i^{j+1/2} + \frac{1}{12}\left(f_{i-1}^{j+1/2} + f_{i+1}^{j+1/2}\right). \qquad (15)$$

Эта формула удобней для вычислений.

Пусть $C_n^m(\bar{D})$ — класс функций, имеющих m производных по x и n производных по t, непрерывных в $\bar{D}$. Из формул (13) и (14) ясно, что схема (II) имеет аппроксимацию 1) $O(h^2+\tau^2)$ при $\sigma = 0{,}5$, $\varphi = \bar{f}$ или $\varphi = \bar{f} + O(h^2+\tau^2)$, если $u \in C_3^4$, 2) $O(h^2+\tau)$ при любом $\sigma \neq 0{,}5$, $\varphi = \bar{f} + O(h^2+\tau)$, например, $\varphi = \hat{f}$ или $\varphi = f$, если $u \in C_2^4$, 3) $O(h^4+\tau^2)$ при $\sigma = \sigma_*$ и φ, заданной формулой (15), если $u \in C_3^6$.

Схему (II) с $\sigma = \sigma_*$ и $\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12}\Lambda\bar{f}$ называют обычно *схемой повышенного порядка точности.*

Выбор правой части φ должен быть подчинен требованию соблюдения порядка аппроксимации при данном σ. Так, при $\sigma = 0{,}5$ можно полагать φ равным $\varphi = 0{,}5(\hat{f} + f)$, $\varphi = \bar{f}$ и т. д.

Из (13) видно, что погрешность $O(h^2+\tau^2)$ может достигаться и при $\sigma \neq 0{,}5$, если положить

$$\sigma = 0{,}5 + h^2\alpha/\tau,$$

где α — любая постоянная, не зависящая от h и τ. В этом случае σ зависит от h и τ. Произвол в выборе α ограничен условием устойчивости схемы (достаточно взять $\alpha > -1/4$, см. п. 4).

Метод прогонки

Для решения систем $A\,x = b$ с трехдиагональной матрицей наиболее часто применяется *метод прогонки*, являющийся адаптацией метода Гаусса к этому случаю.

Запишем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&d_1x_1 + e_1x_2 &&= b_1\\
&c_2x_1 + d_2x_2 + e_2x_3 &&= b_2\\
&c_3x_2 + d_3x_3 + e_3x_4 &&= b_3\\
&\dots \quad \dots \quad \dots\\
&c_{n-1}x_{n-2} + d_{n-1}x_{n-1} + e_{n-1}x_n &&= b_{n-1}\\
&c_nx_{n-1} + d_nx_n &&= b_n
\end{aligned}
$$

в матричном виде: $A\,x = b$ где

$$
A=\begin{bmatrix}
d_1 & e_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
c_2 & d & e_2 & 0 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & d_{n-1} & e_{n-1}\\
0 & \cdots & 0 & 0 & c_n & d_n
\end{bmatrix}
$$

Выпишем формулы метода прогонки в порядке их применения.

1. Прямой ход метода прогонки (вычисление вспомогательных величин):
   $\alpha_2 = -e_1 / d_1$
   $\beta_2 = b_1 / d_1$
   $\alpha_{i+1} = -e_i / [d_i + c_i\alpha_i]$, $i=2, \dots, n-1$ **(1.9)**
   $\beta_{i+1} = [-c_i\beta_i + b_i] / [d_i + c_i\alpha_i]$, $i=2, \dots, n-1$
2. Обратный ход метода прогонки (нахождение решения):

   $x_n = [-c_n\,\beta_n + b_n] / [d_n + c_n\alpha_n]$ **(1.10)**
   $x_i = \alpha_{i+1}\,x_{i+1} + \beta_{i+1}$, $i = n-1, \dots, 1$

Метод прогонки можно применять, если нигде в формулах знаменатели не равны нулю. В [2, стр.134] доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1 Для применимости формул метода прогонки достаточно выполнения условий диагонального преобладания у матрицы A, то есть

$$|\,d_i\,| \geq |\,c_i\,| + |\,e_i\,|$$

причем хотя бы одно неравенство должно быть строгим.

Методы расщепления

8.1. Понятие о методах расщепления

Рассмотрим дифференциальную задачу для уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{A}u = 0;\ x \in \Omega_x,\ t \in \Omega_t,\ u|_\Gamma = u_\Gamma,\ u(t_0) = u_0. \quad (8.1)$$

Здесь оператор $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$— положительный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. В запись оператора $\mathbf{A}$ входят производные по пространственным переменным. Для любого ненулевого элемента выполнено $(\mathbf{A}\varphi, \varphi) \geq \mathbf{0}$. Г — граница области интегрирования Ω_x; Λ — разностный оператор, аппроксимирующий $\mathbf{A}$. Можно проверить, что разностное уравнение

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \mathbf{\Lambda}\frac{u^{n+1} - u^n}{2} = 0,\ u^0 = u_0 \quad (8.2)$$

аппроксимирует (8.1) со вторым порядком по τ (схема Кранка - Никольсон). Заметим, что (8.2) можно трактовать как результат попеременного применения явной и неявной схем первого порядка аппроксимации, записанных на интервалах $[t^n, t^{+1/2}]$, $[t^{n+1/2}, t^{n+1}]$

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau/2} + \mathbf{\Lambda}u^n = 0, \\ \frac{u^{n+1} - u^{n-1/2}}{\tau/2} + \mathbf{\Lambda}u^{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Исключая из уравнений (8.3) значения функции на промежуточном слое по времени (с полуцелым индексом), получим (8.2). Если $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$, то

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \mathbf{\Lambda}^n \frac{u^{n+1} + u^n}{2} = 0 \quad (8.4)$$

при этом разностный оператор также является положительным:

$$(\mathbf{\Lambda}_n u, u) \geq 0,$$

а решение на следующем слое по времени может быть записано в операторном виде следующим образом:

$$u^{n+1} = \left(\mathbf{E} + \tfrac{\tau}{2}\mathbf{\Lambda}^n\right)^{-1}\left(\mathbf{E} - \tfrac{\tau}{2}\mathbf{\Lambda}^n\right)u^n,$$

или

$$u^{n+1} = \mathbf{T}^n u^n,$$

где

$$\mathbf{T}^n = \left(\mathbf{E} + \tfrac{\tau}{2}\mathbf{\Lambda}^n\right)^{-1}\left(\mathbf{E} - \tfrac{\tau}{2}\mathbf{\Lambda}^n\right).$$

Для доказательства устойчивости полученного разностного уравнения умножим скалярно (8.4) на $(u^n + u^{n+1})/2$, получим

$$\frac{(u^{n+1}, u^{n+1}) - (u^n, u^n)}{2\tau} - \left(\mathbf{\Lambda}^n \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \frac{u^{n+1} + u^n}{2}\right) = 0 \quad (8.5)$$

Так как в силу положительности разностного оператора $(\Lambda^n u, u) \geq 0$, то из (8.5}) следует, что $\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\|$, чем и обеспечена устойчивость схемы. Если разностный оператор Λ (пространственные разности) выбран в виде полусуммы разностных операторов на верхнем и нижнем слоях по времени

$$\frac{1}{2}(\mathbf{\Lambda}^{n+1} + \mathbf{\Lambda}^n) = \mathbf{\Lambda}^{n+1/2},$$

то схема имеет второй порядок аппроксимации по τ .

8.2. Метод расщепления первого и второго порядка точности по τ

8.2.1. Локально - одномерные схемы

Положим, что дифференциальный оператор $\mathbf{A}$ и соответствующий ему разностный оператор Λ можно представить в виде суммы операторов, каждый из которых включает производные лишь по одной пространственной переменной и разности лишь вдоль одного направления соответственно. Всего пространственных направлений N . Такие дифференциальные и разностные операторы будем называть **локально - одномерными**. И дифференциальный, и разностный операторы записываются в виде суммы локально - одномерных:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i, \mathbf{\Lambda} = \sum_{i}^{N} \mathbf{\Lambda}_i.$$

Для однородной задачи можно выписать схему **расщепления по направлениям**:

$$\frac{u^{n+1/N} - u^n}{\tau} + \mathbf{\Lambda}_1 u^{n+1/N} = 0,$$

$$\frac{u^{n+2/N} - u^{n+1/N}}{\tau} + \mathbf{\Lambda}_2 u^{n+2/N} = 0,$$

$$\ldots$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-(N-1)/N}}{\tau} + \mathbf{\Lambda}_n u^{n+1} = 0.$$

Получена система разностных уравнений, каждое из которых не аппроксимирует исходное дифференциальное, но может быть легко решено (методом прогонки вдоль соответствующего направления, если разностные операторы содержат лишь первые и вторые разности). Тем не менее, последовательно примененные друг за другом, они дают на следующем слое по времени решение с разумной точностью. Говорят, что имеет место **суммарная аппроксимация** — результирующий оператор послойного перехода получился аппроксимирующим. Описанный выше способ называется иногда методом дробных шагов, и уже встречался при решении многомерного уравнения теплопроводности.

Для неоднородной задачи один из возможных вариантов схемы расщепления имеет вид

$$\frac{u^{n+1/N} - u^n}{\tau} + \Lambda_1 u^{n+1/N} = 0,$$
$$\frac{u^{n+2/N} - u^{n+1/N}}{\tau} + \Lambda_2 u^{n+2/N} = 0,$$
$$\dots$$
$$\frac{u^{n+1} - u^{n+(N-1)/N}}{\tau} + \Lambda_n u^{n+1} = f^n.$$

Возможны и другие способы учета правой части, например, введение ее во все уравнения с весовыми множителями, которые подбираются из условий наилучшей суммарной аппроксимации (минимизации ошибки аппроксимации на следующем слое по времени).

Приведенные выше схемы расщепления по направлениям абсолютно устойчивы.