1.5 Интегральная и дифференциальная формы законов сохранения массы, импульса и энергии. Основные уравнения механики сплошной среды.

Закон сохранения массы и импульса

проектируя которое на оси координат, получим:

$$p_{xy} = p_{yx}, \quad p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}. \tag{14}$$

Система равенств (14) выражает теорему о взаимности касательных напряжений: *если в некоторой точке сплошной среды провести две взаимно перпендикулярные элементарные площадки, то проекции напряжений, приложенных к каждой из площадок, на ось, перпендикулярную к другой площадке, будут между собою равны.* Еще иначе эту теорему можно проформулировать так: *тензор напряженности симметричен.*

§ 15. Общие уравнения динамики сплошной среды. Уравнение неразрывности. Уравнения динамики в напряжениях

Переходя к составлению общих уравнений динамики жидкости или газа, начнем с вывода *уравнения неразрывности* (сплошности). Будем исходить из основного закона классической механики о *сохранении массы* при ее движении; используя понятие индивидуальной производной, можем написать:

$$\frac{d}{dt}\,\delta m = \frac{d}{dt}\,(\rho\,\delta\tau) = 0. \tag{15}$$

Желая получить уравнение неразрывности в *переменных Лагранжа* (§ 8), перепишем (15) в виде

$$\rho\,\delta\tau = \rho_0\,\delta\tau_0, \tag{15'}$$

где ρ и $\delta\tau$ — текущие значения плотности и элемента объема и ρ_0, $\delta\tau_0$ — начальные их значения в момент времени $t = t_0$. Представим себе элементарный объем $\delta\tau$ как координатный параллелепипед в системе криволинейных координат — переменных Лагранжа — a, b, c; тогда стороны этого параллелепипеда будут определяться направленными элементами координатных линий:[1] $\delta\mathbf{r}_a$, $\delta\mathbf{r}_b$, $\delta\mathbf{r}_c$, равных частным дифференциалам вектора-радиуса $\mathbf{r}(x, y, z)$ по координатам a, b, c:

$$\delta\mathbf{r}_a = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial a}\,\delta a, \quad \delta\mathbf{r}_b = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial b}\,\delta b, \quad \delta\mathbf{r}_c = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial c}\,\delta c,$$

и по известному свойству скалярно-векторного произведения, будем иметь:

$$\delta\tau = \pm\,\delta\mathbf{r}_a\cdot(\delta\mathbf{r}_b\times\delta\mathbf{r}_c) = \pm\,\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial a}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial b}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial c}\right)\delta a\,\delta b\,\delta c =$$

$$= \pm\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a}, & \dfrac{\partial x}{\partial b}, & \dfrac{\partial x}{\partial c} \\ \dfrac{\partial y}{\partial a}, & \dfrac{\partial y}{\partial b}, & \dfrac{\partial y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial z}{\partial a}, & \dfrac{\partial z}{\partial b}, & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}\delta a\,\delta b\,\delta c = \pm\,\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)}\,\delta a\,\delta b\,\delta c,$$

где использовано общепринятое обозначение для якобиана.

[1] Подробнее см. об этом гл. VII, § 60.

1.

Аналогично получим в момент времени $t = t_0$:

$$\delta\tau_0 = \pm \frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(a, b, c)} \delta a\, \delta b\, \delta c$$

и, следовательно, по (15′):

$$\rho(t;\ a, b, c) \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \rho_0(t_0;\ a, b, c) \frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(a, b, c)}. \tag{16}$$

Это и есть *уравнение неразрывности в лагранжевых переменных*; его было бы правильнее называть *уравнением сохранения массы*.

В частном случае жидкости *постоянной плотности* — *несжимаемой* жидкости — $\rho = \rho_0$ и уравнение (16) принимает форму *уравнения несжимаемости в лагранжевых переменных*:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(a, b, c)} \tag{17}$$

или, полагая $x_0 = a,\ y_0 = b,\ z_0 = c$,

$$\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = 1. \tag{17′}$$

В *эйлеровых переменных* уравнение неразрывности можно получить, производя дифференцирование в формуле (15) и используя представление о дивергенции скоростного поля как скорости относительного расширения объема [вспомнить формулу (59′) § 11]:

$$\frac{d\rho}{dt}\delta\tau + \rho \frac{d}{dt}\delta\tau = \frac{d\rho}{dt}\delta\tau + \rho \operatorname{div} \mathbf{V}\, \delta\tau = 0,$$

откуда и найдем уравнение непрерывности в эйлеровых переменных

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \tag{18}$$

К тому же выводу можно было придти, записав закон сохранения массы для конечного объема τ в виде:

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\, \delta\tau = 0; \tag{19}$$

производя дифференцирование, получим по предыдущему:

$$\int_\tau \frac{d\rho}{dt}\delta\tau + \int_\tau \rho \frac{d}{dt}\delta\tau = \int_\tau \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V}\right)\delta\tau = 0,$$

откуда, в силу произвольности объема интегрирования, вновь получим уравнение (18). К тому же результату можно придти, разделив обе части последнего уравнения на объем τ, содержащий внутри себя заданную точку, и переходя к пределу при стремлении объема к нулю и стягивании его к данной точке.

В дальнейшем нам придется встречаться с двумя различными видами уравнений механики сплошной среды: 1) *интегральным*, выражающим связи между величинами в некоторых конечных объемах и на ограничивающих их поверхностях, и 2) *дифференциальным*, связывающим значения величин и их производных в данной точке. Примером уравнений в интегральной форме может служить уравнение сохранения массы (19) и в дифференциальной форме — (18).

Переход от интегрального вида уравнения к дифференциальному совершается одним из следующих двух приемов: делением обеих частей уравнения на величину объема с последующим стягиванием объема к выбранной точке пространства или сведением всех интегралов к одному объемному и приравниванием подинтегрального выражения нулю вследствие произвольности объема. Оба эти приема были только что применены при выводе уравнения (18).

Основной особенностью дифференциальной формы уравнений динамики жидкости и газа является то, что входящие в них величины представляют плотности распределения массы, объемных и поверхностных сил и т. п., а не сами величины, относящиеся к элементарному или конечному объему.

Обратный переход от дифференциальной формы к интегральной совершается умножением на элемент объема и интегрированием по конечному объему.

Интегральная форма имеет преимущество перед дифференциальной, если входящие в уравнение величины претерпевают внутри среды разрывы непрерывности. В этом случае дифференциальная форма уравнений не может быть использована во всем пространстве, заполненном жидкой средой, в то время как интегральная форма с успехом используется.

Заменяя в уравнении (18) индивидуальную производную по времени от плотности известным ее выражением через локальную и конвективную производные [§ 9, формула (41)], получим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \tag{20}$$

вспоминая затем формулу векторного анализа

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V},$$

окончательно найдем уравнение неразрывности в эйлеровом представлении в наиболее употребительном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \tag{21}$$

или в декартовых координатах:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \tag{22}$$

В частном случае несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) уравнение неразрывности переходит в уравнение *несжимаемости*:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{23}$$

Для вывода основного динамического уравнения движения жидкости или газа применим к объему τ (рис. 26) теорему об изменении количеств движения системы материальных частиц. Заметим, что главный вектор количеств движения частиц объема $\mathbf{K}$ равен интегралу от произведений их элементарных масс dm на векторы скоростей частиц $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{K} = \int_\tau \rho \mathbf{V}\, d\tau.$$

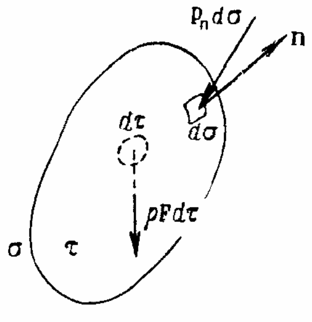

Рис. 26.

Приравнивая индивидуальную производную главного вектора количеств движения главному вектору внешних массовых и поверхностных сил, получим:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_\tau \rho \mathbf{V}\, d\tau = \int_\tau \rho \mathbf{F}\, d\tau + \int_\sigma \mathbf{p}_n\, d\sigma. \tag{24}$$

Индивидуальная производная от главного вектора количеств движения равна

$$\frac{d}{dt} \int_\tau \rho \mathbf{V}\, d\tau = \int_\tau \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt}\, d\tau + \int_\tau \mathbf{V} \frac{d}{dt}(\rho\, d\tau) = \int_\tau \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt}\, d\tau, \tag{25}$$

так как на основании закона сохранения массы (15) второй интеграл пропадает.

Чтобы преобразовать поверхностный интеграл, стоящий в правой части (24), в объемный, спроектируем обе части интегральной формулы (70) предыдущей главы на ось x и положим в ней φ равным попеременно a_x, a_y, a_z; тогда получим:

$$\int_\sigma n_x a_x\, d\sigma = \int_\tau \frac{\partial a_x}{\partial x}\, d\tau, \qquad \int_\sigma n_x a_y\, d\sigma = \int_\tau \frac{\partial a_y}{\partial x}\, d\tau,$$

$$\int_\sigma n_x a_z\, d\sigma = \int_\tau \frac{\partial a_z}{\partial x}\, d\tau;$$

умножая после этого обе части первого равенства на $\mathbf{i}$, второго — на $\mathbf{j}$, третьего — на $\mathbf{k}$ и складывая, будем иметь:

$$\int_\sigma n_x \mathbf{a}\, d\sigma = \int_\tau \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\, d\tau.$$

Повторяя аналогичные выкладки с производными по y и z, получим окончательно следующую группу интегральных формул:

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_\sigma n_x \mathbf{a}\, d\sigma &= \int\limits_\tau \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\, d\tau, \\ \int\limits_\sigma n_y \mathbf{a}\, d\sigma &= \int\limits_\tau \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}\, d\tau, \\ \int\limits_\sigma n_z \mathbf{a}\, d\sigma &= \int\limits_\tau \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\, d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Пользуясь (9), перепишем поверхностный интеграл в уравнении (24) в виде:

$$\int\limits_\sigma \mathbf{p}_n\, d\sigma = \int\limits_\sigma n_x \mathbf{p}_x\, d\sigma + \int\limits_\sigma n_y \mathbf{p}_y\, d\sigma + \int\limits_\sigma n_z \mathbf{p}_z\, d\sigma,$$

или, по (26), окончательно:

$$\int\limits_\sigma \mathbf{p}_n\, d\sigma = \int\limits_\tau \left(\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z}\right) d\tau. \tag{27}$$

Подставляя в (24) значения входящих в него величин, согласно формулам (25) и (27), и перенося все члены в одну сторону, получим *основное динамическое уравнение движения сплошной среды в интегральной форме*:

$$\int\limits_\tau \left(\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} - \rho \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z}\right) d\tau = 0, \tag{27'}$$

или, используя произвольность объема τ и приравнивая подинтегральную функцию нулю во всех точках области движения, будем иметь то же уравнение в *дифференциальной* форме:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z}. \tag{28}$$

Это векторное дифференциальное уравнение, или эквивалентная ему система трех дифференциальных уравнений в проекциях:

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= \rho F_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dv}{dt} &= \rho F_y + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \rho F_z + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

носит наименование *уравнений динамики в напряжениях* и играет основную роль при выводе всевозможных частных видов уравнений динамики жидкости и газа.

Если выразить индивидуальные производные от проекций скорости по времени, входящие в левую часть уравнения (29), по (40) § 9, то уравнения (29) запишутся в развернутой форме:

$$\left.\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)&=\\ &=\rho F_x+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z},\\ \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)&=\\ &=\rho F_y+\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z},\\ \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)&=\\ &=\rho F_z+\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

Для дальнейшего существенно подробнее рассмотреть механический смысл входящего в правую часть уравнения (28) вектора

$$\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z},$$

который, согласно (27), можно представить как предел

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\Delta\sigma}\mathbf{p}_n\,d\sigma=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\Delta\sigma}\mathbf{n}P\,d\sigma$$

отношения главного вектора поверхностных сил, приложенных к боковой поверхности $\Delta\sigma$ произвольно выбранного в данной точке M элементарного объема $\Delta\tau$, к самому объему $\Delta\tau$, при стягивании поверхности $\Delta\sigma$ к точке M. Этот предел можно было бы назвать *главным вектором поверхностных сил, приведенным к единице объема в данной точке потока*, а вектор

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z}\right)$$

главным вектором поверхностных сил, приведенным к единице массы в данной точке потока.

В отличие от напряжений поверхностных сил $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$, $\mathbf{p}_z$, величины и направления которых зависели от выбора направления осей координат в данной точке или направления наклонной площадки, главный вектор поверхностных сил, приведенный к единице массы или объема, представляет однозначную векторную функцию координат данной точки пространства, не зависящую ни от выбора системы координат, ни от формы стягивающейся к точке поверхности, к которой были приложены поверхностные силы, сведенные в главный вектор. Иными словами, *приведенные к единице объема или массы главные векторы поверхностных сил образуют векторное поле*, в то время как сами поверхностные силы поля не образуют.

В теории электричества и магнетизма силу, с которой поле действует на „единичное тело" (единица заряда, единица магнитной массы и т. п.), помещенное в поле, называют *напряжением* поля; произведение напряжения поля на величину помещенного в поле „тела" (заряд, магнитная масса и т. п.) с тем или другим знаком дает вектор силы, действующей со стороны поля на это „тело" (заряд, массу).

Точно так же и *главный вектор поверхностных сил, приведенный к единице массы или объема*, представляет „напряжение", или, чтобы не спутать с использованным ранее термином напряжения для поверхностной силы, отнесенной к единице площади, лучше скажем, *интенсивность поля главных векторов поверхностных сил в потоке*. Эту величину можно было бы еще иначе назвать *интенсивностью объемного действия поверхностных сил*. Умножая эту интенсивность соответственно на элемент объема или массы, получим *главный вектор* поверхностных сил, приложенных к выбранному элементу объема или массы.

Могут быть случаи, когда *при наличии поверхностных сил объемное* их действие во всем потоке *равно нулю*; это имеет место, как в дальнейшем будет показано, например, при безвихревом движении вязкой жидкости.

Введем следующую дифференциальную операцию над тензором напряженности P в предельном интегральном представлении (при стремлении $\Delta\tau$ к нулю $\Delta\sigma$, как всегда, стягивается к данной точке пространства):

$$\operatorname{Div} P = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\Delta\sigma} \mathbf{n} P \, d\sigma \tag{31}$$

и назовем этот *вектор дивергенцией тензора P*. Заглавная буква в символе Div поставлена, чтобы подчеркнуть отличие операции Div от операции div, производимой над *векторной* функцией.

Как было показано в предыдущем параграфе, тензор напряженности P характеризует напряженное состояние сплошной среды в данной точке.

Только что введенный в рассмотрение вектор представляет собою *векторную меру неоднородности напряженного состояния среды*. Этой мерой, как видно из предыдущего, служит отнесенный к единице объема главный вектор сил, приложенных к поверхности, ограничивающей выделенный в среде объем, если этот объем устремить к нулю, стягивая его боковую поверхность к рассматриваемой точке

Если тензорное поле однородно, то вектор дивергенции повсюду будет равен нулю. Обратное заключение, конечно, не имеет места: из равенства нулю дивергенции тензора в некоторой области еще не следует постоянство тензора в этой области.

Применяя принятую терминологию, можем еще сказать, что ***дивергенция тензора напряженности определяет вектор интенсивности объемного действия поверхностных сил в данной точке потока.*** Произведение вектора $\mathrm{Div}\, P$ на элемент объема $d\tau$ дает главный вектор поверхностных сил, приложенных к поверхности, ограничивающей элемент $d\tau$, а интеграл

$$\int_\tau \mathrm{Div}\, P\, d\tau$$

— главный вектор поверхностных сил, приложенных к замкнутой поверхности σ, ограничивающей конечный объем τ, причем по (24) и (12):

$$\int_\tau \mathrm{Div}\, P\, d\tau = \int_\sigma \mathbf{p}_n\, d\sigma = \int_\sigma nP\, d\sigma.$$

Отсюда вытекает формула

$$\int_\sigma \mathbf{n}P\, d\sigma = \int_\tau \mathrm{Div}\, P\, d\tau, \tag{32}$$

верная для любого тензора 2-го ранга и представляющая тензорное обобщение формулы Остроградского [(66) гл. I].

Задаваясь той или другой координатной формой элементарного объема $\Delta\tau$, можно по формуле (31) найти координатное представление вектора $\mathrm{Div}\, P$. Так, например, примем за $\Delta\tau$ декартов прямоугольный параллелепипед со сторонами Δx, Δy, Δz, тогда, поступая аналогично тому, как это уже неоднократно делалось в предыдущей главе (например, в § 11), будем иметь:

$$\mathrm{Div}\, P = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\left[\mathbf{i}P + \frac{\partial (\mathbf{i}P)}{\partial x}\Delta x - \mathbf{i}P\right]\Delta y \Delta z + \ldots + \left[\mathbf{k}P + \frac{\partial (\mathbf{k}P)}{\partial z}\Delta z - \mathbf{k}P\right]\Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y \Delta z} =$$

$$= \frac{\partial (\mathbf{i}P)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathbf{j}P)}{\partial y} + \frac{\partial (\mathbf{k}P)}{\partial z};$$

но по основному равенству (12), верному для любого наклона площадки, и, в частности, при $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ и $\mathbf{n} = \mathbf{k}$:

$$\mathbf{i}P = \mathbf{p}_x, \quad \mathbf{j}P = \mathbf{p}_y, \quad \mathbf{k}P = \mathbf{p}_z,$$

следовательно, в декартовой системе координат:

$$\mathrm{Div}\, P = \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \tag{33}$$

или в проекциях:

$$\left.\begin{aligned}(\operatorname{Div} P)_x &= \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z},\\ (\operatorname{Div} P)_y &= \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z},\\ (\operatorname{Div} P)_z &= \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{33'}$$

Формула (33) с внешней стороны несколько напоминает выражение дивергенции вектора в декартовых координатах [формула (63′) гл. I]:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

однако сходство это чисто внешнее. Действительно, в формуле дивергенции тензора (33) под знаком производных стоят зависящие от выбора системы координат *векторы* $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$, $\mathbf{p}_z$ напряжений, приложенных к площадкам, перпендикулярным осям x, y, z, а сама величина $\operatorname{Div} P$ представляет *физический вектор*; в формуле же дивергенции вектора $\operatorname{div} \mathbf{a}$ под знаком производных стоят алгебраические величины проекций вектора $\mathbf{a}$, а $\operatorname{div} \mathbf{a}$ представляет *физический скаляр*.

Полученные формулы дивергенции тензора несколько трудны для запоминания; в связи с этим можно предложить простое символическое их выражение, основанное на символическом равенстве:

$$\operatorname{Div} P = \nabla P, \tag{34}$$

где справа стоит произведение условного „вектора"-оператора ∇ с проекциями $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ на тензор P. Применяя формулы (20) гл. I умножения вектора на тензор, без труда составим проекции (33′) $\operatorname{Div} P$ на оси координат; для целей запоминания, наряду с формулой (34), можно предложить еще формулу (33), легко запоминающуюся по своей внешней аналогии с формулой дивергенции вектора.

Интегральная формула (32) допускает символическое представление:

$$\int_\sigma \mathbf{n} P \, d\sigma = \int_\tau \nabla P \, d\tau. \tag{35}$$

Пользуясь введенным понятием дивергенции тензора, можем представить основное уравнение динамики сплошной среды (28) в форме

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{Div} P. \tag{36}$$

Применение к объему τ теоремы об *изменении момента количества движения* приводит к выполнению уже ранее выведенных *соотношений взаимности касательных напряжений* или, что все равно, к *симметричности тензора напряженности*. Действительно, теорема об изменении главного момента количеств движения может быть записана так:

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \mathbf{r}\times\rho\mathbf{V}\,d\tau=\int_\tau \mathbf{r}\times\rho\mathbf{F}\,d\tau+\int_\sigma \mathbf{r}\times\mathbf{p}_n\,d\sigma, \tag{37}$$

где $\mathbf{r}$ — вектор-радиус центров элементарных объемов $d\tau$ и площадок $d\sigma$, к которым приложены векторы количеств движения, массовых внешних сил и внешних напряжений.

Объемный интеграл, стоящий слева, равен

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \mathbf{r}\times\rho\mathbf{V}\,d\tau=\int_\tau \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\rho\mathbf{V}\,d\tau+\int_\tau \mathbf{r}\times\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}\,d\tau+\int_\tau \mathbf{r}\times\mathbf{V}\frac{d}{dt}(\rho\,d\tau).$$

Первый интеграл в правой части этого равенства обращается в нуль, так как $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{V}$, последний интеграл равен нулю по условию сохранения массы элемента жидкости (15), так что будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \mathbf{r}\times\rho\mathbf{V}\,d\tau=\int_\tau \mathbf{r}\times\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}\,d\tau. \tag{38}$$

Далее, поверхностный интеграл, стоящий справа в формуле (37), легко по предыдущему преобразуется в объемный. По (9) будем иметь:

$$\int_\sigma (\mathbf{r}\times\mathbf{p}_n)\,d\sigma=\int_\sigma \mathbf{r}\times(n_x\mathbf{p}_x+n_y\mathbf{p}_y+n_z\mathbf{p}_z)\,d\sigma=$$
$$=\int_\sigma [n_x(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_x)+n_y(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_y)+n_z(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_z)]\,d\sigma,$$

откуда по формулам (26) следует:

$$\int_\sigma \mathbf{r}\times\mathbf{p}_n\,d\sigma=\int_\tau\left[\frac{\partial(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_z)}{\partial z}\right]d\tau=$$
$$=\int_\tau \mathbf{r}\times\left(\frac{\partial\mathbf{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{p}_z}{\partial z}\right)d\tau+$$
$$+\int_\tau\left[\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\mathbf{p}_x\right)+\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\times\mathbf{p}_y\right)+\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\times\mathbf{p}_z\right)\right]d\tau,$$

или, замечая еще, что

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\mathbf{i},$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}=\mathbf{j},$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}=\mathbf{k},$$

будем иметь:

$$\int_\sigma (\mathbf{r}\times\mathbf{p}_n)\,d\sigma=\int_\tau\left[\mathbf{r}\times\left(\frac{\partial\mathbf{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{p}_z}{\partial z}\right)\right]d\tau+$$

$$+\int_\tau[(\mathbf{i}\times\mathbf{p}_x)+(\mathbf{j}\times\mathbf{p}_y)+(\mathbf{k}\times\mathbf{p}_z)]\,d\tau. \qquad (39)$$

Собирая теперь вместе результаты преобразований, представленные формулами (38) и (39), можем переписать основное уравнение моментов (37) в виде:

$$\int_\tau \mathbf{r}\times\left(\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}-\rho\mathbf{F}-\frac{\partial\mathbf{p}_x}{\partial x}-\frac{\partial\mathbf{p}_y}{\partial y}-\frac{\partial\mathbf{p}_z}{\partial z}\right)d\tau=$$

$$=\int_\tau[(\mathbf{i}\times\mathbf{p}_x)+(\mathbf{j}\times\mathbf{p}_y)+(\mathbf{k}\times\mathbf{p}_z)]\,d\tau. \qquad (40)$$

Интеграл, стоящий слева, равен нулю, так как по (28) равно нулю выражение, стоящее в скобке под знаком интеграла; отсюда, в силу произвольности объема интегрирования в правой части, получим:

$$(\mathbf{i}\times\mathbf{p}_x)+(\mathbf{j}\times\mathbf{p}_y)+(\mathbf{k}\times\mathbf{p}_z)=0,$$

после чего проектированием на оси координат нетрудно вновь получить равенства (14), выражающие симметричность тензора напряженности или теорему о взаимности касательных напряжений. Только что изложенное доказательство является не зависящим от приведенного в предыдущем параграфе и основанного на использовании частного вида объема — элементарного тетраэдра. Если же принять предыдущее доказательство и считать теорему о взаимности касательных напряжений уже доказанной, то применение теоремы моментов к конечному объему приводит просто к тождеству, т. е. нового уравнения динамики не дает.

§ 16. Тепловые явления в жидкостях и газах. Закон сохранения энергии и уравнение баланса энергии

Уравнение непрерывности и уравнения движения в напряжениях представляют систему динамических уравнений, описывающих взаимную связь между изменениями плотности и скорости, с одной стороны, и приложенными к жидкости или газу поверхностными и массовыми силами — с другой.

Для решения вопросов движения жидкости или газа этих динамических уравнений оказывается недостаточно, так как рассматриваемые обычно движения тесно связаны с непрерывными взаимными превращениями механической энергии в тепловую. Так, например,