Построение разностных схем методом разложения в ряд Тейлора интегро-интерполяционным методом (методом конечных объемов).

Аппроксимация дифференциальных выражений

<u>Суть метода</u>: получать разностные выражения для производных (различного порядка) в узловых точках в виде линейной комбинации значений искомой величины в соседних узловых точках.

Например:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n = \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{6}\left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_i^n + \ldots$$

(аппроксимация 2-го порядка для производной 1-го порядка)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n = \frac{T_{i-2}^n - 8T_{i-1}^n + 8T_{i+1}^n - T_{i+2}^n}{12\Delta x} + \frac{(\Delta x)^4}{3}\left(\frac{\partial^5 T}{\partial x^5}\right)_i^n + \ldots$$

(аппроксимация 4-го порядка для производной 1-го порядка)

Далее покажем, как находить подобные соотношения.

<u>Запишем ряд Тейлора для величины *T(t,x)* в узловой точке</u>:

$$T_{i-1}^n = T_i^n - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n \Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n (\Delta x)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_i^n (\Delta x)^3 + \ldots$$

Откуда, $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n = \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n \Delta x + \ldots$

Получаем разностное выражение для производной первого порядка по координате (точность аппроксимации задается линейным членом Δx): $\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}\right)_i^n = \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x}$ **[1]**

Аналогично, $T_1^{n+1} = T_i^n + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n \Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_i^n (\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}\right)_i^n (\Delta t)^3 + \ldots$

Откуда, $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_i^n \Delta t + \ldots$

Разностное выражение для производной первого порядка по времени (точность аппроксимации задается линейным членом *Δt*): $\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}\right)_i^n = \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x}$ **[2]**

<u>Разностное уравнение</u> для исходного $\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ **[3]** при подстановке в него [1] и [2] запишется как: $\frac{\tilde{T}_i^{n+1} - \tilde{T}_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{\tilde{T}_i^n - \tilde{T}_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$. **[4]**

Как точно уравнение [4] приближает исходное уравнение [3]? Запишем,

$$\frac{\tilde{T}_i^{n+1} - \tilde{T}_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{\tilde{T}_i^n - \tilde{T}_{i-1}^n}{\Delta x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_i^n \Delta t + \frac{u_i^n}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n \Delta x + \ldots = 0$$

$$\frac{\tilde{T}_i^{n+1}-\tilde{T}_i^{n}}{\Delta t}+u_i^n\frac{\tilde{T}_i^{n}-\tilde{T}_{i-1}^{n}}{\Delta x}=\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_i^n\Delta t-\frac{u_i^n}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n\Delta x+\ldots}_{\text{НЕВЯЗКА}}$$ (пр.ч. – погрешность аппроксимации [4])

Соотношения [1] и [2] содержат в правой части линейные комбинации только по двум узловым точкам. Посмотрим, что можно получить из трехэлементной линейной комбинации. В общем виде она записывается как: **[5]**

$$a\underbrace{T_{i-1}^n}_{\text{Taylor}}+bT_i^n+c\underbrace{T_{i+1}^n}_{\text{Taylor}}=(a+b+c)T_i^n+(c-a)\Delta x\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n+(c+a)\frac{(\Delta x)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n+(c-a)\frac{(\Delta x)^3}{6}\left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_i^n+\ldots$$ (это

можно получить, записав два тейлора: для i+1 и i–1 через i, $x_{i\pm1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left((\pm1)^k\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k x}{\partial t^k}\right)_i\Delta t^k\right)$)

Получим из этого выражения $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n$: $\begin{cases}a+b+c=0\\ \Delta x(c-a)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=a+1/\Delta x\\ b=-\left(2a+1/\Delta x\right)\end{cases}$

В результате получаем:

$$aT_{i-1}^n-\left(2a+1/\Delta x\right)T_i^n+\left(a+1/\Delta x\right)T_{i+1}^n=\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n+\left(2a+1/\Delta x\right)\frac{(\Delta x)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n+\frac{(\Delta x)^2}{6}\left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_i^n+\ldots$$

При различных a получаем:

a=0: правосторонняя аппроксимация первого порядка

a=-1/Δx: левосторонняя аппроксимация первого порядка

a=-2/Δx: центральная аппроксимация второго порядка

Из соотношения [5] находится и разностное представление $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n$:

$$\begin{cases}a+b+c=0\\ c-a=0\\ \frac{(a+c)}{2}(\Delta x)^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1/(\Delta x)^2\\ c=1/(\Delta x)^2\\ b=-2/(\Delta x)^2\end{cases}$$

В результате получаем:

$$\frac{T_{i+1}^n-2T_i^n+T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}=\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n+\frac{(\Delta x)^2}{12}\left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right)_i^n+\ldots$$

Аналогично можно получить следующие аппроксимационные выражения:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n=\frac{-3T_i^n+4T_i^n-T_{i+2}^n}{2\Delta x}+\frac{(\Delta x)^2}{3}\left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_i^n+\ldots$$

(несимметричная разность для 1-й производной, аппроксимация 2-го порядка, используется для аппроксимации граничных условий)

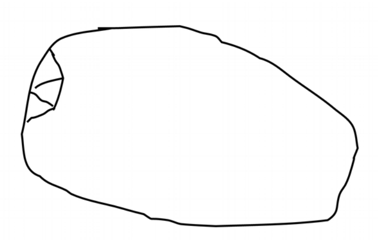
$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n=\frac{-T_{i-2}^n+16T_{i-1}^n-30T_i^n+16T_{i+1}^n-T_{i+2}^n}{12(\Delta x)^2}+\frac{(\Delta x)^4}{90}\left(\frac{\partial^6 T}{\partial x^6}\right)_i^n+\ldots$$

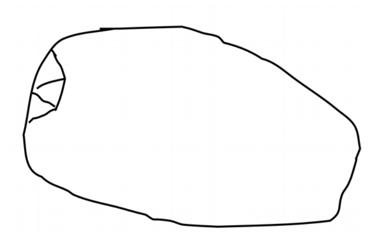
(симметричная разность для 2-й производной, аппроксимация 4-го порядка)

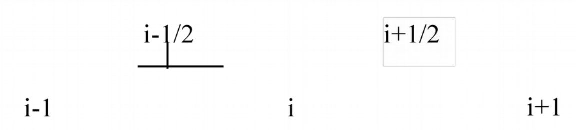
<u>Недостатки метода</u>:

1. Часто не выполняются законы сохранения в интегральной форме.
2. Сетка аппроксимации плохо годится для аппроксимации объектов (областей) со сложной формой.

Интегро-интерполяционный метод (метод конечных объемов)







Метод использует законы сохранения для отдельных ячеек.

Покажем работу метода в одномерном случае (получение до боли знакомого всем уравнения теплопроводности).

Запишем закон изменения энергии для ячейки [i-1/2,i+1/2] за время Δt:

$$\underbrace{\left(\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho C_p T S dx\right)^{n+1}}_{\text{Что стало (?)}} - \underbrace{\left(\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho C_p T S dx\right)^{n}}_{\text{Что было (?)}} =$$

$$= -\underbrace{\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \rho C_p T u S dx\right)_{i+1/2}}_{\text{Отдаем направо (?)}} + \underbrace{\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \rho C_p T u S dx\right)_{i-1/2}}_{\text{Отдаем налево (?)}} - \underbrace{\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} q_x S dx\right)_{i-1/2}}_{\text{Приходит слева (?)}} + \underbrace{\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} q_x S dx\right)_{i+1/2}}_{\text{Приходит справа (?)}} + \underbrace{\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} Q S dx dt\right)}_{\text{Объемн. источник (?)}}$$

, где u – скорость конвекции теплоты, S – площадь поперечного сечения.

Пусть S=const. При малых Δx и Δt, к интегралам можно применить 1-ю теорему об интегральном среднем:

$$(\rho C_p T)_i^{n+1}\Delta x - (\rho C_p T)_i^{n}\Delta x = -(\rho C_p T u)^n_{i+1/2}\Delta t + (\rho C_p T u)^n_{i-1/2}\Delta t - (q_x)^n_{i+1/2}\Delta t + (q_x)^n_{i-1/2}\Delta t + Q_i^n \Delta t \Delta x$$

Делим на $\Delta t\Delta x$: $\dfrac{(\rho C_p T)_i^{n+1} - (\rho C_p T)_i^{n}}{\Delta t} = \dfrac{-(\rho C_p T u + q_x)^n_{i+1/2} + (\rho C_p T u + q_x)^n_{i-1/2}}{\Delta x} + Q_i^n$

Рассматриваем случай ρ=const, C_p=const, λ=const, u=const. Используем закон Фурье: $q_x = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}$.

$$(q_x)_{i+1/2} = -\lambda_{i+1/2}\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} \qquad (q_x)_{i-1/2} = -\lambda_{i-1/2}\frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x},$$

$$\frac{(q_x)_{i+1/2} - (q_x)_{i-1/2}}{\Delta x} = -\frac{1}{\Delta x}\left[\lambda_{i+1/2}\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} - \lambda_{i-1/2}\frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}\right]$$

Итак, получаем следующее разностное уравнение:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = -u\frac{T_{i+1/2}^n - T_{i-1/2}^n}{\Delta x} + \vartheta\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} + Q_i^n$$

Считаем, что $T_{i+1/2} \approx \dfrac{T_{i+1} + T_i}{2}$.

Поздравляю с конечным результатом: $\dfrac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = -u\dfrac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} + \vartheta\dfrac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} + Q_i^n$!!!