**1.2. Дифференциальные уравнения с частными производными. Классификация линейных уравнений второго порядка. Метод разделения переменных.**

ДУЧП — уравнение вида $F\left(x,\dots,p_{i_1,\dots,i_n},\dots\right)=0$, где $F$ — заданная функция относительно точки $x=(x_1,\dots,x_n)$ области $D$ евклидова пространства размерности $n\geq 2$ и переменных $p_{i_1,\dots,i_n}\equiv\frac{\partial^k U}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}$ ($U(x)$ — неизвестная функция) с неотрицательными целочисленными индексами $i_1,\dots,i_n$, $\sum_{j=1}^{n} i_j=k$, где $k=0,\dots,m$, причём как минимум одна из производных $\frac{\partial F}{\partial p_{i_1,\dots,i_n}}$ функции $F$ (при $\sum_{j=1}^{n} i_j=m$) отлична от нуля; натуральное число $m$ называют *порядком* уравнения.

В предположении непрерывности частных производных 1-го порядка функции $F$ относительно переменных $p_{i_1,\dots,i_n}$, $\sum_{j=1}^{n} i_j=m$ в теории ДУЧП фундаментальную роль играет форма порядка $m$:

$$\Phi\left(\lambda_1,\dots,\lambda_n\right)=\sum\frac{\partial F}{\partial p_{i_1,\dots,i_n}}\lambda_1^{i_1}\dots\lambda_n^{i_n},\quad \sum\nolimits_{j=1}^{n} i_j=m$$

относительно действительных параметров $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, которая называется *характеристической формой*, соответствующей исходному ДУЧП.

Когда $F$ — линейная функция набора переменных $p_{i_1,\dots,i_n}$, ДУЧП называется *линейным*.

Линейное ДУЧП 2-го порядка можно записать в виде: $\sum\nolimits_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\partial x_j}+\sum\nolimits_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial U}{\partial x_i}+CU=f$, где $A_{ij}$, $B_i$, $C$ и $f$ — заданные в области $D$ функции точки $x$. Уравнение называют однородным, если $f(x)=0$ для всех $x\in D$. Для линейных уравнений второго порядка характеристическая форма является квадратичной: $Q\left(\lambda_1,\dots,\lambda_n\right)=\sum\nolimits_{i,j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j$ с коэффициентами $A_{ij}$, зависящими только от точки $x\in D$. В каждой точке $x_0\in D$ для квадратичной формы $Q$ можно выполнить неособое аффинное преобразование $\xi$ независимых переменных таким образом, что исходное уравнение в новых координатах $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ примет *канонический вид*:

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^{n} A_{ij}^{*}(\xi)\frac{\partial^2 U(\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}+\sum\nolimits_{i=1}^{n} B_i^{*}\frac{\partial U(\xi)}{\partial\xi_i}+C^{*}(\xi)U(\xi)=f^{*}(\xi),$$

где коэффициенты $A_{ij}^{*}(\xi)$ в точке $\xi_0=\xi(x_0)$ равны нулю при $i\neq j$ и равны $\pm1$ или 0 при $i=j$.

Число $k$ положительных и число $l$ отрицательных в точке $\xi_0$ коэффициентов $A_{ii}^{*}(\xi)$ в каноническом уравнении зависит только от коэффициентов $A_{ij}(x)$ исходного уравнения (с точностью до обмена местами). Этот факт называют алгебраическим законом инерции квадратичных форм. Он позволяет классифицировать уравнения по знакам коэффициентов следующим образом. Если $k=n$ или $l=n$, то уравнение называют *эллиптическим* в точке $x_0$; если $k=n-1$, а $l=1$, или $k=1$, а $l=n-1$, то — *гиперболическим*; если $k+l=n$ и $1<k<n-1$, то — *ультрагиперболическим*. Если хотя бы один из коэффициентов равен нулю ($k+l<n$), то — *параболическим в широком смысле*. Если ровно один коэффициент равен 0 (пусть $A_{ii}^{*}(\xi_0)=0$), а все остальные коэффициенты одного знака, и $B_i^{*}(\xi_0)\neq 0$, то — *параболическим*.

В случае двух независимых переменных ($n = 2$) тип уравнения удобнее всего определять с помощью функции $\Delta(x) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$. Так, уравнение является эллиптическим в точке $x_0$, если $\Delta(x_0) > 0$; гиперболическим, если $\Delta(x_0) < 0$, и параболическим в широком смысле, если $\Delta(x_0) = 0$.

Примеры.

$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ — гиперболическое уравнение струны (множитель $a^2 > 0$ связан с плотностью и коэффициентом упругости).

$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ — параболическое уравнение теплопроводности (диффузии).

$\Delta U = 0$ — эллиптическое уравнение задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Метод разделения переменных (метод Фурье, метод стоячих волн) — метод отыскания частных решений дифференциальных уравнений вида $(L \circ U)(x, y) = (M \circ U - N \circ U)(x, y) = 0$, где $x$ и $y$ — векторы переменных, а $M$ (или $N$) — линейное дифференциальное выражение, содержащее производные только по переменным $x$ (или, соответственно, $y$).
Решение уравнения ищется в виде $U(x, y) = V(x) \cdot W(y)$. Функция такого вида будет решением, если существует такая константа $\lambda$, что $M \circ V = \lambda V$ и $N \circ W = \lambda W$.

Например, для (волнового) уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$ при начальных условиях $U(x, 0) = \varphi(x)$, $U'_t(x, 0) = \psi(x)$ и краевых условиях $U(0, t) = U(l, t) = 0$ искомая функция принимает вид $U(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, откуда $\frac{T''_{tt}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''_{xx}(x)}{X(x)} = \lambda$, где $\lambda$ — *постоянная разделения* (то, что оба выражения равны константе, следует из того, что первое из них не зависит от $x$, а второе — от $t$). Получили уравнения:

$$\begin{cases} X''_{xx} = \lambda X \\ T''_{tt} = \lambda a^2 T \end{cases}$$

При $\lambda = 0$ получим $U(x, t) = (A\,x + B)(C\,t + D)$, из-за краевых условий функция вырождается, поэтому этот случай нам неинтересен. При $\lambda \neq 0$ решение имеет вид:

$$\begin{cases} X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \\ T(t) = c_3 e^{a\sqrt{\lambda}t} + c_4 e^{-a\sqrt{\lambda}t} \end{cases}$$

При $\lambda > 0$ решение «нефизично», т. к. нарушается закон сохранения энергии. При $\lambda = -p^2 < 0$ решение имеет вид:

$$\begin{cases} X(x) = c_1 \cos px + c_2 \sin px \\ T(t) = c_3 \cos apt + c_4 \sin apt \end{cases}$$

Учитывая краевые условия, получим $c_1 = 0$; $p\,l = \pi\,k$ ($k$ — целое), следовательно, $p = \pi k / l$.
Просуммируем решения по всем $k$. Из линейности нашего уравнения следует, что составленный из этих функций ряд доставляет решение $U$ нашей начально-краевой задачи:

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \sin \frac{\pi k a}{l} t + b_k \sin \frac{\pi k a}{l} t \right) \sin \frac{\pi k x}{l},$$

если $a_k$ и $nb_k$ являются коэффициентами Фурье для разложения достаточно гладких начальных данных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, соответственно (разложение по синусам):

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k x}{l} \qquad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\pi k a}{l} \sin \frac{\pi k x}{l}$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx \qquad b_k = \frac{2}{\pi k a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx.$$

Частоту $\omega_{\min} = \pi a / l$ называют *основным тоном* струны, а частоты $\omega_k = \pi n a / l$ для $k > 1$ — *обертонами*.