2.15

Интерполяция, экстраполяция и аппроксимация есть три части темы о приближении функции. Поясним значение этих трех терминов на примере: Допустим, что у нас есть набор $y_0, y_1, \ldots y_n$ значений функции в точках $x_0, x_1, \ldots x_n$.

Определение: Тогда *интерполяция*—приближение функции, при котором график нашей функции пройдет точно через все имеющиеся у нас точки.

Определение: *Экстраполяция* графически будет представляться, как продолжение функции за промежуток $[x_0, x_n]$, а *аппроксимацией* будет график проходящий не через точки (узлы), а близко к ним.

Положим, что у нас есть $(n+1)$ точка. Тогда интерполировать эту функцию мы можем многочленом степени n. $P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$. Причем

$y_i = a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i^n$ - система уравнений относительно a_i (она будет плохо обусловлена).

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}\left(\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right)y_i\right) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0 + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n.$$

В форме Ньютона интерполяционный многочлен есть конечно-разностный ряд Тейлора:

$$N_n(x) = f_0(x_0) + f_1(x_0,x_1)(x-x_0) + f_2(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \ldots f_n(x_0,x_1,\ldots x_n)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x$$

где $f_0(x_0) = f(x_0) = y_0$,

$$f_1(x_0,x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$ первая, разделенная конечная разность.

$$f_2(x_0,x_1,x_2) = \frac{f_1(x_1,x_2)-f_1(x_0,x_1)}{x_2-x_0}$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_0,\ldots x_n) = \frac{f_{n-1}(x_1,x_2,\ldots x_n)-f_{n-1}(x_0,x_1,\ldots x_{n-1})}{x_n-x_0}$$

Можно показать что □$_n(x) = N_n(x)$. (скорее всего по индукции)

Понятие о стратегии интерполяции.

Остался невыясненным вопрос о том, насколько хорошо мы можем приближать функцию многочленом.

Теорема (Вейерштрасса)**:** Для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ и любого □ >0 существует многочлен $P_n(x)$ такой, что $\max\limits_{[a,b]}|f(x)-P_{n(\varepsilon)}(x)|<\varepsilon$

Определение: *Стратегией интерполяции* функции $f(x)$ называется процесс выбора узлов разбиения, так чтобы интерполяционный многочлен $P_n(x)$ удовлетворял некоторому условию. (обычно $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{x}|f(x)-P_n(x)|\to 0$). Выбираем сначала x_0^0, затем x_0', x_1', и так далее, $x_0^n, x_1^n, \ldots x_n^n$, ……… [1]

Теорема (Фабера)**:** Для любой стратегии всегда найдется такая непрерывная функция, при которой $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{x}|f(x)-P_n(x)|=\infty$ (т.е. универсальной стратегии нет).

[1] Определение стратегии интерполяции придумано мной. У него только фраза: строим стратегию интерполяции так чтобы {условие}.(примечание автора).

2.15

Для гладких функций существует универсальная стратегия, обеспечивающая приближение между узлами: берем x_n^k в нулях полиномов Чебышева.

Полиномы Чебышева:

$$\left.\begin{array}{l} T_0(\tilde{x}) = 1 \\ T_1(\tilde{x}) = \tilde{x} \\ \ldots \\ T_n(\tilde{x}) = 2\tilde{x}T_{n-1}(\tilde{x}) - T_{n-2}(\tilde{x}) \\ \ldots \end{array}\right\} \text{семейство ортогональных полиномов}$$

$$T_n(\tilde{x}) = \cos(n \arccos \tilde{x})$$

$$\tilde{x} = \frac{2(x-a)}{(b-a)} - 1 = \frac{2x-a-b}{b-a}. \quad x_k^n = \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = \overline{1,n}.$$

Интерполяция сплайнами

Рассмотрим отрезок $[a,b]$, на нём выбрали n+1 точку для интерполяции, где $x_0=a$, а $x_n=b$. Для каждого отрезка $[x_{i-1},x_i] \to P_{n,i}(x)$ — полиномы степени не более m, $S_n(x)=P_{n,i}(x)\,\text{на}\,[x_{i-1},x_i]$ — полиномиальный сплайн порядка m. если $S_n(x), S_n^{(1)}(x), S_n^{(2)}(x), \ldots, S_n^{(k)}(x)$ — непрерывны на $[a,b]$, k — степень гладкости сплайна, $n-k=p$ — дефект сплайна.

Аппроксимация функций. Метод наименьших квадратов.

Если какую либо функцию f на промежутке $[a,b]$ приближенно воспроизводят с помощью другой, $g(x)$,то качество этой аппроксимации можно оценивать по-разному.

$$r(x)=f(x)-g(x)$$

Если мы одинаково заинтересованы в малом отклонении одной из функции от другой во всех отдельно взятых точках, то за меру приближения принимают их максимальное отклонение в промежутке, т.е. число

$$\delta = \sup_{a \le x \le b} |r(x)|$$

Это называется равномерной аппроксимацией.

Применяют так же аппроксимацию в среднем. Тогда меру приближения определяют как среднее отклонение

$$\delta' = \frac{1}{b-a}\int_a^b |r(x)|\,dx$$

или как среднеквадратичное отклонение.

2.15

$$\delta'' = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b r^2(x)dx}$$

Метод наименьших квадратов

Предположим, что истинная зависимость выражается формулой $y = \phi(x)$. Проведем измерения в точках x_i. В силу того, что ошибки имеют, как правило, гауссовское распределение, до проведенного наблюдения можно считать, что результаты измерения описываются случайными величинами, плотность вероятности которых имеет вид

$$p_i(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y_i - \phi(x_i))^2}{2\sigma^2}\right)$$

После проведения измерения получим совокупность результатов y_i, i=1...n.

Так как опыты независимы, вероятность того, что совокупность случайных величин примет совокупность значений лежащих в пределах (y_i, $y_i + dy_i$) определяется

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y_i - \phi(x_i))^2}{2\sigma^2}\right)dy_i = C\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \phi(x_i))^2\right)$$

Найдем параметры a,b,c,.. функции $\phi(x; a, b, \ldots)$, при которых записанная вероятность совокупного получения полученных значений максимальна.

Экспонента в правой части всегда от 0 до 1, так как ее аргумент всегда отрицателен. Она достигает максимума при минимуме суммы квадратов, стоящих в аргументе.

Рассмотрим производные суммы квадратов отклонений и приравняем их нулю.

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \phi(x_i; a, b, c, \ldots))\left(\frac{\partial\phi(x_i)}{\partial a}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \phi(x_i; a, b, c, \ldots))\left(\frac{\partial\phi(x_i)}{\partial b}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \phi(x_i; a, b, c, \ldots))\left(\frac{\partial\phi(x_i)}{\partial c}\right) = 0$$

...

Решая, эту систему, находим, a,b,c,...