1.12. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Дискретизация дифференциальной задачи: разностная сетка, шаблон и схема. Явная и неявная схемы.

Сформулируем задачу решения ДУЧП на примере модельного уравнения теплопроводности:

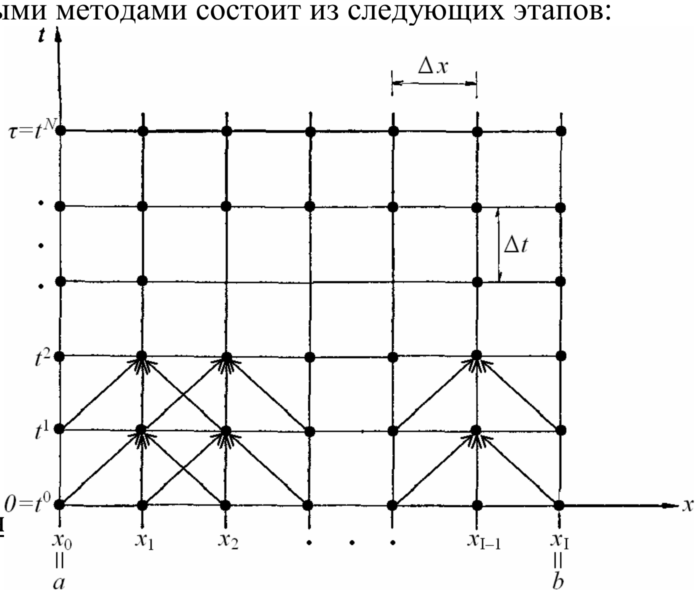
$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} - \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = Q.$$

Здесь $\frac{\partial T}{\partial t}$ — нестационарный член, $\frac{\partial T}{\partial x}$ — конвективный член, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ — релаксационный (теплопроводный) член, u — скорость среды, λ — температуропроводность, Q — источник тепла.

Уравнение решается на множестве $a \le x \le b$, $0 \le t \le \tau$. Начальное условие: $T(t,x)\big|_{t=0} = T_0(x)$.

Краевые условия: $$\alpha_a T + \beta_a \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=a} = \gamma_a$$ $$\alpha_b T + \beta_b \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=b} = \gamma_b.$$

Дискретизация задачи решения ДУЧП разностными методами состоит из следующих этапов:



<u>1. Дискретизация расчётной области.</u>
$\{0 \le t \le \tau,\ a \le x \le b\} \to$
$\to \{t^n,\ n = 0 \div N\} \times \{x_i,\ i = 0 \div I\}$.
Получилась разностная сетка.
$\Delta t^n = t^n - t^{n-1}$ (часто полагают $\Delta t^n = const$),
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (часто полагают $\Delta x_i = const$).

<u>2. Дискретизация искомой функции:</u>

$T(t,x) \to T_i^n$.

<u>3. Дискретизация дифференциального уравнения</u>

$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n \Leftrightarrow \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + \cdots$ — аппроксимация «вперёд по времени».

$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^n \Leftrightarrow \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} + \cdots$ — аппроксимация «против потока» (если $u > 0$).

$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n \Leftrightarrow \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} + \cdots$ — «центральная» аппроксимация.

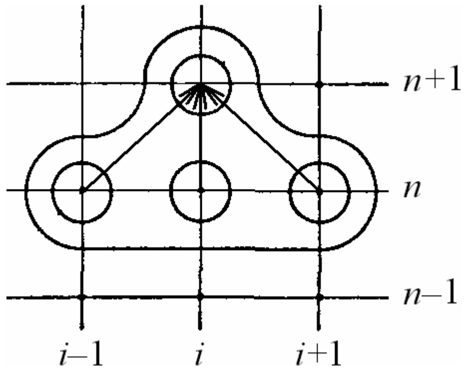
На месте «…» стоят величины, бесконечно малые по отношению к основным значениям.

$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u\frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} - \lambda\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} = Q + \cdots$. Забываем про «…».

$$T_i^{n+1} = \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x} + \frac{\lambda\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)T_{i-1}^n + \left(1 - \frac{u\Delta t}{\Delta x} - \frac{2\lambda\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)T_i^n + \frac{\lambda\Delta t}{(\Delta x)^2}T_{i+1}^n + Q\Delta t.$$

Далее полагаем $Q = 0$.

T_i^{n+1} зависит от T_{i-1}^n, T_i^n, T_{i+1}^n. Эту зависимость можно условно обозначить схемой (такую схему, точнее, множество точек, которые участвуют в зависимости, называют *разностным шаблоном*). В данном случае разностный шаблон состоит из 4 точек.



4. Дискретизация начального условия: $T_i^0 \Leftrightarrow T_0(x_i)$.

5. Дискретизация граничных условий.

$$\alpha_a T_0^{n+1} + \beta_a \frac{T_1^{n+1} - T_0^{n+1}}{\Delta x} = \gamma_a$$

$$\alpha_a T_0^{n+1} + \beta_a \frac{T_1^{n+1} - T_0^{n+1}}{\Delta x} = \gamma_a ,$$

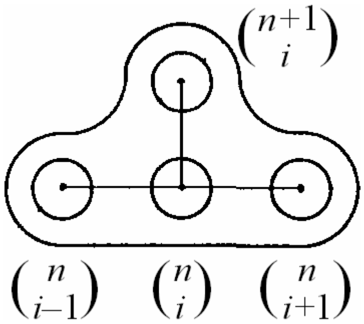
$$(\alpha_a - \beta_a/\Delta x) T_0^{n+1} = \gamma_a - (\beta_a/\Delta x) T_1^{n+1}$$

$$(\beta_b/\Delta x) T_I^{n+1} = \gamma_b - (\alpha_b - \beta_b/\Delta x) T_{I-1}^{n+1} ,$$

$$T_0^{n+1} = \frac{\gamma_a - (\beta_a/\Delta x) T_1^{n+1}}{\alpha_a - \beta_a/\Delta x}$$

$$T_I^{n+1} = \frac{\gamma_b - (\alpha_b - \beta_b/\Delta x) T_{I-1}^{n+1}}{\beta_b/\Delta x} .$$

Разностный шаблон:



$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = L_h T^n$ — явная схема

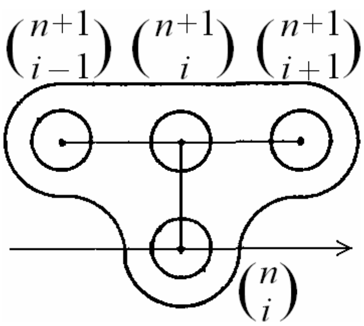
$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = L_h T^{n+1}$ — неявная схема

Здесь L_h — линейный разностный аналог дифференциального оператора по пространственным переменным (x), $h = \Delta x$.

В явной схеме пространственная производная аппроксимируется на текущем (известном) временном слое, а в неявной — на следующем (неизвестном). Явные схемы, в отличие от неявных, не *абсолютно*, а лишь *условно* устойчивы (т. е. только при определённых соотношениях между Δt и Δx). Для явной схемы получится рекуррентная формула, а для неявной схемы — СЛАУ с трёхдиагональной матрицей:

$$L = -u \frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_h = -u \frac{(\,)_i^n - (\,)_{i-1}^n}{\Delta x} + \lambda \frac{(\,)_{i-1}^n - 2(\,)_i^n + (\,)_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \quad \text{— явная схема}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = -u \frac{T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + \lambda \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad \text{— неявная схема}$$



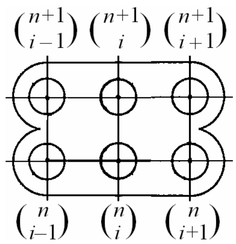
Разностный шаблон для неявной схемы

Можно использовать также частично-неявную схему:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \sigma L_h T^n + (1 - \sigma) L_h T^{n+1} .$$

При $\sigma = ½$ получим $\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = L_h \frac{T^n + T^{n+1}}{2}$ — разностная схема Кранка-Николсона.

Разностный шаблон для схемы Кранка-Николсона:



$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + \ldots \quad \text{— первый порядок на } \Delta t$$

Другие варианты разностных схем: $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n = \frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\Delta t} + \ldots$ — второй порядок на Δt