1.09

Вопрос 1.9. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы. Фундаментальная система решений. Метод вариации постоянных для решения неоднородных уравнений.

Ответ:

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) — это уравнения вида

$$F(t, x, x', x'', ..., x^{(n)}) = 0,$$

где $x = x(t)$ — неизвестная функция (возможно, вектор-функция; в таком случае часто говорят о системе дифференциальных уравнений), зависящая от переменной времени t, штрих означает дифференцирование по t. Число n называется порядком дифференциального уравнения. Для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений используется Метод Лагранжа (дифференциальные уравнения).

Линейные дифференциальные уравнения

Def: ЛДУ ::= $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+...+p_n(x)y=f(x)$ (3), где $p_i(x)$ — произвольные функции.

Def: Линейные дифференциальный оператор ::= $L[x]= y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+...+p_n(x)y$.

Def: Однородное ЛДУ — $f(x) \equiv 0$, (иначе неоднородное).

Свойства ЛДУ: если имеем систему решений, то любая их ЛК — тоже решение (обычная линейность); $y\equiv 0$ всегда решение.

Def: Уравнение с постоянными коэффициентами ::= ЛДУ, такое что все $p_i(x)=const$.

Def: Функции φ_1, ... φ_n ЛНЗ на $<a, b>$ ::= $\sum c_i\varphi_i=0$ => все $c_i=0$.

Th: Общее решение неоднородного ЛДУ — сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения.

Методы решения однородного ЛДУ

Def: система векторов ЛНЗ, если нет их тождественно нулевой линейной комбинации

Запись (3) эквивалентна системе уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ ... \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f - a_n y_n - ... - a_1 y_{1n} \end{cases} \qquad (4)$$

Либо, что эквивалентно, $y'=A(x)y+f(x)$, где $A(x)$ — матрица, x, y, $f(x)$— вектора.

Def: Определитель Вронского для φ_1, ... φ_n ($n-1$ раз дифференцируемы) ::= $W(x)=|w_{ij}|$, $w_{ij}=\varphi_j^{(i-1)}$.

Th: y_1, ..., y_n — ЛНЗ на (a, b) <=> $W(x)<>0$ на (a, b) для любого x.

Th: Если y_1, ..., y_n — ЛНЗ на (a, b) и являются решение однородного ЛДУ => фундаментальная система решений, Соответственно, их линейная комбинация – Общее решение.

1.09

Уравнение с постоянными коэффициентами

Def: Метод Эйлера ::= будем искать решение в виде $y=\Gamma e^{\lambda x}$ ($\Gamma \in R^n$, $\lambda \in C$), тогда имеем $\Gamma\lambda e^{\lambda x}=A\Gamma e^{\lambda x}$, таким образом $(A-\lambda E)\Gamma=0$ (E — единичная матрица). Нетривиальные решения существуют при $det(A-\lambda E)=0$, таким образом имеем полиномиальное уравнение для λ. Вид фундаментальной системы решений зависит от корней полинома.

1. Все корни различны: $\lambda_1, \dots, \lambda_n \Rightarrow \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ и $\Gamma_i e^{\lambda ix}$ — решения системы.
2. Если λ корень кратности k: решения: $\Gamma_1 e^{\lambda t}$, $\Gamma_2 t e^{\lambda t}$, …, $\Gamma_2 t^{k-1} e^{\lambda t}$.

Метод вариации постоянных коэффициентов для решения неоднородных уравнений.

Для неоднородных уравнений часто используется следующая техника – решаем однородное уравнение, а коэффициенты в линейной комбинации представим функциями – дальше подставим в уравнение. Нулевое решение сокращается – для остатка решаем элементарное уравнение. Работает, не всегда (понимать надо!).
