TD 1 : Espaces métriques et vectoriels normés. Complétude. Compacité. Point fixe.

Objectifs : Savoir manipuler les concepts topologiques des espaces métriques et des espaces vectoriels normés, maîtriser les notions de complétude et de compacité, savoir appliquer un théorème de point fixe

1 Espaces métriques

Exercice 1 *La métrique SNCF (ou du chemin de fer)*

On se place dans le plan $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|_2$. On définit l'application $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ par :

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Interprétation : Pour aller d'une ville x à une ville y, si elles sont sur la même ligne de chemin de fer (rayon issu de l'origine), on y va directement. Sinon, il faut passer par la gare centrale (l'origine 0).

1. **Propriétés de distance :**
   - (a) Vérifier que d satisfait la séparation ($d(x,y) = 0 \iff x = y$) et la symétrie.
   - (b) Montrer l'inégalité triangulaire $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$. (On pourra distinguer les cas selon que les points sont alignés avec l'origine ou non).
2. **Étude des boules ouvertes :** On cherche à dessiner la boule ouverte $B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d(x_0, y) < r\}$. Déterminer la forme de cette boule et la dessiner dans les trois cas suivants :
   - (a) $x_0 = (0,0)$ (l'origine) et $r = 1$.
   - (b) $x_0 = (3,0)$ et $r = 1$ (rayon petit par rapport à la distance au centre).
   - (c) $x_0 = (3,0)$ et $r = 4$ (rayon grand par rapport à la distance au centre).
3. Cette distance d est-elle issue d'une norme ?

Exercice 2 *Une distance bornée sur $\mathbb{R}$*

On considère l'ensemble des réels $E = \mathbb{R}$. On définit l'application δ par :

$$\delta(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

1. Montrer que l'application $f : t \mapsto \frac{t}{1+t}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $f(a+b) \le f(a) + f(b)$.
2. En déduire que δ est bien une distance sur $\mathbb{R}$.
3. **Comparaison topologique :** Montrer que $\delta(x,y) \to 0$ si et seulement si $|x-y| \to 0$. Les suites convergentes pour δ sont-elles les mêmes que pour la distance usuelle ?
4. **Bornitude et Complétude :**
   - (a) Calculer le diamètre de $\mathbb{R}$ pour cette distance (c'est-à-dire $\sup_{x,y} \delta(x,y)$). L'espace est-il borné ?
   - (b) La suite $u_n = n$ est-elle de Cauchy pour la distance δ ? Est-elle convergente dans (E, δ) ?
   - (c) L'espace $(\mathbb{R}, \delta)$ est-il complet ?
5. Cette distance est-elle issue d'une norme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 *Topologie dans un espace discret*

Soit E un ensemble non vide quelconque. On munit E de la distance discrète définie par :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

1. Quelles sont les boules ouvertes $B(x,r)$ pour $r = 1/2$? Pour $r = 2$?
2. Montrer que tout singleton $\{x\}$ est un ouvert de E.
3. En déduire que toute partie de E est à la fois ouverte et fermée.
4. Quelles sont les parties compactes de (E,d) ?

2 Espaces vectoriels normés

Exercice 4

Soient N_1, N_2 deux normes sur un espace vectoriel E.

1. On note $B_1 = \{x \in E,\ N_1(x) \leq 1\}$ et $B_2 = \{x \in E,\ N_2(x) \leq 1\}$. Montrer
$$B_1 = B_2 \Rightarrow N_1 = N_2.$$
2. Même question avec les boules unités ouvertes.

Exercice 5

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

1. Soit $a, b \geq 0$ et $u, v > 0$, montrer que
$$a + b = 1 \Rightarrow \frac{1}{u+v} \leq \frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{v}.$$
2. Soit $f, g \in E$ avec $f, g > 0$. Montrer que
$$N((f+g)^{-1}) \leq \frac{N(f)^2 N(f^{-1}) + N(g)^2 N(g^{-1})}{(N(f)+N(g))^2}.$$
3. En déduire que
$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leq \max(N(f)N(f^{-1}), N(g)N(g^{-1})).$$

Exercice 6

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour une partie non vide A, et un point x de E on définit la distance de x à A par
$$D(x,A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

1. Montrer que la fonction distance $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = D(x,A)$, est continue.
2. Montrer que $\bar{A} = \{x \in E, \quad D(x,A) = 0\}$.

Exercice 7

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies, continûment dérivables sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0)=0$. On définit sur cet espace les deux normes suivantes : $N_1(f)=\|f\|_\infty$ et $N_2(f)=\|f'\|_\infty$

1. Montrer que $N_1(f)\leq N_2(f)$. En déduire que l'application identique de (E,N_2) vers (E,N_1) est continue.
2. A l'aide de la fonction $f_n=\frac{x^n}{n}$, montrer que l'application identique de (E,N_1) vers (E,N_2) n'est pas continue.

Exercice 8

Soient $(E_1,\|\cdot\|_1),(E_2,\|\cdot\|_2),(F,\|\cdot\|_F)$ trois espaces de Banach. On munit l'espace produit $E_1\times E_2$ de la norme $\|(x,y)\|_\infty=\max(\|x\|_1,\|y\|_2),\forall(x,y)\in E_1\times E_2$. Soit $B:E_1\times E_2\to F$ une application bilinéaire. Montrer que les 4 propositions suivantes sont équivalentes :

1. B est continue en tout point de $E_1\times E_2$.
2. B est continue en $(0,0)$.
3. $\exists K>0,\ \|B(x,y)\|_F\leq K\|x\|_1\|y\|_2,\ \forall(x,y)\in E_1\times E_2$.
4. $\exists K>0,\ \|B(x,y)\|_F\leq K,\ \forall(x,y)\in E_1\times E_2, \|x\|_1=1, \|y\|_2=1$.

Exercice 9

On munit $E=C([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ ($\|u\|_1=\int_0^1|u(t)|dt$ pour $u\in E$).
Pour $u\in E$ on pose :

$$Tu(x)=\int_0^x u(t)dt.$$

1. Montrer que $T\in\mathcal{L}(E)$.
2. Calculer $\|T\|$.

Exercice 10

Soient E et F des espaces vectoriels normés. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{L}(E,F)$ avec $T_n\to T$ dans $\mathcal{L}(E,F)$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset E$ telle que $x_n\to x$ dans E. Montrer qu'alors $T_n(x_n)\to T(x)$ dans F.

3 Compacité

Exercice 11

Déterminer, en justifiant, lesquels des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ ci-dessous sont compacts :

1. $\{(x,y),\ 2x^2+y^2=1\}$
2. $\{(x,y),\ xy<1\}$
3. $\{(x,y),\ e^x=\cos y\}$
4. $\{(x,y),\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$

Exercice 12

Soit A un compact d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Montrer qu'il existe deux points x et y tels que $\|x-y\| = \mathrm{diam}(A)$.

Exercice 13

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé , et A et B deux sous-ensembles disjoints de E, avec A fermé et B compact. Montrer qu'alors $d(A,B) > 0$ (on rappelle que $d(A,B) = \inf_{(x,y)\in A\times B} \|x-y\|$).

Exercice 14

Soit f continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles, telle qu'il existe $c > 0$ avec $|f(x)| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si K est un compact de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

4 Théorème du point fixe

Exercice 15

Montrer que le système $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 = \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{cases}$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}^2$.
Donner une approximation à 10^{-4} près de cette solution.

Exercice 16

On s'intéresse à la résolution numérique de l'équation $x = \cos(x)$ dans $\mathbb{R}$. On pose $f(x) = \cos(x)$.

1. Montrer que l'intervalle $I = [0,1]$ est stable par f (c'est-à-dire $f(I) \subset I$).
2. Montrer que f est contractante sur I. On notera k la constante de contraction et on l'estimera à l'aide du théorème des accroissements finis.
3. En déduire que l'équation admet une unique solution $x^* \in I$.
4. On définit la suite récurrente $u_0 = 0.5$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$.
   (a) Justifier que cette suite converge vers x^*.
   (b) À l'aide de l'estimation d'erreur vue en cours $|u_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$, déterminer un entier N suffisant pour garantir que u_N est une approximation de x^* à 10^{-3} près.

Exercice 17

Lorsqu'un espace vectoriel E est en outre muni d'une multiplication, l'application $N : E \to \mathbb{R}$ est dite norme multiplicative si N est une norme et si pour tout A, B de E, $N(A\cdot B) \leq N(A)N(B)$. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes. $A \in E$ se note $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

1. Montrer que $N_\infty(A) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$ définit une norme multiplicative sur E.
2. Montrer que $N_\infty(A) = \max\limits_{X\in\mathbb{R}^n,\ \|X\|_\infty = 1} \|AX\|_\infty$.
3. Soit $A \in E$ telle que $\forall 1 \leq i \leq n$, $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}|$ et D la matrice diagonale formée avec les éléments diagonaux de A. Soit aussi F un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On considère la suite des $X^p \in \mathbb{R}^n$ définie pour $p \geq 0$ par :
$$\begin{cases} X^0 = X_0 \in \mathbb{R}^n \\ X^{p+1} = (\mathbb{I} - D^{-1}A)X^p + D^{-1}F \end{cases}$$
Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Exercice 18

Soit f une application d'un compact K d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ dans lui-même, telle que pour tout x et y distincts de K on ait : $\|f(x)-f(y)\| < \|x-y\|$. Montrer que f a un unique point fixe (comparer avec les hypothèses du théorème du point fixe contractant). Indication : considérer l'application $x \mapsto \|f(x)-x\|$ de K dans $\mathbb{R}$ et remarquer que si $x \neq f(x)$, $\|f(x)-x\| > \|f(x)-f(f(x))\|$.

Exercice 19

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et C une partie compacte et convexe de E (c'est à dire que pour tous x, y, le segment $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda \in [0,1]\}$ est inclus dans C). Soit $f : C \to C$ une application lipschitzienne de constante 1.

1. Soit $a \in C$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n}(f(a) - f(x)) + f(x)$. Montrer que f_n est une application de C dans C et qu'elle possède un point fixe x_n.
2. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur C et, en observant la suite (x_n), en déduire que f possède un point fixe.

Exercice 20

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle qu'une application continue g de E dans E est dite contractante s'il existe $K \in]0,1[$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad \|g(x) - g(y)\| \leq K\|x - y\|.$$

On rappelle aussi que toute application contractante admet un unique point fixe. Soit f une application continue de E dans E telle qu'il existe un entier p tel que f^p soit contractante. On note x_0 le point fixe de f^p.

1. Montrer que tout point fixe de f est un point fixe de f^p.
2. Montrer que si x est un point fixe de f^p , il en est de même pour $f(x)$.
3. En déduire que x_0 est l'unique point fixe de f.