Variables aléatoires réelles

Semaine 2

Contents

Objectifs

Les objectifs de la séance sont d'appliquer les définitions liées aux lois de probabilités, fonction de répartition, densité de probabilité, calcul d'espérance, théorème de transfert, fonction génératrice des moments.

Exercice 1. Loi exponentielle

Soit $\lambda > 0$. On considère la fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ définie de la manière suivante

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0\,, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

la loi exponentielle modélise le temps d'attente d'un événement survenant au hasard avec une fréquence λ.

Question 1

- Vérifier que F possède les propriétés de la fonction de répartition d'une loi continue. Calculer la densité de probabilité associée à cette loi.

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre.

Raisonnement

Une fonction de répartition d'une loi continue doit être :

1. Croissante : $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pour $t > 0$ augmente, car $e^{-\lambda t}$ décroît, donc F(t) se grandit.
2. Bornée : $F(t) \to 0$ quand $t \to -\infty$ (car $F(t) = 0$ pour $t \leq 0$) et $F(t) \to 1$ quand $t \to \infty$ (car $e^{-\lambda t} \to 0$).
3. Continue à droite : $F(t)$ est continue donc bornée sur [0, a] pour $t > 0$, et à $t = 0$, $\lim_{h \to 0^+} F(h) = 0 = F(0)$.

La densité $f(t)$ est la dérivée de $F(t)$:

- Pour $t > 0$, $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, donc $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

- Pour $t \leq 0$, $F(t) = 0$, donc $f(t) = 0$.

- Effectuer $n = 1000$ tirages indépendants de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$. Représenter un histogramme pour l'échantillon correspondant. Superposer la courbe de la densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$ à cet histogramme.

Solution. Compléter le code suivant

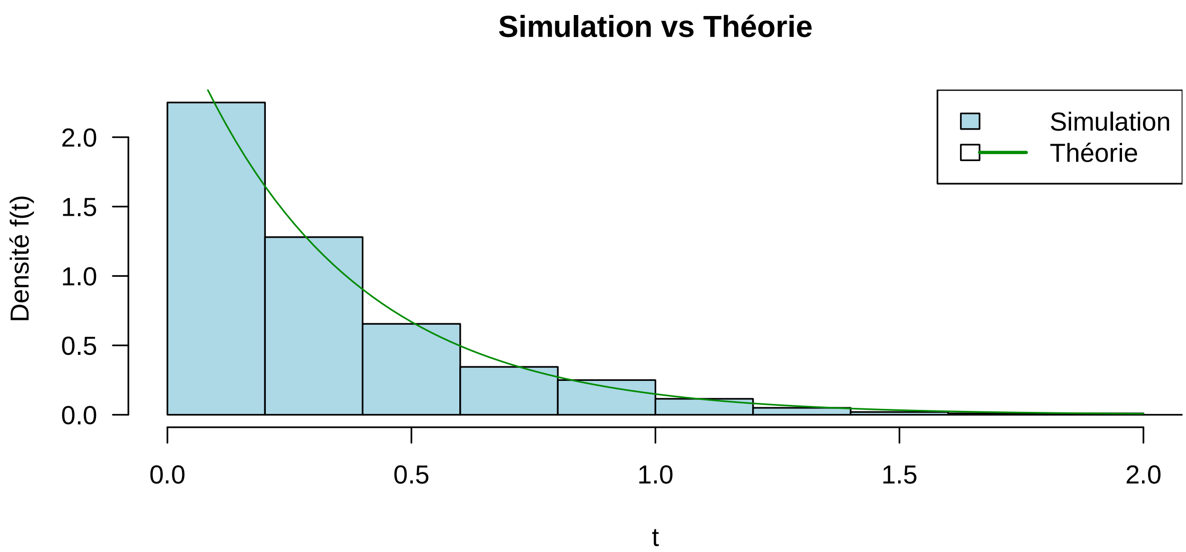
```r
 # taille de l'échantillon
 n = 1000
lambda = 3

# simulation : help(rexp)
#génère des nombres aléatoires selon la loi exp(lambda)
 x = rexp(n, rate=lambda)

 # histogramme :  help(hist)
 hist(x, col = "lightblue", nclass = 20, las = 1, prob = TRUE,
      main="Simulation vs Théorie", xlab ="t", ylab="Densité f(t)", xlim = c(0, 2))

 curve(dexp(x, rate=lambda), 0, 2, col = "green4", add = TRUE)

 legend("topright", c("Simulation", "Théorie"), fill=c("lightblue", NA),
        col= c(NA, "green4"), lwd =c(NA, 2))
```



Question 2

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Calculer la médiane de X, c'est à dire, le nombre m tel que $\mathrm{P}(X \leq m) = \frac{1}{2}$.

Vérifier le résultat pour l'échantillon simulé dans la question précédente.

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre. La vérification utilise la fonction `median`. Utiliser `+c` pour créer un bout de code.

Raisonnement

$$F_X(m) = P(X \leq m) = 0.5$$

$$\text{Si } m \leq 0 : F_X(m) = 0$$

$$\text{Si } m > 0 : F_X(m) = 1 - e^{-\lambda m} = 0.5$$

$$m = -\frac{\ln(0.5)}{3} = \frac{\ln(2)}{3}$$

```
median_theorique = log(2)/3
median_theorique
```

```
## [1] 0.2310491
```

```
median_simule = median(x)
median_simule
```

```
## [1] 0.2364354
```

Question 3

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur (0,1). Montrer que $X = F^{-1}(U) = -\ln(1-U)/\lambda$ suit la loi exponentielle de paramètre λ. Réciproquement, soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que $U = F(X)$ suit la loi uniforme sur (0,1).

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre.

Raisonnement

Prouvons $X = F^{-1}(U) = -\frac{\ln(1-U)}{\lambda}$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Notons que $X \in R^+$e $t \in R^+$.

$$P(X \leq t) = P(F^{-1}(U) \leq t) = P(-\frac{ln(1-U)}{\lambda} \leq t) = P(U \leq 1 - e^{-\lambda t})$$

Comme U est uniforme sur $(0,1)$, $P(U \leq u) = u$

Donc, $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. C'est bien la loi exponentielle.

Prouvons maintenant que $U = F(X)$ suit la loi uniforme sur $(0,1)$.

Notons que $U \in [0,1]$e $u \in [0,1]$.

$$P(U \leq u) = P(F(X) \leq u)$$

$$P(U < u) = P(F(X) < u) = P(X < F^{-1}(u)) = F[F^{-1}(u)] = u$$

Donc U suit une loi uniforme sur $(0,1)$.

Question 4

- Déduire de la question précédente une méthode de simulation d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ à partir d'une variable aléatoire de loi uniforme (simulée avec `runif`).

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre.

Raisonnement

Pour simuler une variable aléatoire X de loi $Exp(1)$, il suffit de simuler une variable aléatoire U de loi uniforme sur [0,1] et de poser $X = -ln(1-U)$.

- Pour un échantillon de loi uniforme de taille $n = 1000$, vérifier que la méthode semble correcte par un test graphique.

Solution. Compléter les codes et leurs commentaires ci-dessous.

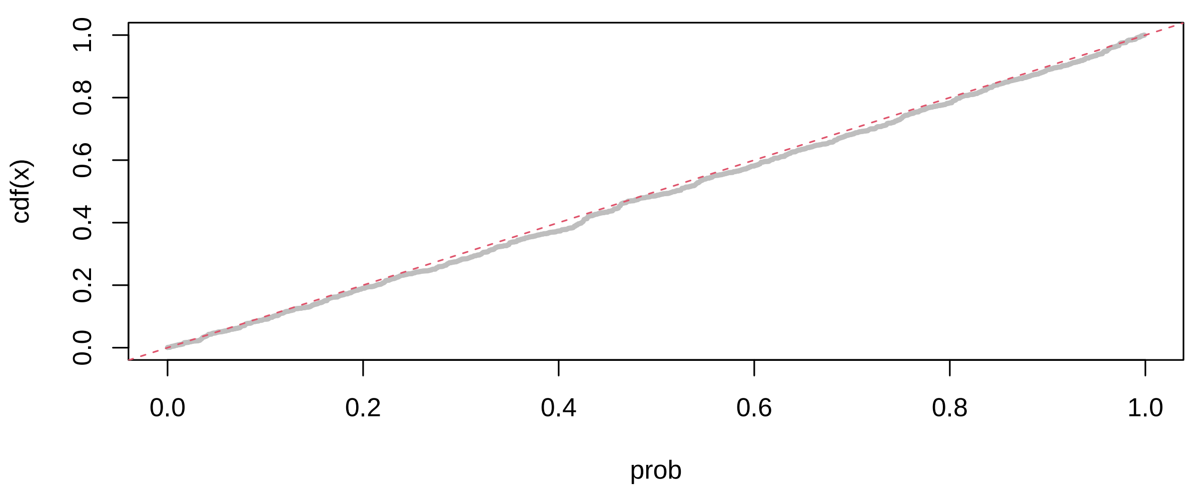
```r
n = 1000
# generation de 1000 tirages uniformes
# chaque nombre individuel a une probabilité 0
# mais les intervalles de même taille ont la même probabilité
u = runif(n)

# fonction de répartition de la loi Exp(1)
cdf <- function(x){
  1 - exp(-x) # F(x) = 1 - e^(- x) avec lambda=1
}

# transformation Loi uniforme à la loi exponentielle
  x = -log(1 - u) # X = -ln(1-U) pour lambda=1

# fonction de répartition empirique
prob = sapply(x, FUN = function(a) mean(x < a))

# comparaison des fonctions de répartition empirique et théorique
plot(prob, cdf(x), cex = .3, pch = 19, col = "grey")
abline(0,1, col = 2, lty = 2)
```



Question 5

- Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. Soit $t > 0$ et $S(t) = \mathrm{P}(X > t)$. Montrer que

$$-\ln S(t) = \lambda t\,.$$

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre.

Raisonnement

$$X \sim Exp(\lambda) S(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$

Donc, $-lnS(t) = \lambda t$

- En déduire une méthode graphique pour tester que la loi exponentielle est acceptable pour un échantillon sans en connaître le paramètre. Le graphique permet-il d'estimer la valeur inconnue ?

  Raisonnement

  - Oui, le graphique permet de vérifier si l'échantillon suit bien une loi exponentielle (droite approximative).
  - Oui, on peut estimer le paramètre en calculant la pente de la droite.

Solution. Compléter les codes et leurs commentaires ci-dessous.

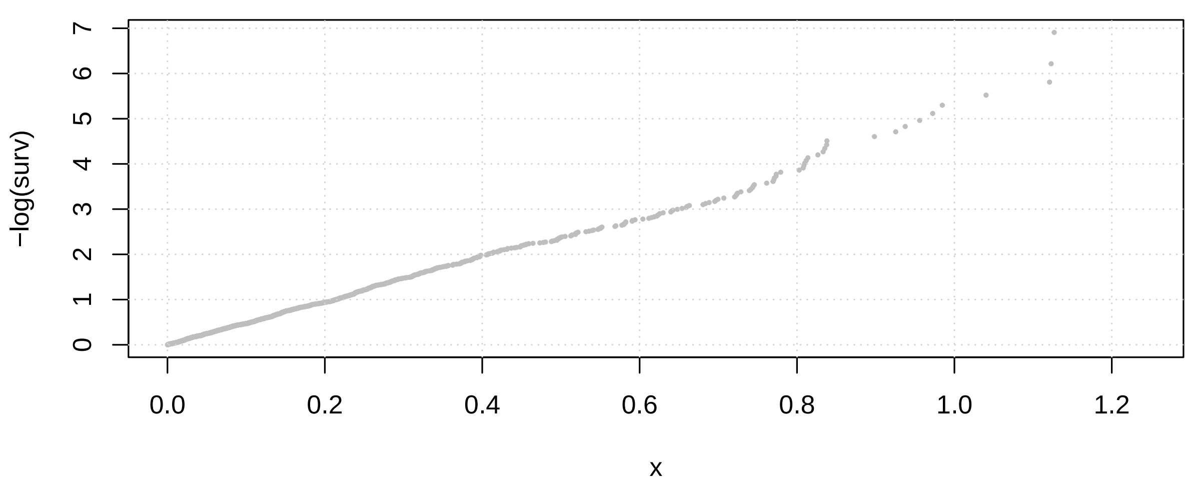
Fonction de survie calcule la probabilité que l'événement ne se soit pas encore produit à l'instant t.

```
set.seed(2)
# On simule une loi exponentielle de paramètre inconnu
# Génère 1000 tirages aléatoires d'une loi exponentielle avec un paramètre de taux aléatoire)

 x = rexp(n, sample(10, 1))

# que fait ce code etrange
 # sapply permet d'appliquer la fonction à toutes les valeurs de x
surv = sapply(x, FUN = function(a) mean(x > a))

# et celui-ci
#Ici, on utilise -log(surv) pour transformer la courbe exponentielle décroissante en
#droite pour faciliter l'analyse
plot(x, -log(surv), cex = .3, pch = 19, col = "grey")
grid()
```



Exercice 2

Considérons la variable aléatoire suivante

$$X = 1_{(U \leq 1/3)} V + 1_{(U > 2/3)} (1 + V),$$

pour U, V deux variables indépendantes de loi uniforme $\mathcal{U}(0, 1)$.

Question 1

Déterminer la fonction de répartition de la loi de X.

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre. On ne reportera que le résultat.

Raisonnement

$$X = \begin{cases} V & \text{si } U \leq \frac{1}{3}, \quad Donc, X \in [0,1] \\ 0 & \text{si } U \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \quad Donc, X = 0 \\ 1 + V & \text{si } U > \frac{2}{3}, \quad Donc, X \in [1,2] \end{cases}$$

$$F_x(x) = P(X \leq x)$$

$$= P(X \leq x \cap U \leq \frac{1}{3}) + P(X \leq x \cap \frac{1}{3} < U \leq \frac{2}{3}) + P(X \leq x \cap U > \frac{2}{3})$$

$$= P(X \leq x \mid U \leq \frac{1}{3}) P(U \leq \frac{1}{3}) + P(X \leq x \mid \frac{1}{3} < U \leq \frac{2}{3}) P(\frac{1}{3} < U \leq \frac{2}{3}) + P(X \leq x \mid U > \frac{2}{3}) P(U > \frac{2}{3})$$

$$= \frac{1}{3} P(X \leq x \mid U \leq \frac{1}{3}) + \frac{1}{3} P(X \leq x \mid \frac{1}{3} < U \leq \frac{2}{3}) + \frac{1}{3} P(X \leq x \mid U > \frac{2}{3})$$

On va découper l'équation en 3 parties:

1. Partie $U \leq \frac{1}{3}$:

$$P(X \leq x \mid U \leq \frac{1}{3}) = P(V \leq x), \quad V \in [0,1]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2. Partie $\frac{1}{3} < U \leq \frac{2}{3}$:

$$P(X \leq x \mid U \leq \frac{1}{3} < U \leq \frac{2}{3}) = P(0 \leq x)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3. Partie $U > \frac{2}{3}$:

$$P(X \leq x \mid U > \frac{2}{3}) = P(1 + V \leq x) = P(V \leq x - 1), \quad V \in [1, 2]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Maintenant, on peut calculer la CDF.

1. *Pour* $x < 0, \quad F_X(x) = 0 * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{3} + \ 0 * \frac{1}{3} = 0$
2. *Pour* $0 \leq x \leq 1, \quad F_X(x) = x * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3} + \ 0 * \frac{1}{3} = \frac{x+1}{3}$
3. *Pour* $1 \leq x \leq 2, \quad F_X(x) = 1 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3} + \ (x - 1) * \frac{1}{3} = \frac{x+1}{3}$, notons que la formule est continue comme pour $0 \leq x \leq 1$.
4. *Pour* $x > 2, \quad F_X(x) = 1 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3} + \ 1 * \frac{1}{3} = 1$

On peut conclure que la CDF est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x+1}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

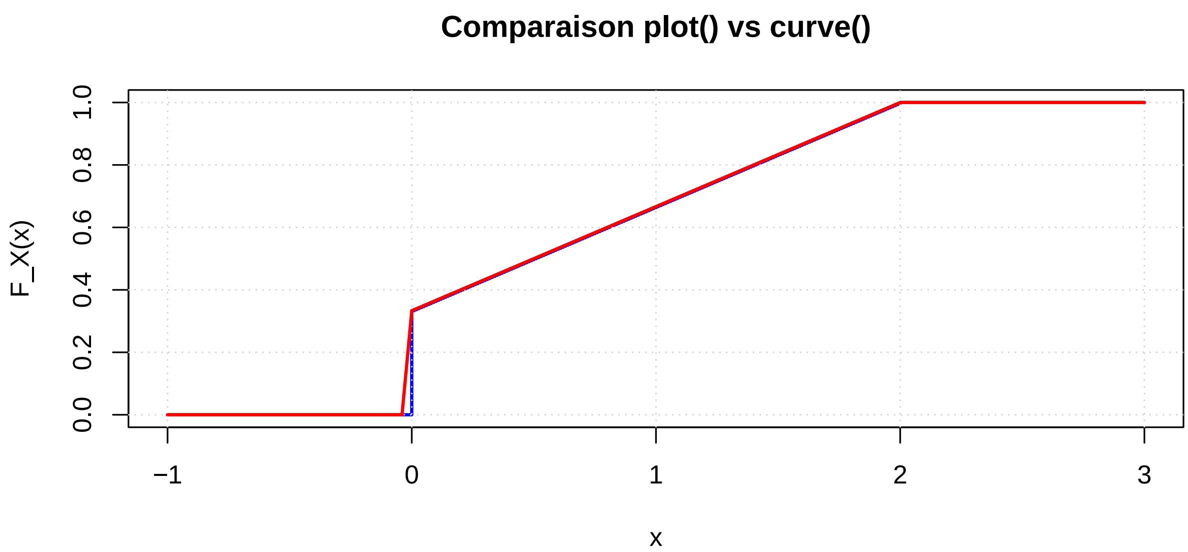
Question 2

Représenter graphiquement la fonction de répartition obtenue dans la question 1. La loi de la variable X admet elle une densité de probabilité ?

Solution. On peut utiliser la fonction `curve` ou la fonction `plot`.

```
F_X <- function(x){
  ifelse(x < 0, 0,
         ifelse(x>=0 & x<=2, (x + 1)/3 ,
                1))
}

x_vals <- seq(-1, 3, 0.01)
x_vals <- seq(-1, 3, 0.01)
plot(x_vals, F_X(x_vals), type="s", lwd=2,
     col="blue", xlab="x", ylab="F_X(x)",
     main="Comparaison plot() vs curve()")
grid()
curve(F_X(x), from=-1, to=3, lwd=2,
      col="red", add=TRUE)
```



Question 3

On étudie l'algorithme suivant

- tirer N dans $E = \{1, 2, 3\}$ de manière équiprobable,
- tirer U de loi uniforme $\mathcal{U}(0, 1)$,
- renvoyer $Y = 1_{(N=3)} + 1_{(N\neq 1)}U$.

En R, l'algorithme est implémenté (vectoriellement) par

```
n <- 1000
N <- sample(1:3, n, replace = TRUE)
y <- (N == 3) + (N != 1)*runif(n)
```

Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y obtenue par cet algorithme.

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre (formule des probabilités totales).

Raisonnement

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 1 \\ U & \text{si } N = 2 \\ 1 + U & \text{si } N = 3 \end{cases}$$

Comme $P(N = 1) = P(N = 2) = P(N = 3) = \frac{1}{3}$, on se retrouve exactement dans la même situation que dans la question 1, donc Y a la même loi que X.

Question 4

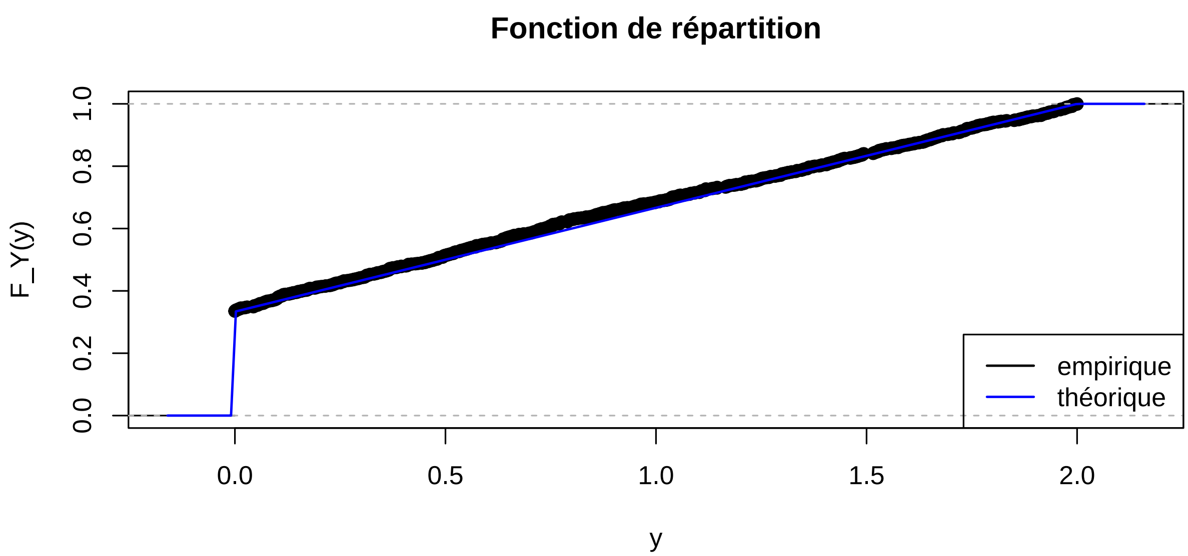
Vérifier empiriquement l'algorithme en comparant les fonctions de répartition théorique et empirique.

Solution. Commenter les codes suivants

```r
# Définition de la fonction de répartition théorique F_X
FX <- function(x){
  return((1/3 + x/3) * (0 <= x & x < 2) + (x >= 2))
}

# Tracé de la fonction de répartition empirique obtenue à partir de l'échantillon y
plot(ecdf(y), do.points=TRUE,
     main = "Fonction de répartition",
     xlab = "y",
     ylab = "F_Y(y)", ylim = c(0,1))

# Ajout de la fonction de répartition théorique F_X sur le même graphique
curve(FX(x), add=TRUE, col="blue", n = 201, lwd=1.5)
legend("bottomright", lty=1,
       col=c("black", "blue"),
       c("empirique", "théorique"), lwd=1.5)
```



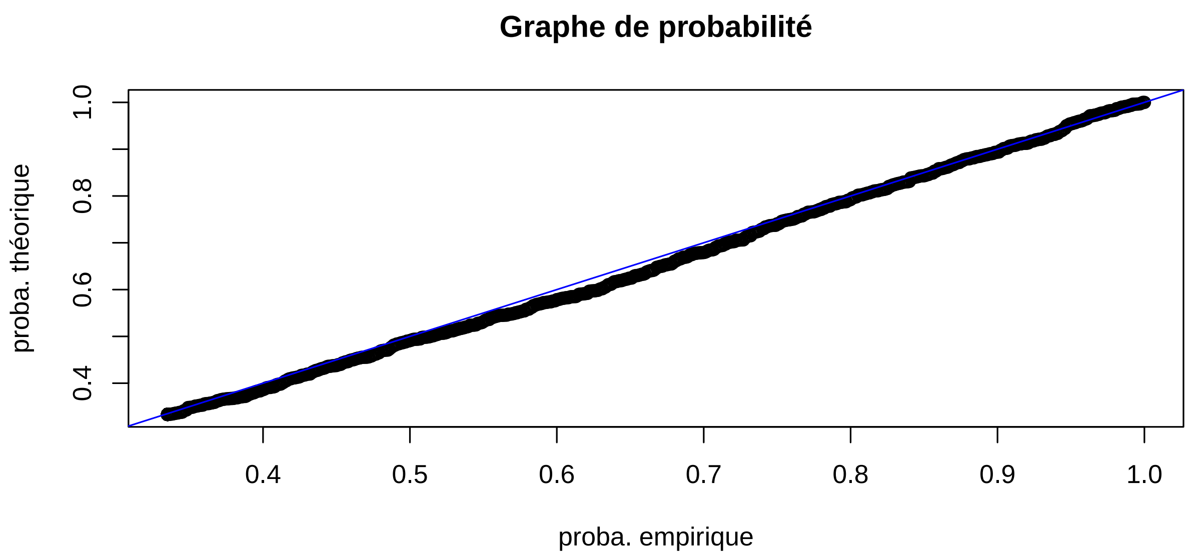
Question 5

Vérifier empiriquement la validité de l'algorithme en réalisant un graphe de probabilité : valeurs de la fonction de répartition théoriquement attendue en fonction des valeurs de la fonction de répartition empirique)

Solution. Compléter le code suivant. `ecdf` calcule la fonction de répartition empirique d'un échantillon, attention renvoie une fonction.

```r
plot(ecdf(y)(y),
     FX(y),
     main="Graphe de probabilité",
     xlab="proba. empirique",
     ylab="proba. théorique")

abline(0, 1, col="blue")
```



Espérance, formule de transfert, variance, somme de variables aléatoires

Exercice 3. Loi exponentielle

Question 1 (Dans maths.Rmd)

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre. On ne donnera que le résultat.

Raisonnement

$$Esprance, E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Pour calculer l'espérance, il suffit de résoudre l'intégrale de la fonction de densité $f(x)$ de la loi exponentielle, étant donné que:

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

Question 2

Calculer la variance de la variable aléatoire X.

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre. On ne donnera que le résultat.

$$Variance, Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

La variance est définie par l'ésperance avec la formule,

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= 2/\lambda^2 - (1/\lambda)^2 = 1/\lambda^2$$

En conclusion,

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 1/\lambda^2$$

Question 3

On suppose que la loi exponentielle représente le temps d'attente d'un événement de fréquence $\lambda = 1/10$, c'est à dire un événement toutes les 10 secondes. Vérifier empiriquement les résultats obtenus pour l'espérance et la variance à l'aide d'une simulation numérique.

Solution. On effectue 10000 tirages aléatoires. Compléter et commenter les codes suivants

```
n <- 10000
lambda <- .1

# Simulation de n variables aléatoires suivant une loi exponentielle de paramètre lambda
x <- rexp(n, lambda)

# Comparaison entre la moyenne empirique de l'échantillon et l'espérance théorique 1/lambda
c(mean(x), 1/lambda)
```

```
## [1] 10.07938 10.00000
```

```
# Comparaison entre la variance empirique de l'échantillon et la variance théorique 1/lambda^2
c(var(x), 1/lambda**2)
```

```
## [1] 102.0779 100.0000
```

Question 4

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/10$. Déterminer la densité de la loi de la variable $Z = X + Y$. Vérifier empiriquement le résultat obtenu à l'aide d'une simulation numérique.

Solution. On effectue 10000 tirages aléatoires. Compléter et commenter les codes suivants.

Raisonnement

Pour déterminer la densité de la loi de la variable $Z = X + Y$:

- La somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi $Exp(\lambda)$ est de loi gamma $Gamma(n, \lambda)$. Donc ici, Z est de loi $Gamma(2, \lambda)$.

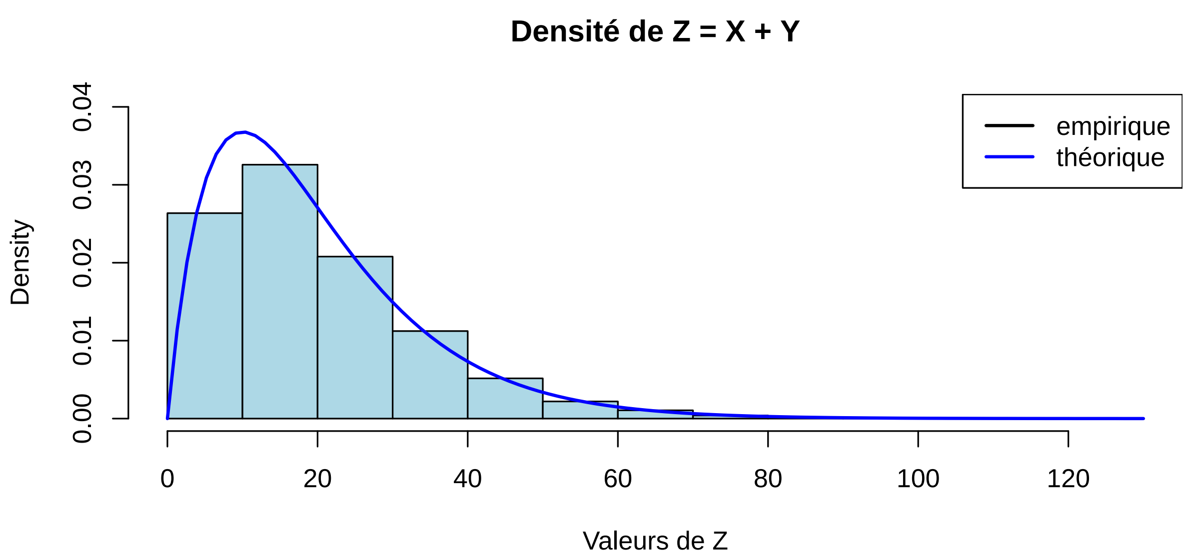
```r
n <- 10000

# Simulation de deux échantillons indépendants de loi exponentielle de paramètre lambda,
# puis construction de la variable Z = X + Y
lambda <- .1
x <- rexp(n, lambda)
y <- rexp(n, lambda)
z <- x + y

# Tracé de l'histogramme empirique (estimation de la densité de Z)
hist(z, prob = TRUE, col = "lightblue", ylim = c(0, 0.04),
     main = "Densité de Z = X + Y", xlab = "Valeurs de Z")

# Superposition de la densité théorique : Z suit une loi Gamma(shape=2, rate=lambda)
curve(dgamma(x, shape=2, rate=0.1),
      add=TRUE,
      col="blue", lwd=2)

legend("topright", lty=1, col=c("black", "blue"),
       lwd=2, c("empirique", "théorique"))
```



Question 5

Calculer la fonction génératrice des moments de la loi exponentielle de paramètre λ.
Retrouver les résultats précédents concernant l'espérance et la variance à l'aide de cette fonction.

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre. On ne donnera que le résultat.

Raisonnement

Si $X \sim Exp(\lambda)$, sa densité est :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

La FGM est :

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$MX\ (t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_o^{\infty} e^{-(\lambda - t)x} dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(\lambda-t)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

Donc,

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

En dérivant $M_X(t)$:

$$\text{Esperance, } \mathbb{E}[X] = M_X'(0) = \frac{1}{\lambda}, \text{Variance, } \mathrm{Var}(X) = M_X''(0) - \left(M_X'(0)\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Question 6

Soit n variables X_i indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que la loi de S_n est la loi Gamma(n, λ) de densité

$$f_{S_n}(s) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s}\, 1_{\mathbb{R}_+}(s) \quad s \in \mathbb{R}.$$

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre.

Raisonnement

Si $X1, ..., Xn$ sont indépendantes, alors :

$$M_{X_1+\cdots+X_n}\ (t) = M_{X_1}\ (t).M_{X_2}\ \ (t) \cdots M_{X_{n-1}}\ (t).M_{X_n}\ (t)$$

- Chaque $X_i \sim Exp(\lambda)$
- MGF d'un seul X_i :

$$M_{X_i}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

- Somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, alors, sa fonction génératrice des moments est :

$$M_{S_n}\ \ (t) = (M_X\ (t))^n = (\frac{\lambda}{\lambda - t})^n \quad t < \lambda$$

- On connaît la MGF d'une loi Gamma $Gamma(\alpha, \lambda)$:

$$M_Y(t) = (\frac{\lambda}{\lambda - t})^\alpha, \quad t < \lambda$$

S_n et Y ont la même MGF pour $\alpha = n$, donc S_n est de loi $Gamma(n, \lambda)$.

Question 7

Déduire de la question précédente la loi de la variable aléatoire $\overline{X}_n = S_n/n$. Retrouver une loi connue.

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre. On ne donnera que le résultat.

Raisonnement

$M_{\overline{X}}(t) = \mathbb{E}[e^{t\overline{X}}] = \mathbb{E}[e^{t\frac{S_n}{n}}] = M_{S_n}(\frac{t}{n}) = (\frac{n\lambda}{n\lambda - t})^n$ qui est la fonction génératrice de la loi $Gamma(n, \lambda n)$.

Question 8

Représenter graphiquement les densités des lois des variables $\overline{X}_5$, $\overline{X}_{10}$, ..., $\overline{X}_{25}$.

Solution. Commenter le code suivant. Que remarque-t-on ?

On peut remarquer que plus on prend de variables pour la moyenne $\overline{X}_n$, plus la densité devient concentréeautour de l'espérance $\frac{1}{\lambda}$ et ressemble à une cloche symétrique.

C'est une illustration du théorème central-limite : la moyenne empirique converge vers une loi normale quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

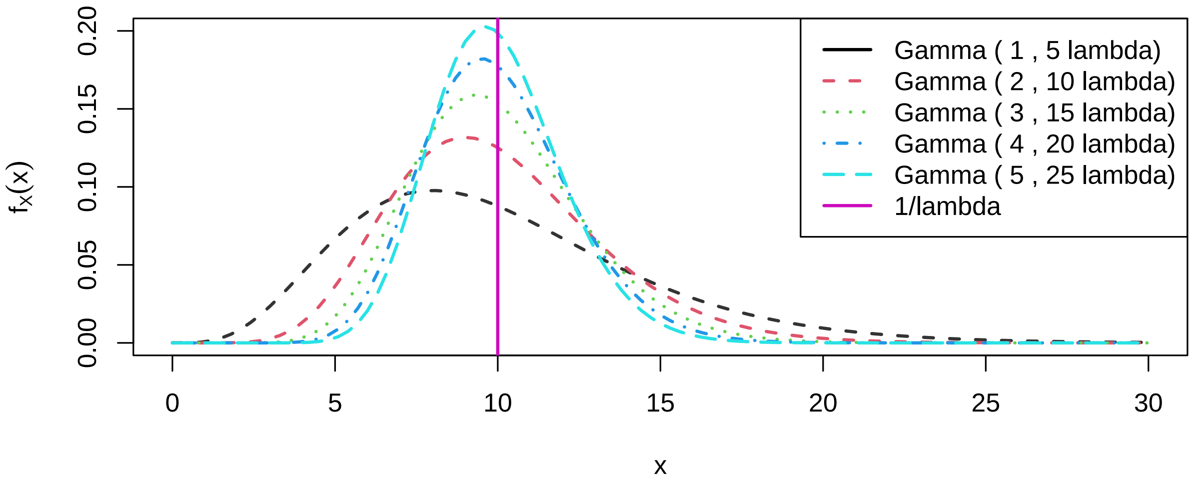
```r
lwd <- 2
lambda <- 0.1

# tracer la densité de Gamma pour n=5 (moyenne de 5 exponentielles)
curve(dgamma(x, 5, 5*lambda), from=0, to=3/lambda, ylim=c(0,2*lambda),
      lwd=lwd, ylab=expression(f[X](x)), lty = 2, col = "grey20")

# tracer les densités pour n=10, 15, 20, 25 et superposer sur la même figure
for(i in 2:5)
  curve(dgamma(x, 5*i, 5*i*lambda), lty=i, col=i, add=TRUE, lwd=lwd)

# tracer une ligne verticale à x=1/lambda (espérance d'une exponentielle)
abline(v=1/lambda, col=6, lwd=lwd)

# ajouter une légende pour identifier chaque courbe et la ligne de référence
legend("topright", lty=c(1:5, 1), col=1:6,
       c(paste("Gamma (", 1:5, ",", 5*(1:5), "lambda)"), "1/lambda"), lwd=lwd)
```



Exercice 4. Loi Normale

Question 1

Calculer la fonction génératrice des moments de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On rappelle que la densité de cette loi est donnée par la courbe de Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Indication : On utilise l'identité remarquable $x^2 - 2xt = (x-t)^2 - t^2$.

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre. On ne donnera que le résultat.

Question 2

Déduire de la question précédente les quatre premiers moments de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre. On ne donnera que le résultat.

Question 3

Soit $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ et Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On appelle loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ la loi de la variable aléatoire $X = m + \sigma Z$ pour $\sigma > 0$. Calculer la fonction génératrice des moments de la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, puis déterminer sa densité.

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre. On ne donnera que le résultat.

Question 4

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$ et $\mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$ respectivement et a_1, a_2 des scalaires. Démontrer que $a_1X + a_2Y$ est une variable aléatoire de loi normale de moyenne $a_1m_X + a_2m_Y$ et de variance $a_1^2\sigma_X^2 + a_2^2\sigma_Y^2$.

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre. O

Question 5

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(-2, 1)$ et $\mathcal{N}(1, 4)$ respectivement. Déterminer la loi de la variable $X + 2Y$. Vérifier le résultat de manière empirique à l'aide d'une expérience numérique utilisant 10000 tirages de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (`rnorm`).

Solution. La solution peut être rédigée sur une feuille de papier libre. Compléter et commenter le code suivant

```r
n <- 10000

# comment 1
x <- rnorm(n, -2, 1)
y <- rnorm(n, 1, 2)
z <- x + 2*y

# comment 2
hist(z, prob = TRUE, col = "pink",
     ylim = c(0, .11),
     xlim = c(-10, 10))

# comment 3 : la densité de z est celle d'une loi normale
#curve(dnorm(x, trouve_la_moyenne, et_l_ecart_type),
#      add=TRUE, col="blue", lwd=2)

legend("topright", lty=1,
       col=c("black", "blue"),
       lwd=2, c("empirique", "théorique"))
```