

# 高等数学I课后作业

- Schedule: 2021Fall
- Professor: ZHY
- From: JNU-智科院
- Version: 题目纯享版

- 高等数学I课后作业

- Week4

- 1-1

- 1(8)求函数自然定义域
      - 9(6) 求反函数
      - 11(5) 求复合函数, 并根据 $x_1, x_2$ 求出函数值

- 1-2

- 1(2)(8)求极限
      - 3

- Week5

- 加练

- 1
      - 2

- 1-3

- 4

- 1-4

- 1
      - 6

- Week7

- 加练

- 1

- 1-5

- 1.求极限

- 1-6

- 2(4)求极限
      - 4(4)证明:

- 1-6

- 4(2)证明 $x \rightarrow 0$ 时, 有
- Week8
  - 1-8
    - 3(1)间断点类型
    - 4
    - 3(3)(6).求极限
  - 4(5)(7)求极限
- Week9
  - 5
  - 总习题一
    - 9(6)求极限
  - 2-2
    - 7(8)求导
    - 10(2)求导
    - 11(9)求导
- Week10
  - 2-3
    - 1(9)(12)求二阶导数
    - 3(1)求二阶导数
  - 2-4
    - 2
    - 4(1)用对数求导法求函数导数
    - 8(2)(4)求参数方程二阶导数
- Week11
  - 2-5
    - 3(7)求微分
    - 4(8)填入式子使等号成立
  - 3-1
    - 10. 设 $a > b > 0$ , 证明:
  - 3-2
    - 1(3)(9)(13)(14)用洛必达求极限
- Week12
  - 3-3
    - 4. 求函数 $f(x) = \ln x$ 按 $(x - 2)$ 的幂展开的带有皮亚诺余项的 $n$ 阶泰勒公式
    - 6. 求函数 $f(x) = \tan x$ 带有皮亚诺余项的3阶麦克劳林公式
  - 3-4
    - 10(5)求函数拐点和凹凸区间
    - 13问 $a, b$ 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点

◦ Week13

▪ 3-5

- 1(4)求极值
- 9.问函数 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  ( $x \geq 0$ )何时取到最大值

▪ 3-7

- 2.求曲线 $y = \ln \sec x$ 在点 $(x, y)$ 处的曲率及曲率半径

▪ 总习题三

- 13.设 $a > 1$ ,  $f(x) = a^x - ax$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的驻点为 $X(a)$ .问 $a$ 为何值时,  $x(a)$ 最小, 并求出最小值

▪ 4-1

- 2(9)(18)(22)(26)求不定积分

◦ Week14

▪ 4-2

- 2(9)(18)(19)(29)(35)(38)(40)(43)求不定积分

▪ 4-3

- 10.  
 $\int \tan^2 x dx$
- 21.  
 $\int (\arcsin x)^2 dx$

◦ Week15

▪ 4-4

- 9.  
 $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + x)}$
- 10.  
 $\int \frac{1}{x^4 - 1} dx$
- 15.  
 $\int \frac{dx}{3 + \cos x}$
- 21.  
 $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx$

▪ 5-1

- 5.设 $a < b$ ,问 $a$ 、 $b$ 取什么值时, 积分

$\int_a^b (x - x^2) dx$ 取得最大值

- 11. 设  $f(x)$  在

0, 1

上连续, 证明

$$\int_0^1 f^2(x) dx$$

$\geq$

$$\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

- 5-2

- 8(8)(12)求定积分

◦ Week16

- 5-2

- 3. 求由

$$\int_0^y e^t dt +$$

$$\int_0^x \cos t dt = 0 \text{ 所确定的隐函数对 } x \text{ 的导数}$$

$$\frac{dy}{dx}$$

- 5(3)求导数

- 11(1)求极限

- 12. 求

$$\phi(x) =$$

$$\int_0^x f(t) dt \text{ 在}$$

0, 2

的表达式, 并讨论

$$\phi(x)$$

0, 2

内的连续性

- 5-3

- 1(7)(24)求定积分

- 7(4)(11)求定积分

◦ Week17-18

- 5-4

- 1(3)(8)判断反常积分收敛性, 若收敛, 计算反常积分其值

- 4. 计算反常积分

$$\int_0^1 \ln x dx$$

- 6-2

- 4.求抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点 $(p/2, p)$ 处的法线所围成的图形的面积
- 8(1)求曲线围成公共部分面积
- 21.设由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x=a, x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 $D_1$ , 设由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x=a, y=0$ 所围成的平面图形为 $D_2$ , 其中 $0 < a < 2$ .
- 28.求对数螺线  
 $\rho = e^{a\theta}$  相应于  
 $\theta = 0$   
 $\theta = \psi$   
 $\psi$  对应的一段弧长
- 总习题六
  - 6.设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过点 $(0,0)$ , 且当 $x$   
 $in$   
 $[0, 1]$   
 $y$   
 $geq 0$ . 试确定 $a, b, c$ 的值, 使得抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围成的图形  
 面积为 $4/9$ . 且使该图形绕 $x$ 轴旋转而成的旋转体体积最小.

## Week4

- 2021/9/23

### 1-1

#### 1(8)求函数自然定义域

$$y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$$

#### 9(6) 求反函数

$$y = \frac{2^x}{2^x + 1}$$

#### 11(5) 求复合函数, 并根据 $x_1, x_2$ 求出函数值

$$y = u^2, u = e^x, x_1 = 1, x_2 = -1$$

## 1-2

### 1(2)(8)求极限

$$(2): (-1)^n \frac{1}{n}$$

$$(8): [(-1)^n + 1] \frac{n+1}{n}$$

## 3

3. 下列关于数列  $\{x_n\}$  的极限是  $a$  的定义, 哪些是对的, 哪些是错的? 如果是对的, 试说明理由; 如果是错的, 试给出一个反例.

(1) 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 不等式  $x_n - a < \varepsilon$  成立;

(2) 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 有无穷多项  $x_n$ , 使不等式  $|x_n - a| < \varepsilon$  成立;

(3) 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 不等式  $|x_n - a| < c\varepsilon$  成立, 其中  $c$  为某个正常数;

(4) 对于任意给定的  $m \in \mathbf{N}_+$ , 存在  $N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 不等式  $|x_n - a| < \frac{1}{m}$  成立.

## Week5

• 2021/9/27

## 加练

### 1

设函数  $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  存在, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 2

设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x} = 2$ , 则去心邻域正负性为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

## 1-3

### 4

求  $f(x) = \frac{x}{x}$ ,  $\phi(x) = \frac{|x|}{x}$ , 当  $x \rightarrow 0$  时的左右极限, 并说明他们在  $x \rightarrow 0$  时的极限是否存在

## 1-4

### 1

两个无穷小的商是否一定是无穷小，举例说明

### 6

函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内否有界？这个函数是否为 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大，为什么？

## Week7

- 2021/10/11

## 加练

### 1

设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ , 则下列正确的是

$$A. a_n < b_n, n \in N+, B. b_n < c_n, n \in N+$$

$$C. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n \text{ 不存在}, D. \lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n \text{ 不存在}$$

## 1-5

### 1.求极限

$$(5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

## 1-6

### 2(4)求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx}, k \text{ 为正整数}$$

### 4(4)证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1$$

## 1-6

### 4(2)证明 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$$

## Week8

- 2021/10/18

## 1-8

### 3(1)间断点类型

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, x = 1, x = 2$$

## 4

讨论函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$  的连续性, 若有间断点, 则判别其类型

### 3(3)(6).求极限

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \ln(2\cos 2x)$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin x - \sin \alpha}{x - \alpha}$$



## 4(5)(7)求极限

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

## Week9

- 2021/10/25

### 5

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,  $a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < b (n \geq 3)$ , 则在 $(x_1, x_n)$ 内至少有一点 $\epsilon$ , 使 $f(\epsilon) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$

## 总习题一

### 9(6)求极限

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$$

### 2-2

### 7(8)求导

$$y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

### 10(2)求导

$$y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$$

$$= \sin 2x (f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x))$$

### 11(9)求导

$$y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}$$

# Week10

- 2021/11/1

## 2-3

### 1(9)(12)求二阶导数

$$(9)y = (1 + x^2)\arctan x$$

$$(12)y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

### 3(1)求二阶导数

$$(1)y = f(x^2)$$

## 2-4

### 2

求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程和法线方程

### 4(1)用对数求导法求函数导数

$$y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$

### 8(2)(4)求参数方程二阶导数

$$(2)\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$$

# Week11

- 2021/11/8

## 2-5

### 3(7)求微分

$$y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$$

### 4(8)填入式子使等号成立

$$d() = \sec^2 3x dx$$

## 3-1

10. 设  $a > b > 0$ , 证明:

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

## 3-2

### 1(3)(9)(13)(14)用洛必达求极限

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a}{x} \right)^x$$

## Week12

- 2021/11/15

### 3-3

4.求函数 $f(x) = \ln x$ 按 $(x - 2)$ 的幂展开的带有皮亚诺余项的n阶泰勒公式

6.求函数 $f(x) = \tan x$ 带有皮亚诺余项的3阶麦克劳林公式

### 3-4

10(5)求函数拐点和凹凸区间

$$y = e^{\arctan x}$$

13问a,b为何值时, 点(1,3)为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点

## Week13

- 2021/11/22

### 3-5

1(4)求极值

$$y = x + \sqrt{1 - x}$$

9.问函数 $y = \frac{x}{x^2+1} (x \geq 0)$ 何时取到最大值

3-7

2.求曲线 $y = \ln \sec x$ 在点 $(x, y)$ 处的曲率及曲率半径

## 总习题三

13.设 $a > 1$ ,  $f(x) = a^x - ax$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的驻点为 $X(a)$ .问 $a$ 为何值时,  $x(a)$ 最小, 并求出最小值

4-1

2(9)(18)(22)(26)求不定积分

$$(9) \int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$$

$$(18) \int \sec x (\sec x - \tan x) dx$$

$$(22) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$(26) \int \frac{3x^4 + 2x^2}{x^2 + 1} dx$$

## Week14

- 2021/11/29

4-2

2(9)(18)(19)(29)(35)(38)(40)(43)求不定积分

$$(9) \int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}} dx$$

$$(18) \int \frac{10^{2\arctan x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(19) \int \tan \sqrt{1+x^2} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(29) \int \tan^3 x \sec x dx$$

$$(35) \int \frac{x}{x^2-x-2} dx$$

$$(38) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$(40) \int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$$

$$(43) \int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx$$

**4-3**

$$10. \int x \tan^2 x dx$$

$$21. \int (\arcsin x)^2 dx$$

**Week15**

- 2021/12/06

## 4-4

$$9. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$$

$$10. \int \frac{1}{x^4-1} dx$$

$$15. \int \frac{dx}{3+\cos x}$$

$$21. \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx$$

## 5-1

5. 设  $a < b$ , 问  $a$ 、 $b$  取什么值时, 积分  $\int_a^b (x - x^2) dx$  取得最大值

11. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明  $\int_0^1 f^2(x) dx \geq (\int_0^1 f(x) dx)^2$

## 5-2

8(8)(12) 求定积分

$$(8) \int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x+1} dx$$

$$(12) \int_0^2 f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2, & x > 1 \end{cases}$$

## Week16

- 2021/12/13

## 5-2

3. 求由  $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$  所确定的隐函数对  $x$  的导数  $\frac{dy}{dx}$

5(3) 求导数

$$\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$$

## 11(1)求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$$

12.求 $\phi(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $[0,2]$ 的表达式, 并讨论 $\phi(x)$ 在 $[0,2]$ 内的连续性

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1) \\ x, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

## 5-3

### 1(7)(24)求定积分

$$(7) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8-2y^2} dy$$

$$(24) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$$

### 7(4)(11)求定积分

$$(4) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$$

$$(11) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$$

## Week17-18

- 2021/12/20

## 5-4

1(3)(8)判断反常积分收敛性, 若收敛, 计算反常积分其值

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx, (a>0)$$

$$(8) \int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$$



4.计算反常积分  $\int_0^1 \ln x dx$

6-2

4.求抛物线  $y^2 = 2px$  及其在点  $(p/2, p)$  处的法线所围成的图形的面积

8(1)求曲线围成公共部分面积

$$\rho = 3\cos\theta \text{ 及 } \rho = 1 + \cos\theta$$

21.设由抛物线  $y = 2x^2$  和直线  $x=a, x=2$  及  $y=0$  所围成的平面图形为  $D_1$ , 设由抛物线  $y = 2x^2$  和直线  $x=a, y=0$  所围成的平面图形为  $D_2$ , 其中  $0 < a < 2$ .

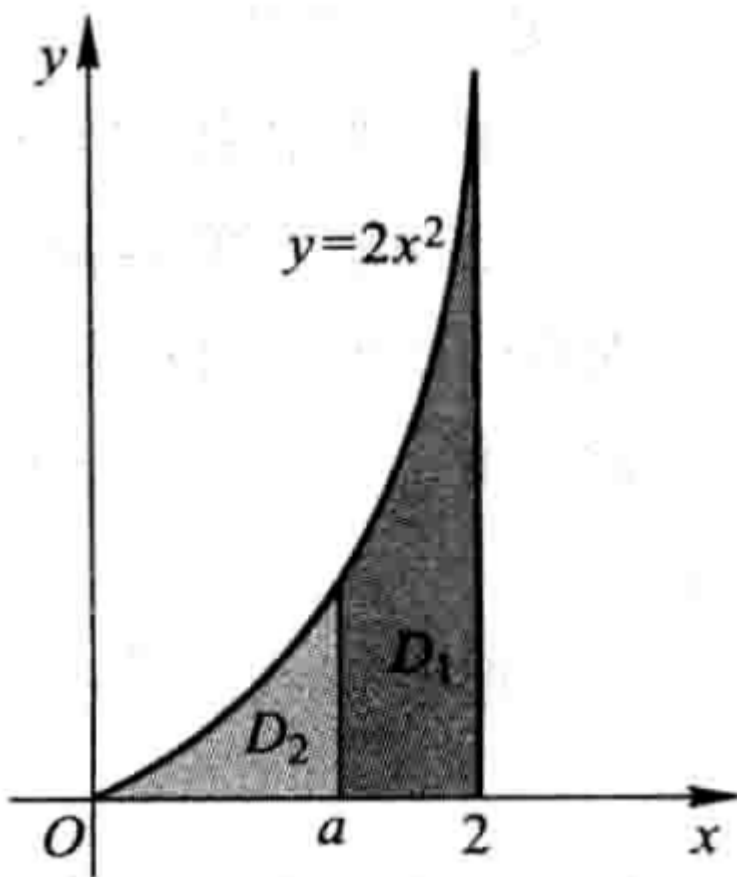


图 6-24

(1)求  $D_1$  绕  $x$  轴旋转而成的旋转体体积  $V_1$ ,  $D_2$  绕  $y$  轴旋转而成的旋转体体积  $V_2$ ;

(2)问当  $a$  为何值时,  $V_1 + V_2$  取得最大值, 求这个最大值

28.求对数螺线 $\rho = e^{a\theta}$ 相应于 $0 \leq \theta \leq \psi$ 对应的一段弧长

## 总习题六

6.设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过点 $(0,0)$ ,且当 $x \in [0,1]$ 时,  $y \geq 0$ .试确定 $a, b, c$ 的值, 使得抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围成的图形面积为 $4/9$ .且使该图形绕 $x$ 轴旋转而成的旋转体体积最小.