一、填空题（共 14 小题，15 个空，每空 3 分，共 45 分）

1. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln\left(1+x^3y^4\right)}{y^2\left[1-\cos(xy)\right]}=$ ____

2. 方程 $y''-8y'+16y=e^{4x}$ 对应的齐次方程通解为________；

非齐特解形式设为______

3. 已知 $f(x)=\int_1^{2x}f\left(\dfrac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+2x-3$，则 $f(x)=$ _______

4. 设函数 $f(u)$ 可微，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分

$dz=$_______

5. 函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $P(1,1,2)$处方向导数的最大值为

____

6. 函数 $z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$ 的极小值点是_____

7. 曲线 $\begin{cases}x-y+z=2\\ z=x^2+y^2\end{cases}$ 在点（1, 1, 2）处的法平面方程为________

8. 交换积分顺序 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=$

____

9. 设 $xy^2\iint\limits_D f(x,y)dxdy=f(x,y)+1$. 函数 $f(x,y)$ 在区域 $D:0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1$ 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$______

10. 设 $\Sigma: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 取下侧，则 $\iint_\Sigma\dfrac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=$_____

11. 设一质点在力 $\vec{F}=(-y,x)$ 作用下，在平面上沿 O(0,0)，A(0,3)，B(2,0) 构成的三角形的边 L 依顺时针方向从原点回 O 到原点 O，则力 $\vec{F}$ 所做的功为_____

12. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的和为____

13. 函数 $f(x)=3^x$ 展成 $x-2$ 的幂级数为 __________

14. 函数 $f(x)=\pi x+x^2\ \ (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶展开式中，其系数 $b_5=$ ____

二、单选题（共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分

1．方程 $x^2+y^2-2x+4y=0$ 在空间的轨迹是（　　　）

（A）球面；　　（B）椭圆抛物面；　　（C）圆；　　（D）圆柱面

2. 若非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$，则必有（　　　）.

(A) $\vec{a},\vec{b}$ 平行；　(B) $\vec{a},\vec{b}$ 垂直；　(C) $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$；　(D) $\vec{a}=\vec{b}$.

3. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^4)^2}$（　　　）.

(A) 等于 0；　(B) 等于 1；　(C) 等于 2；　(D) 不存在.

4. 设 $z=\dfrac{y}{f(x^2+y^2)}$，其中 $f(u)$ 可微，则 $\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（　　　）

(A) $-\dfrac{z}{y}$；　(B) $\dfrac{z}{y}$；　(C) $\dfrac{z}{y^2}$；　(D) $-\dfrac{z}{y^2}$.

5. 曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上与 $2x+2y+z=0$ 垂直的的法线方程为（　　）

(A) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$；　(B) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{1}$；

(C) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$；　(D) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{1}$.

6. 已知 $y=f(x)$ 在 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，其中 $\Delta x\to0$ 时 α 是比 Δx 高阶的无穷小，且 $f(0)=\pi$. 则 $f(1)=$（　　　）

(A) π；　(B) 2π；　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$；　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

7. 设 y_1,y_2,y_3 是微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的三个线性无关的解，C_1，C_2 是任意常数，则 $y=C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$（　　　）

(A) 是此方程的解，但不是它的通解；　(B) 不是此方程的解；

(C) 是此方程的通解；　(D) 是此方程的特解.

8. 二元函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 可微的一个充分条件是（　　）.

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ 且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$;

(B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$；

(C) $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在；

(D) $\lim\limits_{x\to 0}f_x'(x,0)=f_x'(0,0)$ 且 $\lim\limits_{y\to 0}f_y'(0,y)=f_y'(0,0)$.

9. 设 $D: x^2+y^2\le 1$. 则 $\iint_D (x-y)^2\,\mathrm{d}\sigma=$ (　　　)

(A) π；　　(B) $\dfrac{1}{3}\pi$；　　(C) $\dfrac{1}{2}\pi$；　　(D) $\dfrac{1}{4}\pi$.

10. 下列展开 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(z)dv$, $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2z$ 成累次积分中错误的是(　　)

(A) "三次积分法" $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}f(z)dz$;

(B) "先二后一法" $I=\int_0^2 f(z)dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z-z^2}}rdr$;

(C) "柱坐标法" $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}}f(z)dz$;

(D) "球坐标法" $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}f(r\cos\varphi)r^2dr$

11. 设 $\Sigma: x-y+z=1$ 在第一卦限取上侧，则把 $\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 化成对面积的曲面积分为（　　　）

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(-P+Q-R)\,\mathrm{d}S$;　　(B) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(P+Q-R)\,\mathrm{d}S$

(C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(P-Q+R)\,\mathrm{d}S$;;　　(D) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(P+Q+R)\,\mathrm{d}S$

12. 设曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=\dfrac{3}{2}\end{cases}$，则 $\oint\limits_\Gamma(2yz+2xz+2xy)ds=$ （　　）

(A) π； (B) $\frac{5}{4}\pi$； (C) $\frac{3}{4}\pi$； (D) $\frac{1}{4}\pi$.

13. 设$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n a_n$收敛，则两个级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n}{n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性为（ ）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n}{n^2}$条件收敛且$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛； (B)两个都条件收敛，

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n}{n^2}$绝对收敛且$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛； (D)两个都绝对收敛.

14. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=3$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=6$. 则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=$ （ ）

(A) 9； (B) 12； (C) 15； (D) 18.

15. 设$\mathbf{grad}\,u(x,y)=(x^2+2xy^2,\ kx^2y-3y^2)$，则常数$k$和一个$u(x,y)$是（ ）

(A) $k=2$, $u(x,y)=x^3+x^2y^2-y^3$； (B) $k=4$, $u(x,y)=x^3+x^2y^2-y^3$；

(C) $k=2$, $u(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y^2-y^3$； (D) $k=4$, $u(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y^2-y^3$

三、计算题（共 2 小题, 每小题 10 分，共 20 分)

1. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$的和函数.

2. 在位于第一卦限的球面$x^2+y^2+z^2=5R^2$ $(R>0)$上求一点M, 使得函数$u=\ln(xyz^3)$在该点取得最大值.

四、应用题（共 1 小题，共 5 分）

1. 计算$I=\iint_{\Sigma}xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+zx^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 其中 Σ 由圆柱面 $x^2+y^2=1$介于 $0\le z\le 3+x^2+y^2$ 间的部分取外侧，和椭圆抛物面 $z=3+x^2+y^2$ 含在 $x^2+y^2=1$内的部分取上侧两部分组成.

一、2； $y=(c_1+c_2x)e^{4x}$ $y^*=Ax^2e^{4x}$； $-1-e^{2x-1}$ $4dx-2dy$

$\left|grad\ u|_P\right|=\left|(-1,0,11)\right|=\sqrt{122}$ $(2,2)$ $x-3y-4z+10=0$

$\int_0^1 dy\int_y^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$ $-\frac{6}{5}$ $-2\pi R^2$ $\oint_L -ydx+xdy=-6$ 1

$9\sum_{n=0}^{\infty}(\ln 3)^n\frac{(x-2)^n}{n!},(-\infty<x<+\infty)$ $\frac{2\pi}{5}$

二、

题	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
答案	D	B	D	C	A	D	C	B	C	A	C	B	A	C	C

15. 解 1： $gradu=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=x^2+2xy^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=kx^2y-3y^2$

$\because \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xy,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=2kxy$ 是多元初等函数， $\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 连续，故相等

$k=2,\quad du(x,y)=(x^2+2xy^2)dx+(2x^2y-3y^2)dy$

$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^2+2xy^2)dx+(2x^2y-3y^2)dy$

$=\int_0^x x^2dx+\int_0^y(2x^2y-3y^2)dy=\frac{1}{3}x^3+x^2y^2-y^3+C$

解 2： $gradu=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=x^2+2xy^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x^2y-3y^2$

$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2+2xy^2\Rightarrow u=\frac{1}{3}x^3+x^2y^2+C(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{3}x^3+x^2y^2+C(y)\right]=2x^2y+C'(y)=2x^2y-3y^2$

$\Rightarrow C'(y)=-3y^2\Rightarrow C(y)=-y^3+C$， $\therefore\quad u(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y^2-y^3+C$

三、1. 解： $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+1)}=1,$

$S(x)=-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\cdots,\quad x\in(-1,1)$

$$S'(x)=-1+x-x^2+x^3-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\frac{-1}{1+x},\quad x\in(-1,1)$$

$$\Rightarrow\ S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(x)dx==-\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=-\ln(1+x),\quad x\in(-1,1)$$

x=1 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$收敛，$x$=-1 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}=-\ln(1+x),\quad(-1<x\le 1)$$

2. 解：$F=\ln(xyz^3)+\lambda(x^2+y^2+z^2-5R^2)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=\dfrac{3}{z}+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2-5R^2=0\end{cases}\Rightarrow \text{得到唯一驻点：}x=y=R,z=\sqrt{3}R$$

由题意点$(R,R,\sqrt{3}R)$就是 u 的最大值点.

四、解：圆柱面与椭圆抛物面的交线在 z=4 的平面上，在 xy 面上的投影是圆 $x^2+y^2=1$。

作辅助面$\Sigma_1: z=0,\ D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，取下侧。由 Gauss 公式得：

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$
$$=\iiint_{\Omega}(z+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma_1}xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+zx^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

而 z=0 垂直于 yz，zx 面，故$\iint_{\Sigma_1}xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma_1}yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=0,$

$$I=\iiint_{\Omega}(z+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{D_{xy}}0\cdot x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}(z+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

用柱坐标法

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{3+r^2}(z+r^2)\,\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1 r\left(\frac{1}{2}z^2+r^2z\right)\Bigg|_0^{3+r^2}\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\int_0^1 r\left(\frac{1}{2}(3+r^2)^2 + r^2(3+r^2)\right)\mathrm{d}\,r = 2\pi\int_0^1 (\frac{9}{2}r + 6r^3 + \frac{3}{2}r^5)\,\mathrm{d}\,r = 8\pi$$