题　号	一	二	三	四	五	总　　分
得　分						

得分	评阅人

一、选择题（共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分）

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln\left(1+x^2y^2\right)}{xy\left(x^2+y^2\right)}$ （　　）

(A) 等于 0　　(B) 等于∞　　(C) 等于1　　(D) 不存在

2. 考虑二元函数的下列 4 条性质：则有(　　).

①$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续；　②$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数连续；

③$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微；　④$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数存在。

(A) ②⇒③⇒①，(B) ③⇒②⇒①，(C) ③⇒④⇒①，(D) ③⇒①⇒ ④

3. 设$f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则$F'(2)=$(　　).

(A) $2f(2)$；　(B) $f(2)$；　(C) $-f(2)$；　(D) 0

4. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$ （　　）

(A) 绝对收敛；　(B) 条件收敛；　(C) 发散；　(D) 发散且一般项不收敛于 0

5. 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}x^n$ 的收敛半径为(　　)

(A) e^2　　(B) $1/e^2$　　(C) $1/e$　　(D) e

6. 方程$y''-3y'+2y=e^x\cos 2x$的一个特解形式是 (　　).

(A) $y=Ae^x\cos 2x$；　　(B) $y=Axe^x\cos 2x+Bxe^x\sin 2x$；

(C) $y=Ae^x\cos 2x+Be^x\sin 2x$；　(D) $y=Ax^2e^x\cos 2x+Bx^2e^x\sin 2x$.

7. 已知方程$x^2y''+xy'-y=0$的一个特解为$y=x$，于是方程的通解为(　　).

(A) $y=C_1x+C_2x^2$；(B) $y=C_1x+C_2\dfrac{1}{x}$；(C) $y=C_1x+C_2e^x$；(D) $y=C_1x+C_2e^{-x}$.

8. 设$f(x)$是以2π为周期的函数，且$f(x)=\begin{cases}2, & -\pi\le x\le 0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$；$S(x)$为$f(x)$傅

立叶级数的和函数，则 $S(8\pi)=$（　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) 2

得分	评阅人

二、填空题（共 7 小题 8 个空，每空 3 分，共 24 分）

1. 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 的切线方程为___________

2. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1\ ,\ 2\ ,-2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad}\ u\big|_M=$_________；在点 M 处沿 z 轴方向的方向导数为 _____

3. 设空间区域 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成，则 $\iiint\limits_{\Omega} x^3y^2z dv=$__

4．设 C 是由极坐标系下曲线: $r=a,\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s=$______

5. 若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ $(0<h<a)$ 截出的上下两部分，则 $\iint_\Sigma \dfrac{\mathrm{d}S}{z}=$____

6. 已知 $\int_L \left[e^x\cos y+yf(x)\right]\mathrm{d}x+\left(x^3-e^x\sin y\right)dy$ 与路径无关，则 $f(x)=$____

7. 函数 $\ln(1-x)$ 展开成 x 的幂级数为_________

得分	评阅人

三、计算题（共 6 小题，每小题 8 分，共 48 分）

1. 求过直线 $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

2. $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f,F 都有连续的一阶偏导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

3. 计算 $I=\int_L\left(x^2-y\right)dx+\left(y^2-x\right)dy$，其中 L 是沿逆时针方向以原点为中心，半径

为a的上半圆周.

4. $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，　D：$x^2+y^2\leqslant 1, x+y\geqslant 1$.

5. 计算$\iint\limits_\Sigma \left(z^2+x\right)dydz - zdxdy$，其中$\Sigma$是$z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$介$z=0$于及$z=2$之间的部分的下侧。

6. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}$的收敛域及和函数。

得分	评阅人

四、应用题（共 1 小题，共 10 分）

求旋转抛物面$z=x^2+y^2$与平面$x+y-2z-4=0$之间的最短距离

一、DABBCCBB

二、$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$　　$\dfrac{2}{9}(1\ ,\ 2\ ,\ -2)$　　$\dfrac{-4}{9}$　　0　　$\dfrac{\pi}{4}ae^{a}$　　0　　$3x^2$

$-\left(x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\cdots+\dfrac{1}{n}x^n+\cdots\right)(-1\le x<1)$

三、1. 解：过直线$\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$的平面束为$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$

其法向量为$\overrightarrow{n_1}=\{1+\lambda\ ,\ 5\ ,\ 1-\lambda\}$

已知平面的法向量为$\vec{n}=\{1\ ,\ -4\ ,\ -8\}$

选择λ使$\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{|\ n\cdot n_1|}{|\ n\ ||\ n_1|}$，得$\lambda=-\dfrac{3}{4}$

所求平面$x+20y+7z-12=0$

2. 解：分别在各方程两端对x求导，得

$-xf'\cdot y'+z'=f+xf'$，　$F_y\cdot y'+F_z\cdot z'=-F_x$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix} -xf' & f+xf' \\ F_y & -F_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -xf' & 1 \\ F_y & F_z \end{vmatrix}}=\frac{(f+xf')F_y-xf'\cdot F_x}{F_y+xf'\cdot F_z}$$

3. 解：$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1$，故路径无关。

$$I=\int_{\overline{AB}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y=\int_a^{-a}x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}a^3$$

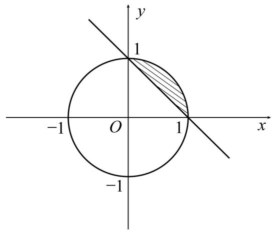
解法 2：

$$I=\oint_{L+\overline{BA}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D 0\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}x^2dx=-\frac{2}{3}a^3$$

4. **解**：作出积分区域 D 如图所示，D 用极坐标可表示为

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\le r\le 1,$$



于是

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\Gamma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1}\frac{r\cos\theta+r\sin\theta}{r^2}r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)(1-\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta})\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta-1)\mathrm{d}\theta$$

$$=(\sin\theta-\cos\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2-\frac{\pi}{2}$$

5. **解**：Σ_1 是 $z=2$ 上侧

$$\iint_{\Sigma}\left(z^2+x\right)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}\left(z^2+x\right)dydz-zdxdy-\iint_{\Sigma_1}\left(z^2+x\right)dydz-zdxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}0dsdydz-\iint_D\left(-2\right)dxdy=2\iint_D dxdy=8\pi$$

6. 解：收敛半径 $R=+\infty$,收敛域为 $\left(-\infty,+\infty\right)$

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}$，则 $S'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^k}{k!}=2S(x)$

解微分方程得 $S(x)=Ce^{2x}$，$S(0)=1$ 得 $S(x)=e^{2x}$,

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}=e^{2x}$

四、解：令 $P\left(x,y,z\right)$ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 上任一点，则 P 到平面 $x+y-2z-4=0$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|x+y-2z-4\right|$

作拉氏函数

$$F(x,y,z)=(x+y-2z-4)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$$

$$\begin{cases} F'_x = 2(x+y-2z-4) - 2\lambda x = 0 \\ F'_y = 2(x+y-2z-4) - 2\lambda y = 0 \\ F'_z = 2(x+y-2z-4)(-2) + \lambda = 0 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

解此方程组得唯一驻点

$$x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{8}.$$

由实际意义最小值存在 ，故

$$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 4\right| = \frac{5\sqrt{6}}{8}$$