

# 高等数学 I 课后作业

- Schedule: 2021Fall
  - Professor: ZHY
  - From: JNU-智科院
  - Version: 题目纯享版
- 

- 高等数学 I 课后作业
  - Week4
    - 1-1
      - 1(8)求函数自然定义域
      - 9(6) 求反函数
      - 11(5) 求复合函数, 并根据 $x_1, x_2$ 求出函数值
    - 1-2
      - 1(2)(8)求极限
    - 3
  - Week5
    - 加练
      - 1
      - 2
    - 1-3
      - 4
    - 1-4
      - 1

- 6
- Week7
  - 加练
    - 1
  - 1-5
    - 1.求极限
  - 1-6
    - 2(4)求极限
    - 4(4)证明:
  - 1-6
    - 4(2)证明 $x \rightarrow 0$ 时, 有
- Week8
  - 1-8
    - 3(1)间断点类型
    - 4
    - 3(3)(6).求极限
  - 4(5)(7)求极限
- Week9
  - 5
  - 总习题一
    - 9(6)求极限
  - 2-2
    - 7(8)求导
    - 10(2)求导
    - 11(9)求导

- Week10
  - 2-3
    - 1(9)(12)求二阶导数
    - 3(1)求二阶导数
  - 2-4
    - 2
    - 4(1)用对数求导法求函数导数
    - 8(2)(4)求参数方程二阶导数
- Week11
  - 2-5
    - 3(7)求微分
    - 4(8)填入式子使等号成立
  - 3-1
    - 10.设 $a > b > 0$ ,证明:
  - 3-2
    - 1(3)(9)(13)(14)用洛必达求极限
- Week12
  - 3-3
    - 4.求函数 $f(x) = \ln x$ 按 $(x - 2)$ 的幂展开的带有皮亚诺余项的 $n$ 阶泰勒公式
    - 6.求函数 $f(x) = \tan x$ 带有皮亚诺余项的3阶麦克劳林公式
  - 3-4
    - 10(5)求函数拐点和凹凸区间
    - 13问 $a, b$ 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点
- Week13
  - 3-5

- 1(4)求极值
- 9.问函数 $y = \frac{1}{x^2 + 1}$  ( $x \geq 0$ )何时取到最大值
- 3-7
  - 2.求曲线 $y = \ln \sec x$ 在点 $(x, y)$ 处的曲率及曲率半径
- 总习题三
  - 13.设 $a > 1$ ,  $f(x) = a^x - ax$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的驻点为 $x(a)$ .问 $a$ 为何值时,  $x(a)$ 最小, 并求出最小值
- 4-1
  - 2(9)(18)(22)(26)求不定积分
- Week14
  - 4-2
    - 2(9)(18)(19)(29)(35)(38)(40)(43)求不定积分
  - 4-3
    - 10.  $\int \tan^2 x dx$
    - 21.  $\int (\arcsin x)^2 dx$
- Week15
  - 4-4
    - 9.  $\int$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + x)}$$

■ 10.

$\int$

$$\frac{1}{x^4 - 1} dx$$

■ 15.

$\int$

$$\frac{dx}{3 + \cos x}$$

■ 21.

$\int$

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + 1} dx$$

■ 5-1

■ 5. 设  $a < b$ , 问  $a, b$  取什么值时, 积分

$$\int_a^b (x - x^2) dx$$

取得最大值

■ 11. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明

$$\int_0^1 f^2(x) dx$$

$$\geq \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

■ 5-2

■ 8(8)(12) 求定积分

○ Week 16

■ 5-2

■ 3. 求由

$$\int_0^y e^t dt +$$

$\int_0^x \cos t dt = 0$  所确定的隐函数对  $x$  的导数  
 $\frac{dy}{dx}$

- 5(3)求导数
- 11(1)求极限
- 12.求

$\phi(x) = \int_0^x f(t) dt$  在  $[0,2]$  的表达式, 并讨论  
 $\phi(x)$  在  $[0,2]$  内的连续性

- 5-3
  - 1(7)(24)求定积分
  - 7(4)(11)求定积分

○ Week17-18

- 5-4
  - 1(3)(8)判断反常积分收敛性, 若收敛, 计算反常积分其值
  - 4.计算反常积分  
 $\int_0^1 \ln x dx$

- 6-2
  - 4.求抛物线  $y^2 = 2px$  及其在点  $(p/2, p)$  处的法线所围成的图形的面积
  - 8(1)求曲线围成公共部分面积
  - 21.设由抛物线  $y = 2x^2$  和直线  $x=a, x=2$  及  $y=0$  所围成的平面图形为  $D_1$ , 设由抛物线  $y = 2x^2$  和直线  $x=a, y=0$  所围成的平面图形为  $D_2$ , 其中  $0 < a < 2$ .
  - 28.求对数螺线  
 $\rho = e^{\theta}$  相应于  $\theta = 0$  到  $\theta = \pi$  的一段弧长

$\theta$  $\leq$  $\psi$ 对应的一段弧长

## ■ 总习题六

- 6. 设抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  通过点  $(0,0)$ , 且当  $x$

 $\in [0,1]$  时,  $y$ 

$\geq 0$ . 试确定  $a, b, c$  的值, 使得抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与直线  $x=1, y=0$  所围成的图形面积为  $4/9$ . 且使该图形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体体积最小.

## 1. Week4

- 2021/9/23

### 1.1. 1-1

#### 1.1.1. 1(8) 求函数自然定义域

$$y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$$

#### 1.1.1. 9(6) 求反函数

$$y = \frac{2^x}{2^x + 1}$$

### 1.1.1. 11(5) 求复合函数，并根据 $x_1, x_2$ 求出函数值

$$y = u^2, u = e^x, x_1 = 1, x_2 = -1$$

## 1.2. 1-2

### 1.2.1. 1(2)(8)求极限

$$(2): (-1)^n \frac{1}{n}$$

$$(8): [(-1)^n + 1] \frac{n+1}{n}$$

### 1.2.2. 3



3. 下列关于数列  $\{x_n\}$  的极限是  $a$  的定义, 哪些是对的, 哪些是错的? 如果是对的, 试说明理由; 如果是错的, 试给出一个反例.

(1) 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 不等式  $x_n - a < \varepsilon$  成立;

(2) 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 有无穷多项  $x_n$ , 使不等式  $|x_n - a| < \varepsilon$  成立;

(3) 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 不等式  $|x_n - a| < c\varepsilon$  成立, 其中  $c$  为某个正常数;

(4) 对于任意给定的  $m \in \mathbf{N}_+$ , 存在  $N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 不等式  $|x_n - a| < \frac{1}{m}$  成立.

## 2. Week5

- 2021/9/27

### 2.1. 加练

#### 2.1.1. 1

设函数  $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  存在, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 2.1.2. 2

设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x} = 2$ , 则去心邻域正负性为\_\_\_\_\_.

## 2.2. 1-3

### 2.2.1. 4

求 $f(x) = \frac{x}{x}$ ,  $\phi(x) = \frac{|x|}{x}$ , 当 $x \rightarrow 0$ 时的左右极限, 并说明他们在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在

## 2.3. 1-4

### 2.3.1. 1

两个无穷小的商是否一定是无穷小, 举例说明

### 2.3.2. 6

函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 否有界? 这个函数是否为 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大, 为什么?

---

## 3. Week7

- 2021/10/11

## 3.1. 加练

### 3.1.1. 1

设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ , 则下列正确的是  $\$A. a_n < b_n \ n \in \mathbb{N}^+, B. b_n < c_n \ n \in \mathbb{N}^+ \$$   $\$C. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$  不存在,  $D. \lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$  不存在 $\$$

## 3.2. 1-5

### 3.2.1. 1.求极限

$$\$(5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \$$$

$$\$(14) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) \$$$

## 3.3. 1-6

### 3.3.1. 2(4)求极限

$$\$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{kx}, k \text{ 为正整数} \$$$

### 3.3.2. 4(4)证明:

$$\$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1 \$$$

## 3.4. 1-6

### 3.4.1. 4(2)证明 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$$

---

## 4. Week8

- 2021/10/18

### 4.1. 1-8

#### 4.1.1. 3(1)间断点类型

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, x=1, x=2$$

#### 4.1.2. 4

讨论函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x$  的连续性, 若有间断点, 则判别其类型

#### 4.1.3. 3(3)(6).求极限

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \ln(2\cos 2x)$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin x - \sin \alpha}{x - \alpha}$$

### 4.2. 4(5)(7)求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

---

## 5. Week9

- 2021/10/25

### 5.1. 5

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,  $a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < b (n \geq 3)$ , 则在 $(x_1, x_n)$ 内至少有一点 $\epsilon$ , 使 $f(\epsilon) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$

### 5.2. 总习题一

#### 5.2.1. 9(6)求极限

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$$

### 5.3. 2-2

#### 5.3.1. 7(8)求导

$$y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

### 5.3.2. 10(2)求导

$$y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x) = \sin 2x (f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x))$$

### 5.3.3. 11(9)求导

$$y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}$$

---

## 6. Week10

- 2021/11/1

### 6.1. 2-3

#### 6.1.1. 1(9)(12)求二阶导数

$$(9) y = (1 + x^2) \arctan x$$

$$(12) y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

#### 6.1.2. 3(1)求二阶导数

$$(1) y = f(x^2)$$

### 6.2. 2-4

### 6.2.1. 2

求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程和法线方程

### 6.2.2. 4(1)用对数求导法求函数导数

$$y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$

### 6.2.3. 8(2)(4)求参数方程二阶导数

$$(2) \begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$$

---

## 7. Week11

- 2021/11/8

### 7.1. 2-5

#### 7.1.1. 3(7)求微分

$$y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$$

### 7.1.2. 4(8)填入式子使等号成立

$$d(\quad) = \sec^2 3x dx$$

## 7.2. 3-1

7.2.1. 10. 设  $a > b > 0$ , 证明:

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

## 7.3. 3-2

7.3.1. 1(3)(9)(13)(14)用洛必达求极限

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a}{x} \right)^x$$

---



## 8. Week12

- 2021/11/15

### 8.1. 3-3

8.1.1. 4.求函数 $f(x) = \ln x$ 按 $(x - 2)$ 的幂展开的带有皮亚诺余项的 $n$ 阶泰勒公式

8.1.2. 6.求函数 $f(x) = \tan x$ 带有皮亚诺余项的3阶麦克劳林公式

### 8.2. 3-4

8.2.1. 10(5)求函数拐点和凹凸区间

$$y = e^{\arctan x}$$

8.2.2. 13问 $a, b$ 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点

---

## 9. Week13

- 2021/11/22

## 9.1. 3-5

### 9.1.1. 1(4)求极值

$$y = x + \sqrt{1-x}$$

### 9.1.2. 9.问函数 $y = \frac{x}{x^2+1} (x \geq 0)$ 何时取到最大值

## 9.2. 3-7

### 9.2.1. 2.求曲线 $y = \ln \sec x$ 在点 $(x, y)$ 处的曲率及曲率半径

## 9.3. 总习题三

### 9.3.1. 13.设 $a > 1$ , $f(x) = a^x - ax$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的驻点为 $X(a)$ .问 $a$ 为何值时, $x(a)$ 最小, 并求出最小值

## 9.4. 4-1

### 9.4.1. 2(9)(18)(22)(26)求不定积分

$$(9) \int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$$

$$(18) \int \sec x (\sec x - \tan x) dx$$

$$(22) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$(26) \int \frac{3x^4 + 2x^2}{x^2 + 1} dx$$

---

## 10. Week14

- 2021/11/29

### 10.1. 4-2

#### 10.1.1. 2(9)(18)(19)(29)(35)(38)(40)(43)求不定积分

$$(9) \int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}} dx$$

$$(18) \int \frac{10^{2\arctan x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(19) \int \tan \sqrt{1+x^2} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(29) \int \tan^3 x \sec x dx$$

$$(35) \int \frac{x}{x^2-x-2} dx$$

$$(38) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$(40) \int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$$

$$(43) \int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx$$

## 10.2. 4-3

$$10.2.1. 10. \int x \tan^2 x dx$$

$$10.2.2. 21. \int (\arcsin x)^2 dx$$

---

## 11. Week15

- 2021/12/06

### 11.1. 4-4

$$11.1.1. 9. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$$

$$11.1.2. 10. \int \frac{1}{x^4-1} dx$$

$$11.1.3. 15. \int \frac{dx}{3+\cos x}$$

11.1.4. 21.  $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx$

## 11.2. 5-1

11.2.1. 5. 设  $a < b$ , 问  $a, b$  取什么值时, 积分  $\int_a^b (x - x^2) dx$  取得最大值

11.2.2. 11. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明  $\int_0^1 f^2(x) dx \geq (\int_0^1 f(x) dx)^2$

## 11.3. 5-2

11.3.1. 8(8)(12) 求定积分

(8)  $\int_{-1}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x+1} dx$

(12)  $\int_0^2 f(x) dx$ , 其中  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2, & x > 1 \end{cases}$

---

## 12. Week16

- 2021/12/13

## 12.1. 5-2

12.1.1. 3.求由 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ 所确定的隐函数对x的导数 $\frac{dy}{dx}$

12.1.2. 5(3)求导数

$$\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$$

12.1.3. 11(1)求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$$

12.1.4. 12.求 $\phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $[0,2]$ 的表达式, 并讨论 $\phi(x)$ 在 $[0,2]$ 内的连续性

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1) \\ x, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

## 12.2. 5-3

12.2.1. 1(7)(24)求定积分

$$(7) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8 - 2y^2} dy$$

$$(24) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$$

### 12.2.2. 7(4)(11)求定积分

$$(4) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$$

$$(11) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$$

---

## 13. Week17-18

- 2021/12/20

### 13.1. 5-4

#### 13.1.1. 1(3)(8)判断反常积分收敛性，若收敛，计算反常积分其值

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx, (a > 0)$$

$$(8) \int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$$

#### 13.1.2. 4.计算反常积分 $\int_0^1 \ln x dx$

## 13.2. 6-2

13.2.1. 4.求抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点 $(p/2, p)$ 处的法线所围成的图形的面积

13.2.2. 8(1)求曲线围成公共部分面积

$$\rho = 3\cos\theta \text{ 及 } \rho = 1 + \cos\theta$$

13.2.3. 21.设由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x=a, x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 $D_1$ , 设由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x=a, y=0$ 所围成的平面图形为 $D_2$ , 其中 $0 < a < 2$ .



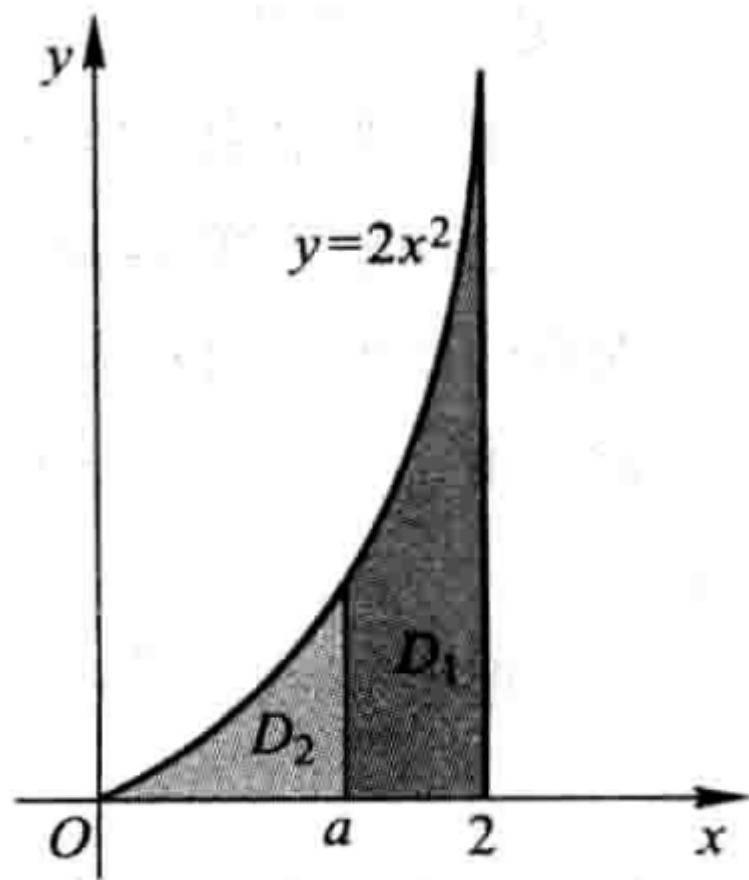


图 6-24

(1)求 $D_1$ 绕 $x$ 轴旋转而成的旋转体体积 $V_1$ ,  $D_2$ 绕 $y$ 轴旋转而成的旋转体体积 $V_2$ ;

(2)问当 $a$ 为何值时,  $V_1+V_2$ 取得最大值, 求这个最大值

13.2.4. 28. 求对数螺线  $\rho = e^{a\theta}$  相应于  $0 \leq \theta \leq \psi$  对应的一段弧长

### 13.3. 总习题六

13.3.1. 6. 设抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  通过点  $(0,0)$ , 且当  $x \in [0,1]$  时,  $y \geq 0$ . 试确定  $a, b, c$  的值, 使得抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与直线  $x=1, y=0$  所围成的图形面积为  $4/9$ . 且使该图形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体体积最小.