题　号	一	二	三	四	五	总　　分
得　分						

得分	评阅人

一、选择题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{x^2y^2\left(x^2+y^2\right)}$ （　　）

(A) 等于 0　　(B) 等于$+\infty$　　(C) 等于1　　(D) $-\infty$

2. 若非零向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$，则必有（　　）.

(A) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$；　(B) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$；　(C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；　(D) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}$

3. 若数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$均收敛，且$a_n\le c_n\le b_n\ (n=1,2,\cdots)$，则（　　）

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}c_n\ne 0$；（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛；（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$发散；（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$的敛散性不确定。

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{a}{n}\ \left(a>0\right)$，则该级数（　　）

（A）$n\to\infty$时一般项不逼近于 0；（B）绝对收敛；（C）发散；（D）条件收敛。

5. 已知$f\left(x\right)=\int_0^{3x}f\left(\dfrac{t}{3}\right)dt+3x-3$，则$f\left(x\right)=$（　　）.

(A) $1+ce^{3x}$；　(B) $-1+ce^{3x}$；　(C) $-1+ce^{-3x}$；　(D) $1+ce^{-3x}$.

得分	评阅人

二、填空题（共 5 小题，每空 2 分，共 10 分）

1. 曲线$\begin{cases}x^2-y^2=z\\ y=z\end{cases}$在原点处的法平面方程为____

2. 函数$z=z\left(x,y\right)$由方程$z=\int_{xy}^{z}f\left(t\right)dt$确定，其中$f\left(x\right)$可导，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$_____

3. $\int_{(3,1)}^{(1,3)}\dfrac{y}{x^2}dx-\dfrac{1}{x}dy=$____

4. $\sum$ 是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面，则 $\iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}S=$____

5. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n\cdot n}$ 的收敛域为______

得分	评阅人

三、计算题（共 9 小题，每小题 8 分，共 72 分）

1. 求微分方程 $y''+2y'+5y=\sin 2x$ 的通解。

2. 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行, 且过点 $(-3,2,5)$ 的直线方程

3. 设 $z=f(x+\frac{1}{y},y+\frac{1}{x})$，且 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{z}{x},\frac{{}^2z}{x\ \ y}$

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4,(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域.

5. 计算 $\oint\limits_L\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=ax\,(a>0)$。

6. 计算 $\iint\limits_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 外侧。

7. 在 xoy 平面上存在温度场 $T=4x^2+9y^2$，$P(9,4),Q(-3,4-\sqrt{3})$。

（1）求在点 P 沿方向 $\overline{PQ}$ 的温度变化率。

（2）在什么方向上，点 P 的温度变化率取得最大值？最大值是多少？

8. 求幂级数 $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots$ 的和函数。

9. 把 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x<0 \\ 1, & 0 \le x<\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数；$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 处收敛于何值？

得分	评阅人

四、证明题（共 1 小题，共 8 分）

求证：若 n 个正数 $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ 的和为 R，则这 n 个正数乘积的最大值是 $\frac{R^n}{n^n}$ 。

一、BCBDB

二、$x=0$　$\frac{yf\left(xy\right)}{f\left(z\right)-1}$　$-\frac{8}{3}$　$\frac{\sqrt{3}}{120}$　$\left[-4,0\right)$

三、**1. 解**：齐次通解为 $y=e^{-x}(\ C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\ )$

非奇特解 $y^*=\frac{1}{17}\cos 2x-\frac{4}{17}\ \sin 2x$

非奇通解 $Y=e^{-x}(\ C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\ )-\frac{4}{17}\cos 2x+\frac{1}{17}\ \sin 2x$

2. **解**：所求直线的方向向量可取为

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}=(-4\ ,\ -3\ ,\ -1)$$

利用点向式可得方程 $\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}$

3. **解**：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1-\frac{1}{x^2}f_2$

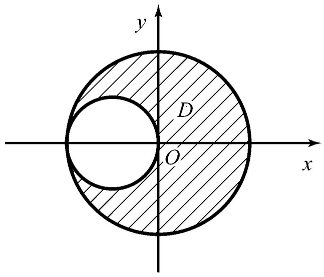
$$\frac{{}^2 z}{x\ \ y}=\frac{}{y}\ \frac{z}{x}=\frac{}{y}\ f_1-\frac{1}{x^2}f_2$$

$$=f_{11}\ -\frac{1}{y^2}\quad f_{12}\ \ 1\ \ \frac{1}{x^2}-f_{21}\ \ \frac{1}{y^2}+f_{22}\ \ 1$$

$$=-\frac{1}{y^2}f_{11}+f_{12}+\frac{1}{x^2y^2}f_{21}-\frac{1}{x^2}f_{22}$$

$$=-\frac{1}{y^2}f_{11}+\left|1+\frac{1}{x^2y^2}\right\{f_{12}-\frac{1}{x^2}f\ _{22}$$

4. **解**　画出积分区域 D.



注意到区域 D 关于 x 轴对称，y 是奇函数，所以 $\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma = 0$.

设大圆 $x^2+y^2=4$ 所围区域为 D_1，小圆，$(x+1)^2+y^2=1$ 所围区域为 D_2．则

$$\iint\limits_D (\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta \bullet \int_0^{-2\cos\theta} r^2\mathrm{d}r = \frac{16}{3}\pi - \frac{32}{9}$$

5. **解法 1**：L 的参数方程：$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cos\theta \\ y = \dfrac{a}{2}\sin\theta \end{cases}$ $, 0\le\theta\le 2\pi, ds = \dfrac{a}{2}d\theta$

$$\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}ds = \int_0^{2\pi}\sqrt{a\cdot\frac{a}{2}(1+\cos\theta)}\cdot\frac{a}{2}d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta = 2a^2$$

解法 2：L 的极坐标方程：$r = a\cos\theta, -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}, ds = \sqrt{r^2+r'^2}d\theta = ad\theta$

$$\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cdot ad\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos\theta d\theta = 2a^2$$

6. **解法 1：记** Σ_1 是上半球面上侧，Σ_2 是下半球面下侧

$$\iint\limits_\Sigma z^3dxdy = \iint\limits_{\Sigma_1} z^3dxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} z^3dxdy = \iint\limits_{D_{xy}}\left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^3dxdy - \iint\limits_{D_{xy}}\left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^3dxdy$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xy}}\left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^3dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}rdr = \frac{4}{5}\pi a^5 .$$

由关于坐标的轮换对称性 $\iint\limits_\Sigma z^3dxdy = \iint\limits_\Sigma y^3dxdz = \iint\limits_\Sigma x^3dzdy$ ，

故 $\iint\limits_\Sigma x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = \dfrac{12}{5}\pi a^5$.

解法2：由高斯公式$\iint\limits_{\Sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = \iiint 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a r^4 \sin\varphi = \frac{12}{5}\pi a^5$

7. **解**：（1）$\overrightarrow{PQ} = \left(-12, -\sqrt{3}\right)$，　$\overrightarrow{PQ}^0 = \left(-\frac{12}{\sqrt{147}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{147}}\right)$

$\left.\frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{PQ}}\right|_P = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial T}{\partial y}\cos\beta\right)_P = 72\times\left(-\frac{12}{\sqrt{147}}\right) + 72\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{147}}\right) = -\frac{72}{\sqrt{147}}\left(12+\sqrt{3}\right)$，

（2）梯度方向是温度变化率最大的方向。$\left.gradT\right|_P = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right)_P = \left(72, 72\right)$

温度变化率最大值为$\left|\left.gradT\right|_P\right| = \left|\left(72, 72\right)\right| = 72\sqrt{2}$

8. **解**：收敛半径$R = +\infty$,收敛域为$\left(-\infty, +\infty\right)$

令$S(x) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \ldots, \left(-\infty < x < +\infty\right)$，

则$xS(x) = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = e^x - 1$，而$S(0) = 1$

故　$S(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$

9. **解**：$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = 1$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nxdx = \frac{1}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi} = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nxdx = \frac{-1}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}\left[1 - \left(-1\right)^n\right] = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ \frac{2}{\left(2m+1\right)\pi}, & n = 2m+1 \end{cases}$

故$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\left(2n+1\right)\pi}\sin\left(2n+1\right)x$

$$=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{3\pi}\sin 3x+\frac{1}{5\pi}\sin 5x+\frac{1}{7\pi}\sin 7x+\ldots+\right),(-\pi<x<\pi,x\neq 0)$$

$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 处收敛于 $\frac{1}{2}$。

四、证明：这是在条件 $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=R$ 下，求 $x_1x_2x_3\ldots x_n$ 最大值的条件极值问题。

作拉氏函数 $L(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=x_1x_2x_3\ldots x_n+\lambda(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n-R)$（4 分）

$$\begin{cases} L'_{x_1}=x_2x_3\ldots x_n+\lambda=0 \\ L'_{x_2}=x_1x_3\ldots x_n+\lambda=0 \\ \\ L'_{x_n}=x_1x_2\ldots x_{n-1}+\lambda=0 \\ x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=R \end{cases}$$

$$-x_1x_2x_3\ldots x_n=\lambda x_1=\lambda x_2=\lambda x_3=\ldots=\lambda x_n$$

解此方程组得唯一驻点 $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n=\frac{R}{n}$

由实际意义最大值存在，故最大值 $\frac{R^n}{n^n}$（8 分）