题　号	一	二	三	四	五	总　　分
得　分						

得分	评阅人

一、选择题（共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(1+xy)}{y\sqrt{x^2+y^2}} =$ （　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) e

2. 函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在原点（0, 0）处（　　）

(A) 连续；　　(B)有极限；　　(C) 可微；　　(D) 可偏导。

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+1}{n^2-1}$ 中收敛的个数是(　).

(A)1；　　（B）2；　　（C）3；　　（D）4

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln^2 n}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{2^n}$ 中条件收敛的个数是（ ）

（A）1；　　（B）2；　　（C）3；　　（D）4

5. 函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ 展开成 x 的幂级数中，x^3 的系数为（　　）

（A）$-\dfrac{15}{48}$；　　（B）$\dfrac{15}{48}$；　　（C）$-\dfrac{15}{24}$；　　（D）$\dfrac{15}{24}$。

6. $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $(\vec{a},\ \vec{b})=\dfrac{\pi}{6}$，则以 $\vec{a}+2\vec{b}$ 和 $\vec{a}-3\vec{b}$ 为边的平行四边形的面积为（ ）

（A）30；　（B）15；　（C）20；　（D）25。

得分	评阅人

二、填空题（共 9 小题，10 个空，每空 2 分，共 20 分）

1. 改变二次积分 $\int_1^2 dx\int_1^{x^2} f(x,y)\,dy$ 的积分次序为______

2．曲面 $e^{\frac{x}{z}}+e^{\frac{y}{z}}=4$ 在点 $(\ln 2,\ \ln 2,\ 1)$ 的切平面方程________

3. 可微函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处的从点 $(1,2)$ 到点 $(2,2)$ 方向的方向导数为 2，从点 $(1,2)$ 到点 $(1,1)$ 方向的方向导数为−2。

则该函数在点 $(1,2)$ 处的梯度为______

该函数在点 $(1,2)$ 处的从点 $(1,2)$ 到点 $(4,6)$ 方向的方向导数为________

4. 设 $y=e^x\{C_1\sin x+C_2\cos x)$ 为二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该微分方程为_______。

5. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 x=2 处条件收敛，则其收敛半径 R= __

6. e^x 展成 $x-1$ 的幂级数是：__________

7. 设 $f\left(x\right)=\pi x+x^2,\ x\in\left(-\pi,\pi\right)$，则其傅里叶系数 $b_3=$ ____

8. 设 L 是 xy 平面上 $A(0, 1)$到 $B(1, 0)$的线段，则对弧长的积分 $\int_L(x+y)ds=$____

9. 曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$ 取外侧，则 $\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydxdz+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=$___

得分	评阅人

三、计算题（共7题，共60分）
（前二题每题各10分，后五题每题各8分）

1. f 具有二阶连续偏导数，$u=f(x^2+y^2+z^2)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

2. 已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x}f(\frac{t}{3})\,dt+e^{2x}$，求 $f(x)$

3．在马鞍面 $z=xy$ 上求一点，使得这一点的法线与平面 $x+3y+z+9=0$ 垂直，并求出该点法线的方程。

4. 计算 $\int_L(x-y)dx+(x+y)dy$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$ 上半圆周，逆时针方向。

5.　计算一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\, dS$ ，Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $\boldsymbol{x^2+y^2\le 1}$ 内的部分。

6. 计算二型曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy$，其中 $\Sigma: z=x^2+y^2\ \ (0\le z\le 1)$ ，其法向量与 z 轴夹角为锐角。

7. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$ 的和函数。

得分	评阅人

四、应用题（共 1 小题，共 8 分）

1.　当 $x>0, y>0, z>0$ 时，求函数 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6R^2$ 上的最大值。并由此证明：当 a,b,c 为正实数时，成立不等式 $ab^2c^3 \leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$。

一、BDCBAA

二、$\int_1^4 dy\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dx$　　$x+y-2z\ln 2=0$　　$\operatorname{grad} f(1,2)=(2,2)$　　$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\Big|_{(1,2)}=\frac{14}{5}$

$y''-2y'+2y=0$　　2　　$e^x=e\left[1+\frac{1}{1!}(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(x-1)^n+\cdots\right]$　　$\frac{2\pi}{3}$

$\sqrt{2}$　　4π

三、1. **解**：$\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2+z^2)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)+2x\frac{\partial}{\partial x}f'(x^2+y^2+z^2)$$

$$=2f'(x^2+y^2+z^2)+4x^2f''(x^2+y^2+z^2)$$

2. **解**：　$f'(x)=3f(x)+2e^{2x}$，　即 $y'-3y=2e^{2x}$

由一阶线性方程的通解公式，得

$$f(x)=e^{\int 3dx}\left(\int 2e^{2x}e^{-\int 3dx}dx+C\right)=e^{3x}\left(-2e^{-x}+C\right)=-2e^{2x}+Ce^{3x}$$

$$f(0)=0+e^0=1\quad\Rightarrow\quad C=3$$

$$f(x)=-2e^{2x}+3e^{3x}$$

3. 解：马鞍面的法向量 $(y,x,-1)$ 与 $(1,3,1)$ 平行，所以 $\frac{y}{1}=\frac{x}{3}=\frac{-1}{1}$，即 $y=-1,x=-3,z=xy=3$，于是该点为 $(-3,-1,3)$，

在该点处的法线方程为 $x+3=\frac{1}{3}(y+1)=z-3$。

4. **解**：$P=x-y$，$Q=x+y$. $\frac{\partial P}{\partial y}=-1,\frac{\partial Q}{\partial x}=1$. 由格林公式

$$\int_L (x-y)dx+(x+y)dy=\oint_{L+AB}(x-y)dx+(x+y)dy-\int_{AB}(x-y)dx+(x+y)dy$$

AB: $y=0,\quad x:-a\to a,\quad \int_{AB}(x-y)dx+(x+y)dy=\int_{-a}^{a}(x-0)dx=0$

原式$=\iint\limits_D(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})dxdy-0=2\iint\limits_D dxdy=\pi a^2.$

5. 解：$dS=\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$

$\iint\limits_\Sigma z\,dS=\iint\limits_D\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2dr=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

6. **解**：设$\Sigma_1:z=1$是下侧，$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\quad-\iint\limits_{\Sigma_1}$

由高斯公式，$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\quad=-\iiint\limits_\Omega(2+1)dv=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1dz=\frac{-3}{2}\pi$

$\iint\limits_{\Sigma_1}(2x+z)dydz+zdxdy=0+\iint\limits_{\Sigma_1}zdxdy=-\iint\limits_D dxdy=-\pi\cdot1^2=-\pi$

$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\quad-\iint\limits_{\Sigma_1}\quad=\frac{-3\pi}{2}-(-\pi)=-\frac{\pi}{2}$

7. **解**：级数$\sum_{n=1}^\infty\frac{n+1}{n!}x^n$的收敛半径为$R=+\infty$，所以收敛域为$D=(-\infty,+\infty)$。

设$S(x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{n+1}{n!}x^n=\frac{2}{1!}x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{4}{3!}x^3+\cdots+\frac{n+1}{n!}x^n+\cdots$，

则$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^\infty\frac{x^{n+1}}{n!}=x^2+\frac{1}{2!}x^3+\frac{1}{3!}x^4+\cdots+\frac{1}{n!}x^{n+1}+\cdots=x(e^x-1)$，

所以$S(x)=\frac{d}{dx}\left[x(e^x-1)\right]=(1+x)e^x-1$。

四、解： 令$L(x,y,z,\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z-\lambda(x^2+y^2+z^2-6R^2)$，求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_x = \dfrac{1}{x} - 2x\lambda = 0 \\ L_y = \dfrac{2}{y} - 2y\lambda = 0 \\ L_z = \dfrac{3}{z} - 2z\lambda = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 6R^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2}{y^2} = \dfrac{3}{z^2} \\ x^2 = R^2, y^2 = 2R^2, z^2 = 3R^2 \end{cases}$$

由于目标函数无最小值，所以唯一的驻点必是最大值点。于是得到

最大值 $f_{\max} = f(R, \sqrt{2}R, \sqrt{3}R) = \ln\left(6\sqrt{3}R^6\right)$

$$\ln x + 2\ln y + 3\ln z \le \ln[\sqrt{R^2}(2R^2)(3R^2)^{\frac{3}{2}}] = \ln\left(6\sqrt{3}R^6\right),$$

即 $xy^2z^3 \le 6\sqrt{3}\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3$。令 $a = x^2$，$b = y^2$ 和 $c = z^2$，得

$$ab^2c^3 \le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$$