线

订

装

一、填空题（共 7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

1. 微分方程 $xy'-3y=-3$ 满足 $y(-1)=0$ 的特解为________________

2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)}\dfrac{\ln(x^2-y^2)}{x\sin(1-x^2+y^2)}=$ ________________

3. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(2,1,1)$ 处的切线方程为________________

4. 函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极小值点为________________

5. $\int_0^1 dy\int_y^0 \sin(x-1)^2 dx=$ ________________

6. 函数 $\int_0^x e^{-t^2}dt$ 的麦克劳林展开式为________________

7. 函数 $f\left(x\right)=x^2(0\le x\le\pi)$ 的余弦级数展开式中，系数 $a_3=$ ________________

二、单选题（共 7 小题，每小题 2 分，共 14 分）

1. 下列不是二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微的充分条件的是（　　）

(A) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}$ 存在；

(B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\vec{n}\cdot(\,x,y,f(x,y)\,)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$ 其中 $\vec{n}=\left.\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y},\ -1\right)\right|_{(0,0)}$；

(C) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}$ 存在，l 为任意方向；

(D) $\lim\limits_{x\to0}f_x'(x,0)=f_x'(0,0)$ 且 $\lim\limits_{y\to0}f_y'(0,y)=f_y'(0,0)$.

2. 设函数 $f(x,y)$ 可微，$f(x+1,e^x)=x^2+x,f(x,x^2)=\ln x^2$, 则 $df(1,1)=$（　　）

(A) dx；　(B) dy；　(C) $dx+dy$；　(D) $dx-dy$.

3. 设区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le1,x\ge0,y\ge0\right\}$，$\left[x\right]$ 表示不超过 x 的最大整数，

则 $\iint\limits_D\left[x+y\right]dxdy=$（　　）

(A) $\frac{\pi}{4}$；　　(B) $\frac{\pi-2}{4}$；　　(C) $\frac{\pi-3}{4}$；　　(D) $\frac{\pi}{4}-1$.

4. 设曲线积分 $I_i=\oint_{L_i}(x+\frac{y^3}{3})\mathrm{d}x+(x+y-\frac{x^3}{3})\mathrm{d}y$，其中 $L_1: x^2+y^2=1$，

$L_2: 2x^2+y^2=2$，$L_3: x^2+y^2=2$ 都取逆时针方向，则 I_1,I_2,I_3 满足（　　）

(A) $I_1<I_2<I_3$；　　(B) $I_1<I_3<I_2$；　　(C) $I_2<I_3<I_1$；　　(D) $I_3<I_2<I_1$.

5. 在上半平面内，如果曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+\frac{x}{y}\mathrm{d}y$ 与路径无关，那么 $P(x,y)$ 可取为（　　）

(A) $\frac{1}{y}$；　　(B) $\ln y+x$；　　(C) $\ln y-\frac{1}{x}$；　　(D) $-\frac{1}{y^2}$.

6. 设 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_\Gamma (x^2+y^2+xy)\mathrm{d}s=$（　　）

(A) π；　　(B) $\frac{3}{4}\pi$；　　(C) $\frac{1}{2}\pi$；　　(D) $\frac{1}{4}\pi$.

7. 设 a 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(na)+n}{n^2}\right]$（　　）

(A) 绝对收敛；　　(B) 条件收敛；　　(C) 发散；　　(D) 收敛性与 a 的值有关

三、计算题（共 7 小题，第 3 小题 7 分，其余每小题各 8 分，共 55 分）

1. 求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解.

2. 设 $z=f\left(xy,x-y\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行)，求 $\oint_L xy\mathrm{d}x$.

4. 设有曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4$,

线

订

装

(1) 求曲面在点$(1,1,4)$处的切平面方程；

(2) 记切平面在第一卦限的部分为Σ，计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(2x+2y+z)\,\mathrm{d}S$.

5. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}v$, 其中区域$\Omega$是由$xOz$平面上的曲线$x^2=z$绕$z$轴旋转而成的曲面与平面$z=3$所围成的闭区域.

6. 设 Σ 为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在球体$x^2+y^2+z^2=4z$内的部分取下侧，计算曲面积分$I=\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-2x)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{2^n}x^{2n}$的和函数.

四、综合应用题（共 1 小题，共 10 分）

在球面$x^2+y^2+z^2=4\ (x>0,y>0,z>0)$上求一点，使得函数$f(x,y,z)=x\ln x+y\ln y-z\ln z$在该点沿着从点$A(1,2,3)$到点$B(2,3,1)$方向的方向导数具有最大值，并求出最大值.

一、 $y=1+x^3$ 　　1 　　$\dfrac{x-2}{16}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{-5}$ 　　$(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12})$

$\dfrac{\cos 1-1}{2}$ 　　$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)n!}x^{2n+1}, x\in(-\infty,+\infty)$ 　　$-\dfrac{4}{9}$

二、

题	1	2	3	4	5	6	7
答案	CD	B	B	D	B	A	C

三、1. 解：特征方程 $r^2-3r+2=0$, 特征根 $r_1=1,\ r_2=2$,

对应的齐次方程的通解 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

设原方程特解为 $y^*=x(ax+b)e^x$,

$\Rightarrow (2a-b-2ax)e^x=2xe^x, \Rightarrow a=-1,\ b=-2,\quad y^*=-x(x+2)e^x$,

通解 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-x(x+2)e^x$.

2. 解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'+g'\cdot(-\dfrac{y}{x^2})$

$$=yf_1'(xy,x-y)+f_2'(xy,x-y)-\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[yf_1'(xy,x-y)+f_2'(xy,x-y)-\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$=f_1'+y\left[f_{11}''(xy,x-y)\cdot x+f_{12}''(xy,x-y)\cdot(-1)\right]$$

$$+\left[f_{21}''(xy,x-y)\cdot x+f_{22}''(xy,x-y)\cdot(-1)\right]$$

$$-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}$$

$$=f_1'+xyf_{11}''+(x-y)f_{12}''-f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''.$$

3. 解：L 由 L_1 和 L_2 组成，其中 L_1 为有向半圆弧 $\begin{cases}x=a+a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}$ $t:0\to\pi$，L_2 为有向线段 $y=0$，$x:0\to 2a$，则

$$\oint_L xy\mathrm{d}x=\int_{L_1}xy\mathrm{d}x+\int_{L_2}xy\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}a(1+\cos t)\cdot a\sin t\cdot(-a\sin t)\mathrm{d}t+0$$

$$=-a^3\left(\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=-a^3\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

4. 解：(1) 令 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-4$，曲面在点 $(1,1,4)$ 处的法向量为

$$\vec{n}\Big|_{(1,\,1,\,4)}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}},\ \frac{1}{2\sqrt{y}},\ \frac{1}{2\sqrt{z}}\right)\Bigg|_{(1,\,1,\,4)}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4})=\frac{1}{4}(2,2,1),$$

所求切平面方程：$2\cdot(x-1)+2\cdot(y-1)+z-4=0$，即：$2x+2y+z=8.$

(2) 曲面 Σ 在 xOy 面的投影区域为 $D:x+y\le 4, x\ge 0, y\ge 0$，则

$$\iint_{\Sigma}(2x+2y+z)\,\mathrm{d}S=8\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=8\iint_D\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=24\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=24\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=192.$$

5. 解：Ω 是由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=3$ 围成的立体，在 xOy 面投影区域为 $D:x^2+y^2\le 3$，

线

订

装

$$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}v=\iint_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{3}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}(3-\rho^2)\rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(3-\rho^2)\rho^2\,\mathrm{d}\rho=2\pi\left[\rho^3-\frac{1}{5}\rho^5\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{12}{5}\sqrt{3}\pi$$

6. 解：作取上侧的辅助面$\Sigma_1: z=2,\ x^2+y^2\le 4$，记$\Sigma$与$\Sigma_1$围成的区域为$\Omega$,

由 Gauss 公式得：

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_{\Omega}(1\text{-}x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-2x)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于Ω关于yz面对称，$\iiint_{\Omega}(1\text{-}x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

而 z=1 垂直于yz，zx面，故$\iint_{\Sigma_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma_1}xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0,$

$$I=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma_1}(1-2x)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{2}\mathrm{d}z-2\cdot4\pi=\frac{8\pi}{3}-8\pi=-\frac{16\pi}{3}.$$

7. 解：令$u_n=\dfrac{2n+1}{2^n}x^{2n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{2n+1}\cdot\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}$,

当$\dfrac{x^2}{2}<1$,即$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$时,级数收敛;当$\dfrac{x^2}{2}\ge 1$，即$x\ge\sqrt{2}$或$x\le-\sqrt{2}$时,

级数发散。故原级数的收敛域为$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

将和函数$s(x)$从0到x积分，得

$$\int_0^x s(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{2^n}\int_0^x x^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^{2n+1}$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x^2}{2})^n=x\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}=\frac{2x}{2+x^2},\quad x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

上式两端对 x 求导，得

$$s(x)=(\frac{2x}{2+x^2})'=\frac{4-2x^2}{\left(2+x\right)^2},\quad x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

四、解：设球面上一点 $M(x,y,z)$，则函数 $f(x,y,z)$ 在 M 点沿方向 $\overrightarrow{AB}=(1,1,-2)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[(\ln x+1)+(\ln y+1)+2(\ln z+1)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}(\ln x+\ln y+2\ln z)+\frac{4}{\sqrt{6}}$$

设 $L(x,y,z)=\ln x+\ln y+2\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$，令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=\dfrac{2}{z}+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2-4=0\end{cases}\Rightarrow \text{得到唯一驻点：} x=y=1,z=\sqrt{2}$$

由题意点 $(1,1,\sqrt{2})$ 处的方向导数具有最大值，最大值为 $\dfrac{\ln 2+4}{\sqrt{6}}$.