暨南大学代数结构与图论速通

By Blossom.

写在前面

- 学习教材：《离散数学》屈、耿第二版
- 考察范围：第三部分代数结构 && 第五部分图论
- 学习链接：
  - NJU离散数学
  - BJTU离散数学MOOC

代数结构

- **Section I 代数系统**

  1. 二元关系的定义：函数$f: A^n->B$称为n元运算，n=2时即$A*A->B$为二元关系

  2. 代数系统的定义：$<S, \circ>$

     - 一个非空集合（函数/运算也可以组成集合）
     - 一个或若干个运算
     - 运算对该集合封闭

  3. 运算的封闭：对于运算$f: A^n->B$，如果$B \subseteq A$,则称该运算在集合上封闭`（closeness）`

  4. 二元运算的性质：

     - 交换律：$x \circ y = y \circ x$
     - 结合律：$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
     - 幂等律：$x \circ x = x$
     - 分配律：$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ 涉及两种运算
     - 吸收律：$x * (x \circ y) = x$ 涉及两种运算
     - 消去律：$若x \circ y = x \circ z, 则y = z$ 左消去律，（右消去律消去元在右边）

  5. 单位元：e是代数系统<S,o>的单位元当且仅当对于任意代数系统中的x，$e \circ x = x \circ e$, 记作1_S，

- 代数系统不一定有单位元
- 满足等式任意一边，为代数系统的左/右单位元e_l, e_r
- 代数系统的单位元如果有一定唯一
- 如果一个代数系统既有左单位元又有右单位元，那左右单位元比相等，也就是代数系统有单位元
- 左/右单位元不一定存在/唯一

6. 逆元：`只对单位元存在的代数系统讨论逆元`

   - 给定系统S的元素x，若存在x'，满足$x' \circ x = 1_S$,则x'是x左逆元，另一边则是右逆元
   - 给定系统S的元素x，若存在x^*使得$x^* \circ x = x \circ x^* = e$,则称$x^*$是x的逆元，记作$x^{-1}$
   - 假如代数系统S满足结合律：
     1. 如果某元素既有左逆又有右逆，二者必定相等且唯一
     2. 若代数系统的每个元素都有左逆，则左逆即右逆，且逆元唯一

7. 零元：元素t是代数系统S的零元当且仅当$\forall x \in S, x \circ t = t \circ x = t,$ 记作0_S，代数系统不一定存在零元

8. 代数系统的同态和同构：

   - 同类型的代数系统：运算的个数，对应运算的元数、代数常数的个数相同，这是代数系统同态与同构的前提

   - 代数结构$< S_1, \circ >$ 与 $< S_2, * >$同构当且仅当存在双射函数$f: S_1 \to S_2$,满足$\forall x, y \in S_1, f(x \circ y) = f(x) * f(y)$,其中双射函数f成为**同构映射**

   - 同构关系是等价关系，只有两个代数系统等大，它们才有可能同构

   - 代数结构$< S_1, \circ >$ 与 $< S_2, * >$同态当且仅当存在函数$f: S_1 \to S_2$,满足$\forall x, y \in S_1, f(x \circ y) = f(x) * f(y)$

   - 特别的，如果上述函数f是满射，则构成满同态

- **SectionⅡ 群与环**

> 对称的代数，`Symmetry`,本质在于我们能定义两个对称的乘积，即两个变换的连续作用后的结果

1. 半群`semigroup`的定义：代数结构$< S_1, \circ >$满足

- $\forall x, y \in S, (x \circ y) \in S$
- $\forall x, y, z \in S, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
- 代数系统+结合性=半群

2. 幺半群`monoid`的定义：代数结构$< S_1, \circ >$满足

- $\forall x, y \in S, (x \circ y) \in S$
- $\forall x, y, z \in S, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
- $(\exists e \in S)(\forall x \in S)(e \circ x = x \circ e = x)$
- 半群+单位元=幺半群

3. 群论公理：（G，*）为群当且仅当

- $(x \circ y) \in G$ --原群`magma`
- $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ --半群
- $(e \circ x = x \circ e = x)$ --幺半群
- $\forall x \in G, x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$ --群
- 上述四式被称为群论公理
- 也就是说，一个非空集合G, `*`为G上的二元运算当`<G,*>`为Monoid，单位元为e，并且满足$(\forall x \in G)(\exists y \in G)(x * y = y * x = e)$时，G是一个群

4. 若G为有穷/无穷集，称G为有限/无限群
5. 如果G的任意两个元素运算满足交换律，则称G为阿贝尔群`（abelian）`
6. 1-3阶群，在同构意义下只有一个，4阶群在同构意义下有2个，其中4.1称作`Klein四元群`其不同构与模4整数群
7. 群的性质：自反律、幂运算、消去律...
   - 方程ax=b和ya=b在G中对x，y有唯一解
   - 有穷代数系统若满足消去律和结合律，就可以判断为群
8. 子群的定义
   - 对于群G，$*$，e，-1，$H \in G$
     - $\forall x, y \in H, x * y \in H$
     - $e \in H$

- $\forall x \in H, x^{-1} \in H$ 则称H是G的子群，若H含与G，则是真子群 <G,∗> <e,∗>对于任何群来说都是子群，称为平凡子群

9. 子群判定定理

- $< H, * > \leq < G, * >$
- $H, e, *, -1$为群
- $H \neq \phi, \forall a, b \in H, ab \in H, a^{-1} \in H, ab^{-1} \in H$

10. 子群将群分解为陪集`(coset)`

  1. - 对于G的子群H，有$Ha = [ha|h \in H]aH = [ah|h \in H]$分别为左/右陪集
     - H在G中右陪集的个数称为H在G中的指数，记作[G:H]

11. 对于一个群G的元素a，如果存在k使得$a^k = e$那么则称k是a的阶，这时也称a为k阶元

12. 若 <G,*> 为群，若|G|=n，则G中阶数大于2的元素为偶数个（a与a^{-1}

    成对出现）

13. 拉格朗日定理：$H \approx aH \approx Ha$(陪集的势)所以，右陪集构成群的元素的一个划分，每个元素恰属于某个右陪集，所以对于**有限群**而言，$|G| = |H| \cdot [G : H]$

    1. 推论1：对于$\forall a \in G$, $|a|$为$|G|$的因子

    2. 推论2：若G为p阶群，若p为素数，那么（$\exists a \in G$）$(< a >= G)$其中$< a >= \{a^n | a \in Z^+\}$

    例：若一个群只有一阶元和二阶元，则说明该群是**Abel群**

14. 循环群与生成元：所有的循环群都是abel群

- 循环群的定义：（$\exists a \in G$）$(G =< a >)$a称为G的生成元

- 若生成元的阶数为n，则是有限循环群$G = \{a^0, a^1, \ldots, a^{n-1}\}$,否则是无限循环群，$a^0$称为循环群的幺（单位元）

- 无限循环群有且仅有两个生成元a与a^{-1}

- 有限循环群a为n阶，对于任意不大于n的r来说，若$G = a^r$那么n与r互质，反之也成立

        - n阶循环群G的生成元个数= $\{r|r \leq n \wedge gcd(n,r)=1\}$称之为生成元set，个数可以用Euler函数$\phi(n)$表示
        - 如果G是循环群，那么G的子群也是循环群，同时如果为无限循环群，那么G的子群除了$\langle e \rangle$之外都是无限循环群
        - 若G是无限循环群：G与整数+群同构；若G是有限循环群，G与模n加法群同构

- **SectionⅢ 格与布尔代数**

图论

- **Section Ⅰ 图的基本概念**

1. 图的定义：$G=（V,E,\phi）$其中V是顶点的集合Vertex，E是顶点之间边的集合Edge，ϕ是边e的端点集
2. 如果每条边都有两个端点，并且不同的边有不同的端点集，说明G是图，否则就是伪图（两点之间好几条边，一点有边自己连自己）
3. 有向图的定义是在图的定义基础上，边E集从无序对（两点邻接）变成了笛卡尔积（起点和终点）
4. 图中结点v的度记作$deg(v),d_G(v)$，表示与v结点关联的边的数目（自环贡献双倍度数），那么，我们就可以得出**握手定理**：
   $对于结点数n，边数m的图来说，所有顶点度的总和=2m$，并且有推论：
   在无向图中度为奇数的顶点为偶数个
5. - 出度：以v为起点的边的数目$deg^+(v)$，邻接矩阵行中1的个数
   - 入度：以v为终点的边的数目$deg^-(v)$，邻接矩阵列中1的个数
   - 对于有向图来说，各个顶点的**出度之和=入度之和=边数**
6. - 完全图：任意两个顶点均相邻，即每个顶点的度deg（v）=（n-1），总边数为$\frac{n（n-1）}{2}$
   - 圈图：只连外边
   - 轮图：圈图+有个中心连通每个边缘端点
   - 二部图：顶点分成两个部分（划分，无交集），边的端点分别来自这两部分
     - 完全二部图：对于每个来自不同类别的顶点来说都有边连通

7. 图的表示：邻接矩阵，关联矩阵，邻接表

   1. 关联矩阵：i表示第i个结点，j表示第j条边，如果边e联通了vi，那么m_{ij}为1，不连通则为0。该方法不适用于有向图

   2. 邻接矩阵：$a_{ij} = 1$如果v_i, v_j连通，否则为0。无向图的邻接矩阵对称

      1. 如果一个矩阵经过行列式变换后与另一个图相同，则说明两图同构

      2. aka关系矩阵

      3. 转置矩阵得到的A^T称为逆图

         - $A * A^T = B = [b_{ij}]$bij表示结点i和j同时指向的结点的数目，i=j时，bii表示结点i的出度

         - $A^T * A = C = [c_{ij}]$cij表示同时指向结点i和j的结点的数目，i=j时，bii表示结点i的入度

   3. 邻接表：没有多重边的图，可以分别列出每个顶点相连的边

   4. 无向图的连通性：如果图中任意两点之间都有通路，则称该图是连通的

- **SectionⅡ 欧拉图与哈密顿图**

1. 欧拉通路：包含图中每条边的简单通路。半欧拉图

 欧拉回路：包含图中每条边的简单回路。欧拉图 *通常假设G连通*

2. 连通图G是欧拉图，当且仅当 G中每个顶点的度数均为偶数

3. 若图G中任一顶点均为偶度点，则G中所有的边包含在若干边不相交的简单回路中。若连通图G中所有的边包含在若干边不相交的简单回路中，则G中含欧拉回路。

4. 设G是连通图，G是半欧拉图 当且仅当 G恰有两个奇度点。

5. Fluerry算法

6. - 割边的定义：在一个连通图中,如果删去其中一条边后,连通块的数量会增多,那么我们称这条边为桥或者是割边。

   - 1. 任取v0∈VG, 令P0=v0;
     2. 设Pi=v0e1v1e2,...,eivi, 按下列原则从EG-{e1,e2,...,ei}中选择ei+1。 (a) ei+1与vi相关联； (b) 除非别无选择，否则ei+1不应是G-{e1,e2,...,ei}中的割边。
     3. 反复执行第2步，直到无法执行时终止

7. 有向欧拉图：G中含有向欧拉回路。　G中任一顶点的入度等于出度。　G中所有的边位于若干个边互不相交的有向简单回路当中。

- **SectionⅢ 树**
- **SectionⅣ 平面图**
- **SectionⅤ 支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色**