得分	评阅人

一、选择题（共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ 的值（　　）.

(A) 1；　　(B) ∞；　　(C) 0；　　(D) 不存在.

2. 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上有二阶连续偏导数，且

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}>0,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,$ 则下列说法正确的是（　　）.

(A) $f(x,y)$ 在 D 上未必有最大值和最小值；

(B) $f(x,y)$ 在 D 上必有最值，且最大值点和最小值点都在 D 的边界上；

(C) $f(x,y)$ 在 D 上必有最值，且最大值点和最小值点都在 D 的内部；

(D) $f(x,y)$ 在 D 上必有最值，且最大值点在 D 的内部，最小值点在 D 的边界上.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}\right)$，则该级数（　　）

(A)条件收敛；　(B)绝对收敛；　(C)发散；　(D) $n\to\infty$ 时一般项不逼近于 0.

4. $f(x)=\arctan x$ 在 $x=0$ 处的 2019 阶导数 $f^{(2019)}(0)=$（　　）

(A) $(2016)!$　　(B) $-(2016)!$　　(C) $(2018)!$　　(D) $-(2018)!$

5. 一根周长为 a 呈椭圆 $L:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 形状的质量不均匀铁丝，其各点的密度为

$\rho(x,y)=4x^2+3y^2$，则该铁丝的质量为（　　）

(A) $12a$；　　(B) $8a$；　　(C) $16a$；　　(D) $24a$。

6. 设曲线 $L:x^2+\dfrac{1}{4}y^2=1,\quad l:x^2+y^2=4$ 都取逆时针方向，

$I_1=\oint_L\dfrac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2},\qquad I_2=\oint_l\dfrac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}.$　则（　　）

(A) $I_1=I_2$；　　(B) $I_1+I_2=2\pi$；　　(C) $\dfrac{I_2}{I_1}=2$；　　(D) $I_1\cdot I_2=2\pi^2$

得分	评阅人

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $y''+p(x)y'=f(x)$ 有一个特解 $\dfrac{1}{x}$，对应的齐次方程有一个特解 x^2，则此非齐方程的通解为_______

2. 曲面 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=3$ 在点 $(1,-1,-1)$ 处切平面方程为_______

3. 交换积分顺序 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y=$_______

4. 质点在力 $\vec{F}=(y,\ -x,\ z)$ 作用下从 $A(1,\ 0,\ 0)$ 点沿曲线 Γ 移动到 $B(1,\ 0,\ 2\pi)$ 点，$\Gamma: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t$，则力对质点所做的功 $W=$______

5. 设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第五卦限部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dS=$_____

6. $f(x)=\begin{cases}4, & -\pi\le x\le 0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅立叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于 _____

得分	评阅人

三、计算题（共 6 小题，1,2 小题各 10 分，其余每小题各 8 分，共 52 分）

1. （本题 10 分） 求微分方程 $y''-2y'+y=xe^x-e^x$ 的通解.

2. (本题 10 分) 空间区域 Ω 由 $x+y-1=0,\ z=xy,\ z=0$ 围成, 求 Ω 的体积 V.

3. 求过点 $A(1,2,3)$ 且与曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $B(1,-2,1)$ 的切线垂直的平面方程.

4. 设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中 $f(t)$ 二阶可导，$g(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 设 Σ 为曲面 $z=2-x^2-y^2$，$1\le z\le 2$ 取上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3z+x)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z-x^2yz\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x-x^2z^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和函数及数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3^n}+\frac{1}{n!}\right)$ 的和.

得分	评阅人

四、综合应用题（共 1 小题，共 12 分）

某建筑物的顶部曲面函数 $u=u(x,y)$ 可微，其全微分为 $du=2xdx-2ydy$，且 $u(1,1)=2$.（1）求下雨时房顶上 $A(1,1)$ 处雨水滑落最快方向 $\vec{l}$ 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$；（2）求出 $u(x,y)$；（3）求 $u=u(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+\frac{1}{4}y^2\le 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

一、CBADAC

4. $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1,\ 1]$

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \Rightarrow \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{2n+1} \Rightarrow \arctan^{(2019)}(0) = (-1)^{1009}\frac{(2019)!}{2019} = -(2018)!$$

二、$y = C_1 + C_2x^2 + \frac{1}{x}$　　$x - y - z - 3 = 0$　　$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$　　$2\pi(\pi - 1)$

$\frac{\pi a^4}{2}$　　$\frac{\pi + 4}{2}$

三、1. 解：特征方程 $r^2 - 2r + 1 = 0$, 特征根 $r_1 = r_2 = 1$,

对应的齐次方程的通解 $Y = (C_1 + C_2x)e^x$.

设非齐特解为 $y^* = x^2(ax+b)e^x$，$\Rightarrow a = \frac{1}{6},\ b = -\frac{1}{2}$，　$y^* = \frac{x^3}{6}e^x - \frac{x^2}{2}e^x$,

通解 $y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{x^3}{6}e^x - \frac{x^2}{2}e^x$.

2. 解：曲顶柱体的顶部曲面 $z=xy$，在 xy 面投影区域 $D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x$,

$$V = \iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy\,dy$$

$$= \frac{1}{24}$$

或由三重积分 $V = \iiint_\Omega \mathrm{d}v = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{xy} \mathrm{d}z = \frac{1}{24}$

3. 解：　$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6$，　$G(x,y,z) = x + y + z$

$\overrightarrow{n_1}\Big|_{(1,\ -2,\ 1)} = (2x,\ 2y,\ 2z)\Big|_{(1,\ -2,\ 1)} = (2,\ -4,\ 2)$，　$\overrightarrow{n_2}\Big|_{(1,\ -2,\ 1)} = (1,\ 1,\ 1)$,

曲线在点 $B(1,-2,1)$ 的切向量 $\vec{T}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-6\vec{i}+6\vec{k}=(-6,0,6)$

所求平面方程：$-6\cdot(x-1)+0\cdot(y-2)+6\cdot(z-3)=0\Rightarrow x-z+2=0$

4. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot 2+g_1'\cdot 1+g_2'\cdot y=2f'(2x-y)+g_1'(x,xy)+yg_2'(x,xy)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[2f'(2x-y)+g_1'(x,xy)+yg_2'(x,xy)\right]$$

$$=2f''(2x-y)(-1)+g_{11}''(x,xy)0+g_{12}''(x,xy)x+g_2'(x,xy)+y\left[g_{21}''(x,xy)0+g_{22}''(x,xy)x\right]$$

$$=-2f''(2x-y)+xg_{12}''(x,xy)+g_2'(x,xy)+xy\,g_{22}''(x,xy)$$

5. 解：作取下侧的辅助面 $\Sigma_1: z=1,\ D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，由 Gauss 公式得：

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma_1}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

而 z=1 垂直于 yz，zx 面，故 $\iint_{\Sigma_1}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma_1}x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=0$,

$$I=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_1}x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{D_{xy}}x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_1^{2-r^2}\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\ \mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

6. 解：

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots=x\left(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots\right)$$

$s(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$ 收敛域 $(-1,1)$

$$\int_0^x s(x)\,dx=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\frac{x}{1-x},\quad x\in(-1,1)$$

$$s(x)=\left(\int_0^x s(x)\,dx\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1)$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^n=xs(x)=\frac{x}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3^n}+\frac{1}{n!}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\right)\Bigg|_{x=\frac{1}{3}}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)_{x=1}$$

$$=2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\left(e^x-1\right)\Big|_{x=1}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+e-1=e$$

四、解：（1）$A(1,1)$处雨水滑落最快的方向是梯度反方向，

$grad\,u(x,y)=(2x,-2y)$，$-grad\,u(x,y)\big|_{(1,1)}=-(2x,-2y)\big|_{(1,1)}=(-2,2)$

即$\vec{l}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ~~$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=(2,-2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-2\sqrt{2}$~~

（2）$du(x,y)=2x\,dx-2y\,dy$，　$P=2x$，$Q=-2y$，$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}=0$

$\int_L 2x\,dx-2y\,dy$ 在整个平面路径无关，

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}2x\,dx-2y\,dy=\int_0^x 2x\,dx-\int_0^y 2y\,dy=x^2-y^2+C$$

$u(1,1)=2\Rightarrow C=2\Rightarrow u(x,y)=x^2-y^2+2$

或 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\Rightarrow u(x,y)=x^2+C(y)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=C'(y)=-2y\Rightarrow C(y)=-y^2+C$

$u(x,y)=x^2-y^2+C$，$u(1,1)=2\Rightarrow C=2\Rightarrow u(x,y)=x^2-y^2+2$

（3）先求 D 内部的驻点，$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial u}{\partial y}=-2y=0\Rightarrow x=y=0$，$u(0,0)=2$.

再求 D 的边界上的可疑极值点，

$$F(x,y)=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{1}{4}y^2-1\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ 或 } \lambda = -1 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2y + \dfrac{1}{2}\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + \dfrac{1}{4}y^2 - 1 = 0 \end{cases},\quad x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases},\quad \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$u(0,0) = 2,\ u(0,2) = -2,\ u(0,-2) = -2,\ u(1,0) = 3,\ \ u(-1,0) = 3.$

故 $u(x,y)$ 在 D 上**最大值为 3；最小值为 -2**