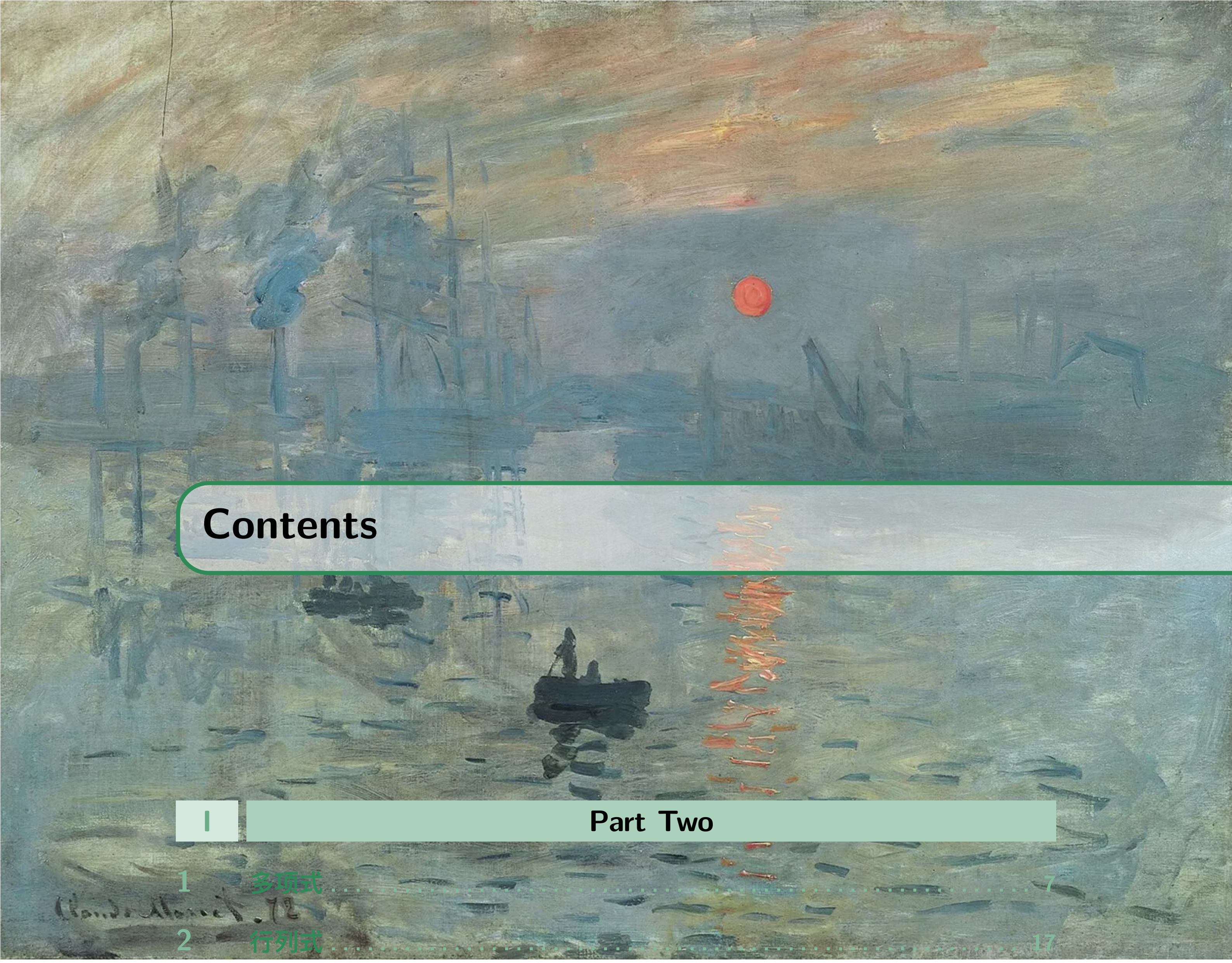
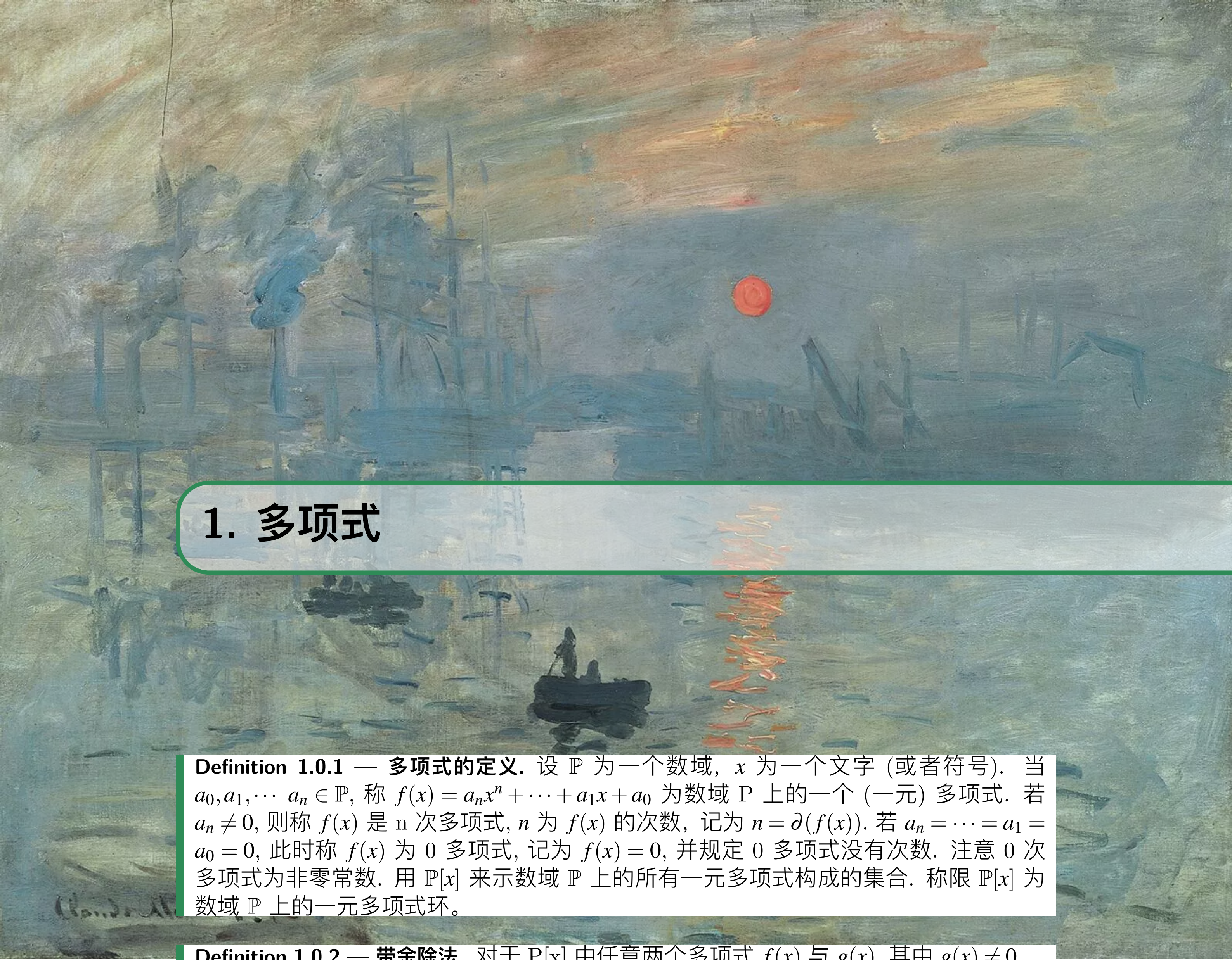
Linear Algebra

Xin Wen



Contents

Part Two



1. 多项式

Definition 1.0.1 — 多项式的定义. 设 $\mathbb{P}$ 为一个数域，x 为一个文字 (或者符号). 当 $a_0, a_1, \cdots a_n \in \mathbb{P}$, 称 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 为数域 P 上的一个 (一元) 多项式. 若 $a_n \neq 0$, 则称 $f(x)$ 是 n 次多项式, n 为 $f(x)$ 的次数，记为 $n = \partial(f(x))$. 若 $a_n = \cdots = a_1 = a_0 = 0$, 此时称 $f(x)$ 为 0 多项式, 记为 $f(x) = 0$, 并规定 0 多项式没有次数. 注意 0 次多项式为非零常数. 用 $\mathbb{P}[x]$ 来示数域 $\mathbb{P}$ 上的所有一元多项式构成的集合. 称限 $\mathbb{P}[x]$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的一元多项式环。

Definition 1.0.2 — 带余除法. 对于 P[x] 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$, 其中 $g(x) \neq 0$, 一定存在 P[x] 中的多项式 q(x) 和 $r(x)$ 使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

成立, 其中 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ 或 $r(x) = 0$, 并且这样的 $q(x), r(x)$ 是唯一的.

Definition 1.0.3 — 整除. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为 $\mathbb{P}[x]$ 中的两个多项式. 若存在 $h(x) \in \mathbb{P}[x]$ 使得

$$g(x) = f(x)h(x)$$

则称 $f(x)$ 整除 $g(x)$, 记为 $f(x)|g(x)$

Proposition 1.0.1 — 整除的性质. 设 $f(x), g(x), h(x)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的多项式. 多项式的整除有以下性质:

1. 若 $g(x) \neq 0$, 则 $g(x)|f(x)$ 的充要条件为 $g(x)$ 按带余除法除 $f(x)$ 所得的余式为零.
2. $f(x)|f(x), f(x)|0$
3. 如果 $f(x)|g(x), g(x)|f(x)$, 那么 $f(x) = cg(x)$, 其中 c 为非零常数. 特别地 $f(x) = g(x)$ 的充要条件为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数相同, 且 $f(x)|g(x), g(x)|f(x)$
4. 如果 $f(x)|g(x), g(x)|h(x)$, 那么 $f(x)|h(x)$, 即整除具有传递性.

5. 设 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_r(x) \in \mathbb{P}[x]$. 如果 $f(x)|g_i(x), i=1,2,\cdots,r$, 那么

$$f(x)|\left[u_1(x)g_1(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x)\right]$$

其中 $u_i(x)$ 为 $\mathbb{P}[x]$ 中任意多项式. 我们称 $u_1(x)g_1(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x)$ 其中 $u_i(x)$ 为 $\mathbb{P}[x]$ 中任意多项式. 我们称

$$u_1(x)g_1(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x)$$

为 $g_1(x),\cdots,g_r(x)$ 的一个组合.

R

1. 多项式的带余除法和多项式的整除关系不因所考虑数域的改变而改变.
2. 证明多项式整除问题时常用到下列运算公式:

$$x^n-a^n=(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)$$
$$x^{2k+1}+a^{2k+1}=(x+a)\left(x^{2k}-ax^{2k-1}+\cdots-a^{2k-1}x+a^{2k}\right)$$

Definition 1.0.4 — 综合除法. 求 $g(x)=(x-c)$ 除 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的商式 $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 以及余式 $r(x)=d$ 的方法. ” 比较 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 两边同次项的系数有

$$b_{n-1}=a_n, b_{n-2}=a_{n-1}+cb_{n-1}, \ldots, b_0=a_1+cb_1, d=a_0+cb_0$$

整理成简洁的形式就是

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ + & & cb_{n-1} & cb_{n-2} & \ldots & cb_1 & cb_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots & b_0 & d \end{array}$$

R 把 $f(x)$ 表成 $x-a$ 的方幂和, 即表成

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n$$

的形式时, 可以连续用综合除法.

Definition 1.0.5 — 最大公因式. 设 $\mathbb{P}$ 为一个数域, $f(x), g(x), d(x) \in \mathbb{P}[x]$ 称 d (x) 为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个最大公因式, 如果它满足:
1. $d(x)|f(x), d(x)|g(x)$, 即 $d(x)$ 为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个公因式;
2. 对 $\varphi(x) \in \mathbb{P}[x], \varphi(x)|f(x), \varphi(x)|g(x)$, 都存 $\varphi(x)|d(x)$

注. 求两个多项式的最大公因式最一般的方法是辗转相除法.

Theorem 1.0.2 对于 $\mathbb{P}[x]$ 中任意两个多项式 $f(x), g(x)$, 在 $\mathbb{P}[x]$ 中存在一个最大公因式 $d(x)$, 且存在 $u(x), v(x) \in \mathbb{P}[x]$ 使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

满足上式的 $u(x)$ 和 $v(x)$ 未必唯一.

Theorem 1.0.3 设限为一个数域, $f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x]$

1. $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式的非零常数倍仍是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不全为 0, 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式不为 0. 此时我们用 $(f(x), g(x))$ 來示 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的首项系数为 1 的那个最大公因式.
2. 如界 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 成立, 那么 $f(x), g(x)$ 和 $g(x), r(x)$ 的公因式的集合是相同的, 特别地, 它们也具有相同的最大公因式.
3. 两个多项式的最大公因式在相差一个非零倍数的意义下是唯一的.

Theorem 1.0.4 — 证明最大公因式的方法. 设限为一个数域 $\mathbb{P}$, $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{P}[x], f(x), g(x)$ 不全为 0. 证明 $(f(x), g(x)) = h(x)$ 的常用办法有:

1. 根据最大公因式的定义
2. 证明 $(f(x), g(x)) = h(x)$ 的等式左右两边相互整除, 且首项系数均为 1
3. 证明 $h(x)|f(x), h(x)|g(x)$ 且 $h(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的组合, 然后再证明 $h(x)$ 的首项系数为 1.

Definition 1.0.6 — 多项式互素的定义. 设 $\mathbb{P}$ 为一个数域, $f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x]$. 若

$$(f(x), g(x)) = 1 \tag{1.1}$$

则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是互素的.

Proposition 1.0.5 — 多项式互素的性质. 设 $\mathbb{P}$ 为一个数域, $f(x), g(x), h(x), f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{P}[x], a, b \in \mathbb{P}$

1. $f(x), g(x)$ 互素的充要条件为存在 P[x] 中的多项式 $u(x), v(x)$ 使 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$
2. 如果 $(f(x), g(x)) = 1$, 且 $f(x)|g(x)h(x)$, 那么 $f(x)|h(x)$
3. 如果 $f_1(x)|g(x), f_2(x)|g(x)$, 且 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$, 那么 $f_1(x)f_2(x)|g(x)$
4. 如果 $(f(x), g(x)) = 1, (f(x), h(x)) = 1$, 那么 $(f(x), g(x)h(x)) = 1$
5. 一次多项式 $x - a$ 与 $x - b$ 互素当且仅当 $a \neq b$

Theorem 1.0.6 — 证明多项式互素的方法. 设 $\mathbb{P}$ 为一个数域, $f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x]$ 不全为 0. 证明 $(f(x), g(x)) = 1$ 的办法有

1. 找 $u(x), v(x) \in \mathbb{P}[x]$ 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$
2. 直接证明 $f(x), g(x)$ 的任一公因式均为非零常数
3. 反证法. 假设存在不可约多项式 $p(x)$ 使得 $p(x)|f(x), p(x)|g(x)$, 找到矛盾
4. 证明 $f(x)$ 的根全部不是 $g(x)$ 的根

Definition 1.0.7 — 多个多项式的最大公因式. 设 $f_1(x), \cdots, f_n(x) \in \mathbb{P}[x]$ 不全为 0, 则其最大公因式 $d(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ 存在且唯一, 并且存在 $u_1(x), \cdots, u_n(x) \in \mathbb{P}[x]$ 使 $u_1(x)f_1(x) + \cdots + u_n(x)f_n(x) = d(x)$

R 数域 $\mathbb{P}$ 上的两个多项式的最大公因式、互素等不随数域的扩大而改变。

Definition 1.0.8 — 最小公倍式. 设 $f(x), g(x), m(x) \in \mathbb{P}[x]$. 称 $m(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的一个最小公倍式, 如界它满足:

1. $f(x)|m(x), g(x)|m(x)$, 則 $m(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的公倍式
2. m(x) 能整除 $f(x), g(x)$ 的任一公倍式.

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为 1 的最小公倍式记为 $[f(x),g(x)]$. 可以证明

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{c(f(x),g(x))}$$

这里 c 为 $f(x)g(x)$ 的首项系数.

Definition 1.0.9 — 不可约多项式的定义. 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的多项式, $\partial(f(x))\geqslant 1$. 若 $f(x)$ 不能的表示为两个次数都比 $f(x)$ 低的多项式的乘积, 则称 $f(x)$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的一个不可约多项式.

Proposition 1.0.7 — 不可约多项式的性质. 数域 $\mathbb{P}$ 上的不可约多项式其有下述性质:
1. 一个次数 $\geqslant 1$ 的多项式为不可约多项式当且仅当它的因式只有非零常数与它自身的非零常数倍.
2. 一个多项式是否为不可约多项式依赖于系数域, 从而多项式的分解也与数域有关.
3. 数域 $\mathbb{P}$ 上的不可约多项式 $p(x)$ 与数域 $\mathbb{P}$ 上的任一多项式 $f(x)$ 之间只可能有两种失系: $p(x)|f(x)$ 或者 $(p(x),f(x))=1$
4. 如果数域 P 上的多项式 p(x) 为不可约多项式, 那么对任意的 $f(x),g(x)\in\mathbb{P}[x]$, 由 $p(x)|f(x)g(x)$ 一定可以推出 $p(x)|f(x)$ 或 $p(x)|g(x)$. 进而若

   $$p(x)|f_1(x)\cdots f_s(x)$$

   则存在 i 使 $p(x)|f_i(x)$
5. 数域 $\mathbb{P}$ 上的一次多项式总是不可约多项式。

Theorem 1.0.8 — 多项式的因式分解定理. 数域 $\mathbb{P}$ 上每个次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成数域 $\mathbb{P}$ 上一些不可约多项式的乘积. 所谓唯一性是说如果有两个这样的分解式

$$f(x)=p_1(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)\cdots q_t(x) \tag{1.2}$$

那么必有 $s=t$, 并且适当排列因式的次序后有 $p_i(x)=c_iq_i(x),i=1,\cdots,s$ 其中 $c_i(i=1,\cdots,s)$ 是一些非零常数

Theorem 1.0.9 — 标准分解式. 设 $\mathbb{P}$ 为一个数域. $\mathbb{P}[x]$ 中任一次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 有唯一的标准分解式 $f(x)=cp_1^{r_1}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$ 这里 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)$ 为首项系数为 1 的两两互素的不可约多项式, r_i 为正整数, $i=1,\cdots,s$

R 数域 $\mathbb{P}$ 上的次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 的标准分解式 $f(x)=cp_1(x)^{r_1}\dots p_s(x)^{r_s}$ 在讨论整除以及没有关于 $f(x)$ 的更多具体信息时经常会用到, 特别是讨论幂的时候

Theorem 1.0.10 — 复系数多项式因式分解定理.. 每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一些一次因式的乘积. 因此, 复系数多项式 $f(x)$ 其有标准分解式

$$f(x)=c\,(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_s)^{r_s}$$

其中 $a_1,\cdots,a_s$ 是不同的复数, $r_1,\cdots,r_s$ 是正数. 这也说明了每个 n 次复系数多项式恰有 n 个复根 (重根按照重数计算).

Theorem 1.0.11 — 实系数多项式因式分解定理. 每个次数 $\geqslant 1$ 的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一些一次因式与二次不可约因式的乘积. 因此, 实系数多项式 $f(x)$ 具有标准分解式

$$f(x)=c\left(x-a_1\right)^{l_1}\cdots\left(x-a_s\right)^{l_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{k_1}\cdots\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{k_t}$$

其中 $a_1,\cdots,a_s,p_1,\cdots,p_t,q_1,\cdots,q_t$ 全是实数, $a_1,\cdots,a_s$ 两两不同 $,l_1,\cdots,l_s,k_1\ \ldots,k_t$ 是正整数, 并且 $p_i^2-4q_i<0(i=1,\cdots,t),x^2+p_1x+q_1,\cdots,x^2+p_tx+q_t$ 是两两互素的不可约多项式.

Definition 1.0.10 — 重因式的定义. 设 $k\geqslant 0$ 为整数, $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式. 若 $p^k(x)|f(x)$ 而 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$, 则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的一个 k 重因式.

Proposition 1.0.12 — 重因式的性质. 设 $\mathbb{P}$ 为一个数域, $f(x),p(x)\in\mathbb{P}[x]$. 如界 $p(x)$ 是不可约多项式, $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式, 那么它是微商 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式. 进而, 它分别是 $f''(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$ 的 $k-2,\cdots,1$ 重因式, 而不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式. 不可约多项式 p(x) 为 $f(x)$ 的重因式的充要条件是 p(x) 为 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式. 从而多项式 $f(x)$ 没有重因式当且仅当 $(f(x),f'(x))=1$

Theorem 1.0.13 设数域 $\mathbb{P}$ 上的多项式 $f(x)$ 的标准分解式为 $f(x)=cp_1^{r_1}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$. 利用

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=p_1(x)\cdots p_s(x)$$

可去掉因式重数, 而保留所有的不可约因式.

Theorem 1.0.14 — 余数定理. 设 $\mathbb{P}$ 为一个数域, $f(x)\in\mathbb{P}[x],a\in\mathbb{P}$. 用一次多项式 $x-a$ 去除多项式 $f(x)$, 所得的余式是一个常数, 这个常数等于函数值 $f(a)$

Definition 1.0.11 — 多项式函数根的定义. 设 $\mathbb{P}$ 为一个数域, $f(x)\in\mathbb{P}[x],a\in\mathbb{P}$. 若 $f(a)=0$, 则称 a 为 $f(x)$ 在数域 $\mathbb{P}$ 中的一个根.

Definition 1.0.12 — 多项式函数根的定义. 设 $\mathbb{P}$ 为一个数域, $f(x)\in\mathbb{P}[x],a\in\mathbb{P}$. 若 $f(a)=0$, 则称 a 为 $f(x)$ 在数域 $\mathbb{P}$ 中的一个根.

Proposition 1.0.15 — 多项式函数根的性质. 设 $\mathbb{P}$ 为一个数域, $f(x)\in\mathbb{P}[x],a\in\mathbb{P}$

1. a 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $(x-a)|f(x)$
2. $\mathbb{P}[x]$ 中 $n(n\geqslant 0)$ 次多项式在数域 $\mathbb{P}$ 中的根不可能多于 n 个, 重根接重数计算.

Theorem 1.0.16 设 $\mathbb{P}$ 为一个数域, $f(x),g(x)\in\mathbb{P}[x]$. 如果 $f(x),g(x)$ 的次数都不超过 n, 而它们在 $n+1$ 个两两不同的数 $a_1,\cdots,a_{n+1}$ 上有相同的函数值, 即 $f\left(a_i\right)=g\left(a_i\right),i=1,\cdots,n+1$, 那么 $f(x)=g(x)$

Theorem 1.0.17 — 代数基本定理. 每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域中一定有一个根.

Theorem 1.0.18 — 多项式函数有重根的判定. 设 $f(x)\in\mathbb{P}[x], c\in\mathbb{P}$

1. c 为 $f(x)$ 的重根, 当且仅当 $f(c)=f'(c)=0$
2. c 为 $f(x)$ 的重根, 当且仅当 c 为 $(f(x),f'(x))$ 的根
3. 若 $(f(x),f'(x))=1$, 则 $f(x)$ 无重根
4. 若 $f(x)$ 在数域 $\mathbb{P}$ 上不可约, 则 $f(x)$ 无重根, 特别地, 在复数域 $\mathbb{C}$ 上无重根.

Theorem 1.0.19 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $\mathbb{P}[x]$ 中两个多项式. $f(x)|g(x)$ 当且仅当 $f(x)$ 的根全是 $g(x)$ 的根 (计算重数). 最常用的是 $f(x)$ 的根全是单根, 尤其是 n 次单位根的情况.

Definition 1.0.13 — 本原多项式. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个整系数多项式. 如果系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 除 ±1 外没有其他的公因数, 则称 $f(x)$ 为一个本原多项式.

Theorem 1.0.20 任一非零的有理系数多项式 $f(x)$ 都可以表示为一个有理数 r 与一个本原多项式 $g(x)$ 的乘积, 且这种表示除相差一个正负号外是唯一的. 因此有理系数多项式是否可约、是否有根、是否可以分解等问题都可以转化为整系数多项式的对应问题.

Theorem 1.0.21 — Gauss 引理. 两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

Theorem 1.0.22 如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积, 那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

Proposition 1.0.23 设 $f(x),g(x)$ 是整系数多项式, 且 $g(x)$ 是本原多项式. 如果 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $h(x)$ 是有理系数多项式, 那么 $h(x)$ 一定是整系数的.

Theorem 1.0.24 — 整系数多项式的有理根. 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个整系数多项式, 而 r/s 是它的一个有理根, 其中 r,s 是互素的整数, 那么必有 $s|a_n, r|a_0$. 特别地, 如果 $f(x)$ 的首项系数 $a_n=1$, 那么 $f(x)$ 的有理根都是整根, 而且是 a_0 的因子.

Theorem 1.0.25 — 艾林斯坦判别法. 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个整系数多项式. 如果有一个素数 p 使得 (1) $p\nmid a_n$ (2) $p|a_{n-1},\cdots,a_0$ (3) $p^2\nmid a_0$ 那么 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

Theorem 1.0.26 当不能直接用艾森斯坦判别法判断一个次数不小于 1 次的有理系数多项式 $f(x)$ 是否可约时, 可以做一个适当的替换, 把 $f(x)$ 变成一个可以直接应用艾森斯坦判别法的情况, 常用的替换有 $x=ay+b($ 要求$a\neq0)$ 等.

Theorem 1.0.27 对高斯引理、艾森斯坦判别法以及上述几个结果的证明思想可以用来解决许多问题. 希望读者能够掌握它们的证明思想.

Theorem 1.0.28 下面的事实在研究整系数多项式在有理数域上是否可约时经常用到: 设 $f(x)$ 为整系数多项式, $m,n\in\mathbb{Z}$. 则作为整数, $(m-n)|(f(m)-f(n))$

Definition 1.0.14 — n 次单位原根的定义. x^n-1 在复数域上有 n 个根, 令 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$, 则

$$
\begin{aligned}
x^n-1&=(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1\right)\\
&=(x-1)(x-\omega)\left(x-\omega^2\right)\cdots\left(x-\omega^{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

其中 ω 叫作 n 次单位元根. 我们在解决问题时会经常利用

$$1+\omega+\cdots+\omega^{n-1}=0 \tag{1.3}$$

这一关系式.

Definition 1.0.15 — 多元多项式. 设 $\mathbb{P}$ 为一个数域, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个文字. 形如 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 的式子称为一个单项式, 其中 $a\in\mathbb{P},k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是非负整数. $k_1+k_2+\cdots+k_n$ 称为该单项式的次数。一些单项式的和

$$\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} a_{k_1,k_2,\cdots,k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

称为 n 元多项式, 其中系数不为 0 的次数最高的单项式的次数称为这个多项式的次数. 称所有系数在数域限中的 n 元多项式的全体 $\mathbb{P}[x_1,x_2\cdots,x_n]$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 元多项式环。

Definition 1.0.16 — n 元多项式的字典排列法. 设 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 和 $(l_1,l_2,\cdots,l_n)$ 为两个 n 元数组, 若有某个 $i\leqslant n$ 使

$$k_1-l_1=0,\cdots,k_{i-1}-l_{i-1}=0,k_i-l_i>0$$

则称数组 ($k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 先于数组 $(l_1,l_2,\cdots,l_n)$, 记作

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)>(l_1,l_2,\cdots,l_n)$$

Definition 1.0.17 任取 n 元多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

中的两个单项式

$$
\begin{aligned}
&ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\\
&bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

单项式 (1) 写在单项式 (2) 的前面。这种排列多元多项式中项的方法称为字典排列法。按字典排列法写出的第一个系数不为零的单项式称为多项式的首项。

R 多元多项式的首项未必是最高次项。

Theorem 1.0.29 当 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0, g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$ 时,

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的首项等于 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的首项的乘积.

Corollary 1.0.30 推论

1. 若 $f_i\neq 0, i=1,2,\cdots,m$, 则乘积 $f_1f_2\cdots f_m$ 的首项等于这 m 个 f_i 的首项相乘之积.
2. 如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0, g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$, 那么

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$$

Definition 1.0.18 — 齐次多项式. 若多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} a_{k_1,k_2,\cdots,k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

中每个单项式全是 m 次的, 则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 m 次齐次多项式.

Proposition 1.0.31

1. 两个齐次多项式的乘积仍然是齐次多项式, 乘积的次数等于这两个齐次多项式的次数之和.
2. 任一 m 次多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都可唯一地表示成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

其中 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 i 次齐次多项式, 称之为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 i 次齐次成分.

3. 设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{l} g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

则 $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 k 次齐次成分为

$$h_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i+j=k} f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

特别地, $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的最高次齐次成分为

$$h_{m+l}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,g_l(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

R

1. 对于多元多项式, 也有乘积的次数等于次数的和.
2. 与一元多项式一样, 我们可以定义 n 元多项式函数的概念.

Theorem 1.0.32 — 韦达 (Viete) 定理. 设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\in\mathbb{P}[x], t_1,t_2,\cdots t_n$ 是 $f(x)$ 的 n 个根. 则根与系数的关系如下:

$$\begin{cases} -a_1=t_1+t_2+\cdots+t_n \\ a_2=t_1t_2+t_1t_3+\cdots+t_{n-1}t_n \\ \vdots \\ (-1)^i a_i=\sum t_{k_1}t_{k_2}\cdots t_{k_i} \\ \vdots \\ (-1)^n a_n=t_1t_2\cdots t_n \end{cases}$$

Definition 1.0.19 — 对称多项式. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{P}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$, 若对任意 $i,j,1\leqslant i,j\leqslant n$, 有

$$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$$

则称该多项式为对称多项式.

Definition 1.0.20 — 初等对称多项式. 称

$$\begin{cases} \sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n \\ \sigma_2=x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n \\ \vdots \\ \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n \end{cases}$$

为 n 个未定元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式.

R

1. 对称多项式的和、积以及对称多项式的多项式仍为对称多项式.
2. 特别地, 初等对称多项式的多项式仍为对称多项式.

Theorem 1.0.33 — 对称多项式基本定理. 对任一 n 元对称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 都存在唯一元多项式 $\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, 使得 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$

Theorem 1.0.34 — 一元多项式的判别式. 对 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 差积的平方

$$D_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2$$

是一个重要的对称多项式。由对称多项式基本定理知存在 n 元多项式 $D_2(x_1,x_2\ \cdots,x_n)$ 使

$$D_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=D_2(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是一元多项式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的根时, , 由根与系数的关系

知 $a_i=(-1)^i\sigma_i, i=1,2,\cdots,n$. 代入式 $(*)$ 得

$$D_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=D_2\left(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\right)=D\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$$

显然，多项式 $f(x)$ 有重根的充要条件是

$$D_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0$$

即

$$D\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=0$$

因此, $D\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=0$ 称为多项式 $f(x)$ 的判别式.

2. 行列式

Definition 2.0.1 — 行列式的定义. 设 $a_{ij} \in \mathbb{P}, i, j = 1, 2, \cdots, n$. 称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

为数域 $\mathbb{P}$ 上的一个行列式, 这里 $j_1, j_2 \ldots j_n$ 取遍 $12 \ldots n$ 的所有排列. 行列式还有下面的两个等价定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \tag{2.1}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \tag{2.2}$$

Proposition 2.0.1 行列式的性质:

1. 行列式与它的转置行列式相等
2. 行列式的两行 (列) 互换，行列式改变符号.
3. 以一个数乘行列式等于用该数乘以该行列式的任意一行 (列)，或行列式的某行 (列) 的公因子可提出来.
4. 行列式两行 (列) 对应的元素相同，行列式为零.
5. 行列式两行 (列) 对应的元素成比例，行列式为零.
6. 行列式的某行 (列) 的元素都是两数之和，则此行列式等于两行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7. 将行列式类行 (列) 的倍数加列另一行 (列)，行列式的值不变.

Definition 2.0.2 — 余子式、代数余子式. 在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中消去 a_{ij} 所在的行和列所得到的 $n-1$ 阶行列式记为 M_{ij}，称之为元素 a_{ij} 的余子式. 称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

R 元素 a_{ij} 的余子式、代数余子式只与 a_{ij} 所在的位置有关, 而与元素 a_{ij} 本身的数值大小没有关系.

Theorem 2.0.2 n 阶行列式 $|A|$ 第于它的某行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 而 $|A|$ 的某行 (列) 的元素与另一行 (列) 对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即"

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases} |A|, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{cases}$$
$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\begin{cases} |A|, & j=k \\ 0, & j\neq k \end{cases}$$

Definition 2.0.3 — 范德蒙德 (Vandermonde) 行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

Theorem 2.0.3 下面的结果会经常被用到.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

Theorem 2.0.4 — 克拉默 (Cramer) 法则. 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{2.3}$$

的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式 $d=|A|\neq 0$, 那么线性方程组有解且唯一，解可通过系数表达为

$$x_1=\frac{d_1}{d},x_2=\frac{d_2}{d},\cdots,x_n=\frac{d_n}{d}$$

其中 d_i 为 d 的第 i 列换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$, 而其余各列不动所得的行列式.

Theorem 2.0.5 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

只有零解的充要条件为方程组的系数矩阵 A 的行列式 $|A|\neq 0$, 而有非零解的充要条件为 $|A|=0$

Theorem 2.0.6 — 拉普拉斯 (Laplace) 定理. 设在行列式 D 中任意取定 k 行. 由这 k 行元素所能组成的一切 k 级子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 D. 注. 设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix}=\left|A\right|\left|B\right|,\quad \left|\begin{matrix} \mathbf{0} & A \\ B & * \end{matrix}\right|=(-1)^{mn}\left|A\right|\left|B\right|$$

Theorem 2.0.7 设 A 和 B 是 n 阶方阵. 则 $|AB|=|A||B|$

Theorem 2.0.8 求行列式的指导思想是想办法把原来的行列式化成上三角或者下三角形状的行列式. 常用的方法有

1. 选定一行 (或列)，乘一数加到另一行 (或列)
2. 第 $n-1$ 行 (或列) 乘一数加到第 n 行 (或列), 依此类推;
3. 第一行 (或列) 乘一数, 加到第二行 (或列), 新的第二行乘一数加到第三行, 依此类推.

Theorem 2.0.9 设 A 为 n 阶方阵, α,β 为 n 维列向是. 则

$$\left|A+\alpha\beta'\right| = |A|\left(1+\beta' A^{-1}\alpha\right) \tag{2.4}$$

Theorem 2.0.10 设 A 是 $n\times m$ 阶矩阵,B 是 $m\times n$ 阶矩阵, $\lambda\neq 0$. 则

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|$$

R 注. 当行列式能化成以上两个定理中的形式时, 利用这里的结论可以达到降阶的目标, 从而简化计算.

2.1 习题技巧

Theorem 2.1.1 1. 遇到行和或者列和相同的，把每一行加到第一行再提出
2. 每一列有相同的因子，采取加边法
3. 如果第一行或者第一列的元素比较少，可以尝试展开
4. 箭头型行列式对角元素乘上倒数倍加到第一列，消去第一列
5. 构造形式的矩阵的行列式，尝试展开最后一列 + 数学归纳法
6. 变形的范行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$$

$$= (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$$

$$= A_{1(n+1)} + yA_{2(n+1)} + \cdots + y^{n-1}A_{n(n+1)} + y^n A_{(n+1)(n+1)}$$

$$(-1)^k \prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)\cdot \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k} = A_{(n-k+1)(n+1)}$$

3. 线性方程组

3.1 基础知识

Definition 3.1.1 — 线性组合、线性表出、向量组的等价.
1. 向量 α 称向量组 $\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_s$ 的一个线性组合或向量 α 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出：如果存在数域 $\mathbb{P}$ 中的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得
$$\alpha=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s$$
2. 记向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的所有线性组合构成的集合为
$$L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=\{t_1\beta_1+t_2\beta_2+\cdots+t_s\beta_s|t_1,t_2,\cdots,t_s\in\mathbb{P}\}$$
3. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_s$ 中的每个向量都可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出, 则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出.
4. 两个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 称为等价的, 如果它们可以相互线性表出. 向量组的等价其有自反性、对称性和传递性。

Proposition 3.1.1 — 线性相关和线性无关的一些性质.
1. 若一个向量组的部分相关, 则整个向量组线性相关，若一个向量组线性无关, 则它的部分组也线性无关.
2. 一个向量组线性相关 (线性无关)，则截断后 (延长后) 的向量组线性相关 (线性无关)。
3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是两个向量组. 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_s$ 线性表出且 $r>s$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关. 或者说, 一个线性无关组不可能由比它含向量个数少的向量组线性表出。如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线件无关, 那么 $r\leqslant s$.(注意证明)
4. 任意 n + 1 个 n 维向量必线性相关.
5. 两个等价的线性无关的向量组必含有相同个数的向量.

Definition 3.1.2 — 极大线性无关组. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为一个非零向量组, $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ $(r\geqslant 1)$ 为其一个子组, $\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}\subset\{1,2,\cdots,k\}$. 若 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是线性无关的,

且任给 $\alpha_t \in \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\setminus\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\}$, $\alpha_t,\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是线性相关的, 则称 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 的一个极大线性无关组. 换言之, $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_i}$ 为非零向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 的一个极大线性无关组是指 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关, 且任给

$$\alpha_t \in \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\setminus\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\}$$

α_t 均可以由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出 (事实上, 任意向量的表示法还是唯一的).

R

1. 注意零向量组没有极大线性无关组. 在以后的讨论中, 只要谈到一个向量组的极大线性无关组, 前提是这个向量组一定含有非零向量.
2. 非零向量组的任意一个极大线性无关组都与这个向量组本身等价. 从而非零向量组的任意两个极大线性无关组都是等价的.

Definition 3.1.3 — 向量组的秩.
1. 非零向量组的任意一个极大线性无关组所含有的个数是固定的, 它是由向量组本身确定的, 称为向量组的秩. 我们规定零向量组的秩为 0.
2. 等价的向量组有相同的秩.

讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 (无关) 问题时常常要考虑向量方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\mathbf{0}$$

(1) 解的情况. 而这个向量方程实际上是一个线性方程组.

Theorem 3.1.2 证明与向量组有关结论时常用的办法

1. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分必要条件为 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\mathbf{0}$ 只有零解, 而线性相关的充要条件为有非零解, 特别是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中有一个是已知向量组的组合时使用此法:
2. 证向量组线性无关时常用反证法;
3. 构造新的向量组, 即在一向量组中添加一个向量或一个向量组
4. 取向量组的极大线性无关组
5. 向量组 $\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})\in\mathbb{P}^n,(i=1,2,\cdots,s)$ 线性相关 (无关) 的充要条件为方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s=0\\ \quad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{ns}x_s=0\end{cases}$$

有非零解 (只有零解).

Theorem 3.1.3 — 矩阵的秩.
1. 对任意的矩阵 A, A 的行秩和列秩相等, 统称为矩阵的秩, 记为 $r(A)$. 若矩阵 A 为零矩阵, 规定 $r(A)=0$.
2. 对非零矩阵 A, $r(A)=r$ 当且仅当 A 有一个 r 阶子式不为 0, 而所有 $r+1$ 阶子式全为 0.
3. 矩阵 A 有一个 k 阶子式不为 0 当且仅当 $\mathrm{r(A)}\geqslant k$
4. A 的所有 s 阶子式都是 0 当且仅当 $\mathrm{r(A)}\leqslant s-1$
5. 矩阵的秩即其最高阶非零子式的阶数。
6. $|A_{n\times n}|=0\Leftrightarrow A$ 的行 (列) 向量组线性相关 $\Leftrightarrow r(A)<n$

7. n 阶方阵 A 的秩为 $n \Leftrightarrow |A| \neq 0$

Theorem 3.1.4 1. 若向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表示，则向量组 (I) 的秩 $\leq$ 向量组 (II) 的秩
2. 等价的向量组有相同的秩 (反之不然);
3. 向量组 (I) 与 (II) 等价 $\Leftrightarrow$ 向量组 (I) 与 (II) 的秩相同，且其中一个可由另一个线性表示
4. 向量组 (I) 与 (II) 等价 $\Leftrightarrow$ 向量组 (I), (II), (I, II) 三者均等价 $\Leftrightarrow$ 向量组 $(\mathrm{I}),(\mathrm{II}),(\mathrm{I},\mathrm{II})$ 的秩均相同，其中 (I, II) 表示 (I) 与 (II) 合并成的向量组

Theorem 3.1.5

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=d_2 \\ \vdots \\ c_{rr}x_r+\cdots+c_{rn}x_n=d_r \\ 0=d_{r+1} \\ 0=0 \\ \vdots \\ 0=0 \end{cases} \tag{3.1}$$

方程组无解 (有解)$\Leftrightarrow 0=d_{r+1}\neq 0$ 出现 (不出现): 方程组有唯一解 $\Leftrightarrow r=n$ 方程组有无穷多解 $\Leftrightarrow r<n$, 此时有 $n-r$ 个自由未知量. 注意齐次线性方程组 $AX=0$ 总是有解的.

Theorem 3.1.6 解方程组 $AX=b$ 的消元法本质上是对增广矩阵 $\bar{A}=(A,b)$ 进行初等行变换化成阶梯形。线性方程组 $AX=b$ 有解的充要条件为 A 与 $\bar{A}=(A,b)$ 的秩相同.

Theorem 3.1.7 令 $\alpha_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{si} \end{pmatrix}, i=1,2,\cdots,n, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则方程组 $AX=b$ 有解等价于存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$, 从而 $AX=b$ 有解 $\Leftrightarrow$ b 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出 ;$AX=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow b$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出且表示法唯一 $\Leftrightarrow b$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关: 在有解的情况下, $AX=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关.

Theorem 3.1.8 齐次线性方程组 $AX=0$ 的两个解的和仍是它的解；一个解的倍数仍是它的解, 因此解的线性组合仍是它的解.

Theorem 3.1.9 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$. 则齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n(s=n$ 时, $|A|=0)$. 特别地, $s<n$ 时有非零解.

Theorem 3.1.10 设齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 为 $AX=\mathbf{0}$ 的解.

1. $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关:
2. $AX=\mathbf{0}$ 的任一解可以表示为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 的线性组合

则称 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 为 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系.

Theorem 3.1.11 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 为 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系, 这里 $r=r(A)<n$. 若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$ 线性无关, 则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$ 也为 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系 $\Leftrightarrow \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$ 与 $\alpha_1\ \alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 等价 $\Leftrightarrow$ 存在 $n-r$ 阶可逆阵 C 使得

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r})=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r})C$$

Theorem 3.1.12 若 $r(A)=n$, 则齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解, 此时方程组没有基础解系; 当 $r(A)=r<n$ 时, $\mathrm{AX}=0$ 有基础解系, 且任意一组基础解系中含 $n-r(A)$ 个解; 其体地, 对齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$, 不妨设将方程组通过初等变换化为的增广矩阵为下述矩阵的齐次线性方程组 (当有必要时, 允许交换自变量的顺序)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & 0 \end{pmatrix}$$

这时, $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 为自由未知量. 让自由未知量分别取 $1,0,\cdots,0;0,1,\cdots,0,0,...,0,1$, 则得到方程组的一个基础解系为

$$\begin{aligned} \alpha_1&=(-c_{1,r+1},-c_{2,r+1},\cdots,-c_{r,r+1},1,0,\cdots,0)\\ \alpha_2&=(-c_{1,r+2},-c_{2,r+2},\cdots,-c_{r,r+2},0,1,\cdots,0)\\ &\vdots\\ \alpha_{n-r}&=(-c_{1,n},-c_{2,n},\cdots,-c_{r,n},0,0,\cdots,1) \end{aligned}$$

Theorem 3.1.13

1. 非齐次线性方程组 $AX=b(b\neq 0)$ 的两个解的差是其导出组 $AX=0$ 的解; $AX=b$ 的一个解与其导出组 $AX=0$ 的一个解的和是该方程组的解.
2. 在 $AX=b$ 有解的情况下, 设 γ_0 为 $AX=b$ 的一个特解, 则 $AX=b$ 的任一解可表成 $\gamma=\gamma_0+\eta$ 其中 η 为 $AX=0$ 的一个解. 因此, 对方程组 $AX=b$ 的任一特解 γ_0, 当 η 取遍它的导出组的解时, $\gamma_0+\eta$ 给出了 $AX=b$ 的所有解. 特别地, $AX=b$ 有唯一解当且仅当 $AX=0$ 有唯一解. $AX=0$ 解的个数与 $AX=b$ 解的个数一样多.

Theorem 3.1.14 齐次线性方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解的充要条件为 A 与 B 的行向量组等价。

Theorem 3.1.15

1. 方程组有界等价于系数矩阵和增广矩阵的秩相同
2. 方程组有解 $\Leftrightarrow$ 列向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$ 等价
3. 如果 $A_{s\times n}$ 系数矩阵等于行数, 则一定存在解
4. 方程组有唯一解 $\Leftrightarrow$ 列向基 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表示, 且表达方式唯一 $\Leftrightarrow$ 列

向基组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$ 的极大线性无关组 $\Leftrightarrow$ 秩$(A)=$ 秩$(\bar{A})=n$

5. 方程组有无穷多解 $\Leftrightarrow$ 列向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表示，且表达方式不唯一 $\Leftrightarrow$ 列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性相关且其极大线性无关组是 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$ 的极大线性无关组

Theorem 3.1.16
1. 齐次线性方程组的解空间作为向量组，它的任一极大无关组 (若有的话) 即是该齐次线性方程组的一个基础解系。
2. 在 n 元齐次线性方程组有非零解的情况下，它有基础解系，且基础解系中所含向量的个数等于 $n-r$, 其中 r 表示系数矩阵的秩.

Theorem 3.1.17 齐次线性方程组的一组非零解 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_s$ 称为它的一个基础解系, 若
1. 齐次线性方程组的任一解都是 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_s$ 的一个线性组合
2. 向量组 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_s$ 线性无关.

Theorem 3.1.18 非齐次线性方程组的两个解之和，以及解的 k ($k\neq 1$) 倍不是该非齐次线性方程组的解;

Theorem 3.1.19 设 γ_1,γ_2 为非齐次线性方程组的两个解，则 $t_1\gamma_1+t_2\gamma_2$ 亦是该非齐次线性方程组的解，其中 $t_1+t_2=1$

3.2 解题技巧

Theorem 3.2.1
1. 求极大线性无关组–使用初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1(r+1)} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & c_{2(r+1)} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{r(r+1)} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则原方程组化为同解的方程组

$$\begin{cases} x_1=-c_{1(r+1)}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n \\ x_2=-c_{2(r+1)}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n \\ \cdots \\ x_r=-c_{r(r+1)}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n \end{cases}$$

分别用 $n-r$ 组数 $(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),(0,\ldots,0,1)$ 代自由未知量 $(x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n)$ 得到 $n-r$ 个解

2. 非齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1=-c_{1(r+1)}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n+d_1 \\ x_2=-c_{2(r+1)}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n+d_2 \\ \quad\cdots \\ x_r=-c_{r(r+1)}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n+d_r \end{cases}$$

$x_{r+1}=k_1,x_{r+2}=k_2,\dots,x_n=k_{n-r}$ 得到该非齐次线性方程组的通解

$$\begin{aligned}\gamma=&k_1\begin{pmatrix}-c_{1(r+1)}\\-c_{2(r+1)}\\\vdots\\-c_{r(r+1)}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-c_{1(r+2)}\\-c_{2(r+2)}\\\vdots\\-c_{r(r+2)}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_{n-r}\begin{pmatrix}-c_{1n}\\-c_{2n}\\\vdots\\-c_{rn}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_r\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\\=&k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}+\gamma_0,\quad(\forall k_1,k_2,\dots,k_{n-r}\in\mathbf{P})\end{aligned}$$

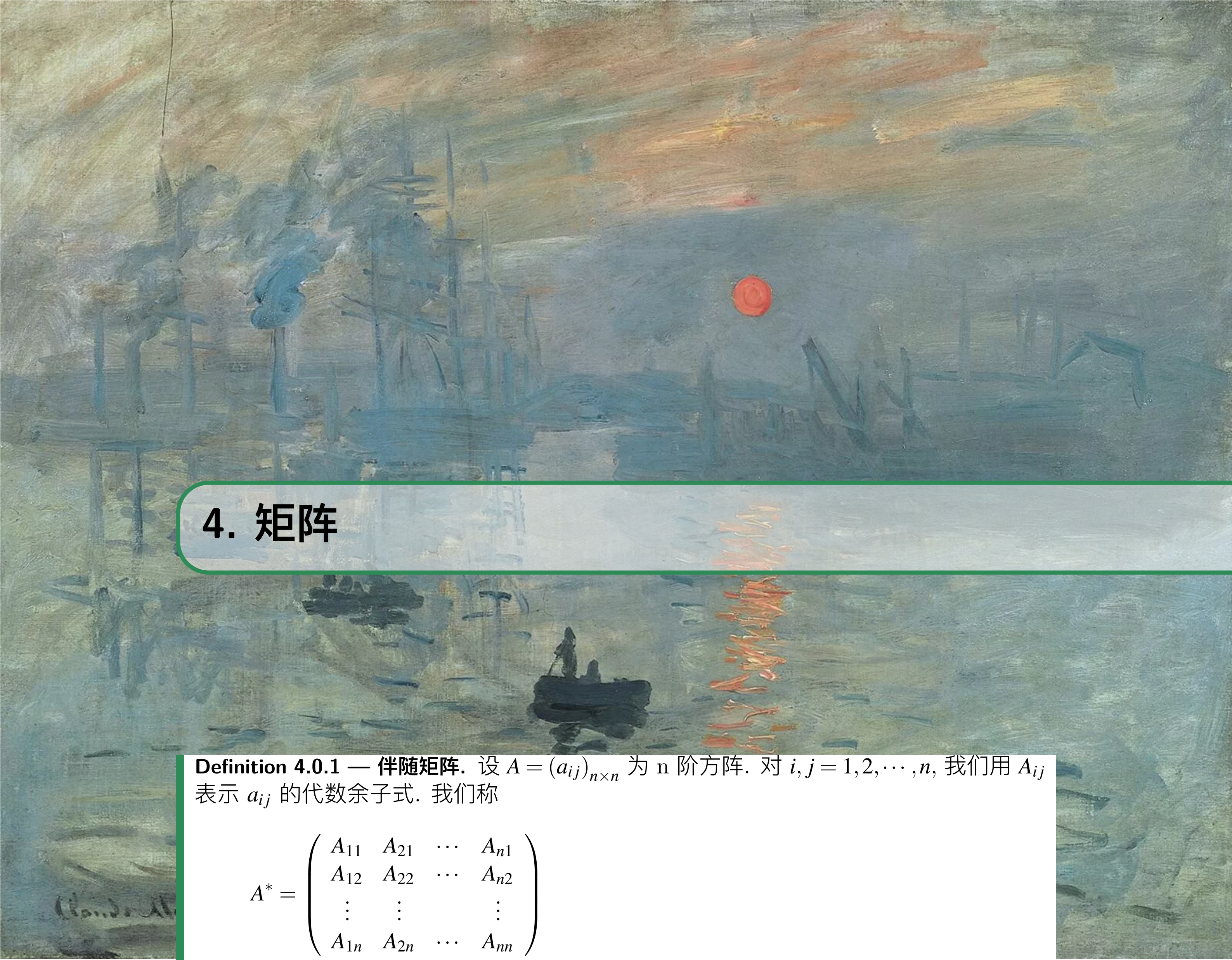
3. 向量组线性无关和线性相关：行列式为零/不为零

■ **Example 3.1** 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，，且 $\alpha_1=-\alpha_2+2\alpha_3$ 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$, 求线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$ 的通解.

Proof. 首先根据基础解系 $n-r$，三个线性无关，则 $r\geq 3$，并且有一个齐次方程的解，故这个就是基础解系，再加上题目中给出了 β 和 α 的线性组合，这个也是一个特解，故解的形式确定了。 ■

Theorem 3.2.2 — (替换定理). 设向量组 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$ 线性无关,且可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性表出，则存在正整数 $k(1\leq k\leq n)$ 使得 $\alpha_k,\beta_2,\dots,\beta_m$ 线性无关.

Proof. 若不然, 即对任意 $k(1\leq k\leq n)$ 有 $\alpha_k,\beta_2,\dots,\beta_m$ 线性相关. 由 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$ 线性无关知 $\beta_2,\dots,\beta_m$ 线性无关, 则 α_k 可由 $\beta_2,\dots,\beta_m$ 线性表示 $(k=1,2,\dots,n)$. 于是 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 可由 $\beta_2,\dots,\beta_m$ 线性表示. β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性表示，则 β_1 可由 $\beta_2,\dots,\beta_m$ 线性表示，这与 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$ 线性无关矛盾. 故存在正整数 k 使得 $\alpha_k,\beta_2,\dots,\beta_m$ 线性无关. ■



4. 矩阵

Definition 4.0.1 — 伴随矩阵. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵. 对 $i,j=1,2,\cdots,n$, 我们用 A_{ij} 表示 a_{ij} 的代数余子式. 我们称

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵

Theorem 4.0.1
1. $AA^*=A^*A=|A|E_n$
2. $|A^*|=|A|^{n-1}$
3. $(kA)^*=k^{n-1}A^*$
4. $(AB)^*=B^*A^*$ (证明参见本章例题4.7)
5. $(A^*)^*=|A|^{n-2}A,(n\geq 2)$
6. $(A')^*=(A^*)'$
7. 若 A 可逆, 则 $\left(A^{-1}\right)^*=(A^*)^{-1}$
8. 二阶方阵的伴随矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

9. 设 A,B 为方阵, 则

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} |B|A^* & 0 \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

10. 设 A 为 $n(\geq 2)$ 阶方阵, 则

$$\text{秩}\,(A^*) = \begin{cases} n, & \text{当秩}(A) = n; \\ 1, & \text{当秩}(A) = n-1; \\ 0, & \text{当秩}(A) < n-1 \end{cases}$$

Theorem 4.0.2 四分块三角矩阵: 如下形式的分块矩阵称为四分块上 (下) 三角矩阵, 即

$$U = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \text{或} V = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$$

其中 A,B 均为方阵. 秩 (U) $\geq$ 秩 $(A)+$ 秩 (B), 秩 $(U) \geq$ 秩 (C) 若 A,B 均可逆, 则四分块矩阵 U, V 均可逆, 且

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}, V^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

Definition 4.0.2 若 A 可逆，则 $|A| \neq 0$. 反之, 若 $|A| \neq 0$, 则由

$$AA^* = A^*A = |A|E_n$$

得到

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E_n$$

故

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

Proposition 4.0.3 — 与伴随矩阵相关的重要结论有.

1. 基本关系:$AA^* = A^*A = |A|E_n$
2. 求逆公式:$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, (A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$
3. 若 A 可逆, 则 $A^* = |A|A^{-1}$
$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$
4. 运算交换次序:$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
$$(A')^* = (A^*)'$$
5. 设 A 为 n 阶矩阵, 则 ($kA)^* = k^{n-1}A^*$

Theorem 4.0.4 — 矩阵的等价. 设 A, B 是 $s \times n$ 矩阵. 称 A 与 B 等价, 若 B 可经一系列的初等变换化为 A，即存在一系列初等矩阵 $P_1, \cdots, P_s, Q_1, \cdots, Q_t$, 使得

$$A = P_s \cdots P_1 B Q_1 \cdots Q_t$$

Theorem 4.0.5

1. 两同阶矩阵 A, B 等价当且仅当 A, B 秩相等.

2. 任何一矩阵 A 与 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 等价, 即存在可逆矩阵 P,Q 使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q$$

3. 矩阵 A 可逆当且仅当存在一系列初等矩阵 $P_1,\cdots,P_t$ 使得 $A = P_1\cdots P_t$
4. 可逆矩阵总可以经过一系列的初等行变换化成单位矩阵。
5. 可逆矩阵总可以经过一系列的初等列变换化成单位矩阵。
6. 可逆矩阵总可以经过一系列的初等变换化成单位矩阵。
7. 对矩阵 A 做初等变换不改变矩阵 A 的秩。因此若 P,Q 可逆, 则

$$r(PA) = r(AQ) = r(PAQ) = r(A)$$

Theorem 4.0.6 — 初等变换法求矩阵的逆. 由于 n 阶可逆矩阵总可以经过一系列的初等行变换化成单位矩阵，即存在一系列初等矩阵 $P_1,\cdots,P_t$ 使 $P_t\cdots P_1A = E_n$. 由此可见,

$$A^{-1} = P_t\cdots P_1 = P_t\cdots P_1E_n$$

上面两个式子表明如果用一系列初等行变换把可逆矩阵 A 化成单位矩阵，那么对单位矩阵 E_n 进行完全相同的一系列的初等行变换，就得到矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1}：可用如下格式方便地计算矩阵的逆：

$$(A|E) \longrightarrow (E|A^{-1})$$

Theorem 4.0.7 若 AB = 0，往往将 B 按列分块, 则 B 的列向量都是齐次线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的解且 $r(A)+r(B) \leqslant n$, 其中 n 为 A 的列数.

Theorem 4.0.8 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 两两不同, 则与

$$\begin{pmatrix} \lambda_1E_{t_1} & & & \\ & \lambda_2E_{t_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_sE_{t_s} \end{pmatrix}$$

可交换的矩阵只能形如 $\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}$, 这里 $B_1,B_2,\cdots,B_s$ 分别是 $t_1,t_2,\cdots,t_s$ 阶方阵。特别地, 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 两两不同. 则与 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵只能

是对角矩阵 $\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_s \end{pmatrix}$, 这里 $b_1, b_2, \cdots, b_s$ 为常数.

Theorem 4.0.9 常用的关于矩阵的秩的不等式

1. $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \geqslant r(A), r(B), r(C), r(D)$
2. $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = r(A) + r(C)$
3. $AB = \mathbf{0} \Rightarrow r(A) + r(B) \leqslant n$
4. $r(A+B) \leqslant r(A) + r(B)$
5. $r\begin{pmatrix} 0 & A \\ C & D \end{pmatrix} \geqslant r(A) + r(C)$
6. $r(A_{s\times n}) + r(B_{n\times s}) - n \leqslant r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$

Theorem 4.0.10 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, 则秩 $(A+B) \leq$ 秩 $(A)+$ 秩 (B)

Proof. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, 则

$$A + B = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

设 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}$ 与 $\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_t}$ 分别是 A 与 B 的列向基组的极大线性无关组, 则 $A+B$ 的列向量组 $\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n$ 可由向基组 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}, \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_t}$ 线性表示. 于是

$$\text{秩}(A+B) \leq \text{秩}(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}, \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_t}) \leq s + t = \text{秩}(A) + \text{秩}(B)$$

证明了秩 $(A+B) \leq \text{秩}(A, B) \leq \text{秩}(A) + \text{秩}(B)$.) ■

4.1 解题技巧

Theorem 4.1.1 1. 对 E 进行拆分
2. $(A+E)^{-1} = (2B-E)^{-1}(B-E)$ $(2B-E, B-E) \to \left(E, (2B-E)^{-1}(B-E)\right)$
3. 熟记各种性质
4. 求矩阵的 n 次方，先拆分，再找幂等

Theorem 4.1.2 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, 则秩 $(A) =$ 秩 $(A'A)$

Proof. 易知 $Ax = 0$ 的解是 $A'Ax = 0$ 的解. 任取 $A'Ax = 0$ 的解 η, 即 $A'A\eta = 0$, 则

$$(A\eta)'(A\eta) = \eta' A' A\eta = 0$$

不妨设 $A\eta = (y_1, y_2, \ldots, y_m)'$, 由 A 为实矩阵知 $y_1, \ldots, y_m$ 均为实数. 于是

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2 = (A\eta)'(A\eta) = 0$$

从而 $y_1 = \cdots = y_m = 0$, 即 $A\eta = 0$, 故 $A'Ax = 0$ 的解亦是 $Ax = 0$ 的解. 综合知 $Ax = 0$ 与 $A'Ax = 0$ 同解, 从而 $n-$ 秩 $(A) = n-$ 秋 $(A'A)$, 即秩 $(A) =$ 秩 $(A'A)$ ■

Theorem 4.1.3 设 A 为 $s\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵, 若 $AB=O$, 则秩 $(A)+$ 秩 $(B)\leq n$

Proof. 利用 B 可以由 $AX=0$ 的基础解系线性表示 ■

Theorem 4.1.4 设 A,B 分别为 $n\times m,m\times n$ 矩阵, 证明: E_n-AB 可逆 $\Leftrightarrow E_m-BA$ 可逆.

Proof. 由于

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_m & B \\ O & E_n-AB \end{pmatrix}$$

$$|E_n-AB|=\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=|E_m-BA|$$

于是 E_n-AB 可逆 $\Leftrightarrow |E_n-AB|\neq 0\Leftrightarrow |E_m-BA|\neq 0\Leftrightarrow E_m-BA$ 可逆类比 $(1-ab)^{-1}=1+a(1-ba)^{-1}b$ 验证 $(E_n-AB)^{-1}=E_n+A\left(E_m-BA\right)^{-1}B$ ■

5. 二次型

Definition 5.0.1 — 二次型的定义. 设 $\mathbb{P}$ 为数域, $a_{ij}\in\mathbb{P}(i,j=1,2,\cdots,n),x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为文字或符号. 称二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\
+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

Z 为数域 $\mathbb{P}$ 上的一个二次型。二次型还有矩阵形式

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots\\
&+a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\
=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\\
=&X'AX
\end{aligned}
$$

这里 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',A=(a_{ij})$ 为 n 阶对称矩阵. 称这为二次型 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 称二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵 A 的秩为二次型的秩. 二次型实质上就是一个 n 元二次多项式函数.

R 二次型的矩阵必是对称矩阵. 若 B 为数域上的一个 n 阶方阵, 则二次型 $X'BX$ 的矩阵为 $\frac{B+B'}{2}$

Theorem 5.0.1 设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$, 这里 A 为对称矩阵. 记 $Y=(y,y_2,\cdots,y_n)'$. 则存在一个可逆矩阵 $P_{n\times n}$ 使得非退化线性替换 $X=PY$ 将关于 $x_1,\dots,x_n$ 的二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化成关于 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的二次型 $g(y_1,y_2,\ y_n)$, 使得 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵 A 变成 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的矩阵 $P'AP$ 非退化线性变换就是函数论中的变量替换.

Definition 5.0.2 — 矩阵的合同. 设 A,B 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵。若存在数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶可逆矩阵 P 使得 $B=P'AP$, 则称 A 与 B 合同. 容易验证合同是矩阵间的一种等价关系, 满足自反性, 对称性和传导性, 即:

1. A 与 A 合同
2. A 与 B 合同, 则 B 与 A 合同
3. A 与 B 合同, B 与 C 合同, 则 A 与 C 合同

Proposition 5.0.2 两个合同的矩阵有相同的秩，矩阵的合同关系与数域有关

Theorem 5.0.3 数域 $\mathbb{P}$ 上任意一个二次型都可经非退化线性替换化成标准形 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$ 的形式, 但标准形不唯一.(不是唯一的意思是 d_i 的顺序可以交换) 也就是说, 任意一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵.

R 化二次型为标准形的方法有两种：配方法及对矩阵进行合同变换.

Definition 5.0.3 — 规范形. 复数域 C 上的任意一个二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都可经非退化线性替换化成标准形

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$$

的形式, 这里 r 为二次型的秩. 此时我们称 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$ 为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形. P 数域上二次型的规范形是唯一的.

Theorem 5.0.4 — 惯性定理. 任一实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 一定可经非退化线性替换 $X=PY$ 化成规范形

$$g(y_1,\cdots,y_n)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-y_{p+2}^2-\cdots-y_{p+q}^2$$

也就是说 A 合同于

$$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 p 为正惯性指数，q 为负惯性指数, $p+q$ 为二次型的秩, 也就是 A 的秩.

1. 要用心领会惯性定理的证明方法和证明思想
2. 合同变换不改变二次型的正、负惯性指数
3. 证明存在 X_0, 使 $X_0'AX_0$ 的值满足特定的条件 (比如, 为负、为正、为零等)，也常常要把二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 经非退化线件替换 $X=$ PY 化成规范形 $y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$, 容易由规范形确定满足条件的 Y_0, 然后由 $X_0=PY_0$ 找到满足条件的 X_0
4. 要计算二次型的函数的极值，也要先将它化成标准形, 尤其是规范形.
5. 两个 n 阶实对称矩阵在实数域上合同 $\Leftrightarrow$ 它们有相同的秩与符号差。

Proposition 5.0.5 非退化线性替换不改变实二次型的正负惯性指数.

Theorem 5.0.6
1. 实二次型 f 的矩阵 A 的特征值均大于零
2. 若 A 为正定矩阵，则 $|A|>0$(反之不换)
3. 若 A 为正定矩阵，则 A^{-1},A^k,A^* 亦然

4. 若 A 为正定矩阵，实对称矩阵 B 与 A 合同，则 B 亦是正定矩阵
5. 若 A,B 均为 n 阶正定矩阵，则 $A+B$ 亦是正定矩阵
6. 若 A,B 分别为 n,m 然正定矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 亦是正定矩阵
7. 若 A 为 $m\times n$ 实矩阵, 则 $A'A$ 是 n 阶正定矩阵 $\Leftrightarrow A$ 为列满秩的 (参见本章例题5.7)
8. 若 A,B 均为 n 阶正定矩阵，则 AB 是正定矩阵 $\Leftrightarrow AB=BA$

Theorem 5.0.7 — 正定矩阵的判定. 实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 正定的判定方法:
1. 利用定义：证明对任意一组不全为零的数 $c_1...,c_n$ 有 $f(c_1,\cdots,c_n)>0$
2. 证明标准形为 $g(y_1,\cdots,y_n)=d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2$, 其中 $d_i>0, i=1,\cdots,n$ 规范形为 $h(z_1,\cdots,z_n)=z_1^2+\cdots+z_n^2$, 正惯性指数为 n.
3. 证明 A 合同于 E_n
4. 证明 A 的所有 (顺序) 主子式全大于零。
5. 证明存在可逆矩阵 P 使得 $A=P'P$.
6. 证明 A 的特征值全大于零 (一般用正交矩阵化成对角形, 且对角线元素可按任意顺序排列)。

Theorem 5.0.8 负定二次型 (或负定矩阵) 的判定: 设 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x'Ax$, 其中对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 则下面各等价:
1. 实二次型 f 是负定的
2. 实二次型 f 的负惯性指数为 n
3. 实二次型 f 的矩阵 A 是负定的;
4. 实二次型 f 的矩阵 A 与 $-E_n$ 合同
5. 存在 n 阶实可逆矩阵 C, 使得 $A=-C'C$
6. 实二次型 f 的矩阵 A 的所有 k 阶顺序主子式满足

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, (k=1,2,\ldots,n)$$

7. 实二次型 f 的矩阵 A 的特征值均小于零

Theorem 5.0.9 — 半正定矩阵的判定. 实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 半正定的判定方法:
1. 利用定义：证明对任意一组不全为零的数 $c_1,...,c_n$ 有 $f(c_1,\cdots,c_n)\geqslant 0$
2. 证明标准形为 $g(y_1,\cdots,y_n)=d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2$, 其中 $d_i\geqslant 0, i=1,\cdots,n$, 则规范形为 $h(z_1,\cdots,z_n)=z_1^2+\cdots+z_p^2$, 即正惯性指数与秩相等.
3. A 合同与 $\begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. 证明 A 的所有主子式全大于或等于零
5. 证明存在实矩阵 C 使得 $A=C'C$.
6. 若 A 为半正定矩阵，则 $|A|\geq 0$(反之不然且 $x'Ax=0$ 当且仅当 $Ax=0$

R 这里的实矩阵 C 不一定是可逆的甚至可以不是方阵. 如 $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

则 $A=C'C=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&4\\2&4&20\end{pmatrix}$, 对其施行合同变换, 知 A 合同于 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

即 A 半正定.

7. 证明 A 的特征值全大于或等于零

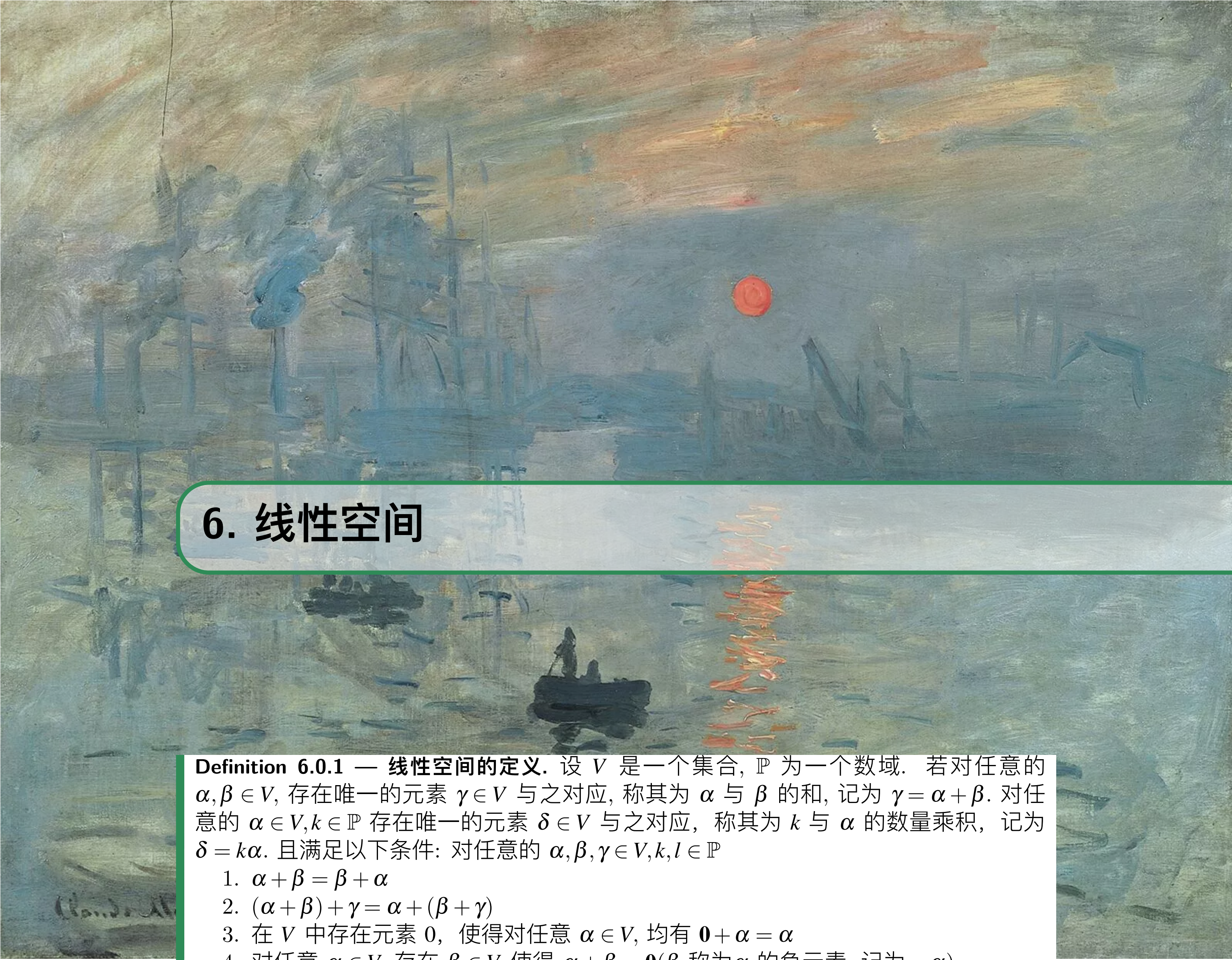
Proof. 第六条：易知充分性显然. 下证必要性，由于 A 为 n 阶半正定矩阵，则存在 n 阶实矩阵 Q 使得 $A=Q'Q$. 令 $Qx=(c_1,c_2,\dots,c_n)'$, 于是

$$c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2=(Qx)'(Qx)=x'Ax=0$$

又 $c_1,c_2,\dots,c_n$ 均为实数，从而 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$, 即 $Qx=0$. 故 $Ax=Q'Qx=0$ ■

5.1 解题步骤

Theorem 5.1.1
1. 合同变换化成标准型：对 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$ 进行合同变换，也就是对行列进行相同的变换，最后化成只有 ±1 的对角矩阵，下部分的矩阵是旧变量 x 和新变量 y 的非退化变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&\frac{5}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$
2. 配方法根据交叉项来配，可以多加平方项
3. 证明矩阵正定可以利用正定二次型



6. 线性空间

Definition 6.0.1 — 线性空间的定义. 设 V 是一个集合, $\mathbb{P}$ 为一个数域. 若对任意的 $\alpha,\beta\in V$, 存在唯一的元素 $\gamma\in V$ 与之对应, 称其为 α 与 β 的和, 记为 $\gamma=\alpha+\beta$. 对任意的 $\alpha\in V,k\in\mathbb{P}$ 存在唯一的元素 $\delta\in V$ 与之对应，称其为 k 与 α 的数量乘积，记为 $\delta=k\alpha$. 且满足以下条件: 对任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in V,k,l\in\mathbb{P}$

1. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
2. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
3. 在 V 中存在元素 0，使得对任意 $\alpha\in V$, 均有 $\mathbf{0}+\alpha=\alpha$
4. 对任意 $\alpha\in V$, 存在 $\beta\in V$ 使得 $\alpha+\beta=\mathbf{0}$(β 称为α 的负元素, 记为 $-\alpha$)
5. $1\alpha=\alpha$
6. $k(l\alpha)=(kl)\alpha$
7. $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$
8. $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

我们就称 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的一个线性空间。

Definition 6.0.2 如果 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的一个线性空间, W 是 V 的一个子集合，且 W 关于 V 中的加法和数量乘法也构成了数域 $\mathbb{P}$ 上的一个线性空间 (事实上，只需要关于 V 中的加法和数乘封闭即可)，则称 W 是 V 的一个线性子空间, 简称为 V 的一个子空间.

Definition 6.0.3 — 基、维数与坐标. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为线性空间 V 中的一个线性无关的向量组, 且 V 中每个向量都可以用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出, 我们就称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基, 称 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 维线性空间, 称 n 为 V 的维数, 记为 $\dim V=n$. 若 $V=\{0\}$ 规定 $\dim V=0$. 设 α_1, $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为线性空间 V 的一组基. 若 $\alpha\in V$, 且存在数域 $\mathbb{P}$ 中的数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 使得 $\alpha=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_n\alpha_n$, 我们就称 $(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 为 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为线性空间 V 中的一个向量组. 则集合

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\{t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_n\alpha_n:t_1,\cdots,t_n\in\mathbb{P}\}$$

是 V 的一个子空间, 且其维数等于向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 的秩.

Definition 6.0.4 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间 V 的两组基.

1. 若
$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)A$$
则称 A 为由基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵. 过渡矩阵总是可逆矩阵。
2. 若 A 为由基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 到基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵,$\gamma\in V$ 在 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 这两组基下的坐标分别是 X,Y, 即
$$\gamma=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X,\gamma=(\beta_1,\cdots,\beta_n)Y$$
则 $Y=AX$
3. 设 $A,B\in\mathbb{P}^{n\times n}$, 则
$$\begin{aligned}[(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A]B&=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)AB\\(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A+(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)A&=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)A\\(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A+(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)B&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(A+B)\end{aligned}$$

■ **Example 6.1** $\mathbf{P}[x]_n$ 的基 $1,x,\ldots,x^{n-1}$ 到 $1,(x+1),\ldots,(x+1)^{n-1}$ 的过渡矩阵为 Pascal 三角

Definition 6.0.5 — 拉基定理. 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 维线性空间, V_1 是 V 的非零子空间, $\dim V_1=k$ 且 $k<n$. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为 V $_1$ 的一组基, 则在 V 中存在 $n-k$ 个向量 $\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n$ 使得
$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n$$
为 V 的一组基.

Definition 6.0.6 — 子空间的交与和. 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 维线性空间, V_1,V_2 是 V 的线性子空间. 分别称
$$\begin{aligned}V_1\cap V_2&=\{\alpha:\alpha\in V_1,\alpha\in V_2\}\\V_1+V_2&=\{\alpha+\beta:\alpha\in V_1,\beta\in V_2\}\end{aligned}$$
为 V_1 与 V_2 的交与和。易验证子空间的交与和仍是子空间。对于子空间的交与和，我们有下面的维数公式:
$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$$
注. (1) 注意维数公式的证明思想. (2) 如界 n 维线性空间 V 的两个子空间 V_1,V_2 维数的和大于 n, 那么 V_1,V_2 必含有公共的非零向量.

Definition 6.0.7 — 直和. 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个子空间. 若 V_1+V_2 中每个向量的分解都是唯一的, 则称 V_1+V_2 为直和, 记为 $V_1\oplus V_2$ 下列条件是等价的:

1. $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$
2. $\alpha_1+\alpha_2=\mathbf{0},\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\mathbf{0}$, 则零向量的分解唯一;
3. V_1+V_2 中存在一个向量, 其分解是唯一的
4. $V_1\cap V_2=\{0\}$
5. $\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)$

上述结果可以推广到 s 个子空间 $V_1,..,V_s$ 的情况, 其中 (4) 改为

$$(4') \, V_i \cap \sum_{j\neq i} V_j = \{0\}, i = 1,\cdots,s \tag{6.1}$$

或

$$V_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} V_j = \{0\}, i = 2,\cdots,s$$

R $V_1 + V_2$ 为直和当且仅当 V_1 的基与 V_2 的基放在一起线性无关.

Theorem 6.0.1 — 直和补的存在性. 若 U 为线性空间 V 的子空间, 则存在 V 的子空间 W 使得

$$V = U \oplus W.$$

我们称 W 为 U 的一个直和补 (或余子空间). 直和补一般是不唯一的。例如：设 V 为线性空间，$\alpha_1,\alpha_2 \in V$ 是线性无关的且 $V = L(\alpha_1,\alpha_2)$. 记 $V_1 = L(\alpha_1), V_2 = L(\alpha_2), V_3 = L(\alpha_1+\alpha_2)$, 则 $V = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_3$, 但 $V_2 \neq V_3$ 若 U 为线性空间 V 的子空间, 则 U 在 V 中的直和补唯一当且仅当 $U = \{0\}$ 或 $U = V$

Definition 6.0.8 — 同构. 设 V 和 V' 为数域 $\mathbb{P}$ 上两个线性空间, σ 是 V 到 V' 的映射, 对任给的 $\alpha,\beta \in V$, 任意 $k \in \mathbb{P}$, 若

1. σ 为一一映射 (即 σ 既是单射，又是满射)
2. $\sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$, 即保持加法;
3. $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$, 即保持数乘,

则称 σ 为线性空间 V 到线性空间 V' 的同构映射。此时我们称线性空间 V 和 V' 是同构的. 若 σ 为线性空间 V 到线性空间 V' 的同构映射，则 σ^{-1} 为 V' 到 V 的同构映射，且 σ 满足

1. $\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
2. $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$
3. $\sigma(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r) = k_1\sigma(\alpha_1)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)$
4. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关, 则 $\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_r)$ 线性相关. 若 $\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_r)$ 线性无关, 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 也线性无关

线性空间的同构具有自反性、对称性、传递性。同构映射的乘积仍是同构映射. 数域 $\mathbb{P}$ 上的任意两个 n 维子空间都同构, 且它们均与 $\mathbb{P}^n$ 同构.

7. 线性变换

Definition 7.0.1 — 线性变换的定义及基本性质. 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, $\sigma: V \rightarrow V$ 为一个映射. 若对任意的 $k \in \mathbb{P}, \alpha, \beta \in V$, 均有

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha+\beta) &= \sigma(\alpha)+\sigma(\beta) \\ \sigma(k\alpha) &= k\sigma(\alpha) \end{aligned}$$

则称 σ 为线性空间 V 上的一个线性变换. 若 σ 为线性空间 V 上的一个线性变换，则

1. $\sigma(\mathbf{0})=\mathbf{0}, \sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$
2. 线性变换保持线性组合与线性关系式不变. 换言之, 设 $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_r \in V, k_1, \cdots, k_r \in \mathbb{P}, \beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r$, 则

$$\sigma(\beta)=k_1\sigma(\alpha_1)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)$$

3. 线性变换把线性相关的向量组变成线性相关的向至组. 但是反过来是不对的, 线性变换有可能把线性无关的向量组变成线性相关的向量组, 例如零变换就是这样.

Definition 7.0.2 — 线性变换的加法，数乘和乘积. 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间, V 上的全体线性变换记为 $L(V)$：在 $L(V)$ 上定义如下的加法和数是乘法：对任意的 $\sigma, \tau \in L(V)$ $\alpha \in V, k \in \mathbb{P}$, 令

$$(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha), (k\sigma)(\alpha)=k(\sigma\alpha)$$

则 $\sigma+\tau, k\sigma$ 均为线性变换, $L(V)$ 关于上面定义的加法和数量乘法构成了数域 P 上的一个线性空间。

我们还可在 $L(V)$ 上定义乘法: 对任意的 $\sigma, \tau \in L(V), \alpha \in V, (\sigma\tau)\alpha=\sigma(\tau\alpha)$ 定义了 V 上的一个线性变换, 记为 $\sigma\tau$，称为 σ 与 τ 的乘积.

Definition 7.0.3 — 线性变换在一组基下的矩阵. 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, $\sigma, \tau \in L(V)$

1. 线性变换完全由它在一组基下的像来确定。换句话说，两个线性变换 $\sigma=\tau$ 当且

仅当对 V 的任意一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$, 都有 $\sigma\varepsilon_1=\tau\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2=\tau\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_n=\tau\varepsilon_n$

2. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V 中任意 n 个向量, 一定存在唯一的线性变换 $\sigma\in L(V)$ 使得 $\sigma\varepsilon_i=\beta_i,i=1,2,\cdots,n$
3. 设 σ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间 V 上的线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基. 设

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2\cdots,\sigma\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

这里 A 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵，A 的第 1 列，第 2 列，...，第 n 列分别是 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots\sigma(\varepsilon_n)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标的转置.
设 $\alpha,\beta\in V$, 且

$$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X,\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Y$$

即它们在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标分别为 X,Y. 则

$$\beta=\sigma\alpha\Leftrightarrow Y=AX$$

这里 $n\times n$ 阶方阵 A 称为 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵.

Theorem 7.0.1 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, 则 $L(V)$ 与 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 是同构的，它们之间的同构映射 φ 可依下面的方法建立:

$$\begin{aligned}\varphi: L(V)&\longmapsto\mathbb{P}^{n\times n}\\ \sigma&\longmapsto A\end{aligned}$$

即取定 V 的一组基后，规定 σ 在 φ 之下的像就是它在这组基下的矩阵 A。因此 $L(V)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 $n\times n$ 维线性空间.

Theorem 7.0.2 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间, 线性变换 $\sigma,\tau\in L(V),k\in\mathbb{P}$, 设 σ,τ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵分别为 A,B, 则
1. $\sigma+\tau$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 $A+B$
2. $k\sigma$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 kA
3. $\sigma\tau$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 AB
4. 设 $f(x)\in\mathbb{P}[x]$, 则 $f(\sigma)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 $f(A)$

由 $L(V)$ 与 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 同构可知线性变换间的关系与它们在同一组基下的矩阵之间的关系是相同的. 因此在考虑线性变换之间的关系时，我们经常考虑它们在同一组基下的矩阵之间的关系，反之亦然。

Definition 7.0.4 — 矩阵的相似. 设 $A,B\in\mathbb{P}^{n\times n}$. 若存在可逆矩阵 $P\in\mathbb{P}^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP=B$ 则称 A 与 B 是相似的, 记为 $A\sim B$

对 $A,B\in\mathbb{P}^{n\times n},a\in\mathbb{P},k\in\mathbb{N}$, 我们有以下结论:
1. 若 $A\sim B$, 则 $|A|=|B|,r(A)=r(B),A,B$ 有相同的特征多项式和最小多项式;
2. $A\sim B\Leftrightarrow A'\sim B'$
3. $A\sim B,A$ 可逆 $\Rightarrow A^{-1}\sim B^{-1}$
4. $A\sim B\Rightarrow aA\sim aB,A^k\sim B^k$, 进而对任意的 $f(x)\in\mathbb{P}[x],f(A)\sim f(B)$. 事实上, 若存在可逆矩阵 P 使得 $B=P^{-1}AP$, 则 $f(B)=P^{-1}f(A)P$
5. $A\sim B\Rightarrow A^*\sim B^*$
6. $A^*\sim B^*,|A|=|B|\neq 0\Rightarrow A\sim B$
7. $A\sim B\Leftrightarrow\lambda E_n-A,\lambda E_n-B$等价

8. $A \sim A'$

Theorem 7.0.3 — 同一线性变换在不同基下的矩阵之间的关系. 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间, σ 为 V 的线性变换, σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的矩阵分别为 A,B 且 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$ 则 $B=P^{-1}AP$, 即同一线性变换在 V 的两组基下的矩阵是相似的。反之, 若

$$B=P^{-1}AP$$

即 A 与 B 相似, 则它们可看作同一个线性变换在 V 的两组基下的矩阵。

R 相似和数域无关

Theorem 7.0.4 设 $\sigma\in L(V)$, 用 I_V (或者 I) 表示 V 上的恒等变换, 即对任意的 $x\in V, I(x)=x$. 若存在 V 上的一个变换 τ 使得 $\sigma\tau=\tau\sigma=I_V$, 称 τ 为 σ 的逆变换, 记为 σ^{-1}. 线性变换的逆变换仍是线性变换而且是唯一的。

设 $\sigma\in L(V),\sigma^{-1}$ 存在, σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A, 则 σ^{-1} 在基 $\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A^{-1}

R 利用 $L(V)$ 与 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 之间的同构，我们欲证明一线性变换 $\sigma\in L(V)$ 可逆，只需证明 σ 在 V 的一组基下的矩阵是可逆矩阵即可。

Definition 7.0.5 — 线性变换 σ 的多项式. 设 σ 是数域 $\mathbb{P}$ 上线性空间 V 上的一个线性变换. 设 σ 在一组基下的矩阵为 $A, f(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{P}[x]$. 称

$$f(\sigma)=a_m\sigma^m+\cdots+a_1\sigma+a_01_V\in L(V)$$

为 σ 的一个多项式 $f(\sigma)$

Corollary 7.0.5 若 $f(x),g(x)\in\mathbb{P}[x], f(\sigma)g(\sigma)=g(\sigma)f(\sigma)$, 即同一线性变换 σ 的多项式都是可交换的:

Corollary 7.0.6 若两个线性变换可交换, 则它们的多项式也是可交换的.

Definition 7.0.6 — 矩阵的特征值、特征向量和特征子空间. 设 $A\in\mathbb{P}^{n\times n},\lambda\in\mathbb{P}$. 如果存在一个非零向量 $X\in\mathbb{P}^n$, 使得

$$AX=\lambda X$$

那么 λ 称为 A 的一个特征值, 而 X 称为 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量. 称

$$\{\alpha:A\alpha=\lambda\alpha\}\subset P^n$$

为 A 的属于特征值 λ 的特征子空间, 记为 V_λ^A 或者 V_λ

Definition 7.0.7 — 线性变换特征值、特征空间和特征子空间. 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间, $\sigma \in L(V)$. 如果对于 $\lambda \in \mathbb{P}$, 存在一个非零向量 $\xi \in V$, 使得 $\sigma\xi = \lambda\xi$ 那么 λ 称为 σ 的一个特征值，而 ξ 称为 σ 的属于特征值 λ 的一个特征向量。

易知 $k\xi(k \neq 0)$ 也为 σ 的属于特征值 λ 的特征向量. 这说明对线性变换 σ 的一个特征值，对应的特征向量有无穷多个; 而一个特征向量只能属于一个特征值。

Definition 7.0.8 设 λ 为线性变换 σ 的特征值，称 $\{\alpha|\sigma\alpha = \lambda\alpha, \alpha \in V\}$ 为 σ 的属于特征值 λ 的特征子空间, 记为 V_λ^σ 或者 V_λ. 显然它的维数等于属于 λ 的线性无关的特征向量的最大个数.

Theorem 7.0.7 设 σ 在 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A, 则 σ 与 A 有相同的特征值 (包括重数)，且 V_λ^σ 同构于 V_λ^A

Theorem 7.0.8 $\dim(V_\lambda) = n-$ 秩 $(\lambda E - A)$, 其中 A 为 $\mathscr{A}$ 在 V 的基下的矩阵。维数 $\dim(V_\lambda)$ 称为 A 的特征值 λ 的几何重数。线性变换 A 的特征值 λ 的几何重数不超过代数重数

Theorem 7.0.9 设 λ 是方阵 A 的特征值，则 λ^k 是 A^k 的特征值.

一般地，$\phi(\lambda)$ 是 $\phi(A)$ 的特征值, 其中 $\phi(t) \in \mathbf{P}[t]$; 若 A 可逆，则 λ^{-1} 为 A^{-1} 的特征值, $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 的特征值

方阵	A	A^{-1}	$A^* = \|A\|A^{-1}$	$\left(A^{-1}\right)^* = \frac{1}{\|A\|}A$	$(A^*)^* = \|A\|^{n-2}A$	$\phi(A)$
特征值	λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{\|A\|}$	$\|A\|^{n-2}\lambda$	$\phi(\lambda)$

Definition 7.0.9 — 特征多项式. 设 A 为数域 P 上的 n 阶方阵. 称

$$f(\lambda) = |\lambda E_n - A| = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n$$

为 A 的特征多项式。在上式中，a_i 为 A 的所有 i 阶主子式之和 $(i = 1, \cdots, n)$, 事实上, 由

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

先求出 $f'(\lambda), \cdots, f^{(n-1)}(\lambda)$, 再令 $\lambda = 0$, 依次可以求出 $a_i(i = n-1, \cdots, 1)$. 特别地,

$$a_1 = \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad a_n = |A|$$

Proposition 7.0.10
1. 特征多项式与基无关
2. 特征值的代数重数 == 该特征值是特征多项式的根的重数
3. $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, 则 $f_A(\lambda) = f_{A_1}(\lambda) f_{A_2}(\lambda)$, 其中 A_1, A_2 为方阵
4. 由于 $|\lambda E - A| = |(\lambda E - A)'| = |\lambda E - A'|$, 则方阵 A 与 A' 有相同的特征多项式 (特征值)

5. 特征值都不为零等价于行列式不为零等价于矩阵可逆
6. $\lambda_0 \in \mathbf{P}$ 是$\mathscr{A}$ 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda_0 E - A| = 0 \Leftrightarrow$ 方程$(\lambda_0 E - A)x = 0$ 有非零解

Theorem 7.0.11 设 A, B 均是 n 阶方阵，证明: AB 与 BA 有相同的特征值.

Proof. 只需证明 AB 与 BA 有相同的特征多项式, 即 $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$ $\lambda = 0$ 时，有 $|-AB| = (-1)^n|A||B| = (-1)^n|B||A| = |-BA|$ $\lambda \neq 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
|\lambda E - AB| &= \begin{vmatrix} \lambda E - AB & 0 \\ B & E \end{vmatrix} =_{r_1 + Ar_2} \begin{vmatrix} \lambda E & A \\ B & E \end{vmatrix} \\
&=_{c_2 - c_1 \lambda^{-1}} \begin{vmatrix} \lambda E & A \\ B & D - \lambda^{-1} BA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & A \\ 0 & \lambda E - BA \end{vmatrix} \\
&= |\lambda E - BA|
\end{aligned}
$$

故 AB 与 BA 有相同的特征多项式，从而有相同的特征值。 ■

Theorem 7.0.12 — 特征值与特征向量的求法. 特征值与特征向量的求法

1. λ_0 为数域 $\mathbb{P}$ 上 n 阶方阵 A 的特征值的充要条件为 λ_0 为 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $\mathbb{P}$ 上的根. 通过解方程组 $(\lambda_0 E_n - A)X = 0$ 可求属于 λ_0 的线性无关的特征向量.
2. 求一线性变换 σ 的特征值与特征向量的步骤如下:
   (a) 在线性空间 V 中取一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 写出线性变换 σ 在这组基下的矩阵 A
   (b) 求矩阵 A 的特征多项式在数域 $\mathbb{P}$ 中的所有解 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 它们就是线性变换 σ 的所有特征值;
   (c) 把所求得的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 逐个代入方程组 $(\lambda_i E_n - A)X = \mathbf{0}, i = 1, ..., s$, 求它的基础解系 $\eta_{i1}, \cdots, \eta_{ir_i}$, 则它们为矩阵 A 的属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量，也为线性变换 σ 的特征值 λ_i 的线性无关的特征向量在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标.

Theorem 7.0.13 数域 $\mathbb{P}$ 上相似的两个矩阵具有相同的特征多项式. 因此数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换 σ 的特征多项式与 V 的基的选取无关。

Theorem 7.0.14 — 哈密顿-凯莱 (Hamilton-Cayley) 定理.. 设 A 是数域上的 $n \times n$ 矩阵, $f(\lambda) = |\lambda E_n - A|$ 为 A 的特征多项式, 则

$$f(A) = A^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})A^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| E_n = \mathbf{0}$$

若 A 是 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 σ 在 V 的一组基下的矩阵，$f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式, 则

$$f(\sigma) = \sigma^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})\sigma^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| 1_V = 0$$

Definition 7.0.10 方阵的对角元素求和成为矩阵的迹 trace，也就是所有特征值的和，对于任何两个矩阵都有 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Definition 7.0.11 — 零化多项式. 设 A 是数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 阶矩阵. 若 $f(x) \in \mathbb{P}(x)$ 使得 $f(A) = 0$ 则称 $f(x)$ 为 A 的一个零化多项式. 此时我们也说 $f(x)$ 以 A 为根.

设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换. 若 $f(x) \in \mathbb{P}(x)$ 使得 $f(\sigma) = 0$,

则称 $f(x)$ 为 σ 的一个零化多项式. 此时我们也说 $f(x)$ 以 σ 为根.

根据哈密顿-凯莱定理, 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda E_n - A|$ 是 A 的一个零化多项式. 若 A 是 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 σ 在 V 的一组基下的矩阵, $f(\lambda) = |\lambda E_n - A|$, 则 $f(\sigma) = 0$, 即线性变换的特征多项式是它的一个零化多项式.

Definition 7.0.12 — 最小多项式. 设 A(或 $\sigma \in L(V)$) 为数域 $\mathbb{P}$ 上一 n 阶方阵 (或一线性变换). 称以 A(或 σ) 为根的首项系数为 1 的次数最低的多项式 $g(x)$ 为 A(或 σ) 的最小多项式, 记为 $g_A(x)$ 或者 $g(x)$

1. 矩阵 A(或 σ) 的最小多项式存在且唯一。与数域无关。数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 阶矩阵的任一零化多项式都是最小多项式的倍式。
2. 若 $g(x)$ 为矩阵 A(或 σ) 的最小多项式, 则 $h(x)$ 以 A(或 σ) 为根的充要条件为 $g(x)|h(x)$, 特别地, $g(x)|f(x)$, 这里 $f(x)$ 为 A(或σ) 的特征多项式.
3. 特征多项式 $f(x)$ 在 $\mathbb{P}$ 中的根恰为 A(或σ) 的所有特征值 (包括重数); 最小多项式 $g(x)$ 的在 $\mathbb{P}$ 中的根恰为 A(或 σ) 在数域 $\mathbb{P}$ 中的所有特征值 (不计重数)
4. 将 $f(x)$ 在 $\mathbb{P}$ 中分解, 则 $f(x)$ 的所有不可约因式均在最小多项式 $g(x)$ 中出现, 且重数不超过它在特征多项式中的重数
5. 零化多项式的根提供了特征值的可能性, 但不一定都是特征值.
6. 数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 阶矩阵 A 的最小多项式和特征多项式的根相同 (重数可以不同).
7. 相似的矩阵有相同的特征多项式，零化多项式和最小多项式。(反之不然)
8. $A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$, $h(x) \in \mathbb{P}[x]$, 则 $h(A) = \begin{pmatrix} h(A_1) & \\ & h(A_2) \end{pmatrix}$
9. k 阶方阵 $J = \begin{pmatrix} a & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a \end{pmatrix}_{k \times k}$ 的最小多项式为 $(x-a)^k$
10. A 为准对角阵 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, 则 $m_A(x)$ 等于 $m_{A_1}(x)$ 与 $m_{A_2}(x)$ 的最小公倍式
11. 设 $A \in \mathbf{P}^{n\times n}$, 则 A 相似于对角阵 $\Leftrightarrow A$ 的最小多项式 $m_A(x)$ 是 P 上互素的一次因式的乘积.
12. 复数域 C 上的方阵 A 相似于对角阵 $\Leftrightarrow A$ 的最小多项式 $m_A(x)$ 在 C 上无重根.

Theorem 7.0.15 数域 $\mathbb{P}$ 上线性空间 V 上的线性变换 σ 的属于不同特征值的特征向量线性无关，进而，如果 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是线性变换 σ 的不同特征值, 而 $\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{ir_i}$ 是属于特征值 λ_i 的线性无关的特征问量, $i = 1, \cdots, s$, 那么向量组

$$\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1r_1}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2r_2}, \cdots, \alpha_{s1}, \cdots, \alpha_{sr_s}$$

线性无关, 即 $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s}$ 为直和 (注意证明).

Theorem 7.0.16 — 矩阵的对角化与线性变换对角化. 若数域 $\mathbb{P}$ 上线性空间 V 上的线性变换 σ 在 V 的某组基下的矩阵为对角矩阵，称 σ 是可对角化的。

若 $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$, 且 A 在数域 $\mathbb{P}$ 上相似于对角矩阵，即存在 $P \in \mathbb{P}^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵, 则称矩阵 A 可以对角化. 注意到线性变换的对角化和矩阵的对角化在本质上是一回事。

Theorem 7.0.17 秩为 1 的 n 阶方阵A 必可对角化，且相似于对角阵$\operatorname{diag}(0,\ldots,0,\operatorname{tr}(A)).$)

Theorem 7.0.18 设 σ 是数域 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换.

1. σ 可对角化的充要条件为 σ 有 n 个线性无关的特征向量。
2. σ 可对角化的充要条件为 σ 的最小多项式为数域 $\mathbb{P}$ 上一些互素的一次因式的乘积.
3. 设 $\lambda,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为 σ 在 $\mathbb{P}$ 中的所有两两不同特征值, 则 σ 可对角化的充要条件为
$$\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}+\cdots+\dim V_{\lambda_s}=n$$
4. 在复数域上, 如果线性变换 σ 的特征多项式没有重根, 则 σ 可对角化.

Theorem 7.0.19 数域 P 上 n 维线性空间 V 的线代变换 A 可对角化的 5 个充要条件

1. A 在 V 中有 n 个线性无关的特征向量;
2. V 可分解成 A 的特征子空间的直和;
3. 空间 V 可分解成一维 A 不变子空间的直和
4. A 的特征值 λ 的几何重数均等于它的代数重数
5. A 的最小多项式是数域 P 上互素的一次因式的乘积.

Theorem 7.0.20 线性变化或者方阵 A 是否能对角化，与数域 P 有关. 比如方阵 $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 在实数域上不可对角化，但在复数域上可对角化。

Theorem 7.0.21 不同的特征值的特征向量是线性无关的

1. 设 A 为数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，且 A 的特征多项式在 P 上有 n 个不同的根，即 A 在 P 上有 n 个不同的特征值，则 A 在 V 的某基下的矩阵为对角矩阵;
2. 设 A 为复数域 C 上 n 维线性空间 V 的线性变换，若 A 的特征多项式在 C 中无重根, 则 A 在 V 的某基下的矩阵为对角矩阵.

Theorem 7.0.22 不同特征值的特征子空间之间是直和关系，并且一个线性变化是可对角化的，等价于全空间是不同特征值的特征子空间的直和

Theorem 7.0.23 相似的矩阵有相同的特征值, 但不一定有相同的特征向量 (属于同一特征值), 从而无相同的特征子空间, 例如,
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$
令
$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

显然 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 分别为 A 的特征值 1 和 2 的特征向量, 而分别为 $P^{-1}AP$ 的特征值 2 和 1 的特征向量.

Definition 7.0.13 — 线性变换的值域与核. 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基, 线性变换 $\sigma\in L(V)$ 在该基下的矩阵为 A. 称

$$\sigma V=\{\sigma\alpha|\alpha\in V\}=L(\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_n)\subset V$$

为 σ 的值域，有时也记为 $Im\sigma$

$$\sigma^{-1}(\mathbf{0})=\{\alpha\in V|\sigma\alpha=\mathbf{0}\}\subset V$$

为 σ 的核或者零空间，有时也记为 $ker\sigma$. 称 $\dim\sigma V=r(A)$ 为 σ 的秩. 称 $\dim\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 为 σ 的零度.

Theorem 7.0.24 — 维数公式. 设 σ 为数域 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，则 σ 的秩 $+\sigma$ 的零度 $=n$

R 由维数公式可知有限维线性空间上的线性变换 σ 是单射当且仅当 σ 是满射。

Theorem 7.0.25 设 $\mathscr{A}$ 为数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则 $\mathscr{A}$ 的值域 AV 的一组基的原像与 $\mathscr{A}$ 的核 $A^{-1}(0)$ 的一组基合起来构成 V 的一组基, 且 A 的秩 + A 的零度 $=n$

1. $\mathscr{A}$ 为单射 $\Leftrightarrow\dim\left(\mathscr{A}^{-1}(0)\right)=0\Leftrightarrow\dim(\mathscr{A}V)=n\Leftrightarrow\mathscr{A}$ 为满射
2. 尽管 $\mathscr{A}$ 的秩 $+\mathscr{A}$ 的零度 $=$ n, 但子空间的和 $\mathscr{A}\ V+\mathscr{A}^{-1}(0)$ 并不一定是整个空间 V. 比如:$V=\mathbf{P}[x]_n(n\geq 2)$ 的微商变换 $\mathscr{D}$, 则 $\mathscr{D}V=\mathbf{P}[x]_{n-1},\mathscr{D}^{-1}(0)=\mathbf{P}$. 于是 $\mathscr{D}$ 的秩 $=n-1,\mathscr{D}$ 的零度 $=1$, 但 $\mathscr{D}V+\mathscr{D}^{-1}(0)=\mathbf{P}[x]_{n-1}$, 不是整个空间 $V=\mathbf{P}[x]_n$

Theorem 7.0.26 对于 $A^2=A$ 的矩阵一定是可以对角化的，因为它在 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 这组基下的矩阵是 $diag(E_r,0)$, 前面 r 个构成了值域的基，后面构成核的基

Definition 7.0.14 — 不变子空间. 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的一个线性空间, W 是 V 的一个子空间, $\sigma\in L(V)$ 是一个线性变换. 若对任意的 $\alpha\in W$, 有 $\sigma(\alpha)\in W$, 我们就称 W 是 σ 的一个不变子空间，简称 σ-子空间。

若 n 维线性空间 V 上的线性变换 σ,τ 满足 $\sigma\tau=\tau\sigma$, 则 τ 的核、值域、特征子空间均为 σ 的不变子空间。

R 由于线性变换 σ 的多项式 $f(\sigma)$ 与 σ 可交换，所以 $f(\sigma)$ 的值域与核均为 σ-子空间. 这种 σ-子空间是经常碰到的。

Proposition 7.0.27

1. $\mathscr{A}$ 的特征子空间 V_λ 是 $\mathscr{A}$ 不变子空间 $\mathscr{A}$ 不变子空间的和与交亦是 $\mathscr{A}$ 不变子空间;
2. 若线性变换 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 可交换, 即 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$, 则 $\mathscr{B}\mathscr{V}$ 与 $\mathscr{B}^{-1}(0)$ 亦是 $\mathscr{A}$ 不变子空间

Theorem 7.0.28 设 σ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\subset V$. 则 W 为 σ 子空间的充要条件为 $\sigma\ \alpha_1,\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_s\in W$

R 也就是只要 basis 保持封闭就可以了

Theorem 7.0.29

1. $\mathscr{A}|_W$ 为不变子空间 W 上的线性变换 (定义在 W 上), 一般不再是 V 的线性变换
2. $\mathscr{A}$ 在核 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 上的限制即为 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 上的零变换;
3. $\mathscr{A}$ 在其特征子空间 V_λ 上的限制即为 V_λ 上的数乘变换 $\lambda\mathscr{E}$

Theorem 7.0.30 设 σ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, W 为一个 σ-子空间, W 的一组基为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 将之扩充为 V 的一组基则 σ 在该基下的矩阵具有形式 $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. 其中 k 阶矩阵 A_1 为 $\mathscr{A}|_W$ 在 W 的基 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k$ 下的矩阵.

进而若 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$ 而 W_i 为 σ -子空间, $i=1,\cdots,s$, 则 $W_1,W_2\cdots,W_s$ 的基一起构成 V 的基, 且 σ 在该基下的矩阵为形如

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

的准对角矩阵。

Theorem 7.0.31 如果取得是特征子空间，则存在一组基，使得线性变化在该基下的矩阵是 $\begin{pmatrix} \lambda_0 E_r & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$，$|\lambda E_n-A|=(\lambda-\lambda_0)^r|\lambda E_{n-r}-A_2|$，所以特征值 λ_0 的重数至少是 r 重的，所以代数重数不小于几何重数

Theorem 7.0.32 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 维线性空间. 若 V 上的线性变换 σ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 可分解成互素的一次因式的方案的乘积

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_n}$$

则 V 可分解成不变子空间的直和 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$, 其中

$$V_i=\{\alpha\in V:(\sigma-\lambda_i 1_V)^{r_i}\alpha=\mathbf{0},\alpha\in V\}$$

(注意证明)

Proof. 该定理的证明分三步 (1) 记 $W_i=g_i(\mathscr{A})V$, 其中 $g_i(\lambda)=\frac{f_{\mathscr{A}}(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{r_i}}$, 利用 $g_1(\lambda),\ldots,g_s(\lambda)$ 互素证明 $V=W_1+W_2+\cdots+W_s$;(2) 利用 Hamilton-Cayley 定理以及 $g_i(\lambda)$ 与 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$ 互素证明 $V_i=W_i$ (3) 利用 $g_i(\mathscr{A})V_j=\{0\}(j\neq i)$ 以及 $g_i(\lambda)$ 与 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$ 互素证明 V 的零向量分解式唯一 ■

Proposition 7.0.33

1. V_i 称为 A 的属于特征值 λ_i 的根子空间, 亦是 A 不变子空间

2. λ_i 的特征子空间 V_{λ_i} 是其根子空间 V_i 的子空间
3. 设 $\mathscr{A}_i=\mathscr{A}|v_i$, 则其特征多项式 $f_{\mathscr{A}_i}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$

Theorem 7.0.34 运用矩阵相似的语言解释空间第一分解定理：设 A 为数域 P 上 n 阶方阵，若 A 的 n 个特征值 $\lambda_1\,(r_1$ 重$)\,,\lambda_2\,(r_2$ 重$)\,,\ldots,\lambda_s\,(r_s$ 重$)$ 均在数域$\mathbb{P}$ 中, 则矩阵 A 必相似于某个准对角矩阵 $\operatorname{diag}(A_1,A_2,\ldots,A_s)$，其中 r_i 阶方阵 A_i 的特征多项式 $f_{A_i}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{r_i},r_1+r_2+\cdots+r_s=n$

Theorem 7.0.35 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间, $\sigma\in L(V),\sigma$ 的最小多项式 $g(x)$ 是 $\mathbb{P}$ 上互素的一次因式的乘积: $g(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_s)$, 这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 两两不同, 则 σ 有 n 个线性无关的特征向量构成了 V 的一组基。

Definition 7.0.15 k 阶 Jordan 块

$$J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda&&&\\1&\lambda&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&\lambda\end{pmatrix}_{k\times k}$$

若干个 J 块构成的准对角矩阵成为 J 阵

$$\operatorname{diag}\left(J_{k_1}(\lambda_1),J_{k_2}(\lambda_2),\ldots,J_{k_s}(\lambda_s)\right)$$

Proposition 7.0.36
1. Jordan 阵的对角元即是它的全部特征值。
2. n 阶对角阵是由 n 个 J 块构成的

Definition 7.0.16 — 循环子空间. 设 $\mathscr{A}$ 在数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间 V 上的线性变化, W 为 V 的 r 维线性子空间，若存在非零向量 $\xi\in W$ 使得 $\mathscr{A}^r\xi=0$ 并且 $\xi,\mathscr{A}\xi,\cdots,\mathscr{A}^{r-1}\xi$ 线性无关，构成 W 的一组基，则称 W 为 $\mathscr{A}$ 的循环子空间

Proposition 7.0.37
1. $\mathscr{A}$ 循环子空间为 $\mathscr{A}$ 不变子空间，且 $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{A}$ 循环子空间 W 上的限制 $\mathscr{A}_W$ 在 W 的基 $\xi,\mathscr{A}\xi,\ldots,\mathscr{A}^{r-1}\xi$ 下的矩阵为 Jordan 块 $J_r(0)$
2. $\mathbf{P}[x]_n$ 为 $\mathbf{P}[x]$ 的 $\mathscr{D}$ 循环子空间，其中 $\mathscr{D}$ 为 P$[x]$ 的微商变换.

Theorem 7.0.38 — 空间第二分解定理. 设 $\mathscr{B}$ 为复数域 C 上 n 维线性空间 V 的幂零线性变换, 即存在正整数 k 使得 $\mathscr{B}^k=\mathscr{O}$, 则 V 可分解成若干个 $\mathscr{B}$ 循环子空间的直和

$$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$$

即在 V 中必存在一组基 $\xi_1,\mathscr{A}\xi_1,\cdots,\mathscr{A}^{r_1-1}\xi_1,\xi_2,\mathscr{A}\xi_2,\cdots,\mathscr{A}^{r_2-1}\xi_2,\ldots,\xi_s,\mathscr{A}\xi_s,\ldots,\mathscr{A}^{r_s-1}\xi_s$ 使得 $\mathscr{B}$ 在此基下的矩阵为 Jordan 阵 $\operatorname{diag}(J_{r_1}(0),J_{r_2}(0),\cdots,J_{r_s}(0))$，其中 $\dim(W_i)=r_i$, 且

$$r_1+r_2+\cdots+r_s=n$$

Theorem 7.0.39 设 $\mathscr{A}$ 为复数域 C 上 n 维线性空间 V 的线性变换,

$$W=\{\xi\in V|(\mathscr{A}-\lambda\mathscr{E})^r\xi=0\}$$

为的 r 重特征值 λ 的根子空间，则 $\mathscr{A}-\lambda\mathscr{E}$ 在 W 上的限制即为幂零线性变换. 于是 $\mathscr{A}$ 的特征值 λ 的根子空间 W 可分解成若干个 $(\mathscr{A}-\lambda\mathscr{E})|_W$ 循环子空间的直和.

Theorem 7.0.40 设 $\mathscr{A}$ 为复数域 C 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则在 V 中必存在一组基, 使 A 在此基下的矩阵为 Jordan 阵.

Theorem 7.0.41 复数域 C 上 n 阶矩阵都相似于某个 n 阶 Jordan 阵.

7.1 解题思路

Theorem 7.1.1 求解特征变换的特征值和特征向量

1. 取定线性空间 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$, 写出 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵 A
2. 求出 A 的特征多项式 $f_A(\lambda)=|\lambda E-A|$ 在数域 $\mathbf{P}$ 中全部不同的根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 及其重数，即是线性变换 A 的全部特征值;
3. 对于 $\lambda=\lambda_i,(i=1,\cdots,s)$, 求出齐次线性方程组 $(\lambda_i E-A)x=0$ 的一个基础解系 $\alpha_{i1},\alpha_{i2}\cdots,\alpha_{ir_i}$, 其中秩 $(\lambda_i E-A)=n-r_i$
4. 令 $\xi_{ij}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\alpha_{ij},(j=1,\cdots,r_i)$, 则 $\xi_{11},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ir_i}$ 即是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_i 线性无关的特征向量，其非零的线性组合即为 A 的属于特征值 λ_i 的所有特征向量

步骤 2) 与 3) 即为求 n 阶矩阵 A 的特征值与特征向量的过程

Theorem 7.1.2 求线性变化在一组基下的矩阵是对角矩阵的步骤

1. 取 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$, 求出 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵 A
2. 求出矩阵 A 的全部特征值和其重数，对于 λ_i, 求解 $(\lambda_i E-A)x=0$ 的基础解系 (r_i 个线性无关的解) $X_{i1},X_{i2},\ldots,X_{ir_i},(i=1,\ldots,k)$
3. 构造相似变换矩阵 $X=(X_{11},\ldots,X_{1r_1},X_{21},\ldots,X_{2r_2},\ldots,X_{k1},\ldots,X_{kr_k})$, 则
$$X^{-1}AX=\operatorname{diag}(\lambda_1E_{r_1},\lambda_2E_{r_2},\ldots,\lambda_kE_{r_k})$$
4. $(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)X$, 则 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 构成 V 的另一组基且 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵即为对角阵 $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1E_{r_1},\lambda_2E_{r_2},\ldots,\lambda_kE_{r_k})$

步骤 2) 与 3) 即为求 n 阶矩阵 A (可对角化的前提下) 相似于对角阵 Λ 的计算过程.

Theorem 7.1.3 求解值域与核的步骤

1. 写出 $\mathscr{A}$ 在 $\varepsilon_1\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵 A
2. 利用初等行变换找到矩阵 A 的列向量组的极大线性无关组,所在的列 $i_1,i_2,\cdots,i_r$,与之对应的 $\mathscr{A}(i_1),\cdots,\mathscr{A}(i_r)$ 就是 $\mathscr{A}V$ 的基,也就是 $L(V)=L(\mathscr{A}(\varepsilon_{i1}),\mathscr{A}(\varepsilon_{i2}),\ldots,\mathscr{A}(\varepsilon_{i_r}))$, 维数为 r
3. 利用齐次线性方程组 $AX=b$, 的基础解系 $X_1,\cdots x_{n-r}$, 令 $\xi_k=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)X_k,k=1,\cdots n-r$, 则 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 是核空间的基，维数为 $n-r$

Theorem 7.1.4 例题 7.6

8. λ-矩阵

Definition 8.0.1 — 多项式矩阵 (λ-矩阵) 的定义. 设 $A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，其中 $a_{ij}(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的以 λ 为未知量的多项式，则 $A(\lambda)$ 是多项式矩阵或者 λ-矩阵。

Definition 8.0.2 — λ-矩阵的初等变换和初等 λ-矩阵. 对 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 进行的下列三种初等变换称为 λ-矩阵的初等变换:

1. 将 $\mathrm{A}(\lambda)$ 的两行或者两列交换:
2. 用非零常数 c 乘以 $\mathrm{A}(\lambda)$ 的一行或者一列
3. 将 $\mathrm{A}(\lambda)$ 的某一行 (或者列) 乘以 $\mathbb{P}$ 上的某个多项式加到另外一行 (或者列) 上。

对单位矩阵进行 λ-矩阵的初等变换，得到的矩阵称为初等 λ-矩阵。

Definition 8.0.3 λ-矩阵的等价. 设 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 是两个 λ -矩阵. 若经过有限次 λ-矩阵的初等变换可以将 $A(\lambda)$ 变为 $B(\lambda)$, 则称 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 是等价的.

Definition 8.0.4 可逆 λ-矩阵. 设 $A(\lambda),B(\lambda)$ 均是 λ-矩阵. 若 $A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E_n$, 则称 $A(\lambda)$ 为可逆 λ-矩阵。λ-矩阵可逆的充要条件是它与 E_n 等价，或者它能包表示成一些初等矩阵的乘积.

Definition 8.0.5 两个 n 阶数字方阵 A 和 B 相似当且仅当它们的特征矩阵 λE_n-A 和 λE_n-B 作为 λ-矩阵是等价的.

Definition 8.0.6 设 $A(\lambda)$ 是 $s\times n$ 阶 λ-矩阵, 则 $A(\lambda)$ 等价于

$$
\begin{pmatrix}
d_1(\lambda) & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & d_r(\lambda) & & & \\
& & & 0 & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & 0
\end{pmatrix}
$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是非零首项系数为 1 的多项式, $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)(i=1,\cdots,r-1)$. 称这个矩阵为 $A(\lambda)$ 的标准形. 特别地, 若 A 是数字矩阵, 其特征矩阵 $\lambda E_n - A$ 等价于对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & d_1(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_m(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)(i=1,\cdots,m-1)$

Definition 8.0.7 — 行列式因子. 设 $A(\lambda)$ 是 n 阶 λ-矩阵，k 是不超过 n 的自然数。如果 $A(\lambda)$ 有一个 k 阶子式不为 0，则称 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式的首项系数为 1 的最大公因式为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子，记为 $D_k(\lambda)$. 秩为 r 的 λ-矩阵有 r 个行列式因子，等价的 λ-矩阵有相同的行列式因子

Theorem 8.0.1 — 求行列式因子的简使方法. 求行列式因子一般从最高阶开始, 这样较低阶的行列式因子就有了一定范围. 特别是求方阵 A 的特征矩阵 $\lambda E_n - A$ 的行列式因子时, 首先求 $D_n(\lambda) = |\lambda E_n - A|$. 其次看其是否有一个 $n-1$ 阶子式为非零常数, 如果是一个非零常数, 那么 $D_{n-1}(\lambda) = \cdots = D_1(\lambda) = 1$. 如果不是这样, 可考虑是否有两个 $n-1$ 阶子式为互素 (办法是其中一个的根不是另一个的根)，此时仍然有 $D_{n-1}(\lambda) = \cdots = D_1(\lambda) = 1$

Theorem 8.0.2 — 不变因子. 设 $s \times n$ 阶 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的行列式因子为

$$D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_m(\lambda)$$

则 $D_i(\lambda)|D_{i+1}(\lambda)(i=1,2,\cdots,m-1)$. 记

$$d_i(\lambda) = \frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)} \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

(这里规定 $D_0(\lambda)=1$). 多项式 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_m(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的不变因子.

对 $n \times n$ 阶数字矩阵 A, 其不变因子定义为它的特征矩阵 $\lambda E_n - A$ 的不变因子. A 的不变因子就是 $1,...,1,d_1(\lambda),\cdots,d_m(\lambda)$

Theorem 8.0.3 若矩阵 A 和 B 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵, 则它们在 $\mathbb{P}$ 上相似当且仅当它们有相同的不变因子.

Theorem 8.0.4 若矩阵 A 和 B 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵, 数域 $\mathbb{F}$ 包含 $\mathbb{P}$, 则 A,B 在 $\mathbb{P}$ 上相似当且仅当它们在数域 $\mathbb{F}$ 上相似。

Theorem 8.0.5 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆 $\Leftrightarrow A(\lambda) \cong E \Leftrightarrow A(\lambda)$ 可表示成若干初等 $\lambda-$ 矩阵之积

Definition 8.0.8 — 矩阵相似的系件. λ - 矩阵的带余除法：对任意数域 P 上非零 n 阶数字矩阵 A 和 λ - 矩阵 $U(\lambda), V(\lambda)$, 必存在 $\lambda-$ 矩阵 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 以及数字矩阵 U_0, V_0 使得

$$U(\lambda) = (\lambda E - A)Q(\lambda) + U_0, V(\lambda) = P(\lambda)(\lambda E - A) + V_0$$

Definition 8.0.9 — 伴侣阵. 称下面形状的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

为多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 的伴侣阵。

Theorem 8.0.6 若数域 $\mathbb{P}$ 上 n 阶方阵 A 的非常数不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_m(\lambda)$ 则 A 必在 $\mathbb{P}$ 上相似于准对角矩阵

$$B = \begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_m \end{pmatrix}$$

共中 F_i 是 $d_i(\lambda)$ 的伴侣阵 $(i = 1, 2, \cdots, m)$

Theorem 8.0.7 多项式 $d(\lambda)$ 的伴侣阵 A 的不变因子为 $d_1(\lambda) = \cdots = d_{n-1}(\lambda) = 1, d_n(\lambda) = d(\lambda)$, 其中 $d(\lambda)$ 亦是 A 的最小多项式.

Theorem 8.0.8 若数域 $\mathbb{P}$ 上 n 阶方阵 A 的非常数不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_m(\lambda)$ 则 A 的特征多项式为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda) \cdots d_m(\lambda)$, 最小多项式为最后一个不变因子 $d_m(\lambda)$ 进而矩阵 A 与对角矩阵相似当且仅当 A 的最后一个不变因子 $d_m(\lambda)$ 在 P 上没有重根.

Definition 8.0.10 有理标准型矩阵：设 A_i 为数域 P 上的多项式 $d_i(\lambda)$ 的伴侣阵，且满足 $d_1(\lambda) | d_2(\lambda) | \cdots | d_s(\lambda)$, 则准对角阵 $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_s)$ 称少 $\mathbf{P}$ 上的一个有理标准形矩阵. 有理标准形矩阵 A 的全部不变因子为

$$\underbrace{1, \cdots, 1}_{n-s}, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_s(\lambda)$$

Theorem 8.0.9 数域 $\mathbf{P}$ 上的 n 阶矩阵 A 在 $\mathbf{P}$ 上相似于唯一的一个有理标准形矩阵 (称为A 的标准形).

Theorem 8.0.10 设 $\mathscr{A}$ 为数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换，则在 V 中必存在一组基使 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为有理标准形，且此有理标准形由 $\mathscr{A}$ 唯一确定 (称为$\mathscr{A}$ 的有理标准形)

Definition 8.0.11 — 初等因子. 将 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 的全部不变因子在数域 $\mathbf{P}$ 上分解成标准分解式，则在标准分解式中出现的所有不可约因式的方幂（按出现次数计）称为 $A(\lambda)$ 的初等因子.

Definition 8.0.12 若数域 $\mathbb{P}$ 上 n 阶方阵 A 的非常数不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_m(\lambda)$, 在数域 $\mathbb{P}$ 上将 $d_i(\lambda)$ 分解为不可约多项式的乘积

$$
\begin{aligned}
d_1(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{11}} p_2(\lambda)^{e_{12}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{1t}} \\
d_2(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{21}} p_2(\lambda)^{e_{22}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{2t}} \\
&\vdots \\
d_m(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{m1}} p_2(\lambda)^{e_{m2}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{mt}}
\end{aligned}
$$

其中 $e_{ij} \geqslant 0$. 若 $e_{ij} > 0$, 则称 $p_j(\lambda)^{e_{ij}}$ 为 A 的一个初等因子. A 的初等因子全体称为 A 的初等因子组. 这实际上给出了初等因子组的求法.

Theorem 8.0.11 数域 $\mathbb{P}$ 上的两个方阵 A, B 相似当且仅当它们有相同的初等因子组.

Theorem 8.0.12 复数域 C 上，$A(\lambda)$ 的初等因子均是一次因式的方幂

Theorem 8.0.13 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, 则 $\lambda E - A$ 的初等因子称为矩阵 A 的初等因子.

Theorem 8.0.14 设 $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$, 则 $A \sim B \Leftrightarrow$ 它们有相同的初等因子. 初等因子与不变因子均是矩阵的相似不变量，且两者相互确定。

Theorem 8.0.15 设 A 是复数域 C 上的 n 阶方阵, 且 A 在复数域 C 上的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1}, (\lambda-\lambda_2)^{r_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_k)^{r_k}$$

则 A 相似于准对角矩阵 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$

其中 J_i 为 r 阶若尔当块,

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \lambda_i & \ddots \\ & & & \ddots \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

称 J 为矩阵 A 的若尔当标准形.

Theorem 8.0.16 复数域 C 上的 n 阶方阵 A 可以对角化当且仅当 A 的初等因子全是一次因子.

Theorem 8.0.17 将 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 经过初等变换化为对角形式 (不必是标准形), 并将对角线上的非零多项式在数域 P 上分解成标准分解式，则在标准分解式中出现的所有不可约因式的方幂按照出现次数计算，即为 $A(\lambda)$ 的全部初等因子

Theorem 8.0.18
1. 复方阵 A 与对角阵相似 $\Leftrightarrow A$ 的初等因子全是一次的.
2. 复方阵 A 与对角阵相似 $\Leftrightarrow A$ 的不变因子无重根 $\Leftrightarrow A$ 的最小多项式无重根.
3. n 阶方阵 A 的最小多项式即为 A 的第 n 个不变因子 $d_n(\lambda)$

8.1 解题技巧

Theorem 8.1.1 方阵初等因子的求法：利用初等变换将特征矩阵 $\lambda E - A$ 化成对角形式，再将对角线上的非零多项式在复数域傻姑娘分解成标准分解式，则在标准分解式中国呢出现的所有不可约因式的方幂即为矩阵 A 的全部初等因子

9. 欧式空间

Definition 9.0.1 — 定义欧氏空间 + 内积. 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间, 在 V 上定义了一个二元实函数, 记作 (α,β), 若满足如下性质:

1. $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$
2. $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$
3. $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$
4. $(\alpha,\alpha)\geqslant 0,(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=\mathbf{0}$.

这里 α,β,γ 是 V 中任意的向量, $k\in\mathbb{R}$ 是任意的实数, 则称 (α,β) 为一个内积, 称 V 为一个欧几里得空间, 简称为欧氏空间.

Definition 9.0.2 — 向量的长度. 设 V 为欧氏空间, $\alpha\in V$, 定义长度 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$, 显然 $|\alpha|\geqslant 0,|\alpha|=0\Leftrightarrow\alpha=\mathbf{0},|k\alpha|=|k||\alpha|$, 长度为 1 的向量称为单位向量, 若 $\alpha\neq\mathbf{0}$ 则 $\frac{1}{|\alpha|}\alpha$ 为单位向量, 这一过程称为单位化. 关于长度, 我们有三角不等式: $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$ 等号成立当且仅当 α,β 是线性相关的.

Theorem 9.0.1 — 柯西一布涅柯夫斯基不等式. 设 V 为欧氏空间, 对任意的 $\alpha,\beta\in V$, 我们有

$$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|$$

当且仅当 α,β 线性相关时, 等号成立. 这一等式称为柯西-布涅柯夫斯基不等式, 若 α,β 不为零, 定义夹角

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|},\quad 0\leqslant\langle\alpha,\beta\rangle\leqslant\pi$$

Definition 9.0.3 — 正交. 设 V 为欧氏空间, $\alpha,\beta\in V$. 若 $(\alpha,\beta)=0$, 称 α,β 正交或互相垂直, 记作 $\alpha\perp\beta$ α,β 正交当且仅当它们的夹角为 $\frac{\pi}{2}$
(1) 若 $\alpha\perp\beta$, 则$|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$ (勾股定理)
(2) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 两两正交, 则 $|\alpha_1+\cdots+\alpha_m|^2=|\alpha_1|^2+\cdots+|\alpha_m|^2$

Definition 9.0.4 — 度量矩阵. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为欧氏空间 V 的基，令 $a_{ij}=(\varepsilon_i,\varepsilon_j),A=(a_{ij})_{n\times n}$ 则 A 为实对称矩阵. 对任意 $\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)X,\beta=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)Y$

$$(\alpha,\beta)=X'AY$$

称 A 为基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量矩阵. 度量矩阵唯一确定内积

Proposition 9.0.2 度量矩阵的相关性质

1. 度量矩阵是正定的，实对称的
2. 设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为 V 的另一组基且 $(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)P$, 这里 P 为实的可逆矩阵，则 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 的度量矩阵 $B=P'AP$, 即不同基的度量矩阵是合同的.
3. 若 D 与 A 合同，设存在可逆矩阵 T 使得 $D=T'AT$ 则 D 是基 ($\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)T$ 的度量矩阵, 即合同的正定矩阵可看作同一内积空间的不同基的度量矩阵。

Theorem 9.0.3 设 V 为 n 维实线性空间，A 为一正定矩阵, $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基, 对任意的 $\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)X,\beta=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)Y$, 定义 $(\alpha,\beta)=X'AY$, 则 V 关于内积 ($\alpha,\beta)$ 构成了一个欧氏空间.

Definition 9.0.5 — 正交向量组、正交基、标准正交基.

1. 设 V 为一个 n 维实线性空间。若 α_1,α_2 ， α_k 中的任意两个不同的向量都正交, 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是一个正交向量组.
2. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为一个正交向量组且其中的每个向量长度都是 1, 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为一个标准正交向量组.
3. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为一个正交向量组且是 V 的一组基, 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为一个正交基.
4. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为一个标准正交向量组且为 V 的一组基, 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_k$ 为一个标准正交基. 在 n 维欧氏空间 V 中，任意一个正交向量组至多含 n 个向量.
5. 欧氏空间 V 的一组基为标准正交基的充要条件为它的度量矩阵为单位矩阵, 即

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

R

1. 因为欧氏空间任一组基的度量矩阵是正定矩阵, 而正定矩阵均合同于单位矩阵，由此可以断言，标准正交基是存在的，但不唯一 (将标准正交基调整次序即可)。
2. 在标准正交基下，两向量的内积表达形式是简单的。

Theorem 9.0.4 n 维欧氏空间中的任一非零正交向量组均可以扩充为 V 的一组正交基. n 维欧氏空间中的任一标准正交向量组均可以扩充为 V 的一组标准正交基. (注意证明)。

Theorem 9.0.5 对于 n 维欧氏空间 V 中任意一组线性无关的向量 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m$ 都可以找到一标准正交组 $\eta_1,\cdots,\eta_m$ 使得

$$L(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_i)=L(\eta_1,\cdots,\eta_i),i=1,\cdots,m$$

具体地, 对于 n 维欧氏空间 V 中任意一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 都可用施密特正交化方法得

到一组标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 使得

$$L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_i)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i),i=1,\cdots,n$$

具体步骤如下:

1. 正交化，取

$$\beta_1=\alpha_1 \tag{9.1}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 \tag{9.2}$$

$$\vdots \tag{9.3}$$

$$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1} \tag{9.4}$$

2. 单位化, 即令 $\eta_i=\frac{\beta_i}{|\beta_i|},i=1,2,\cdots,n$

R 施密特正交化有明显地几何意义，注意到 $\frac{(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ 实际上是向量 ξ 在向量 α 上的投影.

Definition 9.0.6 — 正交矩阵. 若实矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足

$$a_{1i}a_{1j}+\cdots+a_{ni}a_{nj}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

即 A 的各列为 $R^{n\times 1}$ 的标准正交基, 它相当于矩阵等式 $A'A=E_n$ 或 $A^{-1}=A'$, 或 $a_{i1}a_{j1}+\cdots+a_{in}a_{jn}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ 即 A 的各行为 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 的一组标准正交基, 它相当于矩阵等式 $AA'=E_n$ 或 $A^{-1}=A'$, 则称 A 为一个正交矩阵。正交矩阵都合同与单位矩阵

Proposition 9.0.6
1. 正交向量组必线性无关;
2. 在 n 维 Euclid 空间中，正交向量组中向量个数不超过 n 个.
3. $A'\left(=A^{-1}\right),A^*,-A,A^k$ 都是正交矩阵
4. 两个正交矩阵的乘积也是正交矩阵
5. 矩阵是正交阵等价于矩阵的 n 个行向量或者列向量是两两正交的单位向量

Theorem 9.0.7
1. 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的标准正交基，任意 $\alpha\in V$ 在此基下的坐标为

$$((\alpha,\varepsilon_1),(\alpha,\varepsilon_2),\ldots,(\alpha,\varepsilon_n))$$

2. 设 $\alpha,\beta\in V$ 在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 下的坐标分别为 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)',y=$

$(y_1,y_2,\ldots,y_n)'$, 则$(\alpha,\beta)=x'y$

Theorem 9.0.8 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 为 n 维 Euclid 空间 V 的一组基, 存在 V 的一组标准正

交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 使得

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k),(k=1,2,\ldots,n)$$

由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 到 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的过渡矩阵 C 为上三角矩阵，即

$$C=\begin{pmatrix}|\beta_1| & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & |\beta_2| & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}\\ 0 & \cdots & 0 & |\beta_n|\end{pmatrix},\ \text{其中} a_{ij}=\frac{(\alpha_j,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}|\beta_i|=(\alpha_j,\varepsilon_i)$$

Theorem 9.0.9 从 n 维欧氏空间 V 的一组标准正交基到任意一组标准正交基的过渡矩阵都是正交矩阵。反之，若两组基之间的过渡矩阵为正交矩阵且有一基为标准正交基，则另一组基也为标准正交基。

Theorem 9.0.10 — 欧氏空间的同构. 欧氏空间的同构是在线性空间同构的基础上加上保持内积不变. n 维欧氏空间均与 $\mathbb{R}^n$ 同构, 同构具有自反性、对称性、传递性. 两个欧氏空间 V 与 W 之间的线性映射 σ 为同构映射的充要条件是 σ 把 V 的任一组标准正交基映成 W 的标准正交基。

Definition 9.0.7 — 正交变换. 欧氏空间 V 上的线性变换 σ 称为正交变换, 如果它保持向是的内积不变, 即任意 $\alpha,\beta\in V,(\sigma\alpha,\sigma\beta)=(\alpha,\beta)$， 正交变换保持内积

Theorem 9.0.11 保持内积的变换一定是正交变换；保证长度不变的变换不一定是正交变换，如 $\mathscr{A}\alpha=|\alpha|\eta,\forall\alpha\in V$，不保证加法：$|\mathscr{A}(\alpha+\beta)|=|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|=|\mathscr{A}\alpha+\mathscr{A}\beta|$

Theorem 9.0.12 设 σ 为 n 维欧氏空间 V 的线性变换. 则下列条件等价:

1. σ 为正交变换, 即对任意 $\alpha,\beta\in V,(\sigma\alpha,\sigma\beta)=(\alpha,\beta)$
2. σ 保持向量的长度不变, 即任意 $\alpha\in V,|\sigma\alpha|=|\alpha|$
3. σ 把标准正交基变成标准正交基, 即若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为标准正交基, 则

   $$\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_n$$

   也为标准正交基;
4. σ 在标准正交基下的矩阵为正定矩阵。
5. 正交变换的乘积和逆变换也是正交变换

Proposition 9.0.13 正定矩阵的性质

1. 因正交矩阵是可逆的, 故正交变换是可逆的.
2. 正交变换是欧氏空间到自身的同构映射, 因而正交变换的乘积与正交变换的逆仍是正交变换. 进而，正交矩阵的乘积与正交矩阵的逆仍是正交矩阵。
3. A 为正交矩阵, 则 $|A|=1$(旋转或第一类的) 或 $|A|=-1$(第二类的)

Theorem 9.0.14 欧氏空间 V 的子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 两两正交, 也就是 $V_i\perp V_j(i\neq j)$, 则 $V_1+V_2+\cdots+V_s=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$ 反之不一定成立.

Proposition 9.0.15 1. 若 $V_1\perp V_2$, 则 $V_1\cap V_2=\{0\}$

2. 若 $\alpha \perp V_1$ 且 $\alpha \in V_1$, 则 $\alpha = 0$
3. $\gamma \perp L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \Leftrightarrow \gamma \perp \alpha_i, (i = 1, 2, \ldots, m)$

Definition 9.0.8 — 正交补. 设 V_1 是欧氏空间 V 的一个子空间. 称

$$V_1^{\perp} = \{\alpha \in V : \alpha \perp V_1\}$$

为 V_1 在 V 中的正交补。我们有 $V = V_1 \oplus V_1$. 欧氏空间的每个子空间都有唯一的正交补, 但直和补很多 (正交补是其中之一).

Theorem 9.0.16 若 V_1 是 Euclid 空间 V 的正交变换 $\mathscr{A}$ 不变子空间, 则 $V_1^{\perp}$ 亦是 $\mathscr{A}$ 不变子空间.

Theorem 9.0.17 若 V_1 是欧氏空间 V 的一个子空间, $\alpha \in V$. 若存在向量 $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_1^{\perp}$ 使得 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 则称$\alpha_1$ 为α 在V_1 中的内射影 (或正交投影) 若 V_1 是 V 的非平凡真子空间, 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k$ 是 V_1 的一组标准正交基, 将之扩充为 V 的一组标准正交基

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \cdots, \varepsilon_n$$

则 α 在 V_1 中的内射影为 $\sum_{i=1}^{k}(\alpha, \varepsilon_i)\varepsilon_i, \alpha$ 在 $V_1^{\perp}$ 中的内射影为 $\sum_{i=k+1}^{n}(\alpha, \varepsilon_i)\varepsilon_i$

Definition 9.0.9 — 对称变换. 若 σ 为 n 维欧氏空间 V 上的一个线性变换, 对任给 $\alpha, \beta \in V$, 满足

$$(\sigma\alpha, \beta) = (\alpha, \sigma\beta)$$

则称 σ 为一个对称变换。或者对于 $\beta, \alpha \in R$

$$\beta' A\alpha = \alpha' A\beta$$

Theorem 9.0.18 Euclid 空间的线性变换 $\mathscr{A}$ 是对称的 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ 在 V 的任一标准正交基下的矩阵为实对称的.

Theorem 9.0.19 欧氏空间上对称变换在一组标准正交基下的矩阵为对称矩阵。对称变换的不变子空间的正交补仍是不变子空间。

Proposition 9.0.20 实对称矩阵的性质

1. 实对称矩阵 A 的特征值均为实数.
2. 若 A 为实对称矩阵 (或 σ 为对称变换), 则 A(或 σ) 的不同特征值的特征向量正交.
3. 若 A 为实对称矩阵, 则存在正交矩阵 T 使得 $T'AT$ 为对角形矩阵。

Theorem 9.0.21 一个常用结论. 若 A 为 n 阶正定矩阵, B 为 n 阶实对称矩阵, 则存在实可逆矩阵 P 使得 $P'AP = E_n, P'BP$ 为对角形矩阵.

Theorem 9.0.22 若 A 是 n 阶实对称矩阵, 存在 n 阶正交矩阵 T 使得

$$T'AT = T^{-1}AT = \Lambda$$

Theorem 9.0.23 任意 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x'Ax$ 都可经过正交线性替换 $x=Ty$ 化成标瘫形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值. 若 A 为 n 阶实对称矩阵，则 A 正定 $\Leftrightarrow A$ 的特征值均大于零.

Theorem 9.0.24 对于对称变化，一定存在一组标准正交基使得该变换在这一组基下的矩阵是对称阵

Definition 9.0.10 最小二乘法问题：设 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, 对于非齐次线性方程组 $Ax=b$, 求向量 $\hat{x}$ 使得长度 $|b-Ax|$ 最小的问题称为最小二乘问题，而向量 $\hat{x}$ 称为方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解

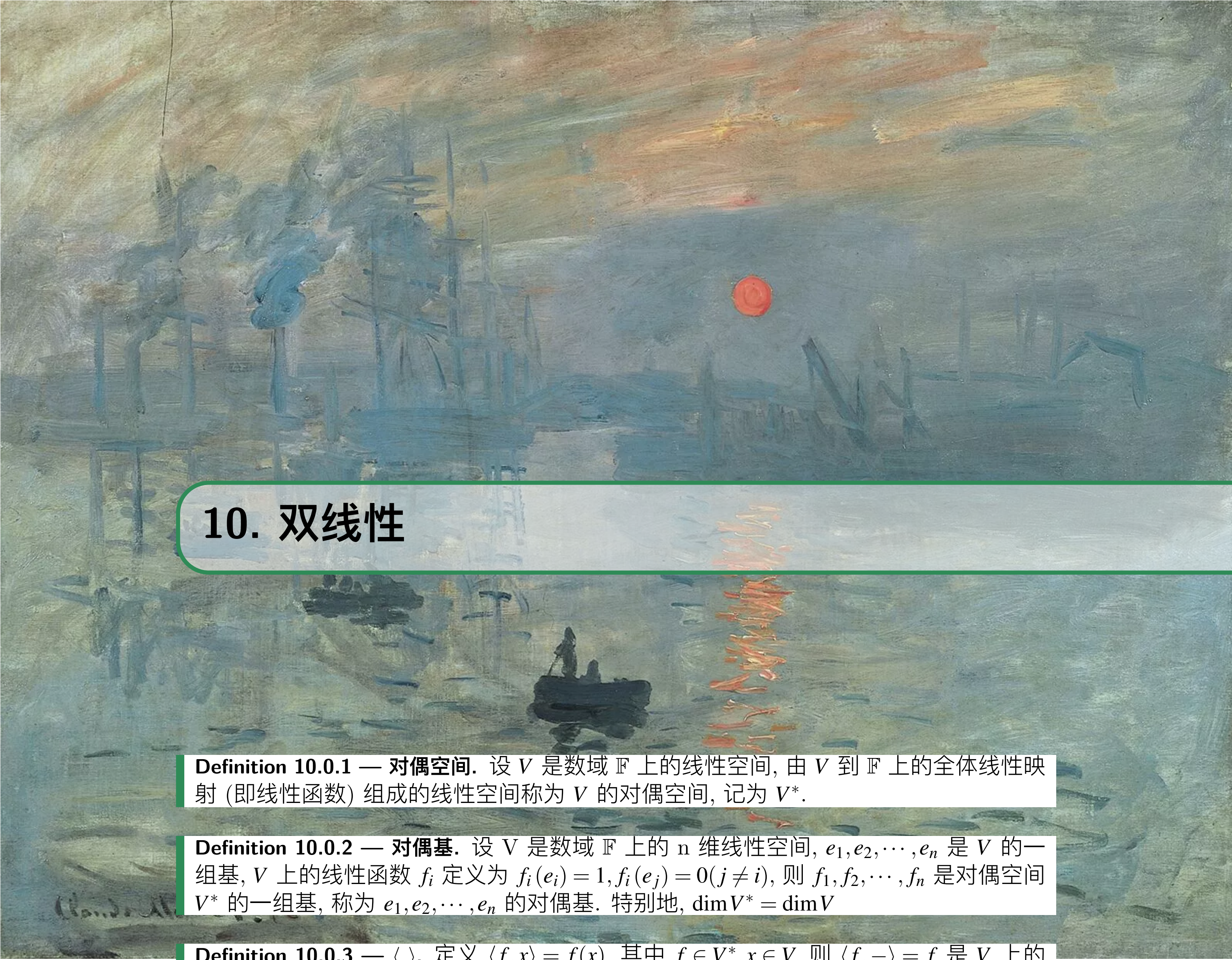
1. $\hat{x}$ 为 $Ax=b$ 的最小二乘解 $\Leftrightarrow (b-A\hat{x})\perp L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, 其中 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$
2. $\hat{x}$ 为 $Ax=b$ 的最小二乘解 $\Leftrightarrow \hat{x}$ 为 $A'Ax=A'b$ 的解.

9.1 解题思路

Theorem 9.1.1 求正交矩阵 T 使得实对称矩阵正交相似于对角阵的步骤是：

1. 求出实对称矩阵的全部特征值，其重数分别是 r_i, $r_1+\mathrm{r}_2+\cdots+\mathrm{r}_s=n$
2. 对于每个特征值求解齐次线性方程组 $(\lambda_iE-A)x=0$，得到其基础解系，这也是特征子空间的一组基，利用施密特正交化得到标准正交基将每组标准正交基合并构成正交矩阵
3. 构造正交矩阵 $T=(\eta_{11},\eta_{12},\ldots,\eta_{1r_1},\ldots,\eta_{s1},\eta_{s2},\ldots,\eta_{sr_s})$, 则

$$T'AT=T^{-1}AT=\operatorname{diag}(\lambda_1E_{r_1},\lambda_2E_{r_2},\ldots,\lambda_sE_{r_s})$$



10. 双线性

Definition 10.0.1 — 对偶空间. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 由 V 到 $\mathbb{F}$ 上的全体线性映射 (即线性函数) 组成的线性空间称为 V 的对偶空间, 记为 V^*.

Definition 10.0.2 — 对偶基. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基, V 上的线性函数 f_i 定义为 $f_i(e_i)=1, f_i(e_j)=0(j\neq i)$, 则 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是对偶空间 V^* 的一组基, 称为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的对偶基. 特别地, $\dim V^*=\dim V$

Definition 10.0.3 — $\langle,\rangle$. 定义 $\langle f,x\rangle = f(x)$, 其中 $f\in V^*, x\in V$, 则 $\langle f,-\rangle = f$ 是 V 上的线性函数, $\langle -,x\rangle$ 是 V^* 上的线性函数. 定义线性映射 $\eta: V\to (V^*)^* = V^{**}, \eta(x)=\langle -,x\rangle$

Theorem 10.0.1 线性映射 $\eta: V\to V^{**}$ 是线性同构. 如果把 V 与 V^{**} 在这个同构下等同起来, 则 V 可以看成是 $V*$ 的对偶空间, 从而 V 与 V^* 互为对偶.

Theorem 10.0.2 设 V,U 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, φ 是 V 到 U 的线性映射, 则存在唯一的 U^* 到 V* 的线性映射 φ^*, 使得对任意的 $x\in V, f\in U^*$ 满足等式:

$$\langle \varphi^*(f),x\rangle = \langle f,\varphi(x)\rangle$$

线性映射 φ^* 称为 φ 的对偶映射.

Proposition 10.0.3 对偶映射其有下列性质:
1. 若 $V=U, \varphi=I$ 是恒等变换, 则 $I^*=I$
2. $(\psi\varphi)^*=\varphi^*\psi^*$
3. φ 是单映射的充要条件是 φ^* 是满映射;
4. φ 是满映射的充要条件是 φ^* 是单映射;
5. φ 是同构的充要条件是 φ^* 是同构.

Definition 10.0.4 — 双线性型. 设 U, V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $U\times V$ 是它们的积集合, 若存在 $U\times V$ 到 $\mathbb{F}$ 的映射 g 适合下列条件:

1. 对任意的 $x,y\in U,z\in V,\lambda\in\mathbb{F}$
$$g(x+y,z)=g(x,z)+g(y,z),g(\lambda x,z)=\lambda g(x,z)$$
2. 对任意的 $x\in U,z,w\in V,\lambda\in \mathrm{F}$
$$g(x,z+w)=g(x,z)+g(x,w),\quad g(x,\lambda z)=\lambda g(x,z)$$

则称 g 是 U 和 V 上的双线性函数或双线性型. 当 U, V 是有限维空间时, 任一 $U\times V$ 上的双线性型均可用矩阵来表示. 记 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 U 的基, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V 的基, 令 $a_{ij}=g\left(\alpha_i,\beta_j\right)$, 则

$$G=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为 g 在给定基下的表示矩阵.

若 $x=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m,y=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\beta_n$, 则

$$g(x,y)=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\,G\,(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$$

矩阵 G 的秩称为双线性型 g 的秩, 记为 $\mathbf{r}(g)$

Theorem 10.0.4 设 g 是有限维线性空间 U,V 上的双线性型, 则总存在 U,V 的基, 使 g 在这两组基下的表示矩阵为对角矩阵。

Definition 10.0.5 — 根子空间. 设 g 是线性空间 U,V 上的双线性型,

$$L=\{x\in U|g(x,y)=0,\ \text{对一切}y\in V\}$$
$$R=\{y\in V|g(x,y)=0,\ \text{对一切}x\in U\}$$

则 L 称为 g 的左根子空间, R 称为 g 的右根子空间. 若 g 的左、右根子空间都等于零, 则称 g 是非退化的双线性型.

Theorem 10.0.5 设 g 是线性空间 U,V 上的双线性型, 则 g 非退化的充要条件是

$$\dim U=\dim V=\mathrm{r}(g)$$

等价地, g 非退化的充要条件是它的表示矩阵为可逆矩阵。

Theorem 10.0.6 设 g_1,g_2 是线性空间 U,V 上的两个非退化双线性型, 则存在 U 上的可逆线性变换 φ 及 V 上的可逆线性变换 ψ, 使对一切 $x\in U,y\in V$, 有

$$g_2(\varphi(x),y)=g_1(x,y);\quad g_2(x,\psi(y))=g_1(x,y)$$

Definition 10.0.6 — 纯量积. 设 g 是线性空间 $U=V$ 上的双线性型, 称 g 是 V 上的一个纯量积 (或数量积)

Definition 10.0.7 — 对称型和交错型. 设 g 是线性空间 V 上的纯量积, 若对任意的 $x,y\in V$, 都有

$$g(x,y)=g(y,x)$$

则称 g 是 V 上的对称型; 若对任意的 $x,y\in V$, 都有

$$g(x,y)=-g(y,x)$$

则称 g 是 V 上的交错型 (或反对称型).

Definition 10.0.8 — 正交. 设 g 是线性空间 V 上的纯量积, $x,y\in V$, 若 $g(x,y)=0$, 则称 x 左正交 (或左垂直) 于 y, 称 y 右正交 (或右垂直) 于 x, 记为 $x\perp y$

Theorem 10.0.7 g 是线性空间 V 上的纯量积, 若对任意的 $x,y\in V$ 都有 $x\perp y$ 当且仅当 $y\perp x$ 则 g 必是对称型或交错型.

Theorem 10.0.8 g_1,g_2 是线性空间 V 上的非退化纯量积, 则存在 V 上唯一的线性变换 φ, 使对任意的 $x,y\in V$, 都有

$$g_2(\varphi(x),y)=g_1(x,y)$$

Definition 10.0.9 — 辛空间. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 若在 V 上定义了一个非退化的交错型, 则称 V 为辛空间.

Theorem 10.0.9 设 g 是 V 上的交错型, 则存在 V 的一组基, 使 g 在这组基下的表示矩阵为分块对角矩阵:

$$\operatorname{diag}\{S,\cdots,S,0,\cdots,0\}$$

其中 S 为下列形状的二阶矩阵:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

这组基称为辛基.

Definition 10.0.10 — 辛变换. 设 V 是辛空间, φ 是 V 上的线性变换, 且 $g(\varphi(x),\varphi(y))=g(x,y)$ 对任意的 $x,y\in V$ 成立, 则称 φ 是 V 上的辛变换.

Theorem 10.0.10 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的辛空间, 则
1. V 上的线性变换 φ 是辛变换的充要条件是 φ 将辛基变到辛基;
2. 两个辛变换之积仍是辛变换;
3. 恒等变换是辛变换;
4. 辛变换的逆变换是辛变换.

Definition 10.0.11 — 正交空间. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 若在 V 上定义了一个非退化的对称型, 则称 V 为 (正则) 正交空间.

Definition 10.0.12 — 正交基. 设 g 是数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 上的对称型, 则必存在 V 的一组基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 使 g 在这组基下的表示矩阵为对角矩阵:

$$\operatorname{diag}\{b_1, \cdots, b_r, 0, \cdots, 0\}$$

这样的基称为 V 的正交基.

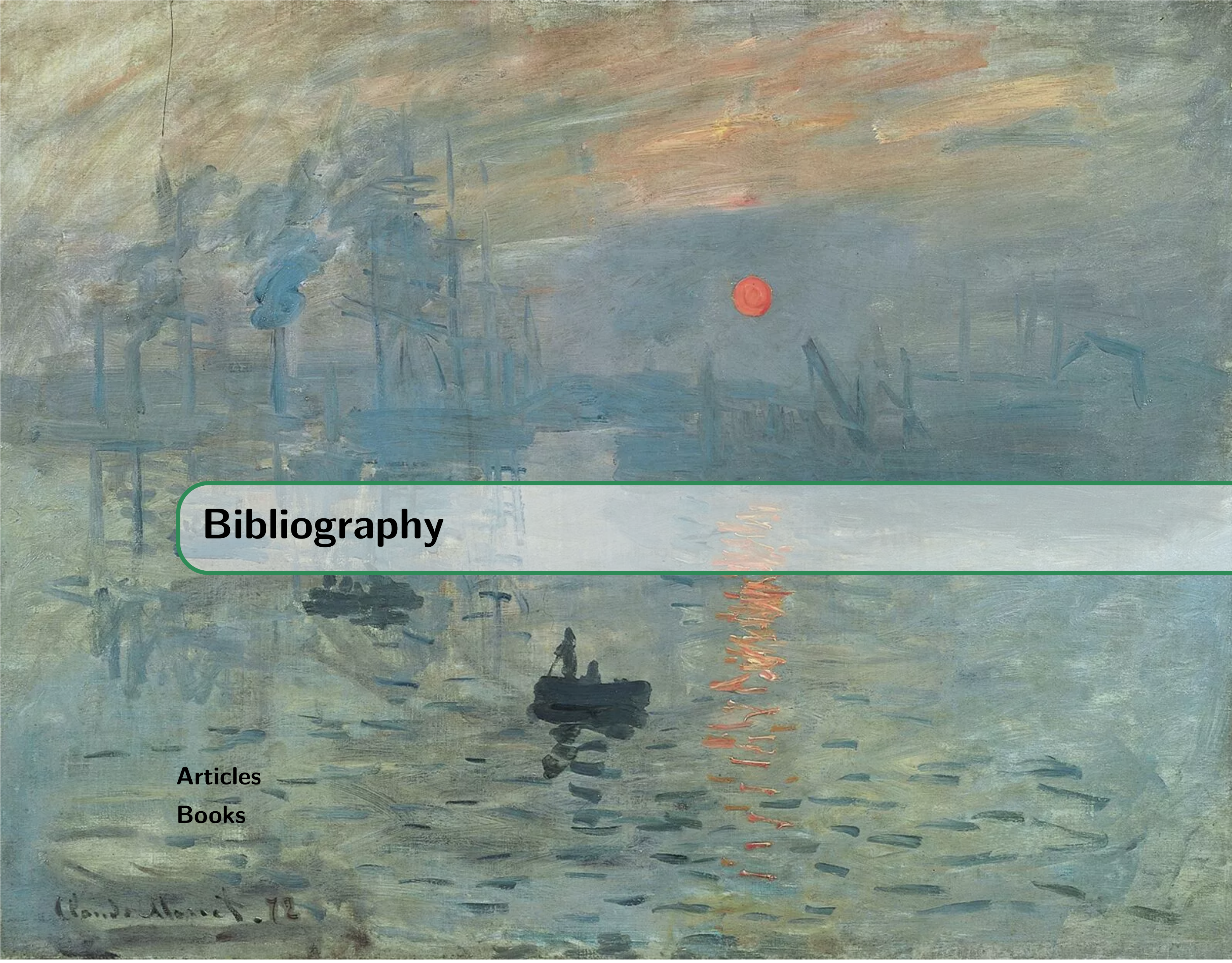
Definition 10.0.13 — 迷向向量. 若 x 是正交空间 V 中的非零向量, 如果 $g(x,x) = 0$, 则称 x 是迷向向值。含有迷向向量的子空间称为迷向子空间。

Definition 10.0.14 — 正交变换. 设 V 是正交空间, φ 是 V 上的线性变换且对任意的 x, y, 有

$$g(\varphi(x), \varphi(y)) = g(x, y)$$

则称 φ 是 V 上的正交变换.

Theorem 10.0.11 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的正交空间, 则
1. 两个正交变换之积是正交变换;
2. 恒等变换是正交变换;
3. 正交变换的逆变换矩正交变换.



Bibliography