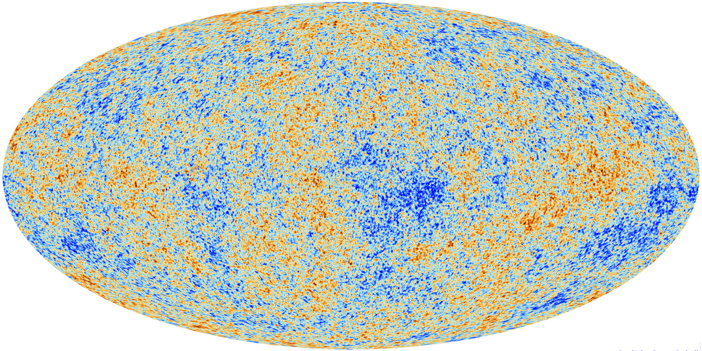
Kosmologische Inflation und Implikationen für die Quantenmechanik

Big Questions Seminar

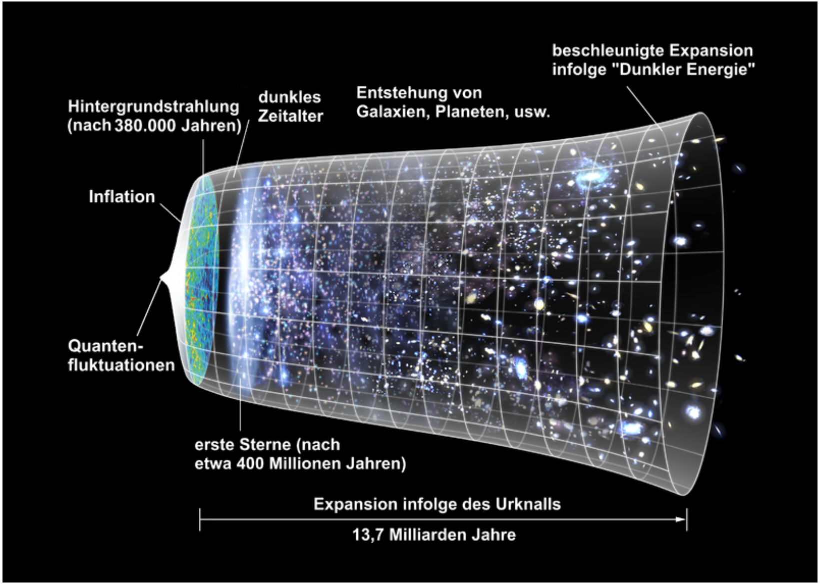
Daniel Wendler

10. Dezember 2020



Einführung

- Dynamische Entwicklung des Universums nach der ART
- Das ΛCDM-Modell
- Motivation und Einführung des Inflaton-Feldes
- Unendliche Inflation als Multiversum
- Quantenmechanik eines drei geteilten Systems
- Klassisches Modell zur Inflation
- Das Meßproblem unter Betrachtung der Inflation
- Zusammenfassung und Ausblick



[1] https://map.gsfc.nasa.gov/media/060915/index.html

Friedmanngleichungen

Die Allgemeine Relativitätstheorie liefert uns zwei Bewegungsgleichungen, welche die Expansion des Universum beschreiben:[2]

Bewegungsgleichungen

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{8\pi\rho}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

H : Hubble Parameter
a : Skalenfaktor
ρ, p : Energiedichte bzw. Druck die das Universum als ein ideales Fluid modellieren
$k = \pm 1, 0$: Krümmungsfaktor des Raumes

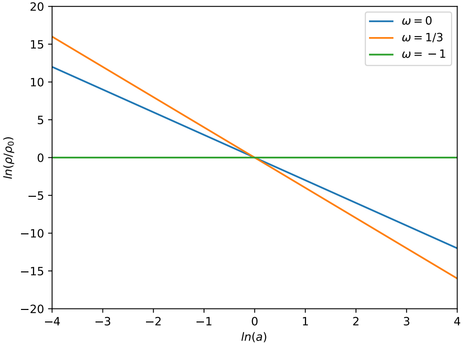
[2] Spacetime and Geometry S.Carroll

Abhängigkeiten der Energiedichte vom Skalenfaktor

Annahme Zustandsgleichung $p = \omega\rho$

$$\frac{d\ln\rho}{dt} = -3(1+\omega)\frac{d\ln a}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad \rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}$$

Materie überwiegt	$\omega = 0$	$\Rightarrow \rho \propto a^{-3}$
Strahlung überwiegt	$\omega = \frac{1}{3}$	$\Rightarrow \rho \propto a^{-4}$
Vakuumsenergiedichte	$\omega = -1$	$\Rightarrow \rho = const.$



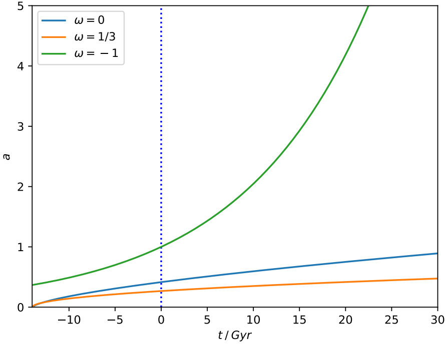
Vernachlässigung von räumlicher Krümmung $k = 0$

$H_0 = \sqrt{\frac{8\pi\rho_0}{3}}$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi\rho}{3}}a = H_0 a^{-\frac{1}{2}(1+3\omega)}$$

$$a(t) = \begin{cases} H_0 t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} + a_0 & \omega \neq -1 \\ a_0 \exp(Ht) & \omega = -1 \end{cases}$$

Materie überwiegt	$\omega = 0$	$\Rightarrow a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$
Strahlung überwiegt	$\omega = \frac{1}{3}$	$\Rightarrow a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$
Vakuumsenergiedichte	$\omega = -1$	$\Rightarrow a(t) \propto exp\,(Ht)$



Das ΛCDM-Modell

In unserem Universum ("deSitter-Space", $\Lambda > 0$):
Verschiedene Beiträge zur Energiedichte

$$\Omega = \frac{1}{\rho_c}\sum_i \rho_i = \underbrace{\Omega_{DM} + \Omega_{BM}}_{=\Omega_M} + \Omega_R + \Omega_V$$

mit

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$
$$\Omega_k = 1 - \Omega$$

Ω_V	0.68
Ω_{BM}	0.05
Ω_{DM}	0.27
Ω_k	~ 0
Ω_R	$\sim 10^{-5}$

Verallgemeinerung der Bewegungsgleichungen:

$$H = H_0\sqrt{(\Omega_{DM,0} + \Omega_{BM,0})a^{-3} + \Omega_{R,0}a^{-4} + \Omega_{k,0}a^{-2} + \Omega_V}$$
$$\approx H_0\sqrt{\Omega_M a^{-3} + \Omega_V}$$

Lösung:

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_V}\right)^{\frac{1}{3}} sinh^{\frac{2}{3}}\frac{t}{\tau}$$

mit $\tau = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_V}}$.

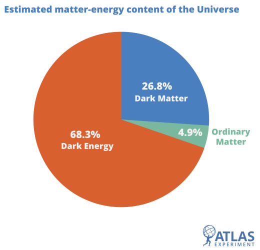
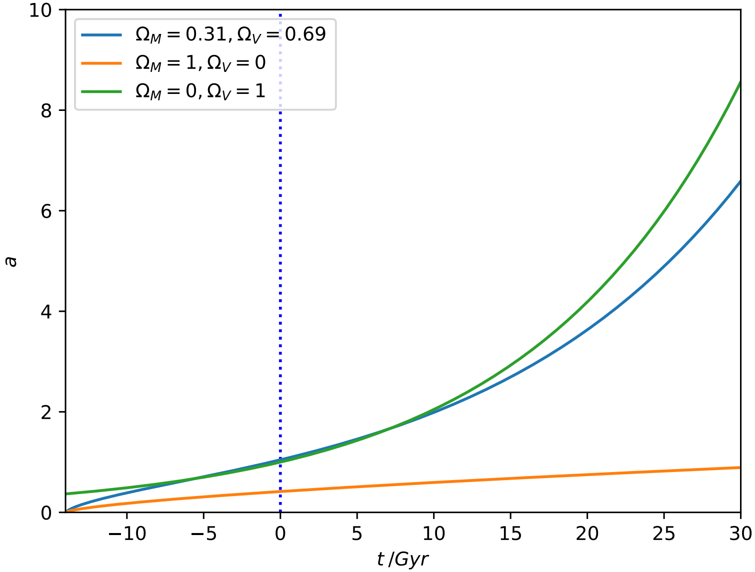


Abbildung: http://cds.cern.ch/record/2665176

[3]

[3] J.Friemann,M.Turner,D.Huterer, arxiv:0803.0982

Zeitliche Entwicklung im ΛCDM-Modell



- **Das Flachheitsproblem:** Nach dem heutigen Stand befinden wir uns in einem flachen Universum ($k = 0, \Omega_k = 0$). Dies wäre jedoch nur gegeben für sehr bestimmte Anfangsbedingungen unseres Universum.
  $\Rightarrow$ *"fine tuning"*
- **Das Horizontproblem:** In der kosmischen Hintergrundstrahlung messen wir nur kleine Temperaturfluktuationen. Wir wissen jedoch aus der zeitlichen Entwicklung des Universums, dass bestimmte Regionen zum Zeitpunkt der Aussendung der Strahlung nicht Kausal im Kontakt standen. Es würden somit größer Temperaturfluktuationen erwartet werden.
  $\Rightarrow$ *"fine tuning"*
- **Magnetische Monopole:** "Grand Unified Theories"(GUT) würden sogenante topologische Effekte vorhersagen, welche sich als magnetische Monopole manifestieren würden. Diese würden bei hohen Temperaturen am Anfang des Universum entstehen. Es wurden jedoch noch keine Hinweise auf diese magnetischen Monopole gefunden.

Inflation durch ein skalares Feld

Durch koppeln eines reelen skalaren Feldes $\phi(t)$ an die Bewegungsgleichungen der ART ist es möglich kosmische Inflation zu beschreiben.

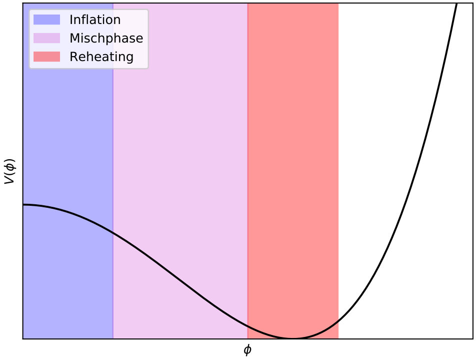
$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)$$
$$p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)$$
$$\omega = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)}$$

Desweiteren gilt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0$$

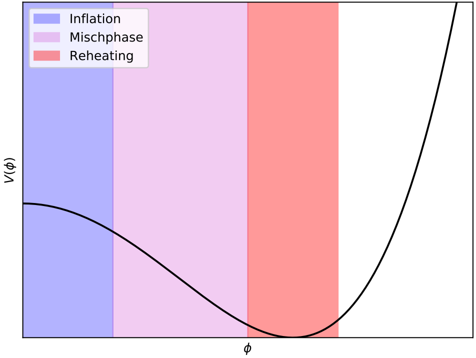
Die Phase der Inflation

- $V(\phi)$ lokalisiert um das Maximum, niedriger Beitrag der kinetischen Energie $V(\phi) >> \dot{\phi}^2$
- $\omega \approx -1$ Modellierung einer kosmologischen Konstante
- Exponentielle Ausdehnung des Universum $a(t) \propto \exp(Ht)$
- Erzeugt ein flaches und homogenes Universum $\Rightarrow$Lösung des Horizontproblem
- Stellt eine "Attraktor-Lösung" da, erhöht die möglichen Anfangsbedingungen welche zu $k = 0$ führen
  $\Rightarrow$Lösung des Flachheitsproblem
- Seltene Teilchen können stark verteilt werden $\Rightarrow$Lösung des magnetischen Monopol Problems
- "false vacuum" $V(\Phi_0) >> \Lambda$



Übergang in das ΛCDM-Modell

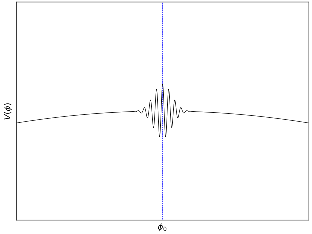
- *"reheating:"* Oszillation des Feldes um das Minimum
$$V(\phi) \approx \frac{m^2\phi^2}{2}$$
- Umwandelung der Energie in SM Teilchen (stark Modellabhängig)
- Mittelung über die Fluktuationen:
$$\omega \propto \frac{1}{2}\left\langle\dot{\phi}^2\right\rangle - \langle V(\phi)\rangle = 0.$$
- Beschreibt ein druckloses ideales Fluid mit $a(t) \propto t^{2/3}$

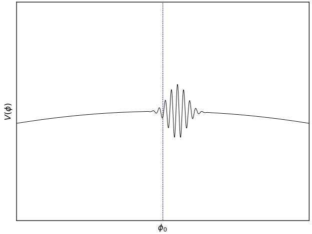


Unter betrachtung von Quantenmechanischen Effekten auf das Inflaton-Feld ϕ lässt sich das Konzept der Unendlichen Inflation einführen.

- Wellenpaket lokalisiert um ϕ_0
- Anschließend beginnt das Feld zu "rollen" und ist lokalisiert um $\phi_0 + \delta\phi$.
- Inflation beginnt in einem Teil der Raumzeit und sorgt für ein exponentielles Wachstum.
- Ein anderer Teil der Raumzeit ist immernoch eine endliche Wahrscheinlichkeit, dass das Feld noch nicht angefangen hat zu "rollen".
- Durch die Inflation können diese beiden Gebiete schon Kausal getrennt sein.
- Dies kann sich immer wieder wiederholen, weshalb Inflation niemals endet und spricht daher von unendlicher Inflation.

$\Rightarrow$**Multiversum**





Basierend auf *Unitary Evolution and Cosmological Fine-Tuning* von *Sean M. Caroll* und *Heywood Tam* [4].

- **Satz von Liouville**
  Das Volumen von benachbarten Phasenraumtrajektorien ist zeitlich konstant.
- Unabhängig ob Inflation stattgefunden hat, muss es also spezielle Anfangsbedingungen gegeben haben.
- Warum ist die Entropie in unserem Universum so klein, obwohl sie nach dem zweiten Hauptsatz immer ansteigen muss.

[4] arxiv:1007.1417

- Im nächsten Teil betrachten wir Konsequenzen einer inflationären Kosmologie auf Quantenmechanische Systeme.
- Dieser Teil bezieht sich auf das Paper "How unitary cosmology generalizes thermodynamics and solves the inflationary entropy problem"[5] von "Max Tegmark".
- Zunächst kurze Wiederholung zu Dichtematrizen und eine Einführung in das Modell von Tegmark.

[5] arxiv:1108.3080

- Allgemeine Dichtematrix ρ für einen endlichen Hilbertraum $\mathcal{H}$
$$\rho = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$$
- reiner Zustand $\iff \rho = \left|\psi\right\rangle\left\langle\psi\right| \iff \rho^2 = \rho.$
- Zeitentwicklung
$$\rho(t) = U(t,t')\rho(t')U^\dagger(t,t'), \qquad U(t,t') = \exp(-iH(t-t')).$$
- Erwartungswerte A
$$\langle A\rangle = Tr[\rho A]$$
- Von-Neumann-Entropie
$$S = -Tr[\rho \ln \rho] = -\sum_i \lambda_i ln\lambda_i$$

Unterteilung in drei Teilsysteme

- **Das Objekt:** Das Objekt ist das Teilsystem, welches die Freiheitsgrade beschreibt an denen Messungen vorgenommen werden.
  Ein Beispiel wäre ein Stern-Gerlach Experiment $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$.
- **Das Subjekt:** Dies beinhaltet alle Freiheitsgrade, welcher der subjektive Beobachter über das Objekt hat. Auf dieses System wird immer Konditioniert. Beispiel umgedrehte Karten.
- **Die Umgebung:** Die Umgebung beinhaltet alle anderen Freiheitsgrade. Über dieses System wird immer partiell die Spur gebildet.

Diagramm der drei Teilsysteme arxiv:1108.3080

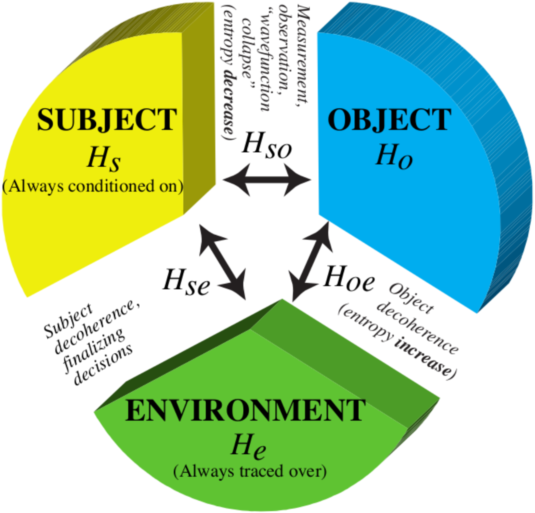


Abbildung: Eine Darstellung der drei Systeme aus der Arbeit von *M.Tegmark* . Hier sind die Hamiltonoperatoren H_i der einzelnen Systeme und deren Interaktion H_{ij} dargestellt. Zusätzlich kann es auch eine Interaktion H_{soe} zwischen den drei Interaktionen geben.

Der Hamiltonoperator des Gesamtsystemes

Nach der Einteilung des Gesamtsystem lässt sich der Hamiltonoperator schreiben als:

$$H = \underbrace{H_s + H_o + H_e}_{\text{Systeme}} + \underbrace{H_{so} + H_{oe} + H_{se} + H_{soe}}_{\text{Interaktionen}}$$

Betrachten der Terme die zum Objekt beitragen:

- H_o: Der Beitrag zur Selbstinteraktion ist durch die Unitäre Zeitentwicklung gegeben. Die Entropie ändert sich hierbei nicht.

$$\begin{aligned} \rho' &= U_o \rho U_o^\dagger = \exp(-iH_o t)\rho \exp(iH_o t) \\ S' &= -Tr[\rho' \ln \rho'] = -\sum_i \lambda_i' \ln \lambda_i' = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i = S \end{aligned}$$

- H_{oe}: Die Objekt-Umgebung Wechselwirkung sorgt im allgemeinen für Dekohärenz und erhöht die Entropie. Hierführ wird eine Faktorisierung $\rho = |e_0\rangle\langle e_0| \otimes \rho_0$ angenommen und über die Umgebung partiell die Spur gebildet.

$$\rho_0' = Tr_e[U_{oe}\rho_0 U_{oe}^\dagger] = ... = \sum_{ij} P_i \rho_0 P_j \langle e_i | e_j \rangle ; \qquad P_i = |o_i\rangle\langle o_i| ; \quad |o_i\rangle , |e_i\rangle$$

- H_{so}: Ideale Messung, bei welcher die gegenseitige Information maximiert wird. Erneut die Faktorisierung $\rho = |s_0\rangle \langle s_0| \otimes \rho_0$ und Konditionierung auf das Subjekt.

$$\rho_0' = \frac{\Pi_k \rho \Pi_k^\dagger}{Tr[\Pi_k \rho \Pi_k^\dagger]} = \frac{1}{Tr[\Pi_k \rho \Pi_k^\dagger]} \sum_{i,j} P_i \rho_0 P_j \langle s_k|\sigma_i\rangle \langle s_k|\sigma_j\rangle^*$$

mit

$$\Pi_k = \sum_i \langle s_k|\sigma_i\rangle P_i, \qquad P_i = |s_i\rangle \langle s_i| \,.$$

- Quantenmechanische Verallgemeinerung des Satz von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- Perfekte Messung $\langle s_i|\sigma_j\rangle = \delta_{i,j}$

$$\rho_0' = |s_i\rangle \langle s_i|$$

Anfangszustand "Spin-UP":

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$$

$$\Rightarrow \rho = |\psi\rangle \langle\psi| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = 0 \text{ Bits}$$

Anfangszustand "Spin-UP":

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$$

$$\Rightarrow \rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = 0 \text{ Bits}$$

Präzession durch B-Feld:

$$U|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

$$\Rightarrow \rho = U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$S = -1\log_2(1) - 0\log_2 0 = 0 \text{ Bits}$$

Anfangszustand "Spin-UP":

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= |\uparrow\rangle \\
\Rightarrow \rho = |\psi\rangle\langle\psi| &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
S &= 0 \text{ Bits}
\end{aligned}
$$

Präzession durch B-Feld:

$$
\begin{aligned}
U|\psi\rangle =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \\
\Rightarrow \rho =& U|\psi\rangle\langle\psi| U^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
S =& -1\log_2(1) - 0\log_2 0 = 0 \text{ Bits}
\end{aligned}
$$

Dekohärenz:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
S &= -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ Bit}
\end{aligned}
$$

Anfangszustand "Spin-UP":

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$$
$$\Rightarrow \rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$S = 0 \text{ Bits}$$

Präzession durch B-Feld:

$$U|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)$$
$$\Rightarrow \rho = U|\psi\rangle\langle\psi| U^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$S = -1\log_2(1) - 0\log_2 0 = 0 \text{ Bits}$$

Dekohärenz:

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$S = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ Bit}$$

Messung:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$S = 0 \text{ Bits}$$

Unter der Betrachtung von Subjekt, Objekt und Umgebung lässt sich folgender zweiter Hauptsatz formulieren:

Zweiter Haupsatz der Thermodynamik

Die Entropie des Objekt kann nicht kleiner werden, außer es interagiert mit dem Subjekt.

- Dies kann als eine verallgemeinerung des normalen zweiten Hauptsatz der Thermodynamik aufgefasst werden
- Es muss beachtet werden, dass dies nur für den subjektiven Beobachter gilt
- Hier wurde eine Dreiteilung (Objekt, Subjekt, Umgebung) durchgeführt, währendessen die Standardformulierung auf eine Zweiteilung (Objekt, Umgebung)
- Für einen Beweis siehe Anhang A [6]

[6] arxiv:1108.3080

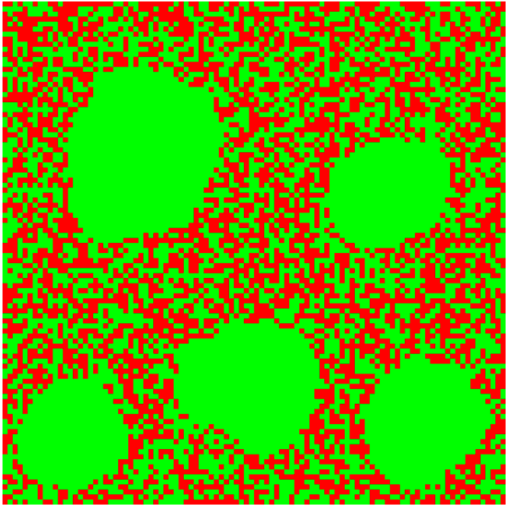


Abbildung: Betrachtung eines klassischen Modells, welches sich aber auf ein quantenmechanisches Verallgemeinern lässt. Wir teilen eine Fläche in gleichgroße "Voxels" auf. Diese können entweder Bewohnbar(Grün) oder Unbewohnbar(Rot) sein.

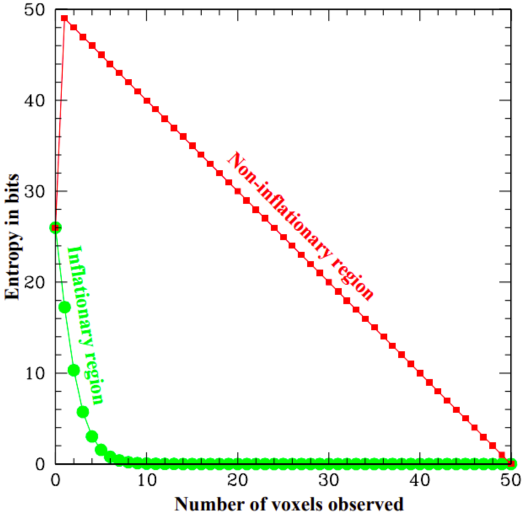
Entropie des Modells in Abhängigkeit der Observierten Voxels b, für eine Gesamtzahl n.

nicht inflationäre Bereiche

$$S = n - b$$

Inflationäre Bereiche

$$S \approx \frac{n}{2^b + 1} + \log_2(1 + 2^{-b})$$



[7]

[7] arxiv:1108.3080

Schlussfolgerung für kosmische Inflation

- Durch Messung einzelner Regionen lassen sich Informationen über die Umgebung schließen
  $\Rightarrow$"Long range entangelment"
- Die Entropie fällt exponential anstatt Linear ab
  $\Rightarrow$Lösung des Entropieproblems
- Weitere Deutungen für die Begriffe "Messung" und "Dekoharenz" im Bezug auf die Kopenhagen Interpretation. $\rightarrow$Nächster Teil

Zusammenfassung des Paper *Born in an Infinite Universe: a Cosmological Interpretation of Quantum Mechanics*[8] von *Anthony Aguirre* und *Max Tegmark*:

- Betrachten von N Stern-Gerlach Experimente in unterschiedlichen Teilen des Multiversum

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle =&(\alpha\,|{\downarrow}\rangle + \beta\,|{\downarrow}\rangle) \otimes .... \otimes (\alpha\,|{\downarrow}\rangle + \beta\,|{\downarrow}\rangle) \\
=&\alpha^N\,|{\downarrow} \dots {\downarrow}\rangle + \alpha^{N-1}\beta\,|{\downarrow} \dots {\downarrow}{\uparrow}\rangle + \dots + \beta^N\,|{\uparrow} \dots {\uparrow}\rangle
\end{aligned}
$$

- Wahrscheinlichkeit $\uparrow$ zu messen:

$$
P_\uparrow = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (\beta^*\beta)^n (\alpha^*\alpha)^{N-n} \frac{n}{N} = \frac{\langle n\rangle}{N} = |\beta|^2
$$

- Der Grenzwert $N \to \infty$ erzeugt die Bornregeln, bis auf Korrekturen von Norm 0.
  Mit Projektoren C ("confusion operator") und $C_\perp$

$$
|\psi\rangle = C\,|\psi\rangle + C_\perp\,|\psi\rangle
$$

  $N \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
||C\,|\psi\rangle\,|| &\to 0 \\
||C_\perp\,|\psi\rangle\,|| &\to ||\,|\psi\rangle\,||
\end{aligned}
$$

[8] arxiv:1008.1066

Inflation und das Multiversum

- Betrachtung von Inflation liefert ein Multiversum, ähnlich wie die Everett-Interpretation, welche jedoch räumlich getrennt sind.
- Unitäre Entwicklung unter H_{oe} und H_{os} bestanden immer aus Verschränkung und einem zusätzlichem Schritt
  $H_{os} \hat{=}$ Obversation $=$ Verschränkung $+$ Konditionierung
  $H_{oe} \hat{=}$ Dekoharenz $=$ Verschränkung $+$ partiell spuren
- Kopenhagen Approximation: Ein Beobachter kann so tun, als ob die dekoharenten Anteile nicht zur Wellenfunktion beitragen.

- Grundlegende Wiederholung zur zeitlichen Entwicklung des Universum
- Motivation und Einführen eines Inflaton Feldes
- Dichtematrizen und Meßprozesse in einem drei geteilten System
- Modell zur kosmischen unendlichen Inflation
- Folgerungen für das Meßproblem der Quantenmechanik

[9] arxiv:1108.3080
[10] Max Tegmark:Our Mathematical Universe: My Quest for the Ultimate Nature of Reality

- Grundlegende Wiederholung zur zeitlichen Entwicklung des Universum
- Motivation und Einführen eines Inflaton Feldes
- Dichtematrizen und Meßprozesse in einem drei geteilten System
- Modell zur kosmischen unendlichen Inflation
- Folgerungen für das Meßproblem der Quantenmechanik

Offene Fragen:

- Hat kosmische Inflation stattgefunden (und findet immer noch statt) ?
- Weitere Probleme [9]: "The measure problem", "The start problem", "The degree-of-freedom problem"
- Ist unser Universum eine mathematische Struktur ? [10]

[9] arxiv:1108.3080

[10] Max Tegmark:Our Mathematical Universe: My Quest for the Ultimate Nature of Reality

Weitere Quellen/Informationen

- Aspects of Eternal Inflation, part 1-4 - Leonard Susskind
- Thermodynamics, Information & Consciousness in a Quantum Multiverse - Max Tegmark
- Decoherence and consciousness - Max Tegmark
- Mindscape 75 | Max Tegmark on Reality, Simulation, and the Multiverse - Sean Caroll
- PDG: Modelle zur Inflation
- Can Aeons Explain The Big Bang? - Sir Roger Penrose

Vielen Dank für ihre Aufmerksamkeit