线上实验项目

二、单摆的周期与摆角的关系研究

【介绍】

1. 小角度时，单摆的周期公式

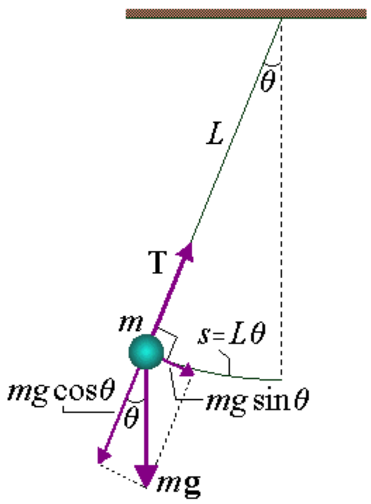


图 2.1　单摆

单摆是能够产生往复摆动的一种装置，将无重细杆或不可伸长的细柔绳一端悬于重力场内一定点，另一端固结一个重小球，就构成单摆。若小球只限于铅直平面内摆动，则为平面单摆，若小球摆动不限于铅直平面，则为球面单摆。

由牛顿力学，单摆的运动可作如下描述。

首先我们可以得到，重力对单摆的力矩的大小为

$$M = -mglsin\theta$$

其中m为质量，g是重力加速度，l是摆长，θ是单摆与竖直方向的夹角，注意，θ是矢量，这里取它在正方向上的投影。

由角动量定理可知，

$$M = I\beta$$

其中，$I = m \cdot l^2$是单摆的转动惯量，$\beta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$是角加速度。因此

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sin\theta = 0 \qquad (1)$$

（1）式是一个非线性微分方程。所以严格地说（1）式描述的单摆的运动并不是简谐运动。不过，在θ比较小时，近似地有$sin\theta \approx \theta$。因而此时（1）式就变为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

这是一个二阶常系数线性齐次微分方程，其通解为

$$\theta = Acos(\omega t + \varphi)$$

式中A、φ为任意常数，由初值条件给定。而

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

于是单摆的非线性的运动被线性地近似为简谐运动。则

$$\theta = Acos(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (2)$$

实际上 5°≈0.087266 rad，sin 5°≈0.087155，二者相差只有千分之一点几，是十分接近的。在低精度的实验中，这种系统误差可以忽略不计。由于正弦函数的性质，这个近似是角度越小，越精确，角度越大越不精确。如果角度很大（例如 60°，误差高达 17%），就完全不能说它是简谐振动了。

2. **任意角度时，单摆的周期公式**

根据角速度ω与角加速度β的关系$\beta=\frac{d\omega}{dt}$可以将单摆的动力学方程$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}sin\theta=0$改写为：

$$\omega\frac{d\omega}{d\theta}+\frac{g}{l}sin\theta=0$$

其通解为

$$\omega^2=2\frac{g}{l}cos\theta+C$$

由初始条件，$\theta|_{t=0}=\alpha$，0≤α≤π，α为摆角；$\omega|_{t=0}=0$，则其特解为：

$$\omega^2=2\frac{g}{l}(cos\theta-cos\alpha)=4\frac{g}{l}(\sin^2\frac{\alpha}{2}-sin^2\frac{\theta}{2})$$

则摆球从平衡位置到达摆角α处的运动时间为

$$t=\int_t\frac{d\theta}{\omega}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\alpha\frac{d\theta}{\sqrt{sin^2\frac{\alpha}{2}-sin^2\frac{\theta}{2}}}\qquad(3)$$

设$sin\varphi=\frac{sin\frac{\theta}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}}$，则可将上式写为

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{d\theta}{d\varphi}}{\sqrt{sin^2\frac{\alpha}{2}-sin^2\frac{\alpha}{2}sin^2\varphi}}d\varphi$$

又考虑到

$$\frac{d\theta}{d\varphi}=\frac{2cos\varphi sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-sin^2\frac{\alpha}{2}sin^2\varphi}}$$

便（3）式可以化简得到

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-sin^2\frac{\alpha}{2}sin^2\varphi}}d\varphi$$

因此单摆的周期为

$$T = 4t = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2\frac{\alpha}{2}sin^2\varphi}} d\varphi = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, F(sin^2\frac{\alpha}{2})$$

式中$F(sin^2\frac{\alpha}{2})$为第一类完全椭圆积分。

当α很小时，$\sqrt{1 - sin^2\frac{\alpha}{2}sin^2\varphi} \approx 1$，因而

$$T = 4t = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot d\varphi = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

注：根据二项式级数的展开公式，有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^n$$

【实验器材】

手机一部（用于计时）、长度为 1 米左右的轻质细绳一根、尺（毫米），螺母（或其它小重物）一个

【实验内容】

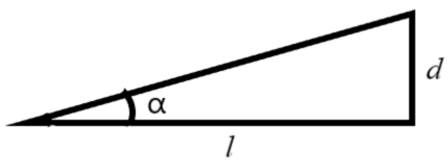
1. 将细绳一端系在螺母（或其它重物）上，另一端固定在门框上；
2. 用钢卷尺测量摆线固定端到螺母（或其它重物）质心的长度，测量五次；
3. 使螺母（或其它重物）停止摆动，静止于平衡位置上。
4. 移动螺母（或其它重物），使其在竖直平面内来回摆动，测量摆角为 2°、4°、6°…、60°的周期。为了减少误差，每次至少测 10 个周期，表格自拟。

【数据处理要求】

1. 绘制单摆周期与摆角的关系的曲线，并尝试用 Excel 或 MATLAB 等软件拟合出相应的函数；
2. 绘制单摆周期与摆角正弦值的关系的曲线，并尝试用 Excel 或 MATLAB 等软件拟合出相应的函数。

【提示】

摆角的大小可以根据直角三角形的几何关系求出（如右图所示），图中l为摆长，d为摆球与平衡位置的垂直距离。



$\alpha = \arctan\frac{d}{l}$