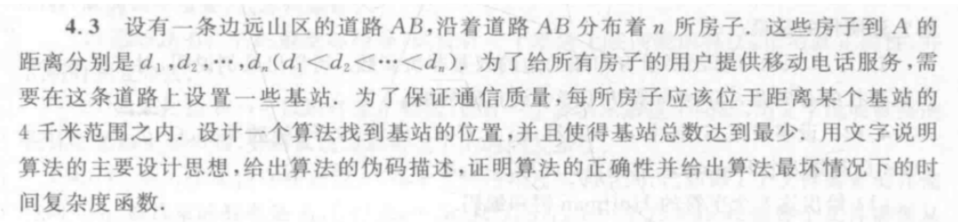
算法设计与分析 (5.20 作业)

智科三班　严中圣　222020335220177

2022 年 5 月 14 日



4.3　设有一条边远山区的道路 AB，沿着道路 AB 分布着 n 所房子．这些房子到 A 的距离分别是 $d_1, d_2, \cdots, d_n (d_1 < d_2 < \cdots < d_n)$．为了给所有房子的用户提供移动电话服务，需要在这条道路上设置一些基站．为了保证通信质量，每所房子应该位于距离某个基站的 4 千米范围之内．设计一个算法找到基站的位置，并且使得基站总数达到最少．用文字说明算法的主要设计思想，给出算法的伪码描述，证明算法的正确性并给出算法最坏情况下的时间复杂度函数．

解.

为了使基站总数达到最少，就要求要最大化地利用每个基站，即让每个基站的辐射范围内尽可能多地覆盖住宅。利用贪心算法，从第一个住宅后 4km 的位置开始扫描，以扫描中心点附近 4km 内的住宅为标准，搜索到最大覆盖住宅数即在此处放置基站，直道所有住宅均被覆盖后停止搜索，算法结束。如此便可得到最少基站总数。

伪码描述如下：

Algorithm 1 4.3

Require: $D[n]$ //距离数据，$D[i]$ 表示住宅 i 到 A 的距离，$i = 1, 2, ..., n$，为了简便，假设每个元素值均为整数，单位为 km

Ensure: 最小基站总数

```
Initialize S //基站位置
count ← 1
S[count] = D[1] + 4
for j ← 2 to n do
    if D[j] − S[count] < 4 then
        count ← count + 1
        S[count] = D[j] + 4
    end if
end for
return count
```

下面对算法的正确性进行证明，即需要证明对前 $k(k \in N)$ 步操作，存在最优方案包含前 k 步选择的基站。对步数归纳进行证明：

(1) 当 $k = 1$ 时，必定存在最优策略包含 $S[1]$。如果不包含，假设最优解第一个基站位置为 $T[1]$，则 $T[1]$ 必定小于 $S[1]$，否则无法覆盖到第一个住宅，所以 $T[1]$ 的辐射范围的住宅均在 $S[1]$ 的覆盖范围内，所以用 $S[1]$ 替换 $T[1]$ 仍然是最优解。

(2) 假设第 k 步时，存在最优策略包含前 k 步选择的基站，即包含了 $\{S[1], S[2], ..., S[k]\}$，假设前 k 个基站覆盖了 $d_1, d_2, ..., d_m$，最优解剩余基站 $\{T[k+1], T[k+2]...\}$ 覆盖了 $d_{m+1}, ...d_n$。

当第 $k+1$ 步时，假设 $T[k+1]$ 覆盖了 $d_{m+1}, ..., d_{m+j}$，与 $k=1$ 时类似，此时 $T[k+1] \leq S[k+1]$，故用 $S[k+1]$ 替代后仍然为最优解，所以第 $k+1$ 步时存在最优解包含前 $k+1$ 步选择的基站。证毕。

算法的时间复杂度为 $O(n)$。

4.12 设字符集 S，其中 8 个字符 A, B, C, D, E, F, G, H 的频率是 $f_1, f_2, \cdots, f_8$，且 $100 \times f_i$ 是第 i 个 Fibonacci 数的值，$i=1,2,\cdots,8$.

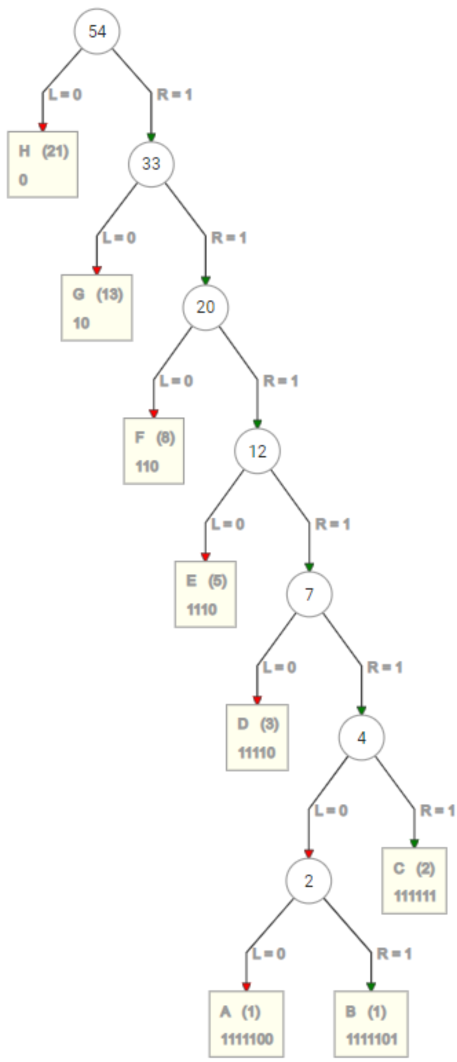
(1) 给出这 8 个字符的 Huffman 树和编码.

(2) 如果有 n 个字符，其频率恰好对应前 n 个 Fibonacci 数，那么 Huffman 树是什么结构，证明你的结论.

解.

(1) 易得 $f_1 = 100, f_2 = 100, f_3 = 200, f_4 = 300, f_5 = 500, f_6 = 800, f_7 = 1300, f_8 = 2100$

Huffman 树及编码如下：



(2) 由于 Fibonacci 数列从第三项开始即单调递增，同时可以发现对第 $k(k \geq 3)$ 项，

$$F(k+1) < \sum_{i=1}^{k} F(i) < F(k+2) \tag{1}$$

故在构造 Huffman 树时，从第三项开始，Huffman 均为单链式结构。下面对式（1）进行证明。

(1) 当 $k=3$ 时，$F(4)=3<\sum_{i=1}^{3}=4<F(5)=5$，满足条件。

(2) 假设当 $k=n(n \in N, n \geq 3)$ 时，$F(n+1)<\sum_{i=1}^{n} F(i)<F(n+2)$；

当 $k=n+1$ 时，$\because F(n+2)=F(n+1)+F(n), \therefore F(n+2)-F(n+1)<\sum_{i=1}^{n} F(i)$, 即 $F(n+2)<\sum_{i=1}^{n+1} F(i)$，等式左半边得证；

又 $\because F(n+3)=F(n+2)+F(n+1), \therefore \sum_{i=1}^{n} F(i)+F(n+1)<F(n+2)+F(n+1)$，即 $\sum_{i=1}^{n+1} F(i)<F(n+3)$，至此证毕。