

## 习题 8.7

1. 求下列曲线在指定点的切线与法平面方程:

$$(1) \begin{cases} x = a \sin^2 t, \\ y = b \sin t \cos t, \\ z = c \cos^2 t \end{cases} \text{ 在对应于参数 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 的点处;}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + z^2 = 10, \\ y^2 + z^2 = 10 \end{cases} \text{ 在 } (1,1,3) \text{ 处;}$$

$$(3) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0, \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases} \text{ 在 } (1,1,1) \text{ 处.}$$

2. 证明曲线  $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ z = e^t \end{cases}$  与圆锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  的所有母线相交成等角.

3. 求下列曲面在指定点处的切平面和法线方程:

$$(1) z = \arctan \frac{y}{x} \text{ 在点 } \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right) \text{ 处;}$$

$$(2) ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \text{ 在点 } (x_0, y_0, z_0) \text{ 处;}$$

$$(3) e^{\frac{x}{z}} + e^{\frac{y}{z}} = 4 \text{ 在点 } (\ln 2, \ln 2, 1) \text{ 处.}$$

4. 过直线  $\begin{cases} 4x + y - z - 3 = 0, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$  作曲面  $3x^2 + y^2 - z^2 = 3$  的切平面, 求该切平面的方程.

5. 两曲面在交点处的切平面的交角称为曲面在该点的交角, 根据此定义

$$(1) \text{ 求球面 } x^2 + y^2 + z^2 = 14 \text{ 与椭球面 } 3x^2 + y^2 + z^2 = 16 \text{ 在点 } (-1, -2, 3) \text{ 处的交角;}$$

$$(2) \text{ 证明曲面 } x^2 + y^2 + z^2 = ax \text{ 与 } x^2 + y^2 + z^2 = by \text{ 相互正交.}$$

6. 证明:

$$(1) \text{ 曲面 } xyz = a^3 \text{ 的切平面与坐标平面所围的四面体的体积为常数;}$$

$$(2) \text{ 曲面 } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \text{ 上任意点处的切平面在各坐标轴截距的平方和等于 } a^2;$$

$$(3) \text{ 曲面 } z = xf\left(\frac{y}{x}\right) \text{ 的所有切平面都相交于一点.}$$