习题 9.4

1. 求下列平面闭区域D的面积.

(1) D由曲线$y=\mathrm{e}^x, y=\mathrm{e}^{-x}$及$x=1$围成；

(2) D由曲线$y=x+1, y^2=-x-1$围成；

(3) D由双纽线$(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$围成；

(4) $D=\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 2\le r\le 4\sin\theta\}$；

(5) $D=\left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \middle| \dfrac{1}{2}\le r\le 1+\cos\theta\right\}$；

(6) D由曲线$(x^2+y^2)^2=2ax^3 (a>0)$围成；

(7) D由椭圆$(2x+3y+4)^2+(5x+6y+7)^2=9$围成；

(8) D是由曲线$y=x^3$， $y=4x^3$， $x=y^3$， $x=4y^3$所围成的位于第一象限部分;

2. 利用二重积分计算下列各题中立体Ω的体积.

(1) Ω为第一卦限中由圆柱面$y^2+z^2=4$与平面$x=2y, x=0, z=0$所围成；

(2) Ω由平面$y=0, z=0, y=x$及$6x+2y+3z=6$围成；

(3) $\Omega=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\}$；

(4) $\Omega=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\le 1+z^2, -1\le z\le 1\}$；

(5) Ω由平面$x=0, y=0, z=0, x+y=1$及抛物面$x^2+y^2=6-z$围成.

3. 设平面薄片所占的闭区域是由直线$x+y=2, y=x$和x轴所围成，它的面密度$\rho(x,y)=x^2+y^2$，求该薄片的质量.

4. 在一半径为R的球体内，以某条直径为中心轴用半径为r的圆柱形钻孔机打一个孔($r<R$)，求剩余部分的体积. 若圆柱形孔的侧面高为h，证明所求体积只与h有关，而与r和R无关.

5. 利用三重积分求所给立体Ω的体积.

(1) Ω是由柱面$x=y^2$和平面$z=0$及$x+z=1$所围成的立体；

(2) Ω是由抛物面$z=x^2+y^2$和所$z=18-x^2-y^2$围成的立体；

(3) Ω为圆柱体$r\le a\cos\theta$内被球心在原点、半径为a的球所割下的部分;

(4) Ω是由单叶双曲面$x^2+y^2-z^2=R^2$和平面$z=0, z=H$围成的立体;

(5) Ω_1是$Oxyz$坐标系中体积为 5 的立体，Ω为Ω_1在变换

$$u = 4x + 4y + 8z\text{，}\quad v = 2x + 7y + 4z\text{，}\quad w = x + 4y + 3z$$

下的像.

6. 已知物体Ω的底面是xOy平面上的圆域$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le R^2\}$，当用垂直于$x$轴的平面截$\Omega$均得到正三角形，$\Omega$的体密度函数为$\rho(x,y,z)=1+\dfrac{x}{R}$，试求其质量.

7. 计算下列曲面的面积.

(1) 平面$6x+3y+2z=12$位于第一卦限部分的曲面;

(2) 正弦曲线的一拱$y=\sin x$ ($0\le x\le \pi$)绕x轴旋转一周而成的曲面;

(3) 球面$x^2+y^2+z^2=a^2$含在圆柱面$x^2+y^2=ax$内部的曲面;

(4) 曲面$2z=x^2+y^2$被柱面$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$所截下部分的曲面;

(5) 抛物面$z=y^2-x^2$夹在圆柱面$x^2+y^2=1$和$x^2+y^2=4$之间部分的曲面;

(6) 球面$x^2+y^2+z^2=3a^2$ ($z>0$)和抛物面$x^2+y^2=2az$ ($a>0$)所围成立体的表面;

(7) 圆柱面$x^2+y^2=9$，平面$4y+3z=12$和$4y-3z=12$所围成立体的表面;

(8) 两个底面半径都为R，轴相互正交的圆柱所围立体的表面.

8. 求占有下列区域D，面密度为$\mu(x,y)$的平面薄片的质量与质心：

(1) D是以$(0,0),(2,1),(0,3)$为顶点的三角形闭区域，$\mu(x,y)=x+y$；

(2) D是第一象限中由抛物线$y=x^2$与直线$y=1$围成的闭区域，$\mu(x,y)=xy$；

(3) D是由心脏线$r=1+\sin\theta$所围成的闭区域，$\mu(x,y)=2$；

(4) $D=\{(x,y)\,|\,x^2+(y-1)^2\le 1\}$，$\mu(x,y)=y+|y-1|$.

9. 计算下列立体Ω的体积和形心：

(1) $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 36-3x^2-3y^2\}$；

(2) $\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le z\le 1\right.\right\}$;

(3) Ω位于锥面$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$上方，球面$\rho=4\cos\varphi$下方.

10. 若半径为R的半球体上任一点密度与该点到底面之距离成正比(比例系数为k)，求其质量与质心.

11. 求下列平面薄片或物体对指定轴的转动惯量.

(1) 均匀薄片$D=\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|\,2\sin\theta\le r\le 4\sin\theta\}$(面密度为 1)对极轴;

(2) 底长为a，高为h的等腰三角形均匀薄片(面密度为 1)对其高;

(3) 质量为M，半径为R的非均匀球体(其上任一点的密度与球心到该点的距离成正比)对其直径;

(4) 密度为 1 的均匀物体$x^2+y^2+z^2\le 2$，$x^2+y^2\ge z^2$对Oz轴.

12. 设物体Ω占有的区域为$\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le R^2, |z|\le H\}$，其密度为常数. 已知$\Omega$关于$x$轴及$z$轴的转动惯量相等. 证明$H:R=\sqrt{3}:2$.

13. 求下列密度为1的均匀物体对指定质点的引力(引力常数为k).

(1) 高为h，半顶角为α的圆锥体对位于其顶点的单位质量质点;

(2) 柱体$x^2+y^2\le R^2$($0\le z\le h$)对位于点$M_0(0,0,a)$ $(a>h)$处的单位质量质点;

(3) 半径为R的球体对球内的单位质量质点P.