

习题 2.6

1. 证明下列方程根的问题:

(1) $x^5 - 3x - 1 = 0$ 在 $(1, 2)$ 内至少有一实根;

(2) $x = a \sin x + b$ ($0 < a < 1, b > 0$) 至少有一正根, 且不超过 $a + b$.

2. 设函数 $f(x) \in C[0, 1]$ 且满足 $0 < f(x) < 1$ ($0 \leq x \leq 1$). 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = \xi$.

3. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$. 试证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = g(\xi)$.

4. 设函数 $f(x) \in C[0, +\infty)$, 且 $f(0) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A < 0$. 证明: 存在 $\xi \in (0, +\infty)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

5. 设函数 $f(x) \in C(a, b)$, 又 x_1, x_2, \dots, x_n 为 (a, b) 内的任意点. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

6. 设函数 $f(x) \in C[a, b]$, 又 $a < c < d < b$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$mf(c) + nf(d) = (m+n)f(\xi) \quad (m, n \in \mathbb{N}_+).$$

7. 设函数 $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (有限值). 证明: $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上必有界.

8. 设函数 $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. 证明: $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上取到它的最小值.