# 第四节
# 空间曲线及其方程

## 一、空间曲线的一般方程

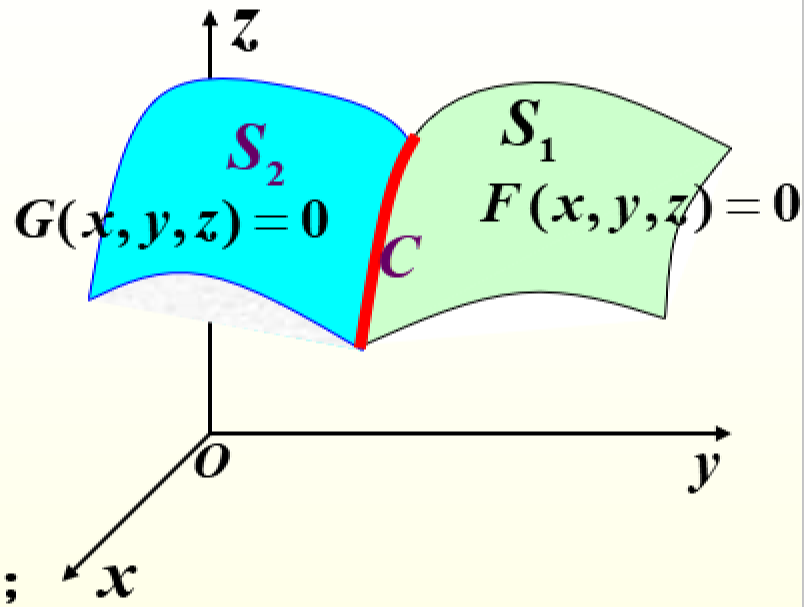
## 二、空间曲线的参数方程

## 三、空间曲线在坐标面上的投影

# 一、空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线.

$$C:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases} \qquad (1)$$




**曲线与方程组的关系:**

① 曲线上点的坐标都满足方程组 (1);

② 不在曲线上的点的坐标不能同时满足两个方程.

方程组(1)**叫做空间曲线 $C$ 的一般方程.**

例1 方程组 $C:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

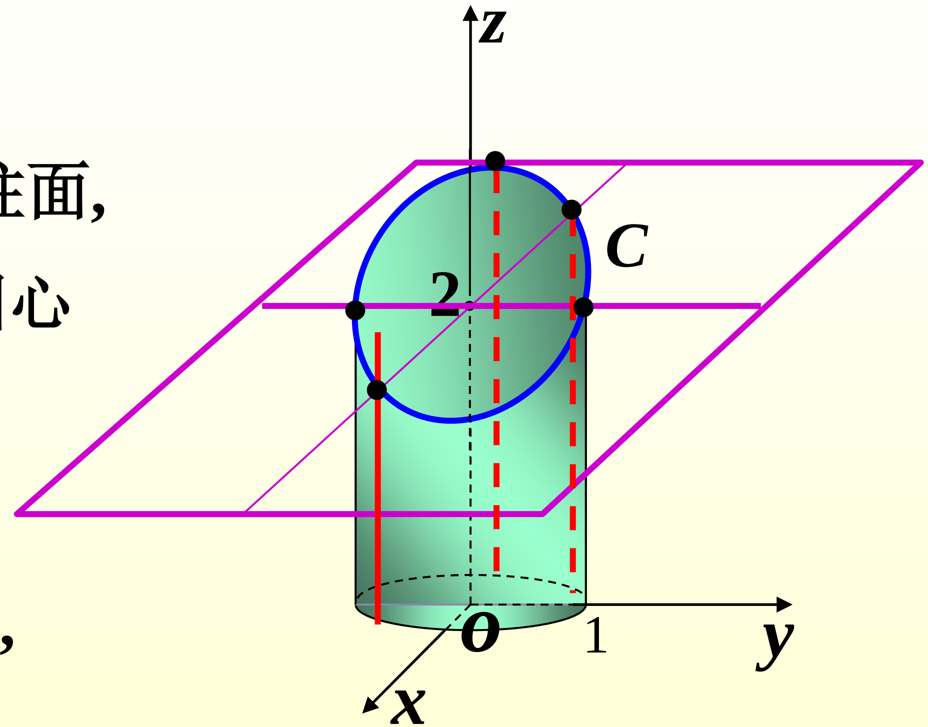
解 $S_1: x^2+y^2=1$

表示母线平行于 $Z$ 轴的圆柱面,

其准线是 $xOy$ 面上的圆, 圆心

在原点, 半径为1.

$S_2: 2x+3z=6$



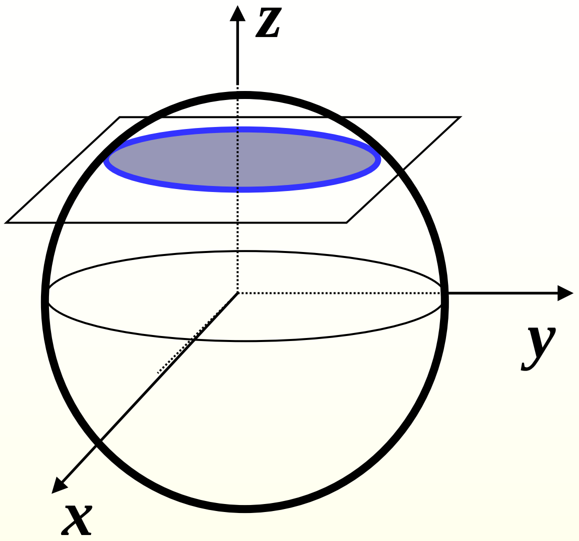

表示母线平行于 $y$ 轴的柱面,

其准线是 $xOz$ 面上的直线,

它是一平面.

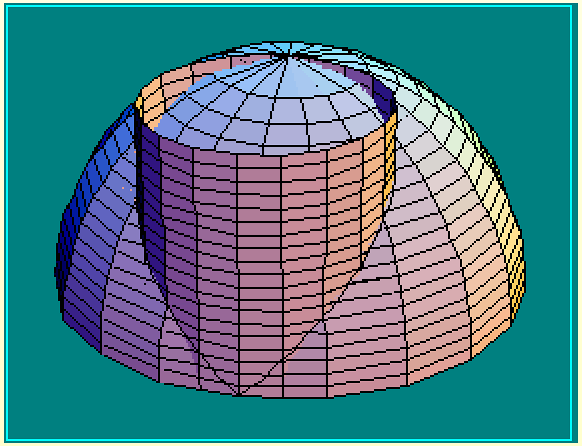
所以表示圆柱面与平面的交线 $C$为一椭圆.

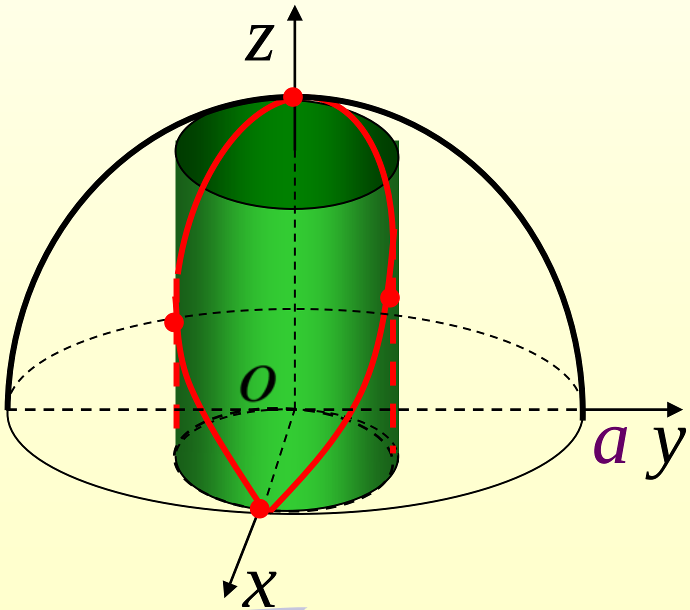
**例2** 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=1 \end{cases}$



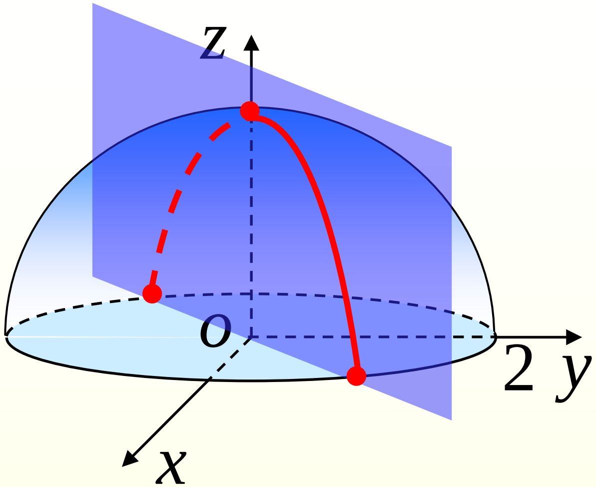

表示球面与平面的交线 $C$.

**例3** 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$ 表示上半球面与圆柱面的交线$C$.

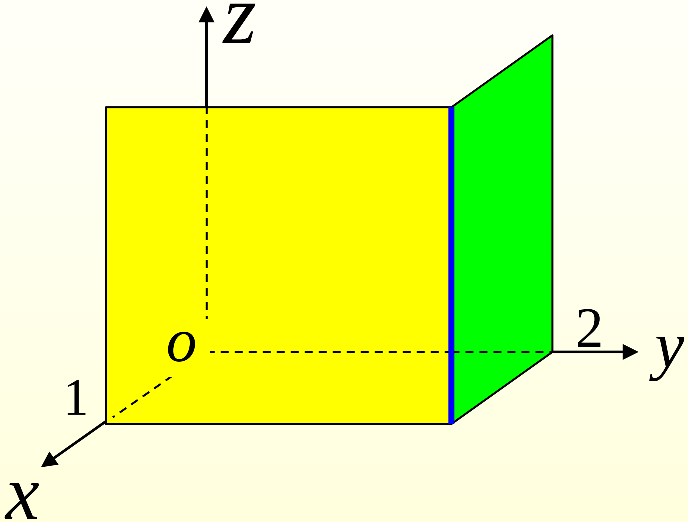




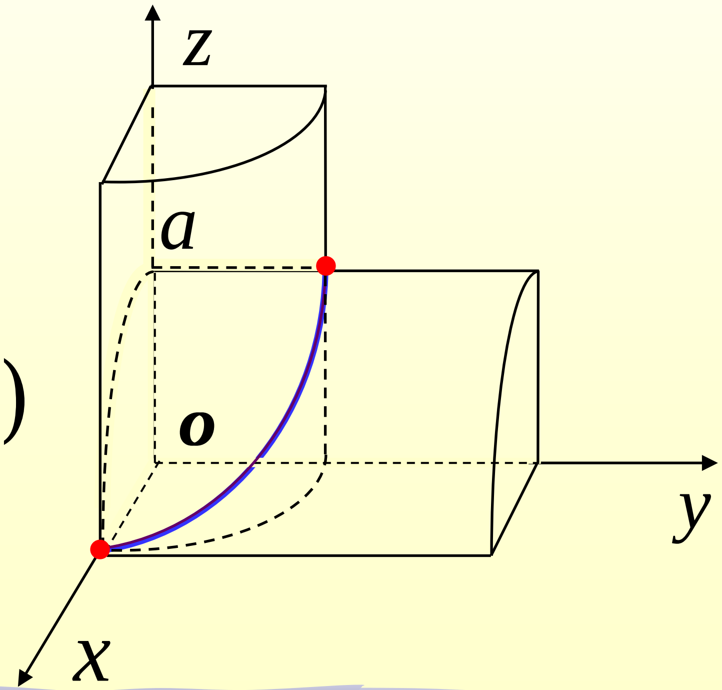
**练习1** (1) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ y - x = 0 \end{cases}$




**P51：1**



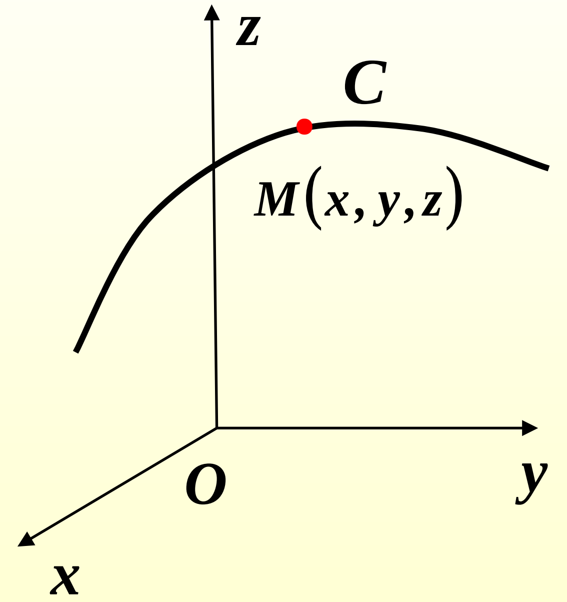

(3) $\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \left(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right)$



# 二、空间曲线的参数方程

空间曲线$C$的方程除了一般方程外,也可以用参数形式表示,只要将$C$上的动点坐标$x, y, z$表示为参数$t$的函数:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

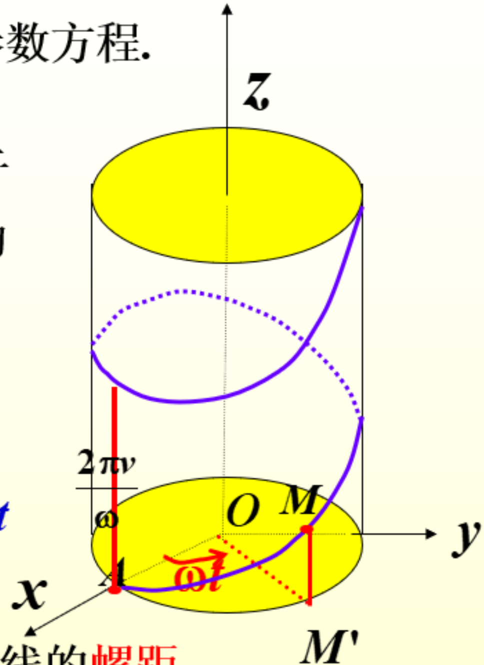



随着$t$的变动便可得曲线上的全部点.

这个方程组叫做空间曲线的参数方程.

**例4** 如果空间一点 $M$ 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 $\omega$ 绕 $z$ 轴旋转，同时又以线速度 $v$ 沿平行于 $z$ 轴的正方向上升，那么点 $M$ 构成的图形叫做**螺旋线**，试建立其参数方程。其中 $\omega$、$v$ 为常数.

**解** 取时间 $t$ 为参数，设当 $t=0$ 时，动点位于 $x$ 轴上的一点 $A(a,0,0)$ 处.经过时间 $t$，动点由A运动到 $M(x,y,z)$，记 $M$ 在 $xOy$ 面面上的投影为 $M'$，$M'$ 的坐标为 $x,y,0$.



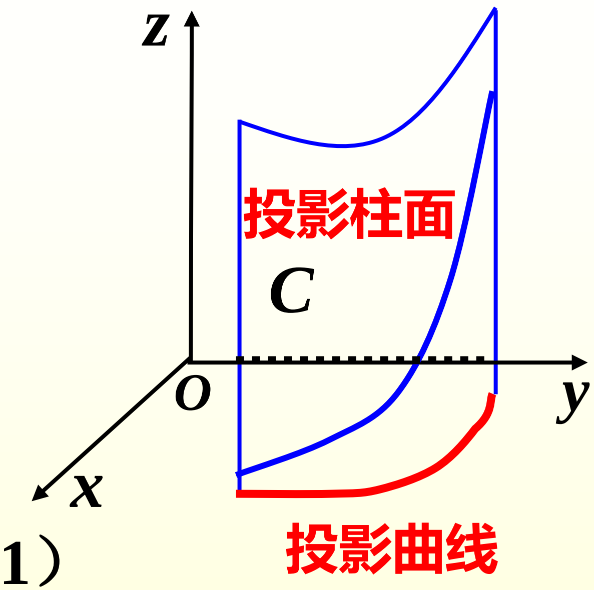

所以
$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$$
若令 $\theta=\omega t$

当 $\omega t = 2\pi$ 时，$z = v\dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi b$ 叫做螺旋线的**螺距**.

目录 上页 下页

# 三、空间曲线在坐标面上的投影

以曲线$C$为准线、母线平行于$z$轴的柱面叫做**曲线$C$关于$xOy$面的投影柱面.**




投影柱面与$xOy$面的交线叫做**空间曲线$C$在$xOy$面上的投影曲线**，或简称**投影**.

设空间曲线$C$ 的一般方程为$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ （1）

消去变量 $z$ 得方程 $H(x,y)=0$ （2）

方程（2）表示一个母线平行于$z$轴的柱面，它必定包含曲线$C$.

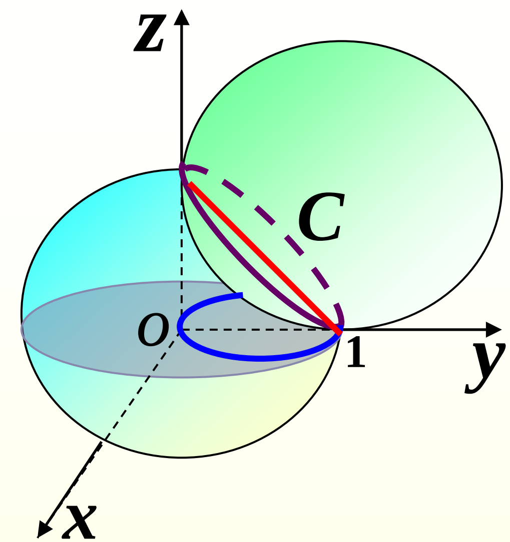
$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 一定包含$C$**在$xOy$面上的投影.**

**思考：** **空间曲线 $C$ 在 $yOz$、$zOx$ 面上的投影？方程？**

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$ 包含曲线 $C$ 在 $yOz$ 面上的投影曲线

$$\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$ 包含曲线 $C$ 在 $zOx$ 面上的投影曲线

**例5** 设空间曲线 $C\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$




求曲线 $C$在 $xOy$及 $yOz$ 面上的投影方程.

**解** 消去 $z$ 得：$x^2+2y^2-2y=0$

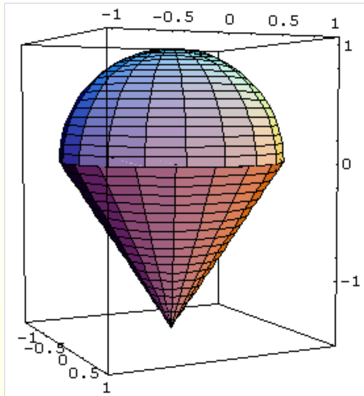
曲线 $C$在 $xOy$上的投影方程为：$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$

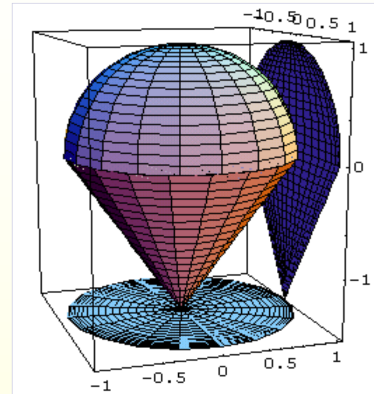
消去 $x$ 得：$y+z=1$

曲线 $C$在 $yOz$ 面上的投影方程为：$\begin{cases} y+z=1 & (0\le y\le 1) \\ x=0 \end{cases}$

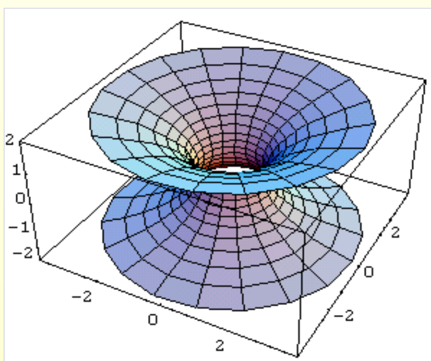
# 补充：空间立体或曲面在坐标面上的投影.

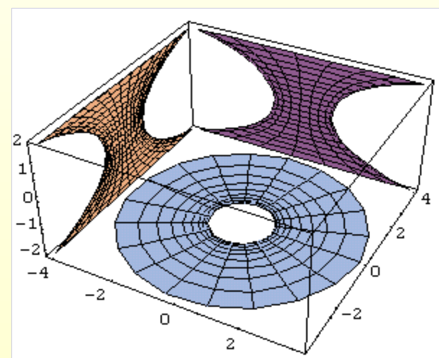
空间立体





曲面

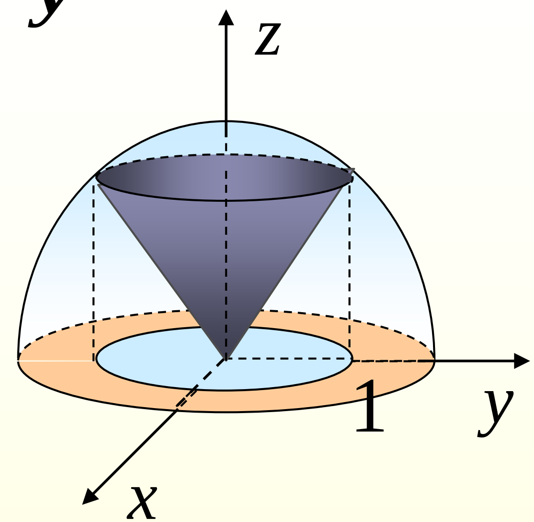




立体也好，曲面也好，它们的投影问题

都要转化为曲线的投影问题.

**例6** 设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成，求它在 $xOy$ 面上的投影.




**解** 上半球面和锥面的交线 $C$ 为：

$$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$$

消去 $z$ 得 $x^2+y^2=1$

因此交线 $C$ 在 $xOy$ 面上的投影曲线为：$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

于是所求立体在 $xOy$ 面上的投影, 是圆域：$x^2+y^2\le 1$

**练习2** 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 与平面 $x + z = 1$ 的交线在 $xOy$ 面上的投影的方程.

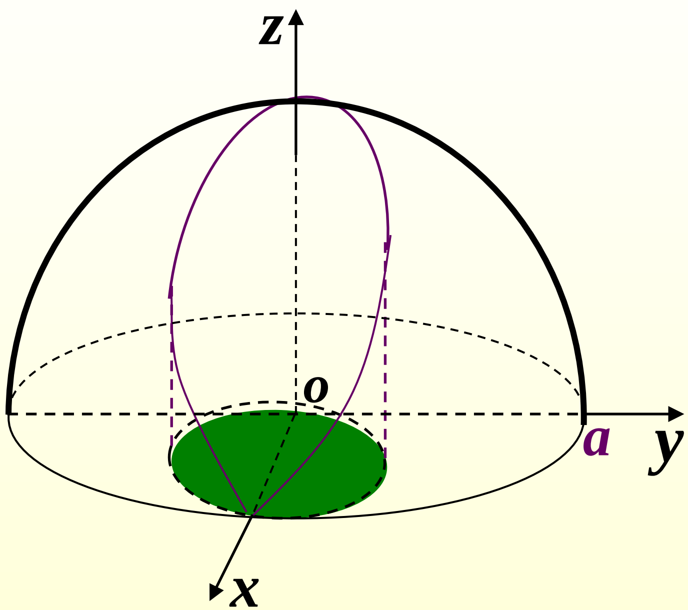
**解** 消去 $z$ 得：$x^2 + y^2 + (1 - x)^2 = 9$

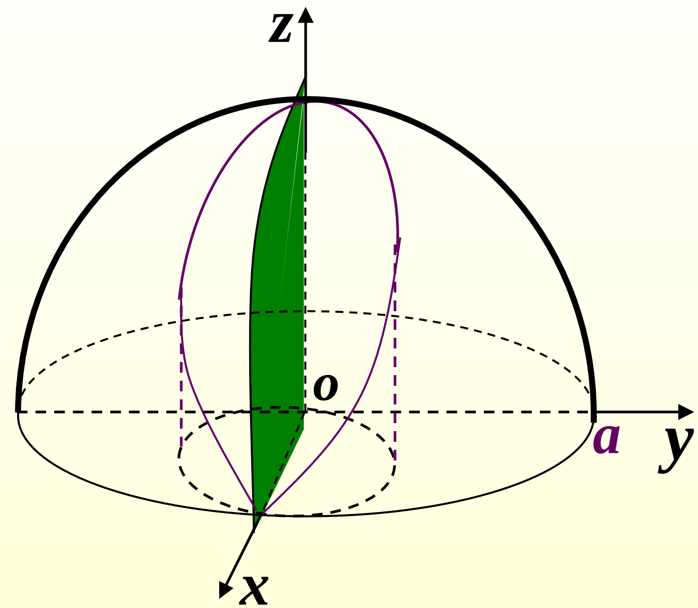
即 $$2x^2 + y^2 - 2x = 8$$

两曲面的交线在 $xOy$ 面上的投影方程为：

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2x = 8 \\ z = 0 \end{cases}$$

**练习3** 求上半球 $0 \le z \le \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与圆柱体 $x^2 + y^2 \le ax(a > 0)$ 的公共部分在*xoy*面和*xoz*面上的投影.

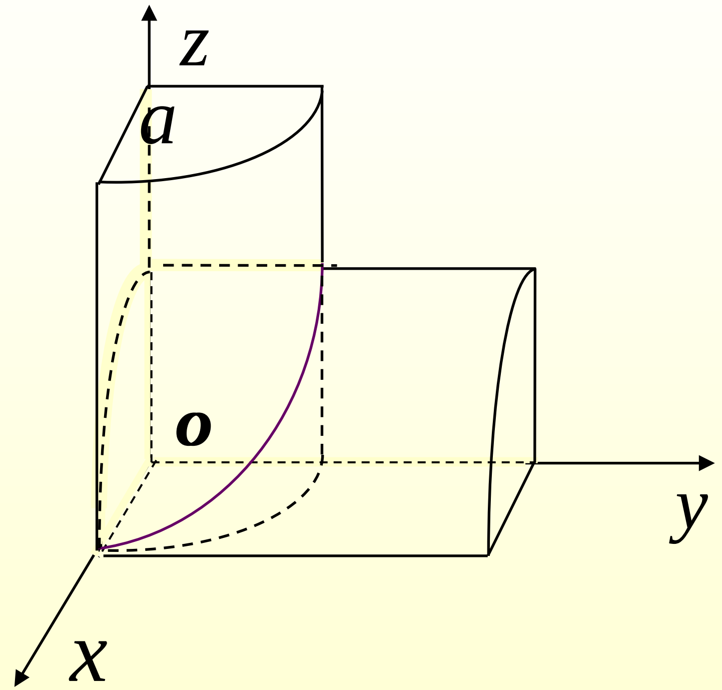



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le ax \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \le a^2 \quad (x \ge 0,\ z \ge 0) \\ y = 0 \end{cases}$$

**练习4** 求柱面 $x^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=a^2$ 第一卦限部分所围立体在各坐标面上的投影.




（1）在 $xoy$ 面上的投影:

$$\begin{cases} x^2+y^2\le a^2 \quad (x\ge 0,\ y\ge 0) \\ z=0 \end{cases}$$

（2）在 $zox$ 面上的投影:

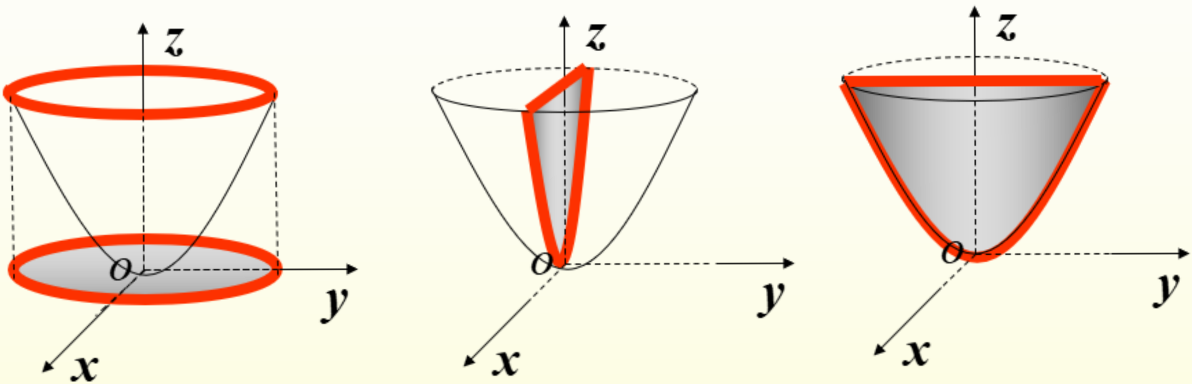
$$\begin{cases} x^2+z^2\le a^2 \quad (x\ge 0,\ z\ge 0) \\ y=0 \end{cases}$$

（3）在 $yoz$ 面上的投影:

$$\begin{cases} 0\le y\le a, 0\le z\le a \\ x=0 \end{cases}$$

上页 下页

**P51.8** 求旋转抛物面$z = x^2 + y^2 (0 \le z \le 4)$在三坐标面上的投影.



# 内容小结

## ➢ 空间曲线

● 一般式 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$　　● 参数式 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

● 空间曲线在坐标面上的投影

曲线 $C$: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在 $xOy$ 面上的投影曲线 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

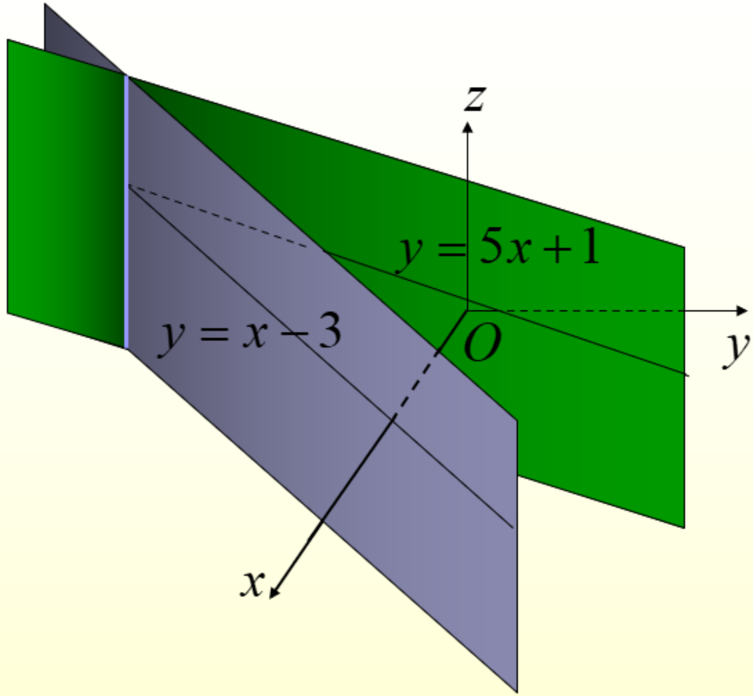
# 思考与练习

**P51　题 2（展示空间图形）**

结束　目录　上页　下页

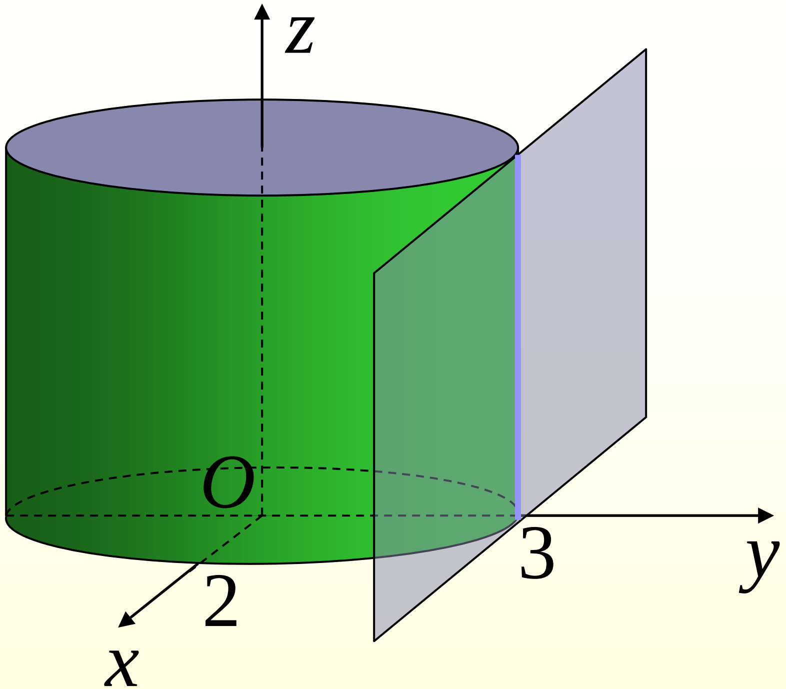
# P51 题2 (1)

$$\begin{cases} y = 5x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$$



**P51 题2(2)**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ y=3 \end{cases}$$




**思考:** 对平面 $y=b$

当 $|b|<3$ 时, **交线情况如何?**

当 $|b|>3$ 时, **交线情况如何?**

**备用题** 1. 求曲线 $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转的曲面与平面 $x + y + z = 1$ 的交线在 $xoy$ 平面的投影曲线方程.

**解** 旋转曲面方程为 $z = x^2 + y^2$,它与所给平面的

交线为 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

此曲线向 $xoy$ 面的投影柱面方程为

$$x + y + x^2 + y^2 = 1$$

此曲线在 $xoy$ 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

2. 将下列曲线化为参数方程表示:

(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$  (2) $\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$

解: (1) 根据第一方程引入参数，得所求为

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \frac{1}{3}(6 - 2\cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

(2) 将第二方程变形为 $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$,故所求为

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t \\ y = \frac{a}{2}\sin t \\ z = a\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t} \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

**3. 求空间曲线 $\Gamma$** $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ **绕 z 轴旋转时的旋转曲面方程 .**

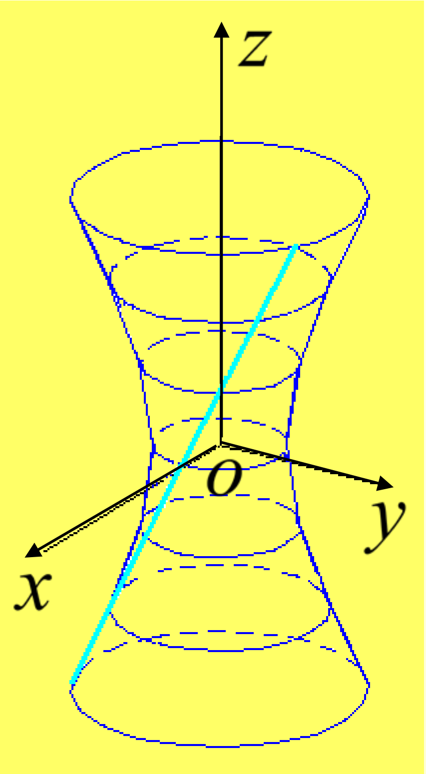
**解:** 任取点 $M_1(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)) \in \Gamma$, **点** $M_1$**绕 z 轴旋转, 转过角度** $\theta$ **后到点** $M(x,y,z)$**, 则**

$$\begin{cases} x=\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\cos\theta \\ y=\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\sin\theta \\ z=\omega(t) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \alpha \le t \le \beta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$

**这就是旋转曲面满足的参数方程 .**

**例如,** 直线 $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转所得旋转曲面方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2}\cos\theta \\ y = \sqrt{1+t^2}\sin\theta \\ z = 2t \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -\infty < t < +\infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$




消去 $t$ 和 $\theta$, 得旋转曲面方程为

$$4(x^2 + y^2) - z^2 = 4$$

**又如,** $xOz$ 面上的半圆周 $\begin{cases} x = a\sin\varphi \\ y = 0 \\ z = a\cos\varphi \end{cases} \quad (0 \le \varphi \le \pi)$

绕 $z$ 轴旋转所得旋转曲面（即球面）方程为

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$

**说明:** 一般曲面的参数方程含两个参数，形如

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases}$$

# 复习

曲面方程的概念 $\begin{cases} \text{旋转曲面} \\ \text{柱面} \end{cases}$

点的轨迹——点的坐标——曲面方程

以向量为工具

第五节　平面及其方程

第六节　空间直线及其方程

# 第五节

# 平面及其方程

一、平面的点法式方程

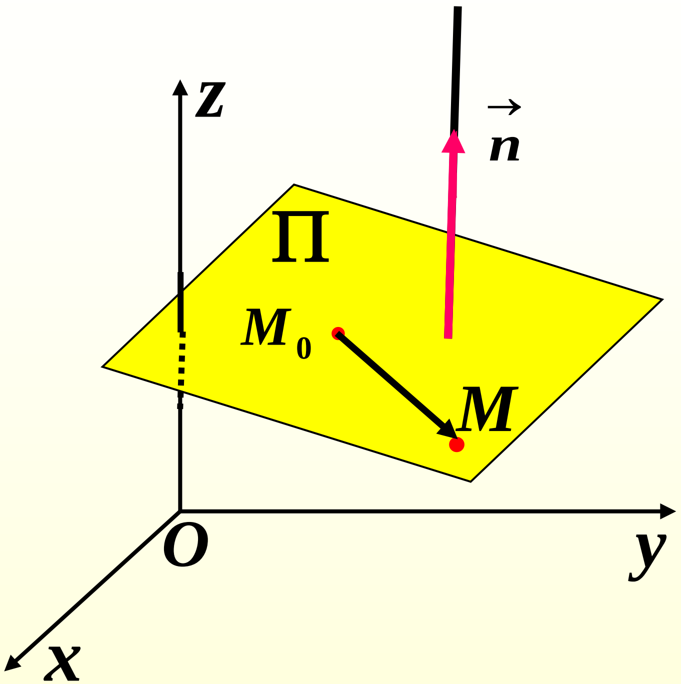
二、平面的一般方程

三、两平面的夹角

# 一、平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一平面,

这向量叫做该平面的法线向量 .




平面Π $M_0(x_0, y_0, z_0)$

法线向量 $\vec{n} = (A, B, C)$

已知

任意点 $M(x, y, z)$

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$

Π $\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$

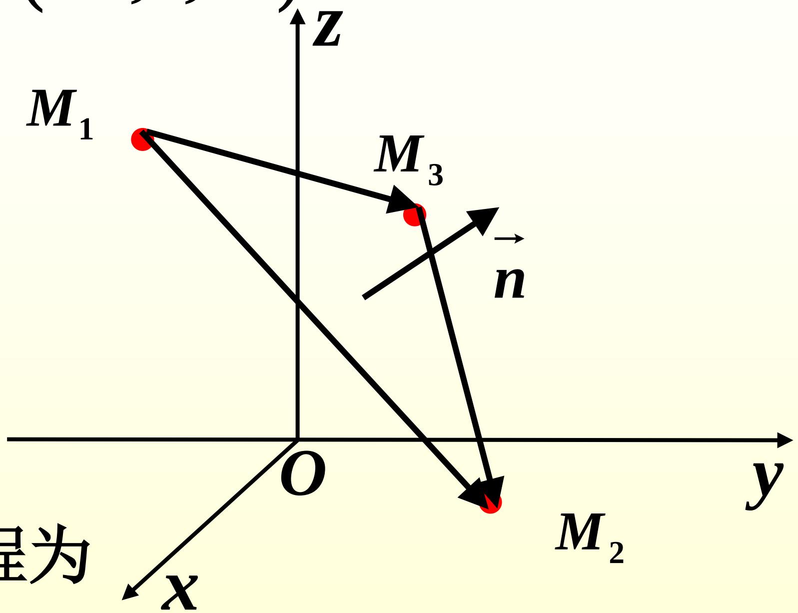
上述方程叫做平面的点法式方程.

**例1** 求过点$M_1(2,-1,4)$、 $M_2(-1,3,-2)$ 和$M_3(0,2,3)$的平面方程.

**解** $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,4,-6)$ $\overrightarrow{M_1M_3}=(-2,3,-1)$

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=14\vec{i}+9\vec{j}-\vec{k}$$




由点法式方程得所求平面的方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$$

即 $$14x+9y-z-15=0$$

**说明:** 此平面的**三点式方程**也可写成

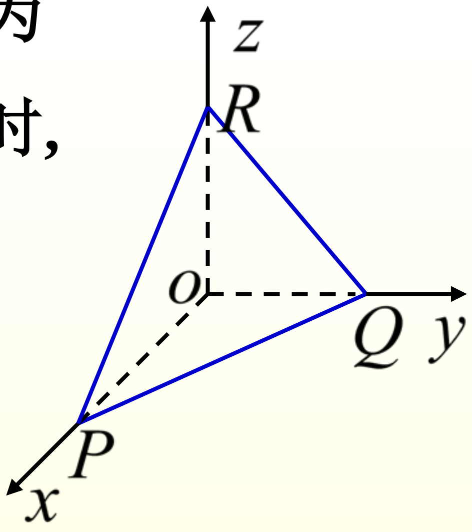
$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

**一般情况：** 过三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k=1,2,3)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

类似可求, 当平面与三坐标轴的交点分别为

$P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ 时,




平面方程为

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad (a\cdot b\cdot c\neq 0)}$$

此式称为平面的**截距式方程**. P7

也可以将平面方程设为 $Ax+By+Cz+D=0$

再将$P$、$Q$、$R$的坐标代入方程求得$A$、$B$、$C$. P10

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$Ax+By+Cz\boxed{-Ax_0-By_0-Cz_0}=0$$

$$-Ax_0-By_0-Cz_0=D$$

$$Ax+By+Cz+D=0$$

设有三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0\quad(A^2+B^2+C^2\neq 0)\qquad(1)$$

任取一组满足上述方程的数 $x_0, y_0, z_0,$ 则

$$A\,x_0+B\,y_0+C\,z_0+D=0\qquad(2)$$

(1)−(2) 相减，得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\qquad(3)$$

目录 上页 下页

# 二、 平面的一般方程

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$ （$A$、$B$、$C$不全为零）　（1）

叫做平面的一般方程.

此时平面的一个法线向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$

平面的一般方程几种特殊情形:

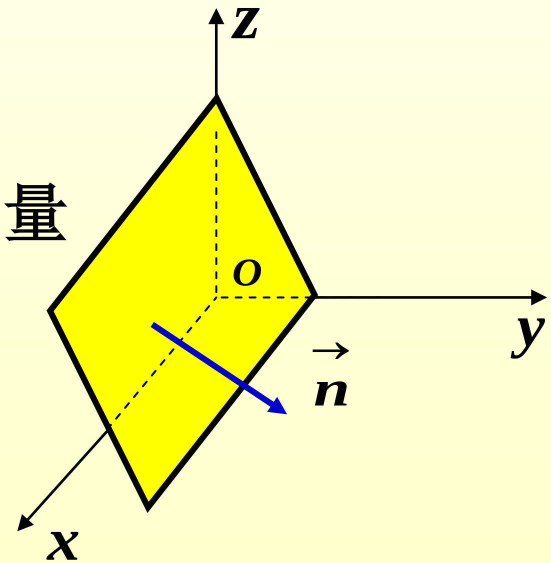
（1）当$D = 0$时，$Ax + By + Cz = 0$

平面过原点.

（2）当$A = 0$时，　$By + Cz + D = 0$的法线向量

$\vec{n} = (0, B, C) \perp \vec{i}$,

$\begin{cases} D \neq 0, & \text{平面平行}x\text{轴} \\ D = 0, & \text{平面通过}x\text{轴} \end{cases}$

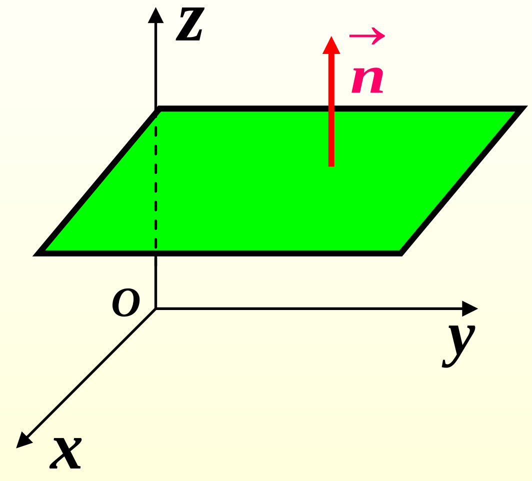


类似可以讨论$B$=0、$C$=0的情形.

- $Ax+Cz+D=0$ 表示 平行于（或包含）$y$ 轴的平面；
- $Ax+By+D=0$ 表示 平行于（或包含）$z$ 轴的平面；

（3）当$A$=$B$=0时， $Cz+D=0$

$$\begin{cases} D\neq 0, \text{平面平行}xOy\text{面} \\ D=0, \text{平面即为}xOy\text{面} \end{cases}$$




类似可以讨论$A$=$C$=0、$B$=$C$=0的情形.

- $Ax+D=0$ 表示平行于（或重合于）$yOz$ 面 的平面；
- $By+D=0$ 表示平行于（或重合于）$zOx$ 面 的平面.

上页 下页

**例2** 求通过$x$轴和点$M(4,-3,-1)$的平面的方程.

**解** （方法一）

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

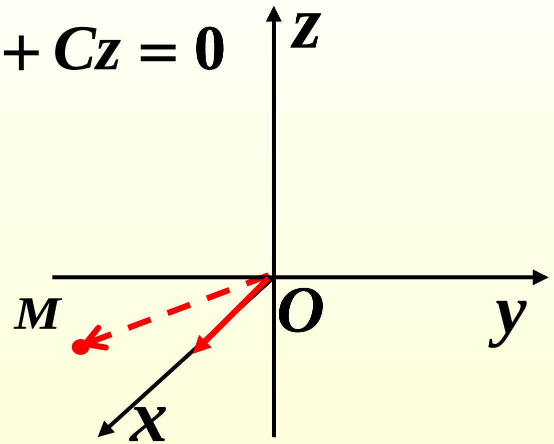
因为平面通过$x$轴，则必过原点.

所以$A=0$且$D=0$, 设所求平面方程为: $By + Cz = 0$

又平面过点$(4,-3,-1)$,所以有 $-3B - C = 0$

即 $C = -3B$

代入平面的方程，得 $y - 3z = 0$

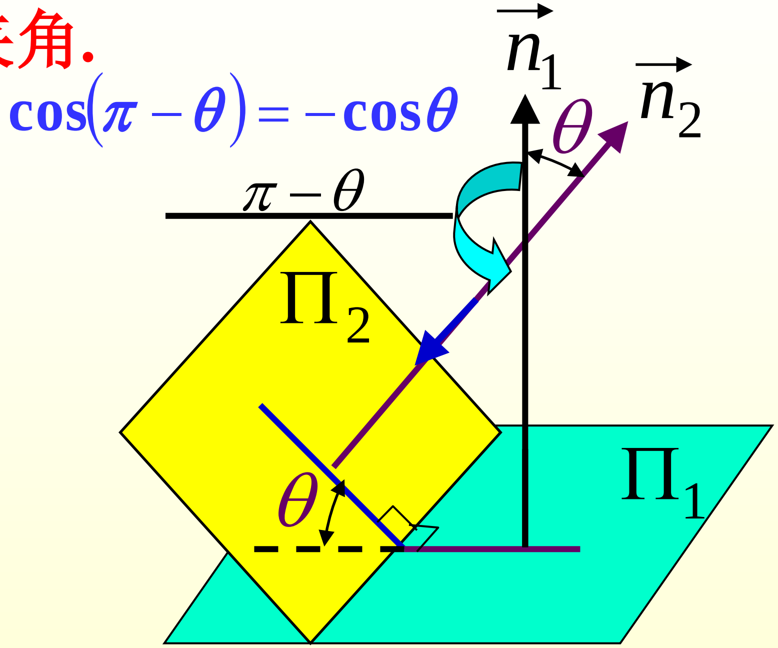



（方法二）点法式 $\vec{n} = (1,0,0) \times (4,-3,-1)$

P6

# 三、两平面的夹角

两平面的法线向量的夹角(通常指锐角或直角)称为**两平面的夹角.**




$$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

$$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1) \quad \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$$

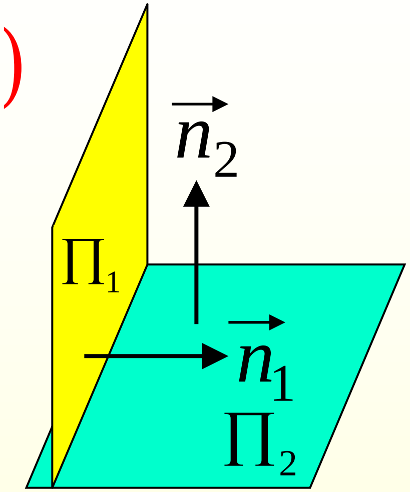
则两平面夹角$\theta$的余弦为

$$\cos\theta=\frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$\Pi_1 \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$

$\Pi_2 \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad \vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$

特别地，有下列结论

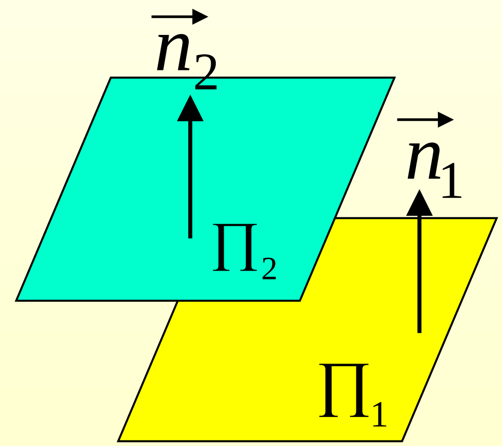



$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

$\Pi_1$、$\Pi_2$ 平行或重合 $\Leftrightarrow \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \begin{cases} \neq \dfrac{D_1}{D_2} & \text{两平面平行} \\ = \dfrac{D_1}{D_2} & \text{两平面重合} \end{cases}$$



**例3** 判断下列两平面的位置关系

(1) $2x - y + z - 1 = 0, -4x + 2y - 2z - 1 = 0.$

(2) $-x + 2y - z + 1 = 0, y + 3z - 1 = 0;$

**解** (1) 两平面的法线向量分别为 $\vec{n}_1 = (2,-1,1)$, $\vec{n}_2 = (-4,2,-2)$

因为 $\dfrac{2}{-4} = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{1}{-2} \neq \dfrac{-1}{-1}$

所以两平面平行但不重合

(2) 两平面的法线向量分别为 $\vec{n}_1 = (-1,2,-1)$, $\vec{n}_2 = (0,1,3)$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|-1\times 0 + 2\times 1 + (-1)\times 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{60}}$$

两平面的相交，夹角为 $\theta = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$

**例4** 一平面过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$，且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程.

**解** 设所求平面的法线向量为 $\vec{n}$， 由已知 $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$

其中 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1,0,-2)$

又因为所求的平面垂直于平面 $x+y+z=0$，所以有 $\vec{n} \perp \vec{n}_1$，

其中 $\vec{n}_1 = (1,1,1)$. 所求平面的法线向量

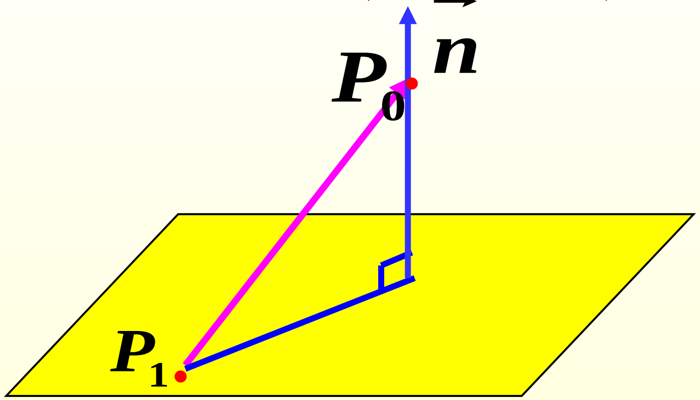
$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

所求平面的方程为

$$2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0 \quad 即 \quad 2x-y-z=0$$

**例5** 设$P_0(x_0,y_0,z_0)$是平面$Ax+By+Cz+D=0$外一点，求它到平面的距离$d$.

**解** 过$P_0$作平面的法线向量$\vec{n}$，在平面上任取一点$P_1(x_1,y_1,z_1)$，




则 $d=\left|\mathrm{Prj}_{\vec{n}}\overrightarrow{P_1P_0}\right|$

$$\vec{n}=(A,B,C)$$

$$\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$$

$$\left|\mathrm{Prj}_{\vec{n}}\overrightarrow{P_1P_0}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0-\;-D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

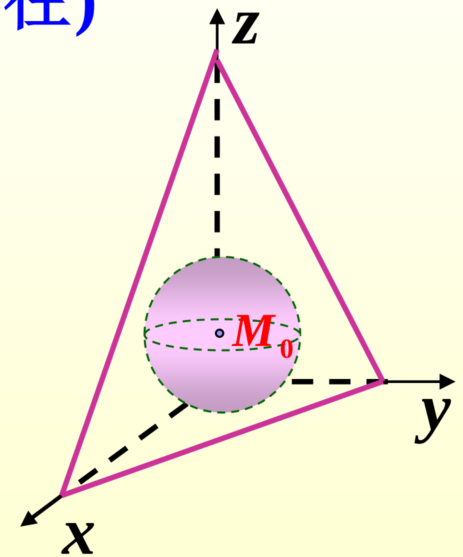
$$=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ **(点到平面的距离公式)**

**问题** 如何求两平行平面间的距离？

**例6** 求内切于平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所构成四面体的球面方程.

**解** 设球心为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 则它位于第一卦限, 且

$$\frac{|x_0+y_0+z_0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=x_0=y_0=z_0=R(\text{半径})$$




$$\because x_0+y_0+z_0\le 1,\quad \therefore 1-3x_0=\sqrt{3}\,x_0$$

从而 $x_0=y_0=z_0=R=\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$

因此所求球面方程为

$$\left(x-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(y-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(z-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

# 内容小结

## 1.平面基本方程:

一般式 $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

点法式 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (abc \neq 0)$

三点式
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

## 2.平面与平面之间的关系

平面 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad \vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

平面 $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\quad \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

垂直: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

平行或重合: $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

## 备用题

求过点(1,1,1)且垂直于二平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

**解** 已知二平面的法向量为

$$\vec{n}_1=(1,-1,1),\qquad \vec{n}_2=(3,2,-12)$$

取所求平面的法向量

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(10,15,5)$$

则所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0$$

化简得 $2x+3y+z-6=0$

结束 目录 上页 下页

# 第六节

# 空间直线及其方程

## 一、空间直线方程

## 二、线面间的位置关系

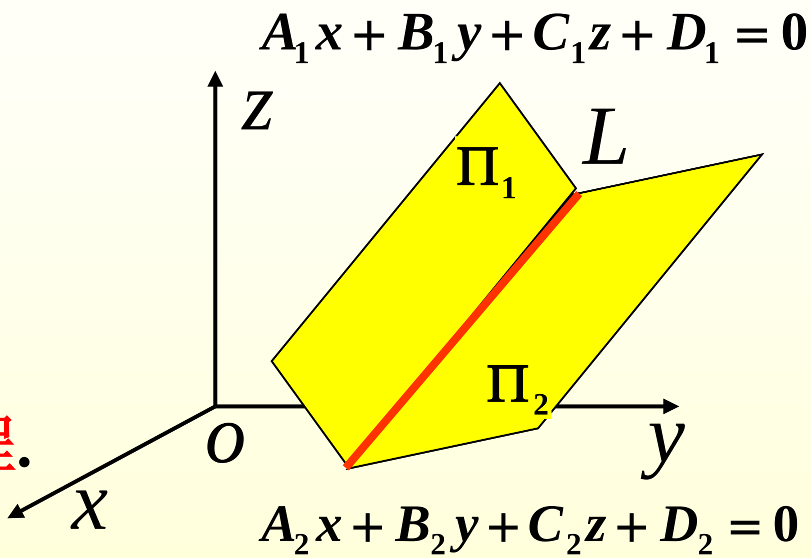
# 一、空间直线方程

## 1. 一般式方程

直线$L$的方程可以表示为：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

这种方程组叫做空间直线的一般方程.




问题：直线$L$的一般方程的表示式是否唯一？

直线$L$的平面束：通过直线$L$的平面有无穷多个,这无穷多个平面称为直线$L$的平面束.

设直线 $L$：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (2) \end{cases}$

建立三元一次方程：

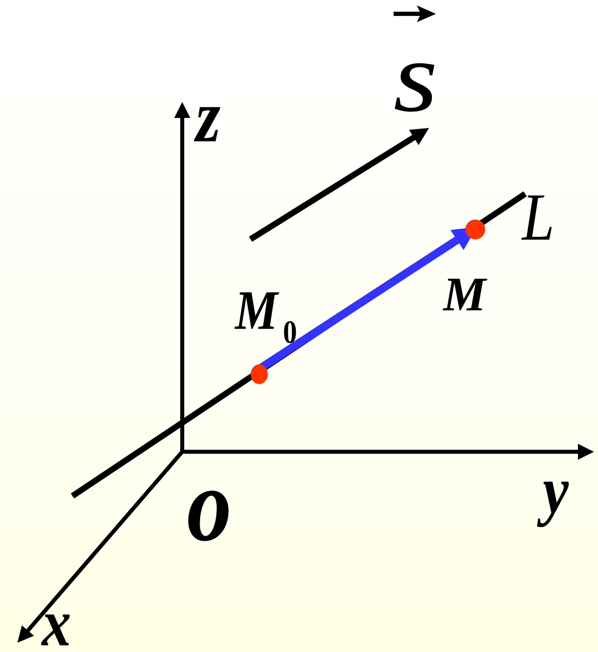
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0 \qquad (3)$$

其中λ为任意常数.对于不同的 λ 值，方程（3）表示过直线 $L$的不同的平面；反之，通过直线$L$的任何平面（除平面(2)外）都包含在方程（3）所表示的一族平面内. 方程（3）叫做直线 $L$ 的平面束方程.

上页 下页

## 2. 对称式方程

如果一个非零向量平行于一条直线，这个向量叫做直线的方向向量.




直线$L$　　$M_0(x_0, y_0, z_0)$

方向向量　　$\vec{s} = (m, n, p)$

已知

任意点　　$M(x, y, z)$

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$，$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$，

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

这个方程叫做直线的对称式方程或点向式方程. $m, n, p$ 叫做直线的一组方向数. 而 $\vec{s}$ 的方向余弦叫做该直线的方向余弦.

上页　下页

**注** 当$m, n, p$中有一个为0,例如$m = 0$,这时方程组应理解为

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} \end{cases}$$ 也可以写成 $$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

当$m = n = 0$,而$p \neq 0$时，方程应理解为 $$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}$$

上页 下页

## 3. 参数式方程

设 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$ 那么

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}}$$

这个方程叫做直线的参数方程 .

**例1** 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

另一种方法课下看 P31例1

**解** 令$x=1$代入直线方程，得 $\begin{cases} y+z=-2 \\ y-3z=6 \end{cases}$ 解得 $y=0, z=-2$

令$z=1$代入直线方程，得 $\begin{cases} x+y=-2 \\ 2x-y=-7 \end{cases}$ 解得 $x=-3, y=1$

由点$(1,0,-2),(-3,1,1)$得直线方向向量为：$\vec{s}=(4,-1,-3)$,

所求直线的对称式方程、参数方程分别为：**解题思路:**

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3} \qquad \begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}$$

**先找直线上一点;**

**再找直线的方向向量.**

**P33例4** 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行, 且过点 $(-3,2,5)$ 的直线方程.

**提示** 所求直线的方向向量可取为

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}=(-4,-3,-1)$$

利用点向式可得方程

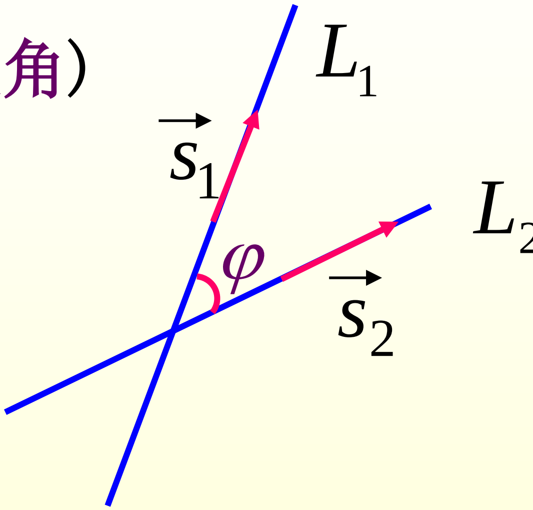
$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}$$

上页 下页

# 二、线面间的位置关系

## 1. 两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角(通常取**锐角或直角**)叫做两直线的夹角.




设直线 $L_1$ , $L_2$ 的方向向量分别为

$$\vec{s}_1=(m_1,\ n_1,\ p_1),\ \vec{s}_2=(m_2,\ n_2,\ p_2)$$

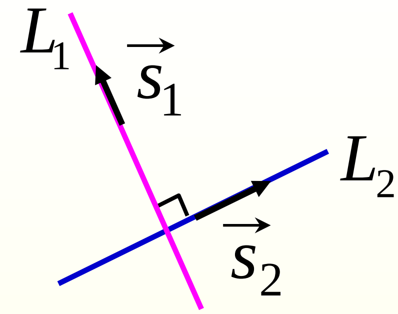
则两直线夹角 $\varphi$ 满足

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}\boxed{=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^{\ 2}+n_1^{\ 2}+p_1^{\ 2}}\sqrt{m_2^{\ 2}+n_2^{\ 2}+p_2^{\ 2}}}}$$

## 特别有:

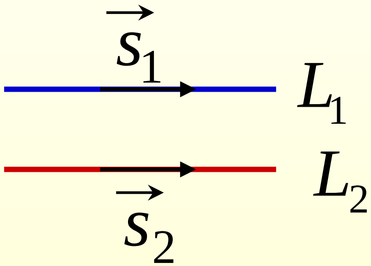
(1) $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$

$\Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$




(2) $L_1$、$L_2$ 平行或重合 $\Longleftrightarrow \vec{s}_1 // \vec{s}_2$

$$\Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$




$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$$
$$\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$$

**例2** 求以下两直线的夹角

$$L_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1} \qquad L_2: \begin{cases} x+y+2=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

**解** 直线$L_1$的方向向量为 $\vec{s_1}=(1,-4,1)$

直线$L_2$的方向向量为 $\vec{s}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(2,-2,-1)$

二直线夹角$\varphi$ 的余弦为

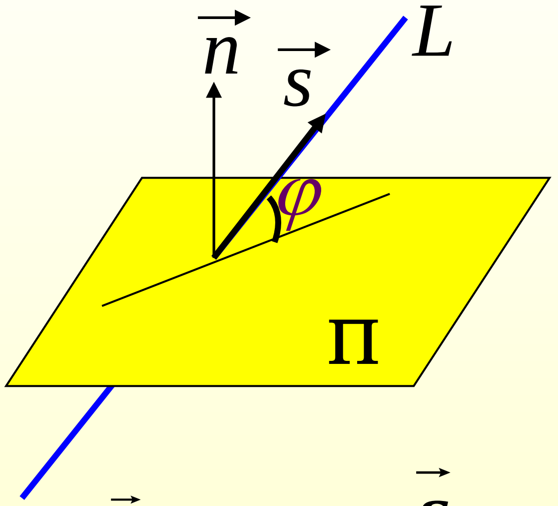
$$\cos\varphi=\frac{|1\times 2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\ \sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

从而 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

**问题：** 直线$L_1$与$L_2$是相交直线还是异面直线？

## 2. 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时, 直线和它在平面上的投影直线所夹锐角$\varphi$ 称为直线与平面的夹角； 当直线与平面垂直时, 规定其夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.



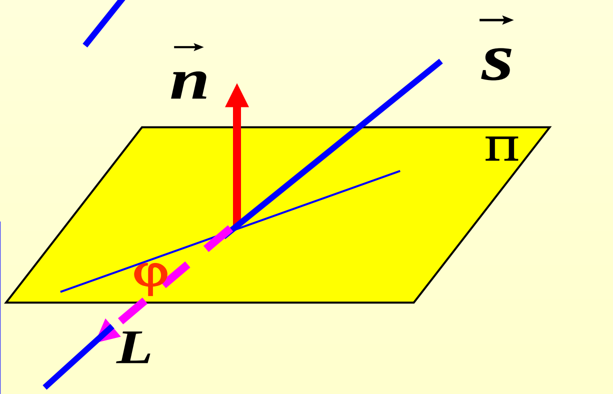

设直线 $L$ 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$

平面 $\Pi$ 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$

则直线与平面夹角 $\varphi$ 满足

$$\varphi=\left|\frac{\pi}{2}-\left(\widehat{\vec{s},\vec{n}}\right)\right|$$

$$\boxed{\varphi=\left(\widehat{\vec{s},\vec{n}}\right)-\frac{\pi}{2}}$$



$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\widehat{\vec{s},\vec{n}}\right)\right| = \frac{\left|\vec{s}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{s}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$$

$$\boxed{= \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}}$$

特别地，有 $L // \Pi$ 或 $L$ 在$\Pi$上 $\Leftrightarrow \vec{s}\cdot\vec{n}=0$

$$\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$$

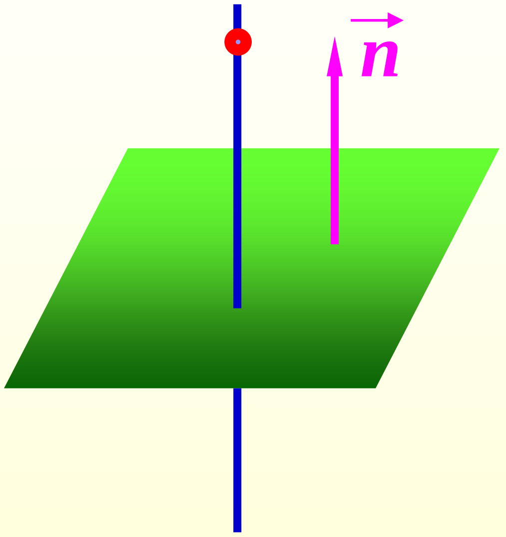
$$L\perp\Pi \Leftrightarrow \vec{s}\times\vec{n}=\vec{0} \Leftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

例3　求过点(1,－2　,　4）且与平面 $2x-3y+z-4=0$

垂直的直线方程.

解　取已知平面的法向量 $\vec{n}=(2,-3,1)$

为所求直线的方向向量.



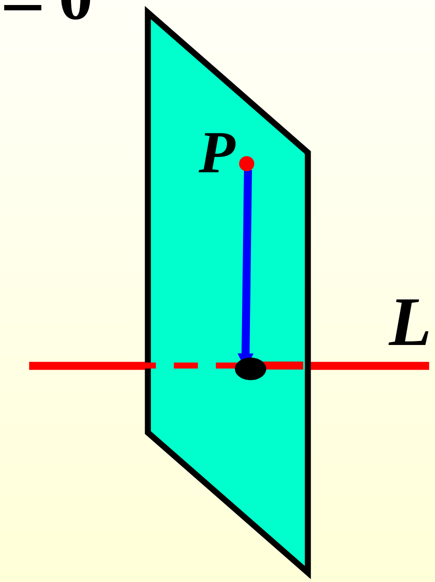

则直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}$$

**例4** 求点$P(1,-1,-2)$到直线$L$:$\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-8}{-2}$ 的距离.

**解** （方法一）过点$P(1,-1,-2)$垂直于直线$L$的平面$\Pi$的方程为

$$3(x-1)+2(y+1)-2(z+2)=0$$




直线$L$的参数方程为

$$x=-3+3t, y=-2+2t, z=8-2t$$

将直线$L$的参数方程代入平面$\Pi$：

$$3(-4+3t)+2(-1+2t)-2(10-2t)=0$$

$$17t-34=0 \quad 即\ t=2$$

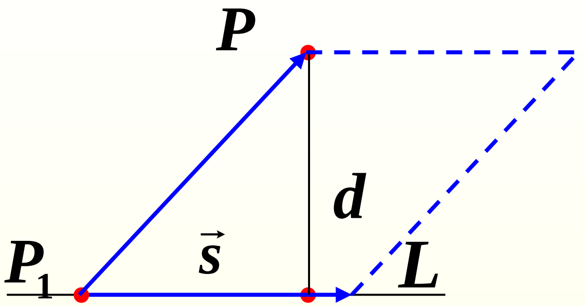
得平面与直线的交点 $(3,2,4)$

所求点到直线的距离为 $d=\sqrt{(3-1)^2+(2+1)^2+(4+2)^2}=7$

类似练习P34例6、例5

例4 求点$P(1,-1,-2)$到直线$L:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-8}{-2}$ 的距离.

解（方法二）取直线$L$上的点$P_1(-3,-2,8)$,




$$\overrightarrow{P_1P}=(4,1,-10)$$

直线$L$的方向向量 $\vec{s}=(3,2,-2)$

$$\overrightarrow{P_1P}\times\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 1 & -10\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=18\vec{i}-22\vec{j}+5\vec{k}$$

$$|\vec{s}|=\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{17}$$

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}=\frac{1}{\sqrt{17}}\sqrt{18^2+(-22)^2+5^2}=\sqrt{\frac{833}{17}}=7$$

**P34例5** 求直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $\boxed{=t}$

$$2x+y+z-6=0$$

的交点 .

**提示** 化直线方程为参数方程

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \\ z=4+2t \end{cases}$$

代入平面方程得 $t=-1$

从而确定交点为（1，2，2）.

**P34例6** 求过点( 2 , 1 , 3 ) 且与直线

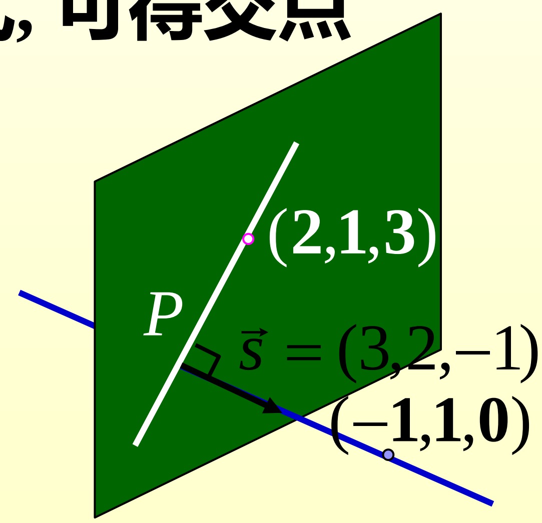
$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$$ 垂直相交的直线方程.

**提示** 先求二直线交点 $P$. 过已知点且垂直于已知直线的平面的法向量为 $(3,2,-1)$, 故其方程为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0 \qquad ①$$

化已知直线方程为参数方程, 代入 ①式, 可得交点

$$P\left(\frac{2}{7},\frac{13}{7},\frac{-3}{7}\right)$$




最后利用两点式得所求直线方程

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$$

**例5** 求过点(0,0,1)和直线 $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ -y+2z+1=0 \end{cases}$ 的平面方程.

**解** 所求的平面方程为 $2x-3y+1+\lambda(-y+2z+1)=0,$

直线的平面束方程

由于点(0,0,1)在平面上，因此

$$1+\lambda(2+1)=0 \qquad \lambda=-\frac{1}{3}$$

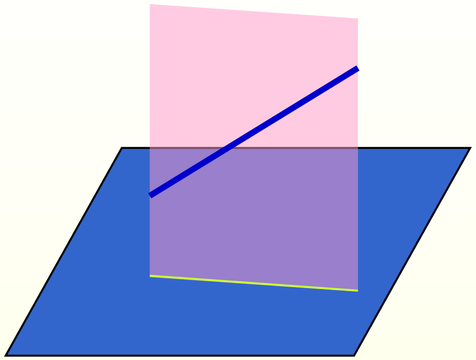
所以所求平面的方程为:

$$2x-3y+1-\frac{1}{3}(-y+2z+1)=0$$

即 $3x-4y-z+1=0$

2页 上页 下页

P35例7 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程.



提示 过已知直线的平面束方程

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$$

即 $$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$$

从中选择$\lambda$使其与已知平面垂直, 故应有:

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$$

得 $\lambda=-1$, 从而得投影直线方程

$$\begin{cases} y-z-1=0 & \longleftarrow \text{这是投影平面} \\ x+y+z=0 & \longleftarrow \text{这是给定的平面} \end{cases}$$

# 内容小结

## 1. 空间直线方程

一般式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

对称式 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

参数式 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

$(m^2+n^2+p^2\neq 0)$

## 2. 线与线的关系

直线 $L_1$: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$

直线 $L_2$: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$

$$L_1 \perp L_2 \iff \vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0 \iff m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

$L_1 // L_2$ 或重合 $\iff \vec{s}_1\times\vec{s}_2=\vec{0} \iff \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$

夹角公式: $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$

## 3. 面与线间的关系

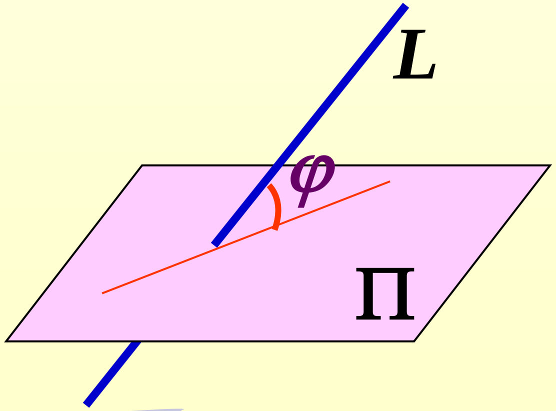
平面 $\Pi$ : $Ax + By + Cz + D = 0,\ \vec{n} = (A, B, C)$

直线 $L$ : $\dfrac{x - x}{m} = \dfrac{y - y}{n} = \dfrac{z - z}{p},\quad \vec{s} = (m, n, p)$

$$L \perp \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \times \vec{n} = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

$$L // \Pi \text{ 或在上} \Longleftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \Longleftrightarrow mA + nB + pC = 0$$

夹角公式: $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}$



## 备用题

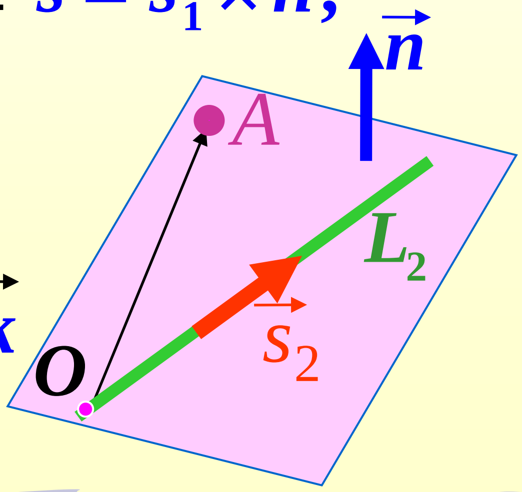
一直线过点$A(1,2,1)$且垂直于直线$L_1: \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$，又和直线$L_2: \frac{x}{2}=y=\frac{z}{-1}$相交，求此直线方程．

**解** 方法1 利用叉积.

设直线$L_i$的方向向量为$\vec{s}_i\ (i=1,2)$，过$A$点及$L_2$的平面的法向量为$\vec{n}$，则所求直线的方向向量$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{n}$，

因原点$O$在$L_2$上，所以

$$\vec{n}=\vec{s}_2\times\overrightarrow{OA}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=3\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$$



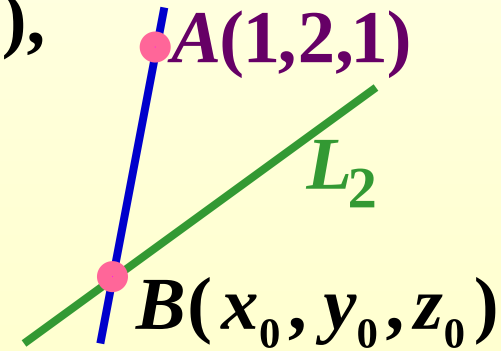
待求直线的方向向量

$$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 3\end{vmatrix}=3(3\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k})$$

故所求直线方程为 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{-5}$

**方法2** 利用所求直线与$L_2$的交点.

设所求直线与$L_2$的交点为 $B(x_0,y_0,z_0)$,




则有 $\dfrac{x_0}{2}=y_0=\dfrac{z_0}{-1}$

即 $x_0=2y_0,\ z_0=-y_0$

而 $\overrightarrow{AB}=(x_0-1,y_0-2,z_0-1)\perp L_1$

$$\therefore\quad 3(x_0-1)+2(y_0-2)+(z_0-1)=0$$

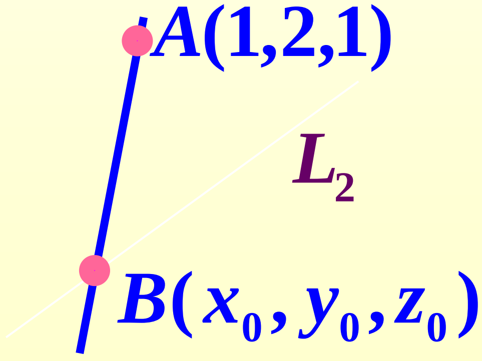
将 $x_0=2y_0, z_0=-y_0$ 代入上式，得

$$y_0=\frac{8}{7},\ x_0=\frac{16}{7},\ z_0=-\frac{8}{7}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AB}=\left(\frac{9}{7},\frac{-6}{7},-\frac{15}{7}\right)=\frac{3}{7}(3,-2,-5)$$

由点向式得所求直线方程

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-5}$$



# 第八章

## 习题课

一、内容小结

二、实例分析

# 一、内容小结

## (一) 向量代数

### 1、向量的有关概念与表示法

(1) 向量（自由向量）

(2) 坐标表示 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=(a_x,a_y,a_z)$

(3) 向量的模 $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

(4) 方向角与方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}\qquad\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}\qquad\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

(5) 向量的投影 $\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi$

## 2、向量的运算

(1) 加减法 $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}$

(2) 数乘 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ $\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$

(3)数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

(4) 向量积 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

## 3、向量间的关系

(1) 夹角 $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ $0 \le \theta \le \pi$

(2) 垂直 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

(3) 平行 $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a}$

## (二) 空间解析几何

### 1、空间直角坐标系

(1) 构成；　　(2) 点的坐标；

(3) 两点间距离公式 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

(4) 定比分点坐标公式

### 2、曲面

(1)旋转曲面　$f(y,z)=0$绕$z$轴　$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$

球面　$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

锥面　$z^2=a^2\left(x^2+y^2\right)$　$a=\cot\alpha$ （$\alpha$ 为半顶角）

(2) 柱面　缺项的方程

(3)二次曲面

椭球面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

椭圆抛物面 $$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=z \qquad (pq>0)$$

双曲抛物面 $$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=z \qquad (pq>0)$$

（马鞍面）

双叶双曲面 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

单叶双曲面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

椭圆锥面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

## 3、曲线

(1) 一般方程 $C:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$

(2) 参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$

(3) 在坐标平面上的投影.

## 4、 空间直线与平面的方程

### 空间平面

一般式 $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

点法式 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

点：$(x_0, y_0, z_0)$
法向量：$\vec{n} = (A, B, C)$

截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

三点式 $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

## 空间直线

一般式 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

对称式 $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

参数式 $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

$(x_0, y_0, z_0)$ 为直线上一点;

$\vec{s} = (m, n, p)$ 为直线的方向向量.

## 5.线面之间的相互关系

**面与面的关系**

平面 $\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

平面 $\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\ \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

垂直: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

平行或重合: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

## 线与线的关系

直线 $L_1$: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $\quad \vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$

直线 $L_2$: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $\quad \vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$

垂直: $\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0 \iff m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

平行或重合: $\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\vec{0} \iff \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$

夹角公式: $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$

## 面与线间的关系

平面: $Ax + By + Cz + D = 0,\ \vec{n} = (A, B, C)$

直线: $\dfrac{x - x}{m} = \dfrac{y - y}{n} = \dfrac{z - z}{p},\ \vec{s} = (m, n, p)$

垂直: $\vec{s} \times \vec{n} = \vec{0} \iff \dfrac{m}{A} = \dfrac{n}{B} = \dfrac{p}{C}$

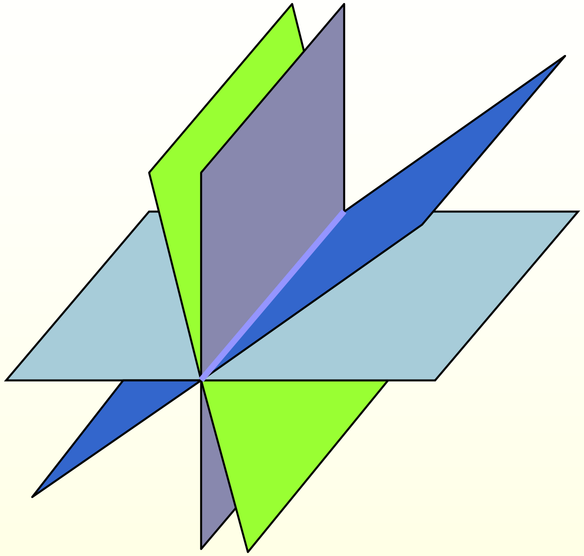
平行或包含: $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \iff mA + nB + pC = 0$

夹角公式: $\sin\varphi = \dfrac{\left|\vec{s} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{s}\right|\left|\vec{n}\right|}$

## 6. 相关的几个问题

**(1) 过直线**

$$L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$



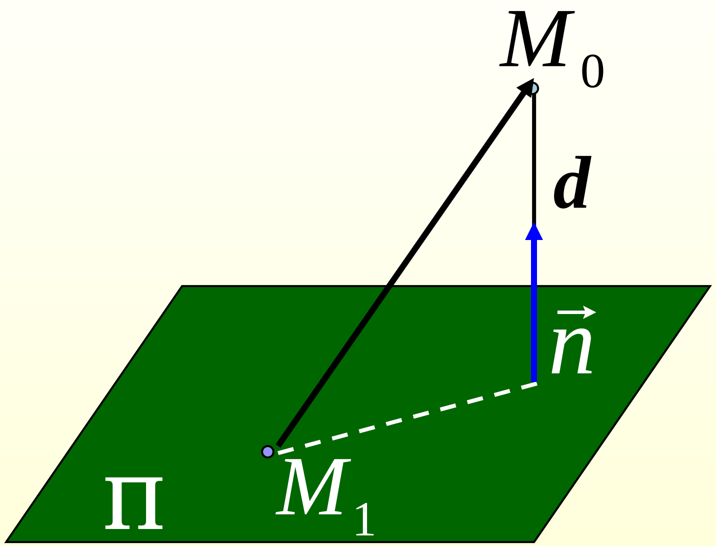
**的平面束 方程**

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)$$
$$+\lambda\,(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

(2) 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\Pi$ : $A\,x+B\,y+C\,z+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

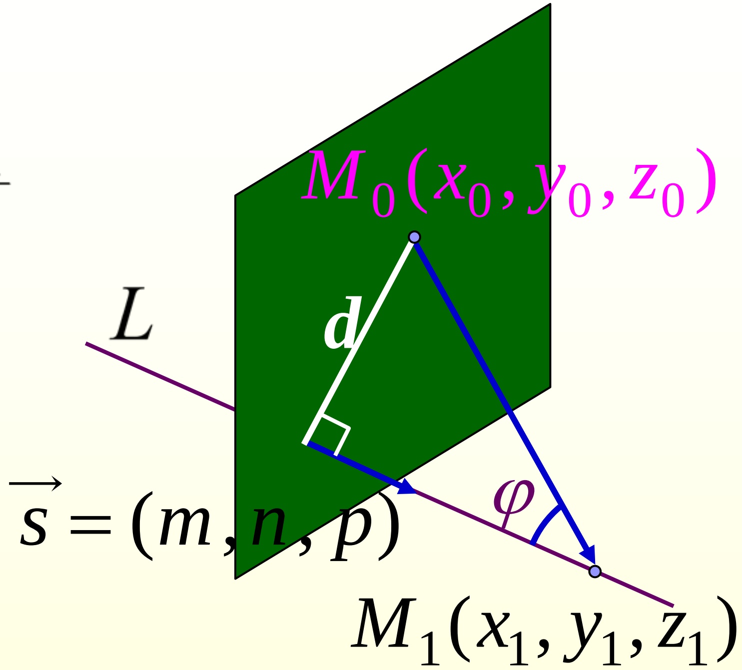


(3) 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线

$$L: \frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$$

的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$



## 二、实例分析

**例1** 设一平面平行于已知直线 $\begin{cases} 2x - z = 0 \\ x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$ 且垂直于已知平面 $7x - y + 4z - 3 = 0$, 求该平面法线的的方向余弦.

**提示** 已知平面的法向量 $\vec{n}_1 = (7, -1, 4)$

求出已知直线的方向向量 $\vec{s} = (1, 1, 2)$

取所求平面的法向量

$$\vec{n} = \vec{s} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2(3, 5, -4)$$

所求为 $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{50}}$, $\cos\beta = \dfrac{5}{\sqrt{50}}$, $\cos\gamma = \dfrac{-4}{\sqrt{50}}$

例2 求过$z$轴，且与平面$2x+y-\sqrt{5}z=0$的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的平面方程.

**解** 设所求平面为 $\pi: Ax+By=0$

$$\because \cos\frac{\pi}{3}=\frac{|2A+B|}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{2^2+1^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 4(2A+B)^2=10\left(A^2+B^2\right)$$

$$6A^2+16AB-6B^2=0 \quad (3A-B)(A+3B)=0$$

$$A=\frac{1}{3}B\text{或}A=-3B \quad \therefore \pi:\ x+3y=0\text{或}-3x+y=0$$

例3 求通过点$A(3,0,0)$和点$B(0,0,1)$且与 $xoy$ 面成$\frac{\pi}{3}$角的平面方程.

**解** 设所求平面的单位法向量为：$\vec{n}^{\circ}=\{A,B,C\}$

则所求平面的方程可设为：$Ax+By+Cz+D=0$

两平面夹角为$\frac{\pi}{3}$，$\therefore\left|\vec{n}^{\circ}\cdot\vec{k}\right|=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ $\therefore C=\pm\frac{1}{2}$

$$\begin{cases}3A+D=0\\C+D=0\\A^2+B^2+C^2=1\end{cases}$$

平面过 $A,B$ 点

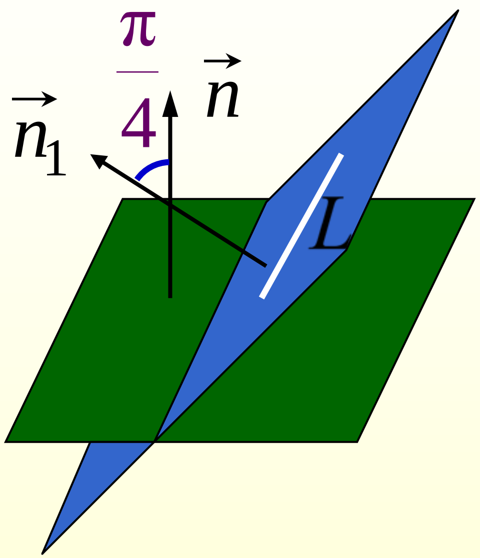
单位法向量

$\therefore D=\mp\frac{1}{2}$, $A=\pm\frac{1}{6}$ $B=\pm\frac{\sqrt{26}}{6}$

所以所求平面的方程为：$x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0$

上页 下页

**例4** 求过直线 $L:\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.




**提示** 过直线 $L$ 的平面束方程

$$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$$

其法向量为 $\vec{n}_1=(1+\lambda,5,1-\lambda)$.

已知平面的法向量为 $\vec{n}=(1,-4,-8)$

选择 $\lambda$ 使 $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|} \Longrightarrow \lambda=-\dfrac{3}{4}$

从而得所求平面方程 $x+20y+7z-12=0.$

例5 设一平面垂直于平面$z=0$，并通过从点$(1,-1,1)$到直线$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$的垂线，求此平面的方程.

**解** **因所求平面与** $z$ **轴平行，故可设为** $Ax+By+D=0$

$\because$ 直线$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$的方向向量为$\vec{s}=\{0,1,1\}$

$\therefore$ 过$(1,-1,1)$且与$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$垂直的平面的方程为

$$0(x-1)+1(y+1)+1(z-1)=0 \qquad \text{即} \quad y+z=0$$

$\therefore$ 直线$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$与$y+z=0$的交点为$\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,

由$\begin{cases} A-B+D=0 \\ -\frac{1}{2}B+D=0 \end{cases}$ 得 $A=D,\quad B=2D$

$\therefore x+2y+1=0$

上页 下页

例6 求直线 $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{2-y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ 与平面 $2x+3y+3z-8=0$ 的交点和夹角.

**解** 直线的参数方程为 $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=2-t \\ z=-1+2t \end{cases}$

代入平面方程得 $t=1$ 直线与平面的交点为（1,1,1）.

设直线与平面的夹角为 $\varphi$

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|2\cdot3+3\cdot(-1)+3\cdot2|}{\sqrt{2^2+3^2+3^2}\sqrt{3^2+1^2+2^2}}=\frac{9}{2\sqrt{77}}$$

$$\therefore\varphi=\arcsin\frac{9}{2\sqrt{77}}$$

**例7** 求过点$(-1,0,4)$，且平行于平面$3x-4y+z-10=0$又与直线$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交的直线方程.

**解** 点$(-1,0,4)$与$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$所确定平面的

**法线向量** $\vec{n}_1=\vec{s}_0\times\overrightarrow{BA}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & 4\end{vmatrix}=10\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}$

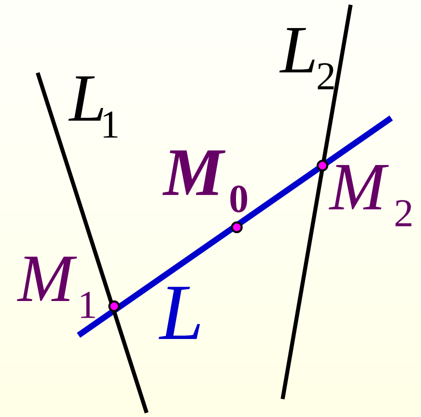
已知平面 的法向量为：$\vec{n}_2=\{3,\ -4,\ 1\}$

**所求直线的方向向量为** $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 10 & -4 & -3\\ 3 & -4 & 1\end{vmatrix}=-16\vec{i}-19\vec{j}-28\vec{k}$$

**所求直线的方程为** $\dfrac{x+1}{16}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z-4}{28}$

**例8** 求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y=2x \\ z=x-1 \end{cases}$，$L_2:\begin{cases} y=3x-4 \\ z=2x-1 \end{cases}$ 都相交的直线 $L$.




**提示** 思路：先求交点 $M_1, M_2$；

再写直线方程.

将 $L_1, L_2$ 的方程化为参数方程

$$L_1:\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t-1 \end{cases},\quad L_2:\begin{cases} x=t \\ y=3t-4 \\ z=2t-1 \end{cases}$$

设 $L$ 与它们的交点分别为

$$M_1(t_1, 2t_1, t_1-1),\qquad M_2(t_2, 3t_2-4, 2t_2-1).$$

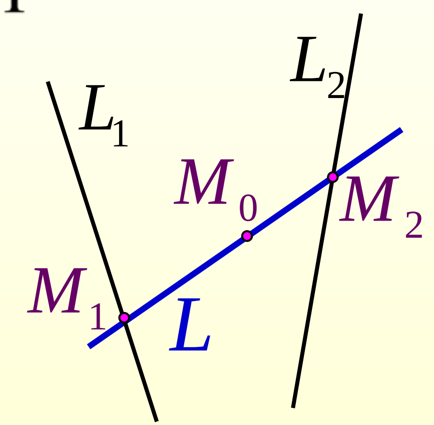
$M_0, M_1, M_2$ **三点共线**

$$\Longrightarrow \overrightarrow{M_0M_1} \,/\!/\, \overrightarrow{M_0M_2}$$

$$\Longrightarrow \frac{t_1-1}{t_2-1} = \frac{2t_1-1}{(3t_2-4)-1} = \frac{(t_1-1)-1}{(2t_2-1)-1}$$

$$\Longrightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 2$$

$$\Longrightarrow M_1 = (0,0,-1),\ M_2 = (2,2,3)$$




$$\Longrightarrow L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$$

---

$$M_0(1,1,1),\quad M_1(t_1, 2t_1, t_1-1),\quad M_2(t_2, 3t_2-4, 2t_2-1)$$

## 思考与练习

**1、一平面经过原点及点（6，3，2）且与平面 $5x+4y-3z=8$ 垂直，求此平面方程.**

**解** 设所求平面的法向量为 $\vec{n}=\{A,B,C\}$

由已知 $\vec{n}\perp\{6,3,2\}$ 且 $\vec{n}\perp\{5,4,-3\}$

$$\therefore \vec{n}=\{6,3,2\}\times\{5,4,-3\}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 3 & 2\\ 5 & 4 & -3\end{vmatrix}=-17\vec{i}+28\vec{j}+9\vec{k}$$

$\therefore$ 所求平面方程为 $-17(x-6)+28(y-3)+9(z-2)=0$

2、求过点（0，2，4）且与两平面 $x+2z=1, y-3z=2$ 平行的直线方程.

**解** ∵已知两平面的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,2), \overrightarrow{n_2}=(0,1,-3)$

$$\therefore \vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$$

所求直线方程为: $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$

**类似的题目**

求过点（-1，2，3）垂直于直线 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$，且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

3、求点$P(3,-1,2)$到直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离.

两种方法

**解** 已知直线的方向向量为 $\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-3\vec{j}-3\vec{k}$

过点$P(3,-1,2)$垂直于已知直线的平面方程为

$$(y+1)+(z-2)=0$$

已知直线的对称式方程为 $\begin{cases} x=1 \\ \dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1} \end{cases}$

解方程组 $\begin{cases} x=1 \\ y-z+2=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$

得直线与平面的交点为 $Q\left(1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

则点$P$到已知直线的距离为

$$d=\left|PQ\right|=\sqrt{(3-1)^2+\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

结束 上页 下页

4、已知点$A(1,0,0)$，$B(0,2,1)$，试在$z$轴上求一点$C$，使$\Delta ABC$的面积最小.

**解** 设$C(0,0,z)$，$\overrightarrow{AB}=\{-1,2,1\}$ $\overrightarrow{AC}=\{-1,0,z\}$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & z\end{vmatrix}=2z\,\vec{i}+(z-1)\,\vec{j}+2\vec{k}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{5\left(z-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{24}{5}}$$

所以当 $z=\dfrac{1}{5}$时，$S_{\Delta ABC}$最小.

结束 上页 下页

5、求螺旋线 $\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

**解** **将第3式代入前两式得** $\begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b} \\ y = a\sin\dfrac{z}{b} \end{cases}$

**在*xoy*面、 *xoz*面、 *yoz*面上的投影分别为**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = a\sin\dfrac{z}{b} \\ x = 0 \end{cases}$$

结束 上页 下页

**6、直线** $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ **绕 $z$ 轴旋转一周, 求此旋转曲面的方程.**

**提示** **在 $L$ 上任取一点** $M_0(1,y_0,z_0)$

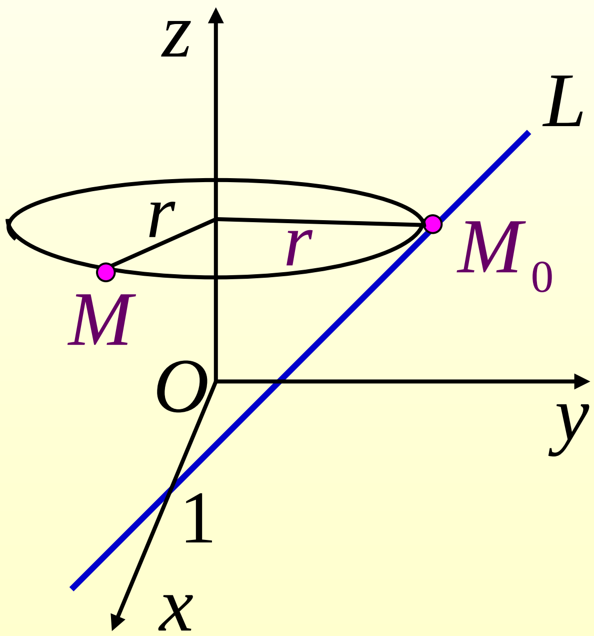
设 $M(x,y,z)$为$M_0$绕$z$轴 **旋转轨迹上任一点, 则有**

$$\begin{cases} z=z_0 = y_0 \\ x^2+y^2=1+y_0^2 \end{cases}$$

将 $y_0=z$ 代入第二方程,

**得旋转曲面方程**

$$x^2+y^2-z^2=1$$



**P53 题22 画出下列各曲面所围图形:**

(1) 抛物柱面 $2y^2 = x$, 平面 $z = 0$ 及 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$;

(2) 抛物柱面 $x^2 = 1 - z$, 平面 $y = 0$, $z = 0$ 及 $x + y = 1$;

(4) 旋转抛物面 $x^2 + y^2 = z$, 柱面 $y^2 = x$, 平面 $z = 0$

及 $x = 1$.

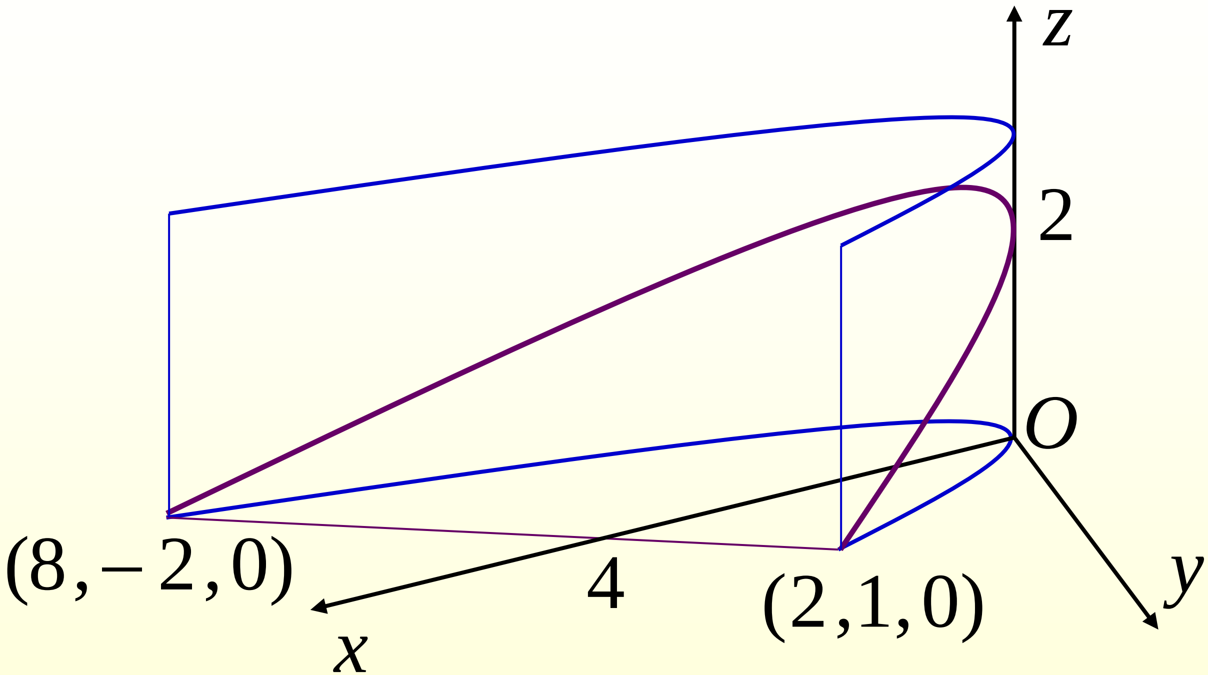
## 解答:

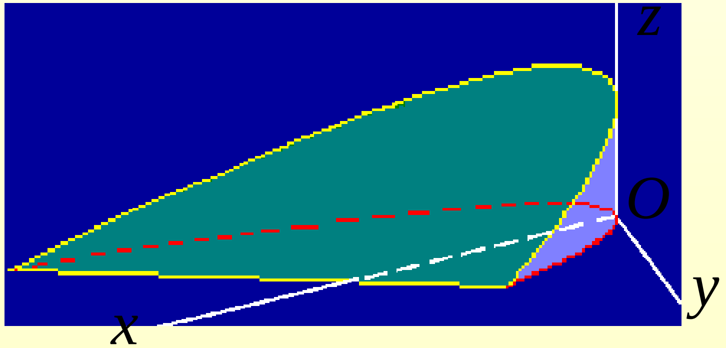
**P53 题22(1)**

$$2y^2 = x$$

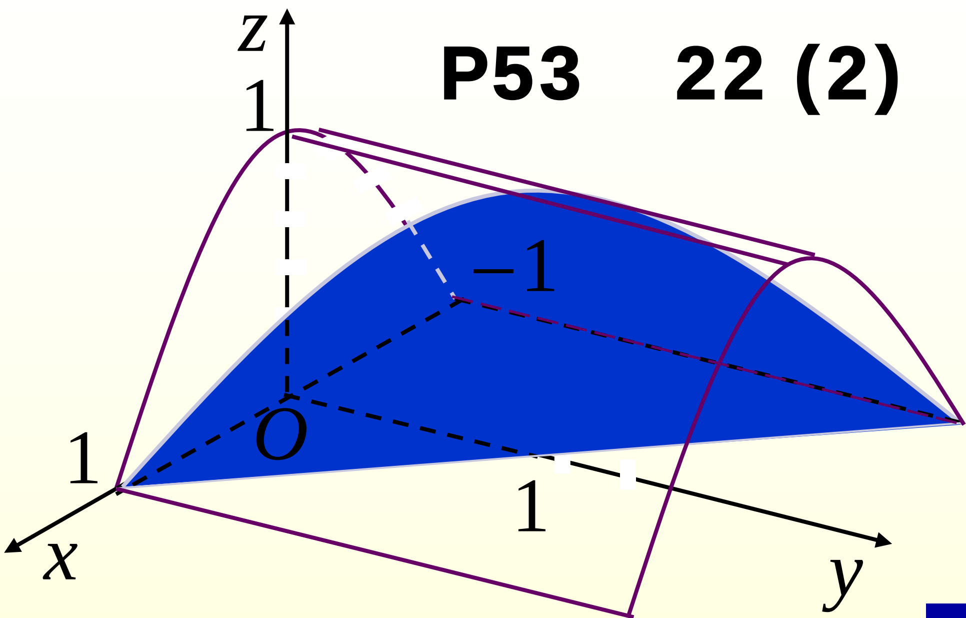
$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$$

$$z=0$$



# P53 22 (2)

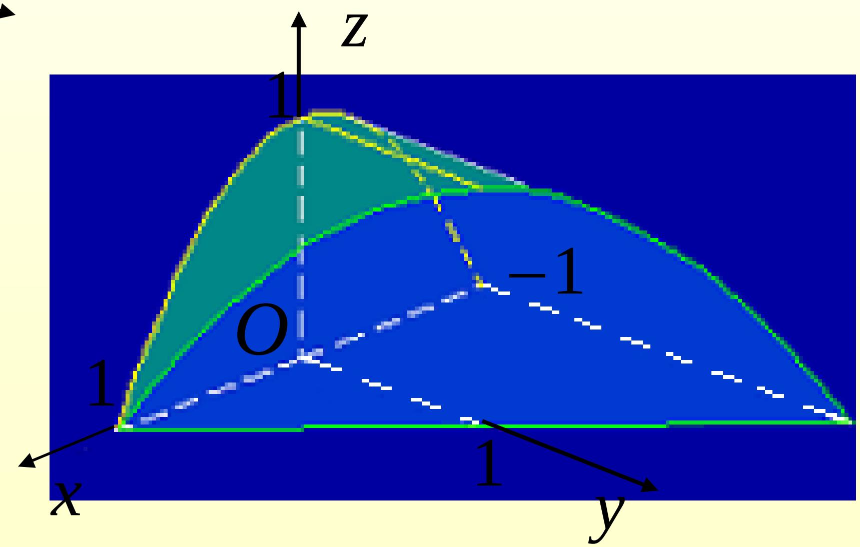



$x^2 = 1 - z$

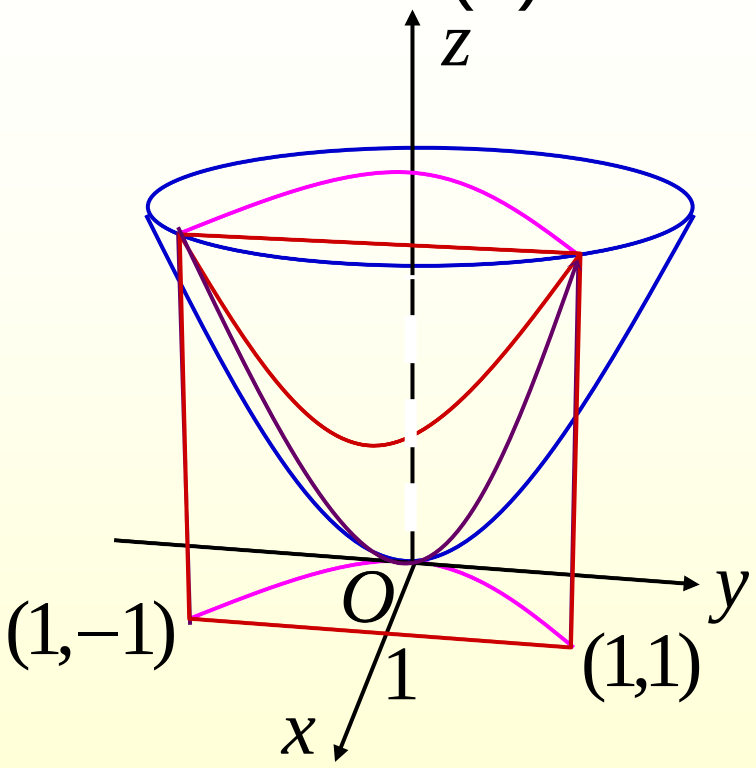
$y = 0$ $xOz$面

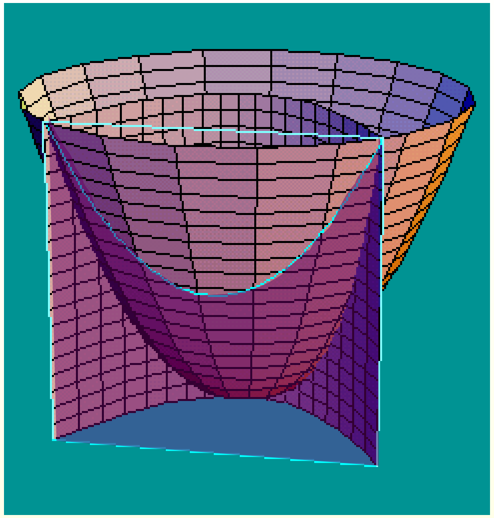
$z = 0$ $xOy$面

$x + y = 1$



P53 22(4)



$x^2 + y^2 = z$ $x = 1$

$y^2 = x$ $z = 0$