习题 9.2

1. 将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为两种不同次序的二次积分，其中 D 是：

(1) 由曲线 $y=\ln x$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的闭区域；

(2) 由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $2x+y=3$ 所围成的闭区域；

(3) 由曲线 $y=\sin x$ ($0\le x\le \pi$)与 x 轴所围成的闭区域；

(4) 由曲线 $y=x^3$ 与直线 $x=-1$ 及 $y=1$ 所围成的闭区域.

2. 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\big|\,|x|\le 1,|y|\le 1\right\}$；

(2) $\iint\limits_D (xy^2+\mathrm{e}^{x+2y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$；

(3) $\iint\limits_D xy\mathrm{e}^{xy^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$；

(4) $\iint\limits_D x^2 y\sin(xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le x\le \dfrac{\pi}{2},0\le y\le 2\right\}$；

(5) $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由曲线 $x=2$，$y=x$，$xy=1$ 所围成的闭区域；

(6) $\iint\limits_D x\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是顶点为 $(0,0)$，$(\pi,0)$，(π,π) 的三角形闭区域；

(7) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由抛物线 $y^2=x$ 与直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域；

(8) $\iint\limits_D \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由直线 $y=x$，$y=2$ 与曲线 $x=y^3$ 所围成的闭区域；

3. 设 $D=[a,b]\times[c,d]$，证明：

$$\iint\limits_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d g(y)\mathrm{d}y\right).$$

4. 交换下列二次积分的次序(假定 $f(x,y)$ 为连续函数).

(1) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_{-2}^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$；

(4) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

5. 通过交换积分次序计算下列二次积分.

(1) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^{1/3}}^1 \sqrt{1-x^4}\,\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^{\pi}dx\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}dy$;

(3) $\int_0^1 dy\int_{3y}^3 e^{x^2}dx$;

(4) $\int_0^2 dx\int_x^2 2y^2\sin(xy)dy$;

(5) $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}dx$;

(6) $\int_0^{\pi}dx\int_x^{\sqrt{\pi x}}\frac{\sin y}{y}dy$.

6. 利用积分区域的对称性和被积函数关于 x 或 y 的奇偶性, 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D |xy|dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le R^2\right\}$；

(2) $\iint\limits_D (x^2\tan x+y^3+4)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4\right\}$；

(3) $\iint\limits_D (1+x+x^2)\arcsin\frac{y}{R}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-R)^2+y^2\le R^2\right\}$;

(4) $\iint\limits_D (|x|+|y|)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle||x|+|y|\le 1\right\}$.

7. 将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 化为极坐标形式下的二次积分，其中积分区域 D 为:

(1) $x^2+y^2\le ax$ $(a>0)$;

(2) $1\le x^2+y^2\le 4$；

(3) $0\le x\le 1$，$0\le y\le 1-x$；

(4) $x^2+y^2\le 2(x+y)$；

(5) $2x\le x^2+y^2\le 4$.

8. 利用极坐标计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le Rx\}$；

(2) $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4$，$y\ge 0, y\le x\}$；

(3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|(x^2+y^2)^2\le a^2(x^2-y^2)\right\}$；

(4) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$；

(5) $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 是第一象限中由圆周 $x^2+y^2=1$ 与 $x^2+y^2=2x$ 所围成的闭区域;

(6) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其中 D 是第一象限中由圆周 $x^2+y^2=2y$，$x^2+y^2=4y$ 及直线

$x=\sqrt{3}y$， $y=\sqrt{3}x$ 所围成的闭区域.

9. 设 r,θ 为极坐标，交换下列二次积分的次序：

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(r,\theta)\mathrm{d}r$ ($a>0$);

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}f(r,\theta)\mathrm{d}r$ ($a>0$)；

(3) $\int_0^{a}\mathrm{d}\theta\int_0^{\theta}f(r,\theta)\mathrm{d}r$ ($0<a<2\pi$).

10. 将下列二次积分化为极坐标形式的二次积分，并计算积分值.

(1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}y$;

(2) $\int_0^{\sqrt{2}/2}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}x^2y^2\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$;

(5) $\int_{\sqrt{2}/2}^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}xy\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{x}xy\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}xy\mathrm{d}y$;

(6) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}\mathrm{e}^{\frac{xy}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x$.

11. 作适当的变量变换，计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D\sin(9x^2+4y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是椭圆形闭区域 $9x^2+4y^2\le 1$ 位于第一象限内的部分；

(2) $\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由双曲线 $xy=1$，$xy=2$ 与直线 $x=y$，$x=4y$ 所围成的位于第一象限的闭区域；

(3) $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是椭圆形闭区域 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$；

(4) $\iint\limits_D\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是闭区域 $|x|+|y|\le 1$.

(5) $\iint\limits_D(x+y)^3\cos^2(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以 $(\pi,0)$，$(3\pi,2\pi)$，$(2\pi,3\pi)$，$(0,\pi)$ 为顶点的平行四边形闭区域.

12. 利用两种给定的变换

(1) $u=x+y,v=x-y$; (2) $u=x^2+y^2,v=xy$,

计算二重积分 $\iint\limits_D(x^2-y^2)\mathrm{e}^{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,y\le x\le\sqrt{1-y^2},0\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.