第七章

微分方程

已知 $y' = f(x)$, 求 y —— **积分问题**

推广

已知含 y 及其若干阶导数的方程, 求 y

—— **微分方程问题**

第七章　微分方程

第一节 微分方程的基本概念

引例
- 几何问题
- 物理问题

微分方程的基本概念

引例1 一曲线通过点(1,2)，在该曲线上任意点处的切线斜率为 $2x$，求该曲线的方程 .

解 设所求曲线方程为 $y = y(x)$，则有如下关系式:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x & \text{①} \\ y\big|_{x=1} = 2 & \text{②} \end{cases}$$

由 ① 得 $y = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$ (C为任意常数)

由 ② 得 $C = 1$，因此所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

引例2 列车在平直路上以 $20\ \mathrm{m/s}$ 的速度行驶，制动时获得加速度 $a = -0.4\ \mathrm{m/s^2}$，求制动后列车的运动规律.

解 设列车在制动后 t 秒行驶了s 米，即求 $s = s(t)$.

已知
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -0.4 \\ s\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 20 \end{cases}$$

由前一式两次积分，可得 $s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$

利用后两式可得 $C_1 = 20,\ C_2 = 0$

因此所求运动规律为 $s = -0.2t^2 + 20t$

说明: 利用这一规律可求出制动后多少时间列车才能停住，以及制动后行驶了多少路程 .

微分方程的基本概念：

微分方程：表示未知函数及其导数(微分)与自变量关系的方程.

常微分方程：未知函数是一元函数的微分方程.

偏微分方程：未知函数是多元函数的微分方程.

微分方程的阶：微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数.

例如： $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ 一阶微分方程. $x^4 - \cos xy^{(4)} = 0$ 四阶微分方程.

一般地，n 阶微分方程的形式：$F\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$

或 $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$ （ n 阶显式微分方程）

注　n 阶微分方程中必须含有 $y^{(n)}$，其余的变量可以不出现.

如　$y^{(n)}+1=0$;　$\dfrac{d^4y}{dx^4}+\dfrac{dy}{dx}-2=0$;　$5y'''+y=7$.

如果函数 $y=\varphi(x)$代入微分方程后，能使方程变为恒等式，则称 $y=\varphi(x)$为微分方程的解.

通解：解中独立的任意常数的个数等于微分方程的阶数的解.

如：　$y=C_1x+C_2e^x$ 中的 C_1、C_2是独立的，

$y=(C_1+4C_2)e^x$中的 C_1、C_2是不独立的.

初始条件：问题中用于确定通解中的任意常数的条件.

特解：利用初始条件确定出通解中的任意常数后得到的解.

求微分方程满足初始条件的特解的问题，称为初值问题.

一般初值问题可写为 $\begin{cases} F\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \\ y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$

微分方程的解的图形是一条曲线，称为微分方程的积分曲线.

例1 验证：函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$$ 的解. ——通解

解 $\because \dfrac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt,$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_2 \sin kt = -k^2\left(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt\right)$$

$$= -k^2 x \qquad \therefore \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0$$

例2上题中 $k \neq 0$ 求满足初始条件 $x\big|_{t=0} = A, \quad \dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$ 的特解

解　将 $t = 0, x = A$ 代入 得　$C_1 = A$

将 $t = 0, \dfrac{dx}{dt} = 0$ 代入 得　$C_2 = 0$

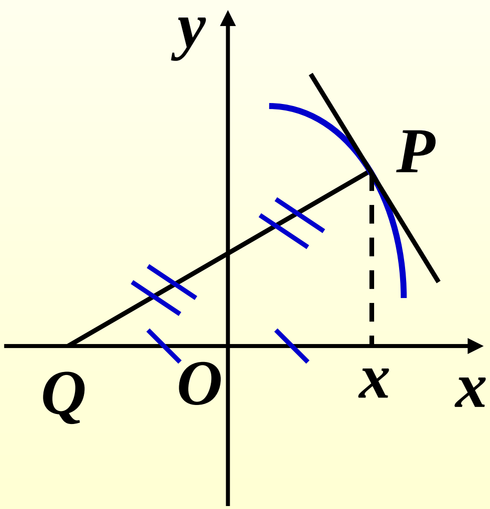
把 C_1, C_2 代入 得特解　$x = A\cos kt$

上页　下页

例3 已知曲线上点 $P(x,\ y)$ 处的法线与 x 轴交点为 Q 且线段 PQ 被 y 轴平分，求所满足的微分方程．

解 如图所示，点 $P(x, y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$



令 $Y=0$，得 Q 点的横坐标

$$X = x + yy'$$

$$\therefore \quad x + yy' = -x,$$

即 $$yy' + 2x = 0$$

第二节

可分离变量微分方程

可分离变量方程 $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$

$$M_1(x) M_2(y)\mathrm{d}x + N_1(x) N_2(y)\mathrm{d}y = 0$$

转化

解分离变量方程 $g(y)dy = f(x)dx$

定义 如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)dy = f(x)dx \qquad (1)$$

的形式，则原方程就称为**可分离变量的微分方程**.

解法步骤为：

① 分离变量，使方程变为：$g(y)dy = f(x)dx$

② 两边积分：$\int g(y)dy = \int f(x)dx$

③ 求得通解：$G(y) = F(x) + C \qquad (2)$

(2)称为微分方程(1)的隐式解，或称为(1)的隐式通解.

例 1 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解 将原方程分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=2x\,dx$$

说明：在求解过程中每一步不一定是同解变形，因此可能增减解.

两端积分，得 $\ln|y|=x^2+C_1$

从而 $y=\pm e^{x^2+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^2}$

$\pm e^{C_1}$ 为任意非零常数，因 $y=0$ 也是解，

故得通解为 $y=Ce^{x^2}$.

上页 下页

例2 求微分方程 $xdy+2ydx=0$ 满足条件 $y|_{x=2}=1$ 的特解

解 将原方程分离变量得 $\dfrac{dy}{2y}=-\dfrac{1}{x}dx$

两端积分得 $\dfrac{1}{2}\ln|y|=-\ln|x|+C_1$

原方程的通解为 $y=\pm e^{2C_1}\cdot\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{C}{x^2}$

由 $y|_{x=2}=1$ 得 $C=4$

原方程的特解为 $y=\dfrac{4}{x^2}$

练习 求微分方程 $y'\sin x=y\ln y$ 满足初始条件 $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$ 的特解.

提示 将原方程分离变量得 $\dfrac{1}{y\ln y}dy=\dfrac{1}{\sin x}dx$

例3 求微分方程 $y' = \dfrac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$ 的通解.

解 将原方程分离变量得 $\dfrac{ydy}{1+y^2} = \dfrac{1}{x(1+x^2)}dx$

两端积分得 $\dfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1$

从而 $\ln(1+y^2)(1+x^2) = \ln|x|^2 + \ln e^{2C_1}$

$$(1+y^2)(1+x^2) = e^{2C_1}x^2$$

原方程的通解为 $(1+y^2)(1+x^2) = Cx^2 \ (C = e^{2C_1})$

例4 求下述微分方程的通解:

$$y' = \sin^2(x - y + 1)$$

解 令 $u = x - y + 1$, 则 $u' = 1 - y'$

故有 $$1 - u' = \sin^2 u$$

即 $$\sec^2 u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

解得 $$\tan u = x + C$$

所求通解: $\tan(x - y + 1) = x + C$ （ C 为任意常数 ）

练习： 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x+y}$ 的通解.

解法 1 分离变量 $\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$

积分 $-\mathrm{e}^{-y}=\mathrm{e}^{x}+C$

即 $(\mathrm{e}^{x}+C)\mathrm{e}^{y}+1=0$ （ $C<0$ ）

解法 2 令 $u=x+y$, 则 $u'=1+y'$

故有 $u'=1+\mathrm{e}^{u}$

积分 $\int\frac{\mathrm{d}u}{1+\mathrm{e}^{u}}=x+C$

$$\int\frac{(1+\mathrm{e}^{u})-\mathrm{e}^{u}}{1+\mathrm{e}^{u}}\mathrm{d}u$$

$u-\ln(1+\mathrm{e}^{u})=x+C$

所求通解： $\ln(1+\mathrm{e}^{x+y})=y-C$ （ C 为任意常数 ）

例 5 求微分方程$\left(e^{x+y}-e^{x}\right)dx+\left(e^{x+y}+e^{y}\right)dy=0$的通解，并求当 $y\big|_{x=1}=1$时的特解.

解 将原方程分离变量：$e^{x}\left(e^{y}-1\right)dx=-e^{y}\left(e^{x}+1\right)dy$

即 $$\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx=\frac{e^{y}}{1-e^{y}}dy$$

两端积分，得：$$\int\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx=\int\frac{e^{y}}{1-e^{y}}dy$$

从而 $$\ln\left|1+e^{x}\right|=-\ln\left|1-e^{y}\right|+\ln C_{1}$$

得通解为:$\left(1+e^{x}\right)\left(1-e^{y}\right)=\pm C_{1}=C$

代入$y\big|_{x=1}=1$，得 $C=1-e^{2}$

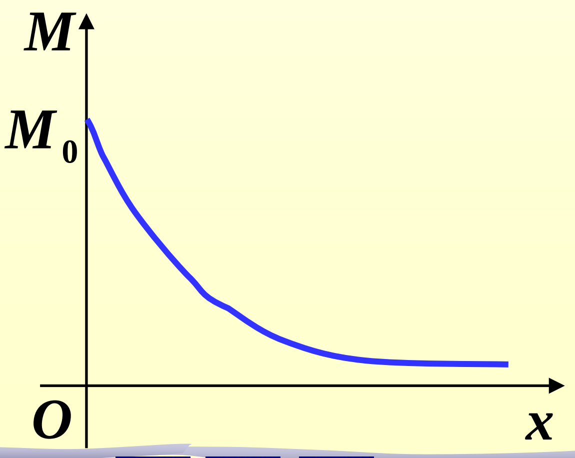
所以方程的特解为：$\left(1+e^{x}\right)\left(1-e^{y}\right)=1-e^{2}$

例6 放射性元素铀由于不断地有原子放射出微粒子而变成其他元素，铀的含量就不断地减少，这种现象叫做衰变. 由原子物理学知道，铀的衰变速度与当时未衰变原子的含量M成正比. 已知$t=0$时铀的含量为 M_0, 求在衰变过程中铀含量$M(t)$随t时间变化的规律.

解 铀的衰变速度就是$M(t)$对时间t的导数$\dfrac{dM}{dt}$.

由于铀的衰变速度与其含量成正比，得微分方程为

$$\frac{dM}{dt}=-\lambda M$$



其中λ是正的常数，叫做衰变系数.

将方程分离变量，得 $$\frac{dM}{M}=-\lambda dt$$

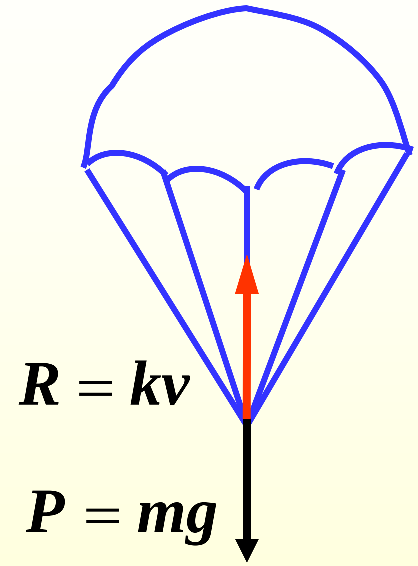
两端积分，得 $\ln M = -\lambda t + \ln C$

得微分方程通解为 $M = Ce^{-\lambda t}$

将初始条件 $M\big|_{t=0} = M_0$ 代入上式，得: $C = Ce^{0} = M_0$

所以铀的衰变规律为: $M = M_0 e^{-\lambda t}$

例7 设降落伞从跳伞塔下落后，所受空气阻力与速度成正比，求降落伞下落速度与时间的函数关系（设降落伞离开跳伞塔时速度为零）.



解 设下落速度为$v(t)$.

伞下落过程中所受外力为: $F = mg - kv = ma$

则 $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$

分离变量，得: $\dfrac{dv}{mg - kv} = \dfrac{dt}{m}$

两端积分得: $-\dfrac{1}{k}\ln(mg - kv) = \dfrac{t}{m} + C_1$ 即 $mg - kv = e^{-\frac{k}{m}t - kC_1}$

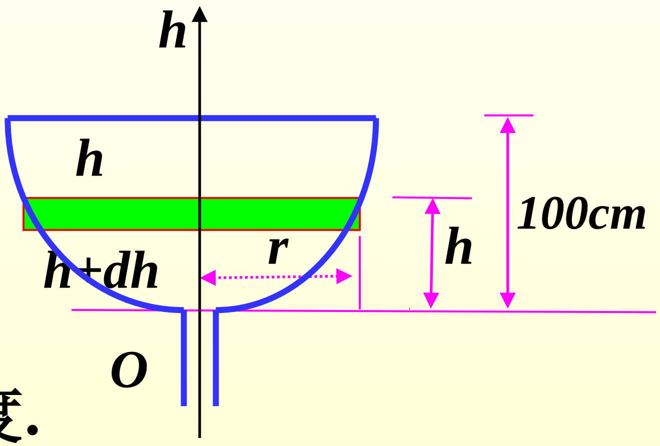
或 $v = \dfrac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$ $\left(C = -\dfrac{1}{k}e^{-kC_1}\right)$ $\because v|_{t=0} = 0$ $\therefore C = -\dfrac{mg}{k}$.

于是所求的特解为: $v = \dfrac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

例8 高为1m 的半球形容器，水从它的底部小孔流出，小孔横截面面积为$1\,cm^2$, 开始时容器内盛满了水，求水从小孔流出的过程中容器里水面的高度 h 随时间 t 变化的规律.

解 由水力学知，水从孔口流出的流量(即通过孔口横截面的水的体积V 对时间 t 的变化率)Q 为：

$$Q=\frac{dV}{dt}=0.62S\sqrt{2gh}$$

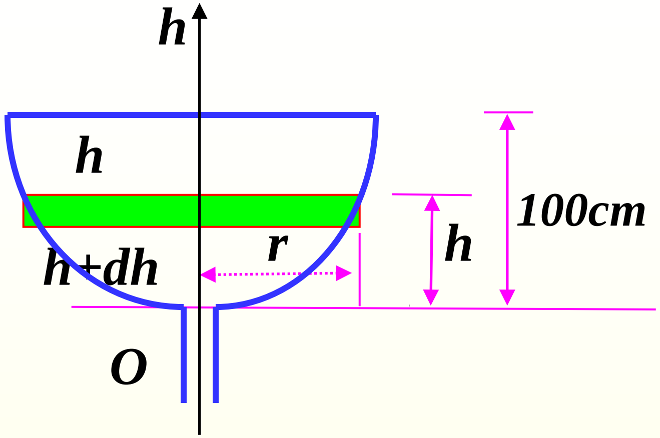


其中： 0.62为流量系数，

S 为孔口横截面面积， g为重力加速度.

$$\because S=1cm^2,\ \therefore \frac{dV}{dt}=0.62\sqrt{2gh} \quad 或 \quad dV=0.62\sqrt{2gh}\,dt \qquad (*)$$

设在时间间隔$(t\,,\,t+dt)$内，水面高度由 h 降至$h+dh$ $(dh<0)$,



则又有：$dV = -\pi r^2 dh$

负号是由于 $dh < 0$，而 $dV > 0$

又 $r = \sqrt{100^2 - (100-h)^2} = \sqrt{200h - h^2}$

故　$dV = -\pi(200h - h^2)dh$　（**）

由（*）和（**）两式，得

$$0.62\sqrt{2gh}dt = -\pi(200h - h^2)dh \quad (***)$$

方程（***）就是未知函数应满足的微分方程。

初始条件为 $h\big|_{t=0} = 100$

将（***）分离变量，得 $dt = -\dfrac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(200h^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right)dh$

两端积分，得 $$t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\int\left(200h^{\frac{1}{2}}-h^{\frac{3}{2}}\right)dh$$

即 $$t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400}{3}h^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}\right)+C$$

$\because h\big|_{t=0}=100$ $$\therefore 0=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400}{3}100^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}100^{\frac{5}{2}}\right)+C$$

因此 $$C=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400000}{3}-\frac{200000}{5}\right)=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\times\frac{14}{15}\times10^{5}$$

所以 $$t=\frac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}\left(7\times10^{5}-10^{3}h^{\frac{3}{2}}+3h^{\frac{5}{2}}\right)$$

内容小结

1. 微分方程的概念

微分方程；阶；定解条件；解；通解；特解

说明: 通解不一定是方程的全部解 .

例如，方程 $(x+y)y'=0$ 有解

$$y=-x \text{ 及 } y=C$$

后者是通解，但不包含前一个解 .

2. 可分离变量方程的求解方法:

分离变量后积分；根据定解条件定常数 .

3. 解微分方程应用题的方法和步骤

(1) 找出事物的共性及可贯穿于全过程的规律列方程.

常用的方法:

1) 根据几何关系列方程 (如: P301题5(2))

2) 根据物理规律列方程 例6 例7

3) 根据微量分析平衡关系列方程 例8

(2) 利用反映事物个性的特殊状态确定定解条件.

(3) 求通解, 并根据定解条件确定特解.

思考与练习

求下列方程的通解：

$$(1)\ (x+xy^2)\,\mathrm{d}x-(x^2y+y)\mathrm{d}y=0$$

$$(2)\ y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

提示: (1) **分离变量** $\dfrac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(2) **方程变形为** $y'=-2\cos x\sin y$

$$\Longrightarrow \ln\left|\tan\frac{y}{2}\right|=-2\sin x+C$$

结束 上页 下页