

## 习题 6.5

1. 求下列微分方程的通解:

- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| (1) $y'' - 3y' + 2y = 0$ ;                     | (2) $y'' - 2y' - 2y = 0$ ;         |
| (3) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} = 0$ ; | (4) $4y'' - 4y' + y = 0$ ;         |
| (5) $y'' + 6y' + 9y = 0$ ;                     | (6) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0$ ; |
| (7) $y'' + 6y' + 10y = 0$ ;                    | (8) $y'' + y' + y = 0$ ;           |
| (9) $y''' - y'' - y' + y = 0$ ;                | (10) $y''' - 8y = 0$ .             |

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

- (1)  $y'' - 2y' + 2y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 (2)  $y'' - 4y' + 3y = 0$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 2$ ;  
 (3)  $16y'' + 8y' + y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0.5$ ;  
 (4)  $y'' + 9y = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ .

3. 求下列微分方程的通解:

- |   |  |
|---|--|
| (1) $y'' - 3y' = x - 1$ ;                   | (2) $6y'' - y' - 2y = xe^x$ ;                  |
| (3) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = t \sin t$ ;   | (4) $2y'' + y' - y = 2e^{-x}$ ;                |
| (5) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x$ ;      | (6) $y'' + y = x + \cos x$ ;                   |
| (7) $y'' - 2y' + y = e^x + 3$ ;             | (8) $y'' + 2y' + 2y = x + 3 + e^{-x} \sin x$ ; |
| (9) $y'' - y' = x^2 - 1 + e^x + 2 \sin x$ ; | (10) $y''' + 4y' = 2 \cos 2x - \sin 2x$ .      |

4. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

- (1)  $y'' - 3y' + 2y = 5$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 (2)  $y'' + y + \sin 2x = 0$ ,  $y(\pi) = 1$ ,  $y'(\pi) = 1$ ;  
 (3)  $y'' + y = 2 \cos x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ;  
 (4)  $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -\frac{11}{2}$ .

5. 设  $a, b, c$  都是正常数, 且  $y(x)$  是微分方程  $ay'' + by' + cy = 0$  的一个解, 证明:  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ .

6. 设函数  $f(x)$  连续, 且满足:  $f(x) = e^x + \int_0^x (t-x)f(t)dt$ , 求  $f(x)$ .

7. 设函数  $f(x)$  连续, 且满足:  $y(x) = \int_0^x ty(x-t)dt + \sin x$ , 求  $y(x)$ .

8. 弹簧的一端系着 3 千克的物体, 在沿  $x$  轴方向 20 牛顿力的作用下弹簧伸长了 0.6 米, 而当弹簧离开平衡位置原点时, 初始速度  $v_0 = 1.5$  米 / 秒, 求  $t$  秒后物体的位置.

9. 质量为  $m$  的潜艇在水中下沉时时, 所受浮力与下沉速度成正比, 假设潜艇由静止开始依重力下沉, 求此潜艇的运动规律.

10. 质量为 200 克的物体悬于弹簧上呈平衡状态, 现将物体下拉, 使弹簧伸长 2 厘米, 然后

以初速度为 0 放开，使之振动。假设介质阻力与速度成正比，速度为 1 厘米 / 秒时，阻力为 0.1 克，弹性系数  $k = 5$  千克 / 厘米。试求其运动方程。

11. 设由电阻  $R = 20$  欧，电感  $L = 1$  亨，电容  $C = 0.002$  法和一个电动势为  $E(t) = 12\sin 10t$  伏的电源串联成一个回路。若初始电量和电流为 0，求电路中电量  $Q(t)$  和电流  $I(t)$ 。

12. 求解下列 Euler 方程

(1) $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$ ;	(2) $x^2 y'' + xy' + y = 0$ ;
(3) $9x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ ;	(4) $x^2 y'' - 5xy' + 8y = 2x^3$ ;
(5) $x^2 y'' + xy' + 4y = 2x \ln x$ ;	(6) $(x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$ .

13. 求解下列微分方程：

(1) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ ;	(2) $y^{(4)} + 10y'' + 25y = 0$ ;
(3) $y'' + y = \sin x \sin 2x$ ;	(4) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = \sin^2 x$ .

14. 设  $y = y(x)$  满足微分方程： $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$ ，并且它在点  $(0, 1)$  处的切线与  $y = x^2 - x + 1$  在该点处的切线重合，求  $y = y(x)$ 。

15. 设二阶常系数线性微分方程  $y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  为常数) 的一个特解为： $y = 2e^{2x} + (1+x)e^x$ ，试确定常数  $\alpha, \beta, \gamma$ ，并求微分方程的通解。