习题 3.4

1. 验证：

(1) 函数 $y=\ln\dfrac{1}{1+x}$ 满足关系式 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=\mathrm{e}^{y}$；

(2) 函数 $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ 满足关系式 $2y=xy'+\ln y'$.

2. 求由下列方程所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

(1) $y^2-2xy+6=0$；

(2) $x^3+y^3-3axy=0$ （$a>0$）；

(3) $y=1+x\mathrm{e}^{y}$；

(4) $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

3. 求下列方程所确定的隐函数 $y=y(x)$ 在点 $x=0$ 处的导数：

(1) $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$；

(2) $\mathrm{e}^{xy}+\ln\dfrac{y}{x+1}=0$；

(3) $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$.

4. 设 $y=f(x)$ 是由方程 $xy+\ln y=1$ 所确定的隐函数.

（1）求 $f'(x)$；(2) 又设 $g(x)=f(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}$，求 $g'(1)$.

5. 求曲线 $x^3+y^3-3xy=0$ 在点 $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ 处的切线方程和法线方程.

6. 求证：星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$（$a>0$）在两坐标轴间的切线长度为常数.

7. 求下列参数方程表示的函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$：

(1) $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^2};\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2},\end{cases}$ 其中 $a>0$.

8. 求下列参数方程表示的函数在指定点处的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

(1) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=1-\arctan t,\end{cases}$ 在 $t=1$ 处；

(2) $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t),\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $t=-\dfrac{\pi}{4}$ 处.

9. 求下列参数方程表示的曲线在给定点处的切线方程和法线方程：

(1) $\begin{cases}x=2\mathrm{e}^{t},\\ y=\mathrm{e}^{-t},\end{cases}$ 在 $t=0$ 处; (2) $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\cos 2t,\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 处.

10. 验证下列参数方程表示的函数满足对应的关系式：

(1) $\begin{cases}x=\sqrt{1+t},\\ y=\sqrt{1-t}\end{cases}$ 满足 $yy'+x=0$；(2) $\begin{cases}x=\dfrac{1+\ln t}{t^2},\\ y=\dfrac{3+2\ln t}{t}\end{cases}$ 满足 $yy'=2xy'^2+1$.

11. 求下列极坐标方程表示的曲线在指定点处的切线方程和法线方程：

(1) $r=\cos\theta+\sin\theta$ 对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处；(2) $r=a\sin 2\theta$ ($a>0$)对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处.