习题 4.1

1. 验证 Rolle 定理对函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$ 在区间 $[0,3\pi]$ 上的正确性.

2. 验证函数 $f(x)=\arctan x$ 在区间 $[0,1]$ 上满足 Lagrange 定理的条件.

3. 验证函数 $f(x)=x^2$， $g(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[1,4]$ 上满足 Cauchy 定理的条件.

4. 由代数学基本定理知道：n 次多项式至多有 n 个实根. 利用此结论及 Rolle 定理，不求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

5. 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=f(c)$，其中 $c\in(a,b)$，则方程 $f''(x)=0$ 在 (a,b) 内必定有一实根.

6. 证明：

(1) 方程 $x^3+x-1=0$ 有且仅有一个正根.

(2) 对 $\forall c\in\mathbb{R}$，方程 $x^3-3x+c=0$ 在 $(0,1)$ 内不可能有两个相异的实根.

7. 设 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n\in\mathbb{R}$. 证明：

(1) 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一正根 $x=x_0$，则方程

$$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

必有一个小于 x_0 的正根.

(2) 若 $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$，则方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

在 $(0,1)$ 内至少有一实根.

8. 设 $f(x)\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$，且 $f(a)\cdot f(b)>0$， $f(a)\cdot f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$. 试证：至少存在一点 $\xi\in(a,\ b)$，使 $f'(\xi)=f(\xi)$.

9. 设函数 $f(x)\in D(a,b)$，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$(有限数或 $\pm\infty$). 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可微，且满足不等式

$$0\le f(x)\le\ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}},\quad \forall x\in(0,+\infty).$$

证明：存在 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{2}{2\xi+1}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$.

11. 利用 Lagrange 公式证明下列不等式：

(1) 当 $0<a<b$，且 $n>1$ 时，$na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a)$；

(2) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$；

(3) 当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$；

(4) 若 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$.

12. 证明下列恒等式：

(1) $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$；

(2) $\sin x\sin\left(x+2\right)+\sin^{2}1=\sin^{2}\left(x+1\right)$.

13. 设函数 $f(x)$， $g(x)\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，及存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)<0$.

15. 设函数 $f\left(x\right)\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$，且 $f\left(a\right)=f\left(b\right)=1$，求证：存在 $\xi,\eta\in\left(a,b\right)$ 使得

$$\mathrm{e}^{\xi-\eta}\left[f\left(\eta\right)+f'\left(\eta\right)\right]=1.$$

16. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导、无界，则其导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内也无界. 但反之不然，举出例子.

17. 参照例 4.5 和习题 9，对 Lagrange 中值定理作出推广.

18. 设函数 $f\left(x\right)\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$ （$0<a<b$），证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

19. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，且 $ab>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=\xi f'(\xi)-f(\xi).$$

20. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内具有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，试用 Cauchy 定理证明：

$$\frac{f(x)}{x^{n}}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1).$$