

习题 6.4

1. 判断下列函数组在定义区间内的线性相关性:

(1) $e^{-2x}, 3e^{-2x}$;

(2) $e^{2x} \cos 5x, e^{2x} \sin 5x$;

(3) $\ln x, x \ln x$;

(4) $\sin 2x, \sin x \cos x$.

2. 验证 $y_1 = e^x$ 是线性方程 $(1+2x-x^2)y'' + (x^2-3)y' + 2(1-x)y = 0$ 的一个解, 并确定 $y_2 = ax^2 + bx + c$ 的系数, 使其成为方程的另一个解, 由此写出方程的通解.

3. 已知下列齐次线性微分方程的一个解, 试用 Liouville 公式或常数变易法求方程的另一个线性无关解, 并求出方程的通解:

(1) $x^2 y'' + xy' - y = 0, y_1 = x$;

(2) $x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0, y_1 = x \cos x$;

(3) $(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0, y_1 = e^x$.

4. 试用观察法求出下列齐次微分方程的一个特解, 进而求出方程的通解:

(1) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$; (2) $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0$;

(3) $y'' - \tan x y' + 2y = 0$.

5. $y = x + C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$ (C_1, C_2 是任意常数) 是否微分方程 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x$ 的通解? 试说明理由.

6. 已知对应齐次方程的一个特解 y_1 , 求非齐次微分方程的通解:

(1) $y'' + \frac{x}{1-x} y' - \frac{1}{1-x} y = x-1, y_1 = e^x$;

(2) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x, y_1 = x$.