习题 8.5

1. 求下列复合函数的全导数：

(1) $z=\mathrm{e}^{x-2y}$， $x=\sin t,\ y=t^3$；

(2) $z=\arccos(x-y),\quad x=3t,\ y=4t^2$；

(3) $u=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}$， $y=a\sin x,\ z=\cos x$（a 为常数）；

(4) $u=f(x,.y,z),\quad x=t,\ y=\ln t,\ z=\tan t$.

2. 求下列复合函数的一阶偏导数：

(1) $z=u^2\ln v$， $u=\dfrac{y}{x},v=3y-2x$；

(2) $z=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$ ；

(3) $z=(2x+y)^{2x+y}$；

(4) $z=x^{x^y}$.

3. 求下列复合函数的一阶偏导数（f 是 $C^{(1)}$ 类函数）：

(1) $z=f(x+y,x-y)$；

(2) $z=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$；

(3) $z=yf\left(\dfrac{y}{x}\right)$；

(4) $z=f(t,ts,tsr)$.

4. 验证下列函数满足所给的方程，其中 f 是 $C^{(1)}$ 类函数:

(1) $z=yf(x^2-y^2)$， 证明 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$ ；

(2) $z=xy+xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$， 证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$ ；

(3) $z = \mathrm{e}^y f\left(y\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$，证明 $(x^2-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=xyz$；

(4) $u=\dfrac{xy}{z}\ln x+xf\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)$，证明 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=u+\dfrac{xy}{z}$；

(5) $u=x^k f\left(\dfrac{z}{x},\dfrac{y}{x}\right)$，证明 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=ku$.

5. 设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，

(1) 试变换方程 $x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ 和 $x\dfrac{\partial u}{\partial y}+y\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$；

(2) 证明 Cauchy-Riemann 方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 在极坐标 (r,θ) 下的形式为

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

6. 设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}, v=\arctan\dfrac{y}{x}$. 若取 u,v 作新的自变量，试变换方程

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

7. 求下列函数的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，其中 f 是 $C^{(2)}$ 类函数：

(1) $z=f(xy^2,x^2y)$；

(2) $z=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$；

(3) $z=f(x^2+y^2)$；

(4) $z=f\left(x+y,xy,\dfrac{x}{y}\right)$.

8. 设 f 和 g 是 $C^{(1)}$ 类函数，计算 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$，其中

(1) $F(x,y)=\displaystyle\int_1^x\left[\int_0^{yu} f(u)g\left(\frac{t}{u}\right)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$；

(2) $F(x,y)=\int_a^{x^2y} f(t,\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$ （a 为常数）.

9. 设 $u=u(x,y)$， $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 验证

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

10. 设 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 而 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}z$，求 $f(u)$.

11. 根据所给变换，以 u,v 作为新的自变量变换下面的方程：

(1) 设 $x=\mathrm{e}^u\cos v, y=\mathrm{e}^u\sin v$，变换方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2 z=0$；

(2) 设 $u=xy, v=\frac{x}{y}$，变换方程 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

12. 求下列各题中的常数 a,b，使得

(1) 变换 $\begin{cases}u=x+ay\\ v=x+by\end{cases}$ $(a\neq b)$ 把方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$；

(2) 变换 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$ 把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

13. 求下列方程确定的隐函数的导数：

(1) $\sin xy-\mathrm{e}^{xy}-x^2y=0$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

(2) $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

(3) $y^x=x^y$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

(4) $\sin(xy)=\ln\frac{x+1}{y}+1$，求 $y'(0)$；

(5) $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$，求 $y'(0)$；

(6) $\mathrm{e}^{xy}+\ln\frac{y}{x+1}=0$，求 $y'(0)$.

14. 求下列方程确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数或全微分：

(1) $\frac{x}{z}=\ln\sin\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$；

(2) $e^z - xyz = 0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$；

(3) $e^z + xyz = e$，求 $z_x(0,0)$；

(4) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$，求全微分 dz；

(5) $F(x+xy, xyz) = 0$，其中 F 具有一阶偏导数，求全微分 dz .

15. 求下列各函数的导数：

(1) 设 $y = y(x), z = z(x)$ 是由方程 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z) = 0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和连续偏导数，求 $\frac{dz}{dx}$；

(2) 设 $u = f(x,y,z)$，其中 $y = \sin x$，而 $z = z(x,y)$ 是由方程 $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$ 所确定，f, φ 具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$，求 $\frac{du}{dx}$；

(3) 设 $u = f(x,y,z)$ 具有一阶偏导数，又函数 $y = y(x)$ 和 $z = z(x)$ 分别由 $e^{xy} - xy = 2$ 和 $e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$ 确定，求 $\frac{du}{dx}$.

16. 设 ϕ 是 $C^{(1)}$ 类函数，验证隐函数 $z = z(x,y)$ 满足所给方程：

(1) 设 $z = z(x,y)$ 由方程 $\phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 确定，证明 $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$；

(2) 设 $u = f(z)$，而 $z = z(x,y)$ 由方程 $z = x + y\phi(z)$ 确定，证明 $\frac{\partial u}{\partial y} = \phi(z)\frac{\partial u}{\partial x}$；

(3) 设 $z = z(x,y)$ 由方程 $\phi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ 确定，证明 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$；

(4) 设 $z = z(x,y)$ 由方程 $ax + by + cz = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$ 确定，证明

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay .$$

17. 求下列方程所确定的隐函数 $z = z(x,y)$ 的指定二阶偏导数：

(1) $z^3 - 3xyz = a^3$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$；

(2) $\mathrm{e}^z - xyz = 0$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$；

(3) $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

(4) $x + y + z = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

(5) $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$，且 $z(0,0) = 1$，求 $z_{xy}(0,0)$.

18. 验证由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的二阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{F_{xx}(F_y)^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}(F_x)^2}{(F_y)^3}.$$

19. 求下列方程组确定的隐函数的导数或偏导数：

(1) $\begin{cases} z - x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$；

(2) $\begin{cases} xu - yv = 0, \\ yu + xv = 1, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$；

(3) $\begin{cases} u^3 + xv = y, \\ v^3 + yu = x, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$；

(4) $\begin{cases} x = \mathrm{e}^u \cos v, \\ y = \mathrm{e}^u \sin v, \\ z = uv, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.