

习题 4.4

1. 求下列函数的单调区间:

- (1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$; (2) $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$;
 (3) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; (4) $y = 2x^2 - \ln x$;
 (5) $y = x - 2\sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$; (6) $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2} \quad (a > 0)$.

2. 证明下列不等式:

- (1) 当 $x \neq 0$ 时, $e^x > 1+x$;
 (2) 当 $x > 0$ 时, $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$;
 (3) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x + \tan x > 2x$;
 (4) 当 $x \geq 0$ 时, $\ln(1+x) \geq \frac{\arctan x}{1+x}$;
 (5) 当 $0 < x < 1$ 时, $xe^{-x} > \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$;
 (6) 设 $a > \ln 2 - 1$ 为常数, 当 $x > 0$ 时, $e^x > x^2 - 2ax + 1$.

3. 设函数 $f(x) \in C[0, +\infty)$, 且满足 $f(0) = 0$ 和 $f'(x)$ 递增, 证明: 函数 $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内递增.

4. 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{x \ln x}{1-x}, & x > 0, x \neq 1, \\ -1, & x = 1. \end{cases}$$

试证: $f(x)$ 在定义域内连续, 在 $(0,1)$ 内递减, 且 $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

5. 求下列各函数的极值:

- (1) $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x \quad (a > 0)$; (2) $y = x^2(a-x)^2 \quad (a > 0)$;
 (3) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$; (4) $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;
 (5) $y = \sqrt[3]{(x^2-a^2)^2} \quad (a > 0)$; (6) $y = e^x \sin x$.

6. 利用二阶导数求下列函数的极值:

- (1) $y = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$; (2) $y = \frac{10}{1+\sin^2 x}$;
 (3) $y = xe^{-x}$; (4) $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$;
 (5) $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

7. 设 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 y^2 + y = 1 \quad (y > 0)$ 确定的隐函数, 求 $y(x)$ 的极值.

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ x+1, & x \leq 0. \end{cases}$ 求 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的极值.
9. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的某个邻域连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-e^{-x^2}} = 1$, 证明: $f(x)$ 在 $x=0$ 处取到极小值.
10. 求下列函数在指定区间上的最大值和最小值:
- (1) $y = x^4 - 2x^2 + 5$ 在 $[-2, 2]$ 上; (2) $y = x + 2\sqrt{x}$ 在 $[0, 4]$ 上;
- (3) $y = \arctan \frac{1-x}{1+x}$ 在 $[0, 1]$ 上; (4) $y = x^2 - \frac{54}{x}$, $(-\infty, 0)$;
- (5) $y = |4x^3 - 18x + 27|$ 在 $[0, 2]$ 上; (6) $y = \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{15}{4}, & x \leq 1, \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上.
11. 试求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 且面积最大的矩形的边长.
12. 从圆上截下中心角为 α 的扇形卷成一圆锥, 问当 α 为何值时, 所得圆锥的体积最大?
13. 如图 4-17 所示 A, D 分别是曲线 $y = e^x$ 和 $y = e^{-x}$ 上的点, AB 和 DC 均垂直 x 轴, 且 $|AB| : |DC| = 2 : 1$, $|AB| < 1$. 求点 B 和 C 的横坐标, 使梯形 $ABCD$ 的面积最大.
14. 重量为 P 的物体位于粗糙水平面上, 设用力把物体从原位置移动, 若物体摩擦系数为 k , 问作用力 F 对水平面的倾角 α 为多少时, 才能使所需之力为最小(见图 4-18)?

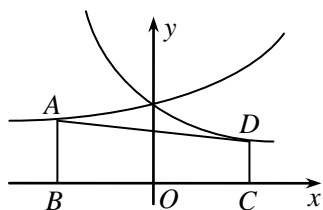


图 4-17

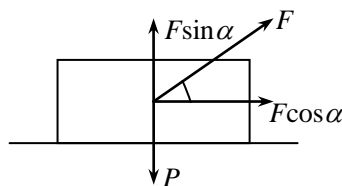


图 4-18

15. 已知某企业的总收入函数为 $R(x) = 26x - 2x^2 - 4x^3$, 总成本函数为 $C(x) = 8x + x^2$, 其中 x 表示产品的产量, 求利润函数, 边际收入函数, 边际成本函数, 以及企业获得最大利润时的产量和最大利润.
16. 一商家销售某种商品的价格满足关系 $p = 7 - 0.2x$ (万元/吨), x 为销售量(单位: 吨), 商品的成本函数是 $C = 3x + 1$ (万元).
- (1) 若每销售一吨商品, 政府要征税 t (万元), 求该商家获最大利润的销售量;
- (2) t 为何值时, 政府税收总额最大.
17. 证明方程 $a^x = bx$ ($a > 1$) 当 $b > e \ln a$ 时有两个实根; 当 $0 < b < e \ln a$ 时没有实根; 当 $b < 0$ 时有唯一实根.
18. 求下列函数图形的凹凸区间及拐点:
- (1) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$;
- (2) $y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}$ ($a > 0$); (3) $y = \ln(x^2 + 1)$;
- (4) $y = a^2 - \sqrt[3]{x-b}$; (5) $y = xe^{-x}$.
19. 设三次抛物线 $y = ax^3 + bx^2 + cx$ 有一拐点 $(1, 2)$, 且在该点切线斜率为 -1 , 求常数 a, b, c 的值.

20. 证明: 曲线 $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ 有三个拐点且位于一直线上.

21. 试求下列曲线的拐点:

(1) $x = t^2, y = 3t + t^3$;

(2) $x = \tan t, y = \sin t \cos t$.

22. 已知 $y = f'(x)$ 和 $y = g''(x)$ 的图形分别如下. 问曲线 $y = f(x)$ 和曲线 $y = g(x)$ 的拐点数分别是多少?

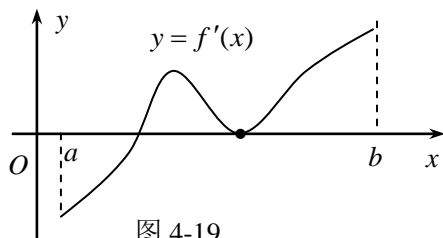


图 4-19

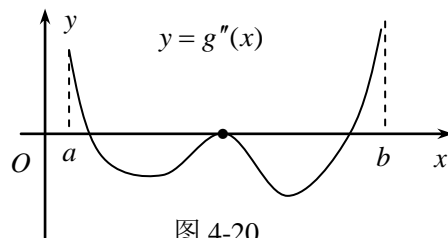


图 4-20

23. 证明下列不等式:

(1) 设常数 $p > 1$, 则当 $x \in [0, 1]$ 时, 有 $x^p + (1-x)^p \geq \frac{1}{2^{p-1}}$;

(2) 设 $a, b > 0$, $p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$;

(3) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ ($x \neq y$);

(4) $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}$ ($x > 0, y > 0, x \neq y$).

24. 设连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是上凸的, 证明: 对 $\forall l \in (0, b-a)$, 均存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $x_0 + l \in [a, b]$, 且

$$\frac{f(x_0 + l) - f(x_0)}{l} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

25. 求下列函数图形的渐近线:

(1) $y = \frac{x^2 + x}{(x-2)(x+3)}$;

(2) $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$;

(3) $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$;

(4) $y = 2x + \arctan \frac{x}{2}$.

26. 全面讨论下列函数的性态, 并描绘出它们的图形:

(1) $y = x + \frac{1}{x^2}$;

(2) $y = \frac{2x^2}{(1-x)^2}$;

(3) $y = \frac{|x| \cdot x}{1+x}$;

(4) $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$.

27. 下列各题中显示的是函数 $y = f(x)$ 的一阶和二阶导数的图形, 试根据这些图形作出过定点 P 的 $f(x)$ 的简略图.

(1)

(2)

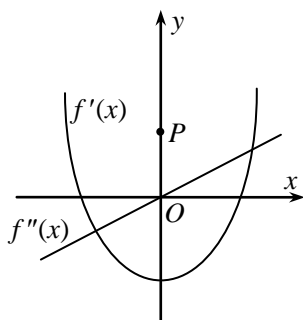


图 4-21

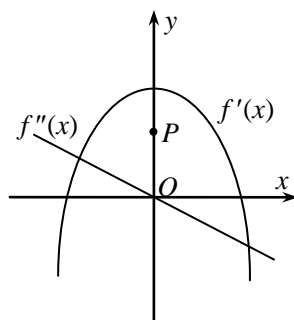


图 4-22

(3)

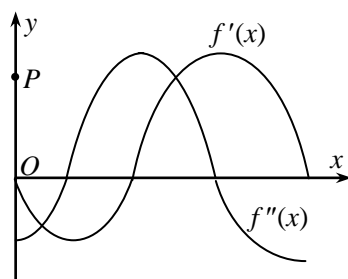


图 4-23

(4)

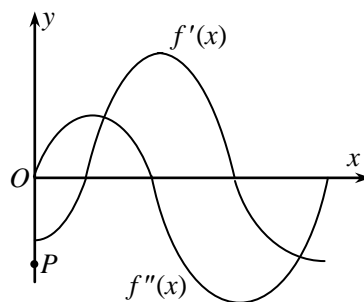


图 4-24

28. 如图是沿直线运动的质点的位置函数 $s = s(t)$ 的图形. 问大致在什么时刻, 质点的速度, 加速度为零?

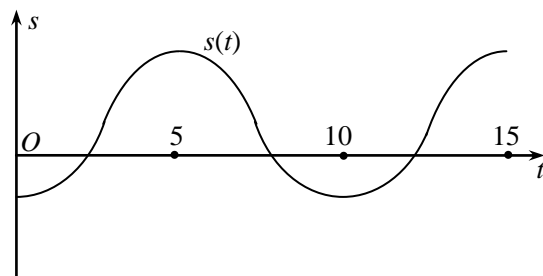


图 4-25