习题 9.3

1. 用至少三种积分次序计算积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+yz)\mathrm{d}V$，其中 $\Omega=[0,2]\times[-3,0]\times[-1,1]$.

2. 将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 化为三次积分，其中积分区域Ω分别是:

(1) $x^2+y^2+z^2\le R^2$, $z\ge 0$;

(2) 由圆柱面 $x^2+y^2=4$ 与平面 $z=0$, $z=x+y+10$ 所围成的闭区域;

(3) $x^2+y^2+z^2\le 2$, $z\ge x^2+y^2$;

(4) 由双曲抛物面 $z=xy$ 及平面 $x+y-1=0$, $z=0$ 所围成的闭区域.

3. 计算下列三重积分.

(1) $\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}V$，其中 Ω 是位于平面 $z=x+2y$ 下方，xOy 平面上由 $y=x^2$，$y=0$ 及 $x=1$ 围成的平面区域上方的闭区域;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{x+y+z}\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与 3 个坐标面围成的闭区域;

(3) $\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}V$，其中 Ω 是半空间 $z\ge 0$ 上平面 $y=0, y=z$ 与柱面 $x^2+z^2=1$ 围成的闭区域;

(4) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{xyz}{1+x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x\ge 0,z\ge 0,x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$;

(5) $\iiint\limits_{\Omega}\sin z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=\pi$ 围成;

(6) $\iiint\limits_{\Omega}x\sin(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le\sqrt{y},0\le z\le\dfrac{\pi}{2}-y\right\}$;

(7) $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是第一卦限中由曲面 $y^2+z^2=9$ 与平面 $x=0, y=3x$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域;

(8) $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由抛物面 $x=4y^2+4z^2$ 与平面 $x=4$ 围成的闭区域.

4. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 4,-1\le z\le 2\}$;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^3+xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由柱面 $x^2+(y-1)^2=1$ 及平面 $z=0, z=2$ 所围成;

(3) $\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 1\le y^2+z^2\le 4, 0\le x\le z+2\}$;

(4) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le z\le 9-x^2-y^2\}$.

5. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}V$，其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$;

(2) $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{e}^{(x^2+y^2+z^2)^2}\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是第一卦限中球面$x^2+y^2+z^2=1$与球面$x^2+y^2+z^2=4$之间的部分；

(3) $\iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是单位球体在第 5 卦限部分；

(4) $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{z\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是上半单位球体$0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$；

(5) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是锥面$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$上方，上半球面$\rho=2$下方部分;

(6) $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是两个球体$x^2+y^2+z^2\le R^2$与$x^2+y^2+z^2\le 2Rz$的公共部分.

6. 选择适当方法计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega} 2z\mathrm{d}V$，其中$\Omega$由柱面$x^2+y^2=8$，椭圆锥面$z=\sqrt{x^2+2y^2}$及平面$z=0$所围成；

(2) $\iiint\limits_{\Omega} (x+y)\mathrm{d}V$，其中$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,1\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\}$；

(3) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$，其中$\Omega$由曲面$2z=x^2+y^2$，$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$及平面$z=0$所围成；

(4) $\iiint\limits_{\Omega} (\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}V$，其中$\Omega$由曲面$z^2=x^2+y^2$，$z^2=3x^2+3y^2$及平面$z=1$所围成；

(5) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^{3/2}}\mathrm{d}V$，其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1\right.\right\}$；

(6) $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\left|(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2\right.\right\}$.

7. 选择适当坐标计算下列三次积分：

(1) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{3/2}\mathrm{d}z$；

(2) $\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}}xyz\mathrm{d}z$；

(3) $\int_{-3}^{3}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}z$；

(4) $\int_{0}^{3}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z$.