习题 5.3

1. 计算下列函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

（1） $y=\int_0^x \sin(t^2+1)\mathrm{d}t$；（2） $y=\int_x^0 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$；

（3） $y=\int_0^{x^2} \arctan t\mathrm{d}t$；（4） $y=\int_{\cos x}^{\sin x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$；

（5） $y=\left(\int_0^{\sqrt{x}} \ln(1+t^2)\mathrm{d}t\right)^2$；（6） $y=\int_0^{2x} x(t-1)^2\mathrm{d}t$

（7） $\int_0^{xy} \mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^y \sin t\mathrm{d}t=0$；（8） $\begin{cases} x=\int_1^t \ln u\mathrm{d}u, \\ y=\int_1^t u\ln u\mathrm{d}u. \end{cases}$

2. 计算下列极限

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$；（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t}{\sin x^3}$；

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\mathrm{d}t}$；（4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t)\mathrm{d}t}{\ln\dfrac{\sin x}{x}}$.

3. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 当 0\le x<1, \\ x-2, & 当 1\le x\le 2. \end{cases}$$

求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,2]$ 上的表达式.

4. 设函数 $f\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$（$x\in[a,b]$），记

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \quad （x\in[a,b]）.$$

证明：（1） $F'(x)\ge 2$；

（2）方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

5. 设函数 $f\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$（$x\in[a,b]$）. 证明：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$