知识回顾

积分学	定积分	二重积分	三重积分	曲线积分	曲面积分
积分域	区 间	平面域	空间域	曲线弧	曲面域

定义?

分类?

计算?

计算:

重积分 $\xrightarrow{\text{转化为}}$ 定积分

曲线积分（两类）

- 利用积分弧的方程化为定积分
- 利用格林公式
- 利用积分与路径无关的条件（四个）

第四节 对面积的曲面积分

一、对面积的曲面积分的概念与性质

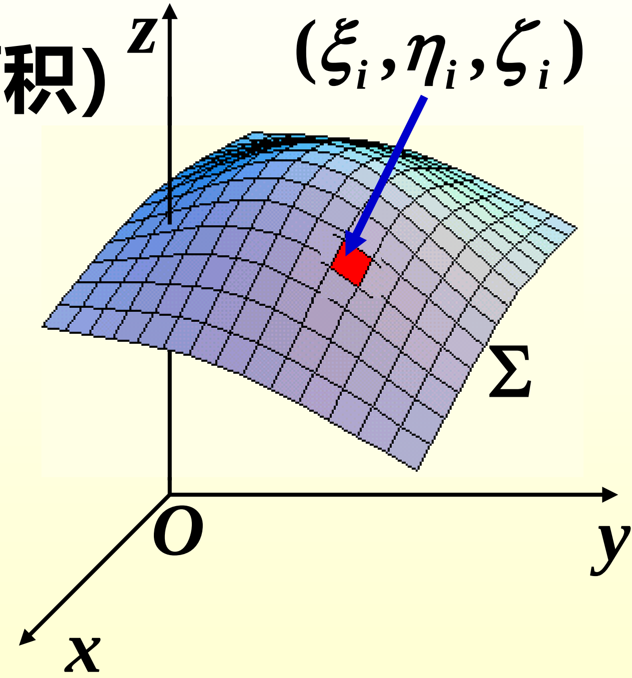
二、对面积的曲面积分的计算法

一、对面积的曲面积分的概念与性质

引例: 设曲面形构件具有连续面密度 $\rho(x,y,z)$,求质量 M.

(1)将曲面Σ**任意分割**成n小块:

$\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_i,\cdots,\Delta S_n$. ($\Delta S_i$也表其面积)



(2)任取点 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$,

$$\Delta M_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

(3) **求和** $M=\sum_{i=1}^{n}\Delta M_i\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

(4) **取极限** 令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta S_i\text{的直径}\}$

$$M=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

定义: 设 Σ 为光滑曲面, $f(x, y, z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数, 若对Σ 做**任意分割**和局部区域**任意取点**, "乘积和式极限"

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k \xlongequal{\text{记作}} \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

都存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上**对面积的曲面积分**或**第一类曲面积分**. 其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

物理意义

据此定义, 曲面形构件的质量为 $M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$

曲面面积为 $S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$

几何意义

注: 给出了求曲面面积的另一方法.

对面积的曲面积分与对弧长的曲线积分性质类似.

- **积分的存在性.** 若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续,

则对面积的曲面积分存在.

- **对积分域的可加性.** 若 Σ 是分片光滑的, 例如分成两片光滑曲面 Σ_1, Σ_2, 则有

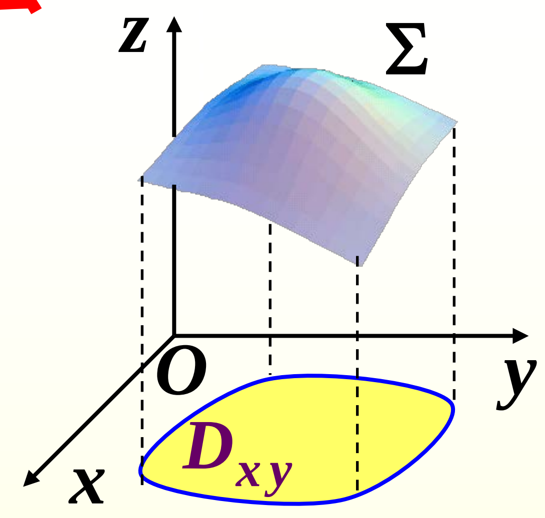
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

- **线性性质.** 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\iint_{\Sigma}\left[k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)\right]\mathrm{d}S$$

$$= k_1 \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S \pm k_2 \iint_{\Sigma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

二、对面积的曲面积分的计算法



定理: 设有光滑曲面 $\Sigma: z = z(x, y)$, Σ 在 xoy 面上的投影为 D_{xy}, $z = z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有连续偏导数, $f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S$ 存在, 且有

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, \underline{z})\underline{\mathrm{d}S}$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^{\ 2}(x, y) + z_y^{\ 2}(x, y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

基本思路:投影法变成二重积分

注 确定曲面方程、将曲面投影是关键

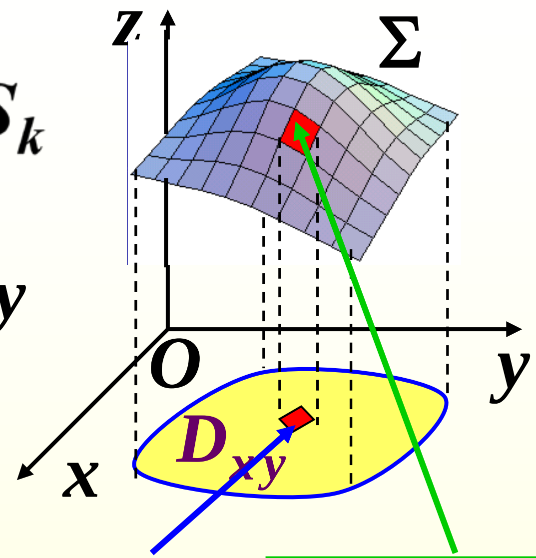
证明: 由定义知

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

而 $\Delta S_k = \iint_{(\Delta\sigma_k)_{xy}} \sqrt{1+z_x^{\ 2}(x,y)+z_y^{\ 2}(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \sqrt{1+z_x^{\ 2}(\xi_k',\eta_k')+z_y^{\ 2}(\xi_k',\eta_k')}(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

二重积分的中值定理



$\boxed{(\Delta\sigma_k)_{xy}}$ $\boxed{(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)}$

$$\therefore \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\underline{\xi_k,\eta_k}))\cdot \sqrt{1+z_x^{\ 2}(\underline{\xi_k',\eta_k'})+z_y^{\ 2}(\underline{\xi_k',\eta_k'})}(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

(Σ 光滑)

$$\therefore \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot \sqrt{1+z_x^{\,2}(\xi_k',\eta_k')+z_y^{\,2}(\xi_k',\eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot \sqrt{1+z_x^{\,2}(\xi_k,\eta_k)+z_y^{\,2}(\xi_k,\eta_k)}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,\ z(x,y))\sqrt{1+z_x^{\,2}(x,y)+z_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

说明: 如果曲面方程为 $\Sigma: x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$

则有 $\boxed{\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y{}^2+x_z{}^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$

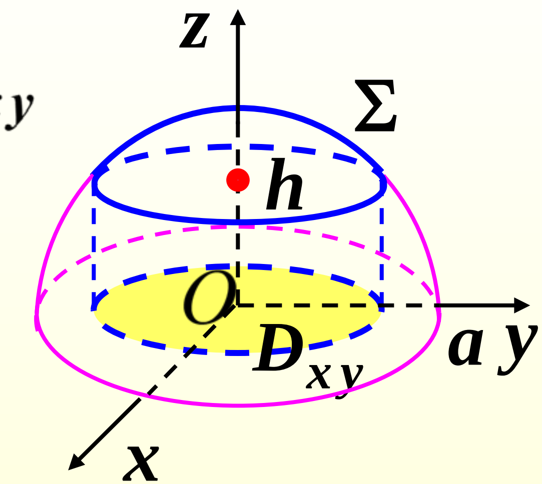
若为 $\Sigma: y = y(x,z), (x,z) \in D_{xz}$

则有 $\boxed{\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x{}^2+y_z{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z}$

$\Sigma: z = z(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$，其中$\Sigma$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 截出的顶部.



解 $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,,(x,y)\in D_{xy}$

$$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r\,\mathrm{d}r}{a^2-r^2}$$

$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)\right]_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

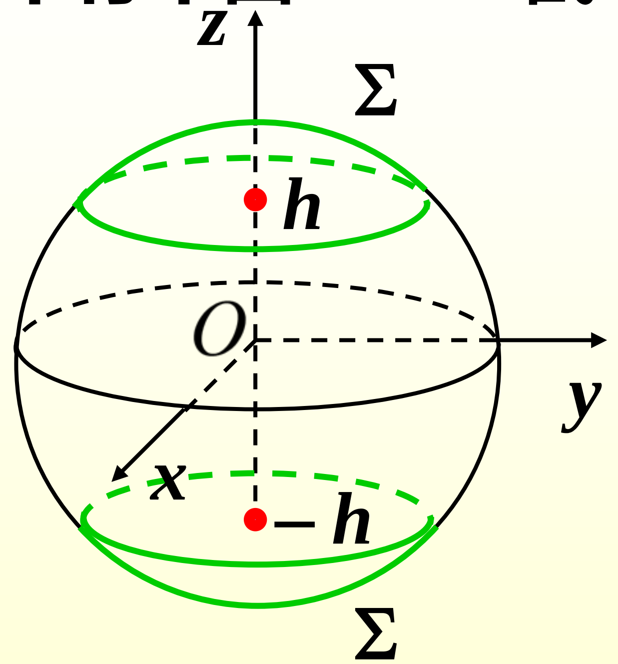
上页 下页

思考:

若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分，则

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=(\quad 0 \quad)$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{|z|}=(\quad 4\pi a\ln\frac{a}{h} \quad)$$



练习: 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，试计算:

$(1)\ I_1=\oiint_{\Sigma}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dS;\qquad (2)\ I_2=\oiint_{\Sigma}(x+y+z)dS.$

（1）由于积分曲面关于xOy面对称，被积函数

$$f(x,y,-z)=\frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2}}=-f(x,y,z)$$

（关于z的奇函数）

$$\therefore I_1=\oiint_{\Sigma}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dS=0.$$

（2）由于积分曲面关于原点对称，且

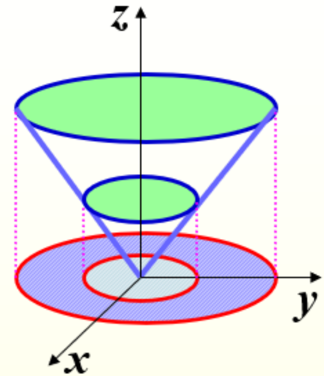
$$f(-x,-y,-z)=-x-y-z=-f(x,y,z),$$

$$\therefore \oiint_{\Sigma}(x+y+z)dS=0$$

自己总结用对称性计算曲面积分的方法！！

上页　下页

练习计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，$\Sigma$是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 界于平面 $z=1$ 及 $z=2$ 之间的部分.



解 $D_{xy}: 1 \le x^2+y^2 \le 4$

$$\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$$

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint\limits_{\Sigma}zdS$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2[r\cos\theta+r\sin\theta+r]rdr$$

$$=\frac{14\sqrt{2}}{3}\pi$$

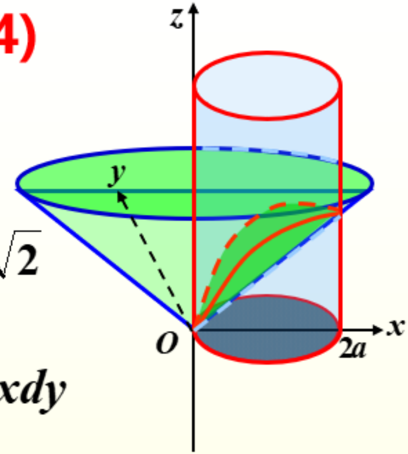
可以用曲面积分的对称吗?

由于积分区域 D_{xy} 关于原点对称，且 $f(-x,-y)=-(x+y)=-f(x,y)$

$$\therefore \iint\limits_{D_{xy}}(x+y)dxdy=0$$

上页 下页

例2 $I=\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$，$\Sigma$为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ **所截得部分.** **$P_{223}6(4)$**



解 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$, $D_{xy}: x^2+y^2\le 2ax$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$$

$$\therefore\ I=\iint\limits_{D_{xy}}(\underline{xy+y\sqrt{x^2+y^2}}+x\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}dxdy$$

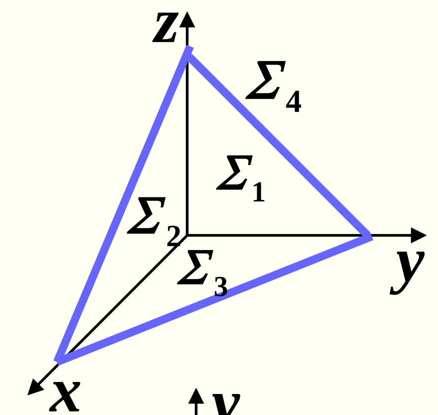
$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\left(r^2\sin\theta\cos\theta+r^2\sin\theta+r^2\cos\theta\right)rdr$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta\right)\cdot\frac{16a^4}{4}\cos^4\theta\, d\theta=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$$

也可以用对称性$\iint\limits_{D_{xy}}(xy+y\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}dxdy=0$

上页 下页

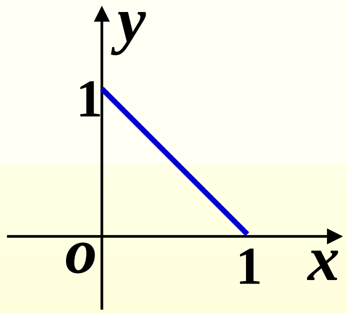
例3 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.



解 设 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4$ 分别表示Σ在平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 上的部分，则

$$\text{原式}=\left(\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3}+\iint\limits_{\Sigma_4}\right)xyz\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$



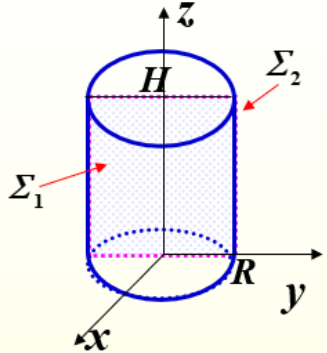
$$\Sigma_4: z=1-x-y,\ (x,y)\in D_{xy}:\begin{cases}0\le y\le 1-x\\ 0\le x\le 1\end{cases}$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}/120$$

例4 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是介于平面

$z=0, z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

$P_{250}4(1)$



解1 $\Sigma_1: x=\sqrt{R^2-y^2}$, $\Sigma_2: x=-\sqrt{R^2-y^2}$

$$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2,$$

$$D_{yz}: -R\le y\le R,\quad 0\le z\le h$$

$$I=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{1}{R^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz=2R\int_{-R}^{R}\frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}}\int_0^H\frac{dz}{R^2+z^2}$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$

例4 计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$， 其中 Σ 是介于平面 $z=0, z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

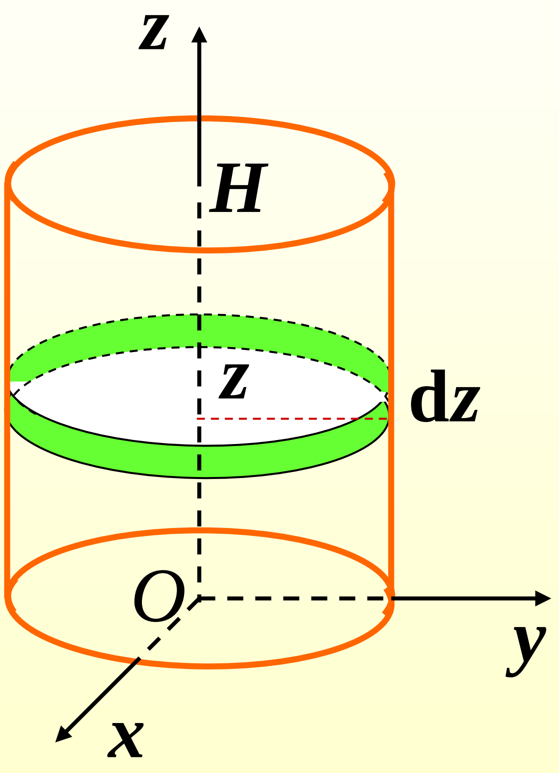
解2 取曲面面积元素

$$\mathrm{d}S=2\pi R\mathrm{d}z$$

则

$$I=\int_0^H\frac{2\pi R\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$



上页 下页

思考 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2 dS$，其中$\Sigma$是介于平面 $z=0, z=H$之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

解 由积分曲面Σ的方程知，x与y对于积分曲面的地位相同，

即 $\iint\limits_{\Sigma} x^2 dS=\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS.$ **轮换对称性**

所以 $I=\dfrac{1}{2}\left(\iint\limits_{\Sigma} x^2 dS+\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS\right)=\dfrac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma} R^2 dS=\frac{1}{2}R^2\iint\limits_{\Sigma} dS=\frac{1}{2}R^2\cdot 2\pi RH=\pi R^3 H$$

曲面方程代入被积函数

内容小结

1. 定义: $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2. 计算: 设$\Sigma: z = z(x,y), (x,y)\in D_{xy}$, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(曲面的其他两种情况类似)

备用题 1 已知曲面壳 $z = 3-(x^2+y^2)$ 的面密度 $\mu = x^2+y^2+z$, 求此曲面壳在平面 z =1以上部分Σ的质量 M .

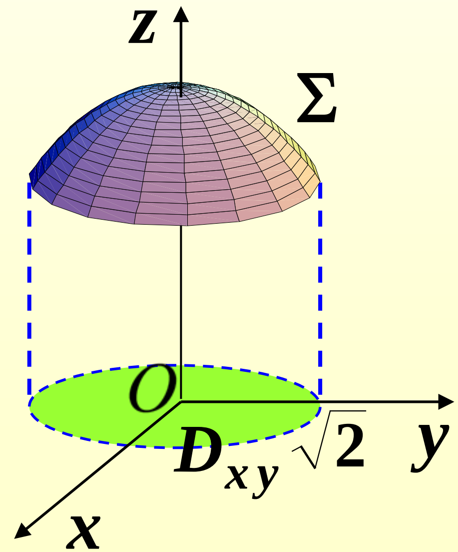
解 Σ在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2 \le 2$, 故

$$M = \iint_{\Sigma} \mu \, \mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} 3\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

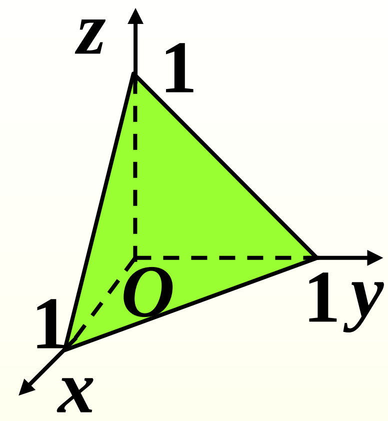
$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= 6\pi\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(1+4r^2)$$

$$= 13\pi$$



2 设 Σ 是四面体 $x+y+z\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ 的表面, 计算 $I=\oiint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S.$



解 在四面体的四个面上

平面方程	$\mathrm{d}S$	投影域
$z=1-x-y$	$\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$D_{xy}: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$
$z=0$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	同上
$y=0$	$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$	$D_{zx}: 0\le z\le 1,\ 0\le x\le 1-z$
$x=0$	$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$D_{yz}: 0\le z\le 1,\ 0\le y\le 1-z$

$$\therefore \quad I=\oiint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S$$

$$=(\sqrt{3}+1)\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}\,y+$$

$$+\int_0^1 \mathrm{d}\,z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 \mathrm{d}\,z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$$

平面方程	$\mathrm{d}S$	投影域
$z=1-x-y$	$\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$D_{xy}: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$
$z=0$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	同上
$y=0$	$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$	$D_{zx}: 0\le z\le 1,\ 0\le x\le 1-z$
$x=0$	$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$D_{yz}: 0\le z\le 1,\ 0\le y\le 1-z$

结束 目录 上页 下页

第五节 对坐标的曲面积分

一、有向曲面及曲面元素的投影

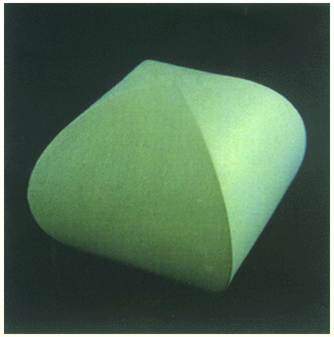
二、 对坐标的曲面积分的概念与性质

三、对坐标的曲面积分的计算法

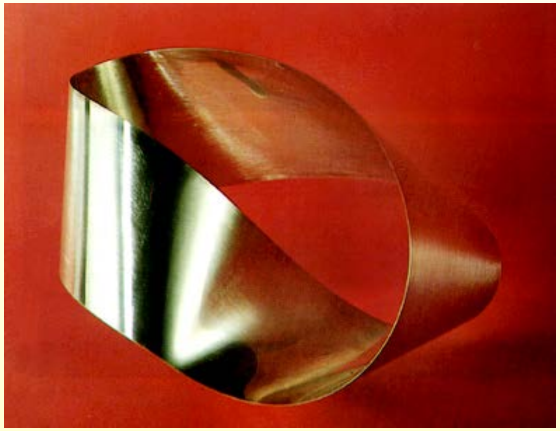
四、两类曲面积分的联系

一、有向曲面及曲面元素的投影

- 曲面分类 $\begin{cases}\text{双侧曲面}\\ \text{单侧曲面}\end{cases}$

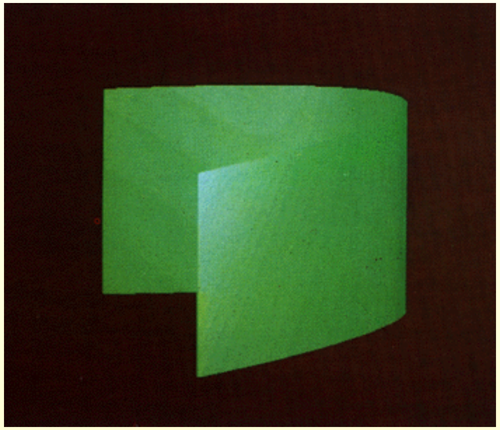


曲面分内侧和外侧

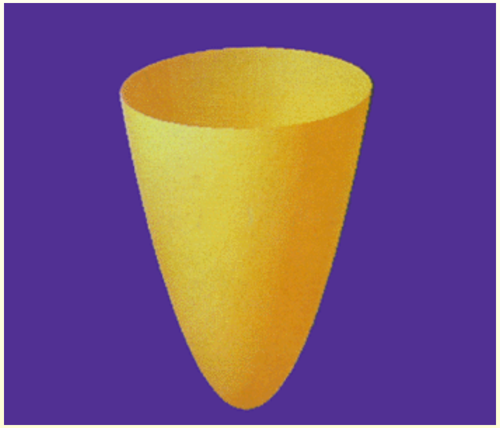


莫比乌斯带

(单侧曲面的典型)



曲面分左侧和右侧



曲面分上侧和下侧

• 指定了侧的曲面叫**有向曲面**, 其方向用**法向量指向**表示 :

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧	>0 为右侧	>0 为上侧	外侧
	<0 为后侧	<0 为左侧	<0 为下侧	内侧

• 设 Σ 为有向曲面, 其面元 ΔS 在 xOy 面上的投影记为 $(\Delta S)_{xy}$, $(\Delta S)_{xy}$ 的面积为 $(\Delta\sigma)_{xy} \geq 0$, 则规定

$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xy}, & 当\cos\gamma > 0时 \\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & 当\cos\gamma < 0时 \\ 0, & 当\cos\gamma \equiv 0时 \end{cases}$$

类似可规定

$(\Delta S)_{yz}$, $(\Delta S)_{zx}$

二、 对坐标的曲面积分的概念与性质

1. 引例 设稳定流动的不可压缩流体的速度场为

$$\vec{v} = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

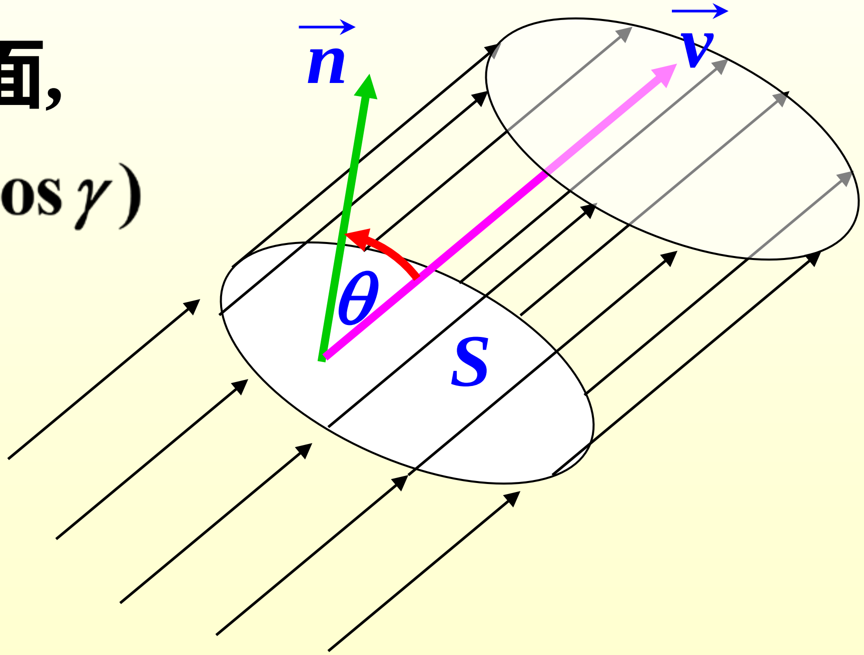
求单位时间流过有向曲面Σ的流量Φ.

分析: 若Σ是面积为S 的平面,

法向量: $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

流速为常向量: $\vec{v}$

则流量

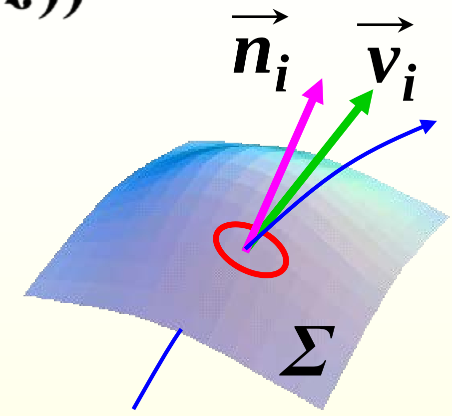


$$\Phi = S \cdot |\vec{v}| \cos\theta$$

$$= S\,\vec{v} \cdot \vec{n}$$

对一般的有向曲面Σ,对稳定流动的不可压缩流体的速度场 $\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

用"分割, 近似, 求和, 取极限"



进行分析可得 $\Phi=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{v}_i\cdot\vec{n}_i\,\Delta S_i$

设 $\vec{n}_i=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$ ，则

$$\Phi=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\big]\Delta S_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\big]$$

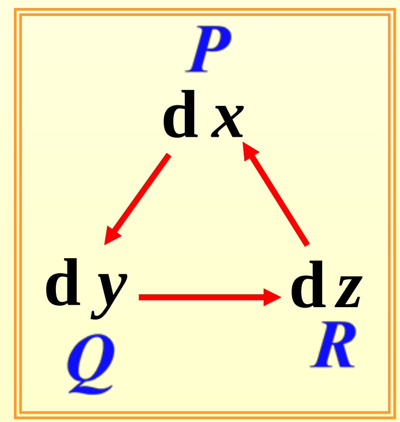
7页 6页 上页 下页

2. 定义: 设Σ为光滑的有向曲面, 在Σ上定义了一个向量场 $\vec{A}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, 若对$\Sigma$的**任意分割**和在局部面元上**任意取点**, 下列极限都存在

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\Big]$$

则称此极限为向量场 $\vec{A}$ 在有向曲面上**对坐标的曲面积分**, 或**第二类曲面积分**. 记作

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



P, Q, R 叫做**被积函数**; Σ 叫做**积分曲面**.

$\iint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 称为P 在有向曲面Σ上对 y, z 的曲面积分;

$\iint\limits_{\Sigma} Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 称为Q 在有向曲面Σ上对 z, x 的曲面积分;

$\iint\limits_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 称为R 在有向曲面Σ上对 x, y 的曲面积分.

引例中, 流过有向曲面 Σ 的流体的流量为

$$\Phi = \iint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若记 Σ 正侧的单位法向量为 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

令 $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$

$\vec{A} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

则对坐标的曲面积分也常写成如下向量形式

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

3. 性质

(1) 若 $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{k} \Sigma_i$, 且 Σ_i 之间无公共内点, 则

$$\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \sum_{i=1}^{k} \iint_{\Sigma_i} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

(2) 用Σ^- 表示 Σ的反向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

三、对坐标的曲面积分的计算法

定理: 设光滑曲面 $\Sigma: z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$ 取上侧, $R(x,y,z)$ 是 Σ 上的连续函数, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

基本思路:投影法变成二重积分

证:

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$\because$ Σ 取上侧, $\therefore (\Delta S_i)_{xy} = (\Delta\sigma_i)_{xy}$

$\zeta_i = z(\xi_i,\eta_i)$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\,(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

说明: 如果积分曲面 Σ 取下侧, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- 若 $\Sigma: x = x(y,z),\ (y,z)\in D_{yz}$, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

(前正后负)

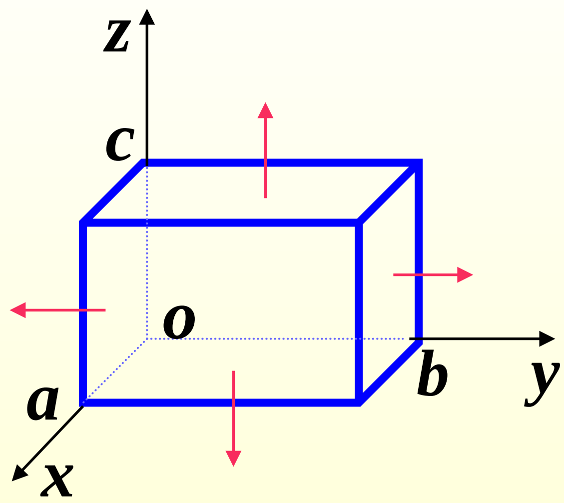
- 若 $\Sigma: y = y(z,x),\ (z,x)\in D_{zx}$, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

(右正左负)

例1 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，$\Sigma$ 是长方体 Ω 的整个表面的外侧，$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}$.

解 将有向曲面 Σ 分成六部分:



$\Sigma_1: z = c \quad (0 \le x \le a, 0 \le y \le b)$ 取上侧;

$\Sigma_2: z = 0 \quad (0 \le x \le a, 0 \le y \le b)$ 取下侧;

$\Sigma_3: x = a \quad (0 \le z \le c, 0 \le y \le b)$ 取前侧;

$\Sigma_4: x = 0 \quad (0 \le z \le c, 0 \le y \le b)$ 取后侧;

$\Sigma_5: y = b \quad (0 \le x \le a, 0 \le z \le c)$ 取右侧;

$\Sigma_6: y = 0 \quad (0 \le x \le a, 0 \le z \le c)$ 取左侧.

$$\therefore \iint_{\Sigma} z^2 dxdy = \sum_{i=1}^{6} \iint_{\Sigma_i} z^2 dxdy = \iint_{\Sigma_1} z^2 dxdy + \iint_{\Sigma_2} z^2 dxdy$$

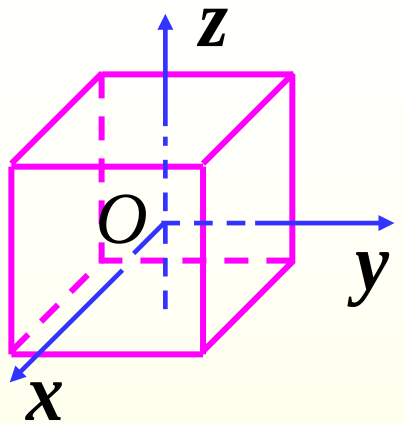
$$= \iint_{D_{xy}} c^2 dxdy - \iint_{D_{xy}} 0 dxdy = abc^2$$

同理, $\iint_{\Sigma} x^2 dydz = a^2bc,\quad \iint_{\Sigma} y^2 dzdx = ab^2c,$

$\therefore$ 原式$= (a+b+c)abc$

练习 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中Σ是以原点为中心, 边长为 a 的正立方体的整个表面的外侧.



解 利用对称性.

原式$=3\iint\limits_{\Sigma}(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Σ 的顶部 $\Sigma_1: z=\frac{a}{2}\ (|x|\le\frac{a}{2}, |y|\le\frac{a}{2})$ 取上侧

Σ 的底部 $\Sigma_2: z=-\frac{a}{2}\ (|x|\le\frac{a}{2}, |y|\le\frac{a}{2})$ 取下侧

$$=3\left[\iint\limits_{\Sigma_1}(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2}(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

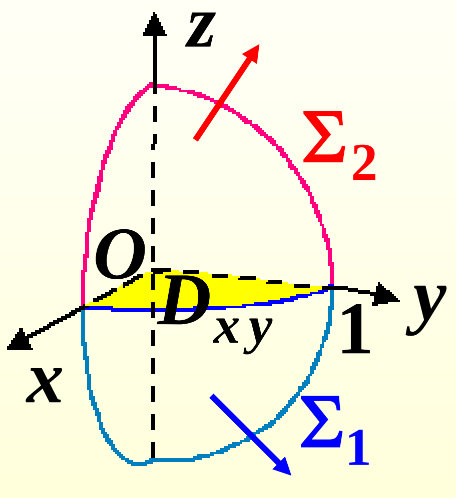
$$=3\left[\iint\limits_{D_{xy}}(\frac{a}{2}+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}}(-\frac{a}{2}+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=3a\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3a^3$$

例2 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz\,dx\,dy$，其中$\Sigma$为球面 $x^2+y^2+z^2=1$外侧在第一和第八卦限部分.

思考: 下述解法是否正确:

根据对称性 $\iint_{\Sigma} xyz\,dx\,dy \cancel{=} 0$



解 把Σ分为上下两部分

$$\begin{cases} \Sigma_1: z=-\sqrt{1-x^2-y^2} \\ \Sigma_2: z=\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

$$(x,y)\in D_{xy}: \begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

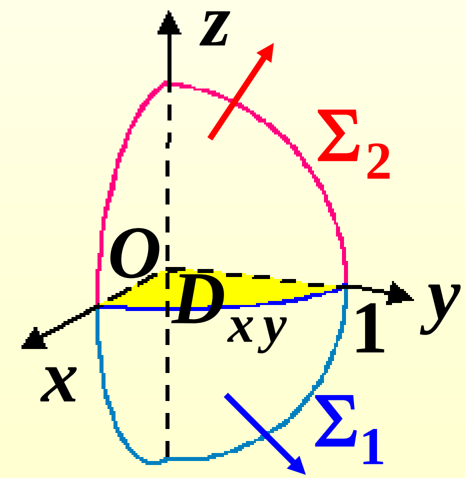
$$= -\iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}\; r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

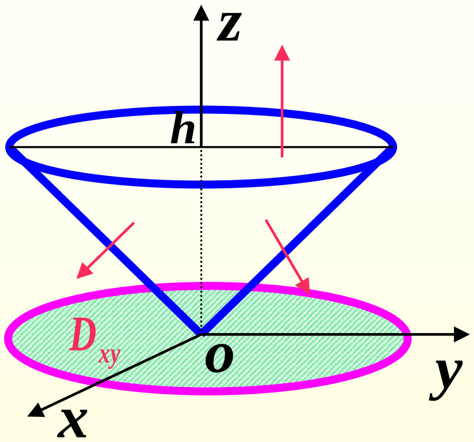
$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= 2/15$$



例3 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$,其中 Σ 为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=h(h>0)$所围区域的边界曲面的外侧.

解 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$,



$\Sigma_1: z=h \quad (x^2+y^2\le h^2)$ 取上侧;

$\Sigma_2: z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le h)$ 取外侧.

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

$$=0+0+\iint\limits_{D_{xy}}(x-y)dxdy=0$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}(y-z)dydz=\iint\limits_{\Sigma_{2前}}(y-z)dydz+\iint\limits_{\Sigma_{2后}}(y-z)dydz$$

$$\iint_{\Sigma_2}(y-z)dydz = \iint_{\Sigma_{2前}}(y-z)dydz + \iint_{\Sigma_{2后}}(y-z)dydz$$

$$= \iint_{D_{yz}}(y-z)dydz - \iint_{D_{yz}}(y-z)dydz = 0$$

$$\iint_{\Sigma_2}(z-x)dzdx = \iint_{\Sigma_{2右}}(z-x)dzdx + \iint_{\Sigma_{2左}}(z-x)dzdx = 0$$

$$\iint_{\Sigma_2}(x-y)dxdy = -\iint_{D_{xy}}(x-y)dxdy = 0.$$

$$\therefore I = 0$$

小结　第二类曲面积分的计算方法:

- $$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

  (上正下负)

- $$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

  (前正后负)

- $$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

  (右正左负)

知识回顾 **第一类曲面积分的计算方法:**

$$\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^{\,2}(x,y)+z_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\Sigma: \quad x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y^{\,2}+x_z^{\,2}}\,dydz$$

$$\Sigma: \quad y = y(x,z), (x,z) \in D_{xz}$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xz}} f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+y_x^{\,2}+y_z^{\,2}}\,dxdz$$

四、两类曲面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[\,P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

$$+ R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\,\Big]$$

曲面的方向用法向量的方向余弦刻画

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[\,P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i$$

$$+ R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\,\Big]\Delta S_i$$

$$= \iint_{\Sigma}\left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

向量形式

$$\iint_\Sigma \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

$$= \iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

即 $dydz = \cos\alpha\, dS$, $dzdx = \cos\beta\, dS$, $dxdy = \cos\gamma\, dS$,

$$dydz = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy, \quad dzdx = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy,$$

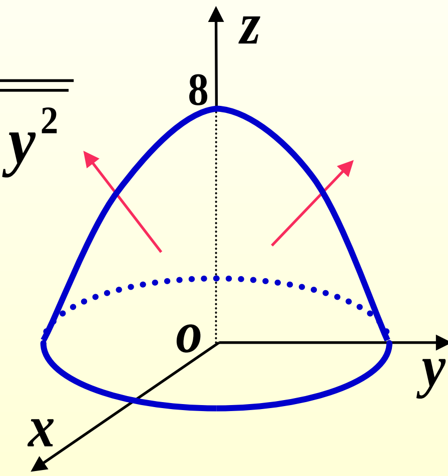
$$\boxed{\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_\Sigma \left(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + R\right)dxdy}$$

例4 把对坐标的曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

化成对面积的曲面积分. Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方部分的上侧. $P_{232}4(2)$

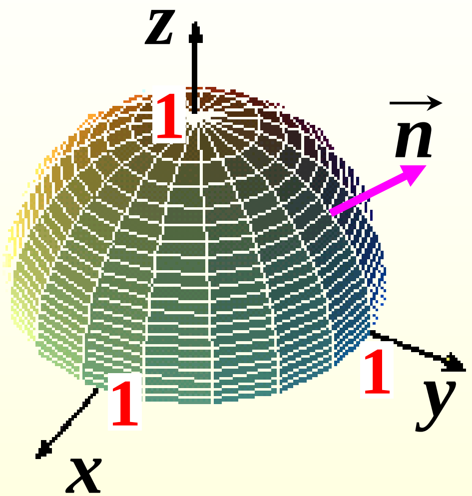
解 $\vec{n}=(2x,2y,1)$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$



$$\cos\alpha=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\cos\beta=\frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

$$\therefore I=\iint_{\Sigma}[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]dS=\iint_{\Sigma}\frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS$$

例5 设 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}, \gamma$ 是其外法线与 z 轴正向夹成的锐角, 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$.



解 $$I=\iint\limits_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

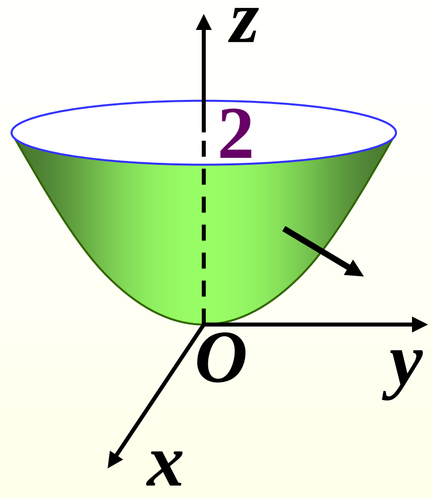
$$=\iint\limits_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

例6 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$ 是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.



解 利用两类曲面积分的联系, 有

$$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

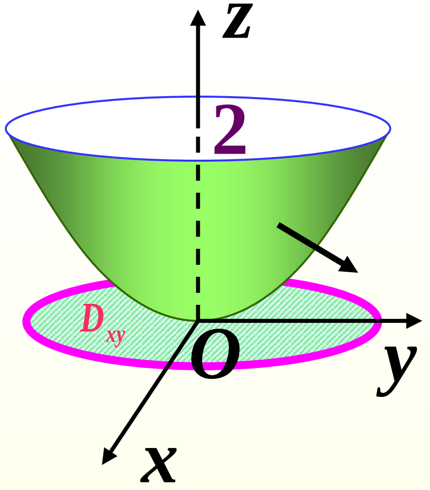
$$=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$\therefore \text{原式}=\iint\limits_{\Sigma}\left[(z^2+x)(-x)-z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$代入,得



原式 $=-\iint\limits_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right](-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

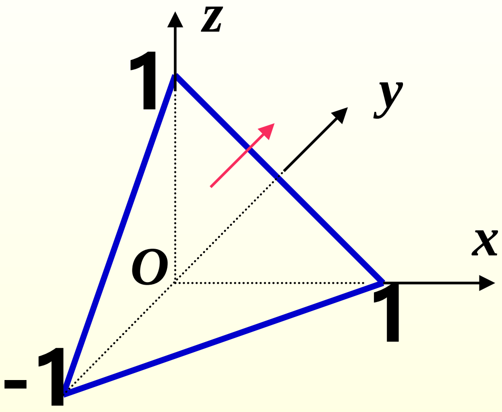
$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2)r\,\mathrm{d}r$$

$$=8\pi$$

练习 $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$

其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数, Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分上侧. $P_{232}3(3)$



解 $\Sigma: x-y+z-1=0,\ \vec{n}=(1,-1,1)$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{3}},$$

原式

$$=\iint\limits_{\Sigma}\left\{[f(x,y,z)+x]\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+[2f(x,y,z)+y]\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+[f(x,y,z)+z]\right\}dxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x-2f(x,y,z)-y+f(x,y,z)+z]dxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\frac{1}{2}$$

内容小结

1. 两类曲面积分及其联系

定义:

- $$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

- $$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\Big]$$

性质:

$$\iint_{\Sigma^-} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

联系:

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

思考:

两类曲面积分的定义一个与 Σ 的方向无关, 一个与 Σ 的方向有关, 上述联系公式是否矛盾?

上页 下页

2. 常用计算公式及方法

面积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类 (对面积)}\\ \text{第二类 (对坐标)}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{转化}}$ 二重积分

(1) 统一积分变量 —— 代入曲面方程

(方程不同时分片积分)

(2) 积分元素投影 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类：面积投影}\\ \text{第二类：有向投影}\end{array}\right.$

(3) 确定积分域 —— 把曲面积分域投影到相关坐标面

注： 二重积分是第一类曲面积分的特殊情况.

当 $\Sigma : z = z(x, y)\,,(x, y) \in D_{xy}$ 时,

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(上侧取“+”, 下侧取“−”)

类似可考虑在 yOz 面及 zOx 面上的二重积分转化公式.

备用题 求 $I=\oiint_{\Sigma}\left(\dfrac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\dfrac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}\right)$, 其中

$$\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ 取外侧.

解:

$$\oiint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}=\frac{2}{c}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意±号

$$D_{xy}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$

$$x=a\,r\cos\theta,\ y=b\,r\sin\theta,\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{c}ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r=\frac{1}{c^2}\cdot 4\pi abc$$

结束 目录 上页 下页

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z} = \frac{1}{c^2} \cdot 4\pi\, abc$$

利用轮换对称性

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x} = \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi\, abc$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y} = \frac{1}{b^2} \cdot 4\pi\, abc$$

$$\therefore \quad I = 4\pi\, abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

第六节
高斯公式 *通量与散度

推广

Green 公式 $\xrightarrow{\text{推广}}$ Gauss 公式

一、高斯公式

*二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

*三、通量与散度

一、高斯 (Gauss) 公式

定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, Σ 的方向**取外侧**, 函数 P, Q, R 在 Ω 上有一阶连续偏导数，则有

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_{\Sigma} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy}$$

或 $$\boxed{\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS}$$

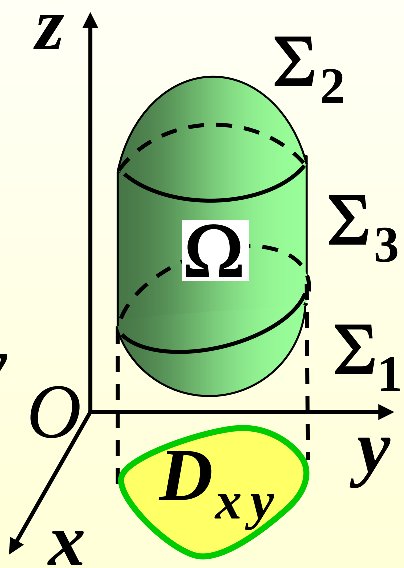
其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 Σ 上点 (x,y,z) 处法向量的方向余弦.

下面先证: $\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\Sigma}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

证明: 设 $\Omega: z_1(x,y)\le z(x,y)\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$

称为XY-型区域，$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3,\ \Sigma_1: z=z_1(x,y),$

$\Sigma_2: z=z_2(x,y),$ 则



$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z$$

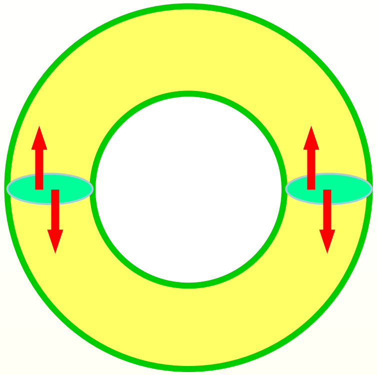
$$=\iint\limits_{D_{xy}}\{R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oiint\limits_{\Sigma}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\Big(\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_3}\Big)R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

定理1 上页 下页

所以 $$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\Sigma}R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



若 Ω 不是 XY–型区域，则可引进辅助面将其分割成若干个 XY–型区域, 在辅助面正反两侧面积分正负抵消, 故上式仍成立 .

类似可证 $$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\Sigma}Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

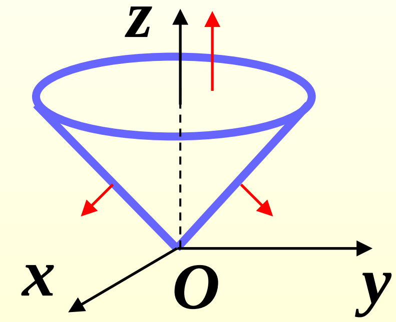
三式相加, 即得所证 Gauss 公式:

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1 计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$

其中Σ为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}, z=h(h>0)$ 所围区域的整个边界曲面的外侧.

解 $P=y-z,\ Q=z-x,\ R=x-y,$



由高斯公式得

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iiint\limits_{\Omega}0dv=0$$

例2 用Gauss 公式计算 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

其中Σ为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围空间闭域 Ω的整个边界曲面的外侧.

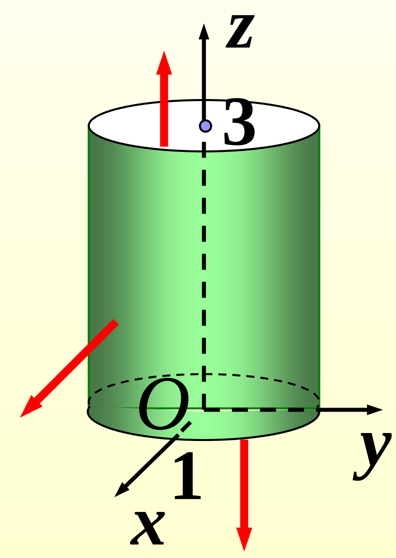
解 这里 $P=(y-z)x, Q=0, R=x-y$ 利用Gauss 公式,

得 原式 $=\iiint_{\Omega}(y-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^3 dz\iint_{x^2+y^2\le 1}(y-z)dxdy$$

利用对称性

$$=-\int_0^3 dz\iint_{x^2+y^2\le 1}zdxdy=-\frac{9\pi}{2}$$

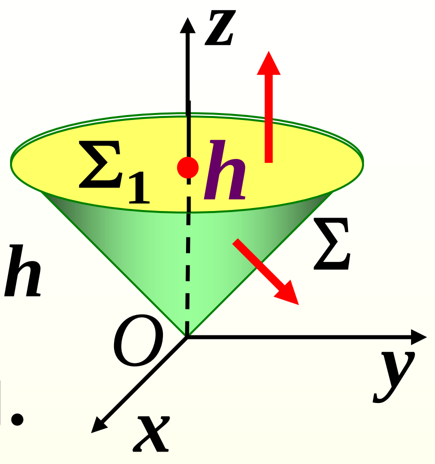


思考: 若 Σ改为内侧, 结果有何变化?

若 Σ为圆柱侧面(取外侧) , 如何计算?

例3 利用Gauss 公式计算积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$



其中Σ为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于$z=0$及 $z=h$ 之间部分的下侧, α,β,γ为法向量的方向角.

解 作辅助面

$$\Sigma_1: z=h,\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le h^2,$$ 取上侧

记Σ,Σ_1 所围区域为Ω, 则

$\boxed{在\ \Sigma_1\ 上\ \alpha=\beta=\frac{\pi}{2},\ \gamma=0}$

$$I=\left(\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{D_{xy}}h^2\,dx\,dy$$

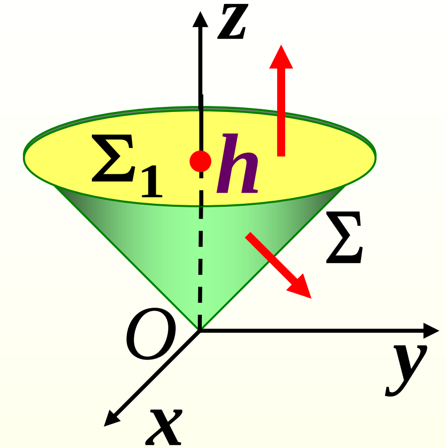
$$I = 2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D_{xy}} h^2\,dxdy$$

利用对称性

$$= 2\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \pi h^4$$

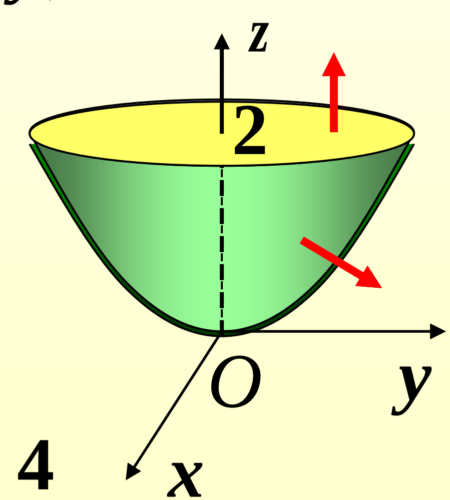
先二后一

$$= 2\int_0^h z\cdot\pi z^2\,\mathrm{d}z - \pi h^4 = -\tfrac{1}{2}\pi h^4$$



思考: 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$\Sigma: z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.



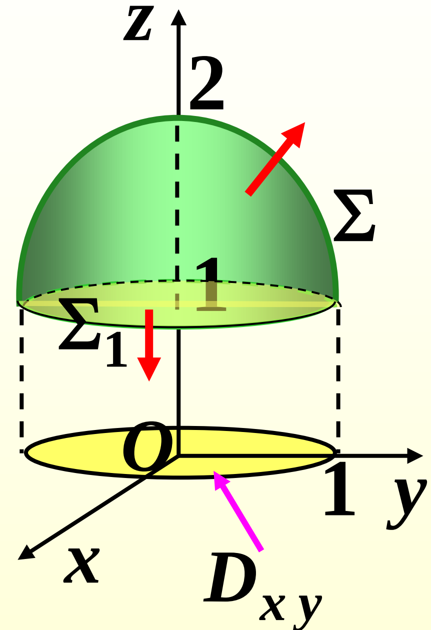
提示: 作取上侧的辅助面 $\Sigma_1: z=2$,

$$(x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 4$$

例4 设Σ为曲面$z=2-x^2-y^2$, $1\le z\le 2$ 取上侧, 求

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3z+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x\underline{-x^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

解 作取下侧的辅助面



$\Sigma_1: z=1 \quad (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 1$

$$I=\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

用柱坐标

用极坐标

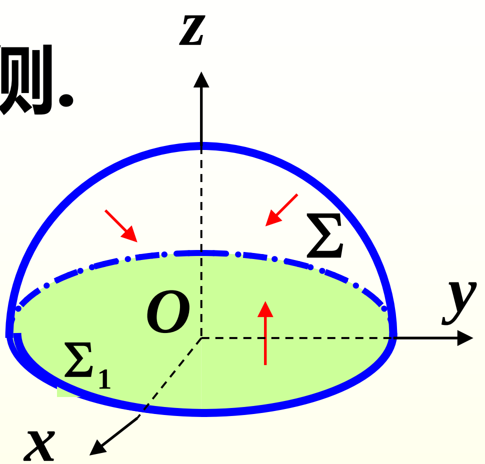
$$=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D_{xy}}(-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_1^{2-r^2}\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}$$

练习 计算 $I=\iint_{\Sigma}xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中

Σ 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的下侧.

解 添加曲面 $\Sigma_1: z=0. \quad (x^2+y^2\le a^2)$, 取上侧.



$$\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1} xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy$$

$$=\boxed{-}\iiint_{\Omega}\left(z^2+x^2+y^2\right)dv$$

利用球面坐标

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a}r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=-\frac{2}{5}\pi a^5$$

$$\iint_{\Sigma_1} xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy=\iint_{D_{xy}}2xydxdy=0$$

$$\therefore I=\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=-\frac{2}{5}\pi a^5$$

高斯公式要求
边界曲面取外侧,
本题曲面为内侧。

$$-\iiint_{\Omega}\cancel{\left(z^2+x^2+y^2\right)dv}=-\iiint_{\Omega}a^2dv=-\frac{2}{3}\pi a^5$$

例5 设函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$在闭区域Ω上具有一阶和二阶连续偏导数, 证明格林(Green)第一公式

$$P = u\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$Q = u\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$R = u\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\iiint_{\Omega} u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_{\Sigma} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中Σ是整个Ω边界面的外侧, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是Σ在点(x,y,z)处法向量的方向余弦。

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}\left[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

证 令 $P = u\frac{\partial v}{\partial x}$, $Q = u\frac{\partial v}{\partial y}$, $R = u\frac{\partial v}{\partial z}$, 由高斯公式得

$$\iiint_{\Omega}\Big[\, u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\Big]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

移项即得所证公式.

内容小结

1. 高斯公式及其应用

$$\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(非闭曲面时注意添加辅助面的技巧)

2. *通量与散度

设向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$, P, Q, R, 在域G 内有一阶 连续偏导数, 则 向量场通过有向曲面 Σ 的通量为

$$\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \qquad (\vec{n}\text{ 为}\Sigma\text{的单位法向量})$$

G 内任意点处的散度为 $\operatorname{div}\vec{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$

思考与练习 设$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$取外侧，Ω为Σ所围立体，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，判断下列演算是否正确?

$$(1)\quad \iint_{\Sigma}\frac{x^3}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iiint_{\Omega}3\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{\neq R^2}\mathrm{d}v \;\cancel{=}\; \frac{3}{R}\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=4\pi R^2$$

$$(2)\quad \iint_{\Sigma}\frac{x^3}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\cancel{=}\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^3}{r^3}\right)\right]\mathrm{d}v=\cdots$$

备用题 设 Σ 是一光滑闭曲面，所围立体 Ω 的体积为 V，θ 是 Σ 外法线向量与点 (x, y, z) 的向径 $\vec{r}$ 的夹角，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，试证 $\frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} r\cos\theta\,\mathrm{d}S=V$.

证 设 Σ 的单位外法向量为 $\vec{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，$\vec{r}=(x, y, z)$，则

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{r}|}=\frac{x}{r}\cos\alpha+\frac{y}{r}\cos\beta+\frac{z}{r}\cos\gamma$$

$$\therefore\ \frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} r\cos\theta\,\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\left(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}\iiint_{\Omega}3\,\mathrm{d}v=V$$

1、格林公式

复习

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$$

2、高斯公式

$$\oiint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$

$$\oiint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$

3、对弧长和对坐标的曲线积分间的关系

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L [P\cos\alpha + Q\cos\beta] ds$$

4、对面积的和对坐标的曲面积分间的关系

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma] dS$$

5、通量(流量)的计算公式

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS$$

$$= \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

6、向量场$\vec{A}$的散度

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

第七节 斯托克斯公式 *环流量与旋度

一、斯托克斯公式

*二、空间曲线积分与路径无关的条件

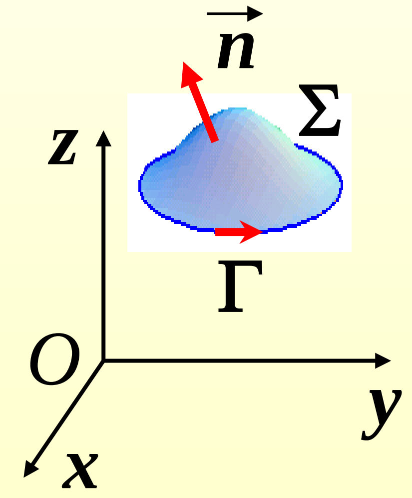
*三、环流量与旋度

一、 斯托克斯公式

定理1. 设光滑曲面Σ的边界Γ是分段光滑曲线, Σ 的侧与 Γ的正向符合**右手法则**, P,Q,R在Σ(连同边界Γ)上具有一阶连续偏导数, 则有

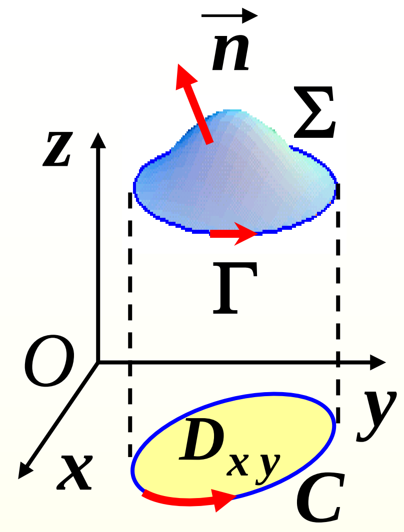
$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z \quad \text{(斯托克斯公式)}$$



注: 若Σ是平面区域, 斯托克斯公式

即为格林公式



证　情形1. Σ 与平行 z 轴的直线只交于一点, 设其方程为

$$\Sigma : z = f(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy}$$

为确定起见, 不妨设 Σ 取上侧 (如图).

则 $\oint_\Gamma P\,\mathrm{d}x = \oint_C P(x, y, f(x, y))\mathrm{d}x$

$$= -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ **(利用格林公式)**

$$= -\iint_{D_{xy}} \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f_y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f_y\right]\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

$$\because \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \therefore \quad f_y = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

因此 $\oint_\Gamma P\,\mathrm{d}x = -\iint_\Sigma \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right]\cos\gamma\,\mathrm{d}S$

$$= \iint_\Sigma \left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

$$= \iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理可证 $\oint_\Gamma Q\,\mathrm{d}y = \iint_\Sigma \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$\oint_\Gamma R\,\mathrm{d}x = \iint_\Sigma \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

三式相加, 即得斯托克斯公式 .

情形2　曲面Σ与平行 z 轴的直线交点多于一个, 则可通过作辅助线把 Σ分成与z 轴只交于一点的几部分, 在每一部分上应用斯托克斯公式, 然后相加, 由于沿辅助曲线方向相反的两个曲线积分相加刚好抵消, 所以对这类曲面斯托克斯公式仍成立.　**证毕**

注意: 如果Σ是 xOy 面上的一块平面区域, 则斯托克斯公式就是格林公式, 故格林公式是斯托克斯公式的特例.

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

为便于记忆, 斯托克斯公式还可写作:

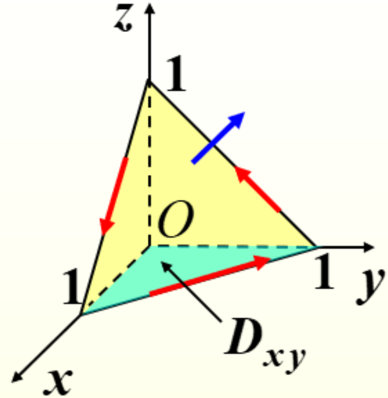
$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

或用第一类曲面积分表示:

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$为$\Sigma$ 上的单位法向量.

例1 利用斯托克斯公式计算积分 $\oint_\Gamma z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$ 其中Γ为平面 $x+y+z=1$ 被三坐标面所截三角形的整个边界, 方向如图所示.



解 记三角形域为Σ, 取上侧, 则

$$\oint_\Gamma z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

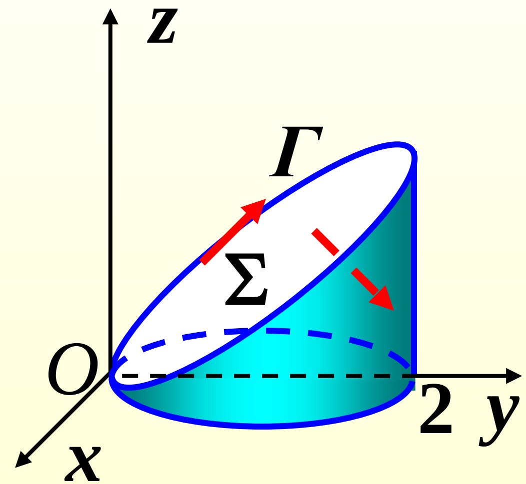
$$= \iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{2}$$

利用对称性

例2 Γ为柱面$x^2+y^2=2y$与平面$y=z$的交线, 从z轴正向看为顺时针, 计算 $I=\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y+xz\,\mathrm{d}z$.

解 设Σ为平面$z=y$上被Γ所围椭圆域，且取下侧, 则其法线方向余弦

$$\cos\alpha=0,\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$



利用斯托克斯公式得

$$I=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & xy & xz\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma(y-z)\,\mathrm{d}S=0$$

例3计算$I=\oint_\Gamma ydx+zdy+xdz$，其中$\Gamma$为曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x+y+z=1\end{cases}$

其方向是从z轴的正向看去为逆时针.

类P_{248}2(1)

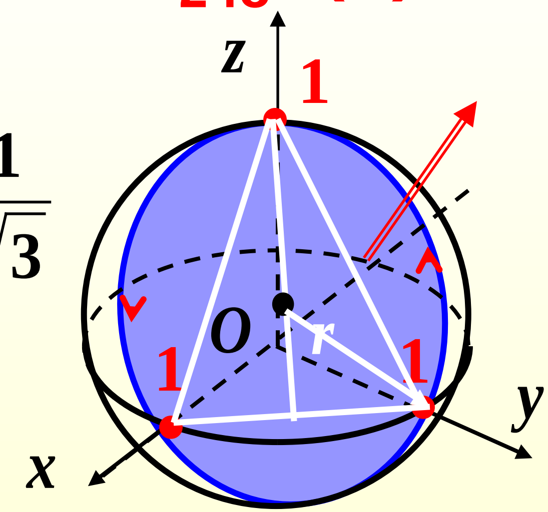
解 $\Sigma: x+y+z=1$，取上侧.

Σ指定侧的法向量为 $\vec{n}=(1,1,1)$，

其方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

由stokes公式得

$$I=\oint_\Gamma ydx+zdy+xdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$$



$r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big/\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$$=-\sqrt{3}\iint_\Sigma dS=-\sqrt{3}S=-\sqrt{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

S为曲线Γ所围圆的面积.

上页 下页

练习 计算 $I=\oint_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中$\Gamma$

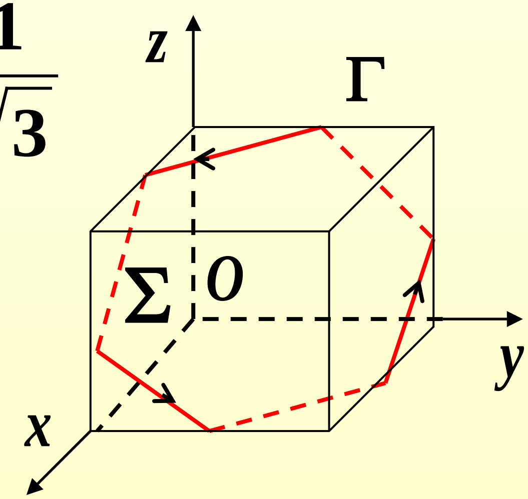
是由平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 截立方体：$0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$

的表面所得的截痕，若从z 轴正向看去，取逆时针方向.

解 Σ为平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$被Γ所围成的部分，并取上侧.

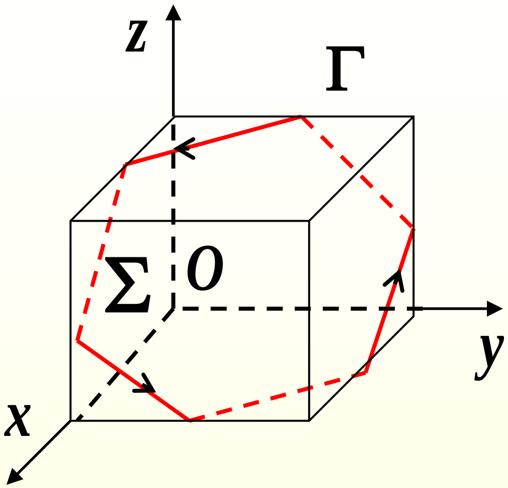
平面上任一点处向上的法向量： $\vec{n}=\{1,1,1\}$.

其方向余弦为：$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



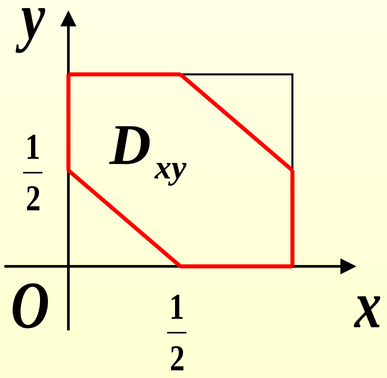
由斯托克斯公式得：

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}dS$$



$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\frac{3}{2}dS=-2\sqrt{3}\iint_{\Sigma}dS$$



$$=-2\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}dxdy\ =-6\iint_{D_{xy}}dxdy$$

$$=-6\left(1-2\cdot\frac{1}{8}\right)=-\frac{9}{2}$$

$$dS=\sqrt{3}dxdy$$

内容小结

1. 斯托克斯公式

$$\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

也可写成:

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s$$

其中

$$\vec{A} = (P, Q, R)$$

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

为曲面Σ的法向量

$$\vec{\tau} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$$

为曲线 Γ的单位切向量