习题 11.5

1. 求下列幂级数的收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{\ln n}}{n}x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2+1}x^n$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}x^{2n-1}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)^p}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}x^n$.

2. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，且 $R_1\neq R_2$，证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径 $R=\min\{R_1,R_2\}$. 若 $R_1=R_2$，以上结论是否还成立?

3. 利用幂级数的和函数的分析性质，求下列级数在各自收敛域上的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^n n!}x^n$.

4. 利用幂级数的性质求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{9^n}$;

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$.

5. 将下列函数在给定点 x_0 展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数, 并指出展开式成立的区间：

(1) $x^2e^{x^2}, x_0=0$;

(2) $\frac{1}{x^2}, x_0=1$；

(3) $\frac{1}{x^2-x-6}, x_0=1$;

(4) $\ln(10+x), x_0=0$;

(5) $\ln(2+x-3x^2), x_0=0$;

(6) $(1+x)\ln(1-x), x_0=0$;

(7) $\sin 2x, x_0=\frac{\pi}{2}$;

(8) $\arcsin x, x_0=0$;

6. 利用函数的幂级数展开式计算下列各数的近似值(精确到10^{-4}):

(1) $\sqrt[3]{30}$;

(2) $\ln 1.2$.

7. 利用函数的幂级数展开式计算或用幂级数表示下列积分:

(1) $\int_0^{0.8}x^{10}\sin x\mathrm{d}x$ (精确到10^{-3});

(2) $\int\frac{e^x-1}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{1-\cos x}{x}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^x e^{-x^2}\mathrm{d}x$.