习题 10.4

1. 利用 Gauss 公式, 计算下列第二类曲面积分：

(1) $\oiint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围立体的表面, 并取外侧;

(2) $\oiint\limits_{\Sigma} x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所围立体的表面, 并取外侧;

(3) $\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$($R>0$), 并取内侧;

(4) $\iint\limits_{\Sigma} (x^3-yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ $(0\le z\le 1)$, 并取外侧;

(5) $\iint\limits_{\Sigma} (2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为定侧曲面 $z=x^2+y^2$ $(0\le z\le 1)$, 其法向量与 z 轴正向夹角为锐角;

(6) $\iint\limits_{\Sigma} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 yOz 平面上的曲线 $z=\mathrm{e}^y$ $(0\le y\le a)$ 绕 z 轴旋转所成的曲面, 并取下侧;

(7) $\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中函数 $f(u)$ 具有连续导数, Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$， $x^2+y^2+z^2=4$ 与锥面 $x=\sqrt{y^2+z^2}$ 所围立体的表面, 并取外侧.

(8) $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{Rx\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+R)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ($R>0$), 其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, 并取下侧.

2. 计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} \dfrac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{\|\boldsymbol{r}\|^2}\mathrm{d}S$，其中 Σ 为一封闭光滑曲面，$\boldsymbol{n}$ 为 Σ 上点 (x,y,z) 处的外法向量，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 讨论下列两种情况：

(1) 曲面 Σ 不包含原点;

(2) 曲面 Σ 包含原点.

3. 计算下列向量场通过曲面 Σ 指定侧的通量：

(1) $\boldsymbol{A}=(xz,xy,yz)$, Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分, 并取上侧;

(2) $\boldsymbol{A}=(x^3,y^3,z^3)$, Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ ($R>0$), 并取外侧.

4. 求下列向量场的散度：

(1) $\boldsymbol{A}=(4x,-2xy,z^2)$, 求 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}\big|_{(1,1,3)}$;

(2) $\boldsymbol{A}=xyz\boldsymbol{r}$, 其中 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, 求 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}\big|_{(1,3,2)}$;

(3) $\boldsymbol{A}=(xz,-y^2,2x^2y)$, $u=x^2yz^3$, 求 $\operatorname{div}(u\boldsymbol{A})$.

(4) $\boldsymbol{A}=\nabla r$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 求 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$；

5. 求向量场

$$\boldsymbol{A}=(2x^3yz+y^zz^y)\boldsymbol{i}-(x^2y^2z+x^zz^x)\boldsymbol{j}-(x^2yz^2+x^yy^x)\boldsymbol{k}$$

的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ 在点 $M(1,1,2)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 方向的方向导数，并求 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ 在点 M 的方向导数的最大值.

6. 利用 Stokes 公式, 计算下列第二类曲线积分：

(1) $\oint_L (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$, 其中 L 是任一分段光滑的闭曲线；

(2) $\oint_L (\mathrm{e}^x+x^2y^2z^3)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^y-y^2z)\mathrm{d}y+(\mathrm{e}^z+yz^2)\mathrm{d}z$, 其中 L 是圆周 $\begin{cases} y^2+z^2=R^2, \\ x=0, \end{cases}$ 且从 x 轴的正向看去， L 取逆时针方向；

(3) $\oint_L (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中 L 是椭圆 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 且从 z 轴的正向看去, L 取顺时针方向；

(4) $\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，且从 z 轴的正向看去, L 取逆时针方向.

7. 试由 Stokes 定理推出空间曲线积分与路径无关的条件, 由此验证下列曲线积分与路径无关, 并计算积分值：

(1) $\int_{(0,0,0)}^{\left(3,2,\frac{\pi}{3}\right)} (y+\sin z)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+x\cos z\mathrm{d}z$；

(2) $\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2zx)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z$.

8. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿定向闭曲线 L 的环量：

(1) $\boldsymbol{A}=(-y,x,a)$ (a 为常数), L 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=a, \end{cases}$ 从 z 轴的正向看去, L 取逆时针方向；

(2) $\boldsymbol{A}=(xy,x+y^2,z)$, L 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2=2-z, \\ z=1, \end{cases}$ 其方向与 z 轴的正向符合右手法则.

9. 求下列向量场的旋度：

(1) $\boldsymbol{A}=(xyz,xyz,xyz)$, 求 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\big|_{(1,3,2)}$；

(2) $\boldsymbol{A}=(y^2,z^2,x^2)$, 求 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\big|_{(1,1,1)}$；

(3) $\boldsymbol{A}=(x\cos zy^2, y\ln x, -z^2)$, 求 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$；

(4) $\boldsymbol{A}=(3xz^2,-yz,x+2z)$, 求 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$.

10. 设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$， $r=\|\boldsymbol{r}\|$， $f(r)$ 具有二阶连续导数， $\boldsymbol{C}$ 为常向量，试证：

(1) $\operatorname{rot}\left[f(r)\boldsymbol{C}\right]=\dfrac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{C})$；

(2) $\operatorname{div}\left\{\operatorname{rot}\left[f(r)\boldsymbol{C}\right]\right\}=0$.