第四节 重积分的应用

一、曲面的面积

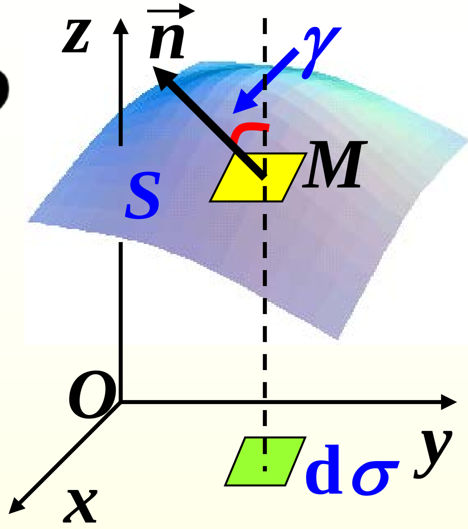
二、物体的质心

三、物体的转动惯量

四、物体的引力

一、曲面的面积

设光滑曲面 $S: z = f(x, y), (x, y) \in D$

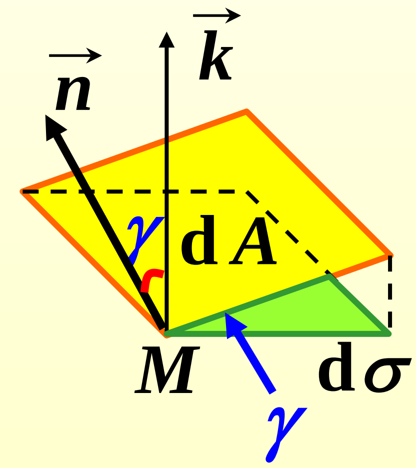


曲面上任意点 $M(x, y, z)$ 处小切平面的面积 记作 $\mathrm{d}\,A$.

设它在 D 上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$, 则

$$\mathrm{d}\sigma = \cos\gamma \cdot \mathrm{d}\,A$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}$$



$$\mathrm{d}\,A = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\,\mathrm{d}\sigma$$

(称为面积元素)

故有曲面面积公式

$$A=\iint_D \sqrt{1+f_x^{\,2}(x,y)+f_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma$$

即

$$\boxed{A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

若光滑曲面方程为 $x=g(y,z)$, $(y,z)\in D_{yz}$,则有

$$A=\iint_{D_{yz}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

若光滑曲面方程为 $y = h(z, x)$, $(z, x) \in D_{zx}$,则有

$$A = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

若光滑曲面方程为隐式 $F(x, y, z) = 0$, 且 $F_z \neq 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}, \qquad (x, y) \in D_{xy}$$

$$\therefore \quad A = \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}}{|F_z|} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1 计算双曲抛物面$z = xy$被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 A.

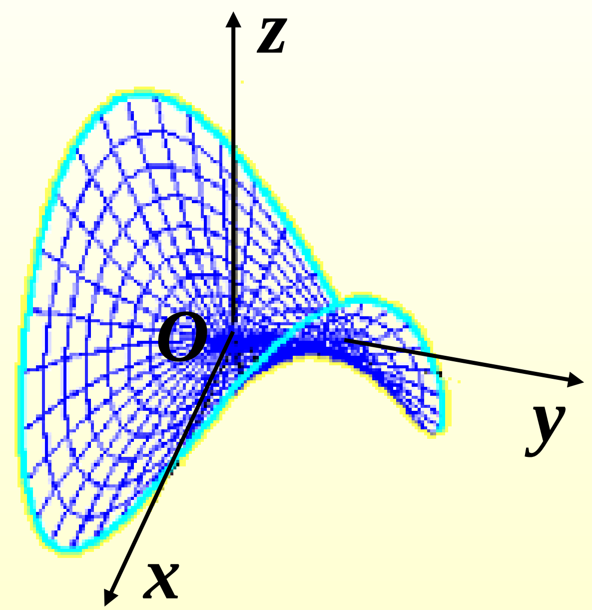
解 曲面在 xOy 面上投影为$D: x^2 + y^2 \le R^2$,则

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z_x{}^2 + z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \sqrt{1 + r^2}\, r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left[(1 + R^2)^{3/2} - 1\right]$$



练习求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的曲面面积.

P_{177} 2

例2 计算半径为 a 的球的表面积.

解 **方法1** 利用直角坐标方程. **(略)**

方法2 利用球坐标方程.

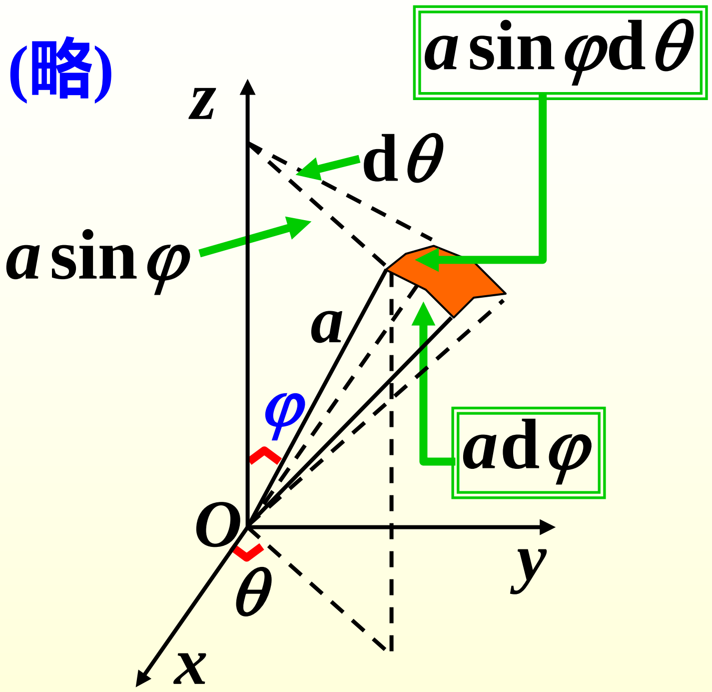
设球面方程为 $r = a$

球面面积元素为

$$\mathrm{d}A = a^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \quad A = a^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4\pi a^2$$



二、物体的质心

设空间有n个质点,分别位于(x_k, y_k, z_k),其质量分别为$m_k\ (k=1,2,\cdots,n)$,由力学知,该质点系的质心坐标

为 $$\bar{x}=\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k},\quad \bar{y}=\frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k},\quad \bar{z}=\frac{\sum_{k=1}^{n} z_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

设物体占有空间有界闭区域 Ω,有连续密度函数 $\rho(x,y,z)$,

其质心公式= ?

可采用 "分割, 近似, 求和, 取极限" 导出

上页 下页

将 Ω 分成 n 小块, 在第 k 块上任取一点 (ξ_k, η_k, ζ_k), 将第 k 块看作质量集中于点 (ξ_k, η_k, ζ_k) 的质点, 此质点系的质心坐标就近似该物体的质心坐标. 例如,

$$\bar{x} \approx \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k}$$

令各小区域的最大直径 $\lambda \to 0$, 即得

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x \rho(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z}$$

同理可得

$$\bar{y} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z} \qquad \bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

当$\rho(x,y,z)\equiv$常数时, 则得形心坐标:

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V}$$

($V = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为Ω的体积)

若物体为占有xOy面上区域D的平面薄片，其面密度为$\mu(x,y)$，则它的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_y}{M}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_x}{M}$$

M_x — 对 x 轴的**静矩**

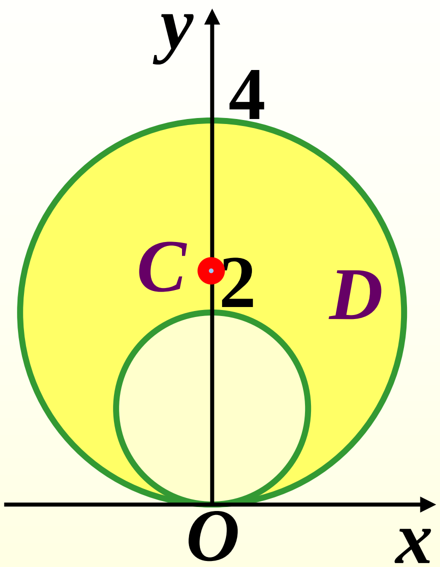
M_y — 对 y 轴的**静矩**

$\mu=$常数时，得D的**形心坐标**：

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A},\quad \bar{y}=\frac{\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A}$$

（A为D的面积）

例3 求位于两圆$r=2\sin\theta$和 $r=4\sin\theta$之间均匀薄片的质心. (形心)



解 利用对称性可知 $\bar{x}=0$

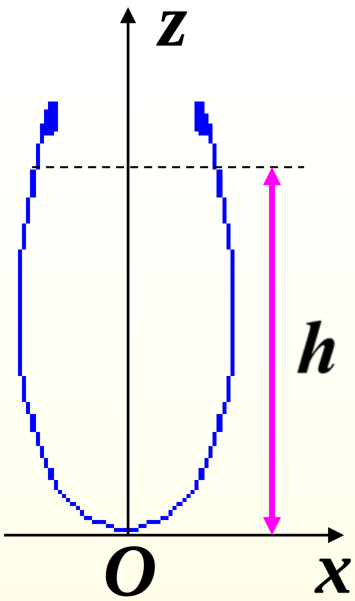
而 $$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3\pi}\iint_D r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{56}{9\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{56}{9\pi}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{56}{9\pi}\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{7}{3}$$

例4 一个炼钢炉为旋转体形, 剖面壁线的方程为 $9x^2 = z(3-z)^2, 0 \le z < 3$, 若炉内储有高为 h 的均质钢液, 不计炉体的自重, 求它的质心.



解: 利用对称性可知质心在 z 轴上, 故其坐标为

$$\bar{x} = \bar{y} = 0, \quad \bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V}$$

$$V = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^h \frac{\pi}{9} z(3-z)^2 \mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi}{9} h^2 \left(\frac{9}{2} - 2h + \frac{1}{4} h^2\right)$$

上页 下页

$$V=\frac{\pi}{9}h^2\left(\frac{9}{2}-2h+\frac{1}{4}h^2\right)$$

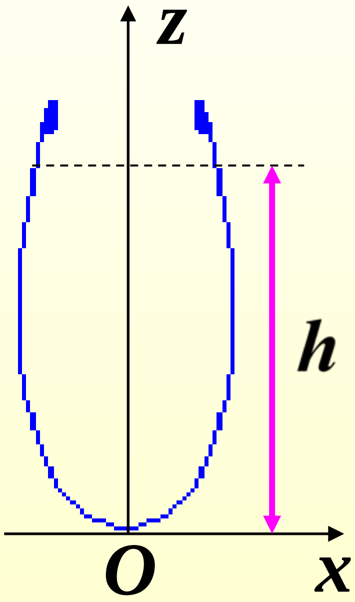
$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^h z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^h \frac{\pi}{9}z^2(3-z)^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{9}h^3\left(3-\frac{3}{2}h+\frac{1}{5}h^2\right)$$



$$\therefore\quad \bar{z}=h\frac{60-30h+4h^2}{90-40h+5h^2}$$

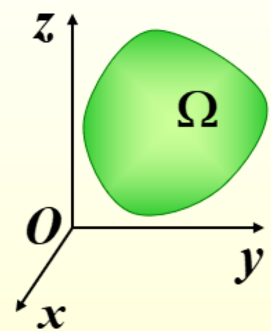
三、物体的转动惯量

因质点系的转动惯量等于各质点的转动惯量之和, 故连续体的转动惯量可用积分计算.

设物体占有空间有界闭区域 Ω, 有连续分布的密度函数 $\rho(x,y,z)$. 该物体位于(x, y, z) 处的微元

对 z 轴的转动惯量为

$$\mathrm{d}I_z = (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$$



因此物体 **对 z 轴 的转动惯量:**

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

类似可得:

对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对 y 轴的转动惯量

$$I_y = \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对原点的转动惯量

$$I_O = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

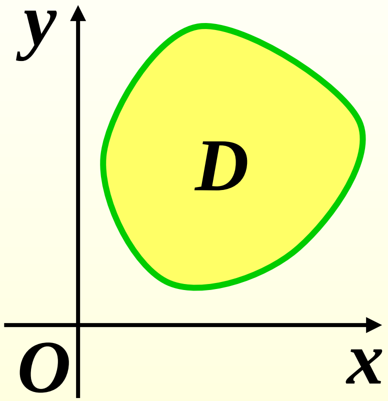
如果物体是平面薄片，面密度为 $\mu(x,y),(x,y)\in D$

则转动惯量的表达式是二重积分.

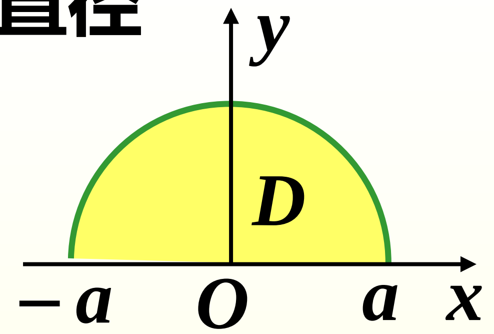
$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_O=\iint_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



例5 求半径为 a 的均匀半圆薄片对其直径的转动惯量.



解 建立坐标系如图, $D:\begin{cases} x^2+y^2\le a^2 \\ y\ge 0 \end{cases}$

$$\therefore I_x = \iint_D \mu y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mu\iint_D r^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

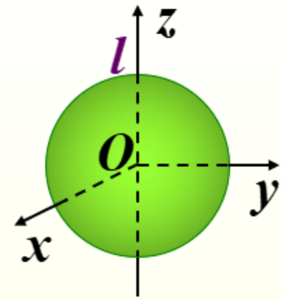
$$= \mu\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\mu a^4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

半圆薄片的质量 $M=\frac{1}{2}\pi a^2\mu$

$$=\frac{1}{4}Ma^2$$

例6 求密度为 ρ 的均匀球体对于过球心的一条轴 l 的转动惯量.

解 取球心为原点, z 轴为 l 轴, 设球所占域为 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le a^2$, 则



$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\rho \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(用球坐标)

$$= \rho \iiint_{\Omega} (\underline{r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta} + \underline{r^2\sin^2\varphi}\sin^2\theta) \cdot \underline{r^2\sin\varphi}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin^3\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^a r^4 \,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{5}\pi \rho a^5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{5} a^2 M$$

球体的质量

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

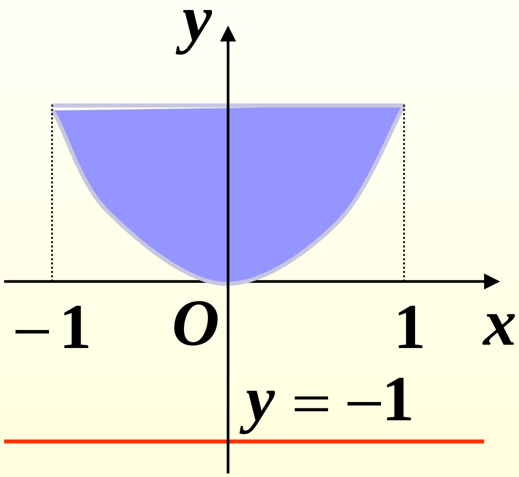
例7 求由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的均匀薄片（面密度为常数 ρ）对直线 $y=-1$ 的转动惯量. P$_{187}$13

解 $I=\iint\limits_D \rho(y+1)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\rho\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}(y+1)^2\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\rho}{3}\int_{-1}^{1}\left[(y+1)^3\right]_{x^2}^{1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\rho}{3}\int_{-1}^{1}\left[8-\left(x^2+1\right)^3\right]\mathrm{d}x=\frac{368}{105}\rho$$



四、物体的引力

设物体占有空间有界闭区域 Ω, 其密度函数 $\rho(x,y,z)$连续,

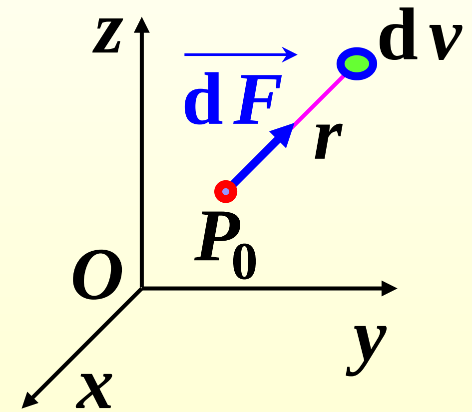
物体对位于点$P_0(x_0, y_0, z_0)$处的单位质量质点的引力为

$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$, 引力元素在三坐标轴上分量为

$$\mathrm{d}F_x = G\frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}F_y = G\frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}F_z = G\frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\mathrm{d}v$$



其中 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$,G 为引力常数

因此引力分量为

$$F_x = G\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\mathrm{d}v$$

$$F_y = G\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\mathrm{d}v$$

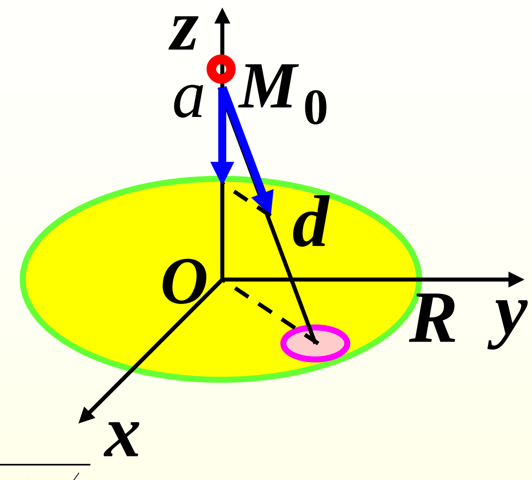
$$F_z = G\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\mathrm{d}v$$

其中: $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

若求 xOy 面上的平面薄片D, 对点P_0处的单位质量质点的引力分量, 则上式改为D上的二重积分, 密度函数改为$\mu(x,y)$ 即可. 例如, $F_z = G\iint\limits_{D} \frac{\mu(x,y)(0-z_0)}{r^3}\mathrm{d}\sigma$

上页 下页

例8 设面密度为μ ,半径为R的圆形薄片 $x^2+y^2\le R^2$, $z=0$,求它对位于点 $M_0(0,0,a)$ $(a>0)$ 处的单位质量质点的引力.



解 由对称性知引力$\vec{F}=(0,0,F_z)$

$$\mathrm{d}F_z=-G\frac{\mu\,\mathrm{d}\sigma}{d^2}\cdot\frac{a}{d}=-Ga\mu\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\therefore\ F_z=-Ga\mu\iint_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$=-Ga\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r\,\mathrm{d}r}{(r^2+a^2)^{3/2}}=2\pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right)$$

课下练习 求半径为R的均匀球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 对位于点 $M_0(0,0,a)$ $(a>R)$ 的单位质量质点的引力.

答案 $F_x=F_y=0$ $F_z=-\dfrac{4G\pi R^3\rho}{3a^2}$

上页 下页

小结:

1. 能用重积分解决的实际问题的特点:

所求量是 $\left\{\begin{array}{l}\text{分布在有界闭区域上的整体量}\\ \text{对区域具有可加性}\end{array}\right.$

2. 用重积分解决问题的方法:

—— 用微元分析法 (元素法)建立积分式

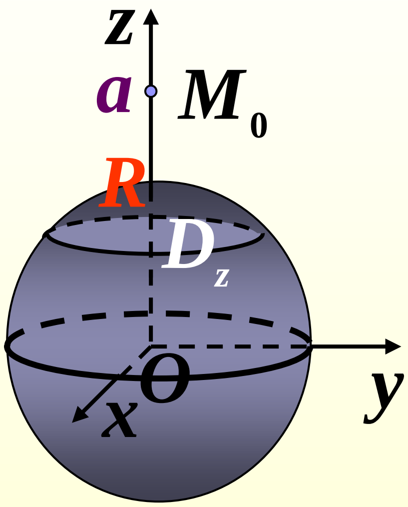
3. 解题要点:

画出积分域、选择坐标系、确定积分序、

定出积分限、计算要简便

练习 求半径为R的均匀球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 对位于点 $M_0(0,0,a)$ $(a>R)$ 的单位质量质点的引力.

解 利用对称性知引力分量 $F_x=F_y=0$



$$F_z=\iiint_\Omega G\rho\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\mathrm{d}v$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\iint_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\,\mathrm{d}r}{[r^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$= G\rho \int_{-R}^{R} (z-a)\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{r\,\mathrm{d}r}{[r^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$= 2\pi G\rho \int_{-R}^{R} (z-a) \left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}} \right) \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi G\rho \left(-2R + \frac{1}{a}\int_{-R}^{R} (z-a)\mathrm{d}\sqrt{R^2-2az+a^2} \right)$$

$$= 2\pi G\rho(-2R + 2R - \frac{2R^3}{3a^2})$$

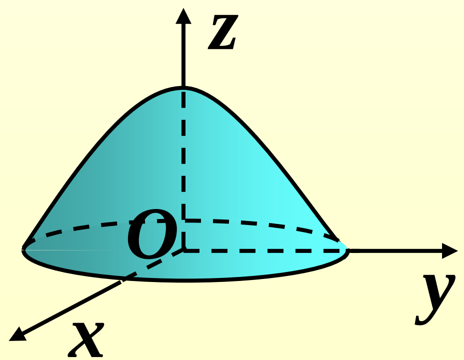
$$= -G\rho \frac{4\pi R^3}{3a^2} = -G\frac{M}{a^2}$$

$$\boxed{M = \frac{4\pi R^3}{3}\rho \text{ 为球的质量}}$$

结束 目录 上页 下页

备用题

设有一高度为 $h(t)$(t 为时间) 的雪堆在融化过程中,其侧面满足方程 $z = h(t) - \dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$, 设长度单位为厘米, 时间单位为小时, 已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9), 问高度为130 cm 的雪堆全部融化需要多少小时? (2001考研)

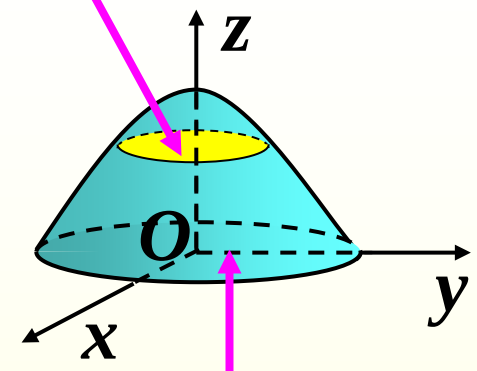


结束 目录 上页 下页

提示:

$$D_z: x^2+y^2 \le [\tfrac{1}{2}h^2(t)-h(t)z]$$

记雪堆体积为 V, 侧面积为 S ,则



$$V=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{h(t)}\tfrac{1}{2}\pi[h^2(t)-h(t)z]\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}h^3(t)$$

$$S=\iint_{D_0}\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$D_0: x^2+y^2\le \tfrac{1}{2}h^2(t)$$

$$=\iint_{D_0}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(用极坐标)

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{13\pi}{12}h^2(t)$$

结束 目录 上页 下页

$$\boxed{V=\frac{\pi}{4}h^3(t)\,,\qquad S=\frac{13\pi}{12}h^2(t)}$$

由题意知 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{13}{10}\\ h(0)=130\end{cases}\Rightarrow h(t)=-\frac{13}{10}t+130$$

令 $h(t)=0$，得 $t=100\ (\mathrm{h})$

因此高度为130厘米的雪堆全部融化所需的时间为100小时.

第十一章

曲线积分与曲面积分

积分学	定积分	二重积分	三重积分	曲线积分	曲面积分
积分域	区　间	平面域	空间域	曲线弧	曲面域

曲线积分
- 对弧长的曲线积分
- 对坐标的曲线积分

曲面积分
- 对面积的曲面积分
- 对坐标的曲面积分

第十一章 曲线积分与曲面积分

第一节 对弧长的曲线积分

一、对弧长的曲线积分的概念与性质

二、对弧长的曲线积分的计算法

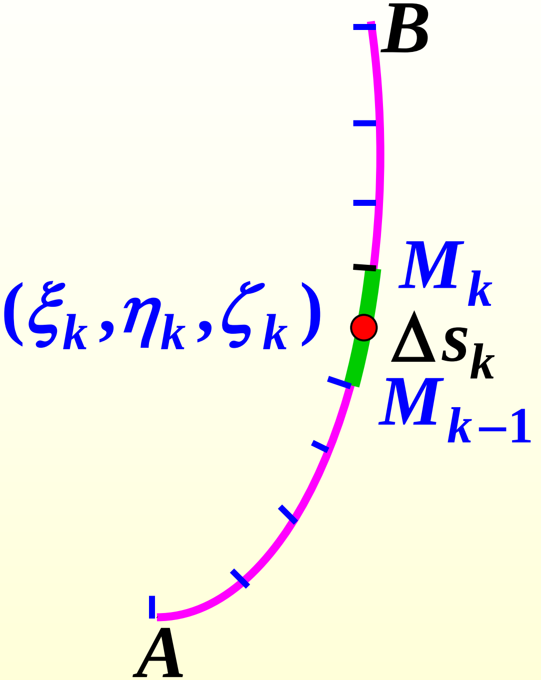
三、质心和转动惯量

一、对弧长的曲线积分的概念与性质

1.引例: 非均匀曲线形构件的质量

假设曲线形细长构件在空间所占弧段为$\overset{\frown}{AB}$，其线密度为$\rho(x,y,z)$，为计算此构件的质量, 采用

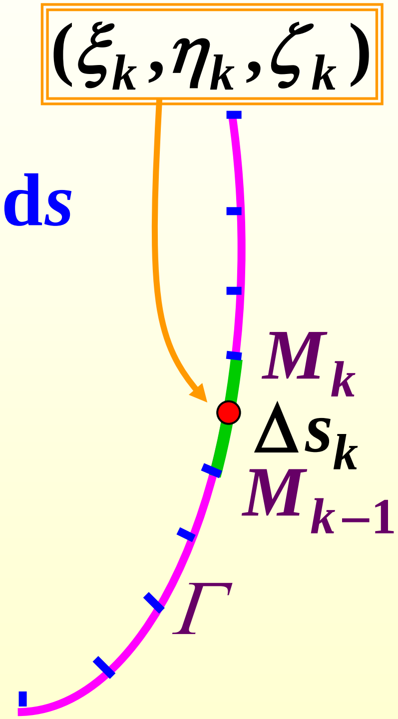
"分割, 近似, 求和, 取极限"



可得 $$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k$$

2.定义

设 Γ 是空间中一条有限长的光滑曲线，$f(x,y,z)$ 是定义在 Γ 上的一个有界函数,若通过对 Γ 的**任意分割**和对局部的**任意取点**, 下列 "乘积和式极限"



$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

都存在,则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲线 Γ 上**对弧长的曲线积分**, 或第一类曲线积分.

$f(x,y,z)$ 称为**被积函数**, Γ 称为**积分弧段**.

曲线形构件的质量 $M=\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

如果 L 是 xOy 面上的曲线弧, 则定义对弧长的曲线积分为

$$\int_L f(x,y)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

如果 L 是闭曲线 , 则记为 $\oint_L f(x,y)\,ds$.

思考:

(1) 若在 L 上 $f(x,y)\equiv 1$, 问 $\int_L ds$ 表示什么?

(2) 定积分是否可看作对弧长曲线积分的特例 ?

否! 对弧长的曲线积分要求 $ds \geq 0$, 但定积分中 dx 可能为负.

注: 若$f(x,y)$在L上连续, 则 $\int_L f(x,y)ds$ 一定存在.

上页 下页

3. 性质

(1) $\int_\Gamma [\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)] \mathrm{d}s$ $\quad$ (α, β 为常数)

$$= \alpha \int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s + \beta \int_\Gamma g(x,y,z)\mathrm{d}s$$

(2) $\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}s$

(Γ 由 Γ_1, Γ_2 组成)

(3) 设在 Γ 上 $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$, 则

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s \le \int_\Gamma g(x,y,z)\mathrm{d}s$$

(4) $\int_\Gamma \mathrm{d}s = l$ $\quad$ (l 为曲线弧 Γ 的长度)

如：$\oint_L ds = ?$ ，其中L是封闭曲线：$x^2 + y^2 = 2x$.

二、对弧长的曲线积分的计算法

基本思路: 求曲线积分 $\xrightarrow{\text{转 化}}$ 计算定积分

定理: 设 $f(x,y)$ 是定义在光滑曲线弧

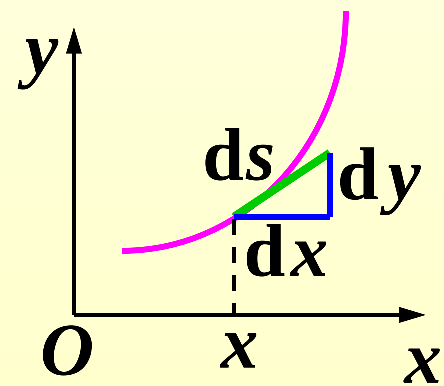
$$L: x=\varphi(t), y=\psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

上的连续函数, 则曲线积分 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 存在, 且

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

注意到 $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$

$$= \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$



因此上述计算公式相当于"换元法".

证　**根据定义**

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

设各分点对应参数为 $t_k\,(k=0,1,\cdots,n)$,

点 (ξ_k,η_k) **对应参数为** $\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$,

$$\Delta s_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{\varphi'^2(\tau_k')+\psi'^2(\tau_k')}\,\Delta t_k,\quad \tau_k'\in[t_{k-1},t_k]$$

则 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k')+\psi'^2(\tau_k')}\,\Delta t_k$$

则 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k')+\psi'^2(\tau_k')}\,\Delta t_k$$

注意 $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ 连续

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}\,\Delta t_k$$

因此

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

如果曲线 L 的方程为 $y=\varphi(x)\ (a\le x\le b)$,则有

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

若曲线 L 由方程 $x=\psi(y),\ (c\le y\le d)$ 给出, 则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_c^d f[\psi(y),y]\sqrt{\psi'^2(y)+1}\,dy$$

如果方程为极坐标形式: $L: r=r(\theta)\ (\alpha\le\theta\le\beta)$,则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

推广: 设空间曲线弧的参数方程为

$$\Gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$$

则 $\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

$$=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

注: $\because \Delta s_k>0,\ \therefore \Delta t_k>0$, 因此积分限必须满足

$$\alpha<\beta\ !$$

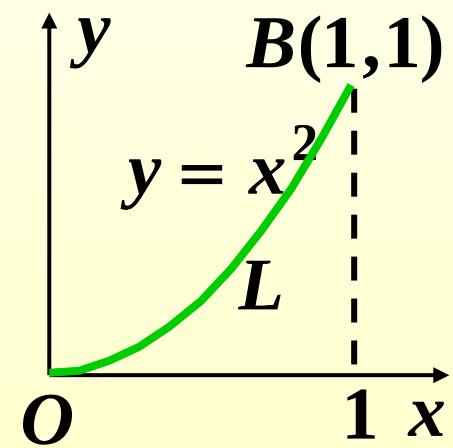
即计算对弧长的曲线积分，一定将积分曲线化为参数方程，且积分下限小于上限.

例1 计算$\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$其中 L 是抛物线 $y = x^2$上点 $O\ (0,0)$ 与点 $B\ (1,1)$ 之间的一段弧 .

解 $\because L: y = x^2 \quad (0 \le x \le 1)$

$$\therefore \int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$



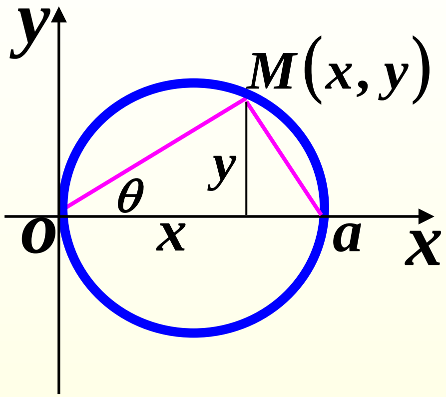
注：第一类曲线积分的计算中关键两步：

1、确定积分弧段L或者Γ的方程形式；

2、确定被积函数的表达式. **注意积分限**

例2 计算 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, L为圆周 $x^2+y^2=ax\quad (a>0)$. **$P_{249}3(1)$**

解 将曲线L化为参数式方程:



$$\begin{cases} x = a\cos^2\theta \\ y = a\cos\theta\sin\theta \end{cases} \qquad (-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$$

$$\because\ \sqrt{x'^2+y'^2}$$

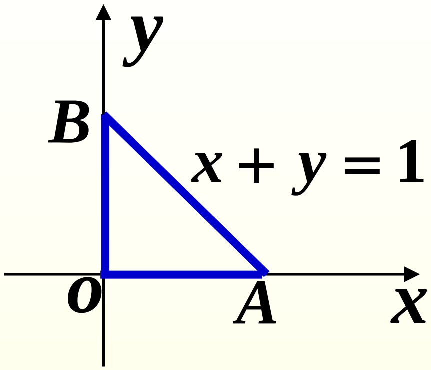
$$=\sqrt{(-2a\cos\theta\sin\theta)^2+(a\cos^2\theta-a\sin^2\theta)^2}=a$$

$$\therefore\ \oint_L\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta}\,a\,d\theta$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=2a^2$$

可以用极坐标方程计算

练习 **计算** $\oint_L (x+y)ds$,其中L为以$O(0,0),A(1,0),B(0,1)$为顶点的三角形周界. 类似P_{193}3(2)



解 显然,有: $L=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{OB}$

$\overline{OA}: y=0, 0\le x\le 1;$

$\overline{AB}: y=1-x, 0\le x\le 1;$ $\quad \overline{OB}: x=0, 0\le y\le 1$

$$\therefore \oint_L (x+y)ds = \int_{\overline{OA}}(x+y)ds+\int_{\overline{AB}}(x+y)ds+\int_{\overline{OB}}(x+y)ds$$

$$=\int_0^1 xdx+\int_0^1\sqrt{2}dx+\int_0^1 ydy=1+\sqrt{2}$$

例4 计算 $I=\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为球面 $x^2+y^2+z^2=9/2$ 与平面$x+z=1$的交线. **补充**

解 $\Gamma:\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}y^2=1,\\ x+z=1\end{cases}$

化为参数方程 $\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\\ y=2\sin\theta\\ z=\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta\end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$

则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2+(\sqrt{2}\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\quad I=\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}2\mathrm{d}\theta=18\pi$$

例5 设L是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$其周长为$a$,求$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds$.

补充

解 利用对称性得 $\oint_L 2xyds=0.$

由 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,$ 得 $3x^2+4y^2=12,$

$$\therefore \oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds=12\oint_L ds=12a$$

注：对弧长的曲线积分的计算中常用技巧：

1、利用对称性；(两种：经典对称性、轮换对称性)

2、积分弧段函数代入被积函数.

例6 计算 $\oint_{\Gamma} x^2 \mathrm{d}s$, 其中$\Gamma$为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周. 补充

解 由对称性可知 $\oint_{\Gamma} x^2 \mathrm{d}s = \oint_{\Gamma} y^2 \mathrm{d}s = \oint_{\Gamma} z^2 \mathrm{d}s$

$$\therefore \oint_{\Gamma} x^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{3}\oint_{\Gamma} a^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{3}a^2 \cdot 2\pi a$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3$$

三、质心和转动惯量

设xoy面上的曲线弧 L在点(x,y)处的线密度为 $\rho(x,y)$,

则L的质心和对x轴及y轴的转动惯量分别为：

曲线弧的的质量为：$M=\int_L \rho(x,y)ds$

静距为：$M_y=\int_L x\rho(x,y)ds \quad M_x=\int_L y\rho(x,y)ds$

$$\therefore \bar{x}=\frac{1}{M}\int_L x\rho(x,y)ds \qquad \bar{y}=\frac{1}{M}\int_L y\rho(x,y)ds$$

L对x轴及y轴转动惯量分别为：

$$I_x=\int_L y^2\rho(x,y)ds \qquad I_y=\int_L x^2\rho(x,y)ds$$

推广：

设空间上曲线弧 Γ 在点(x, y, z) 处的线密度为$\rho(x,y,z)$，

则 Γ 的**质心**和对x 轴、y 轴及z 轴的**转动惯量**分别如下：

☑ **质心坐标:**

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_{\Gamma} x\rho(x,y,z)ds$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_{\Gamma} y\rho(x,y,z)ds$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\int_{\Gamma} z\rho(x,y,z)ds$$

☑ Γ 对x轴、y轴及z轴的**转动惯量**分别为：

$$I_x=\int_{\Gamma}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$$

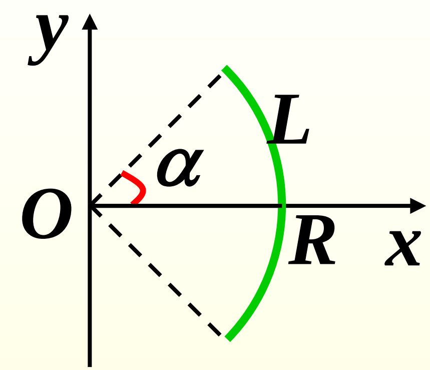
$$I_y=\int_{\Gamma}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$$

$$I_z=\int_{\Gamma}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds$$

其中$M=\int_{\Gamma}\rho(x,y,z)ds$ 为质量

例7 计算半径为 R ,中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I (设线密度 $\mu = 1$).

解 建立坐标系如图，则



$$I = \int_L y^2 \, \mathrm{d}s$$

$$L: \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \quad (-\alpha \le \theta \le \alpha)$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2\theta \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2} \, \mathrm{d}\theta$$

$$= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta = 2R^3 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\alpha}$$

$$= R^3 (\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$$

内容小结

1. 定义 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k$$

2. 性质

(1) $\int_\Gamma [\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]\mathrm{d}s$

$= \alpha\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s + \beta\int_\Gamma g(x,y,z)\mathrm{d}s$ (α,β为常数)

(2) $\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}s$

(Γ由Γ_1,Γ_2组成)

(3) $\int_\Gamma \mathrm{d}s = l$ (l 曲线弧 Γ的长度)

3. 计算

- 对光滑曲线弧 $L: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ (\alpha \le t \le \beta)$,

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

- 对光滑曲线弧 $L: y=\psi(x)\ \ (a \le x \le b)$,

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,\psi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

- 对光滑曲线弧 $L: r=r(\theta)\ \ (\alpha \le \theta \le \beta)$,

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

思考与练习

1. 设均匀螺旋形弹簧L的方程为 $x = a\cos t,\ y = a\sin t,$

$z = kt\ \ (0 \le t \le 2\pi),$

(1) 求它关于 z 轴的转动惯量 I_z;

(2) 求它的质心 .

解: 设其密度为 ρ (常数).

(1) $I_z = \int_L (x^2 + y^2)\rho\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a^2\rho\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$

$= 2\pi a^2\rho\sqrt{a^2+k^2}$

结束 目录 上页 下页

(2) L的质量 $m=\int_L \rho\,\mathrm{d}s=2\pi\rho\sqrt{a^2+k^2}$

而 $\int_L x\rho\,\mathrm{d}s=a\rho\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}\cos t\,\mathrm{d}t=0$

$$\int_L y\rho\,\mathrm{d}s=a\rho\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=0$$

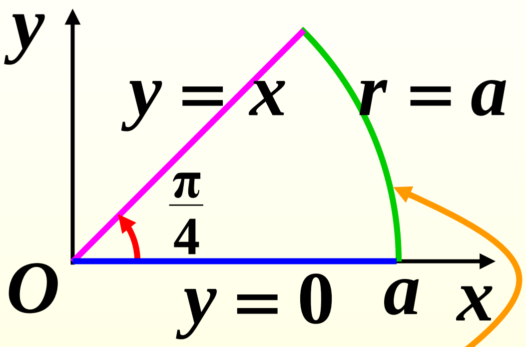
$$\int_L z\rho\,\mathrm{d}s=k\rho\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}t\,\mathrm{d}t=2\pi^2k\rho\sqrt{a^2+k^2}$$

故重心坐标为 $(0,0,k\pi)$

备用题

1. 设 C 是由极坐标系下曲线 $r=a,\ \theta=0$ 及 $\theta=\pi/4$ 所围区域的边界, 求

$$I=\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$$



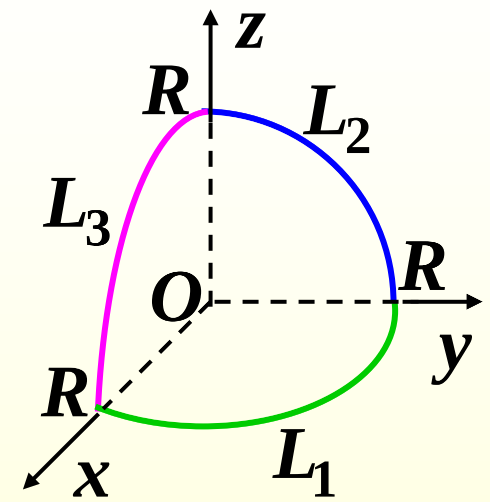
$\boxed{\mathrm{d}s=a\,\mathrm{d}\theta}$

提示: 分段积分

$$I=\int_0^a e^x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a\,\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}a+2\right)e^a-2$$

2. L为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一卦限与三个坐标面的交线，求其形心坐标.



解: 如图所示，交线长度为

$$l=3\int_{L_1}\mathrm{d}s=3\cdot\frac{2\pi R}{4}=\frac{3\pi R}{2}$$

由对称性，形心坐标为

$$\bar{z}=\bar{y}=\bar{x}=\frac{1}{l}\int_{L_1\cup L_2\cup L_3}x\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{l}\left[\int_{L_1}x\,\mathrm{d}s+\int_{L_2}\cancel{x\,\mathrm{d}s}+\int_{L_3}x\,\mathrm{d}s\right]=\frac{2}{l}\int_{L_1}x\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\cos\theta\cdot R\,\mathrm{d}\theta=\frac{4R}{3\pi}$$

复习 一、对弧长的曲线积分的计算中关键两步：

1、确定积分弧段L或者Γ的方程形式；

2、确定被积函数的表达式.　　　　注意积分限

思考 计算 $I=\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为球面

$x^2+y^2+z^2=9/2$ 与平面$x+z=1$的交线.

解: Γ的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2} \\ y=2\sin\theta \\ z=\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta \end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2+(\sqrt{2}\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\quad I=\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}2\mathrm{d}\theta=18\pi$$

二、对弧长的曲线积分的计算中常用技巧：

1、利用对称性(两种：经典对称性、轮换对称性)；

2、积分弧段函数代入被积函数.

思考 计算 $\oint_{\Gamma} x^2 \mathrm{d}s$, 其中$\Gamma$为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周.

解 由对称性可知 $\oint_{\Gamma} x^2 \mathrm{d}s = \oint_{\Gamma} y^2 \mathrm{d}s = \oint_{\Gamma} z^2 \mathrm{d}s$

$$\therefore \quad \oint_{\Gamma} x^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{3}\oint_{\Gamma} a^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{3}a^2 \cdot 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3$$

第二节

对坐标的曲线积分

一、对坐标的曲线积分的概念与性质

二、 对坐标的曲线积分的计算法

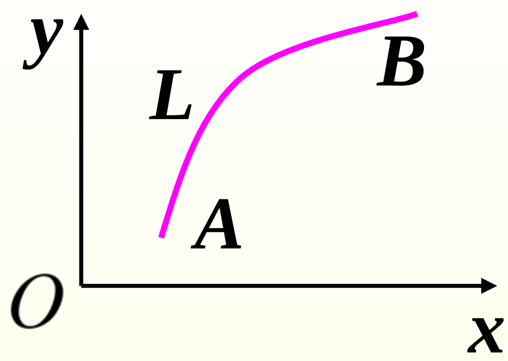
三、两类曲线积分之间的联系

一、 对坐标的曲线积分的概念与性质

1. 引例: 变力沿曲线所作的功.

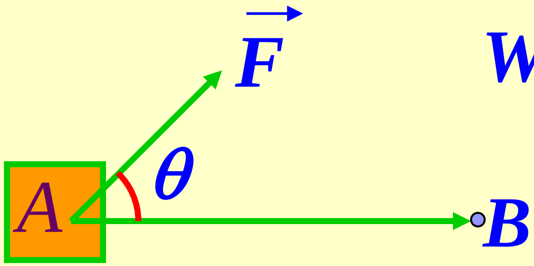
设一质点受如下变力作用

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$



在 xOy 平面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B,求移动过程中变力所作的功W.

常力沿直线所作的功



$$W=F\,|AB|\cos\theta$$

$$=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

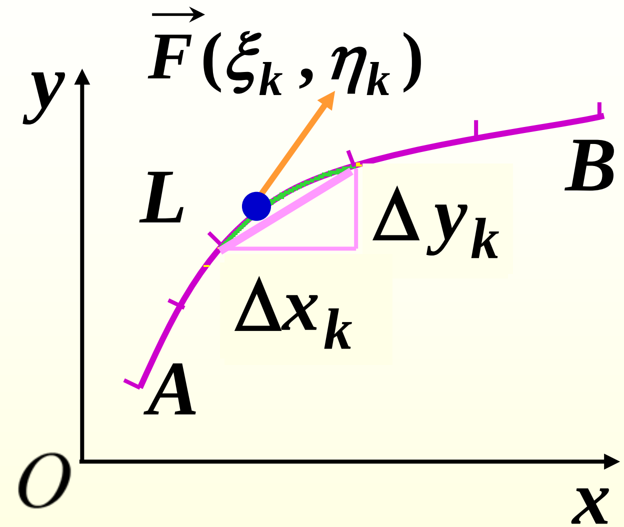
解决办法:

"分割"
"近似"
"求和"
"取极限"

1) “分割”

把L分成 n 个小弧段,$\vec{F}$ 沿 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 所做的功为 ΔW_k, 则

$$W=\sum_{k=1}^{n}\Delta W_k$$



2) “近似”

有向小弧段$\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$用有向线段 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}=(\Delta x_k,\Delta y_k)$ 近似代替, 在$\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$上任取一点 (ξ_k,η_k), 则有

$$\Delta W_k\approx\vec{F}(\xi_k,\eta_k)\cdot\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$$

$$=P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$$

上页 下页

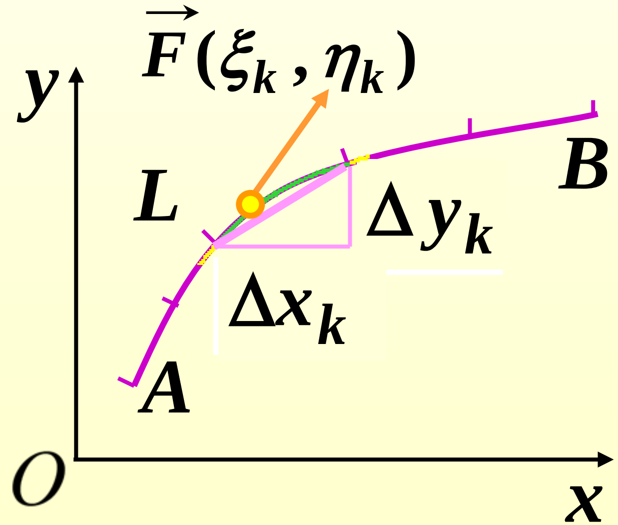
3) “近似和”

$$W \approx \sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

4) “取极限”

$$W = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

(其中λ为 n 个小弧段的最大长度)



上页 下页

2. 定义 设 L 为xOy 平面内从 A 到B 的一条**有向光滑弧**, 在L 上定义了一个向量函数

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

若对 L 的任意分割和在局部弧段上任意取点, 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

$$\overset{\text{记作}}{=\!=\!=}\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

都存在, 则称此极限为函数 $\vec{F}(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对**坐标的曲线积分**, 或**第二类曲线积分**. 其中, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 称为**被积函数**, L 称为**积分弧段** 或 **积分曲线** .

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k\,,$$

称为对 x 的曲线积分;

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\,,$$

称为对 y 的曲线积分.

若记 $\overrightarrow{\mathrm{d}r}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$, 对坐标的曲线积分也可写作

$$\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}r} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

类似地, 若 Γ 为空间曲线弧 , 记 $\overrightarrow{\mathrm{d}r}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$

$$\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}r} = \int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

3. 性质

(1)线性性质

$$\int_L \left[\alpha \vec{F}_1(x,y)+\beta \vec{F}_2(x,y)\right]\cdot \vec{dr} = \alpha\int_L \vec{F}_1(x,y)\cdot\vec{dr}+\beta\int_L \vec{F}_2(x,y)\cdot\vec{dr}$$

(2) 若 L 可分成 k 条有向光滑曲线弧 $L_i\ (i=1,\cdots,k)$,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{k}\int_{L_i} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

对坐标的曲线积分关于积分弧段具有可加性.

(3) 用 L^- 表示 L 的反向弧，则

$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

对坐标的曲线积分具有方向性.

说明:

- 对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的**方向**！
- 定积分是第二类曲线积分的特例.

$$\boxed{\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

物理意义：变力沿曲线做的功

$$W = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

二、对坐标的曲线积分的计算法

定理 设$P(x,y)$、$Q(x,y)$在有向曲线弧L上有定义且连续，

L的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，且满足下列条件：

（1）当参数t单调地由α变到β时，点$M(x,y)$从L的起点A

沿L运动到终点B；

（2）函数$\varphi(t)$，$\psi(t)$在以α,β为端点的闭区间上具有

一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$；

则 $$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

证明 下面先证

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

根据定义 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$

设分点 x_i 对应参数 t_i，点(ξ_i,η_i) 对应参数 τ_i，由于

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

$$\therefore \int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

因为L 为光滑弧，所以$\varphi'(t)$连续

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

$$\therefore \int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\,\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

$$= \int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

同理可证 $\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta Q[\varphi(t),\psi(t)]\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t$

$$\therefore \int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\,\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\,\psi'(t)\}\,\mathrm{d}t$$

如果 L 的方程为 $y=\varphi(x),\ x: a\to b,$ 则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\,\varphi'(x)\}\mathrm{d}x$$

下限$a \longleftrightarrow$ L起点;　上限$b \longleftrightarrow$ L终点.

如果 L 的方程为 $x=\psi(y),\ y: c\to d,$ 则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d\{P[\psi(y),y]\psi'(y)+Q[\psi(y),y]\}\,\mathrm{d}y$$

下限$c \longleftrightarrow$ L起点;　上限$d \longleftrightarrow$ L终点.

对空间光滑曲线弧 Γ: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ $t:\alpha\to\beta$, 类似有

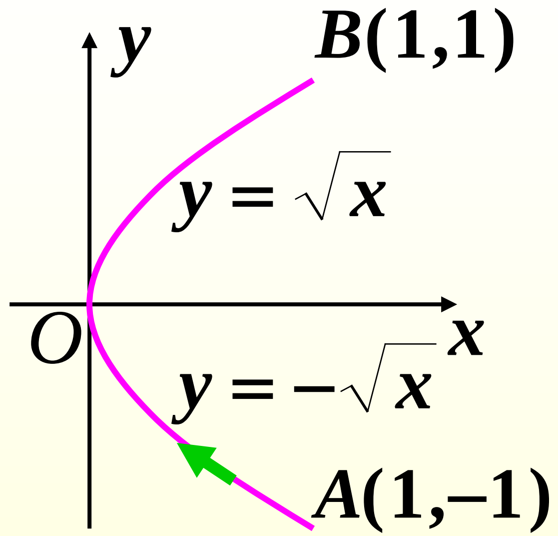
$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

注意 计算对坐标的曲线积分，一定将积分曲线化为参数方程，且积分下限对应着起点，上限对应着终点.

例1 计算 $\int_L xy\,\mathrm{d}x$，其中L 为沿抛物线 $y^2 = x$ 从点 $A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段.



解法1 取 x 为参数, 则$L: \overset{\frown}{AO} \cup \overset{\frown}{OB}$

$$\overset{\frown}{AO}: \; y=-\sqrt{x}, \quad x: 1 \to 0$$

$$\overset{\frown}{OB}: \; y=\sqrt{x}, \quad x: 0 \to 1$$

$$\therefore \int_L xy\,\mathrm{d}x = \int_{\overset{\frown}{AO}} xy\,\mathrm{d}x + \int_{\overset{\frown}{OB}} xy\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^0 x(-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}$$

解法2 取 y 为参数, 则$L: x = y^2, \; y: -1 \to 1$

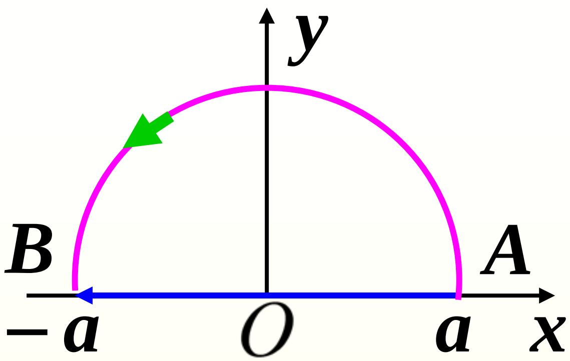
$$\therefore \int_L xy\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} y^2 y (y^2)'\,\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1} y^4\,\mathrm{d}y = \frac{4}{5}$$

上页 下页

例2 计算 $\int_L y^2\,\mathrm{d}x$，其中 L 为

(1) 半径为 a 圆心在原点的上半圆周，方向为逆时针方向；

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$.



解 (1) 取L的参数方程为 $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t: 0 \to \pi$

则 $$\int_L y^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} a^2\sin^2 t \cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -2a^3\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\,\mathrm{d}t = -2a^3\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = -\frac{4}{3}a^3$$

(2) 取 L 的方程为 $y = 0,\ x: a \to -a$，则

$$\int_L y^2\,\mathrm{d}x = \int_a^{-a} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

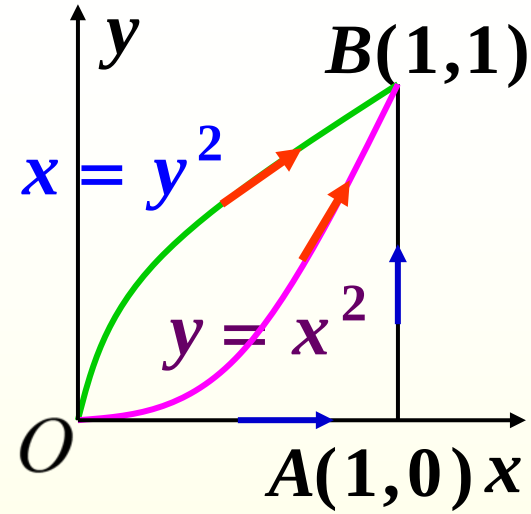
对坐标的曲线积分一般与路径有关。

例3 计算 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, 其中$L$为

(1) 抛物线 $L: y = x^2,\ x: 0 \to 1$;

(2) 抛物线 $L: x = y^2,\ y: 0 \to 1$;

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} \cup \overline{AB}$.



解 (1) 原式 $= \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = 1$

(2) 原式 $= \int_0^1 (2y^2 y \cdot 2y + y^4)\,\mathrm{d}y = 5\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}y = 1$

(3) 原式 $= \int_{\overline{OA}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$

$= 0 + \int_0^1 \mathrm{d}y = 1$

该积分只与路径的起点和终点有关,与路径无关. ?