习题 10.1

1. 计算下列第一类曲线积分：

(1) $\int_C \sqrt{x}\mathrm{d}s$，其中 C 为曲线 $y^2 = x$ 上由原点到点 $(1,1)$ 之间的一段弧.

(2) $\int_C xy\mathrm{d}s$，其中 C 为矩形回路 $x=0, y=0, x=4, y=2$.

(3) $\oint_C (x+y)\mathrm{d}s$，其中 C 以 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形的边界.

(4) $\int_C (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 C 为平面曲线 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

(5) $\int_C x\sin y\mathrm{d}s$，其中 C 为 $\begin{cases} x=3t, \\ y=t \end{cases}$ $(0\le t\le 1)$.

(6) $\int_C (x^2+y^2)^n\mathrm{d}s$，其中 C 为圆弧 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$.

(7) $\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}s$，其中 C 为星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases} \left(0\le t\le \dfrac{\pi}{2}\right)$ 在第一象限内的弧段.

(8) $\int_C |y|\mathrm{d}s$，其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

(9) $\oint_C (|x|+|y|)\mathrm{d}s$，其中 C 由直线 $|x|+|y|=1$ 组成.

(10) $\int_C (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s$，其中 C 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为 a.

2. 计算下列第一类曲线积分：

(1) $\int_L (x+y+z)^2\mathrm{d}s$，其中 L 为由点 $A(2,1,2)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 的直线段.

(2) $\int_L z\mathrm{d}s$，其中 L 为圆锥螺线 $\begin{cases} x=t\cos t, \\ y=t\sin t, \\ z=t \end{cases}$ 从 $t=0$ 到 $t=t_0 (t_0>0)$ 一段.

(3) $\int_L \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 L 为曲线 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\cos t, \\ y=\mathrm{e}^t\sin t, \\ z=\mathrm{e}^t \end{cases}$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧.

3. 试用 Lagrange 乘数法求函数 $f(x,y)=x^3y$ 在条件 $3x+4y=12\ (0<x<4)$ 下的最大值，并证明不等式

$$5\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}} \le \int_C \mathrm{e}^{-\sqrt{x^3y}}\mathrm{d}s \le 5,$$

其中 C 是直线 $3x+4y=12$ 介于两坐标轴间的线段.

4. 有一铁丝成半圆形 $x=a\cos t$， $y=a\sin t\ (0\le t\le\pi)$，其上每一点密度等于该点的纵坐标，求铁丝的质量.

5. 求摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 的第一拱 $(0\le t\le 2\pi)$ 关于 Ox 轴的转动惯量(假定其上各点的密度与该点到 x 轴的距离成正比).

6. 计算下列第一类曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}\left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限部分.

(2) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}S$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

(3) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{r^2}$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=R^2\ (0\le z\le H)$，$r$ 为柱面上的点到原点的距离.

(4) $\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\mathrm{d}S$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所截下的部分.

(5) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截下的部分.

7. 计算球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所截下部分的曲面的面积.

8. 若半径为 R 的球面上每点的面密度等于该点到某一固定直径的距离平方，试求该球面的质量.

9. 求旋转抛物面 $z=\frac{x^2+y^2}{2}$ 被平面 $z=2$ 所截部分的质心位置(假定其上各点的面密度与该点到 z 轴的距离平方成正比).