习题 3.1

1. 一物体从 400 m 的高空下落，它下落 t 时刻(单位：s)时距地面的高度是

$$h = -16t^2 + 400 \,(\mathrm{m}).$$

   (1) 求在前 4 s 内物体下落的平均速度；(2) 求在第 4 s 时物体下落的瞬时速度.

2. 一直圆锥体因受热膨胀，在膨胀过程中，其高与底的直径保持相等(单位：cm).

   (1) 求体积关于半径的变化率？(2) 当半径为 5 cm 时，体积关于半径的变化率是多少？

3. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，利用导数的定义求下列各式的值：

   (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，其中 $f(0)=0$；

   (2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

   (3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$；

   (4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x_0+3h)-f^2(x_0-h)}{h}$；

   (5) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0 f(x)}{x-x_0}$.

4. 按定义求下列函数的导数（其中 a 、b 为常数）：

   (1) $f(x)=x^2+3x-1$；　　(2) $f(x)=\mathrm{e}^{ax}$；

   (3) $f(x)=\cos(ax+b)$；　　(4) $f(x)=x\sin x$.

5. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的连续正值函数，且 $f(0)=1$， $f'(0)=2$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^{\frac{1}{x}}$.

6. 设 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在. 证明： $f'(0)=0$.

7. 按定义证明：

   (1) 可导的偶函数的导函数是奇函数，可导的奇函数的导函数是偶函数；

   (2) 可导的周期函数的导数仍是周期函数，且周期不变.

8. 设在 $\mathbb{R}$ 上定义的函数 $f(x)$ 分别满足：

   (1) 对 $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$ 有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，且 $f'(0)=1$，求 $f'(x)$.

   (2) 对 $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，且 $f'(0)$ 存在，求 $f'(x)$.

   (3) 对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 有 $f(1+x)=af(x)$，且 $f'(0)=b$，求 $f'(1)$.

9. 在抛物线 $y=x^2$ 上求一点 P ，使得抛物线在 P 点的切线分别满足：

   ⑴ 平行于直线 $y=4x-5$；

   ⑵ 垂直于直线 $2x-6y+5=0$；

   ⑶ 与直线 $3x-y+1=0$ 的夹角为 45°.

10. 求下列曲线在指定点的切线方程和法线方程：

    (1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在对应于 $x=1$ 的点处；

    (2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在对应于 $x=9$ 的点处.

11. 在抛物线 $x^2=2py\,(p>0)$ 的焦点处放置一光源，试证由抛物线反射出的任一光线与 y 轴平行.

12. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积都等于常数.

13. 若 $F(x)$ 在 a 点连续，且 $F(x)\neq 0$，讨论下列函数在 $x=a$ 处的可导性，并说明理由：

(1) $f(x)=|x-a|F(x)$；(2) $f(x)=(x-a)F(x)$；

14. 求下列函数在点 x_0 处的左右导数，并指出它在该点的可导性：

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geq 0,\\ x^2, & x<0,\end{cases}\quad x_0=0$；

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & x\leq 1,\\ 2-x, & x>1,\end{cases}\quad x_0=1$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad x_0=0$；

(4) $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x\geq 0,\\ x, & x<0,\end{cases}\quad x_0=0$.

15. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性和可导性：

(1) $y=|\sin x|$；

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0\ , & x=0.\end{cases}$

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq x_0,\\ ax+b, & x>x_0\end{cases}$ 在 x_0 处连续且可导，试求 a,b.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，又 $F(x)=(1+|\sin x|)f(x)$. 证明：$F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是 $f(0)=0$.