第4次作业：4.3，4.12

4.3

设有一条边远山区的道路 AB,沿着道路 AB 分布着 n 所房子.这些房子到 A 的距离分别是 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ $(d_1 < d_2 < \cdots < d_n)$.为了给所有房子的用户提供移动电话服务,需要在这条道路上设置一些基站.为了保证通信质量,每所房子应该位于距离某个基站的 4 千米范围之内.设计一个算法找到基站的位置,并且使得基站总数达到最少.用文字说明算法的主要设计思想;给出算法的伪码描述;证明算法的正确性并给出算法

更新的条件是：$d_j \le a_k - 4 < d_{j+1}$,更换的操作是 $a_{k+1} = d_{j+1} + 4$

4.3 使用贪心法. 令 $a_1, a_2, \cdots$ 表示基站的位置.

贪心策略：首先令 $a_1 = d_1 + 4$. 对 $d_2, d_3, \cdots, d_n$ 依次检查，找到下一个不能被该基站覆盖的房子. 如果 $d_k \leqslant a_1 + 4$ 但 $d_{k+1} > a_1 + 4$，那么第 $k+1$ 个房子不能被基站覆盖，于是取 $a_2 = d_{k+1} + 4$ 作为下一个基站的位置. 照此下去，直到检查完 d_n 为止.

算法的伪码如下：

Location

输入：距离 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 的数组 $d[1..n]$，满足 $d[1] < d[2] < \cdots < d[n]$

输出：基站位置的数组 a

```
a[1]←d[1]+4
k←1
for j←2 to n
    if d[j]>a[k]+4
    then k←k+1
         a[k]←d[j]+4
return a
```

算法正确性证明使用归纳法.

命题 4.3 对任何正整数 k,存在最优解包含算法前 k 步选择的基站位置.

证 $k=1$,存在最优解包含 $a[1]$. 若不然,有最优解 OPT,其第一个位置是 $b[1]$,$b[1]\neq a[1]$,那么 $d_1-4\leqslant b[1]<d_1+4=a[1]$. $b[1]$覆盖的是距离在$[d_1,b[1]+4]$之间的房子. $a[1]$覆盖的是距离在$[d_1,a[1]+4]$的房子. 因为 $b[1]<a[1]$,$b[1]$覆盖的房子都在 $a[1]$覆盖的区域内,用 $a[1]$替换 $b[1]$,得到的仍旧是最优解.

假设对于 k,存在最优解 A 包含算法前 k 步选择的基站位置,即

$$A=\{a[1],a[2],\cdots,a[k]\}\cup B$$

其中 $a[1],a[2],\cdots,a[k]$覆盖了距离 $d_1,d_2,\cdots,d_j$ 的房子. 那么,B 是关于 $L=\{d_{j+1},d_{j+2},\cdots,d_n\}$的最优解. 否则,存在关于 L 的更优的解 B^*,那么用 B^* 替换 B 就得到 A^*,且$|A^*|<|A|$,与 A 的最优性矛盾. 根据归纳基础,L 有一个最优解 $B'=\{a[k+1],\cdots\}$,$|B'|=|B|$. 于是

$$\begin{aligned}A'&=\{a[1],a[2],\cdots,a[k]\}\cup B'\\&=\{a[1],a[2],\cdots,a[k],a[k+1],\cdots\}\end{aligned}$$

且$|A'|=|A|$,A'也是最优解. 从而证明了命题对 $k+1$ 也为真. 根据归纳法,对任何正整数 k 命题都成立.

第 3 行的 for 循环运行 $O(n)$次,循环体内操作为常数时间,因此算法最坏情况下的时间复杂度是 $O(n)$.

4.3伪码描述（若是断头路）

输入：n所房子到A的距离d_1，$d_2...d_n$（$d_1<d_2<...<d_n$），B到A的距离S

输出：基站位置集合I

```
i ←1
if  d_i+4>S  then
        I←{第i所房子与B间任一点};
else
        I←{d_i+4};
end
for  j←2  to  n  do
       if  |d_j-(d_i+4)|≤4  then
                      I←I;
       else
                if  d_j+4>S  then;
                       I ← I∪{第j所房子与B间任一点};
                else
                       I ← I∪{d_j+4} ;
                end
                 i←i+1;
           end
end
return I;
```

4.3伪码描述（张老师改进后）

输入：n所房子到A的距离d_1，$d_2...d_n$（$d_1<d_2<...<d_n$）

输出：基站位置集合I

```
if  d_i+4>S  then
        return {第1所房子与B间任一点};
else
        i ←1;
        I[1]←{d_i+4};
        寻找d_m,满足d_m<B- 4≤ d_{m+1};
end
for  j←2  to  m  do
        if  d_j> I[i] +4  then
                i ← i+1 ;
                I [i] ← {d_j+4} ;
        end
end
for  j←m+1  to  n  do
        if  d_j> I[i] +4  then
                i ← i+1 ;
                I [i] ← {第j所房子与B间任一点};
                break
        end
return I;
```

4.12

设字符集 S,其中 8 个字符 A,B,C,D,E,F,G,H 的频率是 $f_1,f_2,\cdots,f_8$,且 $100\times f_i$ 是第 i 个 Fibannaci 数的值,$i=1,2,\cdots,8$.

(1) 给出这 8 个字符的 Huffman 树和编码.

(2) 如果有 n 个字符,其频率恰好对应前 n 个 Fibanacci 数,那么对应的 Huffman 树是什么结构,证明你的结论.

4.12

4. 12 （1）Huffman 树如图 4. 2 所示. 编码为

H：0， G：10， F：110， E：1110， D：11110，

C：111110， B：1111110， A：1111111

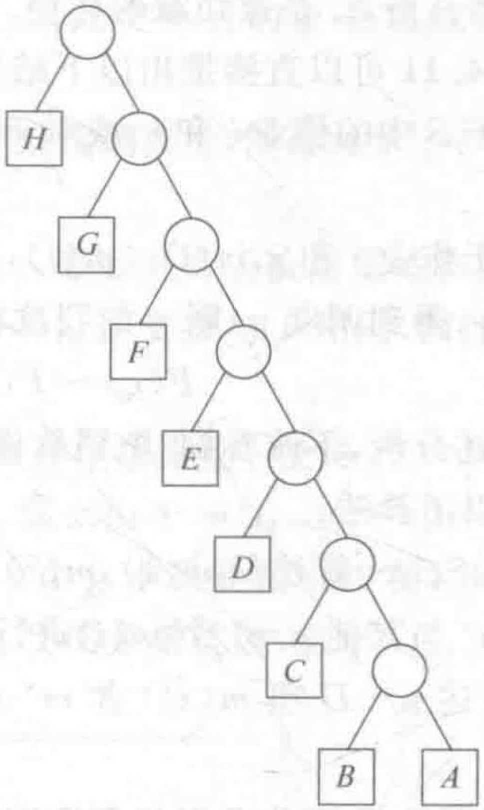


图 4. 2 Huffman 树

命题 4.10 设 $f_1, f_2, \cdots$ 为 Fibonacci 数列，则

$$\sum_{i=1}^{k} f_i \leqslant f_{k+2}$$

证 对 k 归纳.

当 $k=1$ 时，$f_1 < f_3$ 显然为真.

假设 $k=n$ 时命题成立，则 $k=n+1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i + f_{n+1} \leqslant f_{n+2} + f_{n+1} = f_{n+3}$$

所以命题对于 $k=n+1$ 成立.

综上所述，$\sum_{i=1}^{k} f_i \leqslant f_{k+2}$ 对任意正整数 k 成立.

根据命题 4.10，前 k 个字符合并后子树的根的权值不大于第 $k+2$ 个 Fibonacci 数. 根据 Huffman 算法，它将继续参加与第 $k+1$ 个字符的合并. 因此 n 个字符的 Huffman 编码按照频率从小到大依次是：

11…1(含 $n-1$ 个 1)， 11…10(含 $n-2$ 个 1)， 11…10(含 $n-3$ 个 1)，…， 10， 0

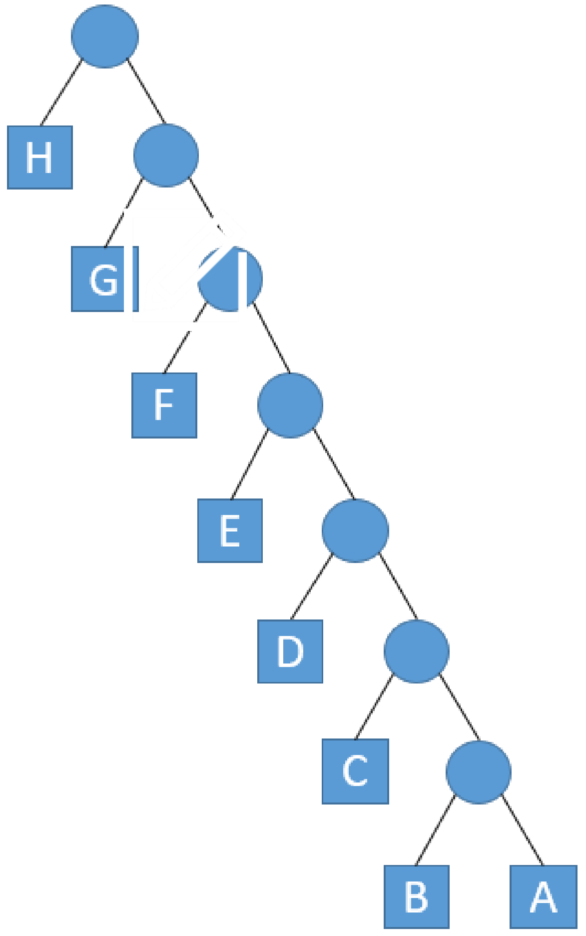
即第 $i(i>1)$ 个字母的编码为 11…10(含 $n-i$ 个 1).

习题4.12

设字符集S，其中8个字符ABCDEFGH的频率是f1，f2，…，且100×fi，是第i个Fibonacci数的值，i=1，2，…，8.（课本第112页）

1. 给出这8个字符的Huffman树和编码；
2. 如果有n个字符，其频率恰好对应前n个Fibonacci数，那么Huffman树是什么结构，证明你的结论。

（1）



Huffman树

H：0

G：10

F：110

E：1110

D：11110

C：111110

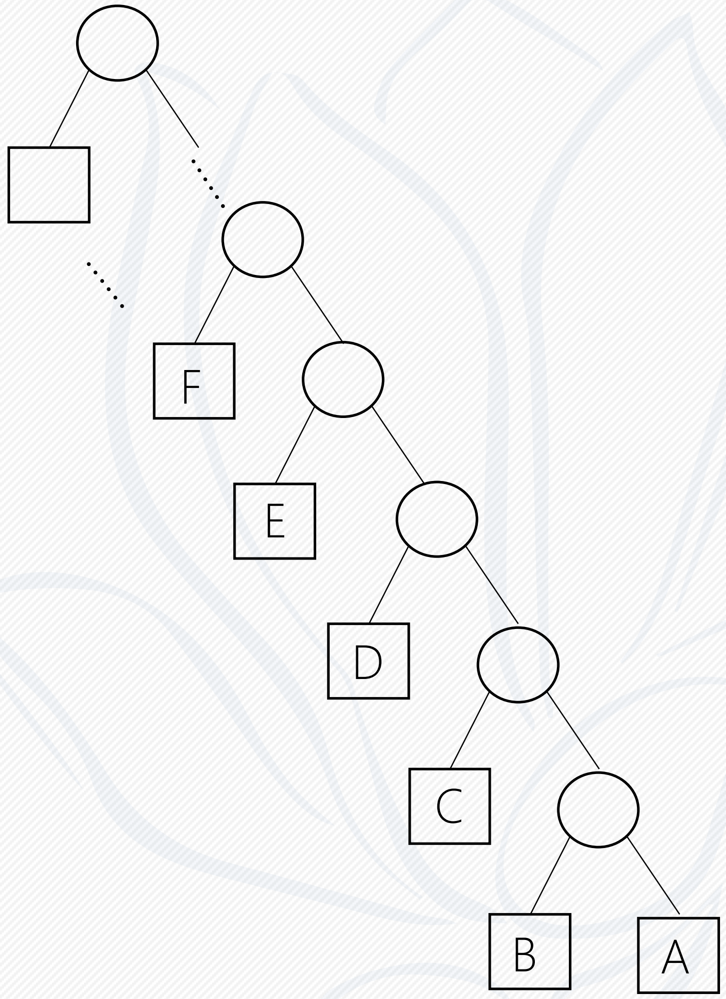
B：1111110

A：1111111

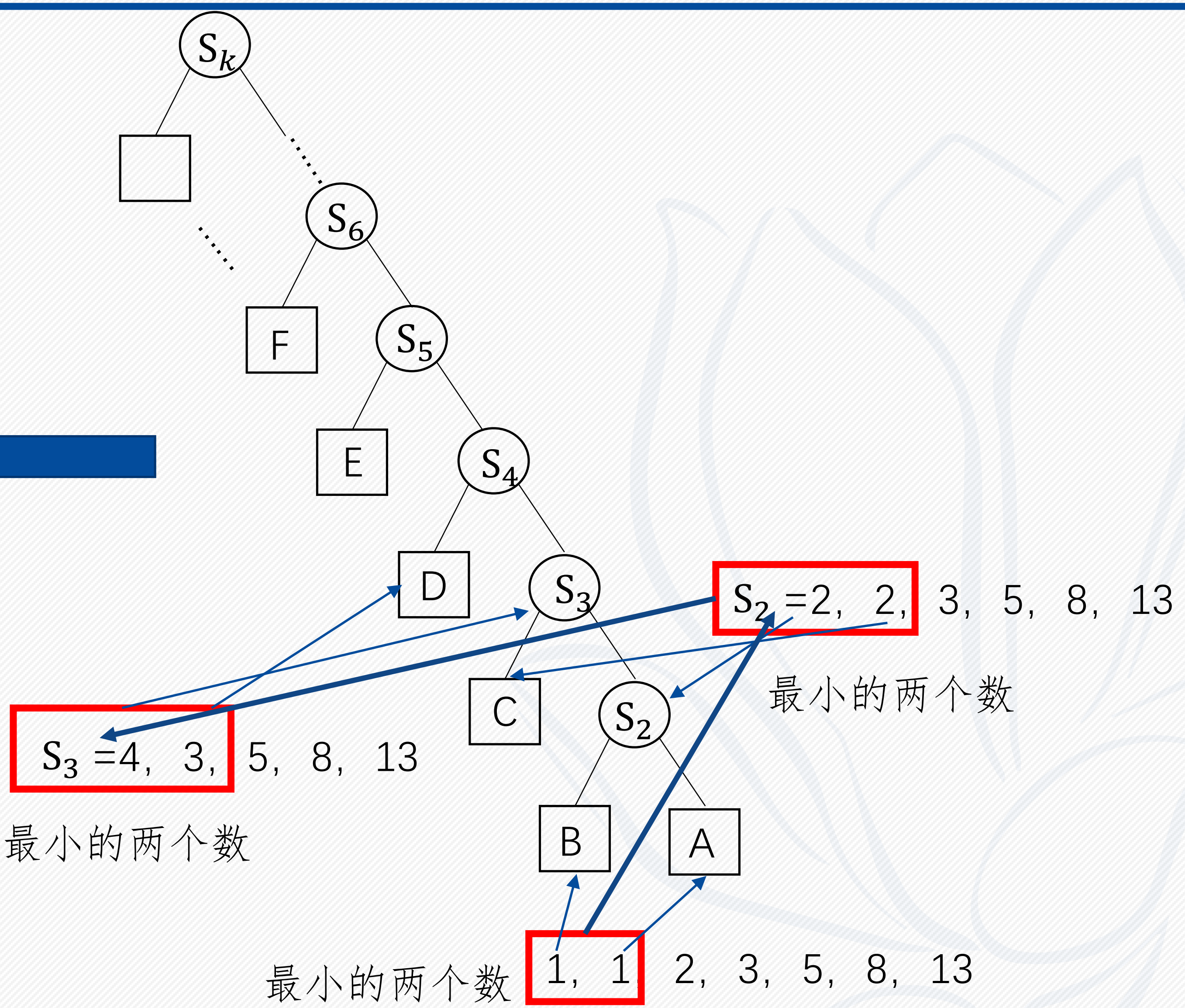
左零右一
左小右大

(2)如果有n个字符,其频率恰好对应前n个Fibonacci数,那么Huffman树是什么结构，证明你的结论.

Huffman树结构：



Fibonacci数：1，1，2，3，5……($a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$)



S_k必须是最小的两个数之一

S_k不小于最小的两个数中的另外一个

习题4.12

证明Huffman树满足该结构

S_k必须是最小的两个数之一
S_k不小于最小的两个数中的另外一个

习题4.12

S_k必须是最小的两个数 ⟷ $S_k < a_{k+2}$

证明Fibonacci数列满足$S_k < a_{k+2}$

数学归纳法：

对k=1

$S_1 = a_1 = 1 < a_3$=2

假设对k=n成立，即$S_n < a_{n+2}$

当k=n+1时

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} < a_{n+2} + a_{n+1} = a_{n+3}$(递推公式)

所以命题对n+1项也成立

综上，命题对任意正整数k都成立

习题4.12

S_k不小于最小的两个数中的另外一个 ⟺ $S_k \geq a_{k+1}$

证明Fibonacci数列满足$S_k \geq a_{k+1}$

数学归纳法：

对k=1

$S_1 = a_1 = 1 = a_2$=1

假设对k=n成立，即$S_n \geq a_{n+1}$

当k=n+1时

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq a_{n+1}+ a_{n+1} \geq a_{n+1}+$

$a_n = a_{n+2}$(递推公式)

所以命题对n+1项也成立

综上，命题对任意正整数k都成立

证明Huffman树满足该结构

$\Updownarrow$

S_k必须是最小的两个数之一（得证）
S_k不小于最小的两个数中的另外一个（得证）

综上命题得证

西南大學

谢谢

Thank you for listening