

习题 5.5

1. 求下列定积分:

$$(1) \int_0^1 x^2(x^2-2)^2 dx;$$

$$(2) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(3) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x};$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx;$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx;$$

$$(6) \int_0^3 \sqrt{(x-2)^2} dx;$$

$$(7) \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos x} dx;$$

$$(8) \int_0^3 x^2 \cdot [x] dx.$$

2. 求下列定积分:

$$(1) \int_{-5}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}};$$

$$(2) \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx;$$

$$(3) \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx;$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx;$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx;$$

$$(6) \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x};$$

$$(7) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx;$$

$$(8) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

3. 求下列定积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{x dx}{1+\sqrt{x}};$$

$$(2) \int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})};$$

$$(3) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

- (4) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}};$
 (5) $\int_0^2 \frac{dx}{2+\sqrt{4+x^2}};$
 (6) $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0);$
 (7) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$
 (8) $\int_{-1}^1 \cos x \ln \frac{2+x}{2-x} dx;$
 (9) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx;$
 (10) $\int_0^{\pi} x \sin^6 x \cos^4 x dx.$

4. 求下列定积分:

- (1) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx;$
 (2) $\int_0^{2\pi} x \cos^2 x dx;$
 (3) $\int_1^e (x \ln x)^2 dx;$
 (4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx;$
 (5) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx;$
 (6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx;$
 (7) $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2} dx;$
 (8) $\int_0^1 x \sqrt{(1-x^4)^3} dx;$
 (9) $\int_0^4 x^2 \sqrt{4x-x^2} dx;$
 (10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+\cos 2x}.$

5. 设 $(0, +\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 分别满足下列条件, 求 $f(x)$ 的表达式:

- (1) $f(x) = \sin x + \int_0^{\pi} f(x) dx;$
 (2) $f(x) = 2 \ln x - x^2 \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx;$
 (3) $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx.$

6. 求下列定积分:

$$(1) \int_1^3 f(x-2)dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0, \\ \frac{1}{e^x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$(2) \int_1^4 f(x-2)dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0. \end{cases}$$

7. 求下列定积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx, \text{ 其中 } f(x) = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}} \frac{dt}{1+\tan t^2};$$

$$(2) \int_0^{\pi} f(x)dx, \text{ 其中 } f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt.$$

8. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上具有二阶连续导数:

$$(1) \text{ 设 } f(2)=1, f'(2)=0 \text{ 且 } \int_0^2 f(x)dx=4. \text{ 求 } \int_0^1 x^2 f''(2x)dx.$$

$$(2) \text{ 设 } f(0)=2, f(\pi)=1. \text{ 求 } \int_0^{\pi} [f(x)+f''(x)] \sin x dx.$$

9. 已知函数 $f(x)$ 连续, 且分别满足下列条件:

$$(1) \text{ 设 } \int_0^x tf'(x-t)dt = 1 - \cos x, \text{ 求 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx.$$

$$(2) \text{ 设 } f(1)=1, \text{ 且 } \int_0^x tf'(2x-t)dt = \frac{\arctan x^2}{2}, \text{ 求 } \int_1^2 f(x)dx.$$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $U(0)$ 可导, 且 $f(0)=0$. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt}{x^{2n}} (n \in \mathbb{N}_+).$

11. 利用 Simpson 法近似计算下列积分, 精确到小数点后三位:

$$(1) \int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x} dx \text{ (把区间分成六等份);}$$

$$(2) \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \text{ (把区间分成十等份).}$$