习题 2. 1

1. 用观察法指出下列数列的极限，并按定义验证之：

   (1) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$；

   (2) $a_1 = 0.9,\ a_2 = 0.99,\ \cdots, a_n = 0.9\cdots9\ (n\text{个}9), \cdots$.

2. 用数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义，证明下列极限：

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0$；

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{2n+1} = \dfrac{3}{2}$；

   (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+n+9}{7n^3-8} = 0$；

   (4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}$；

   (5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$；

   (6) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}) = 0$.

3. 设$\{a_n\}$为一正项数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$，证明数列$\{a_n\}$当 n 充分大后为单调减数列.

4. 若数列$\{a_n\}$满足 $a_n \le q a_{n-1}$，其中 $a_n > 0$，$0 < q < 1$，试用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$，并举例说明：如果数列$|a_n|$收敛，数列 a_n 未必收敛.

6. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 若$a \ne 0$，试用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$；又若 $a = 0$，问 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在否？

7. 设有数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = a\ (a \ne 0)$且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

8. 根据定义证明下列数列为无穷小：

   (1) $a_n = \dfrac{10}{n!}$；　(2) $a_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$；　(3) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1}$.

9. 根据定义证明下列数列为正无穷大：

   (1) $x_n = \ln n$；　(2) $x_n = \dfrac{n^2+1}{3n-1}$.

10. 举出满足下列要求的数列的例子：

    (1) 有界数列但无极限；　(2) 无界数列但不是无穷大.

11. 证明定理 2.3. 即若 $x_n \ne 0$，则

    (1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \infty$.