西南大學

贪心算法

张里博

lbzhang@swu.edu.cn

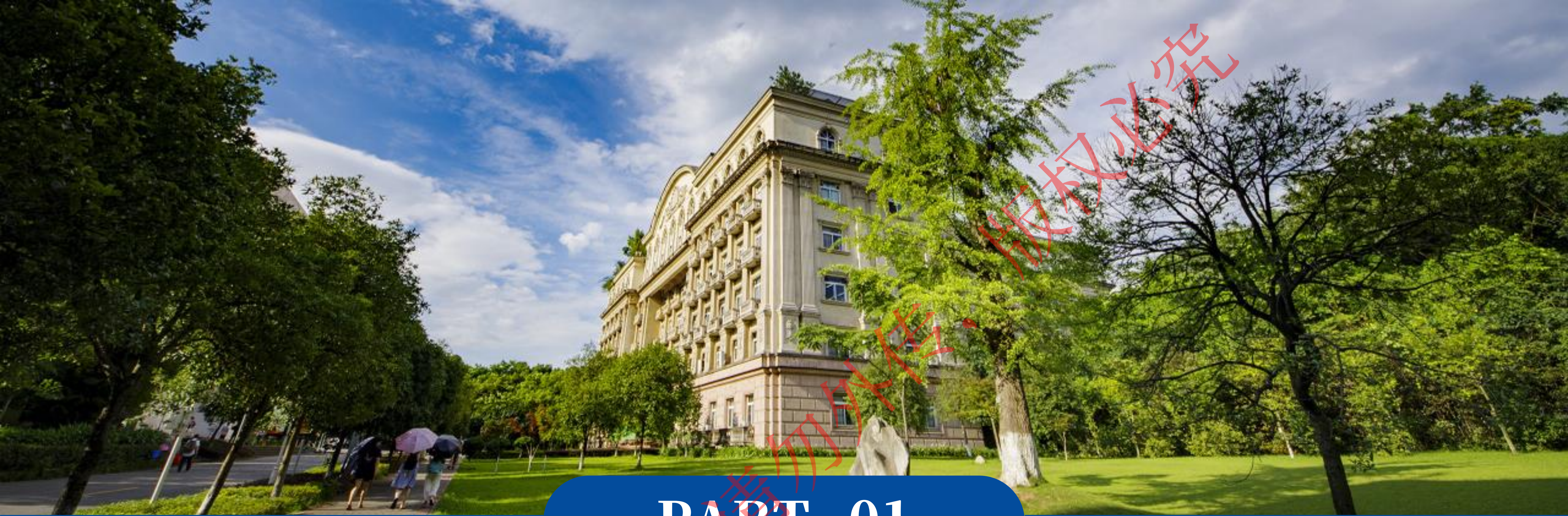
目录

1 贪心算法的设计思想

3 具体应用案例分析-Prim算法

4 正确性证明2：数学归纳法（规模）

5 正确性证明3：交换论证



PART 01

贪心算法的设计思想

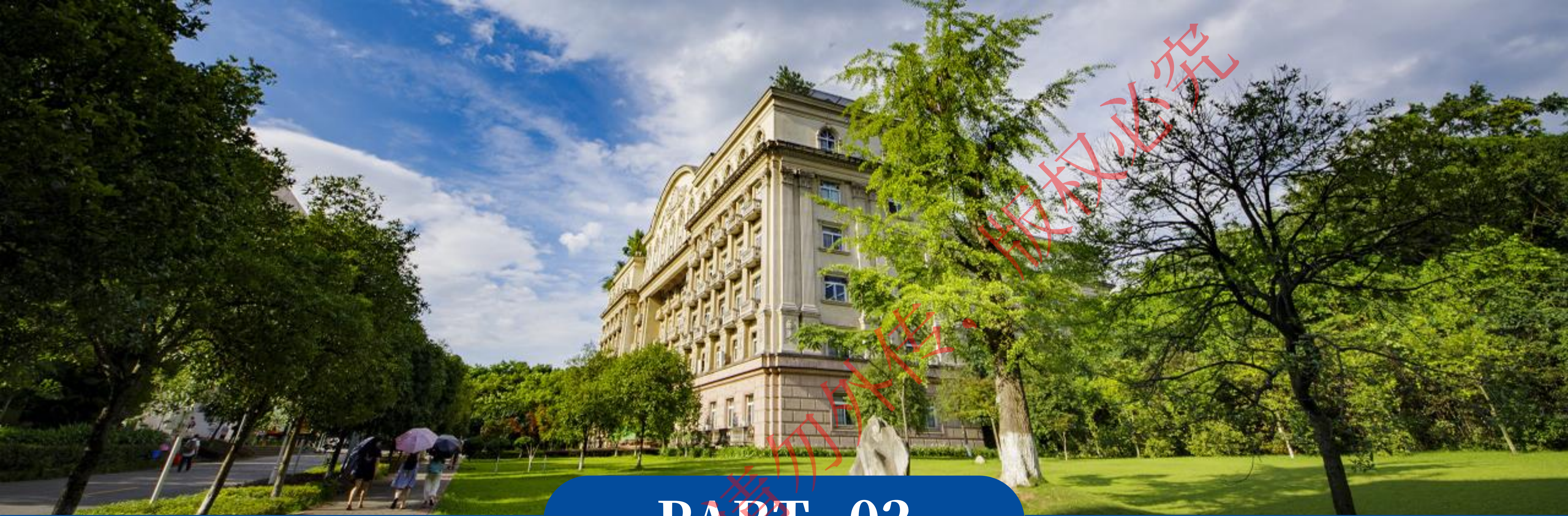
Greedy Algorithm

贪心算法

贪心算法（又称贪婪算法），是指在求解组合优化问题时，总是做出在当前看来是最好的选择。该算法不从整体最优上加以考虑，“只顾眼前”，某种意义上的局部最优解。

贪心算法不是对所有问题都能得到整体最优解。因此，贪心算法需要经过证明。

其基本步骤为：①把求解的问题分成若干个子问题；②对每一子问题求解，得到子问题的局部最优解；③把子问题的解局部最优解合成原来解问题的一个解。



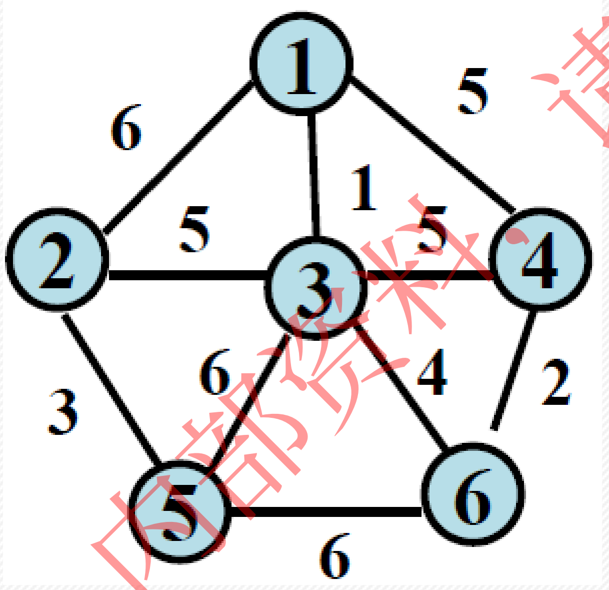
PART 02

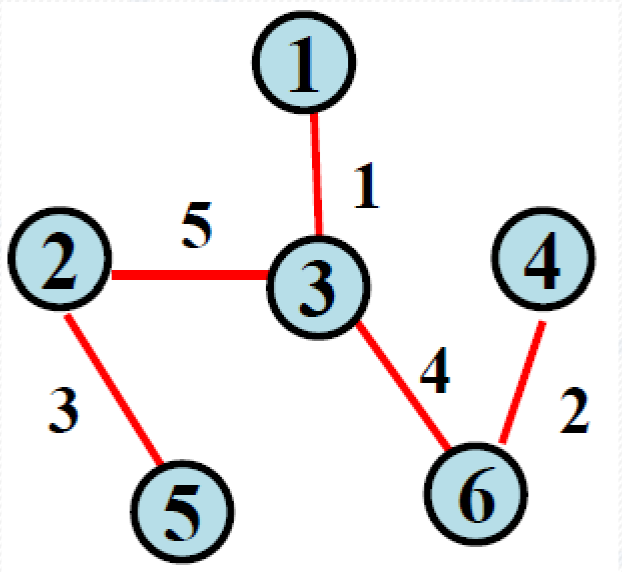
应用：最小生成树（PRIM）

Greedy Algorithm

最小生成树（PRIM）

- 无向连通带权图 $G=(V,E,W)$，$w(e)\in W$是边e的权.
- G的一棵生成树是包含了G的所有顶点的树, 树中各边的权之和称为树的权
- 目标：寻找具有最小权的生成树称为 G 的最小生成树.





求最小生成树

- 无向连通带权图 $G=(V,E,W)$，$w(e)\in W$是边e的权.求G 的最小生成树.
- 贪心算法：**Prim** 算法，**Kruskal** 算法
- 生成树在网络中有着重要应用:
  - 网络设计.
    - 电话,电信, TV 电缆,道路
  - 间接的应用.
    - 最大瓶颈路径
    - 网桥的自动配置协议构建（避免环路）
    - ……

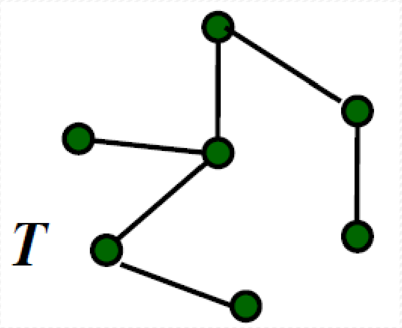
生成树的性质

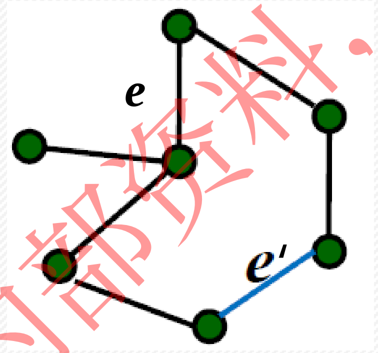
- **命题4.1** 设G是 n 阶连通图，那么：

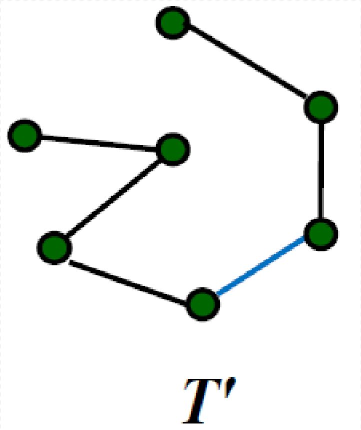
(1)T是G 的生成树当且仅当 T无圈且有$n-1$条边.

(2)如果T是G的生成树， $e' \notin T$，那么$T \cup \{e'\}$含有一个圈 (回路).

(3)去掉$T \cup \{e'\}$中圈的任意一条边e，能得到G的另一个生成树T'.







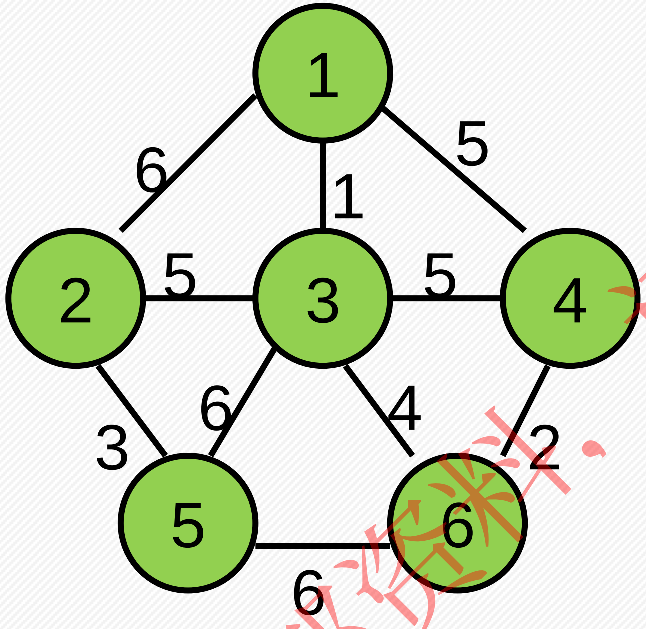
若$W(e') < W(e)$，
则$W(T') < W(T)$.

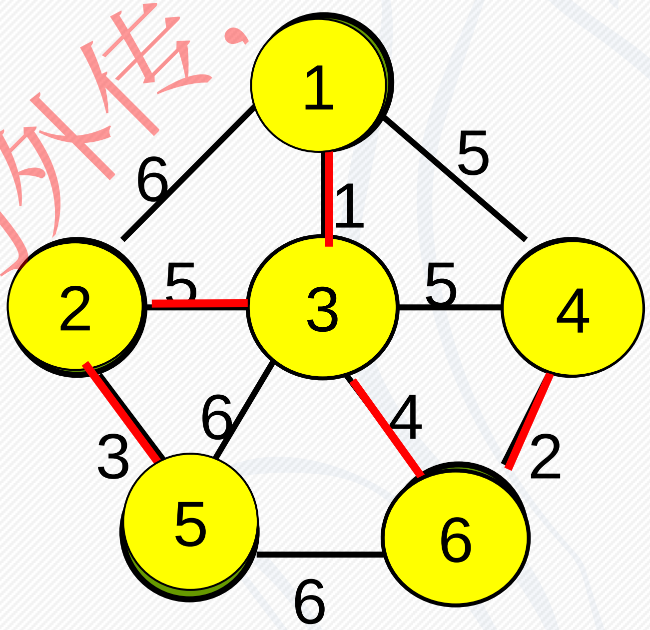
PRIM算法

- **输入：连通图 $G = \langle V, E, W \rangle$**
- **输出：G 的最小生成树T**

- ***Idea***
- 首先置S={1}，把顶点1放进S集合中；
- 然后，只要S是V的真子集，就做如下贪心选择：
  - 寻找连接S与V-S的最短边（$i \in S$，$j \in V\text{-}S$，且$c[i][j]$是最小的边），将顶点j添加到S中，边添加到T中；
- 继续这个过程，直到S=V时为止。

实例





PRIM算法

算法4.5 Prim

输入：连通图 $G = \langle V, E, W \rangle$

输出：G 的最小生成树 T

1．$S \leftarrow \{1\}$； $T \leftarrow \varnothing$;

2．while $V - S \neq \varnothing$ do

3．   从 $V-S$ 中选择 j 使得 j 到 S 中顶点的边 e 的权最小;

4． $S \leftarrow S \cup \{j\}$; $T \leftarrow T \cup \{e\}$;

5．end

正确性证明

- 定理4.8 对于任意 $k < n$, 存在一棵最小生成树包含Prim算法前 k 步选择的边。（对步数归纳）

- 归纳基础：$k=1$
- 存在一棵最小生成树 T 包含边 $e_1 = (1, i)$, e_1是所有关联顶点 1 的边中权最小的。

- 归纳步骤：
- 假设存在最小生成树包含Prim算法前k-1步选择的边，则一定存在最小生成树包含Prim算法前k步选择的边。

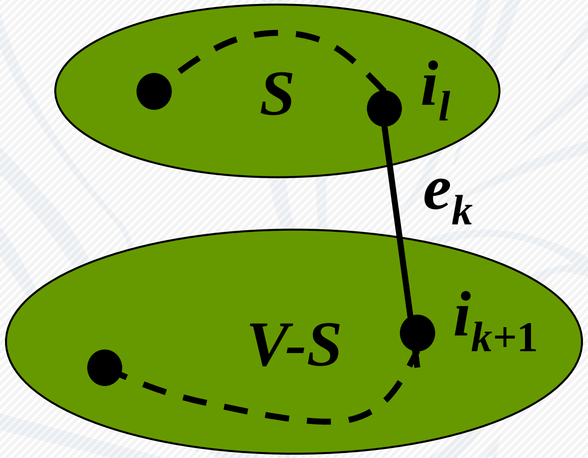
正确性证明

- **归纳基础:** 存在一棵最小生成树 T 含 $e_1=(1,i)$(含1的边中权最小).
-
- **证明：设T 为一棵不包含e_1的最小生成树.**
- **根据命题4.1(2)，** 图$T\cup\{e_1\}$ 中一定有一条回路。假设回路中**关联1的另一条边为 (1,j)($\geq e_1$的权)，** 令 $T'=(T-\{(1,j)\})\cup\{e_1\}$.
- **根据命题4.1(3)，** 则T'也是生成树，且$W(T')\leq W(T)$.
- 由于T是最小生成树($W(T')\geq W(T)$).因此，$W(T')=W(T)$，T'**也是最小生成树。**

正确性证明

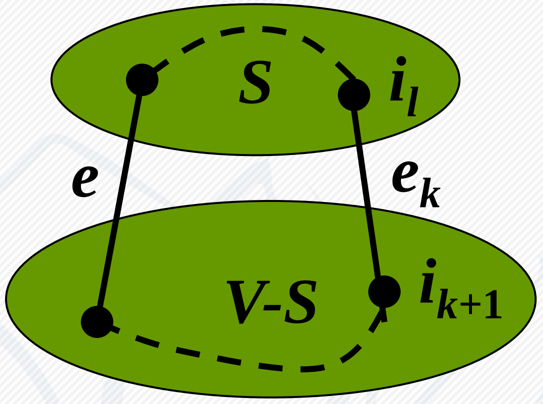
- **归纳假设**：假设算法进行了$k-1$步，生成树的边为 $e_1,e_2,\ldots,e_{k-1}$，存在最小生成树T 包含这些边.
- 需要证明的命题：存在**最小生成树T包含算法前k步选择的边**.

- 假设Prim算法第k 步**选择了顶点 i_{k+1}**，$e_k=(i_{k+1},i_l)$，则e_k 是连接S和V-S的边中权值最小的边

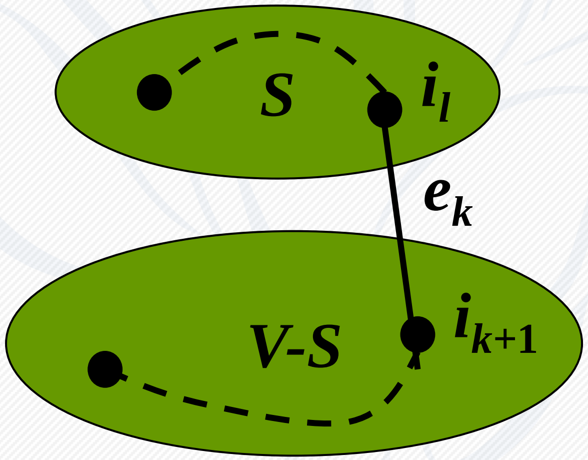


- **需要证明的命题：**
- 包含前k-1步选择的**最小生成树包含e_k**

归纳步骤（续）



- 证明：包含前k-1步选择**最小生成树包含e_k**
- 假设存在包含前k-1步选择但不含e_k的最小生成树T,
- 该最小生成树连接S和V-S的边，(存在且唯一)为e($\geq$ $\boldsymbol{e_k}$).
- **根据命题4.1 (2)**，将 e_k 加到T 中形成一个圈，**令**$\boldsymbol{T^* = (T - \{e\}) \cup \{e_k\}}$.
- **根据命题4.1 (3)**，$\boldsymbol{T^*}$**也是**G 的一棵生成树，其包含$e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e_k$, 且 $\boldsymbol{W(T^*) \leq W(T)}$.
- 由于T是最小生成树($\boldsymbol{W(T^*) \geq W(T)}$)。
- 因此，$\boldsymbol{W(T^*) = W(T)}$，$\boldsymbol{T^*}$**也是最小生成树。**



最小生成树（PRIM）

- Prim算法的设计

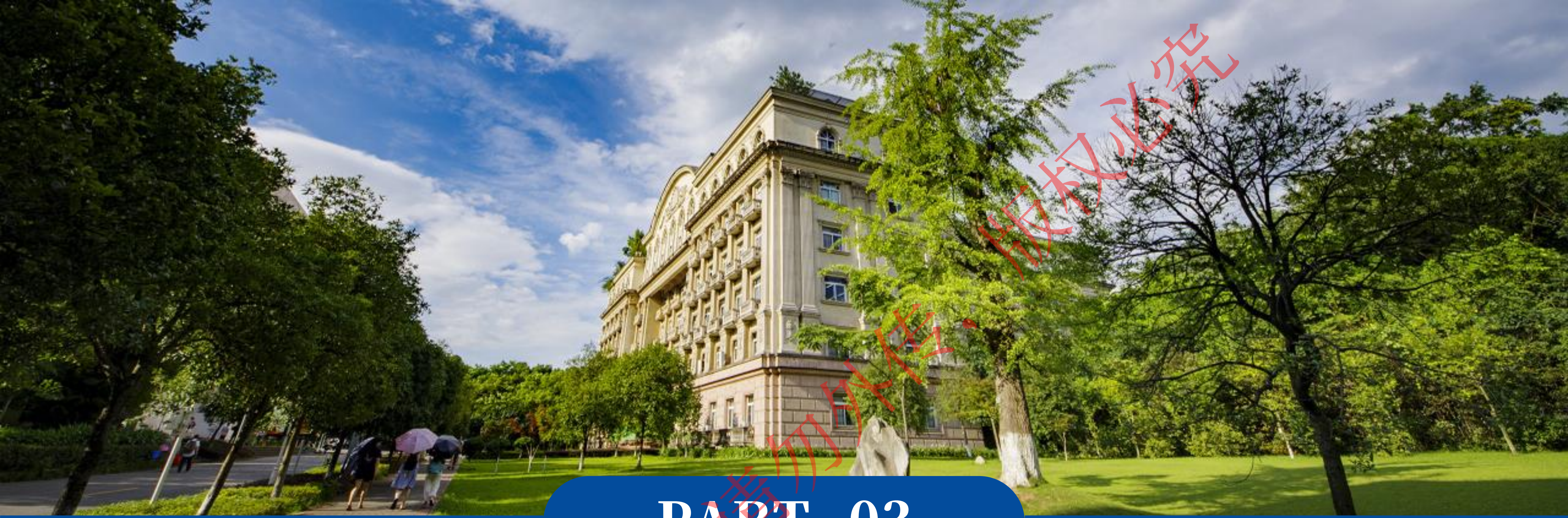
  贪心策略：连接S与V-S的最短边

  正确性证明：对步数归纳

- 时间复杂度：$O(n^2)$

  算法步骤执行O(n)次

  ~~每次执行**O(n)**时间：V-S中最多有n-1个顶点~~



PART 03

正确性证明2：数学归纳法（规模）

Greedy Algorithm

例4.2 最优装载问题

- n 个集装箱1, 2, …, n， 集装箱 i 的重量w_i ($w_i \le c$), 轮船装载重量限制为C， 无体积限制。问如何装使得上船的集装箱最多？

- 一个特殊的0-1背包问题

评价装载方案好坏的唯一标准：集装箱的数量

假设x_i=1表示集装箱i被选中装上船，解是一个n维向量<x_1, x_2, …, x_n>.

$$\max \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s.t.: \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le C$$

$$x_i = 0,1 \quad i = 1,2,\ldots,n$$

例4.2 最优装载问题

- ***n*** 个集装箱1, 2, …, ***n***， 集装箱 ***i*** 的重量w_i, 轮船装载重量限制为C， 无体积限制。问如何装使得上船的集装箱最多？不妨设 $w_i \le c$.

  - 算法设计：轻者优先

  将集装箱排序，使得$w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_n$;
  按照标号从小到大装箱，直到下一个箱子不满足约束（装入将使得集装箱总重超过轮船装载重量限制），则停止

假设到第m个箱子停止了，满足的条件是什么？

$$\sum_{i=1}^{m} w_i \le C, \sum_{i=1}^{m+1} w_i > C$$

例4.2 最优装载问题

定理4.2

- 命题：对装载问题任何规模为n 的输入实例，算法得到最优解。

- 设集装箱从轻到重记为1, 2, …, n.
- 归纳基础
- 对只含1个集装箱的输入实例，贪心法得到最优解。显然正确。

- 归纳步骤
- 假设对于有k个集装箱的问题，贪心法都能得到最优解；那么对于任何k+1个集装箱的问题，贪心法也得到最优解。

正确性证明2

- $N = \{1, 2, \ldots, k+1\}$, 其中 $w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_{k+1}$,重量限制为C.

- 归纳假设：对于$N' = \{2,3,\ldots,k+1\}$，$C' = C - w_1$, 贪心法得到的解I'是$< N', C' >$问题最优解 。

$$\sum_{i=2}^{m} w_i \le C - w_1, \sum_{i=2}^{m+1} w_i > C - w_1$$

- 要证明的命题：对于$< N, C >$问题，贪心算法得到的解I是最优解
- 对于$< N, C >$问题，I是什么？

$$\sum_{i=1}^{m} w_i \le C, \sum_{i=1}^{m+1} w_i > C$$

- $I = \{1\} \cup I'$

- 要证明的命题：对于$< N, C >$问题， I是最优解。

反证法

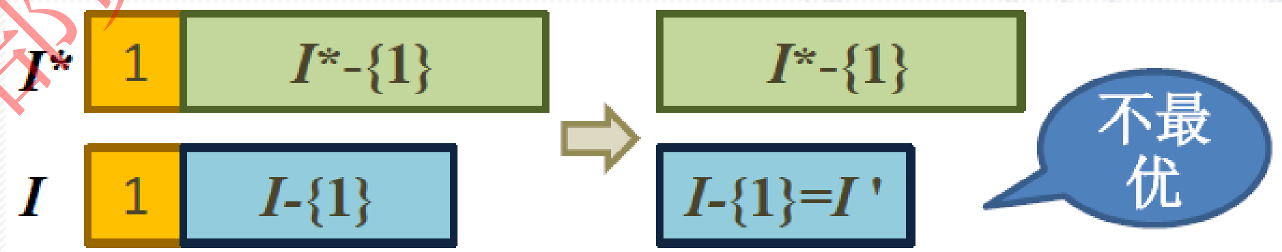
- 已知I'是$<N', C'>$问题最优解，求证$I=\{1\}\cup I'$ 是 $<N,C>$ 问题的最优解
- 证明：

$$\sum_{i=1}^{m} w_i \le C$$

- 假设存在$<N,C>$ 问题的包含 1 的最优解 I^*，且$\| I^*\|_0 > \| I \|_0$；
（<u>如果 I^* 中没有1</u>，<u>用 1 替换 I^* 中的首元素得到的解也是最优解</u>）

$$\sum_{i=2}^{m} w_i \le C - w_1$$

- 那么 $I^* - \{1\}$是关于 N'和C'的可行解（不超重）
- 因此，$\| I^*- \{1\} \|_0 > \| I - \{1\} \|_0 = \| I'\|_0$，这与已知矛盾.



例4.2 最优装载问题

归纳步骤证明思路

$N=\{1,2,\ldots,n+1\}$, $w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_{n+1}$

⇓

去掉箱子1，令 $C' = C - \{w_1\}$，
得到规模 n 的输入 $N' = \{2,3,\ldots,n+1\}$

⇓

归纳假设 ⇒ 关于输入 N' 和 C' 的最优解 I'

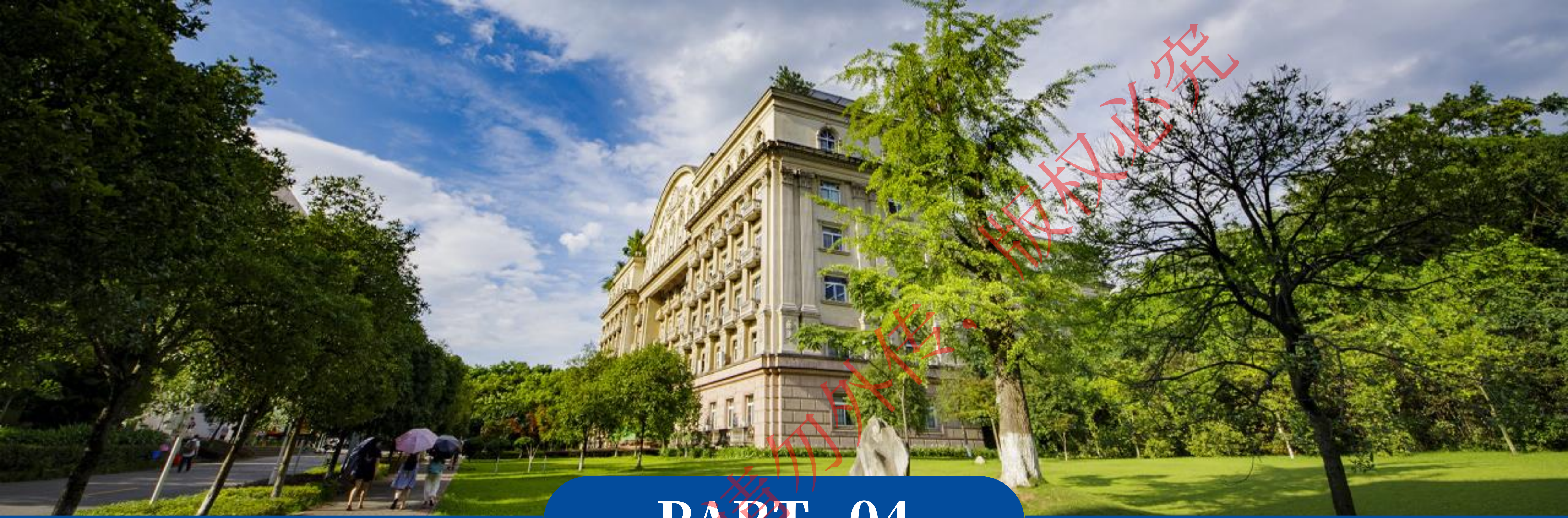
⇓

在 I' 加入箱子1，得到 I

I 是贪心算法对于<N,C>问题的解

⇓

要证明的命题 ⇒ 证明 I 是关于输入 N 的最优解



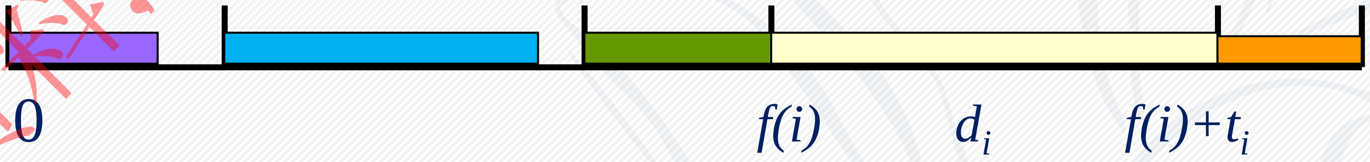
PART 04

正确性证明3：交换论证

Greedy Algorithm

最小延迟调度

- **例4.3** 最小延迟调度
- 已知：客户集合A，$\forall i \in A$，t_i为服务时间（持续时间），d_i为（预期）完成时间，t_i, d_i为正整数.
- 一个调度是函数 $f: A \to \mathrm{N}$，$f(i)$为客户 i 的实际开始时间，满足相容性.
- 求最大延迟达到最小的调度



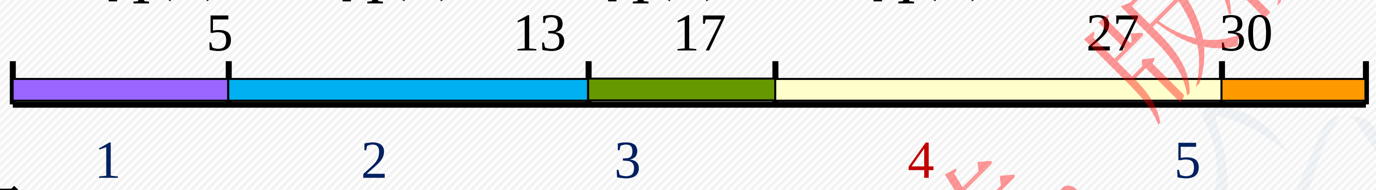
实际完成时间是？ 延迟？ $\max\{0, f(i)+t_i-d_i\}$

同样的顺序，没有空闲间隔比有间隔好

实例

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = <5, 8, 4, 10, 3>$, $D=<10, 12, 15, 11, 20>$

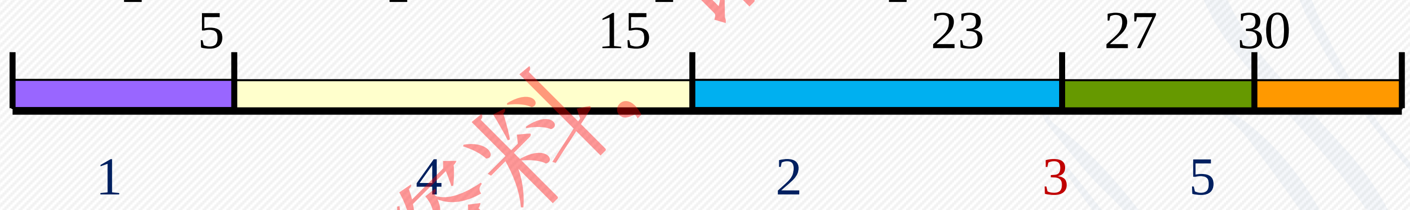
调度1： $f_1(1)=0$, $f_1(2)=5$, $f_1(3)=13$, $f_1(4)=17$, $f_1(5)=27$



各任务延迟: 0=max{0,5-10}, 1=max{0,5+8-12}, 2=max{0,13+4-15},
16=max{0,17+10-11}, 10=max{0,27+3-20};
最大延迟：16

评价调度好坏的标准：
最大延迟

调度2： $f_2(1)=0$, $f_2(2)=15$, $f_2(3)=23$, $f_2(4)=5$, $f_2(5)=27$



各任务延迟：0=max{0,5-10}, 11=max{0,15+8-12},12=max{0,23+4-15},
4=max{0,5+10-11}, 10=max{0,27+3-20};
最大延迟：12

最小延迟调度

- **例4.3 最小延迟调度**
- 已知：客户集合A，$\forall i \in A$，t_i 为服务时间（持续时间），d_i 为（预期）完成时间，t_i, d_i 为正整数.
- 一个调度是函数 $f: A \to \mathbb{N}$，$f(i)$为客户 i 的实际开始时间，满足相容性。

- 求最大延迟达到最小的调度，即

$$\min_f \{\max_{i \in A}\{0, \ f(i)+t_i-d_i\}\}$$

$$s.t.: \forall i, j \in A, i \neq j, f(i)+t_i \leq f(j) \ \text{ or } \ f(j)+t_j \leq f(i)$$

贪心策略选择

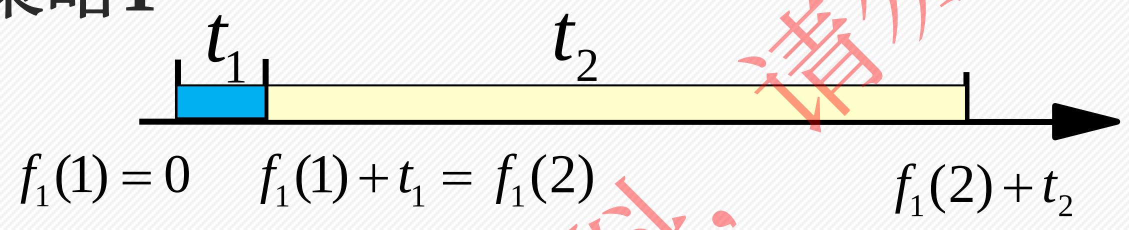
贪心策略1：按照 t_i 从小到大安排任务

贪心策略2：按照 $d_i - t_i$ 从小到大安排任务

贪心策略3：按照 d_i 从小到大安排任务

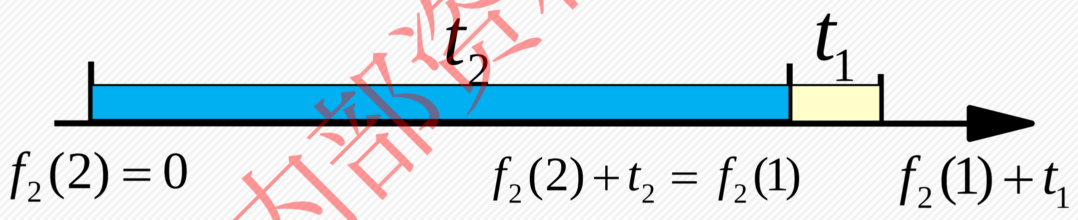
例：$t_1=1, d_1=100, t_2=10, d_2=10$

策略1



任务延迟分别为0, 1

最大延迟为1



任务延迟分别为0, 0

最大延迟为0

贪心策略选择

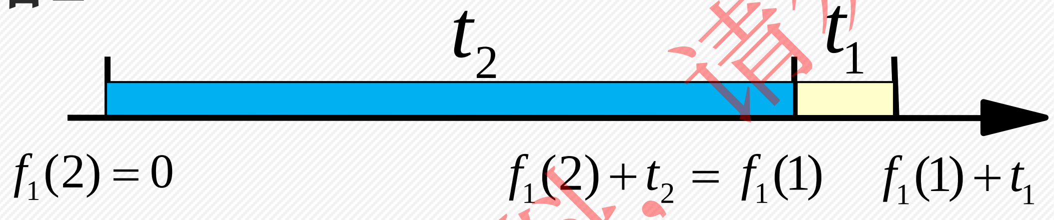
贪心策略1：按照 t_i 从小到大安排任务

贪心策略2：按照 $d_i - t_i$ 从小到大安排任务

贪心策略3：按照 d_i 从小到大安排任务

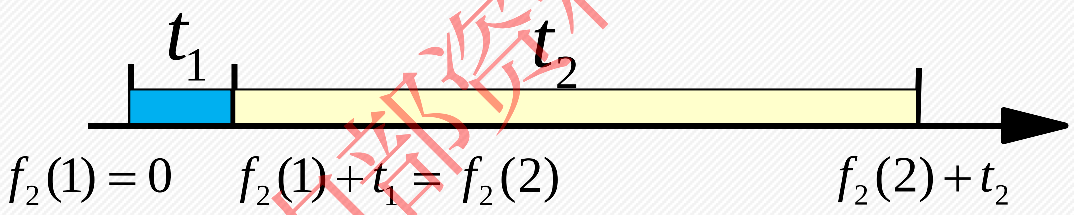
例：t_1=1, d_1=2, t_2=10, d_2=10

策略2



任务延迟分别为：9, 0

最大延迟：9



任务延迟分别为：0, 1

最大延迟：1

贪心策略选择—算法

算法4.3 Schedule

输入：*A, T, D*

输出：*f*

1. 排序*A*使得 $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$;
2. $f(1) \leftarrow 0$;
3. $i \leftarrow 2$;
3. while $i \le n$ do
4. $\quad f(i) \leftarrow f(i-1)+t_{i-1}$; //没有空闲
5. $\quad i \leftarrow i+1$;
6. end

设计思想：按预期完成时间从早到晚安排任务，没有空闲间隔

交换论证

思路：
1. 分析算法解的结构特征，即一般最优解与算法解的区别（成分、顺序 ）
2. 设计一种转换操作(替换成分、交换次序等)，在有限步将任意一个普通最优解逐步转换成算法的解。
3. 证明：每步变换都保持解的最优性不降低。即从一个最优解转换成另一个最优解。

贪心算法解的特点：没有空闲间隔时间，没有逆序 ($f(i) < f(j)$ 且 $d_i > d_j$)

最优解没有空闲间隔时间

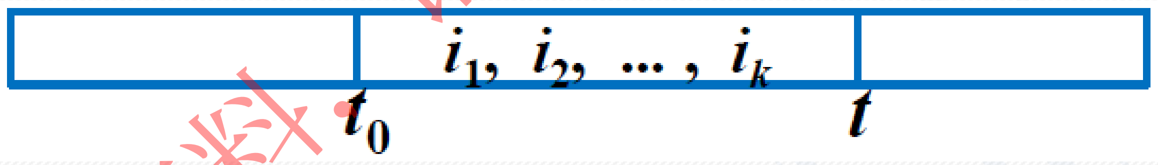
但是，可能有：1.存在逆序；2.具有相同预期结束时间的任务顺序不同。

引理4.1

引理4.1 所有没有逆序、没有空闲时间的调度具有相同的最大延迟.

证明： 由于调度 f中 没有逆序，因此，在 f 中具有相同预期完成时间d的客户 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 必被连续安排.

假设这k个客户的开始服务时刻为t_0 ,完成时刻为t.



- 在这k个客户中，最大延迟发生在最后一个客户，被延迟的时间是$\max\{0, t-d\}$，与 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 的排列次序无关。
- 因此，所有没有逆序、没有空闲时间的调度具有相同的最大延迟

证明的思想

- 从一个没有空闲时间（但是有逆序）的最优解出发，不改变最优性的条件（最大延迟不变）下，转变成没有逆序的解

思考：

(1) 相邻逆序： (i, j) 构成一个相邻逆序： $f(i) < f(j)$ 且 $d_i > d_j$.

(2) 所有的逆序都可以通过相邻逆序的有限次（最多$n(n-1)/2$ ）交换得到。

因此，只需要证明命题：

交换相邻的逆序，调度仍旧最优（最大延迟不会改变）.

定理4.3

- 假设*f*是一个最优解（最大延迟记为 r），其中存在相邻逆序(*i*, *j*) ,即$d_j < d_i$. 若交换*i* 和*j* 的顺序, 得到解*f'*。
- 要证明的命题：*f'*的最大延迟不超过*f*的最大延迟r。

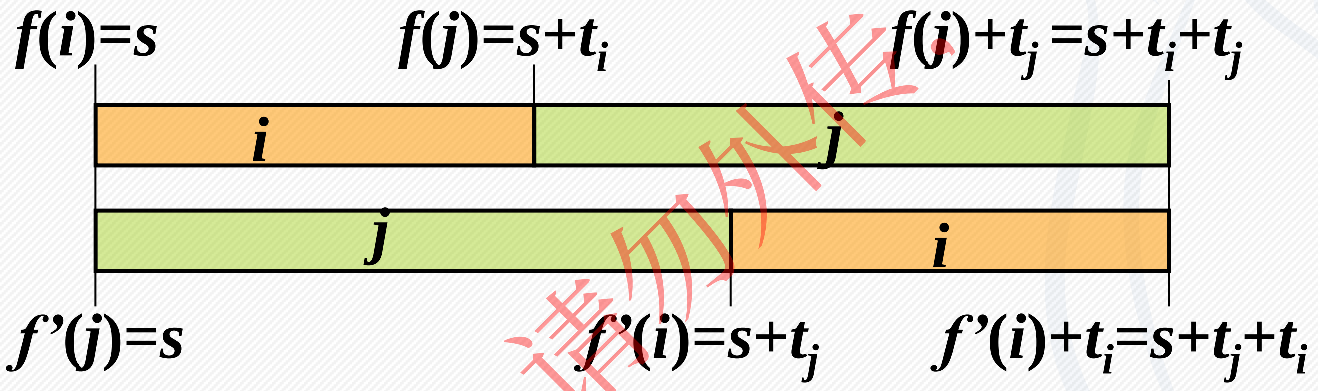
分析：

(1) *f*序列中任意一个客户的延迟表示为delay(*f*, *k*) ≤ r；

(2)交换 *i*, *j* 对其他客户的延迟没影响，即*f'*中其他客户的延迟≤ r ;
(3)交换*i*, *j*后不增加 *j* 的延迟，即delay(*f'*, *j*) ≤ delay(*f*, *j*) ≤ r ;
(4)交换*i*, *j*后可能增加*i*的延迟；
(5)若能证明delay(*f'*, *i*) ≤ r，则*f'*中所有客户的延迟都不超过r；

定理4.3

若 i 在 f' 的延迟小于 j 在 f 的延迟 delay(f', i) ≤delay(f, j)，则 delay(f', i) ≤ r



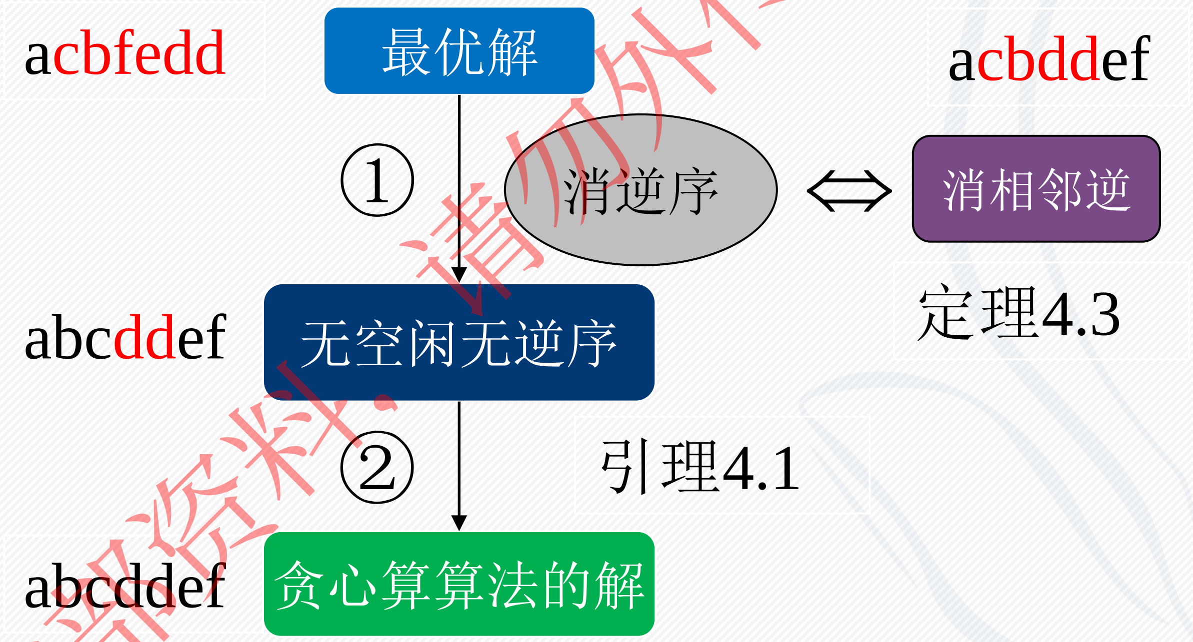
$$\text{delay}(f',i) = max\{0, s + t_j + t_i - d_i\}$$

$$\text{delay}(f, j) = max\{0, s + t_j + t_i - d_j\}$$

$$\boxed{d_j < d_i \Rightarrow \text{delay}(f',i) \le \text{delay}(f, j) \le r}$$

证明的思路

- **相对于贪心算法的解，最优解可能：**
- **1.存在逆序；2.具有相同预期结束时间的任务顺序不同。**



贪心法的正确性证明

数学归纳法

1. 一个描述算法正确性的命题$P(n)$，n为算法步数或者问题规模
2. 归纳基础：$P(1)$ 或 $P(n_0)$为真，n_0为某个自然数
3. 归纳步骤：$P(k) \Rightarrow P(k+1)$

交换论证

1.分析算法解与一般最优解的区别,找到把一般解改造成算法解的一系列操作（替换成份、交换次序）；

2.证明操作步数有限；

3. 证明每步操作后的得到解仍旧保持最优。