

习题 5.1

1. 利用定积分的定义计算下列积分:

(1) $\int_a^b x^2 dx$ ($b > a$); (2) $\int_0^1 e^x dx$.

2. 利用定积分的几何意义计算下列积分:

(1) $\int_0^2 (x-1) dx$; (2) $\int_{-1}^1 |x| dx$;

(3) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$); (4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$.

3. 利用定积分, 计算下列各式的极限:

(1) 已知 $\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

(2) 已知 $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

(3) 已知 $\int_1^2 \ln x dx = 2 \ln 2 - 1$, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}}{n}.$$

4. 证明函数 $E(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ -1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上不可积, 但 $|E(x)| \in R[0,1]$.