内容提要

1 等价关系

2 偏序关系

等价关系与划分

一、等价关系的定义及判定

二、等价关系的证明

三、集合的划分

四、等价类与商集

五、等价关系与集合划分

等价关系的定义与判定

定义1 设R是定义在非空集合A上的关系，如果R是自反的、对称的、传递的，则称R为A上的等价关系。设R是一个等价关系，若$\langle x, y\rangle \in R$，称x等价于y，记做$x \sim y$.

(1) 关系R是等价关系当且仅当R同时具备自反性、对称性和传递性；

(2) 关系R不是等价关系当且仅当R不具备自反性或对称性或传递性。

例 设 $A=\{1,2,\cdots,8\}$，如下定义A上的关系R:

$$R=\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod 3\}$$

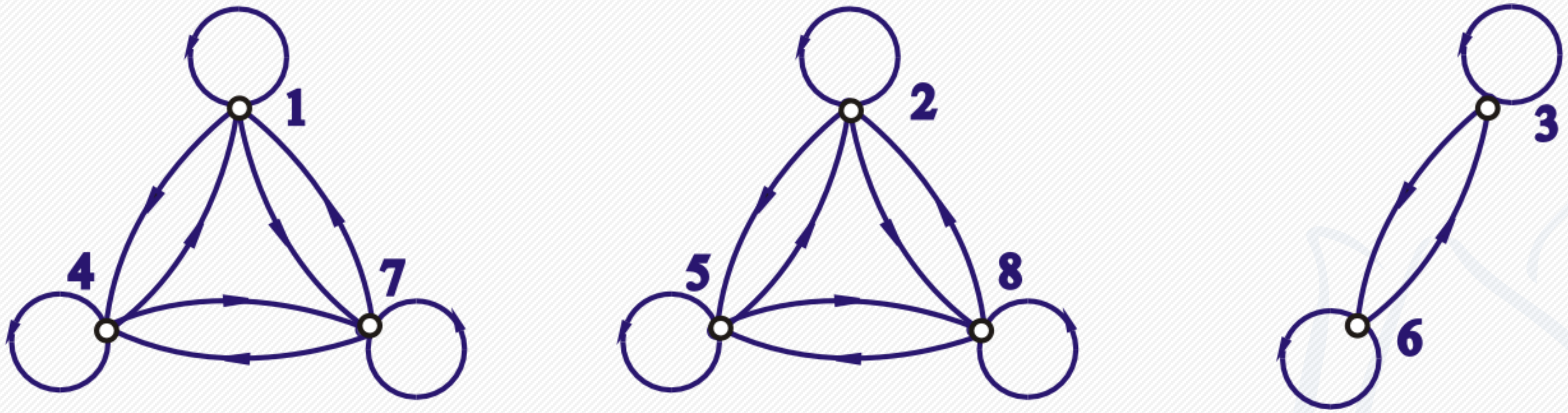
其中$x \equiv y \pmod 3$叫做 x与 y 模3相等，即x除以3的余数与y除以3的余数相等. 不难验证 R 为A上的等价关系，因为

(1) $\forall x \in A$, 有 $x \equiv x \pmod 3$

(2) $\forall x, y \in A$, 若$x \equiv y \pmod 3$, 则有$y \equiv x \pmod 3$

(3) $\forall x, y, z \in A$, 若$x \equiv y \pmod 3$, $y \equiv z \pmod 3$, 则有$x \equiv z \pmod 3$

等价关系的定义与判定



模 3 等价关系的关系图

例：判定下列关系是否是等价关系？

1. 幂集上定义的“包含”关系;不具有对称性
2. 整数集上定义的“<”关系；不具有对称性,不具有自反性
3. 全体中国人所组成的集合上定义的“同性别”关系；是等价关系
4. 对任意集合A，A上的恒等关系和全域关系。是等价关系

设n为正整数，考虑整数集合Z上的整除关系如下：

$R=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y \in Z\} \wedge (n \mid (x-y))\}$　注：$n \mid (x-y)$表示n整除x−y

证明R是一个等价关系。

证明 (1) 对任意$x \in Z$，有$n \mid (x-x)$，所以$\langle x, x\rangle \in R$，即R是自反的。

(2) 对任意$x, y \in Z$，若$\langle x, y\rangle \in R$，即$n \mid (x-y)$，所以$n \mid (y-x)$，所以，$\langle y, x\rangle \in R$，即R是对称的。

(3) 对任意$x, y, z \in Z$，若$\langle x, y\rangle \in R$且$\langle y, z\rangle \in R$，有$n \mid (x-y)$且$n \mid (y-z)$，所以由$(x-z)=(x-y)+(y-z)$得$n \mid (x-z)$，所以，$\langle x, z\rangle \in R$，即R是传递的。

由(1)、(2)、(3)知，R是Z上的等价关系。

上述R称为Z上以n为模的同余关系(Congruence Relation)，记xRy为

$$x \equiv y \pmod n$$

称为同余式。如用$res_n(x)$表示x除以n的余数，则

$$x \equiv y \pmod n \Leftrightarrow res_n(x) = res_n(y)。$$

此时，R将Z分成了如下n个子集：

$\{\cdots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \cdots\}$ 余数为0

$\{\cdots, -3n+1, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, 3n+1, \cdots\}$ 余数为1

$\{\cdots, -3n+2, -2n+2, -n+2, 2, n+2, 2n+2, 3n+2, \cdots\}$

…

$\{\cdots, -2n-1, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, 4n-1, \cdots\}$ 余数为n-1

这n个Z的子集具有如下特点：

1、在同一个子集中的元素之间都有关系R；

2、不同子集的元素之间没有关系R；

3、不同子集的交集是空集；

4、所有这些子集的并集就构成集合Z。

定义2 设R是非空集合A上的等价关系，对任意x∈A，称集合$[x]_R$

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R\}$$

为x关于R的等价类(equivalence class)，或叫作由x生成的一个R等价类，简记为[x]或$\overline{x}$，其中x称为$[x]_R$的生成元(或叫代表元，或典型元)(generator)。

注：x的等价类是A中所有与x等价的元素构成的集合。

例(求等价类)

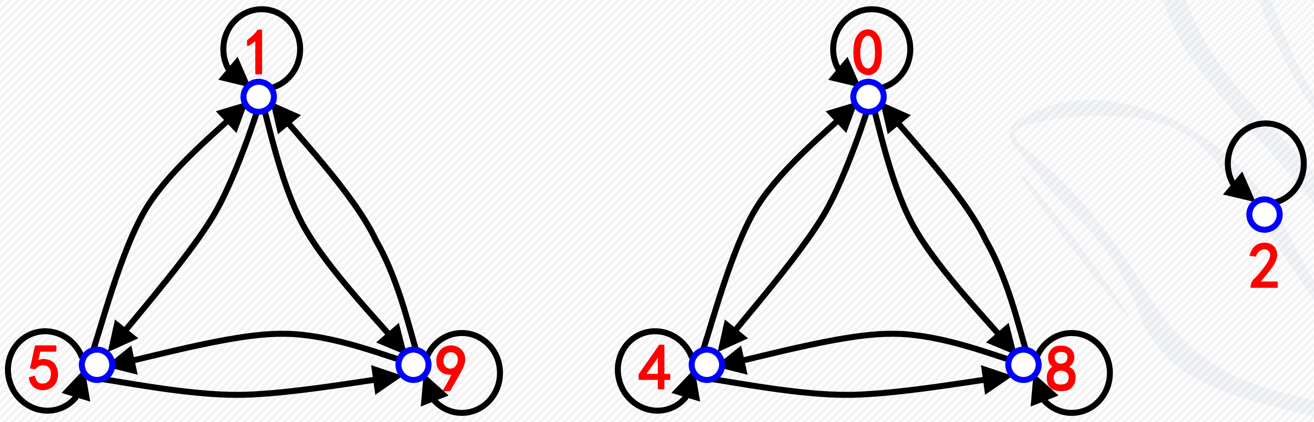
设A={0, 1, 2, 4, 5, 8, 9}，R是A上的以4为模的同余关系。求：

（1）R的所有等价类；（2）画出R的关系图。

解：（1）$[1]_R = \{1, 5, 9\} = [5]_R = [9]_R$；$[2]_R = \{2\}$；

$[4]_R = \{0, 4, 8\} = [0]_R = [8]_R$。

（2）



定理1(等价类的性质)

设R是非空集合A上的等价关系，则有下面的结论成立：

1) 对任意$x \in A$，$[x]_R \neq \Phi$；

2) 对任意$x, y \in A$,

a) 如果$\langle x, y\rangle \in R$，则有$[x]_R = [y]_R$,

b) 如果$\langle x, y\rangle \notin R$，则有$[x]_R \cap [y]_R = \Phi$。

3) $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$； $\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$

证明 1）

对任意$x \in A$，

因为R是等价关系，所以R是自反的，

因此$\langle x, x\rangle \in R$，即$x \in [x]_R$，

故$[x]_R \neq \Phi$。

证明 2)

对任意$x, y \in A$,

a) 若$y \in [x]_R$，则$\langle x, y\rangle \in R$。

对任意$z \in [x]_R$，则有：$\langle x, z\rangle \in R$，又$\langle x, y\rangle \in R$,

由R的对称性有：$\langle y, x\rangle \in R$,

由R的传递性有：$\langle y, z\rangle \in R$。

所以$z \in [y]_R$，即：$[x]_R \subseteq [y]_R$。

对任意$z \in [y]_R$，则有：$\langle y, z\rangle \in R$，又$\langle x, y\rangle \in R$,

由R的传递性有：$\langle x, z\rangle \in R$。所以，$z \in [x]_R$，即：

$$[y]_R \subseteq [x]_R。$$

所以，由a)和b)知：$[x]_R = [y]_R$。

b) 若$y \notin [x]_R$，设$[x]_R \cap [y]_R \neq \Phi$，则存在

$z \in [x]_R \cap [y\}_R$。

即$z \in [x]_R$，$z \in [y]_R$，

则有：$\langle x, z\rangle \in R$，$\langle y, z\rangle \in R$，

由R的对称性，$\langle z, y\rangle \in R$。

由R的传递性有：$\langle x, y\rangle \in R$，

即$y \in [x]_R$，矛盾。

所以$[x]_R \cap [y]_R = \Phi$。

证明 3)

因为对任意$x\in A$，$[x]_R\subseteq A$，所以$\bigcup\limits_{x\in A}[x]_R\subseteq A$。

对任意$x\in A$，因R是自反的，所以$\langle x,x\rangle\in R$，即$x\in[x]_R$。

所以$x\in\bigcup\limits_{x\in A}[x]_R$，即$A\subseteq\bigcup\limits_{x\in A}[x]_R$。故$\bigcup\limits_{x\in A}[x]_R=A$。

定义2 给定非空集合A，设有集合

$S=\{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_m\}$。如果满足

1. $S_i \subseteq A$ 且 $S_i \neq \Phi$，$i=1,2,\cdots,m$;
2. $S_i \cap S_j = \Phi$，$i \neq j$，$i,j=1,2,\cdots,m$;
3. $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = A$。

则集合S称作集合A的一个**划分**(Partition)，而S_1，$S_2,\cdots,S_m$叫做这个划分的**块**(Block)或**类**(Class)。

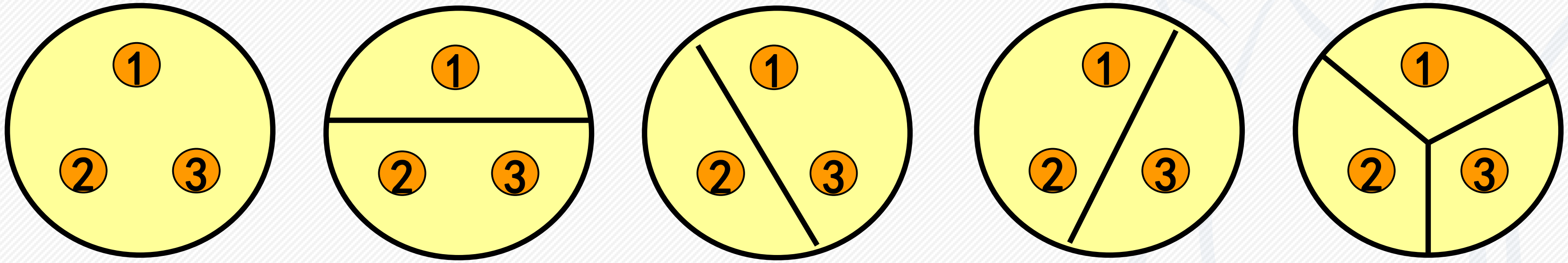
例 设 $A=\{a, b, c, d\}$，给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ 如下：

$$\pi_1=\{\{a, b, c\},\{d\}\}$$
$$\pi_2=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$$
$$\pi_3=\{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$$
$$\pi_4=\{\{a, b\}, \{c\}\}$$
$$\pi_5=\{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}\}$$
$$\pi_6=\{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$$

则 π_1 和 π_2 是A的划分，其他都不是A的划分.

例 给出 $A=\{1,2,3\}$ 上所有的等价关系

解 先做出A的划分，从左到右分别记作 π_1， π_2， π_3， π_4， π_5



π_1 π_2 π_3 π_4 π_5

π_1对应E_A， π_5 对应I_A， π_2， π_3和π_4分别对应R_2， R_3和 R_4.

$$R_2=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}\cup I_A$$

$$R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\cup I_A$$

$$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}\cup I_A$$

定义3 设R是非空集合A上的等价关系，由R确定的所有等价类的集合，称为集合A关于R的商集(Quotient Set)，记为A/R，即

$$A/R=\{[x]_R \mid (x\in A)\}$$

例 设集合A={0,1,2,4,5,8,9}，R为A上以4为模的同余关系。求A/R。

解 商集：

$$A/R=\{[0]_R,[1]_R,[2]_R\}=\{\{0,4,8\},\{1,5,9\},\{2\}\}。$$

计算商集A/R的方法总结

1. 任选A中一个元素a，计算$[a]_R$；
2. 如果$[a]_R \neq A$，任选一个元素$b \in A-[a]_R$，计算$[b]_R$；
3. 如果$[a]_R \cup [b]_R \neq A$，任选一个元素$c \in A-[a]_R-[b]_R$，计算$[c]_R$；

以此类推，直到A中所有元素都包含在计算出的等价类中。

定理2 设R是非空集合A上的等价关系，则A对R的商集A/R是A的一个划分，称之为由R所导出的等价划分。

定理3 给定集合A的一个划分$B=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$， 则由该划分确定的关系

$$R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup\cdots\cup(A_n\times A_n)$$

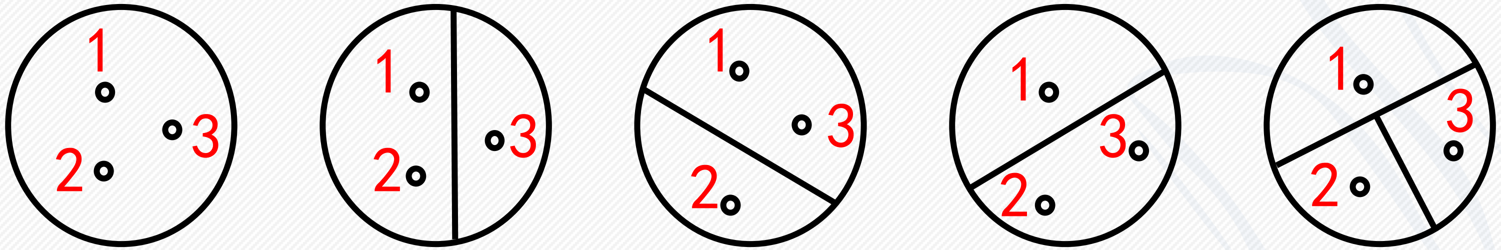
是A上的等价关系。我们称该关系R为由划分B所导出的等价关系。

说明:集合A上的等价关系和A的划分是一一对应的。

例(求等价关系)

设A={1,2,3}，求A上所有的等价关系及其对应的商集。

解　只有1个划分块的划分为S_1，见图(a)；具有2个划分块的划分为S_2、S_3和S_4，见图(b)、(c)和(d)，具有3个划分块的划分为S_5，见图(e)。



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

例(求等价关系)

假设由S_i导出的对应等价关系为R_i，i=1, 2, 3, 4, 5，则有

$R_1=S_1\times S_1=A\times A$， $A/R_1=\{\{1,2,3\}\}$；

$R_2=\{1,2\}\times\{1,2\}\cup\{3\}\times\{3\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$A/R_2=\{\{1,2\},\{3\}\}$；

$R_3=\{1,3\}\times\{1,3\}\cup\{2\}\times\{2\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$A/R_3=\{\{1,3\},\{2\}\}$；

例(求等价关系)

$R_4=\{2, 3\} \times \{2, 3\} \cup \{1\} \times \{1\}$

$=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$,

$A/R_4=\{\{1\}, \{2, 3\}\}$;

$R_5=\{1\} \times \{1\} \cup \{2\} \times \{2\} \cup \{3\} \times \{3\}$

$=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}=I_A$,

$A/R_5=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ 。

例(等价关系的相关证明举例)

设R是A上的自反和传递关系，S也是A上的关系，且满足：对任意x, y∈A,

$$\langle x, y\rangle \in S \Leftrightarrow (\langle x, y\rangle \in R \land \langle y, x\rangle \in R)$$

证明 S是A上的等价关系。

证明（1）S是自反的：

对任意a∈A，因R是自反的，所以⟨a, a⟩∈R，由⟨a, a⟩∈R并且⟨a, a⟩∈R和S的定义得⟨a, a⟩∈S，即S是自反的。

例(等价关系的相关证明举例)

（2）S是对称的：

对任意$a,b\in A$，若$\langle a,b\rangle\in S$，则由S的定义得$\langle a,b\rangle\in R$并且$\langle b,a\rangle\in R$，即有$\langle b,a\rangle\in R$并且$\langle a,b\rangle\in R$，所以有$\langle b,a\rangle\in S$，即S是对称的。

例(等价关系的相关证明举例)

（3）S是传递的：

对任意$a,b,c\in A$，若$\langle a,b\rangle\in S$，$\langle b,c\rangle\in S$，则由S的定义得$\langle a,b\rangle\in R$且$\langle b,a\rangle\in R$和$\langle b,c\rangle\in R$且$\langle c,b\rangle\in R$。

因为R是传递的，所以有$\langle a,c\rangle\in R$和$\langle c,a\rangle\in R$。从而，$\langle a,c\rangle\in S$，**即S是传递的。**

由(1),(2)和(3)知，S是A上的一个等价关系。

例(等价关系的相关证明举例)

设R是集合A上的关系。

对任意a, b, c∈A，若<a, b>∈R并且<a, c>∈R，则有<b, c>∈R，则R称为A上的循环关系。

试证明R是A上的等价关系的充要条件是R是A上的循环关系和自反关系。

证明“⇒”

若R是等价关系。

1） 显然R是自反的。

2） 对任意a, b, c∈A， 若<a, b>∈R， <a, c>∈R,

则由R是对称的， 有<b, a>∈R并且<a, c>∈R,

由R是传递的， 所以， <b, c>∈R。

即R是A上的循环的关系。

由1），2)知R是自反的和循环的。

证明 “$\Leftarrow$”

若R是自反的和循环的。

1）显然R是自反性的；

2）对任意$a, b \in A$，若$\langle a, b\rangle \in R$，

则由R是自反的，有$\langle a, a\rangle \in R$，因R是循环的，所以

$$\langle a, b\rangle \in R \text{且} \langle a, a\rangle \in R \Rightarrow \langle b, a\rangle \in R,$$

即R是对称的。

3）对任意$a, b, c \in A$，若$\langle a, b\rangle \in R$，$\langle b, c\rangle \in R$，

由R对称的，有$\langle b, a\rangle \in R$并且$\langle b, c\rangle \in R$；

由R是循环的，所以

$\langle b, a\rangle \in R$和$\langle b, c\rangle \in R \Rightarrow \langle a, c\rangle \in R$，

即R是传递的。

由1)、2)、3)知R是A上的等价关系。

总结

1. 熟记等价关系的定义；
2. 利用等价关系的定义证明一个关系是等价关系；
3. 给定A上的等价关系R，会求所有的等价类和商集A/R；并求出对应的集合的划分；
4. 给定集合A上的划分，会求对应的等价类。