习题 4.3

1. 写出下列函数在指定点处的 Taylor 公式(其中 $n\in\mathbb{N}_+$)：

(1) $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$ 在 $x_0=-2$ 处；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在点 $x_0=-1$ 处的 n 阶 Taylor 公式；

(3) $f(x)=x^2\ln x$ 在点 $x_0=1$ 处的 n 阶 Taylor 公式；

(4) $f(x)=\sqrt{x}$ 在点 $x_0=4$ 处的 n 阶 Taylor 公式；

(5) $f(x)=\arctan x$ 的二阶 Maclaurin 公式.

2. 利用 Taylor 公式求下列近似值(精确到 0.001)：

(1) $\sqrt[3]{30}$；　　(2) $\ln 1.2$.

3. 利用 Taylor 公式求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4}\right)$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0.$$

求 $f(0), f'(0), f''(0)$ 之值.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

6. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f''(x)\neq 0$. 由 Lagrange 公式有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)\quad(0<\theta<1).$$

证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.