第八章 向量代数与空间解析几何

第一部分 向量代数　第二部分 空间解析几何

在三维空间中:

空间形式 — **点, 线, 面**

↓↑

数量关系 — **坐标, 方程（组）**

基本方法 — **坐标法; 向量法**

解析几何就是利用代数方法研究几何问题.

第八章 向量代数与空间解析几何

第一节 向量及其线性运算

一、向量的概念

二、向量的线性运算

三、空间直角坐标系

四、利用坐标作向量的线性运算

五、向量的模、方向角、投影

一、向量的概念

向量: 既有大小, 又有方向的量称为向量 (又称矢量).

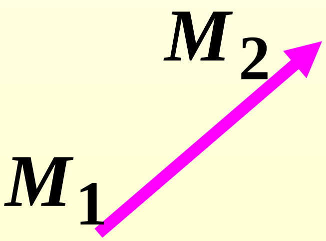
表示法: 有向线段 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 或 $\vec{a}$.

向量的模 : 向量的大小, 记作 $|\overrightarrow{M_1 M_2}|$ 或 $|\vec{a}|$.

自由向量: 与起点无关的向量.

单位向量: 模为 1 的向量, 记作 $\vec{e}$.

零向量: 模为 0 的向量, 记作 $\vec{0}$.



若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$大小相等, 方向相同, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$**相等**, 记作$\vec{a}=\vec{b}$;

若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相同或相反, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$**平行**, 记作$\vec{a}/\!/\vec{b}$; 规定: **零向量与任何向量平行**;

与$\vec{a}$的模相同, 但方向相反的向量称为$\vec{a}$的**负向量**, 记作$-\vec{a}$;

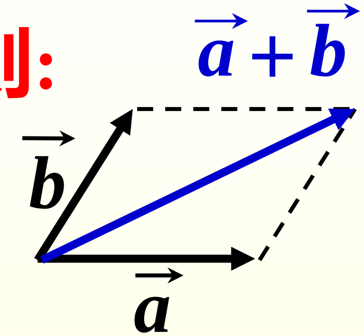
因平行向量可平移到同一直线上, 故两向量平行又称两向量**共线**.

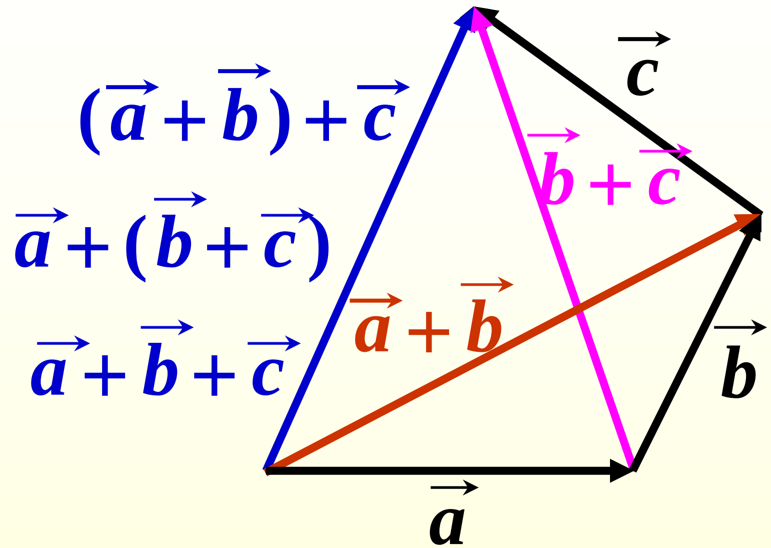
若k (≥ 3)个向量经平移可移到同一平面上，则称此k个向量**共面**.

二、向量的线性运算

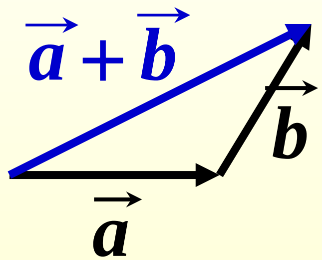
1. 向量的加法

平行四边形法则:





三角形法则:

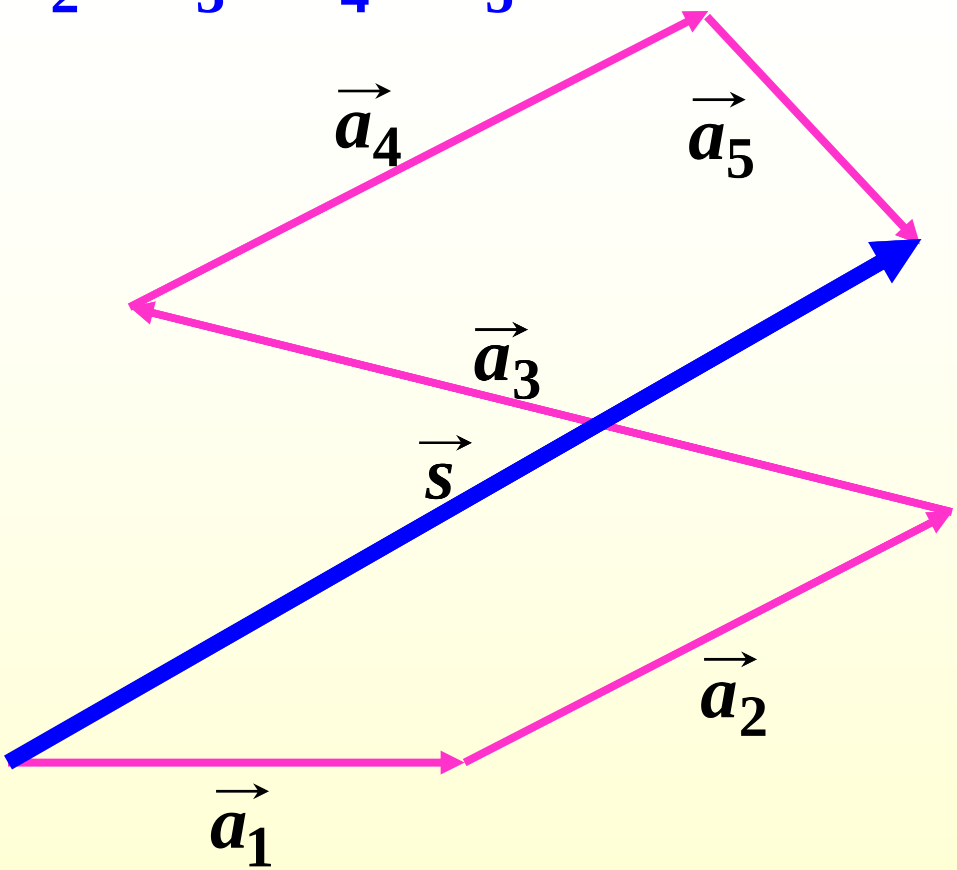


运算规律：交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

三角形法则可推广到多个向量相加.

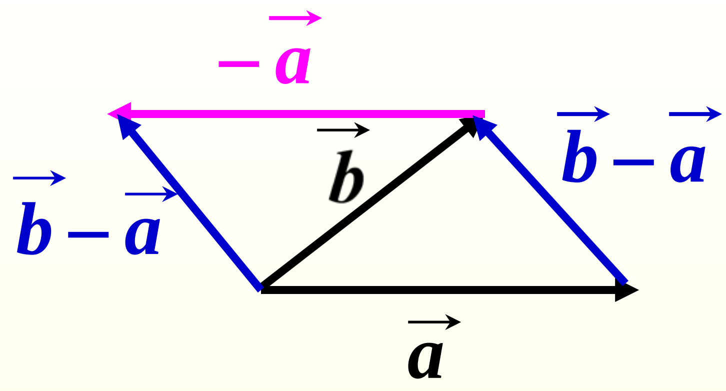
$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5$$



将n个向量首尾相接依次作出，然后从首向量的起点到末向量的终点引一向量即为和向量.

上页 下页

2. 向量的减法



$$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$$

特别当$\vec{b}=\vec{a}$时,有

$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

三角不等式

$$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

3. 向量与数的乘法

λ 是一个数，λ 与 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记作 $\lambda\vec{a}$.

规定： $\lambda > 0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向，$|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$;

$\lambda < 0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向，$|\lambda\vec{a}| = -\lambda|\vec{a}|$;

$\lambda = 0$ 时，$\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

总之: $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$

运算律：结合律 $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$

分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$，则有单位向量 $\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 因此 $\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{e}_a$

上页 下页

定理1. 设 $\vec{a}$ 为非零向量，则

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{b} = \lambda \vec{a} \quad (\lambda \text{ 为唯一实数})$$

证 “$\longrightarrow$”. 设 $\vec{a} /\!/ \vec{b}$，取 $\lambda = \pm \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ 同向时取正号反向时取负号，则 $\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}$ 同向，且

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

故 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

再证数 λ 的唯一性．设又有 $\vec{b} = \mu \vec{a}$，则 $(\lambda - \mu)\vec{a} = \vec{0}$

而 $|\vec{a}| \neq 0$，故 $|\lambda - \mu| = 0$，即 $\lambda = \mu$.

"$\longleftarrow$" 已知 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，则

当 $\lambda=0$ 时，$\vec{b}=\vec{0}$

当 $\lambda>0$ 时，$\vec{a},\vec{b}$ 同向 $\Longrightarrow$ $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

当 $\lambda<0$ 时，$\vec{a},\vec{b}$ 反向

例1 设 M 为 $\square ABCD$ 对角线的交点，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$.

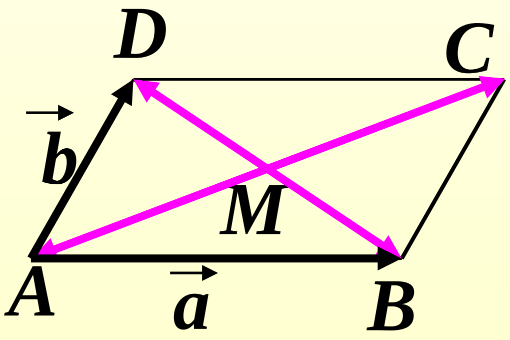
解

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MA}$$

$$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}=-2\overrightarrow{MB}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\qquad \overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\qquad \overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

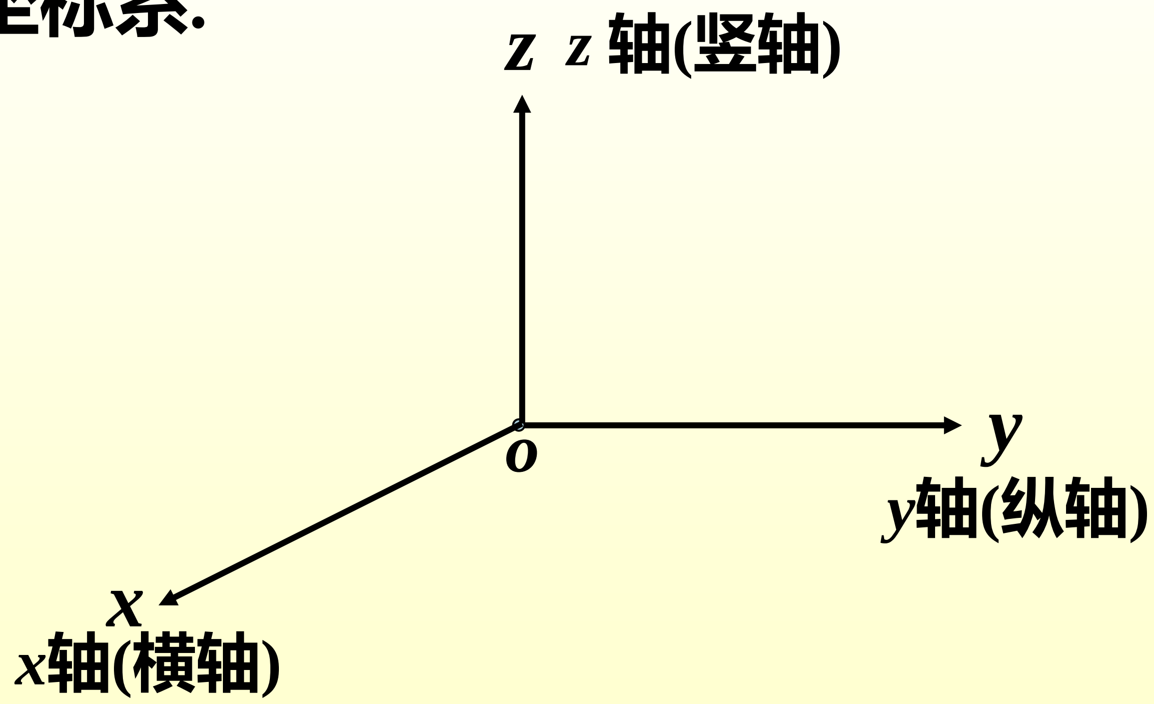


三、向量的坐标表示式

1. 空间直角坐标系的基本概念

过空间一定点 o ,由三条互相垂直的数轴按右手规则组成一个空间直角坐标系.

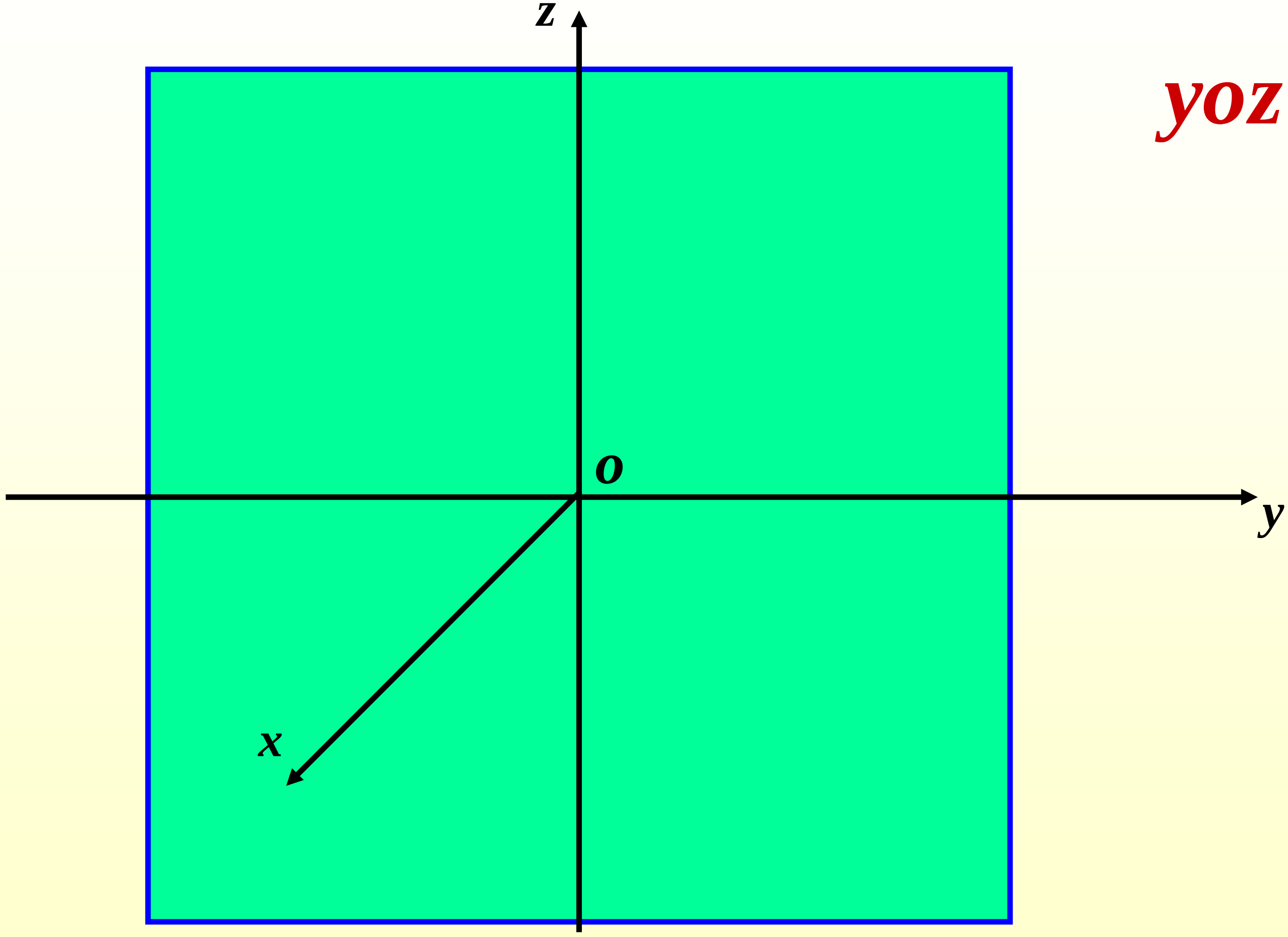
- **坐标原点**
- **坐标轴**



上页 下页

空间直角坐标系

• 坐标面

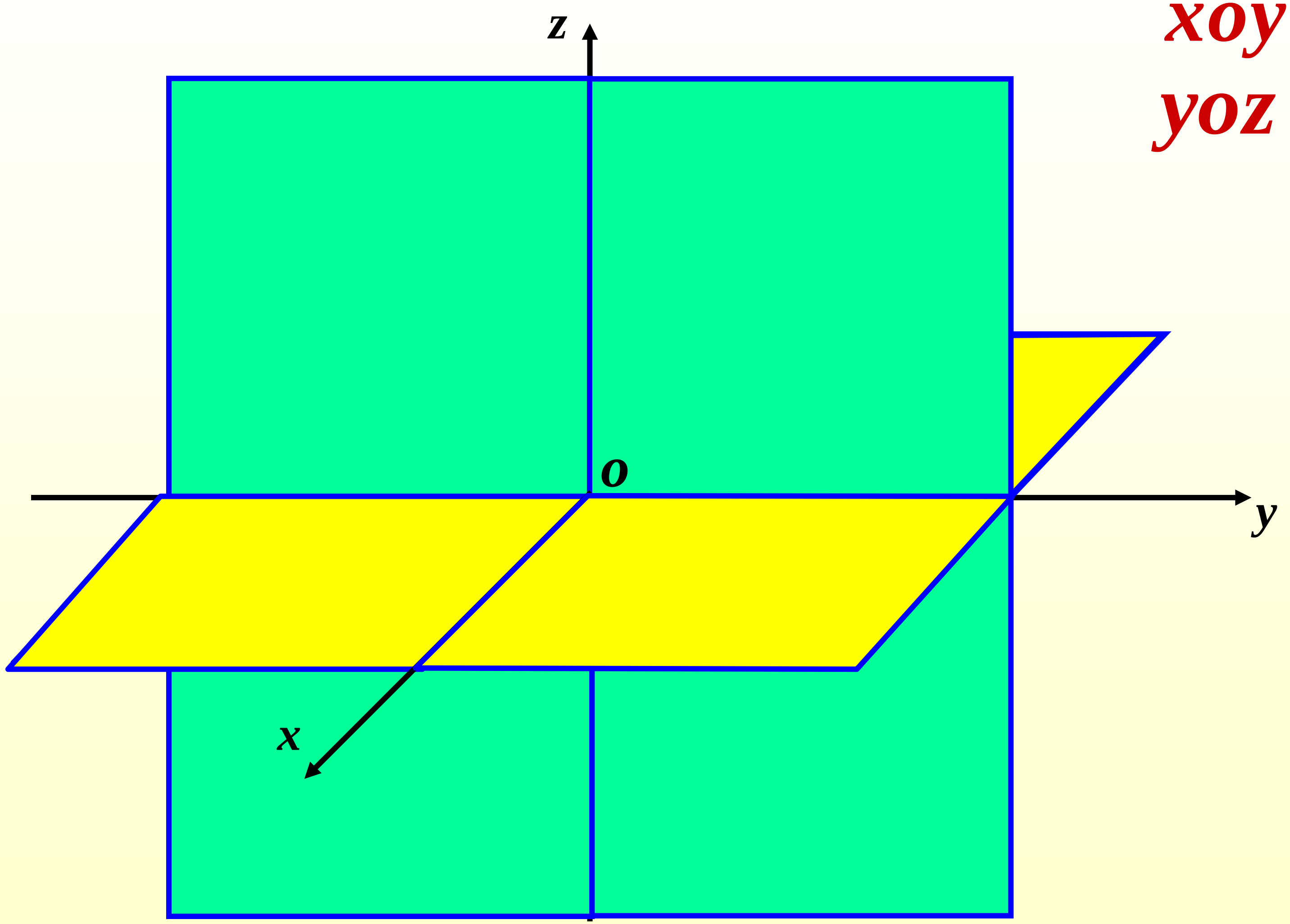


yoz

空间直角坐标系

- 坐标面

xoy
yoz



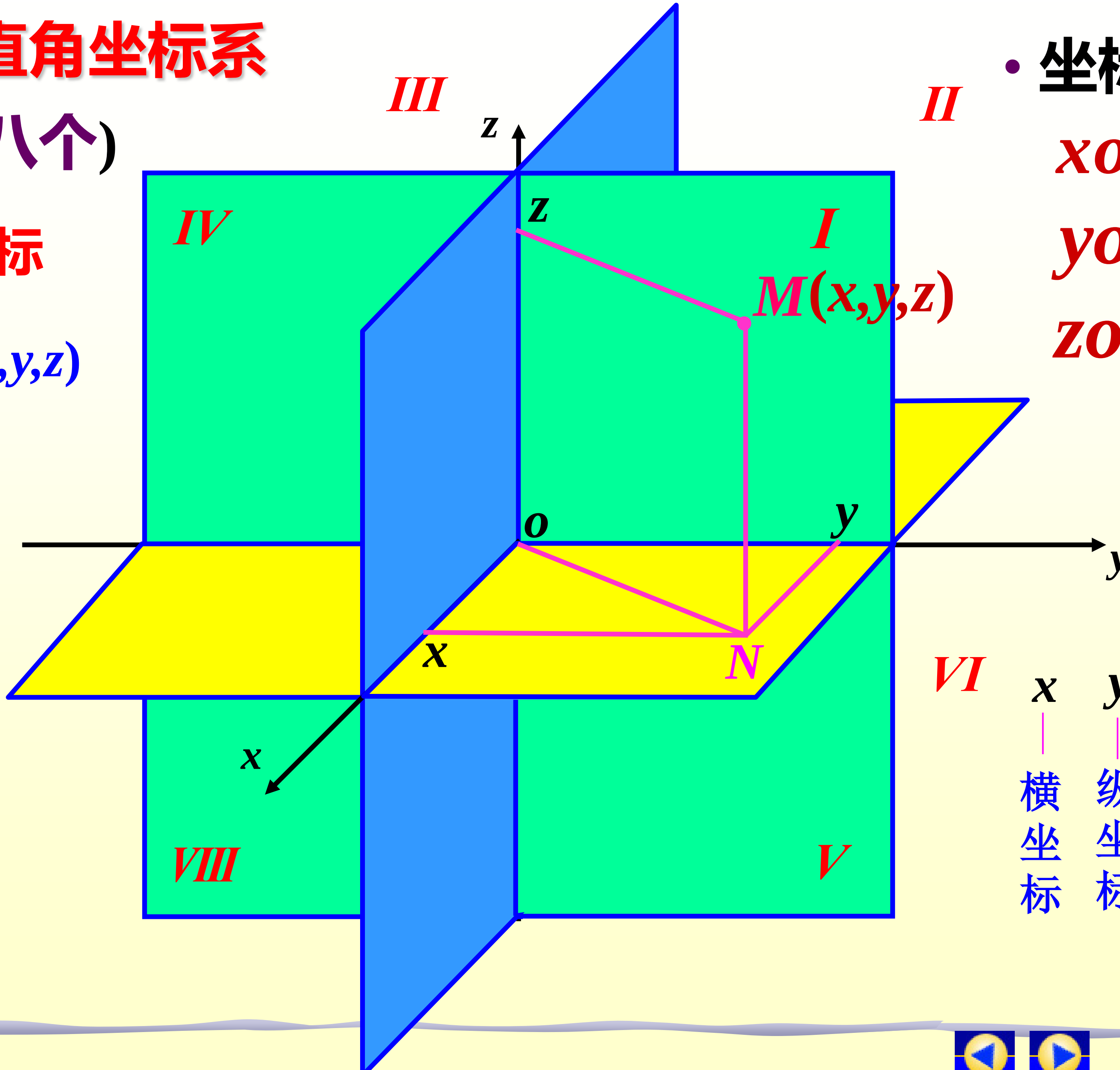
上页 下页

空间直角坐标系

- 卦限(八个)

点的坐标

$M \to (x,y,z)$



- 坐标面

xoy
yoz
zox

x	y	z
横坐标	纵坐标	竖坐标

上页 下页

x、y、z在各卦限内的符号:

第一卦限: $x > 0, y > 0, z > 0;$

第二卦限: $x < 0, y > 0, z > 0;$

第三卦限: $x < 0, y < 0, z > 0;$

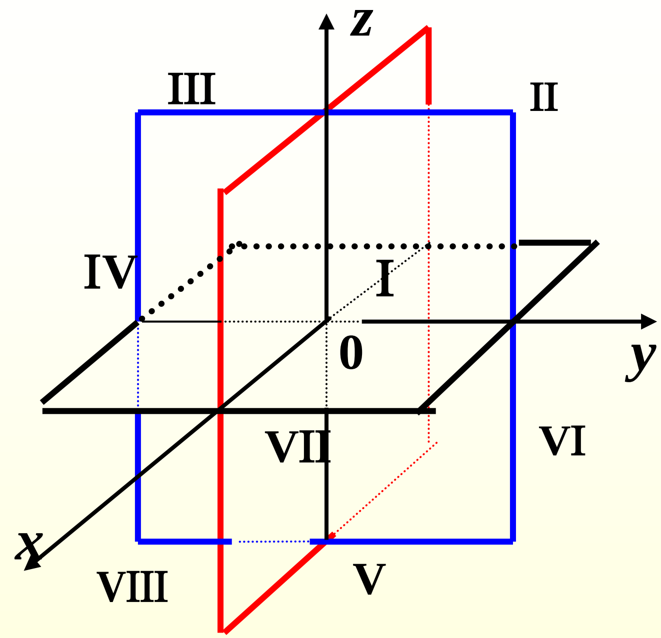
第四卦限: $x > 0, y < 0, z > 0;$

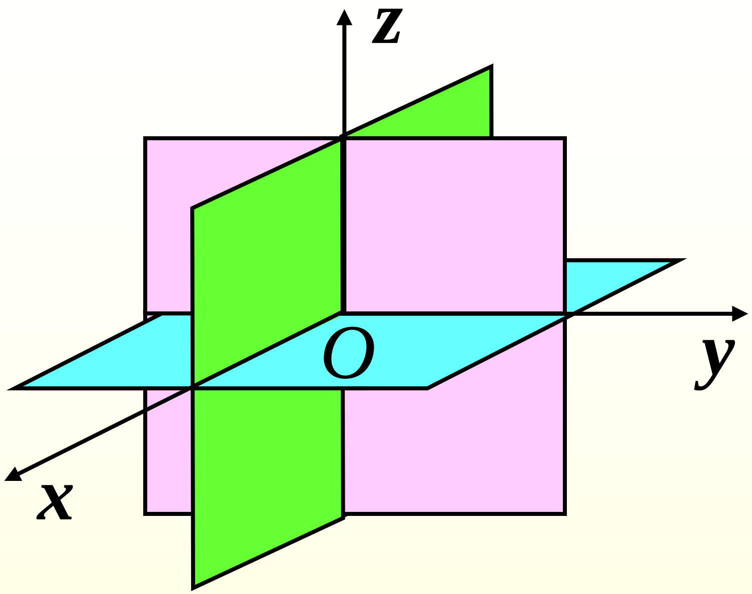
第五卦限: $x > 0, y > 0, z < 0;$

第六卦限: $x < 0, y > 0, z < 0;$

第七卦限: $x < 0, y < 0, z < 0;$

第八卦限: $x > 0, y < 0, z < 0.$





坐标轴：

$$x\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$y\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$z\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

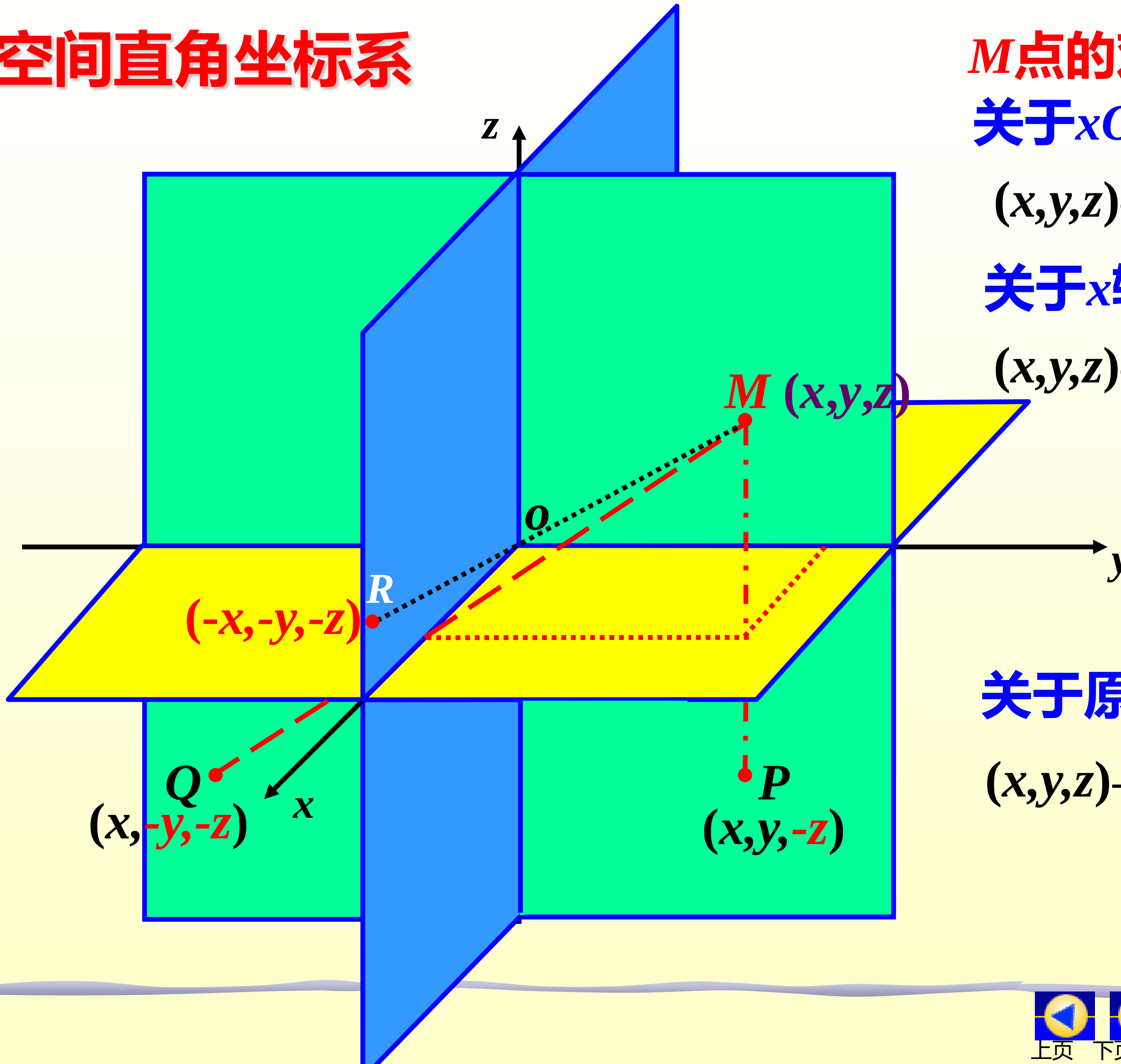
坐标面：

xOy面 $\leftrightarrow z=0$

yOz面 $\leftrightarrow x=0$

zOx面 $\leftrightarrow y=0$

空间直角坐标系



M点的对称点

关于xOy面:

$(x,y,z) \to (x,y,-z)$

关于x轴:

$(x,y,z) \to (x,-y,-z)$

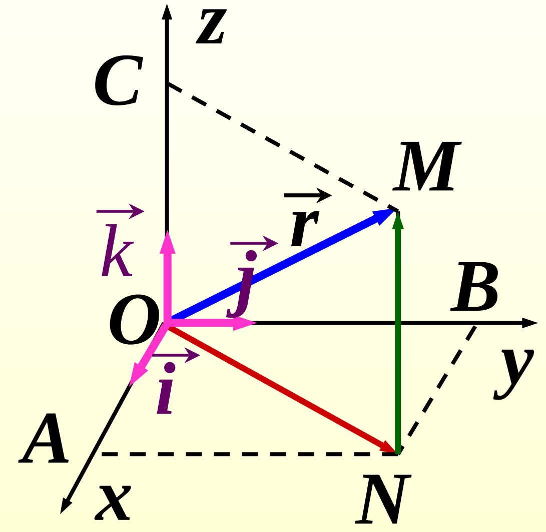
关于原点:

$(x,y,z) \to (-x,-y,-z)$

2. 向量的坐标表示

在空间直角坐标系下, 任意向量 $\vec{r}$ **可用向径** $\overrightarrow{OM}$ **表示.**

以 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 分别表示 x,y,z 轴上的单位向量, **设点** M **的坐标为** $M(x,y,z)$, **则**



$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA}=x\vec{i},\ \overrightarrow{OB}=y\vec{j},\ \overrightarrow{OC}=z\vec{k}$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\overset{\text{记}}{=}(x,y,z)$$

此式称为向量 $\vec{r}$ **的坐标分解式**, $x\vec{i},y\vec{j},z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{r}$ **沿三个坐标轴方向的分向量**, x,y,z 称为向量 $\vec{r}$ 的坐标.

四、利用坐标作向量的线性运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\ \vec{b}=(b_x,b_y,b_z),\ \lambda$ 为实数，则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_x&=\lambda a_x\\ b_y&=\lambda a_y\\ b_z&=\lambda a_z\end{aligned}}$$

平行向量对应坐标成比例:

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时，$\vec{b}//\vec{a} \rightleftarrows \vec{b}=\lambda\vec{a}$

$$\rightleftarrows \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$ (注意是上面式子的一个记号)

说明 当 a_x,a_y,a_z 中有一个或两个为零，b_x,b_y,b_z 中对应的值也为零. 例如 $\frac{b_x}{1}=\frac{b_y}{0}=\frac{b_z}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} b_y=0\\ \frac{b_x}{1}=\frac{b_z}{5}\end{cases}$

例2 **求解以向量为未知元的线性方程组**

$$\begin{cases} 5\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{a} & ① \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{b} & ② \end{cases}$$

其中 $\vec{a} = (2,1,2), \vec{b} = (-1,1,-2)$.

解 2×① - 3×②，得

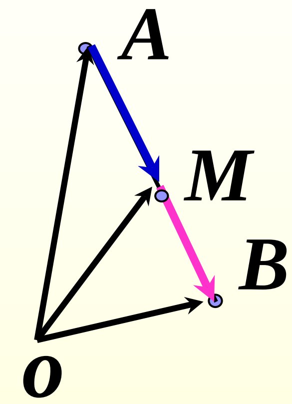
$$\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (7,-1,10)$$

代入②得

$$\vec{y} = \frac{1}{2}(3\vec{x} - \vec{b}) = (11,-2,16)$$

例3 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 及实数 $\lambda \neq -1$，在 AB 所在直线上求一点 M，使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

解 设 M 的坐标为 (x, y, z)，如图所示

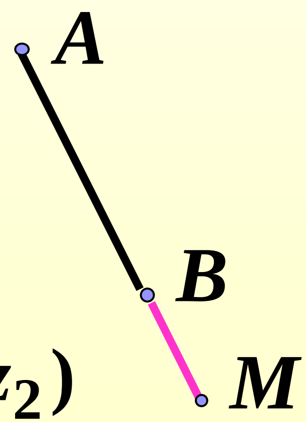


$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$



得 $$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$$

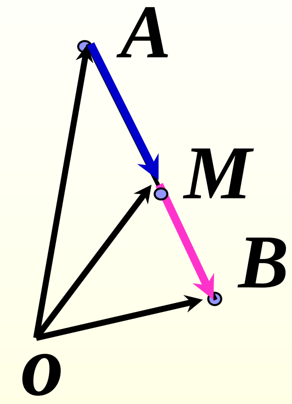
即 $$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

上页 下页

说明: 由

$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$

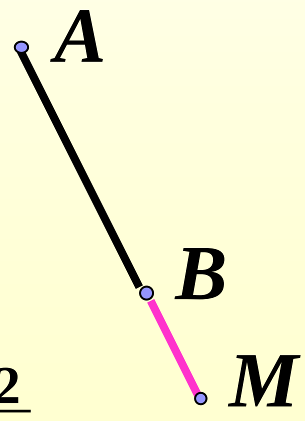
得定比分点公式:



$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

当 $\lambda=1$ 时, 点 M 为 AB 的中点 ,于是得

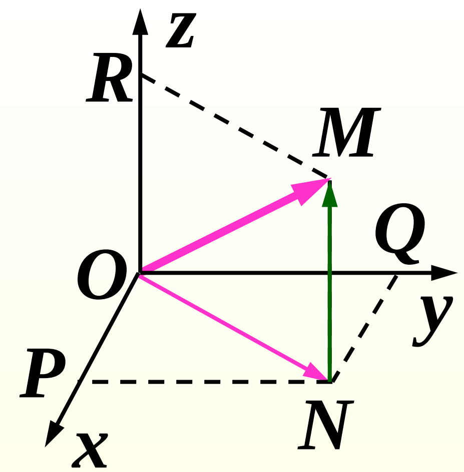


中点公式:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}\qquad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

五、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式



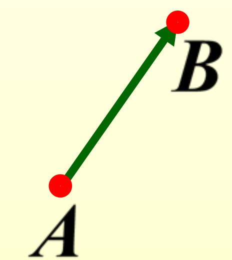
设 $\vec{r}=(x,y,z)$, 作 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, 则有

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

由勾股定理得

$$|\vec{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

对两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与 $B(x_2,y_2,z_2)$, 因



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

得两点间的距离公式:

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

上页 下页

例4 求证以 $M_1(4,3,1), M_2(7,1,2), M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

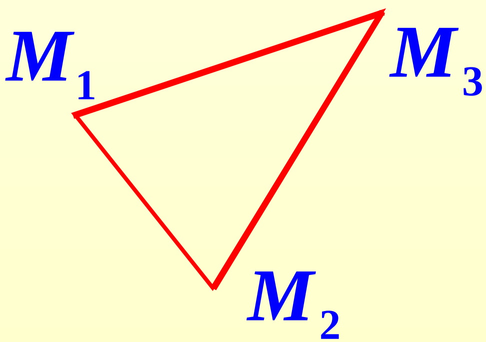
证

$$\because \quad |M_1M_2| = \sqrt{(7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|M_2M_3| = \sqrt{(5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$|M_1M_3| = \sqrt{(5-4)^2 + (2-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \quad |M_2M_3| = |M_1M_3|$$



即 $\Delta M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例5 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 及 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解 设该点为 $M(0,0,z)$, 因为 $|MA| = |MB|$,

$$\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (7-z)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2-z)^2}$$

解得 $z = \frac{14}{9}$, 故所求点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

思考:

(1) 如何求在 xOy 面上与 A , B 等距离之点的轨迹方程?

(2) 如何求在空间与 A , B 等距离之点的轨迹方程 ?

提示:

(1) 设动点为$M(x,y,0)$,利用$|MA|=|MB|$, 得

$$14x+8y+28=0, \text{且 } z=0$$

(2) 设动点为 $M(x,y,z)$,利用$|MA|=|MB|$,得

$$7x+4y-9z+14=0$$

例6 已知两点 $A(4,0,5)$和$B(7,1,3)$,求$\overrightarrow{AB}^{\circ}$.

解 $\overrightarrow{AB}^{\circ}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$

$$=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$$

思考:

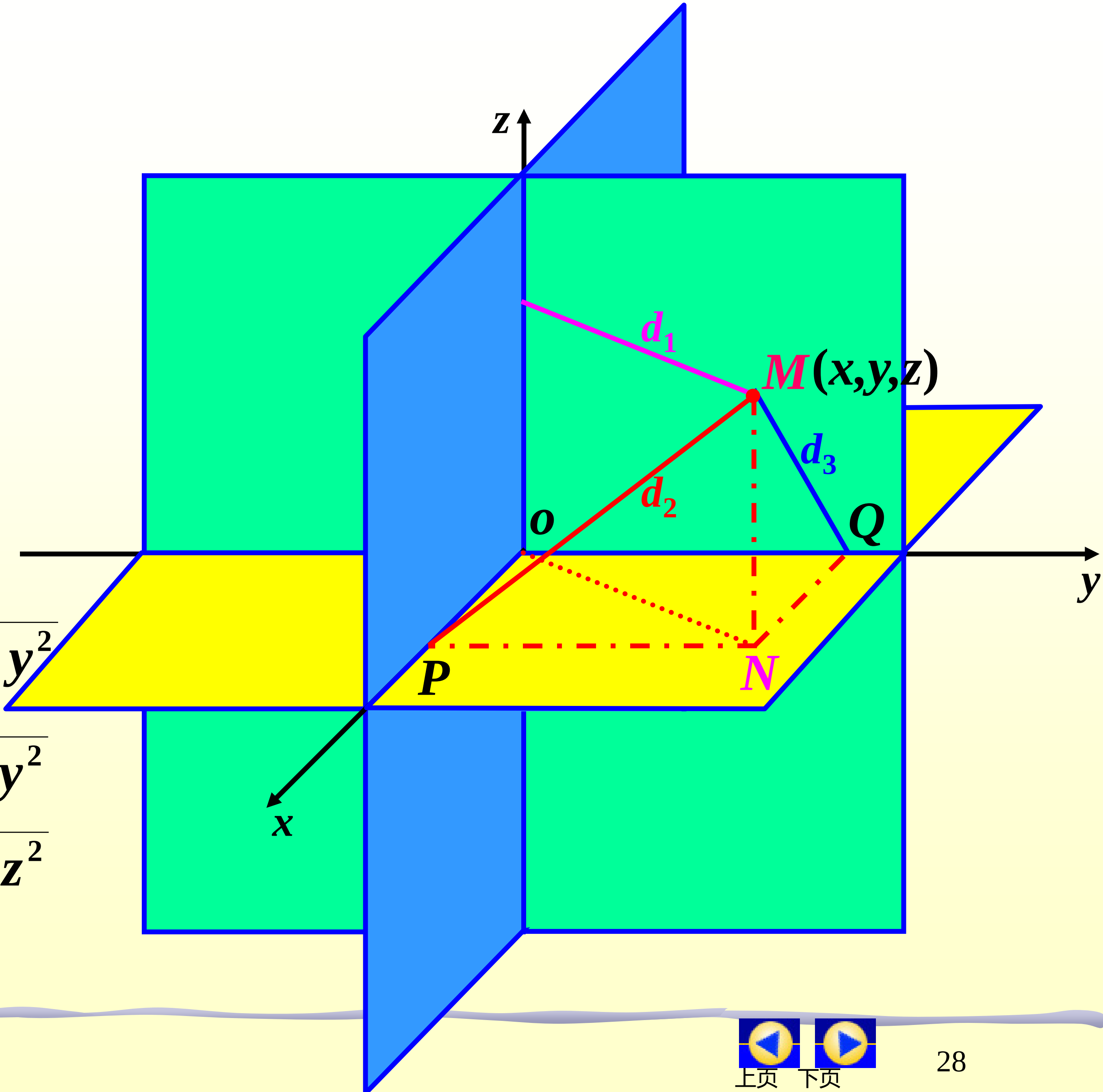
M点到坐标面的距离?

M点到坐标轴的距离?

到z轴: $d_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$

到x轴: $d_2 = \sqrt{z^2 + y^2}$

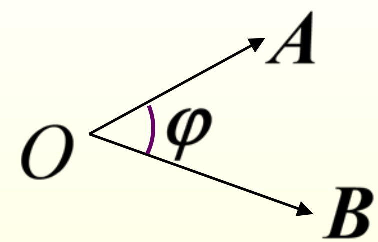
到y轴: $d_3 = \sqrt{x^2 + z^2}$



2. 方向角与方向余弦

设有两非零向量 $\vec{a},\vec{b}$, **任取空间一点** O , 作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, **称** $\varphi=\angle AOB\ (0\le\varphi\le\pi)$ **为向量** $\vec{a},\vec{b}$ **的夹角.**

记作 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\varphi$ 或 $(\widehat{\vec{b},\vec{a}})=\varphi$

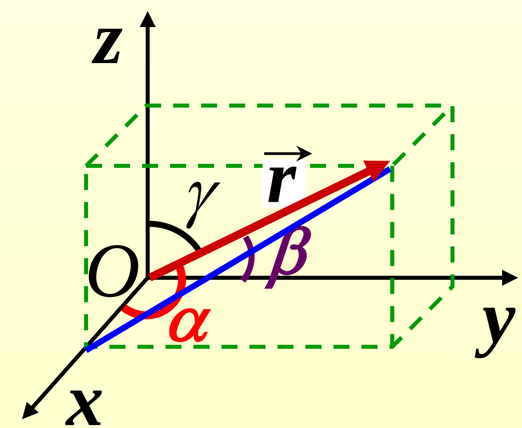


类似可定义向量与轴, 轴与轴的夹角 .

给定 $\vec{r}=(x,y,z)\neq\vec{0}$, 称 $\vec{r}$ **与三坐标轴的夹角** α,β,γ **为其方向角.**

方向角的余弦称为其方向余弦.

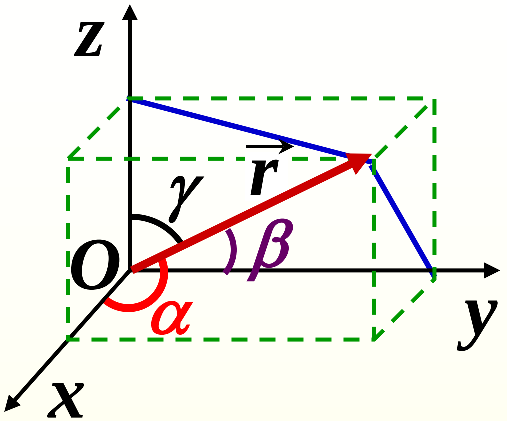
$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



方向余弦的性质: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

向量 $\vec{r}$ 的单位向量:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

例7 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,\ 3-2,\ 0-\sqrt{2})$

$$=(-1,1,-\sqrt{2})$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}$$

例8 设点 A 位于第一卦限，向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$，且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$，求点 A 的坐标 .

解 设点 A 的坐标为 (x, y, z)，则 $\overrightarrow{OA} = (x, y, z)$，

$$\because \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \frac{1}{4}$$

因点 A 在第一卦限，故 $\cos\gamma = \frac{1}{2}$，于是

$$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| \overrightarrow{OA}^{\circ} = 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\sqrt{2}, 3)$$

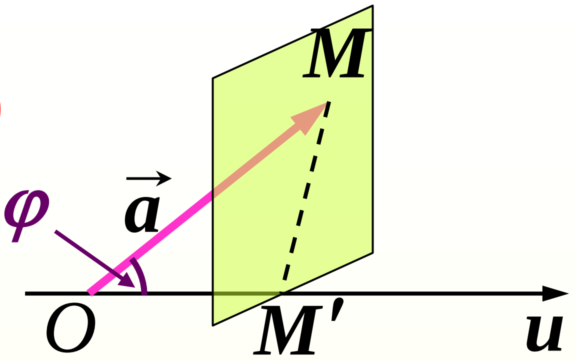
故点 A 的坐标为 $(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

上页 下页

3. 向量在轴上的投影 (Projection)

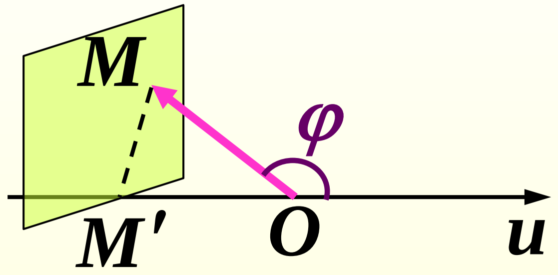
设 $\vec{a}$ 与 u 轴正向的夹角为 φ,

则 $\vec{a}$ 在轴 u 上的**投影为** $|\vec{a}|\cos\varphi$



记作 $\mathrm{Prj}_u\vec{a}$ 或 $(\vec{a})_u$, 即

$$(\vec{a})_u = |\vec{a}|\cos\varphi$$



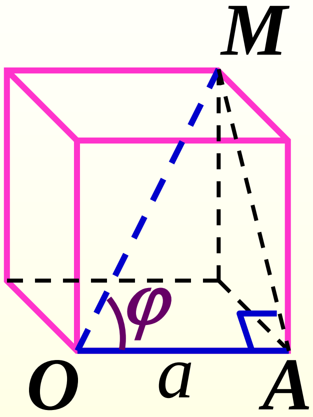
例如, $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$在坐标轴上的投影分别为$a_x, a_y, a_z$

投影的性质

1) $(\vec{a}+\vec{b})_u = (\vec{a})_u + (\vec{b})_u$

2) $(\lambda\vec{a})_u = \lambda(\vec{a})_u$ (λ为实数)

例9 设立方体的一条对角线为OM, 一条棱为 OA, 且 $|OA| = a$,求$\overrightarrow{OA}$在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影.



解 如图所示, 记 $\angle MOA = \varphi$,

$$\cos\varphi = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad \mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

结束 目录 上页 下页

备用题

1. 设 $\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$，$\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$，$\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$，求向量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 因 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$

$$=4(3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k})+3(2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k})-(5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})$$

$$=13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k}$$

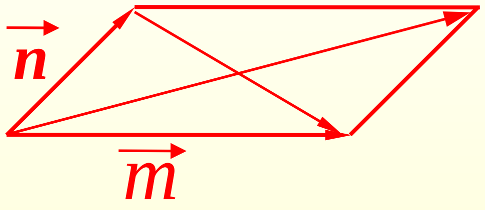
故在 x 轴上的投影为 $a_x=13$

在 y 轴上的分向量为 $a_y\vec{j}=7\vec{j}$

结束 目录 上页 下页

2. 设 $\vec{m}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{n}=-2\vec{j}+\vec{k}$, 求以向量 $\vec{m}$, $\vec{n}$ 为边的平行四边形的对角线的长度 .

解 对角线的长为 $|\vec{m}+\vec{n}|, |\vec{m}-\vec{n}|$



$$\because \quad \vec{m}+\vec{n}=(1,-1,1)$$

$$\vec{m}-\vec{n}=(1,3,-1)$$

$$\therefore \quad |\vec{m}+\vec{n}|=\sqrt{3}$$

$$|\vec{m}-\vec{n}|=\sqrt{11}$$

该平行四边形的对角线的长度各为 $\sqrt{3},\sqrt{11}$

结束 目录 上页 下页

第二节
数量积 向量积 *混合积

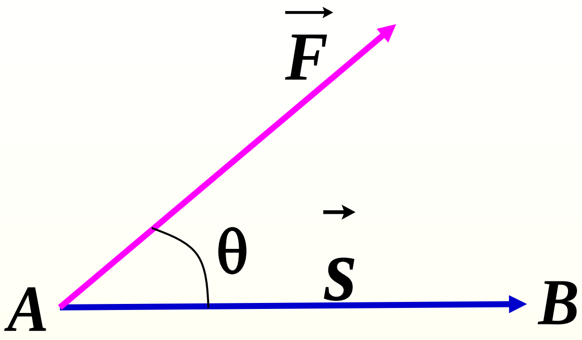
一、两向量的数量积

二、两向量的向量积

*三、向量的混合积

一、两向量的数量积

1. 定义 $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$

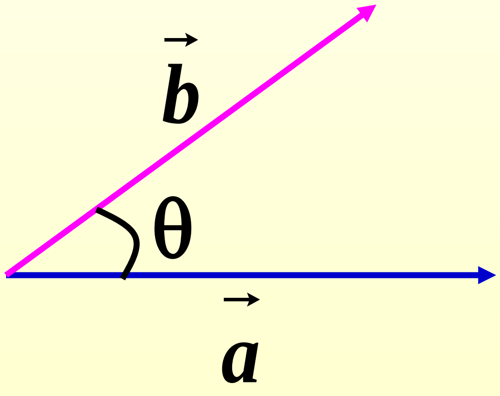


叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**.

$$W=|\vec{F}||\vec{S}|\cos\theta=\vec{F}\cdot\vec{S}$$

当$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\because\ |\vec{b}|\cos\theta=\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$,

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b},$$



当$\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$

上页 下页

2. (由数量积的定义可推得)数量积的性质:

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2.$ $\quad\because \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\cos 0=|\vec{a}|^2.$

(2) $\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}.$

证 $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0\Leftrightarrow$

$$\cos\theta=0\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}.$$

由于零向量的方向是任意的,所以可以认为零向量与任何向量都垂直,则

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$$

3. 数量积的运算规律

(1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$$\because\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

(2) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$

(3) 结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b});$

$$(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot(\mu\vec{b}))=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

举例：考察下列式子的正确性：

(1) $|\vec{a}|\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{a};$ (2) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{b});$

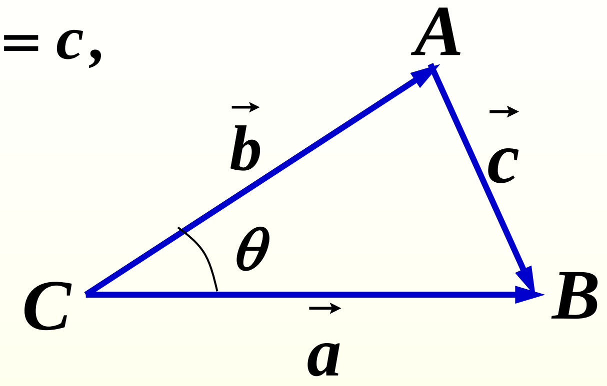
(3) 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}=\vec{0}$ 或 $\vec{b}=\vec{0}.$

上页 下页

例1 试用向量证明三角形的余弦定理.

已知 $\angle BCA=\theta,\ |BC|=a, |CA|=b, |AB|=c,$

要证 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$



证 记 $\overrightarrow{CB}=\vec{a}, \overrightarrow{CA}=\vec{b}, \overrightarrow{AB}=\vec{c}$

$$\therefore \vec{c}=\vec{a}-\vec{b}.$$

$$|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

4. 数量积的坐标表达式

设：$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$=a_xb_x\ 1\ +a_xb_y\ 0\ +a_xb_z\ 0$$

$$+a_yb_x\ 0\ +a_yb_y\ 1\ +a_yb_z\ 0$$

$$+a_zb_x\ 0\ +a_zb_y\ 0\ +a_zb_z\ 1$$

所以 $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$

应用 求夹角，判断向量垂直，求投影（包括5、6）

5.两向量夹角 $\because \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta,$

当 $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\quad \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

则
$$\boxed{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}}$$

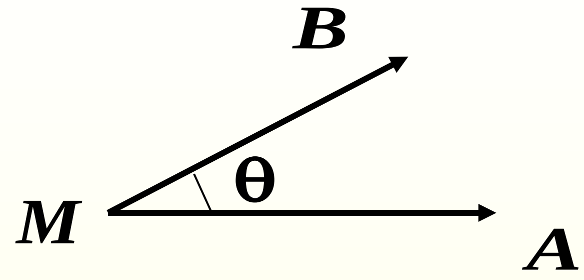
上式称为两向量夹角余弦的坐标表达式.

6.求一个向量在另一个向量上的投影

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}}$$

例2 已知 $M(1,1,1), A(2,2,1), B(2,1,2)$, 求 $\theta = \angle AMB$.

解 $\theta = \angle AMB = (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$



$$\because \overrightarrow{MA} = (1,1,0), \quad \overrightarrow{MB} = (1,0,1),$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1\times1 + 1\times0 + 0\times1 = 1$$

$$\because |\overrightarrow{MA}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}; \; |\overrightarrow{MB}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

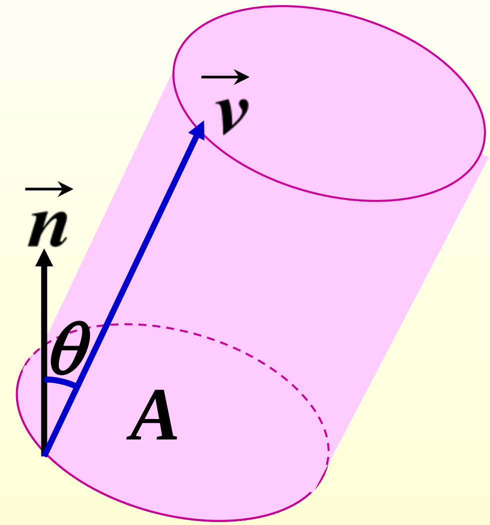
$$\therefore \theta = \angle AMB = \frac{\pi}{3}$$

例3 设均匀流速为$\vec{v}$的流体流过一个面积为 A 的平面域，且$\vec{v}$与该平面域的单位垂直向量$\vec{n}$的夹角为θ, 求单位时间内流过该平面域的流体的质量P (流体密度为 ρ)．

解 $P = \rho A \left|\vec{v}\right| \cos\theta$

$\vec{n}$ 为单位向量

$= \rho A \vec{v} \cdot \vec{n}$



单位时间内流过的体积

$A \left|\vec{v}\right| \cos\theta$

二、两向量的向量积

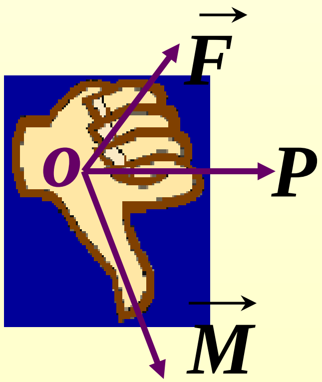
引例. 设O为杠杆L的支点，有一个与杠杆夹角为θ的力$\vec{F}$作用在杠杆的P点上，则力$\vec{F}$作用在杠杆上的力矩是一个向量$\vec{M}$：

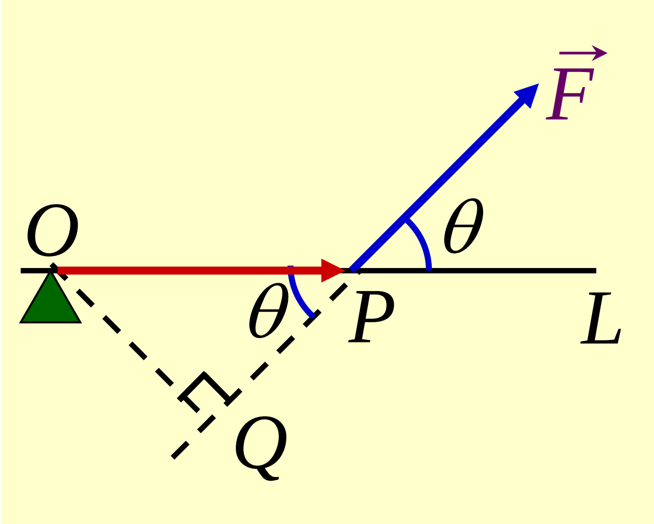
$$\left|\vec{M}\right| = |OQ|\,|\vec{F}| = |\overrightarrow{OP}|\,|\vec{F}|\sin\theta$$

$\overrightarrow{OP} \Rightarrow \vec{F} \Rightarrow \vec{M}$ 符合右手规则

$\vec{M} \perp \overrightarrow{OP}$

$\vec{M} \perp \vec{F}$





$$|OQ| = |\overrightarrow{OP}|\sin\theta$$

$$\vec{M} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$$

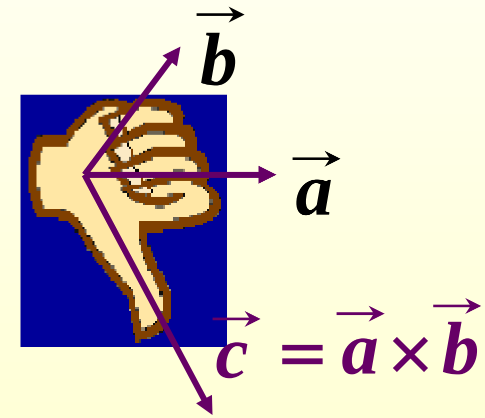
1. 定义

设 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 θ, **定义**

$$\text{向量 } \vec{c}\begin{cases}\textbf{方向}:\ \vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}\ \textbf{且符合右手规则}\\ \textbf{模}:\ |\vec{c}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta\end{cases}$$

称 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的 **向量积**, **记作**

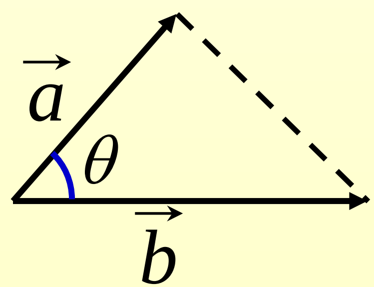
$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\qquad\text{(叉积)}$$



引例中的力矩 $\vec{M}=\overrightarrow{OP}\times\vec{F}$

思考: 右图三角形面积

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$



2. (由向量积的定义可推得)向量积的性质:

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0};$ $\because \theta=0,\ \therefore \left|\vec{a}\times\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right|^2\sin 0=0.$

(2) $\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}//\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.$

$$\because \left|\vec{a}\right|\neq 0, \left|\vec{b}\right|\neq 0, \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\ \Leftrightarrow \sin\theta=0\ \Leftrightarrow \theta=0, \theta=\pi$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}//\vec{b}.$$

由于零向量的方向是任意的，所以可以认为零向量与任何向量都平行，则

$$\boxed{\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}}$$

3. 向量积的运算规律

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

注意！
向量积的运算
不满足交换律

(2) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$;

$$\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}.$$

(3) 结合律 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

4. 向量积的坐标表达式

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\quad\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

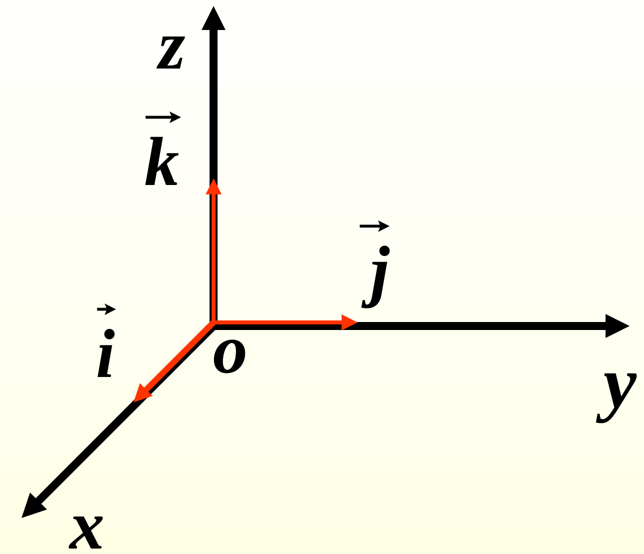
$$
= a_x \vec{i} \times \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right) + a_y \vec{j} \times \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right)
$$

$$
+ a_z \vec{k} \times \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right)
$$

$$
= a_x b_x \boxed{\vec{0}} + a_x b_y \boxed{\vec{k}} + a_x b_z \boxed{-\vec{j}}
$$

$$
+ a_y b_x \boxed{-\vec{k}} + a_y b_y \boxed{\vec{0}} + a_y b_z \boxed{\vec{i}}
$$

$$
+ a_z b_x \boxed{\vec{j}} + a_z b_y \boxed{-\vec{i}} + a_z b_z \boxed{\vec{0}}
$$



$$
\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}}
$$

$$
\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}
$$

应用

求与两向量同垂直的向量，判断向量平行，求面积

例4 设 $\vec{a}=(2,1-1),\vec{b}=(1,-1,2)$，计算$\vec{a}\times\vec{b}$.

解 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}.$

例5 求同时垂直于向量$\vec{a}=(2,1,3),\vec{b}=(0,-5,1)$的单位向量$\vec{c}$.

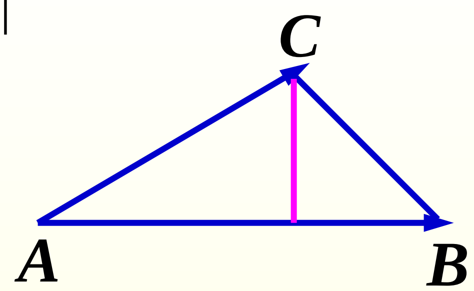
解 $\because\ \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & -5 & 1\end{vmatrix}=(1+15)\vec{i}-(2-0)\vec{j}+(-10-0)\vec{k}$

$=16\vec{i}-2\vec{j}-10\vec{k}$

$$\therefore\ \vec{c}=\pm\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\pm\frac{16\vec{i}-2\vec{j}-10\vec{k}}{\sqrt{16^2+(-2)^2+(-10)^2}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{30}\left(8\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}\right)$$

例6 已知 $A(1,2,3), B(3,4,5), C(2,4,7)$, 求 ΔABC 的面积和 $\sin\angle A$.

解
$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\angle A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$



$$\overrightarrow{AB}=(2,2,2),\overrightarrow{AC}=(1,2,4),$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k},$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3},\quad \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}.$$

$$\sin\angle A=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{2\sqrt{14}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

例7 已知向量 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z),\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$

证明这三个向量共面的充要条件是: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0.$

证明 **必要性** 若这三个向量共面，则 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c}$

所以 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

充分性 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

若 $\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}$ 中一有一个向量为零，则结论成立.

若 $\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}$ 两个向量均不为零，则 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c}$

所以这三个向量共面.

三、向量的混合积

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

几何意义看课本21页

内容小结

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$

1. 向量运算

加减: $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$

数乘: $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$

点积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

叉积: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$

上页 下页

2. 向量关系:

$$\vec{a} \,//\, \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

思考与练习

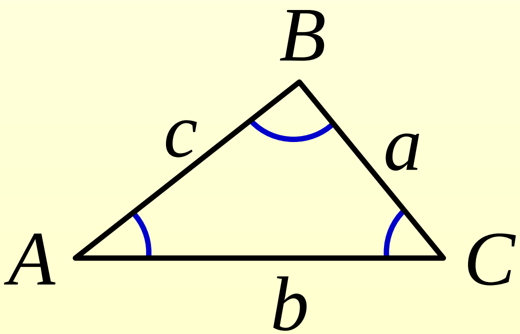
1. 设 $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}$, 计算 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 及 $\vec{a}\times\vec{b}$, 并求 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角 θ 的正弦与余弦.

答案 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $\quad \vec{a}\times\vec{b}=(1,1,3)$

$$\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}},\quad \sin\theta=\sqrt{\frac{11}{12}}$$

2. 用向量方法证明正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



证 **由三角形面积公式**

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|$$

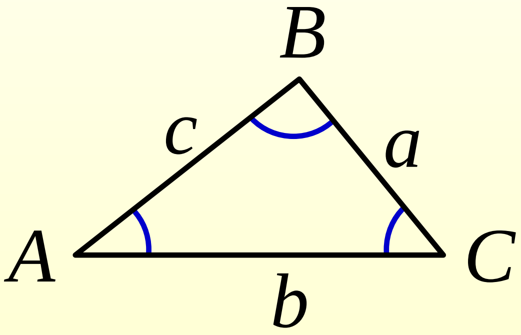
$$= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right|$$

因

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right| = b\cdot c\cdot\sin A$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right| = c\cdot a\cdot\sin B$$

$$\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right| = a\cdot b\cdot\sin C$$



所以

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

3. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角 $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$,且 $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 3$,求 $|\vec{a} - \vec{b}|$.

解 $\because \ |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta + |\vec{b}|^2$$

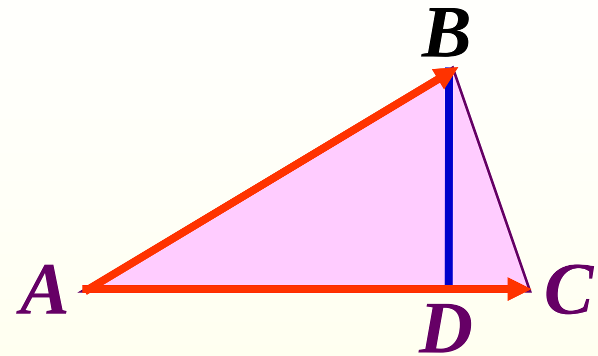
$$= (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos\frac{3\pi}{4} + 3^2$$

$$= 17$$

$$\therefore \quad |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17}$$

结束 上页 下页

4. 在顶点为$A(1,-1,2)$，$B(1,1,0)$ 和 $C(1,3,-1)$ 的三角形中，求 AC 边上的高 BD .



解 $\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$

$\overrightarrow{AB}=(0,2,-2)$

三角形 ABC 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0^2+0^2}\quad=1$$

而 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\quad S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|BD|$

故有 $1=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot|BD|\qquad\therefore\quad |BD|=\frac{2}{5}$

5.考察下列式子的正确性:

(1)若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}=\vec{0}$ 或 $\vec{b}=\vec{0}$. (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

(2)若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ 且$\vec{a}\neq\vec{0} \Rightarrow \vec{b}=\vec{c}$ (2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c} \Rightarrow$

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0$$

(3)若 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow \vec{a}=\vec{0}$ 或 $\vec{b}=\vec{0}$. (3) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\,//\,\vec{b}$

(4)若 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$且 $\vec{a}\neq\vec{0} \Rightarrow \vec{b}=\vec{c}$. (4) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c} \Rightarrow$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{0}$$

例 **证明:** $A'(-2,-1,-3), B'(-1,-2,0), C'(0,-3,3)$ **三点共线**

证明 $\overrightarrow{A'B'} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ $\quad \overrightarrow{A'C'} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$

$$\because \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{3}{6} \qquad \therefore A', B', C' \text{ 三点共线}$$

$$\because \overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

结束 上页 下页

例 **设** $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=3, \left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)=\frac{\pi}{6}$, 求以向量 $\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}-3\vec{b}$ 为边的平行四边形的面积.

解 $S=\left|(\vec{a}+2\vec{b})\times(\vec{a}-3\vec{b})\right|$

$$=5\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=5|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{6}=30$$

结束 上页 下页

例 向量 $\vec{c}$ 垂直于向量 $\vec{a}=(2,3,-1)$ 和 $\vec{b}=(1,-2,3)$，并满足 $\vec{c}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$，求向量 $\vec{c}$.

解

$$\vec{c}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\lambda\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=\lambda(7\vec{i}-7\vec{j}-7\vec{k})$$

又 $\vec{c}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$，得 $\lambda=\dfrac{-3}{7}$.

$$\therefore \vec{c}=(-3,3,3)$$

结束 上页 下页

卫星接收装置(旋转抛物面)

化工厂或热电厂
的冷却塔(旋转双曲面)

第三节 曲面及其方程

一、曲面方程的概念

二、旋转曲面

三、柱面

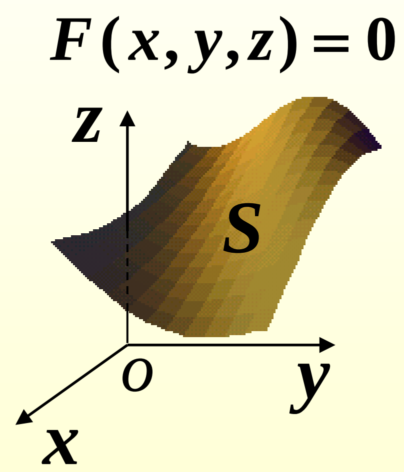
四、二次曲面

一、曲面方程的概念

定义1. 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系:

(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程;

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程,



则 $F(x, y, z) = 0$ 叫做曲面 S 的**方程**,

曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的**图形**.

两个基本问题：

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时,

求曲面方程. （讨论旋转曲面）

(2) 已知方程时，研究它所表示的几何形状

(必要时需作图). （讨论柱面）

例1 求到点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的距离等于R的点的轨迹方程.

解 设轨迹上的动点为$M(x,y,z)$

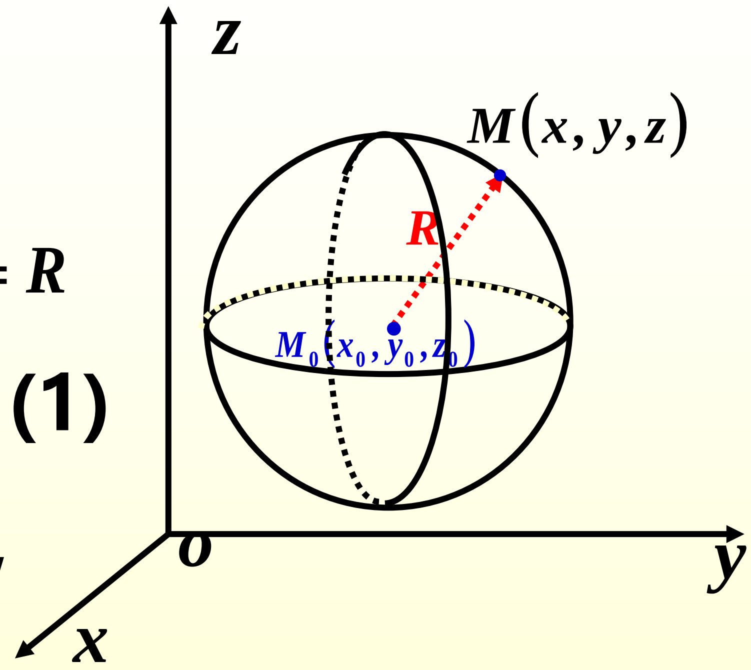
则 $|M_0M| = R$

即 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2 \quad (1)$$

就是以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心，

半径为R的球面方程.



若球心在原点，则 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,

球面的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (2)$

例2 求到$A(1,2,3)$,$B(2,-1,4)$两点距离相等的点的轨迹方程.

解 设轨迹上的动点为$M(x,y,z)$

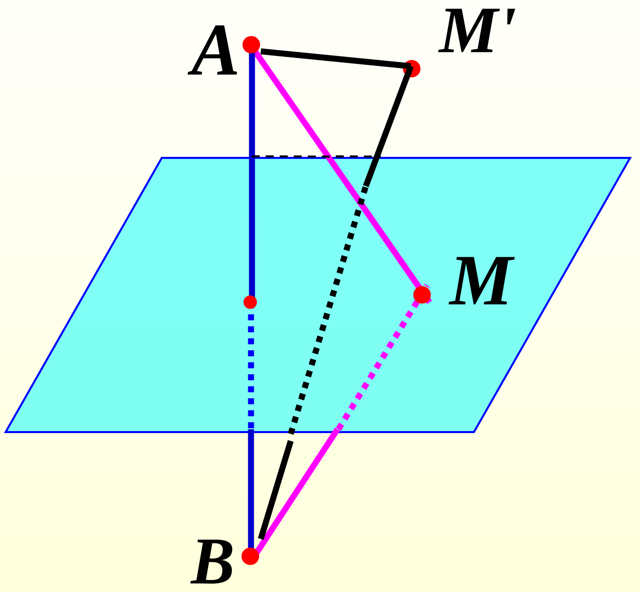
则 $|MA| = |MB|$

即 $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$

$= \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$

整理得 $2x-6y+2z-7=0$

即为所求点的轨迹方程.



线段AB的垂直平分面.

例3 研究方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面.

解 配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

可见此方程表示一个球面

球心为 $M_0(1,-2,0)$, 半径为 $\sqrt{5}$

说明: 如下形式的三元二次方程 $(A\neq 0)$

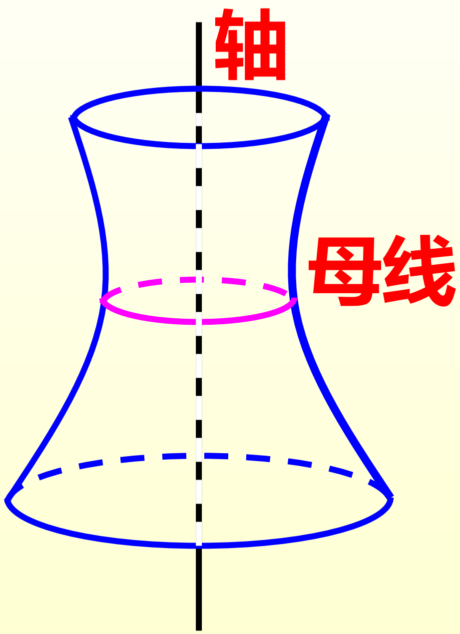
$$A(x^2+y^2+z^2)+Dx+Ey+Fz+G=0 \quad (3)$$

都可通过配方研究它的图形. 其图形可能是

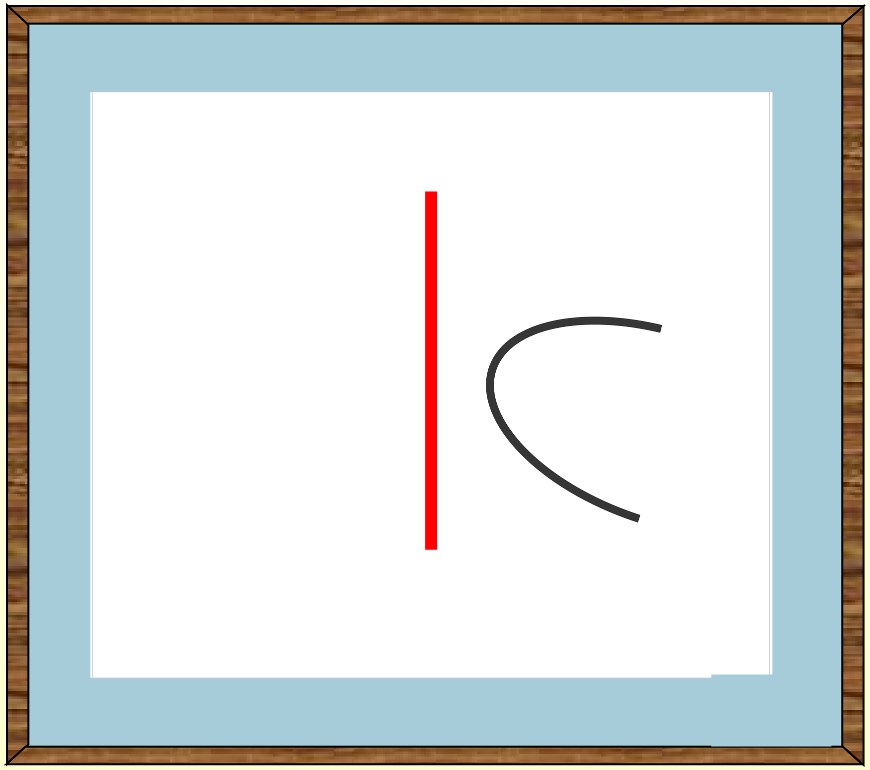
一个**球面**, 或**点**, 或**虚轨迹**.

二、旋转曲面

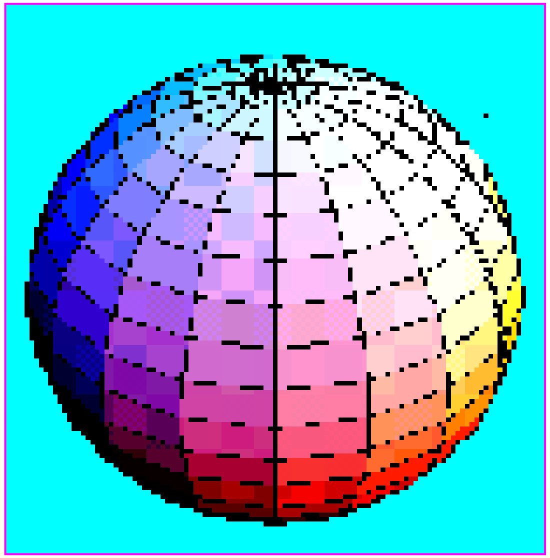
一条平面曲线绕其平面上一条**定直线**旋转一周所形成的曲面叫做**旋转曲面**. 定直线称为**轴**. 旋转曲线称为**母线**.

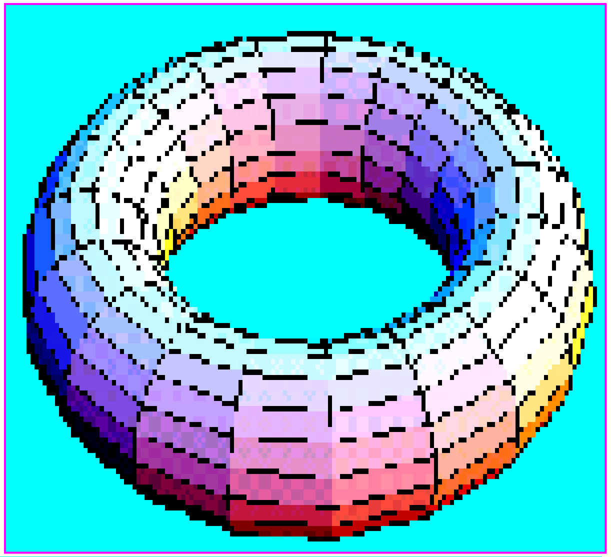


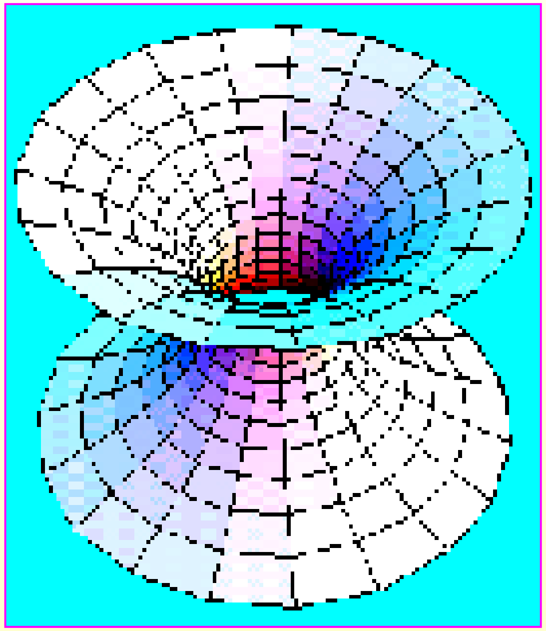
观察**旋转曲面**的形成过程:

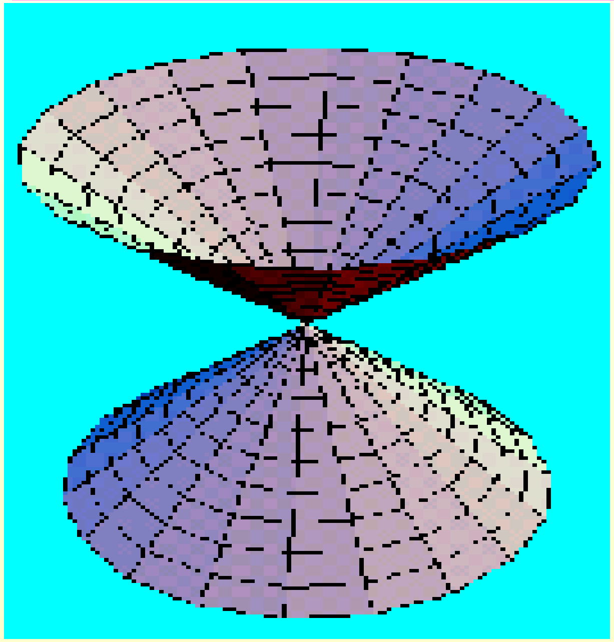


例如：









以下建立yOz 面上曲线 C 绕 z 轴旋转所成曲面的方程:

设yOz面的曲线C：$f(y,z)=0$，点$M_1(0,y_1,z_1)$在曲线C上,

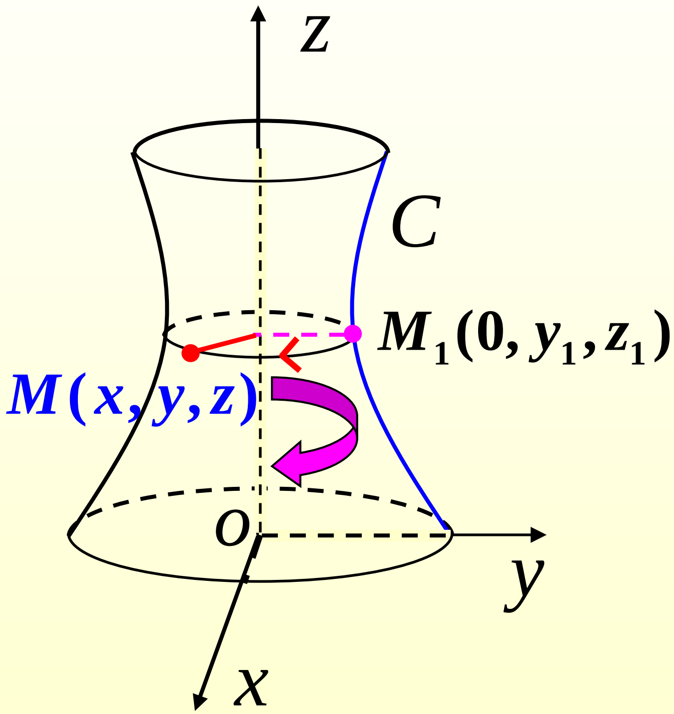
则　$f(y_1,z_1)=0$　　(4)

$M_1(0,y_1,z_1)\to M(x,y,z)\in S$，　$z=z_1$.

M点到 z 轴的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$

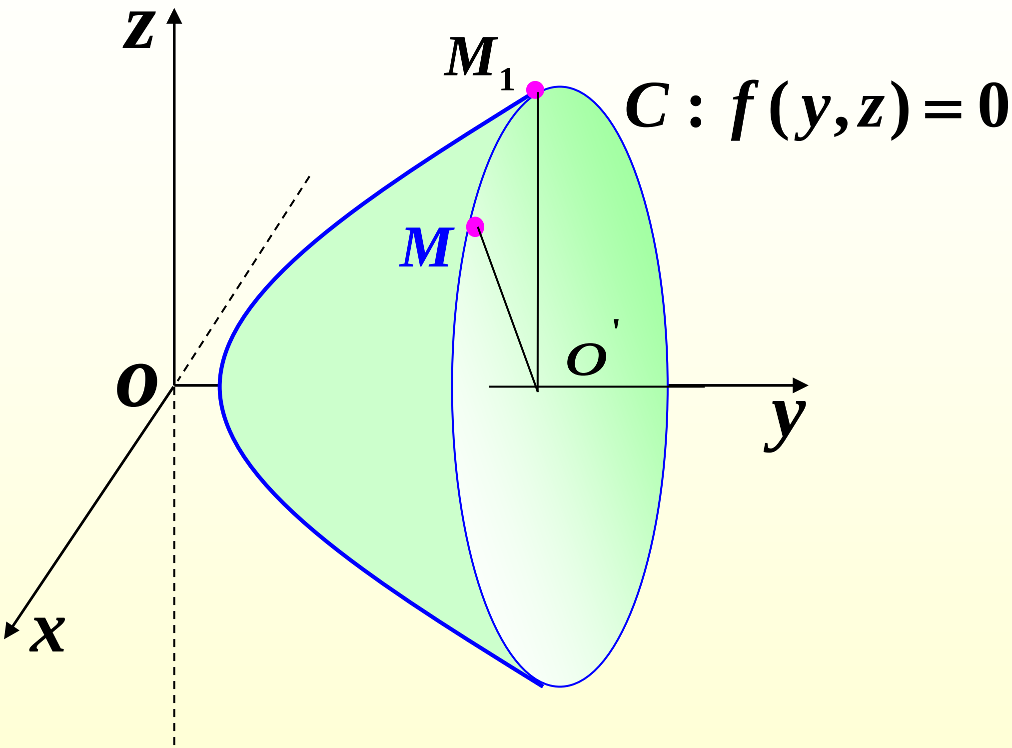
将$z_1=z, y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$代入(4)得

$$\boxed{f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0} \qquad (5)$$



就是所求旋转曲面的方程.

思考:当曲线 C 绕 y 轴旋转时，方程如何?



$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

同理, xOy面上曲线C: $f(x,y)=0$

绕x轴旋转所成的旋转曲面的方程为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

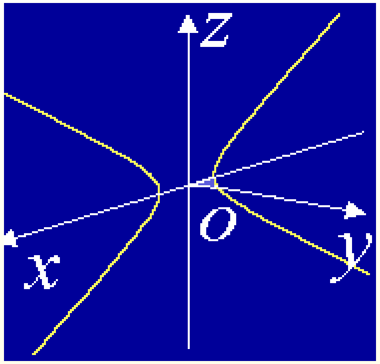
绕y轴旋转所成的旋转曲面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2},\ y)=0$

zOx面上曲线C: $f(x,z)=0$

绕x轴旋转所成的旋转曲面的方程为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

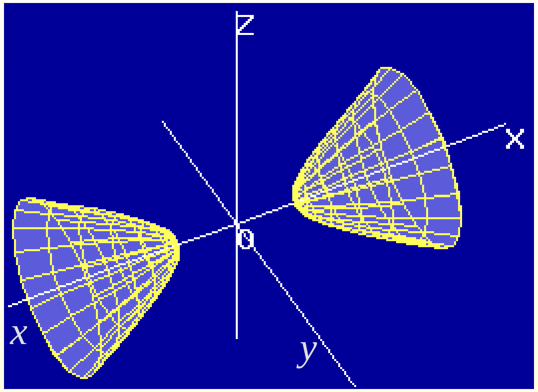
绕z轴旋转所成的旋转曲面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$

例4 将zOx平面上的双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$分别绕$x$轴和$z$轴旋转一周,求所形成的旋转曲面的方程.



解 绕 x 轴旋转得

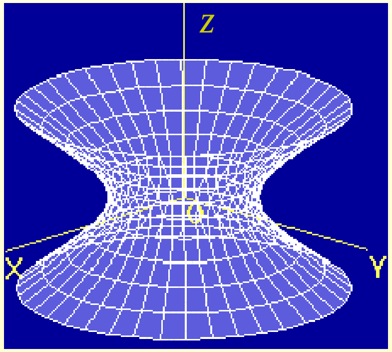
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$



双叶双曲面

绕 z 轴旋转得

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



单叶双曲面

这两种曲面都叫做<u>旋转双曲面</u>.

例5 建立顶点在原点,旋转轴为z 轴,半顶角为 α 的**圆锥面**方程.

解 在yOz面上的直线 L的方程为:

$$z = y\cot\alpha$$

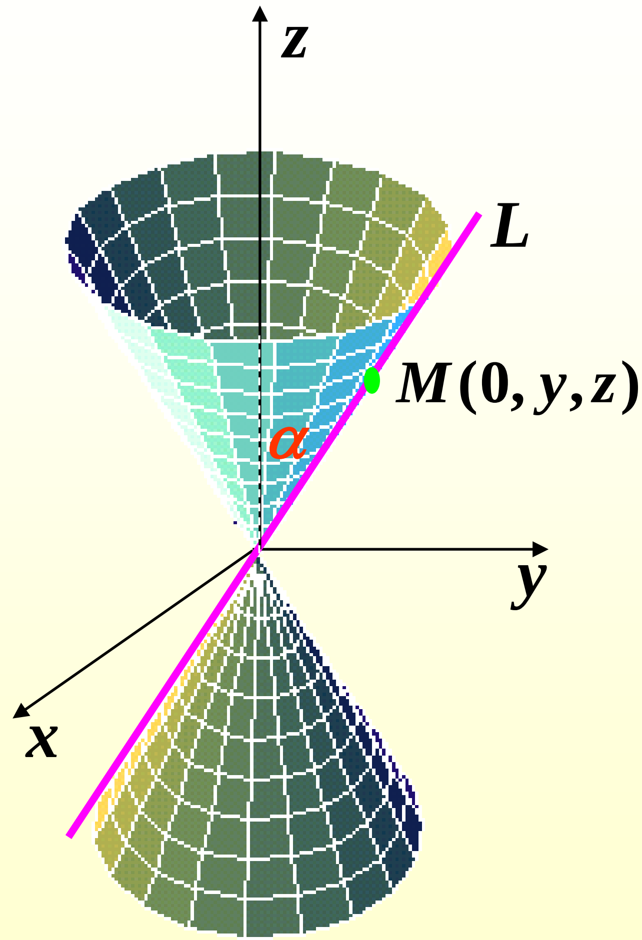
L绕z 轴旋转时,圆锥面的方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\cot\alpha$$

令 $a = \cot\alpha$

两边平方

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

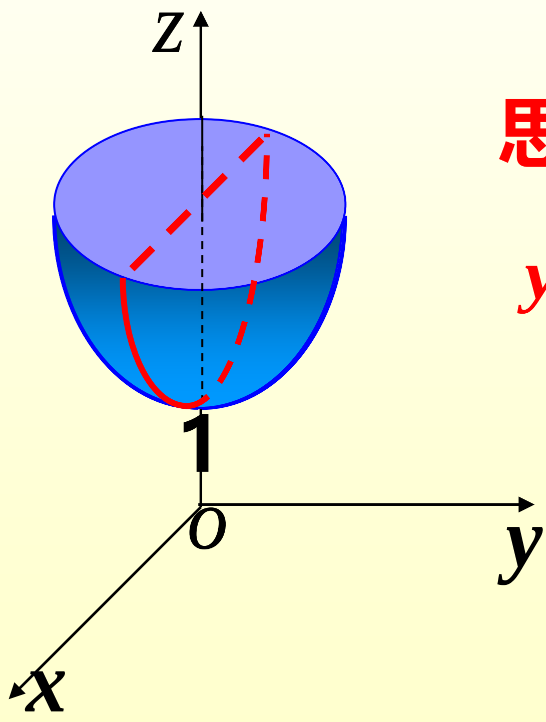


思考: α的大小与圆锥面的张口大小有何关系?

例6 试判断方程 $x^2+y^2=z-1$ 表示何种曲面?并作图.

解 yOz 面上的抛物线 $y^2=z-1$ 绕z轴旋转所得旋转曲面.

或zOx面上的抛物线$x^2=z-1$绕z轴旋转所得旋转曲面.



思考:

$y=x^2+z^2$表示什么图形?

三、柱面

引例 分析方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 表示怎样的曲面.

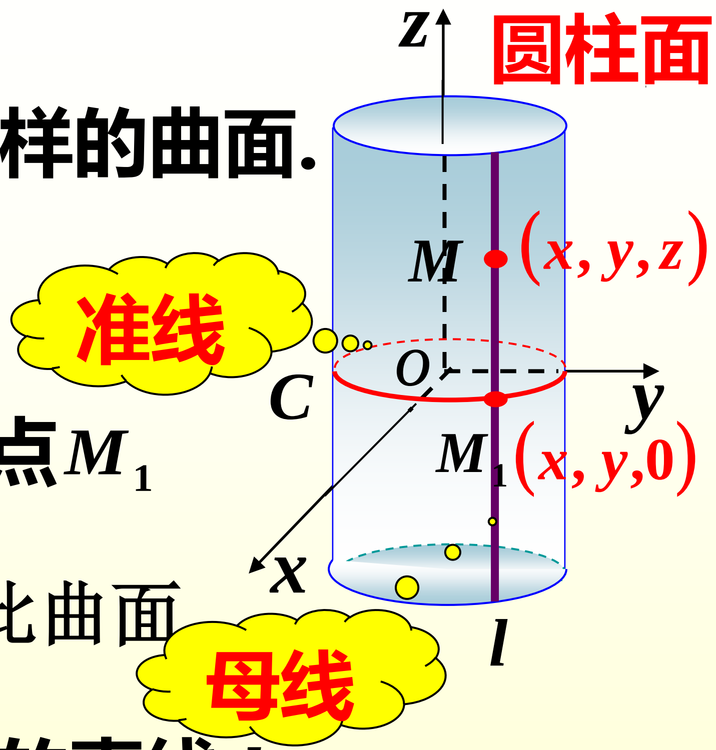
解 在xoy面上，$x^2 + y^2 = R^2$ 表示圆C，

由于方程少z,故 在圆C上任取一点 M_1

过此点作平行z 轴的直线l，$l \subset$ 此曲面

此曲面可以看作是由平行于z 轴的直线 l

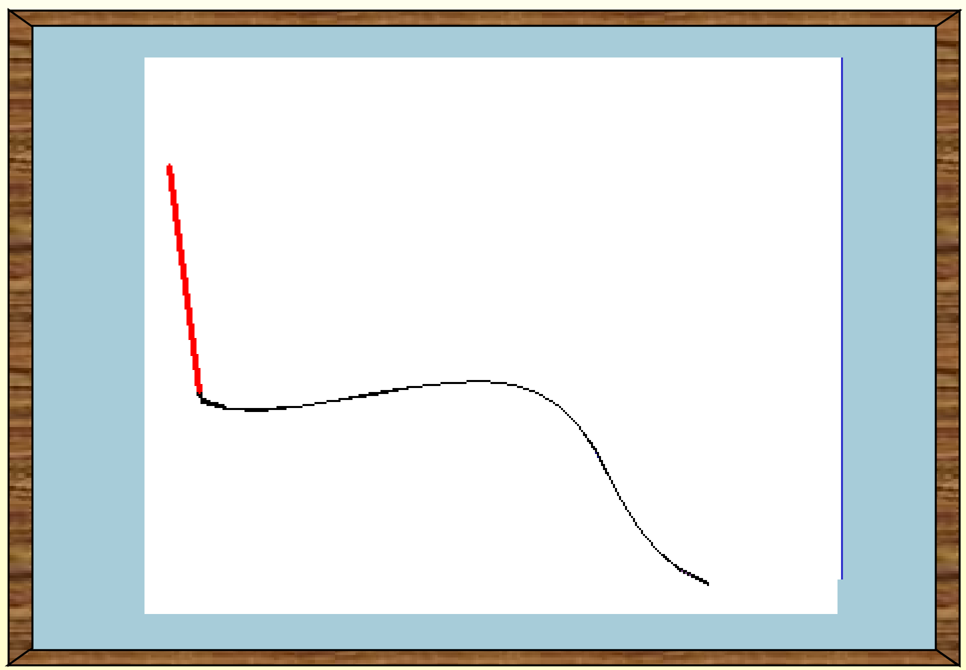
沿xoy面上的圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 移动而成.



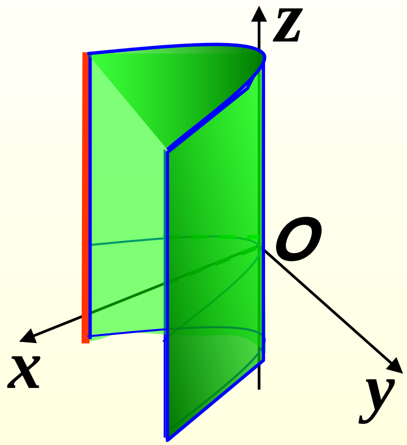
柱面的概念

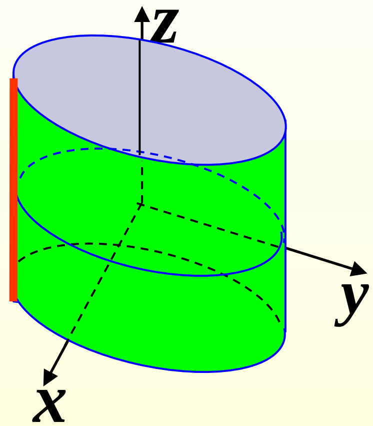
平行于定直线并沿定曲线C 移动的直线l形成的轨迹叫做**柱面**, 定曲线C叫做柱面的**准线**, 动直线l叫做柱面的**母线**.

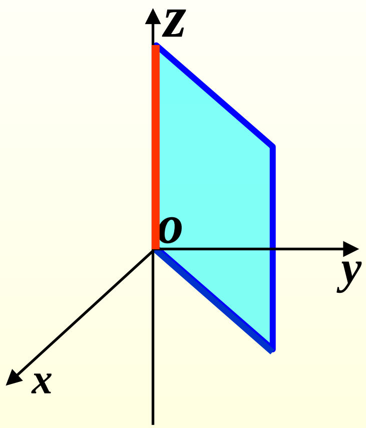
观察柱面的形成过程:



柱面举例 $x = y^2$ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $x - y = 0$







抛物柱面 **椭圆柱面** **过 z 轴的平面**

母线平行于 z 轴;
准线为xOy 面上的
抛物线.

表示母线平行于
z 轴的椭圆柱面.

表示母线平行于
z 轴的平面.
(且 z 轴在平面上)

一般地,在三维空间

方程 $F(x,y)=0$ 表示**柱面**,

母线平行于 z **轴;**

准线 xOy **面上的曲线** l_1.

方程 $G(y,z)=0$ 表示 **柱面**,

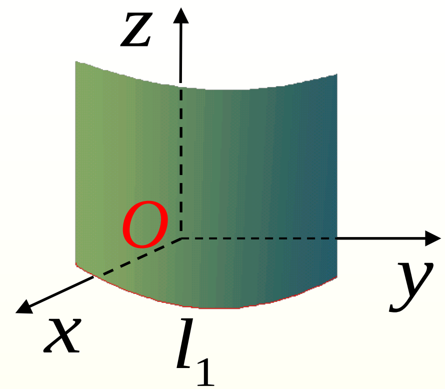
母线平行于 x **轴;**

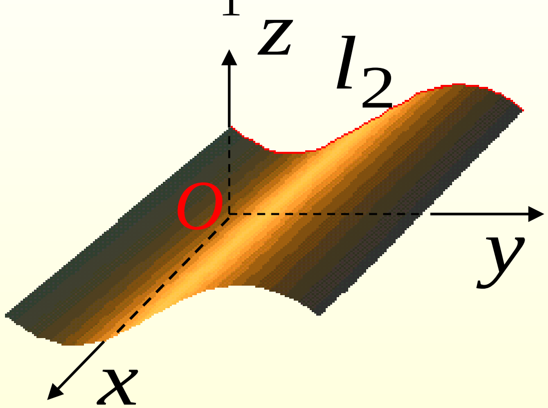
准线 yOz **面上的曲线** l_2.

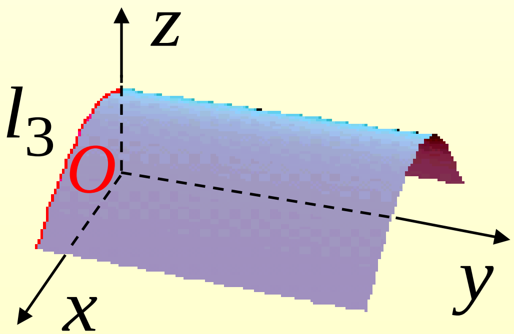
方程 $H(z,x)=0$ 表示**柱面**,

母线平行于 y **轴;**

准线 xOz **面上的曲线** l_3.







四、二次曲面

三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

(二次项系数不全为 0)

的图形统称为二次曲面. 其基本类型有:

椭球面、抛物面、双曲面、锥面

适当选取直角坐标系可得它们的标准方程,下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍 .

研究二次曲面特性的基本方法: 截痕法

1.椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c$为正数$)$

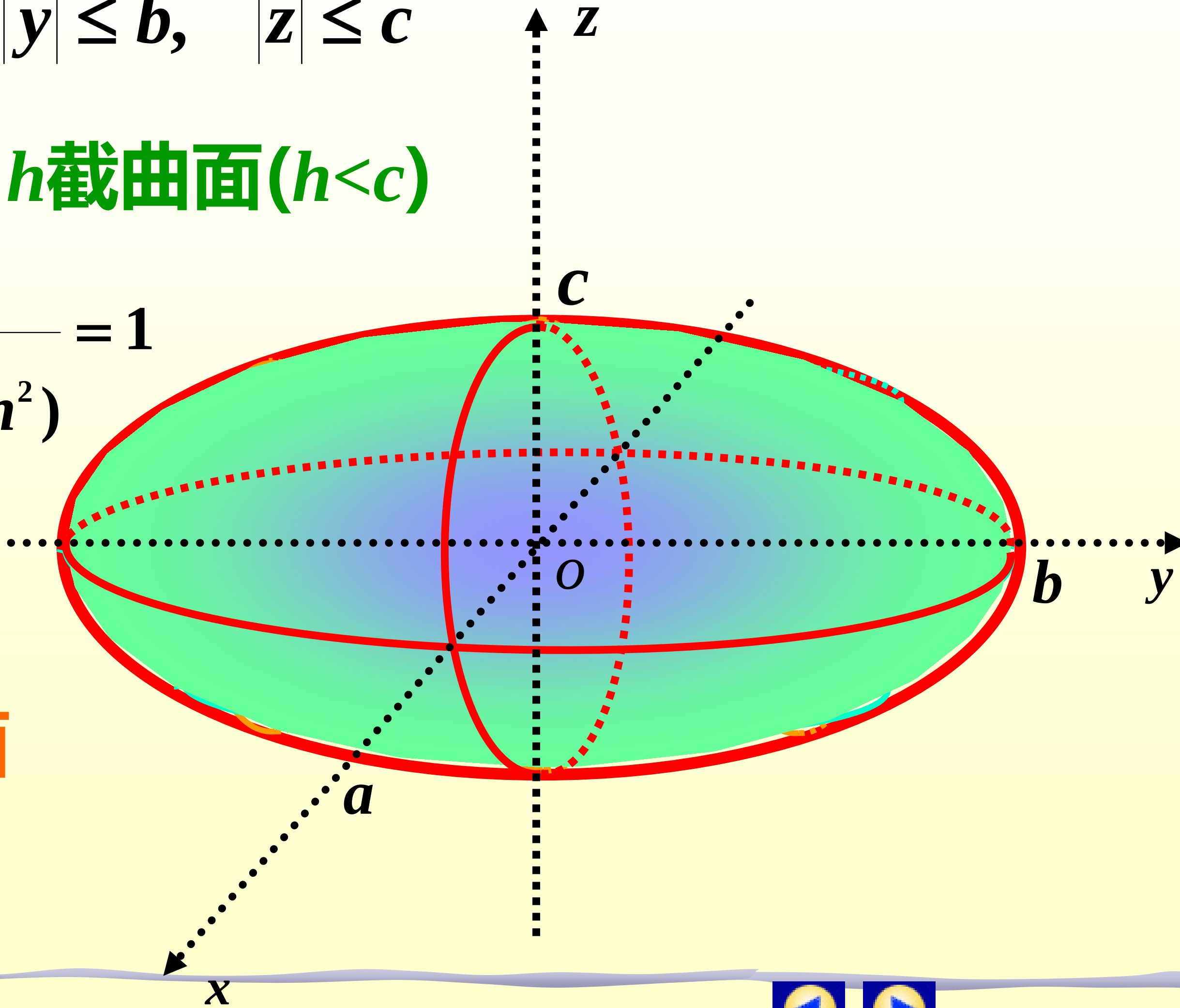
(1)范围 $|x|\le a,\quad |y|\le b,\quad |z|\le c$

(2)截痕法 用$z=h$截曲面$(h<c)$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-h^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-h^2)}=1\\ z=h\end{cases}$$

用$y=m$截曲面

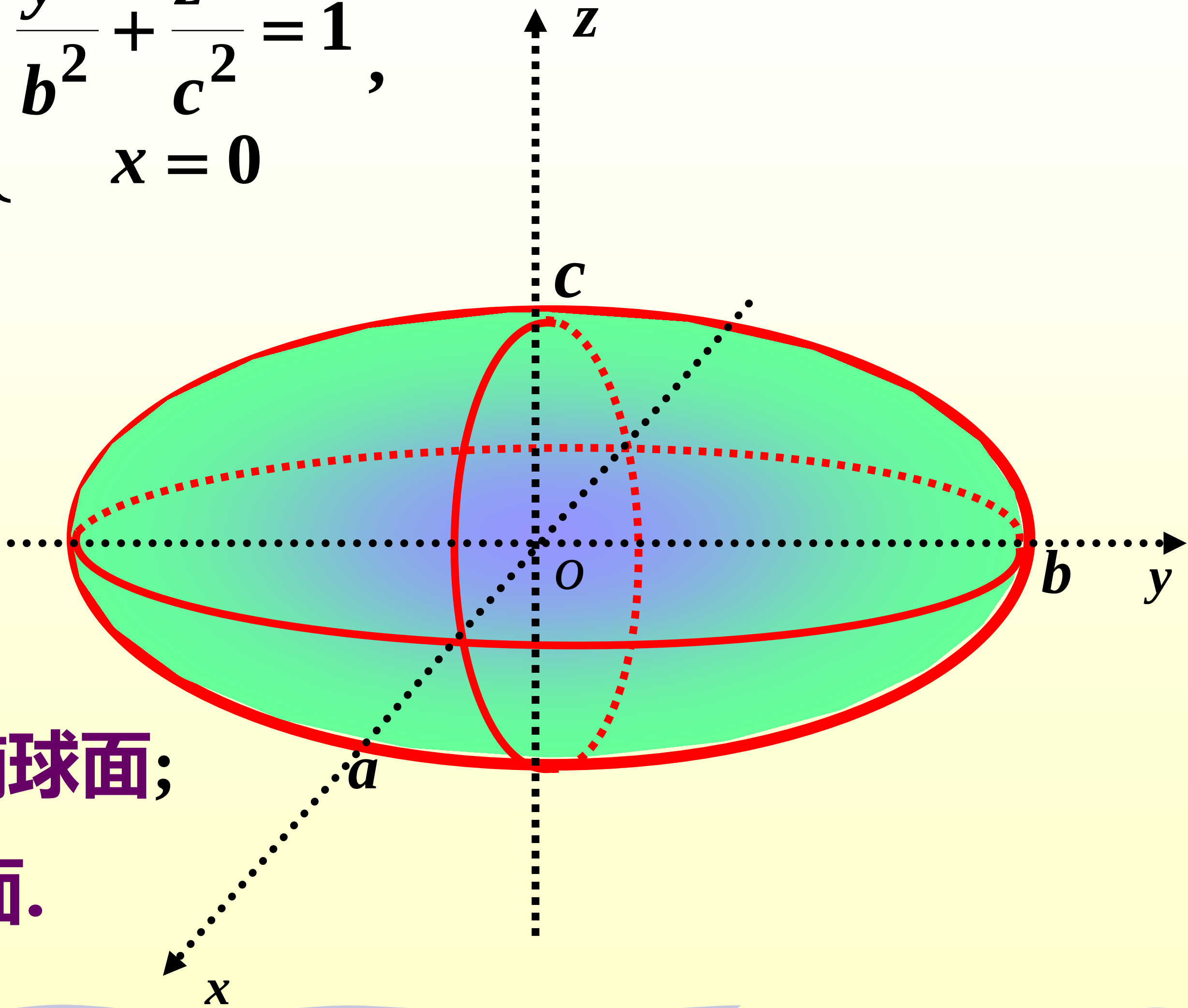
用$x=n$截曲面



只需做出与坐标面的交线：椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases},\quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$



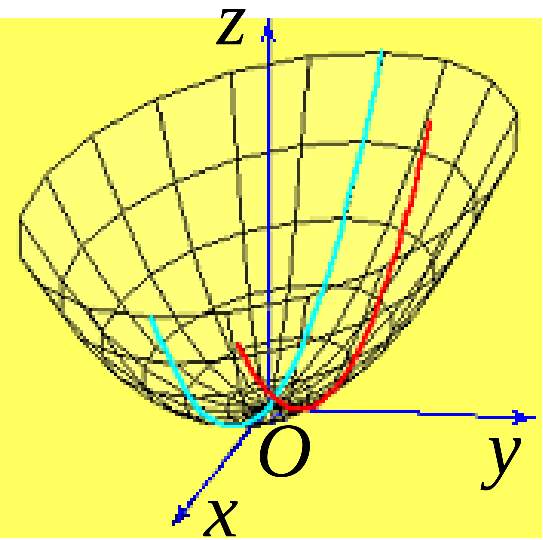
当 $a=b$ 时为旋转椭球面；

当 $a=b=c$ 时为球面.

2. 抛物面

(1) 椭圆抛物面

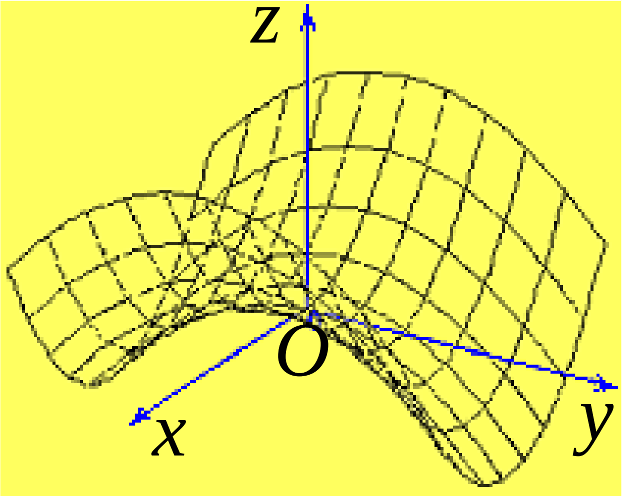
$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p, q \text{ 同号})$$



特别,当 $p = q$ 时为绕 z 轴的旋转抛物面.

(2) 双曲抛物面（鞍形曲面）

$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p, q \text{ 同号})$$



上页 下页

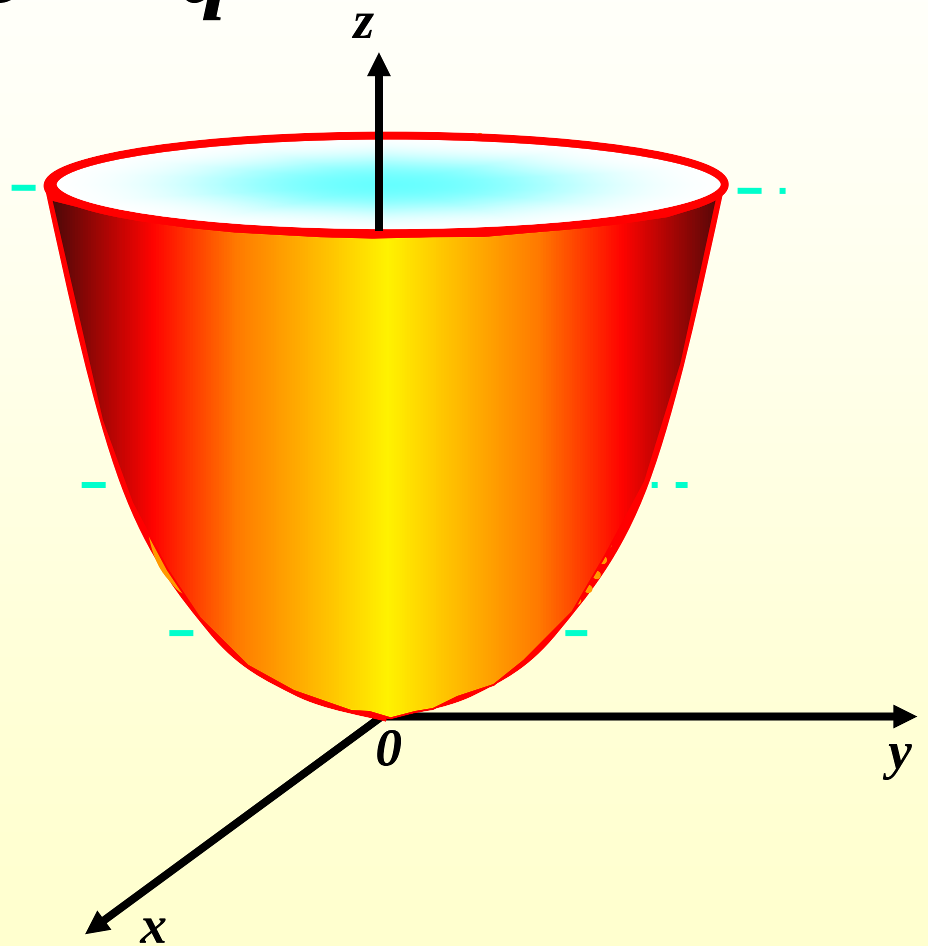
(1)椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}=2z$

截痕法

用$z=a$截曲面

用$y=b$截曲面

用$x=c$截曲面



实际上，画出 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 的图形只需做出三个坐标面上的截痕：

（1）用 $z=0$ 截得点（0，0，0）

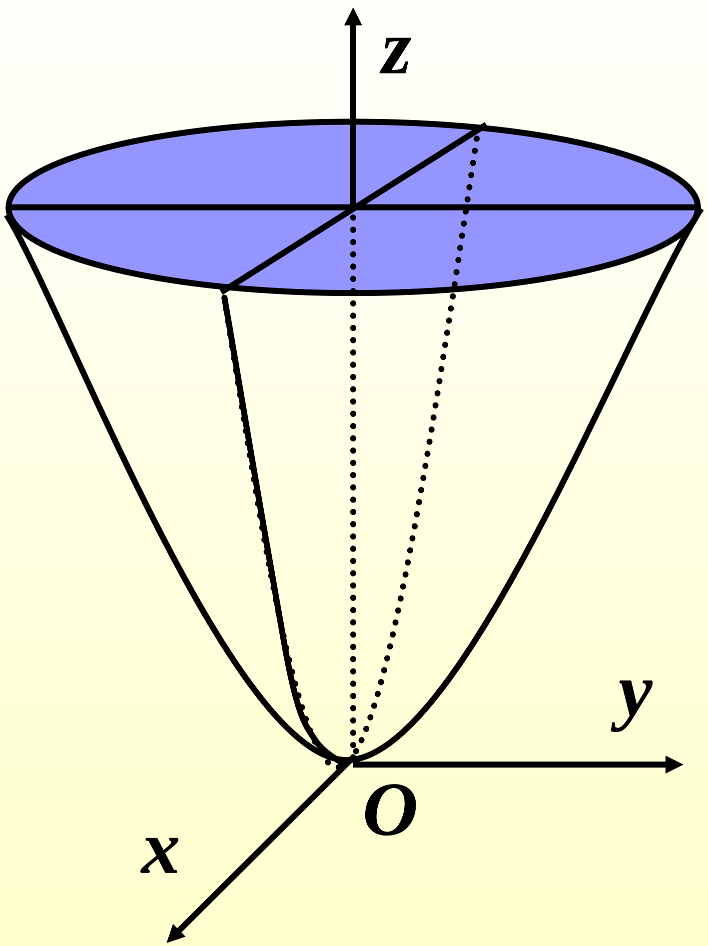
用 $z=h$ 截 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=h\\ z=h\end{cases}$

（2）用 $y=0$ 截

$$\begin{cases}z=\dfrac{x^2}{a^2}\\ y=0\end{cases}$$

（3）用 $x=0$ 截

$$\begin{cases}z=\dfrac{y^2}{b^2}\\ x=0\end{cases}$$



(2)双曲抛物面（马鞍面）

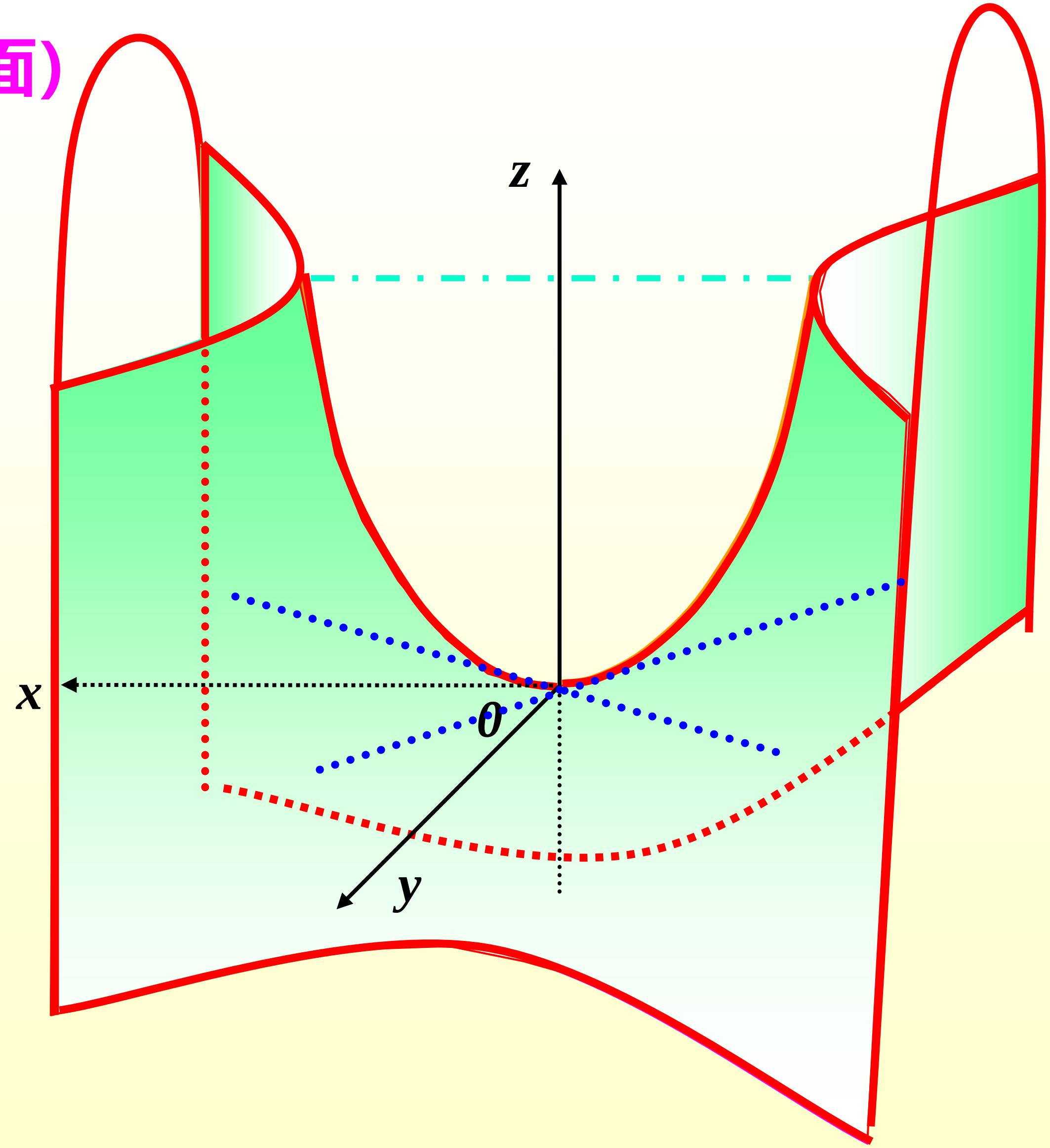
$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=z$$

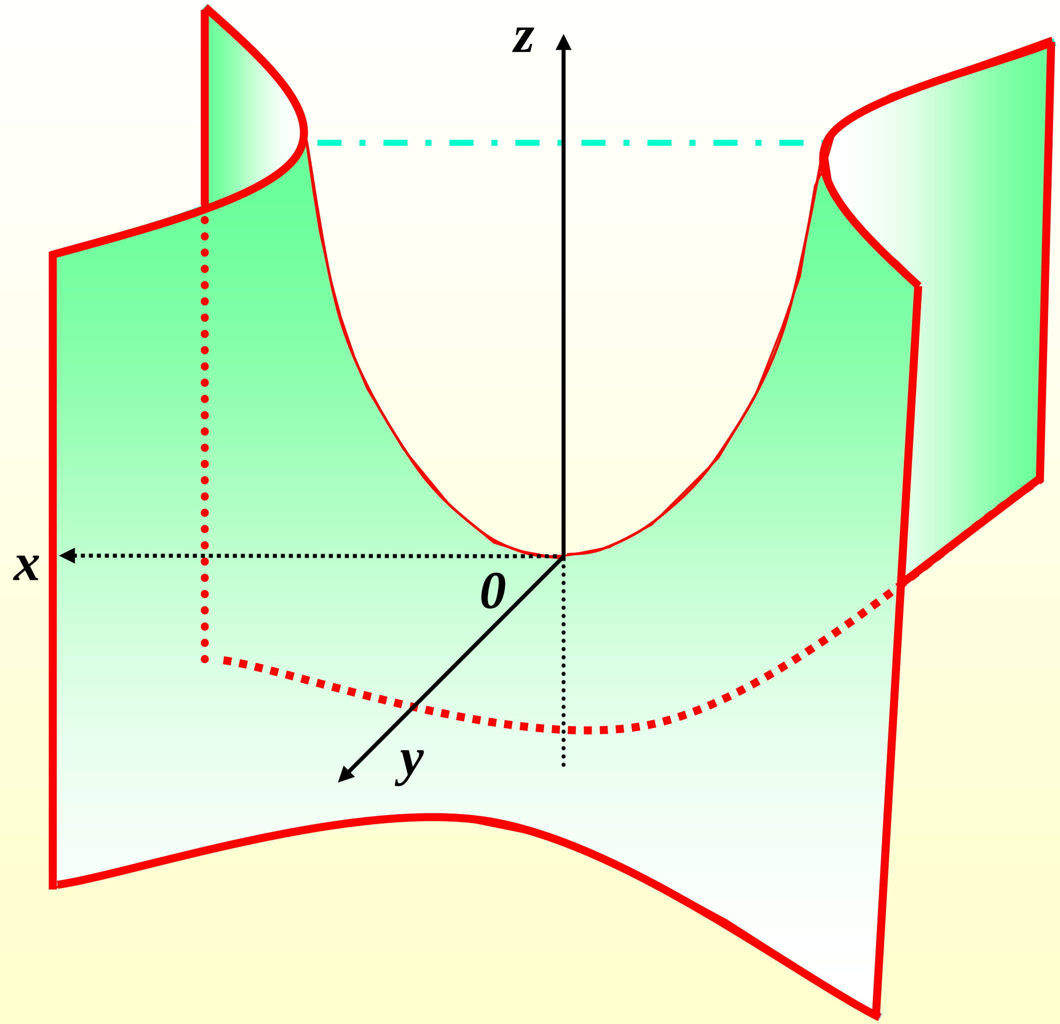
截痕法

用$z=a$截曲面

用$y=0$截曲面

用$x=b$截曲面

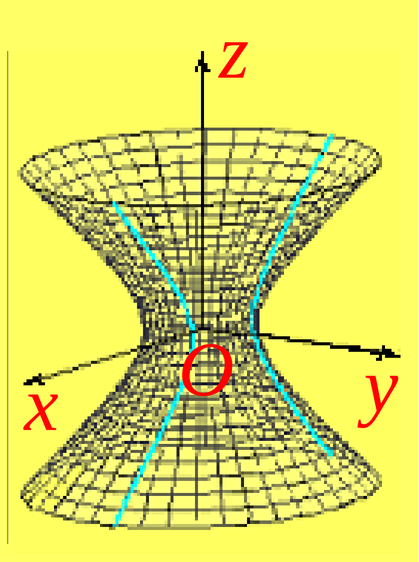



z
x
0
y

3. 双曲面

(1)单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{ 为正数})$$



平面 $z=z_1$ 上的截痕为 **椭圆.**

平面 $y=y_1$ 上的截痕情况:

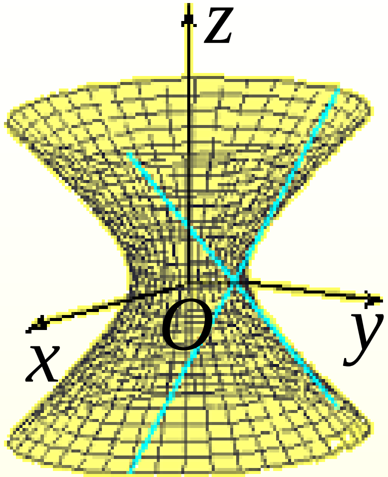
1) $|y_1|<b$ **时, 截痕为双曲线:**

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1^{\,2}}{b^2}\\ y=y_1\end{cases}$$

(实轴平行于 x 轴;
虚轴平行于 z 轴)

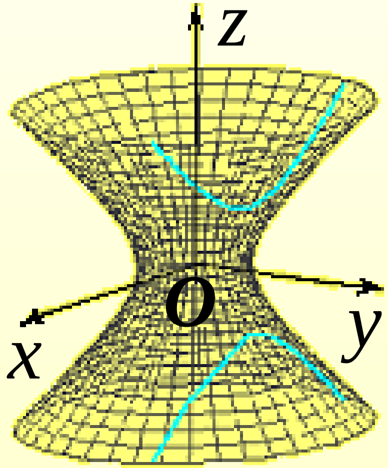
2) $|y_1| = b$ 时, 截痕为**相交直线**:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} \pm \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = b\ (\text{或} -b) \end{cases}$$



3) $|y_1| > b$时, 截痕为**双曲线**:

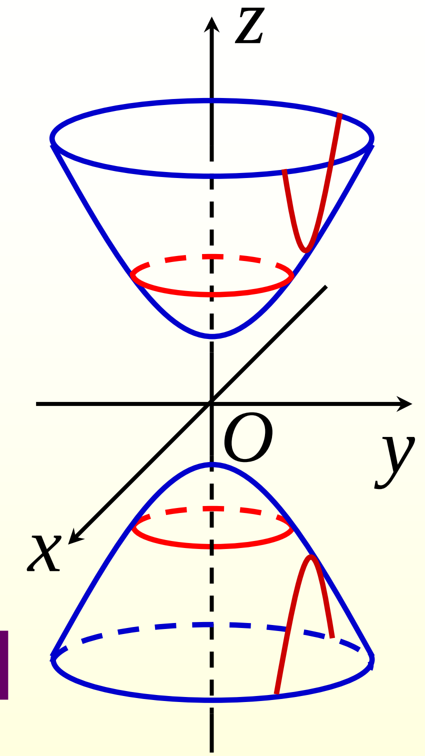
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \underline{1 - \dfrac{{y_1}^2}{b^2}} < 0 \\ y = y_1 \end{cases}$$



(实轴平行于z 轴;
虚轴平行于x 轴)

(2) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a,b,c \text{ 为正数})$$



平面 $y=y_1$ 上的截痕为 **双曲线**

平面 $x=x_1$ 上的截痕为**双曲线**

平面 $z=z_1\ (|z_1|>c)$上的截痕为 **椭圆**

注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

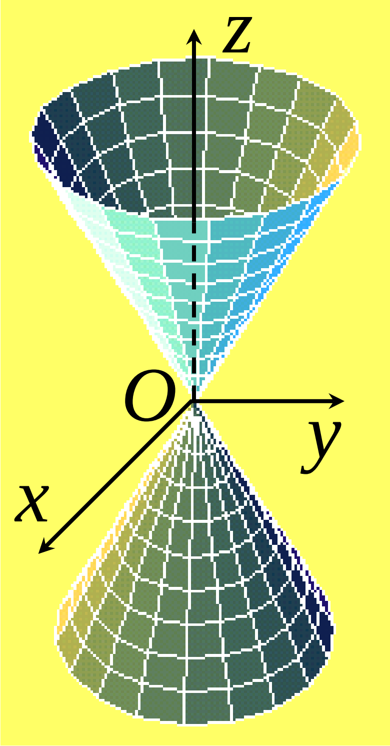
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\begin{cases} 1 & \text{单叶双曲面} \\ -1 & \text{双叶双曲面} \end{cases}$$

图形

上页 下页

4. 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \quad (a, b \text{ 为正数})$$



在平面 $z=t$ 上的截痕为**椭圆**

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1,\ z=t \quad ①$$

在平面 $x=0$ 或 $y=0$ 上的截痕为过原点的两直线 .

可以证明, 椭圆①上任一点与原点的连线均在曲面上.

(椭圆锥面也可由圆锥面经 x 或 y 方向的伸缩变换得到, 见 P42)

上页 下页

双叶双曲面:

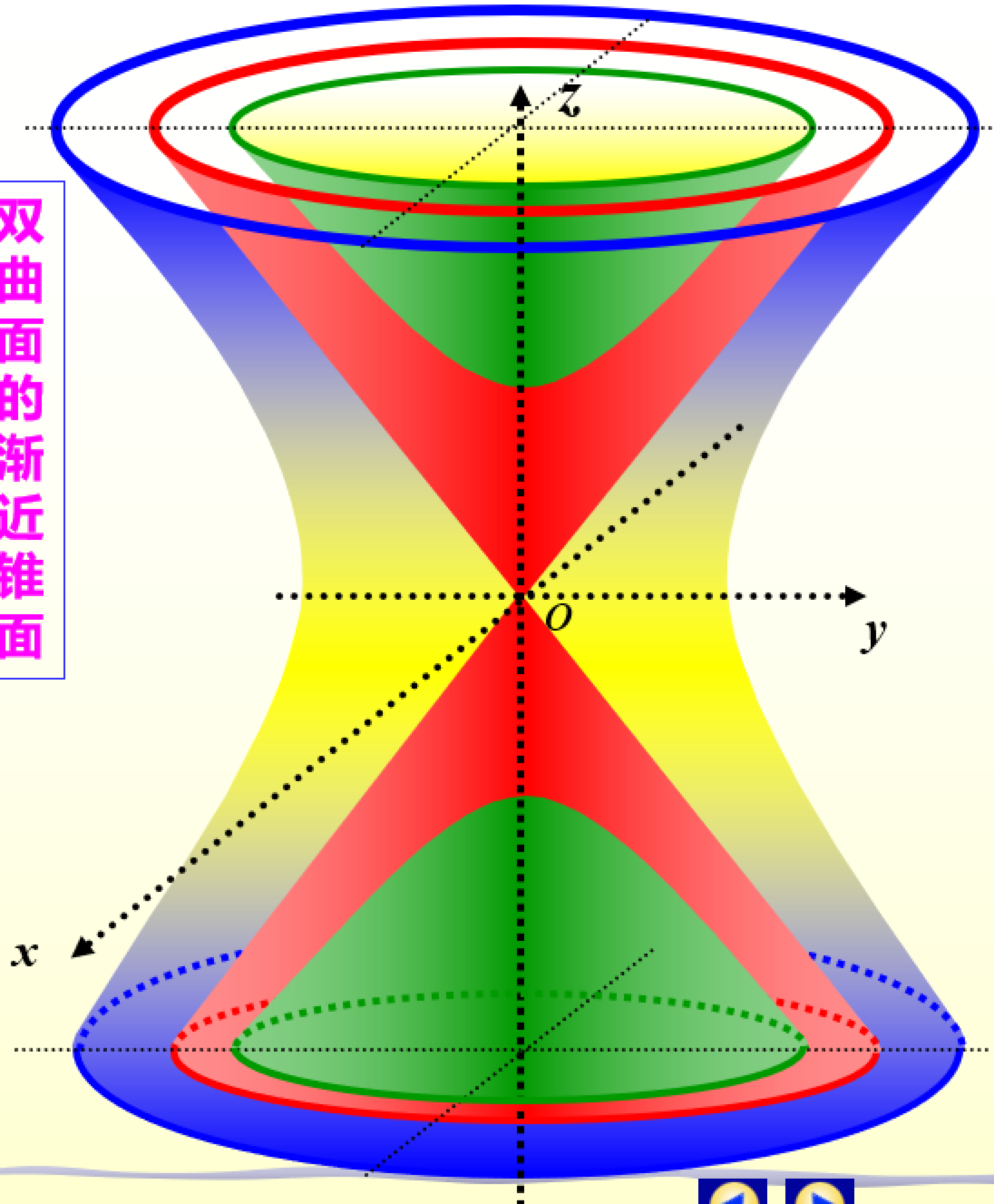
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

椭圆锥面: → 双曲面的渐近锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

单叶双曲面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



内容小结

1. 空间曲面 $\longleftrightarrow$ 三元方程 $F(x, y, z) = 0$

- 球面 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

- 旋转曲面

曲线 $\begin{cases} f(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

如旋转双曲面,旋转抛物面等 .

- 柱面

曲面 $F(x, y) = 0$ 表示母线平行 z 轴的柱面.

如椭圆柱面, 双曲柱面, 抛物柱面等 .

2. 二次曲面 ⟷ 三元二次方程

- **椭球面** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- **抛物面:** (p,q 同号)

  椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$

  双曲抛物面 $-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$
- **双曲面:**

  单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

  双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$
- **椭圆锥面:** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

思考与练习

1. 指出下列方程的图形:

方 程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x=5$	平行于 y 轴的直线	平行于 yoz 面的平面
$x^2+y^2=9$	圆心在(0,0) 半径为 3 的圆	以 z 轴为中心轴的圆柱面
$y=x+1$	斜率为1的直线	平行于 z 轴的平面

2. P45 10

$$(1)\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1 \qquad (2)\ x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$$

$$(3)\ x^2-y^2-z^2=1 \qquad (4)\ (z-a)^2=x^2+y^2$$

答案: 在 xOy 面上

$$\begin{cases} (1)\ \text{椭圆}\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\ \text{绕}\ x\ \text{轴旋转一周;} \\ (2)\ \text{双曲线}\ x^2-\dfrac{y^2}{4}=1\ \text{绕}\ y\ \text{轴旋转一周;} \\ (3)\ \text{双曲线}\ x^2-y^2=1\ \text{绕}\ x\ \text{轴旋转一周;} \end{cases}$$

(4) 在 yOz 面上,直线 $z=y+a$ 绕 z 轴旋转一周.

结束 上页 下页