复习

1. 求幂级数收敛域的方法

1) 对标准型幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (a_n \neq 0)$

先求收敛半径，再讨论端点的收敛性.

2) 对非标准型幂级数

换元化为标准型再求.

3) 缺项或幂次有间隔　求收敛半径时直接用

比值法或根值法,

2. 幂级数和函数的性质

1) 在收敛域上幂级数的和函数连续;

2) 幂级数在收敛区间内可逐项求导,

在收敛域上可逐项求积分.

3. 求和函数的常用方法 — 利用幂级数和函数的性质

第四节 函数展开成幂级数

两类问题：在收敛域上

$$\text{幂级数}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{\text{展开}}{\overset{\text{求和}}{\rightleftarrows}} \text{和函数 } S(x)$$

本节内容:

一、泰勒 (Taylor) 级数

二、函数展开成幂级数

一、泰勒 (Taylor) 级数

复习: $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则在该邻域内有 :

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x 与 x_0 之间)

称为拉格朗日型余项 .

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数, 则称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 $f(x)$ 的泰勒级数 .

当 $x_0=0$ 时, 泰勒级数又称为麦克劳林级数 .

待解决的问题：

1) 对此级数, 它的收敛域是什么 ?

2) 在收敛域上 , 和函数是否为 $f(x)$?

上页 下页

定理1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的**充要条件**是 $f(x)$ 的泰勒公式余项满足: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

证明 $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad x\in U(x_0)$$

令 $$S_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$f(x)=S_{n+1}(x)+R_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(x)-S_{n+1}(x)\right]=0,\quad x\in U(x_0)$$

定理2 若 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数, 则这种展开式是**唯一**的, 且与它的麦克劳林级数相同.

证 设 $f(x)$ 所展成的幂级数为

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,\quad x\in(-R,R)$$

则 $\qquad a_0=f(0)$

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots;\qquad a_1=f'(0)$$

$$f''(x)=2!a_2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots;\qquad a_2=\frac{1}{2!}f''(0)$$

$\cdots\cdots \qquad \cdots$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+\cdots;\qquad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$$

$\cdots\cdots \qquad \cdots$

显然结论成立 .

二、函数展开成幂级数

展开方法 $\begin{cases} \text{直接展开法 — 利用泰勒公式} \\ \text{间接展开法 — 利用已知其幂级数展开式的函数展开} \end{cases}$

1. 直接展开法

由泰勒级数理论可知, 函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数的步骤如下：

第一步 求函数及其各阶导数在 $x=0$ 处的值；

第二步 写出幂级数，并求出其收敛半径 R；

第三步 判别在收敛区间$(-R, R)$ 内 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$是否为 0.

例1 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $\because f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x,\ f^{(n)}(0)=1\ (n=0,1,\cdots)$, 故得级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

其收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}\Big/\dfrac{1}{(n+1)!}=+\infty$

对任何有限数 x, 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[?]{n\to\infty}0$$

(ξ 在0与 x 之间)

考察级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$,

上页 下页

考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$,

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+2}=0<1$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛, $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, $\therefore \lim_{n\to\infty} e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

故 $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$

上页 下页

同理，可得下面几个常用的幂级数展开式：

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots$$

$$x \in (-1, +1]$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

称为二项展开式 .

说明: (1) 在 $x = \pm 1$ 处的收敛性与 m 有关 .

当$m > 0$时，$x \in [-1,1]$， 当$-1 < m < 0$时，$x \in (-1,1]$，

当 $m \le -1$ 时，$x \in (-1,1)$，

(2) 当 m 为正整数时, 级数为 x 的 m 次多项式,

上式就是代数学中的二项式定理.

对应 $m=\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1$ 的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots$$

$$(-1\le x\le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots$$

$$(-1< x\le 1)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

上页 下页

2. 间接展开法

利用一些已知的函数展开式及幂级数的运算性质,将所给函数展开成 幂级数.

例2 将函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

把 x 换成 x^2 ,得

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

例3 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$展开成 x 的幂级数.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

从 0 到 x 积分, 得

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\ \boxed{-1<x\le 1}$$

上式右端的幂级数在 $x=1$ 收敛, 而 $\ln(1+x)$在 $x=1$ 连续, 所以展开式对 $x=1$ 也是成立的, 于是收敛域为 $-1<x\le 1$.

利用此题可得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\cdots$$

例4 将 $\sin x$ 展成 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解 $\sin x = \sin\left[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})\right]$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left((x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots\right]$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

例5 将 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{2(1+x)}-\dfrac{1}{2(3+x)}$

$$=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}$$

$\boxed{(|x-1|<2)}$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}+\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{8}\left[1-\frac{x-1}{4}+\frac{(x-1)^2}{4^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \qquad (-1<x<3)$$

结束 目录 上页 下页

内容小结

1. 函数的幂级数展开法

(1) 直接展开法 — 利用泰勒公式；

(2) 间接展开法 — 利用幂级数的性质及已知展开式的函数 .

2. 常用函数的幂级数展开式

- $$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$
- $$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots$$
  $$x \in (-1, +1]$$

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

$x \in (-\infty, +\infty)$

- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

$x \in (-\infty, +\infty)$

- $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$$

当 $m = -1$ 时

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

思考与练习

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处 “有泰勒级数” 与 “能展成泰勒级数” 有何不同 ?

提示: 后者必需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, 前者无此要求.

2. 如何将 $y=\sin^2 x$ 展开成 x 的幂级数 ?

提示: $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n},\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

练习

1 将函数 $f(x)=e^{x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

2 将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数.

3 将函数 $f(x)=\ln x$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

4 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

答案

1 $$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots \quad |x|<+\infty$$

2 $$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \quad \underline{x\in[-1,1]}$$

结束 目录 上页 下页

3 将函数 $f(x)=\ln x$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

解 $f(x)=\ln x=\ln(2+x-2)=\ln 2\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)$

$$=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x-2}{2}\right)^{n+1}$$

$$=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}$$ 由 $-1<\dfrac{x-2}{2}\le 1$ 得 $0<x\le 4$.

4 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

解 $f(x)=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3+(x-3)}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}}=\dfrac{1}{3}\cdot\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n$$ 由 $-1<\dfrac{x-3}{3}<1$, 得 $0<x<6$.

备用题 1 将下列函数展开成 x 的幂级数

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$$

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$

$$\therefore\ f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$x=\pm1$ 时, 此级数条件收敛, $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$, 因此

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

2 将 $f(x)=\ln(2+x-3x^2)$ 在 $x=0$ 处展为幂级数.

解 $f(x)=\ln(1-x)+\ln 2+\ln(1+\frac{3}{2}x)$

$$\boxed{\begin{aligned}&2+x-3x^2\\&=(1-x)(2+3x)\end{aligned}}$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\qquad(-1\le x<1)$$

$$\ln(1+\tfrac{3}{2}x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\tfrac{3}{2}x)^n\qquad(-\tfrac{2}{3}<x\le\tfrac{2}{3})$$

因此 $f(x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n$

$$=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1+(-\tfrac{3}{2})^n]x^n\qquad(-\tfrac{2}{3}<x\le\tfrac{2}{3})$$

第五节 函数幂级数展开式的应用

一、近似计算

二、微分方程的幂级数解法

三、欧拉公式

一、近似计算

例1. 计算 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

$\boxed{3^5 = 243}$

解 $\sqrt[5]{240} = \sqrt[5]{243-3} = 3(1-\frac{1}{3^4})^{1/5}$

$$= 3\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4} - \frac{1\cdot4}{5^2\cdot2!}\cdot\frac{1}{3^8} - \frac{1\cdot4\cdot9}{5^3\cdot3!}\cdot\frac{1}{3^{12}} - \cdots\right)$$

$$\because |r_2| = 3\left(\frac{1\cdot4}{5^2\cdot2!}\cdot\frac{1}{3^8} + \frac{1\cdot4\cdot9}{5^3\cdot3!}\cdot\frac{1}{3^{12}} + \frac{1\cdot4\cdot9\cdot14}{5^4\cdot4!}\cdot\frac{1}{3^{16}} + \cdots\right)$$

$$< 3\cdot\frac{1\cdot4}{5^2\cdot2!}\cdot\frac{1}{3^8}\left[1 + \frac{1}{81} + \left(\frac{1}{81}\right)^2 + \cdots\right] < 0.5\times10^{-4}$$

$$\therefore \quad \sqrt[5]{240} \approx 3(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}) \approx 3 - 0.00741 \approx 2.9926$$

上页 下页

例2. 计算$\ln 2$ 的近似值，使准确到10^{-4}.

用此式求 ln2 计算量大

解 已知

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \quad (-1<x\le 1)$$

$$\therefore \quad \ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots \quad (-1\le x<1)$$

故 $$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

$$=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right) \quad (-1<x<1)$$

令$\dfrac{1+x}{1-x}=2$ 得 $x=\dfrac{1}{3}$，于是有

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right)$$

在上述展开式中取前四项,

$$\because \; |r_4| = 2\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)$$

$$< \frac{2}{3^{11}}\left(1+\frac{1}{9}+(\frac{1}{9})^2+\cdots\right)=\frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4\cdot 3^9}$$

$$=\frac{1}{78732}<0.2\times 10^{-4}$$

$$\therefore \; \ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right)\approx 0.6931$$

上页 下页

说明: 在展开式

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right)$$

中,令 $x=\dfrac{1}{2n+1}$ (n为自然数),得

$$\ln\frac{n+1}{n}=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\cdots\right)$$

$$\therefore \ln(n+1)=\ln n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\cdots\right)$$

具此递推公式可求出任意正整数的对数 . 如

$$\ln 5=2\ln 2+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5+\cdots\right)\approx 1.6094$$

例3. 利用$\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$,求 $\sin 9°$ 的近似值，并估计误差.

解 先把角度化为弧度 $9° = \dfrac{\pi}{180} \times 9 = \dfrac{\pi}{20}$ (弧度)

$$\because \quad \sin\frac{\pi}{20} = \underline{\frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3} + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^7 + \cdots$$

$$|r_2| < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 < \frac{1}{120}(0.2)^5 < \frac{1}{3} \times 10^{-5}$$

$$\therefore \quad \sin\frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3 \approx 0.157080 - 0.000646$$

$$\approx 0.15643$$

例4. 计算积分 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

(取 $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0.56419$)

解 $e^{-x^2} = 1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\right]dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = \cdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!} + \cdots\right)$$

欲使截断误差 $|r_n| < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n!(2n+1)\cdot 2^{2n}} < 10^{-4}$

则 n 应满足 $\sqrt{\pi}\cdot n!(2n+1)\cdot 2^{2n} > 10^4 \Longrightarrow n \geq 4$

取 $n = 4$,则所求积分近似值为

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}\right)$$

$$\approx 0.5205$$

例5. 计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 故所给积分不是广义积分.

若定义被积函数在 $x=0$ 处的值为 1, 则它在积分区间上连续, 且有幂级数展开式:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=1-\underline{\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}+\cdots$$

$$|r_3|<\frac{1}{7\cdot 7!}=\frac{1}{35280}<0.3\times 10^{-4}$$

$$\approx 1-0.05556+0.00167\ \approx 0.9461$$

目录 上页 下页

二、微分方程的幂级数解法

幂级数解法本质上就是待定系数法

1. 一阶微分方程的情形

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

设 $f(x,y)$ 是 $x-x_0$ 及 $y-y_0$ 的多项式.

设所求解为

$$y = y_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \quad ①$$

代入原方程, 比较同次幂系数可定常数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$

由此确定的级数①即为定解问题在收敛区间内的解.

例6. 求方程 $y' = x + y^2$ 满足 $y\big|_{x=0} = 0$ 的特解.

解 根据初始条件, 设所求特解为

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

代入原方程, 得

$$a_1 + \underline{2a_2 x} + \underline{3a_3 x^2} + \underline{4a_4 x^3} + \underline{5a_5 x^4} + \cdots$$

$$= x + (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)^2$$

$$= \underline{x} + \underline{a_1^2 x^2} + \underline{2a_1 a_2 x^3} + \underline{(a_2^2 + 2a_1 a_3) x^4} + \cdots$$

比较同次幂系数, 得

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{20}, \cdots$$

故所求解的幂级数前几项为 $y = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{20} x^5 + \cdots$

上页 下页

2. 二阶齐次线性微分方程问题

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad ②$$

定理: 设 $P(x), Q(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可展成 x 的幂级数，则在 $-R < x < R$ 内方程 ② 必有幂级数解:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

此定理在数学物理方程及特殊函数中非常有用，很多重要的特殊函数都是根据它从微分方程中得到的.

例7. **求解勒让德 (Legendre) 方程**

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n-1)y = 0 \ (n\text{为常数}) \quad ④$$

解 $P(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2}, Q(x) = \dfrac{n(n-1)}{1-x^2}$ 都可在$(-1,1)$内

展成幂级数, 故方程满足定理条件.

因方程特点,
不用将 P, Q
进行展开

设方程的解为 $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, 代入④:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + n(n-1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

整理后得:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2}+(n-k)(n+k+1)a_k\right]x^k=0$$

比较系数, 得 $a_{k+2}=-\dfrac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}a_k \quad (k=0,1,\cdots)$

例如:

$$a_2=-\frac{n(n+1)}{2!}a_0 \qquad\qquad a_3=-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1$$

$$a_4=-\frac{(n-2)(n+2)}{3\cdot 4}a_2=\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0$$

$$a_5=-\frac{(n-3)(n+4)}{4\cdot 5}a_3=\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1$$

……

a_0, a_1 可以任意取, 于是得勒让德方程的通解:

$$y = a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots\right]$$

$$+ a_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + \cdots\right]$$

$$(-1 < x < 1)$$

上式中两个级数都在(- 1, 1)内收敛，它们是方程的两个线性无关特解.

例8. (1) 验证函数

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$$

$(-\infty<x<+\infty)$

满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$;

(2) 利用(1)的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和. (2002考研)

解 (1) $y(x)=1+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^9}{9!}+\cdots+\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots$$

所以 $y'' + y' + y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$

(2) 由(1)的结果可知所给级数的和函数满足

$$\begin{cases} y'' + y' + y = \mathrm{e}^x \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0 \end{cases}$$

其特征方程: $r^2 + r + 1 = 0$, 特征根: $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

∴齐次方程通解为

$$Y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

设非齐次方程特解为 $y^* = A\mathrm{e}^x$, 代入原方程得 $A = \frac{1}{3}$,

故非齐次方程通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x}$$

代入初始条件可得 $C_1 = \frac{2}{3},\ C_2 = 0$

故所求级数的和

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

三、欧拉(Euler)公式

对复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + \mathrm{i}v_n)$ ③

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u, \sum_{n=1}^{\infty} v_n = v$, 则称 ③ **收敛**，且其和为 $u + \mathrm{i}v$.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n + \mathrm{i}v_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$ 收敛, 则称 ③ **绝对收敛**.

由于 $|u_n| \le \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$, $|v_n| \le \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$, 故知

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + \mathrm{i}v_n)$ 绝对收敛 $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛

$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + \mathrm{i}\,v_n)$ 收敛 .

定义: 复变量 $z = x + \mathrm{i}\,y$ 的指数函数为

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots \quad (|z| < +\infty)$$

易证它在整个复平面上绝对收敛.

当 $y = 0$ 时, 它与实指数函数 e^x 的幂级数展式一致.

当 $x = 0$ 时,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} = 1 + \mathrm{i}\,y + \frac{1}{2!}(\mathrm{i}\,y)^2 + \frac{1}{3!}(\mathrm{i}\,y)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(\mathrm{i}\,y)^n + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n} + \cdots\right)$$

$$+\,\mathrm{i}\left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}y^{2n-1} + \cdots\right)$$

$$= \cos y + \mathrm{i}\sin y$$

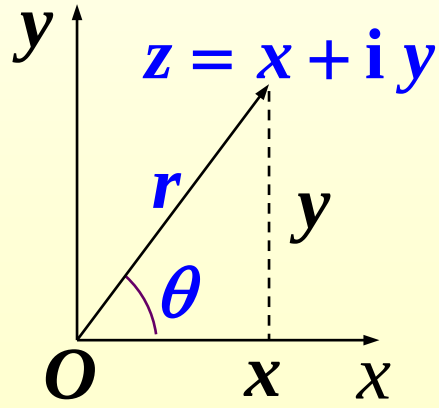
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$ **(欧拉公式)**

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

则 $$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$ **(也称欧拉公式)**

利用欧拉公式可得复数的指数形式

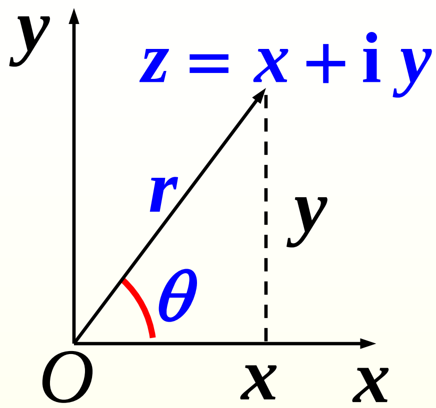
$$z = x + i y = r(\cos\theta + i \sin\theta) = r e^{i\theta}$$



据此可得

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

(棣莫弗公式)



利用幂级数的乘法, 不难验证

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\cdot \mathrm{e}^{z_2}$$

特别有

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad (x, y \in R)$$

$$\left|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}\right| = \left|\mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\right| = \mathrm{e}^{x}$$

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$