五． 矩阵

1.（北京大学 2010，3(12 分) ；西安交通大学 2005; 北京理工大学 2005）

设 A 是非零矩阵，证明 A 可以写成某个列满秩矩阵与某个行满秩矩阵的乘积。

证明 书上习题，略。too easy!

2.（南开大学 2006） 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}$ 。

解 两种解法。一种是求出 $|A|$ 与 A^{-1}，然后利用 $A^{*}=|A|A^{-1}$；另一种解法是把 $|A|$ 中

的每一行用(1, 1, 1, 1)代替，然后求行列式，将这些行列式的值加起来即为答案。

这里采用后一种做法，易得 4 个行列式的值都为 8，于是有 $\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}=4\times 8=32.$

（北京交通大学 2005） 设 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，

求 A 的**所有代数余子式之和**；

解 此题用后一种做法很容易得出 A 的所有代数余子式之和为 1.

下面用前一种做法。易得$|A|=2$，那么由 $A^*=2A^{-1}$ 得 A 的所有代数余子式之和

为 A^{-1} 的所有元素之和的 2 倍。以下求 A^{-1}，由

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

得 $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$， A^{-1}的所有元素之和为$\frac{1}{2}$，

所以 A 的所有代数余子式之和为 1.

（**南京大学 2005**）设 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$，则 $A_{41}+2A_{42}+3A_{43}+4A_{44}=$ __________。

解 将行列式的第 4 行依次用$1,2,3,4$代替后的行列式值即为所求，答案：0.

（**厦门大学 2007**）设行列式$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第 4 行各元素的余子式之

和

$=$ ________.

解 将行列式的第 4 行用 $(-1,1,-1,1)$ 代替后的行列式值即为所求，答案：-28.

3.（武汉大学 2006） 已知 3 阶矩阵 A 满足 $|A-I|=|A-2I|=|A+I|=\lambda$。

（1）当 $\lambda=0$ 时，求行列式 $|A+3I|$ 的值；

（2）当 $\lambda=2$ 时，求行列式 $|A+3I|$ 的值。

解 （1）当 $\lambda=0$ 时，由题目条件知 $1,2,-1$ 是 3 阶矩阵 A 的全部特征值，从而

$4,5,2$ 是 $A+3I$ 的全部特征值，所以 $|A+3I|=4\times5\times2=40$。

（2）当 $\lambda=2$ 时，设 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则 $A-I$ 的全部特征值为 $\lambda_1-1,\lambda_2-1,\lambda_3-1$，$A-2I$ 的全部特征值为 $\lambda_1-2,\lambda_2-2,\lambda_3-2$，$A+I$ 的全部特征值为

$\lambda_1+1,\lambda_2+1,\lambda_3+1$，$A+3I$ 的全部特征值为 $\lambda_1+3,\lambda_2+3,\lambda_3+3$。由 $|A-I|=|A-2I|=|A+I|=2$

得 $(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)(\lambda_3-1)=2$，$(\lambda_1-2)(\lambda_2-2)(\lambda_3-2)=2$，$(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)=2$。

上面 3 式表明 $-1,-2,1$ 是方程 $(\lambda_1+x)(\lambda_2+x)(\lambda_3+x)=2$，即 $-1,-2,1$ 是方程

$$x^3+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)x+(\lambda_1\lambda_2\lambda_3-2)=0$$

的 3 个根。由根与系数的关系有

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+2-1=2$，$\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3=-1\times(-2)+(-1)\times1+(-2)\times1=-1$，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=2-(-1)\cdot(-2)\cdot1=0$

于是有 $|A+3I|=(\lambda_1+3)(\lambda_2+3)(\lambda_3+3)$

$$=3^3+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)3^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)3+(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)=42\text{。}$$

4.（东南大学 2002）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，如果 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0,\ i=1,2,\cdots,n$。求证：

$A_{11}=A_{12}=\cdots=A_{1n}$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式。

证明 由题目条件 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0,\ i=1,2,\cdots,n$，有

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},\qquad\text{（I）}$$

即 0 是 A 的一个特征值，于是 $|A|=0$，即 $r(A)<n$。

若 $r(A)\le n-2$，则有 A^* 是零矩阵，可知 $A_{11}=A_{12}=\cdots=A_{1n}=0$，结论成立。

若 $r(A)=n-1$，则 $Ax=0$ 的解空间维数为 $n-r(A)=1$，且由 $AA^*=|A|I=0$ 知 A^* 的

列向量都是 $Ax=0$ 的解。注意到等式（I）意味着 $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 是 $Ax=0$ 的解，由于 $Ax=0$

的解空间是 1 维的，所以 A^* 的第一列必是 $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 的常数倍，于是必有

$A_{11}=A_{12}=\cdots=A_{1n}$。

注意：实际上 A^* 的任何一列都是 $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 的常数倍。

5.（1）设 A,B 是 n 阶矩阵，A,B , $A+B$ 均可逆，证明：$A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆，并求其逆。**（华中科技大学，2002）**

（2）设 $A,I-A,I-A^{-1}$ 均为可逆矩阵，证明：$(I-A)^{-1}+(I-A^{-1})^{-1}=I.$

（中国科学院，2002）

证明（1）由 $A(A^{-1}+B^{-1})B=A+B$ 及 A,B , $A+B$ 均可逆得 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆，且

$$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}，\quad (A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$$

(2)

$$(I-A)^{-1}+(I-A^{-1})^{-1}=((A^{-1}-I)A)^{-1}+(I-A^{-1})^{-1}=A^{-1}(A^{-1}-I)^{-1}-(A^{-1}-I)^{-1}=(A^{-1}-I)(A^{-1}-I)^{-1}=I$$

。

6.（西安交通大学 2005）设 A 为可逆矩阵，u,v 为 n 维列向量，证明：当满足条件 $1+v^TA^{-1}u\neq 0$ 时，$A+uv^T$ 必可逆。

证明 对分块矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -v^T\\ u & A\end{pmatrix}$ 作两种方式的第 3 类初等变换，

$$\begin{pmatrix}1 & -v^T\\ u & A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & A+uv^T\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1 & -v^T\\ u & A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+v^TA^{-1}u & 0\\ 0 & A\end{pmatrix},$$

那么有 $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A+uv^T \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1+v^T A^{-1}u & 0 \\ 0 & A \end{Vmatrix}$，即 $|A+uv^T| = (1+v^T A^{-1}u)|A|$，

注意由 A 可逆有 $|A| \neq 0$，再由题目条件 $1+v^T A^{-1}u \neq 0$ 得 $A+uv^T$ 必可逆。

注意：实际上由以上证明过程还可得

$$(A+uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1+v^T A^{-1}u}(A^{-1}u)(v^T A^{-1})\text{。}$$

7.（浙江大学 2003）设有分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，其中 A,D 都可逆，证明：

（1）$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A-BD^{-1}C)\det D$；

（2）$(A-BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(CA^{-1}B-D)^{-1}CA^{-1}$。

证明 （1）对矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 作分块矩阵的初等行变换得

$$\begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

两边取行列式即得结论成立。

（2）两种办法，一种办法是直接验证：

$(A-BD^{-1}C)\cdot(A^{-1} - A^{-1}B(CA^{-1}B-D)^{-1}CA^{-1}) = I$（有一定的技巧，不妨试试）；

另一种办法：接着（1）有

$$\begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

两边取逆得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}。 \qquad (\mathrm{I})$$

同样对$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$再作一种分块矩阵的初等行变换得

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

两边取逆得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}。 \qquad (\mathrm{II})$$

再比较（I），（II）**右边左上角**位置的元素相等得

$$(A-BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(CA^{-1}B-D)^{-1}CA^{-1}。$$

8.（浙江大学 2004）设$A,B \in P^{n\times n}$，求证：$(AB)^* = B^*A^*$。

证 明 先设A,B都是可逆的，此时由$A^* = |A|A^{-1}, B^* = |B|B^{-1}$及$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$即得

结论成立。

对于一般情形，采用**连续性证明法**。

使得$|tI+A|=0$，$|tI+B|=0$成立的t分别只有有限多个，于是可以找到$t_n \to 0$，

使得t_nI+A，t_nI+B都可逆，于是由第一种情形有

$$((t_nI+A)(t_nI+B))^* = (t_nI+A)^*(t_nI+B)^*。$$

两边令$t_n \to 0$，并注意两边都是关于t_n的多项式从而是连续函数，得$(AB)^* = B^*A^*$仍然成立。

9.（北京航空航天大学 2003；书上习题）设 A,B,C,D 为 n 阶矩阵，且 $|A|\neq 0, AC=CA$，

证明：$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|$。

（东北大学 2002）设 A,B,C,D 为 n 阶矩阵，且 $AC=CA$，证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|。$$

证明 当 $|A|\neq 0, AC=CA$ 时，$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|$ 的证明见教材习题解。

当去掉 $|A|\neq 0$，只有 $AC=CA$ 时，$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|$ 的证明采用 $\boxed{\text{连续性证明法}}$。

使得 $|tI+A|=0$ 成立的 t 只能有有限多个，于是可以找到 $t_n\to 0$，t_nI+A 可逆，且

由 A 与 C 可交换可得 t_nI+A 与 C 可交换，于是由第一种情形可得

$$\begin{vmatrix} t_nI+A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|(t_nI+A)D-CB|,$$

两边令 $t_n\to 0$ 并注意两边都是 t_n 的多项式从而是连续函数，得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|$$

仍然成立。

10. 任给 $A,B,C\in P^{n\times n}$，证明:

（1）$r(A)+r(B)\leq r(AB)+n$；　**（武汉大学 2005）**

（2）$r(AB)+r(BC)\leq r(ABC)+r(B).$　**(北京理工大学 2003)**

证明：（1）$\boxed{\text{用分块矩阵的初等变换方法}}$。由

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -AB \\ I & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -AB \\ I & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

有$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = r(AB) + R(I) = (AB) + n$。

另一方面又有 $r(A) + r(B) = r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \le r\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix}$。

以上结合在一起得$r(A) + r(B) \le r(AB) + n$成立。

（2） $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AB & -ABC \\ B & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -ABC \\ B & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{pmatrix}$

于是有

$$r(AB) + r(BC) = r\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BC \end{pmatrix} \le r\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{pmatrix} = r(B) + r(ABC),$$

结论成立。

类似有： 设 $r(A-I) = p$，$r(B-I) = q.$ 证明：$r(AB-I) \le p + q = r(A-I) + r(B-I)$.

设 A,C 均为 $m \times n$ 矩阵，B,D 均为 $n \times s$ 矩阵，证明：$r(AB-CD) \le r(A-C) + r(B-D).$

（见杨子胥，《高等代数习题解》）

11.（北京师范大学 2006） 设A,B是n阶矩阵，证明：

（1）$r(A-ABA) = r(A) + r(I_n - BA) - n$；

（2）若$A+B=I_n$，且$r(A)+r(B)=n$，则$A^2 = A, B^2 = B$，且$AB = BA = 0.$

证明 （1）$\begin{pmatrix} I & BA \\ A & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & BA \\ 0 & A-ABA \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A-ABA \end{pmatrix}$；

$\begin{pmatrix} I & BA \\ A & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I-BA & 0 \\ A & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I-BA & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$

于是 $r\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A-ABA \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} I-BA & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \Rightarrow n + r(A-ABA) = r(I-BA) + r(A)$,

即 $r\left(A-ABA\right) = r\left(A\right) + r\left(I_n - BA\right) - n$。

（2）由 $A+B=I_n$，得

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B \\ B & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & B-B^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B-B^2 \end{pmatrix}$$

再由 $r\left(A\right)+r\left(B\right)=n$ 得，$n = r(A)+r(B) = n + r(B-B^2) \Rightarrow r(B-B^2) = 0 \Rightarrow B^2 = B$。

由 A 与 B 的对称性得 $A^2 = A$。由

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & B \\ B & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & B \\ A+B & B+AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B \\ I & B+AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix}$$

得 $n = r(A)+r(B) = n + r(AB) \Rightarrow r(AB) = 0 \Rightarrow AB = 0$，再由 A 与 B 的对称性得 $BA = 0$。

12.（北京大学 2007；厦门大学 2007）设 A,B 是 n 阶矩阵，满足 $AB=BA$，证明：

$$r(A+B) \le r(A) + r(B) - r(AB)。$$

证明 证法 1　用分块矩阵的初等变换的方法。

首先 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}$，$r(A)+r(B) = r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}$。

又 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ I & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & AB-BA \\ B & -BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & -BA \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & AB \end{pmatrix}$，所以有

$$r(A+B)+r(AB)\le r\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & AB \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & -BA \end{pmatrix}\le r\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B),$$

即 $r(A+B)\le r(A)+r(B)-r(AB)$。

证法 2. 不妨设 $\dim \mathbf{Ker}A=p$， $\dim \mathbf{Ker}B=q$， $\dim(\mathbf{Ker}A\bigcap \mathbf{Ker}B)=s$。

取 $\mathbf{Ker}A\bigcap \mathbf{Ker}B$ 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，

分别把它扩充成 $\mathbf{Ker}A$ 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_p$，

$\mathbf{Ker}B$ 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_{s+1},\cdots,\beta_q$。

可以验证 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_p,\beta_{s+1},\cdots,\beta_q$ 线性无关（过程略）。

$\forall x\in \mathbf{Ker}A\bigcap \mathbf{Ker}B$， 则 $Ax=0,Bx=0$， 从而 $(A+B)x=0$，

即有 $\mathbf{Ker}A\bigcap \mathbf{Ker}B\subseteq \mathbf{Ker}(A+B)$，从而 $s=\dim(\mathbf{Ker}A\bigcap \mathbf{Ker}B)\le \dim \mathbf{Ker}(A+B)$。

注意到 A,B 可交换，那么由 $Ax=0$ 或 $Bx=0$ 可得 $(AB)x=0$，即 $\mathbf{Ker}A\subseteq \mathbf{Ker}(AB)$,

$\mathbf{Ker}B\subseteq \mathbf{Ker}(AB)$, 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_p,\beta_{s+1},\cdots,\beta_q\in \mathbf{Ker}(AB)$，所以有

$$p+q-s\le \dim \mathbf{Ker}(AB)。$$

从而 $p+q=\dim \mathbf{Ker}A+\dim \mathbf{Ker}B\le s+\dim \mathbf{Ker}(AB)\le \dim \mathbf{Ker}(A+B)+\dim \mathbf{Ker}(AB)$

即有 $n-r(A)+n-r(B)\le n-r(A+B)+n-r(AB)$,

化简得 $r(A+B)\le r(A)+r(B)-r(AB)$。

13.（中国科学院 2007）设 A 是 n 阶实矩阵，$A\ne 0$，且 A 的每个元素

和它的

代数余子式相等，证明：A 是可逆矩阵。

（华中科技大学 2006）设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶非零实矩阵，A 的每个元素和它的

代数余子式相等，求 A 的秩。

（天津大学 2002）设 n 阶非零实矩阵 $A=(a_{ij})$，$n\geq 3$，如果 $a_{ij}=A_{ij}$，证明：

(1) $r(A)=n$； （2） A 是正交矩阵。

证明 (1) 由题知 $A^T=A^*$，于是有 $r(A)=r(A^T)=r(A^*)$.

反证法。假设 A 不可逆，则 $r(A)\leq n-1$。

若 $r(A)<n-1$，那么有 $A^*=0\Rightarrow A^T=0\Rightarrow A=0$，与 A 是非零实矩阵矛盾。

若 $r(A)=n-1$，那么有 $r(A^*)=1$，从而 $n-1=1,n=2$，与 $n\geq 3$ 矛盾。

于是必有 $r(A)=n$；

（2）注意到 $AA^*=|A|I$，把 $A^T=A^*$ 代入得 $AA^T=|A|I$。两边取行列式得 $|A|^2=|A|^n$。由（1）$|A|\neq 0$，所以有 $|A|^{n-2}=1$，$|A|=1$ 或 $|A|=-1$。如果 $|A|=-1$，

对 $|A|$ 按第 1 行展开有 $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}={a_{11}}^2+{a_{12}}^2+\cdots+{a_{1n}}^2\geq 0$，与 $|A|=-1$

矛盾。所以 $|A|=1$，从而 $AA^T=I$，即 A 是正交矩阵。

14.（清华大学 2006）设 A 是 n 阶实矩阵，I 为 n 阶单位矩阵，证明：

$r(A-iI)=r(A+iI)$，其中i为虚数单位。

证明 记方程组$(A+iI)x=0$的解空间为U，$(A-iI)x=0$的解空间为V。

若$\alpha+\beta i$（其中α,β是n维实列向量）是$(A+iI)x=0$的解，那么有$(A+iI)(\alpha+\beta i)=0$，两边取共轭有$(A-iI)(\alpha-\beta i)=0$，即$\alpha-\beta i$是$(A-iI)x=0$的解。

作映射$f:U\to V$，$\alpha+\beta i\to\alpha-\beta i$，则可以验证$f$是$U$到$V$的同构，于是

$\dim U=\dim V$，那么$n-r(A+iI)=n-r(A-iI)$，即有$r(A-iI)=r(A+iI)$。

15.（中国科学院 2007；中山大学 2004；书上习题） 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

（1）证明：$A^n=A^{n-2}+A^2-E$；（2）求A^{100}。

16.（大连理工大学 2007；重庆大学 2004；书上习题）

设$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$为$n$阶实矩阵，证明

（1）如果$|a_{ii}|>\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$，$i=1,2,\cdots,n$，则$|A|\neq 0$；

（2）如果$a_{ii}>\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$，$i=1,2,\cdots,n$，则$|A|>0$。

17.（哈尔滨工业大学 2006，重庆大学 2004；北京交通大学 2003；

南京理工大学 2005；书上习题） 设 A 是 n 阶实矩阵 $(n\geq 2)$，A^* 是 A 的伴随

矩阵，证明：

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}。$$

18.（浙江大学 2004） 设 $A,B\in P^{n\times n}$，且 $R(A)+R(B)\leq n.$ 证明：存在 n 阶可逆矩阵

M，使得 $AMB=0.$

证明 设 $r(A)=s,r(B)=t$，则 $s+t\leq n$。那么分别存在可逆矩阵 P_1,P_2,Q_1,Q_2 使得

$$P_1AQ_1=\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad P_2BQ_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}。$$

当 $s+t=n$ 时，$P_1AQ_1P_2BQ_2=\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$，$AQ_1P_2B=0$。

当 $s+t<n$ 时，$P_1AQ_1=\begin{pmatrix} I_s & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，$P_2BQ_2=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & I_t \end{pmatrix}$，也有

$$P_1AQ_1P_2BQ_2=\begin{pmatrix} I_s & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & I_t \end{pmatrix}=0,\quad AQ_1P_2B=0。$$

于是取 $M=Q_1P_2$，则 M 可逆且 $AMB=0.$

19.（大连理工大学 2004） 设 A 是 n 阶方阵，证明：存在一可逆矩阵 B 及一幂等

矩阵C，使得$A=BC$.

(也可写成幂等矩阵与可逆矩阵的乘积)

证明 设$r(A)=r$，则存在可逆矩阵P,Q使得$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$，于是

$$A=(PQ)Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q，令B=PQ，C=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q，$$

则显然B是可逆矩阵，C是幂等矩阵，且$A=BC$.

20.（华中科技大学 2005）证明：不存在n阶正交矩阵A,B，使得$A^2=AB+B^2$。

证明 反证法。假如存在n阶正交矩阵A,B，使得$A^2=AB+B^2$，则$A^2=(A+B)B$，

$A+B=A^2B^{-1}$。由于A,B都是正交矩阵，所以$A+B$是正交矩阵。同理，由

$A(A-B)=B^2$可得$A-B$是正交矩阵。于是

$I=(A+B)(A+B)^T=AA^T+BB^T+BA^T+AB^T=2I+BA^T+AB^T$，有$BA^T+AB^T=-I$；

$I=(A-B)(A-B)^T=AA^T+BB^T-BA^T-AB^T=2I-BA^T-AB^T$，有$BA^T+AB^T=I$。

于是由$I=-I,2I=0$，矛盾。于是不存在n阶正交矩阵A,B，使得$A^2=AB+B^2$。

21.（华中科技大学 2005）设Ω是一些n阶方阵组成的集合，其中元素满足：

$\forall A,B\in\Omega$，都有 $AB\in\Omega$ 且 $(AB)^3=BA$。证明：

（1）交换律在 Ω 中成立；

（2）当单位阵 $I\in\Omega$ 时，Ω 中矩阵的行列式的值只可能是 0，± 1.

证明（1）$\forall A,B\in\Omega$，有 $(AB^mA^{n-1})^3=((AB^m)A^{n-1})^3=A^{n-1}(AB^m)=A^nB^m$。又

$$(AB^mA^{n-1})^3=(A(B^mA^{n-1}))^3=(B^mA^{n-1})A=B^mA^n,$$

所以 $A^nB^m=B^mA^n$，即 A^n 与 B^m 可交换。于是

$$BA=(AB)^3=ABABAB=A(BA)^2B=(BA)^2AB=BABA^2B=BA^3B^2=A^3B^3=B^3A^3$$

。

同理 $AB=A^3B^3=B^3A^3$。所以 $AB=BA$，即交换律在 Ω 中成立。

（2）当 $I\in\Omega$ 时，由 $(AI)^3=IA$，即 $A^3=A$，有 $|A|^3=|A|$，所以 Ω 中矩阵的行列式

$|A|$ 的值只可能是 0，± 1.

18.（1）把矩阵$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$表示成$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$型矩阵的乘积；

（2）设$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$且$|A|=1$。证明：$A$可表示成$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$型矩阵的乘积；

（3）设A是n阶矩阵，且$|A|=1$。证明：A可表示成第三种初等矩阵的乘积。