第七节

常系数齐次线性微分方程

基本思路:

求解常系数齐次线性微分方程

转化

求特征方程(代数方程)之根

在二阶齐次线性微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$ 中，

若 $P(x)$、$Q(x)$ 为常数 p、q，即 $y''+py'+qy=0$ （1）

则称(1)为二阶常系数齐次线性微分方程.

若 $P(x)$、$Q(x)$ 不为常数，则称为二阶变系数齐次线性微分方程.

不难看出，指数函数 $y=e^{rx}$（r—待定常数）最有可能是方程(1)的一个解，由此 把 $y=e^{rx}$ 代入方程(1)，整理得

$$(r^2+pr+q)e^{rx}=0$$

所以，有 $r^2+pr+q=0$ （2） ⟶ (1)的特征方程.

(2)的两个根 ⟶ (1)的特征根.

上页 下页

讨论 ① 若特征方程有两个不相等的实根：$r_1 \neq r_2$，那么

$y = e^{r_1 x}$、$y = e^{r_2 x}$ 显然是方程(1)的两个不相关的特解，

由此得此时(1)的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

②若特征方程有两个相等的实根：$r_1 = r_2 = r = -\dfrac{p}{2}$，

可得方程(1)的一个特解 $y_1 = e^{rx}$.

现求另一解 y_2，要求 $\dfrac{y_2}{y_1}$ 不是常数.

设 $\dfrac{y_2}{y_1} = u(x)$，即 $y_2 = e^{rx}u(x)$，代入微分方程(1)，得

$$e^{rx}[(u'' + 2ru' + r^2 u) + p(u' + ru) + qu] = 0$$

$$u'' + (\underset{\underset{0}{\parallel}}{2r + p})u' + (\underset{\underset{0}{\parallel}}{r^2 + pr + q})u = 0 \quad r\text{是重根}$$

$$\therefore u'' = 0$$

只要 $u \neq 0$ 即可,不妨选取 $u=x$，得(1)的另一解为 $y_2 = xe^{rx}$

从而微分方程(1)通解为 $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

即 $y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$.

③若 特征方程有一对共轭复根：$r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ $(\beta \neq 0)$

可得方程（1）的两个复数形式的解

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot \underline{e^{i\beta x}} = e^{\alpha x} \underline{(\cos \beta x + i \sin \beta x)}$$ 欧拉公式

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x; \quad \tilde{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

方程(1)的通解为：$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

上页 下页

综之，微分方程的通解如下表

特征方程$r^2+pr+q=0$的两个根	微分方程$y''+py'+qy=0$的通解
两个不相等的实根 $r_1 \neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2=r$	$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha \pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例1 求下列微分方程的通解：

$(1)\,y''-2y'-3y=0$; $(2)\,y''+2y'+y=0$; $(3)\,y''-2y'+5y=0$.

解（1）所给微分方程的特征方程为 $r^2-2r-3=0$

特征根为 $r_1=-1, r_2=3$

因此所求通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

（2）特征方程为 $r^2+2r+1=0 \Rightarrow r_1=r_2=-1$

因此所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$.

（3）特征方程为 $r^2-2r+5=0 \Rightarrow r_{1,2}=1\pm 2i$

因此所求通解为 $y=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

例2 求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{d^2 s}{d t^2} + 2\dfrac{d s}{d t} + s = 0 \\ s\big|_{t=0} = 4, \quad \dfrac{d s}{d t}\Big|_{t=0} = -2 \end{cases}$

解 特征方程 $r^2 + 2r + 1 = 0$ 有重根 $r_1 = r_2 = -1$,

因此原方程的通解为 $s = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$

利用初始条件得 $C_1 = 4, \quad C_2 = 2$

于是所求初值问题的解为 $s = (4 + 2t)e^{-t}$

注 上面的方法可推广到求解n阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_n y=0 \qquad (3)$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n$ 为常数.

设 $y=e^{rx}$，则 $y'=re^{rx}$， $y''=r^2e^{rx}$， $\cdots$， $y^{(n)}=r^ne^{rx}$.

将 y 及其各阶导数代入方程（3）中得

$$e^{rx}\left(r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n\right)=0$$

$$r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0 \qquad (4)$$

（4）称为（3）的特征方程.

若 r 是（4）的根， 函数 $y=e^{rx}$ 就是（3）的一个特解.

n 次代数方程有n 个根, 特征方程中的每一个根对应着通解中的一项, 且每一项中都含有一个任意常数.

特征方程的根	微分方程通解的对应项
单实根r	给出一项：Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出两项：$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
k重实根r	给出k项：$e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
一对k重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出$2k$项：$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

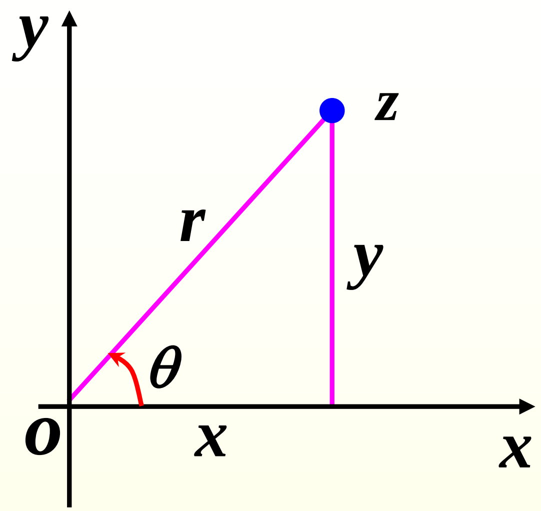
n 阶常系数齐次线性微分方程的通解为以上各项对应项的和.

补充

设 $z = x + iy$（代数形式） 则有:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ （三角形式）

θ 称为 z 的辐角, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$



$z = re^{i\theta}$ （指数形式）

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 的 n 次方根公式:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$$

上页 下页

例3 求通解 (1) $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$; (2) $y^{(4)}+\beta^4 y=0$.

(3) $y^{(4)}+2y''+y=0$. (4) $y^{(5)}-y^{(4)}=0$.

解 （1）所给微分方程的特征方程为 $r^4-2r^3+5r^2=0$

特征根为 $r_1=r_2=0$; $r_{3,4}=1\pm 2i$

原方程通解为 $y=C_1+C_2x+e^x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$.

（2）特征方程为 $r^4+\beta^4=0$

特征根为 $r_{1,2}=\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm i)$; $r_{3,4}=-\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

原方程通解为

$$y=e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_1\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+C_2\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right)+e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_3\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+C_4\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right).$$

（3）特征方程为 $r^4+2r^2+1=0$

即 $(r^2+1)^2=0$

特征根为 $r_{1,2}=i,\quad r_{3,4}=-i$

方程通解为 $y=(C_1+C_3x)\cos x+(C_2+C_4x)\sin x$

（4）特征方程为 $r^5-r^4=0,$

特征根 为 $r_1=r_2=r_3=r_4=0,\quad r_5=1$

原方程通解为 $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5\mathrm{e}^x$

(不难看出, 原方程有特解 $1, x, x^2, x^3, \mathrm{e}^x$)

内容小结

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征根： $r_1\,,\, r_2$

(1) 当 $r_1 \neq r_2$ 时，通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

(2) 当 $r_1 = r_2$ 时，通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$

(3) 当 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta\,\mathrm{i}$ 时，通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

可推广到高阶常系数齐次线性方程求通解 .

思考与练习

求方程 $y'' + a\,y = 0$ 的通解 .

答案: $a = 0$： 通解为 $y = C_1 + C_2\,x$

$a > 0$： 通解为 $y = C_1 \cos\sqrt{a}\,x + C_2 \sin\sqrt{a}\,x$

$a < 0$： 通解为 $y = C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{-a}\,x} + C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{-a}\,x}$

备用题 求一个以 $y_1 = \mathrm{e}^x,\ y_2 = 2x\mathrm{e}^x,\ y_3 = \cos 2x,$ $y_4 = 3\sin 2x$ 为特解的 4 阶常系数齐次线性微分方程, 并求其通解 .

解 根据给定的特解知特征方程有根 :

$$r_1 = r_2 = 1, \qquad r_{3,4} = \pm 2\mathrm{i}$$

因此特征方程为 $(r-1)^2\ (r^2+4) = 0$

即 $$r^4 - 2r^3 + 5r^2 - 8r + 4 = 0$$

故所求方程为 $$y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0$$

其通解为 $$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x + C_3\cos 2x + C_4 \sin 2x$$

（一）高阶线性微分方程

以二阶线性微分方程为例讨论高阶线性微分方程.

复习

一、二阶线性微分方程

称形如 $$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x) \qquad (1)$$

的方程为二阶线性微分方程.

在(1)中,若 $f(x)\equiv 0$, 即 $$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \qquad (2)$$

称（2）为二阶齐次线性微分方程.

若 $f(x)\neq 0$, 则称(1)为二阶非齐次线性微分方程.

二、二阶微分方程的解的结构

定理 1 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程（2）的两个解，则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (3)$$

也是（2）的解，其中 C_1 、C_2 是任意常数.

函数的线性相关与线性无关：

所谓 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关是指：$\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ 常数.

一般的，设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数，

如果存在 n 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得当 $x \in I$ 时，

有等式 $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) \equiv 0$ 恒成立，

则称这 n 个函数在区间 I 上线性相关；否则称线性无关.

定理 2 若$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程(2)的 两个线性无关的特解，则(3)就是方程(2)的通解.

定理 3 设 $y^*(x)$是二阶非齐次线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x)$$ (1)的一个特解，

$Y(x)$是(1)对应的齐次方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$ 的通解，

那么 $y=Y(x)+y^*(x)$就是(1)的通解.

定理 4 设非齐次线性微分方程(1)右端是几个函数之和，例如

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

而 $y_1^*(x)$、$y_2^*(x)$分别为 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$

及 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$ 的特解，

则 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 就是原方程的特解.

上页 下页

（二）二阶常系数齐次线性微分方程

二阶常系数齐次线性微分方程: $y'' + py' + qy = 0$ （1）

$r^2 + pr + q = 0$ （2） $\longrightarrow$ (1)的特征方程.

(2)的两个根 $\longrightarrow$ (1)的特征根.

微分方程的通解如下表

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2 = r$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

n阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (3)$$

其特征方程为： $r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0$

特征方程的根	微分方程通解的对应项
单实根r	给出一项： Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	给出两项：$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
k重实根r	给出k项： $e^{rx}(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$
一对k重复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	给出$2k$项：$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})\cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1})\sin \beta x]$

第八节

常系数非齐次线性微分方程

一、 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

二、 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型

二阶常系数非齐次线性微分方程一般式是：

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

其中p、q是常数，$f(x) \neq 0$.

根据解的结构定理，其通解 为

$$y = \underbrace{Y}_{\text{齐次方程通解}} + \underbrace{y^*}_{\text{非齐次方程特解}}.$$

求特解的方法 — 待定系数法

根据 $f(x)$ 的特殊形式 ，给出特解 y^* 的待定形式,

代入原方程比较两端表达式以确定待定系数 .

一、$f(x)=p_m(x)e^{\lambda x}$型

其中λ为常数，$P_m(x)$是x的一个m次多项式：

$$P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m.$$

推测：由于$f(x)$是有多项式和指数函数所构成，而其导数还是有多项式和指数函数，由此，不难推测 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$ 可能是方程(1)的特解（其中$Q(x)$是某个多项式）.

将 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$ $\quad y^{*\prime}=e^{\lambda x}(\lambda Q(x)+Q'(x))$

$$y^{*\prime\prime}=e^{\lambda x}(\lambda^2Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x))$$

代入方程(1)：$y''+py'+qy=f(x)$并消去$e^{\lambda x}$，得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x) \quad (3)$$

上页 下页

讨论： $Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$ (3)

（i） 如果 $\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$, 即λ不是特 征根. 要使(3)成立，$Q(x)$应是一 个$m$ 次多项式，不妨设

$$Q(x)=Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$$

代入(3)式，比较两端同次幂的系数即可确定 b_i $(i=1,2\cdots,m)$, 进而得(1)的特解：$y^*=Q(x)e^{\lambda x}$.

（ii） 若 $\lambda^2+p\lambda+q=0$, 且 $2\lambda+p\neq 0$, 即λ是特征方程的单根，要使(3)成立，$Q'(x)$应是一个m次多项式，可令

$$Q(x)=xQ_m(x)$$

同样可以定出$Q_m(x)$的系数 b_i $(i=1,2\cdots,m)$.

上页 下页

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x) \quad (3)$$

（iii）若$\lambda^2+p\lambda+q=0$且$2\lambda+p=0$，即λ是特征方程的重根.

要使(3)式成立，$Q''(x)$应是m次多项式.可令$Q(x)=x^2Q_m(x)$

综之，当 $f(x)=p_m(x)e^{\lambda x}$时，可设特解为 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$

其中：$Q_m(x)$是与$P_m(x)$同次（m次）的多项式，

λ是特征方程的 k 重根 $(k=0,1,2)$

$k=0$ 时，λ不是特征方程的根；

注：上述结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程.

上页 下页

例1 求下列方程的通解：

(1) $y''-2y'-3y=3x+1$; (2) $y''-5y'+6y=xe^{2x}$.

解（1）对应齐次方程的特征方程为 $r^2-2r-3=0$

所以特征根为：$r_1=-1,\quad r_2=3$

于是齐次方程的通解为：$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$

由 $f(x)=3x+1=(3x+1)e^{0x}$，且λ=0不是特征根，

故设原方程特解为：$y^*=(b_0x+b_1)e^{0x}=b_0x+b_1$

代入原方程，得 $-3b_0x-2b_0-3b_1=3x+1$

所以 $b_0=-1,\quad b_1=\dfrac{1}{3}$

于是得原方程的一个特解为 $y^*=-x+\dfrac{1}{3}$

所求通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-x+\dfrac{1}{3}$;

(2) $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$.

对应齐次方程的特征方程为: $r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 3$

于是齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

由于 $f(x) = xe^{2x}$，且λ=2是特征方程的单根，

故原方程特解设为： $y^* = x(b_0 x + b_1)e^{2x}$

代入所给方程，得 $-2b_0 x + 2b_0 - b_1 = x$

所以 $b_0 = -\frac{1}{2}$, $b_1 = -1$

于是得原方程的一个特解为 $y^* = x\left(-\frac{1}{2}x - 1\right)e^{2x}$

所求通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^{2x}$.

例2 求解 $y''-3y'+2y=5 \quad y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=2$

解 对应齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0 \Rightarrow r_1=1, r_2=2$

于是齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

由于 $f(x)=5$, 且λ=0不是特征方程的根，

故原方程特解设为：$y^*=A$ 代入方程，得 $2A=5$

所以 $A=\dfrac{5}{2}$, 于是得原方程的一个特解为 $y^*=\dfrac{5}{2}$

所求通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\dfrac{5}{2}$

把 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=2$ 代入上式，得 $C_1=-5 \quad C_2=\dfrac{7}{2}$

所以原方程满足初始条件的特解为 $y=-5e^{2x}+\dfrac{7}{2}e^{3x}+\dfrac{5}{2}$

二、$f(x)=e^{\lambda x}\left[p_l(x)\cos\omega x+p_n(x)\sin\omega x\right]$型

其中λ为常数，$P_l(x)$和$P_n(x)$分别是x的一个l次和n次多项式：

$$P_l(x)=a_0x^l+a_1x^{l-1}+\cdots+a_{l-1}x+a_l;$$

$$P_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n.$$

分析思路：

第一步 将$f(x)$转化为： $f(x)=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$

第二步 求出如下两个方程的特解：

$$y''+py'+qy=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x};\quad y''+py'+qy=\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第三步 利用叠加原理求出原方程的特解

第一步　由欧拉公式：$\begin{cases}\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\end{cases}$，　把 $f(x)$ 变为：

$$f(x)=e^{\lambda x}\left[p_l(x)\cos\omega x+p_n(x)\sin\omega x\right]$$

$$=e^{\lambda x}\left(P_l\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+P_n\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\right)$$

$$=\left(\frac{P_l}{2}-\frac{P_n}{2}i\right)e^{(\lambda+i\omega)x}+\left(\frac{P_l}{2}+\frac{P_n}{2}i\right)e^{(\lambda-i\omega)x}$$

令 $m=\max\{n,l\}$，则

$$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}+\overline{P_m(x)}\,\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$$

$$=P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}+\overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}}$$

第二步 求如下两方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x} \qquad ②$$

$$y'' + py' + qy = \overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}} \qquad ③$$

设 $\lambda+\mathrm{i}\omega$ 是特征方程的 k 重根（ $k = 0, 1$）, 则 ② 有

特解： $y_1^* = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}$ ($Q_m(x)$为m次多项式)

故 $(y_1^*)'' + p(y_1^*)' + q\,y_1^* \equiv P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}$

等式两边取共轭 ： $\overline{y_1^*}'' + p\,\overline{y_1^*}' + q\,\overline{y_1^*} \equiv \overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}}$

这说明 $\overline{y_1^*}$ 为方程 ③ 的特解 .

第三步 求原方程的特解

原方程 $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x \right]$

$$= P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x} + \overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

利用第二步的结果，根据叠加原理，原方程有特解 ：

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*} = x^k e^{\lambda x}\left[Q_m e^{i\omega x} + \overline{Q_m} e^{-i\omega x} \right]$$

$$= x^k e^{\lambda x}\left[Q_m(\cos\omega x + i\sin\omega x) \right.$$

$$\left. + \overline{Q_m}(\cos\omega x - i\sin\omega x) \right]$$

$$= x^k e^{\lambda x}\left[R_m\cos\omega x + \tilde{R}_m\sin\omega x \right]$$

其中 $R_m, \tilde{R}_m$ 均为 m 次实多项式 .

小 结:

对非齐次方程 $f(x)=e^{\lambda x}\left[p_l(x)\cos\omega x+p_n(x)\sin\omega x\right]$

$(p, q$ 为常数$)$

$\lambda+i\omega$为特征方程的 k 重根（ $k = 0, 1$）, 则可设特解:

$$y^{*}=x^{k}\,\mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_{m}\cos\omega x+\tilde{R}_{m}\sin\omega x\right]$$

其中 $m=\max\{n, l\}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

上页 下页

例3 求方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的通解.

解 对应齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm i$

于是齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

由于 $f(x)=x\cos 2x$, $\left(\lambda=0,\omega=2,P_l(x)=x,P_n(x)=0\right)$

且λ+*i*ω=2*i*不是特征方程的根，取 $k=0$,

!!!!!

故原方程特解设为：$y^*=\underline{(ax+b)}\cos 2x+\underline{(cx+d)}\sin 2x$

代入所给方程，得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x$$

所以 $a=-\dfrac{1}{3},b=0,c=0,d=\dfrac{4}{9}$

于是得原方程的一个特解为 $y^*=-\dfrac{1}{3}x\cos 2x+\dfrac{4}{9}\sin 2x$

所求通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{3}x\cos 2x+\dfrac{4}{9}\sin 2x.$

例 4 求方程 $y''-2y'+5y=e^{x}\sin 2x$ 的通解.

解 齐次方程的特征方程为 $r^{2}-2r+5=0 \Rightarrow r_{1,2}=1\pm 2i$

于是齐次方程的通解为 $Y=e^{x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$

由于 $f(x)=e^{x}\sin 2x,(\lambda=1,\omega=2,P_l(x)=0,P_n(x)=1)$

$\lambda+i\omega=1+2i$ 是特征方程的根，取 $k=1,$

故原方程特解设为: $y^{*}=xe^{x}\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)$

代入所给方程，得 $A=-\frac{1}{4},\quad B=0$

于是得原方程的一个特解为 $y^{*}=-\frac{1}{4}xe^{x}\cos 2x$

所求通解为 $y=e^{x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)-\frac{1}{4}xe^{x}\cos 2x$

例5 求方程 $y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2 + 9 = 0$, 其根为 $r_{1,2} = \pm 3\mathrm{i}$

对应齐次方程的通解为 $Y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$

$\pm 3i$ 为特征方程的单根 , 因此设非齐次方程特解为

$$y^* = x(a\cos 3x + b\sin 3x)$$

代入方程: $\underline{6b}\cos 3x \underline{- 6a}\sin 3x = \underline{18}\cos 3x \underline{- 30}\sin 3x$

比较系数, 得 $a = 5$, $b = 3$,

因此特解为 $y^* = x(5\cos 3x + 3\sin 3x)$

所求通解为 $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x(5\cos 3x + 3\sin 3x)$

例 6 求方程 $y''+y=e^x+\cos x$ 的通解.

解 对应齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm i$

齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

因为 $y''+y=e^x$ 应有 Ae^x 形式的特解;

$y''+y=\cos x$ 应有 $x(B\cos x+C\sin x)$ 形式的特解,

故特解应设为 $y^*=Ae^x+x(B\cos x+C\sin x)$

代入所给方程,得 $2Ae^x+2C\cos x-2B\sin x=e^x+\cos x$

由此求得 $A=\frac{1}{2}, C=\frac{1}{2}, B=0$

于是求得一个特解为 $y^*=\frac{1}{2}e^x+\frac{x}{2}\sin x$

所求通解为 $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{2}e^x+\frac{x}{2}\sin x.$

例7 设下列高阶常系数线性非齐次方程的特解形式:

(1) $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$

(2) $y^{(4)} + y'' = x + e^{x} + 3\sin x$

解 (1) 特征方程 $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$, 即 $(r^2 + 1)^2 = 0$,

有二重根 $r = \pm i$, 所以设非齐次方程特解为

$$y^* = x^2(a\cos x + b\sin x)$$

(2) 特征方程 $r^4 + r^2 = 0$, 即 $r^2(r^2 + 1) = 0$ 有根

$$r_{1,2} = 0, \quad r_{3,4} = \pm i$$

利用叠加原理，可设非齐次方程特解为

$$y^* = x^2(ax + b) + c\,e^{x} + x(d\cos x + k\sin x)$$

上页 下页

内容小结

1. $y'' + p y' + q y = P_m(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$

λ 为特征方程的 $k\,(=0,1,2)$ 重根, 则设特解为

$$y^* = x^k Q_m(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

2. $y'' + p y' + q y = \mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$

$\lambda + i\omega$ 为特征方程的 $k\,(=0,1)$ 重根, 则设特解为

$$y^* = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}\,[R_m(x)\cos\omega x + \tilde{R}_m(x)\sin\omega x]$$

$$m = \max\{\,l, n\,\}$$

3. 上述结论也可推广到高阶方程的情形.

思考与练习

1 . (填空) 设 $y'' + y = f(x)$

1) 当 $f(x) = x\cos x$ 时可设特解为

$$y^* = x\left[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right]$$

2) 当 $f(x) = x\cos 2x + e^{2x}$ 时可设特解为

$$y^* = (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x \; + k e^{2x}$$

提示: $f(x) = e^{\lambda x}\left[\, P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x \,\right]$

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\;[R_m(x)\cos\omega x + \widetilde{R}_m(x)\sin\omega x]$$

$$m = \max\{n, l\}$$

结束 上页 下页

2. 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{\alpha x}$ 的通解 (其中 α 为实数).

解: 特征方程 $r^2 + 4r + 4 = 0$，特征根: $r_1 = r_2 = -2$

对应齐次方程通解: $Y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$

$\alpha \neq -2$ 时, 令 $y^* = Ae^{\alpha x}$，代入原方程得 $A = \frac{1}{(\alpha+2)^2}$,

故原方程通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \dfrac{1}{(\alpha+2)^2}e^{\alpha x}$

$\alpha = -2$ 时, 令 $y^* = Bx^2 e^{\alpha x}$，代入原方程得 $B = \dfrac{1}{2}$,

故原方程通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \dfrac{1}{2}x^2 e^{\alpha x}$

3. 已知二阶常微分方程 $y''+ay'+by=c\mathrm{e}^{x}$ 有特解 $y=\mathrm{e}^{-x}(1+x\mathrm{e}^{2x})$ 求微分方程的通解 .

解: 将特解代入方程得恒等式

$$(1-a+b)\mathrm{e}^{-x}+(2+a)\mathrm{e}^{x}+(1+a+b)x\mathrm{e}^{x}=c\mathrm{e}^{x}$$

比较系数得 $\begin{cases}1-a+b=0\\2+a=c\\1+a+b=0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}a=0\\b=-1\\c=2\end{cases}$

故原方程为 $y''-y=2\mathrm{e}^{x}$

$\boxed{y=\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{x}}$

对应齐次方程通解: $Y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$

原方程通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{x}$