第二节 对坐标的曲线积分

一、对坐标的曲线积分的概念与性质

二、 对坐标的曲线积分的计算法

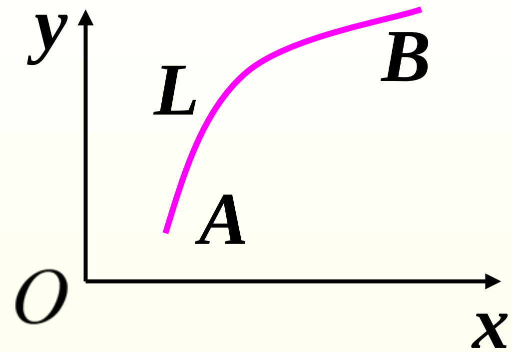
三、两类曲线积分之间的联系

一、 对坐标的曲线积分的概念与性质

1. 引例: 变力沿曲线所作的功.

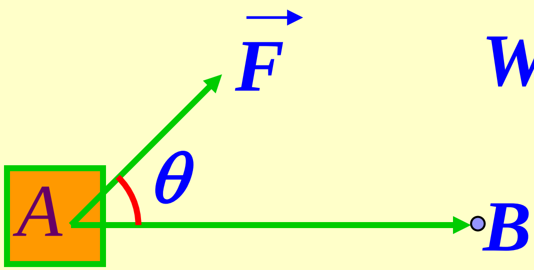
设一质点受如下变力作用

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$



在 xOy 平面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B,求移动过程中变力所作的功W.

常力沿直线所作的功



$$W = F\,|AB|\cos\theta$$

$$= \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

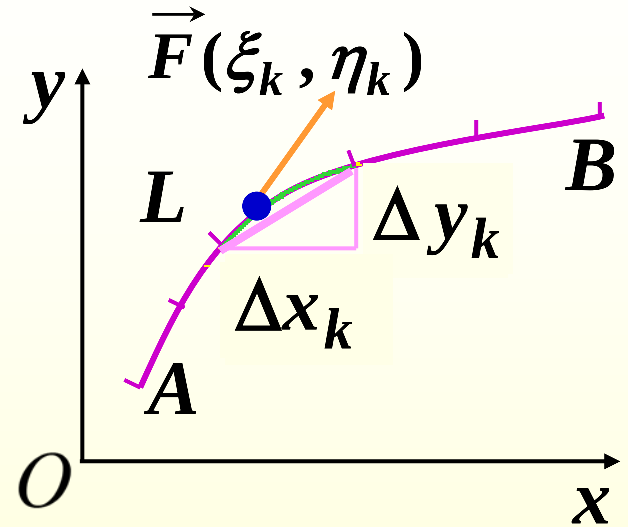
解决办法:

"分割"
"近似"
"求和"
"取极限"

1) “分割”

把L分成 n 个小弧段,$\vec{F}$ 沿 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 所做的功为 ΔW_k, 则

$$W=\sum_{k=1}^{n}\Delta W_k$$



2) “近似”

有向小弧段$\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$用有向线段 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}=(\Delta x_k,\Delta y_k)$ 近似代替, 在$\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$上任取一点 (ξ_k,η_k), 则有

$$\Delta W_k \approx \vec{F}(\xi_k,\eta_k)\cdot\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$$

$$=P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$$

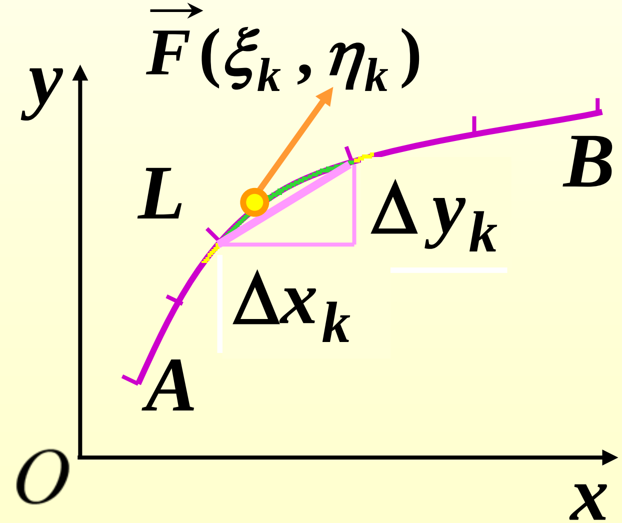
3) “近似和”

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right]$$

4) “取极限”

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right]$$

(其中λ为 n 个小弧段的最大长度)



2. 定义 设 L 为xOy 平面内从 A 到B 的一条**有向光滑弧**, 在L 上定义了一个向量函数

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

若对 L 的任意分割和在局部弧段上任意取点, 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

$$\overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

都存在, 则称此极限为函数 $\vec{F}(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对**坐标的曲线积分**, 或**第二类曲线积分**. 其中, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 称为**被积函数** , L 称为**积分弧段** 或 **积分曲线** .

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k ,$$

称为对 x 的曲线积分;

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k ,$$

称为对 y 的曲线积分.

若记 $\overrightarrow{\mathrm{d}r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$, 对坐标的曲线积分也可写作

$$\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}r} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

类似地, 若 Γ 为空间曲线弧 , 记 $\overrightarrow{\mathrm{d}r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}r} = \int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

3. 性质

(1)线性性质

$$\int_L \left[\alpha \vec{F}_1(x,y) + \beta \vec{F}_2(x,y)\right] \cdot \overrightarrow{dr} = \alpha \int_L \vec{F}_1(x,y) \cdot \overrightarrow{dr} + \beta \int_L \vec{F}_2(x,y) \cdot \overrightarrow{dr}$$

(2) 若 L 可分成 k 条有向光滑曲线弧 $L_i\ (i=1,\cdots,k)$,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{k} \int_{L_i} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

对坐标的曲线积分关于积分弧段具有可加性.

(3) 用 L^- 表示 L 的反向弧，则

$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = -\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

对坐标的曲线积分具有方向性.

说明:

- **对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的方向！**
- **定积分是第二类曲线积分的特例.**

$$\boxed{\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

物理意义：变力沿曲线做的功

$$W = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

二、对坐标的曲线积分的计算法

定理 设$P(x,y)$、$Q(x,y)$在有向曲线弧L上有定义且连续，

L的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，且满足下列条件：

（1）当参数t单调地由α变到β时，点$M(x,y)$从L的起点A沿L运动到终点B；

（2）函数$\varphi(t)$，$\psi(t)$在以α,β为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$；

则 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

证明 下面先证

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

根据定义 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$

设分点 x_i 对应参数 t_i，点(ξ_i,η_i) 对应参数 τ_i，由于

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

$$\therefore \int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

因为L 为光滑弧，所以$\varphi'(t)$连续

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

$$\therefore \int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

$$= \int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

同理可证 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t$

$$\therefore \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

如果 L 的方程为 $y=\varphi(x),\ x:a\to b$, 则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\varphi'(x)\}\mathrm{d}x$$

下限$a \longleftrightarrow$ L起点; 上限$b \longleftrightarrow$ L终点.

如果 L 的方程为 $x=\psi(y),\ y:c\to d$, 则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d\{P[\psi(y),y]\psi'(y)+Q[\psi(y),y]\}\mathrm{d}y$$

下限$c \longleftrightarrow$ L起点; 上限$d \longleftrightarrow$ L终点.

对空间光滑曲线弧 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ $t:\alpha\to\beta$，类似有

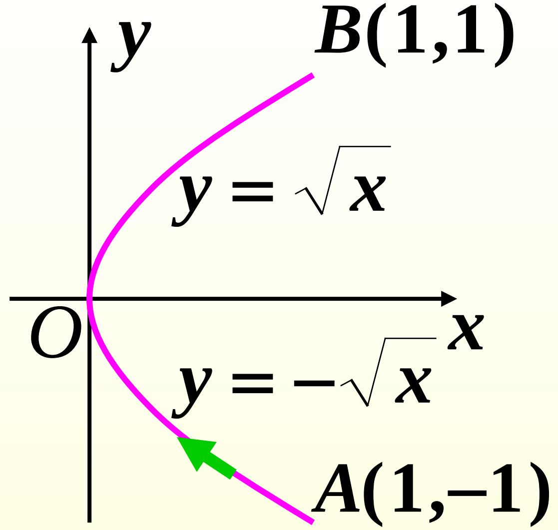
$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

注意 计算对坐标的曲线积分，一定将积分曲线化为参数方程，且积分下限对应着起点，上限对应着终点.

例1 计算 $\int_L xy\,\mathrm{d}x$，其中 L 为沿抛物线 $y^2 = x$ 从点 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段.



解法1 取 x 为参数，则 $L: \overset{\frown}{AO} \cup \overset{\frown}{OB}$

$$\overset{\frown}{AO}:\ y = -\sqrt{x},\ \ x: 1 \to 0$$

$$\overset{\frown}{OB}:\ y = \sqrt{x},\ \ x: 0 \to 1$$

$$\therefore \int_L xy\,\mathrm{d}x = \int_{\overset{\frown}{AO}} xy\,\mathrm{d}x + \int_{\overset{\frown}{OB}} xy\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^0 x(-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}$$

解法2 取 y 为参数，则 $L: x = y^2,\ \ y: -1 \to 1$

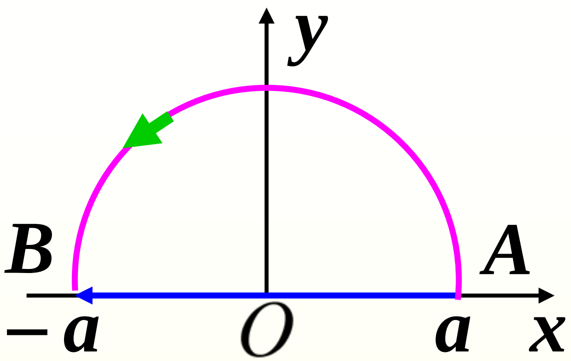
$$\therefore \int_L xy\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 y^2 y (y^2)'\,\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^1 y^4\,\mathrm{d}y = \frac{4}{5}$$

上页 下页

例2 计算 $\int_L y^2 \mathrm{d}x$，其中 L 为

(1) 半径为 a 圆心在原点的上半圆周, 方向为逆时针方向;

(2) 从点 $A(a,0)$沿 x 轴到点 $B(-a,0)$.



解 (1) 取L的参数方程为 $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t: 0 \to \pi$

则 $$\int_L y^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} a^2 \sin^2 t \cdot (-a\sin t)\mathrm{d}t$$

$$= -2a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t\,\mathrm{d}t = -2a^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{4}{3}a^3$$

(2) 取 L 的方程为 $y = 0,\ x: a \to -a$,则

$$\int_L y^2 \mathrm{d}x = \int_a^{-a} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

对坐标的曲线积分一般与路径有关。

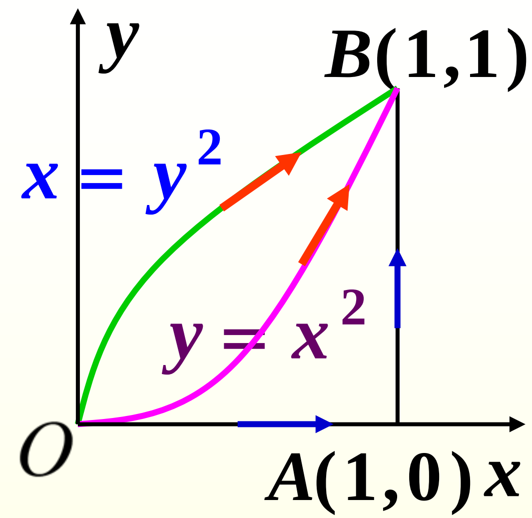
上页 下页

例3 计算 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, 其中$L$为

(1) 抛物线 $L: y = x^2,\ x: 0 \to 1$;

(2) 抛物线 $L: x = y^2,\ y: 0 \to 1$;

(3) 有向折线$L: \overline{OA} \cup \overline{AB}$.



解 (1) 原式 $= \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = 1$

(2) 原式 $= \int_0^1 (2y^2 y \cdot 2y + y^4)\,\mathrm{d}y = 5\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}y = 1$

(3) 原式 $= \int_{\overline{OA}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$

$= 0 + \int_0^1 \mathrm{d}y = 1$

该积分只与路径的起点和终点有关，与路径无关. ?

上页 下页

例4 **计算** $I=\int_{\Gamma}x^3dx+3zy^2dy-x^2ydz$

其中Γ是从点$A(3,2,1)$到点$B(0,0,0)$的直线段AB.

解 **直线段AB的方程为:** $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$

化为参数式: $x=3t,\ y=2t,\ z=t,\ t$ 从 1 到 0.

$$I=\int_1^0[(3t)^3\cdot 3+3t(2t)^2\cdot 2-(3t)^2 2t]dt$$

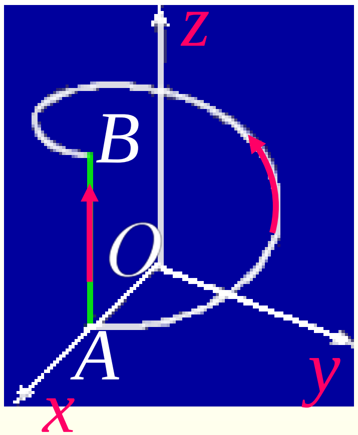
$$=\int_1^0 87t^3dt=-\frac{87}{4}$$

例5 设在力场 $\vec{F}=(y,-x,z)$ 作用下, 质点由 $A(R,0,0)$ 沿 Γ 移动到 $B(R,0,2\pi k)$, 其中 Γ 为

(1) $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=kt$;

(2) $\overline{AB}$.

试求力场对质点所作的功.



解 (1) $W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{ds}=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{2\pi}(-R^2+k^2t)\,\mathrm{d}t=2\pi(\pi k^2-R^2)$$

(2) Γ 的参数方程为 $x=R,\ y=0,\ z=t,\ \ t:0\to 2\pi k$

$$W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{ds}=\int_{\overline{AB}} y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi k}t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\pi^2k^2$$

例6 求 $I=\int_\Gamma (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中

$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-y+z=2\end{cases}$, 从 z 轴正向看为顺时针方向.

解 取 Γ 的参数方程

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2-\cos t+\sin t\quad (t:2\pi\to 0)$$

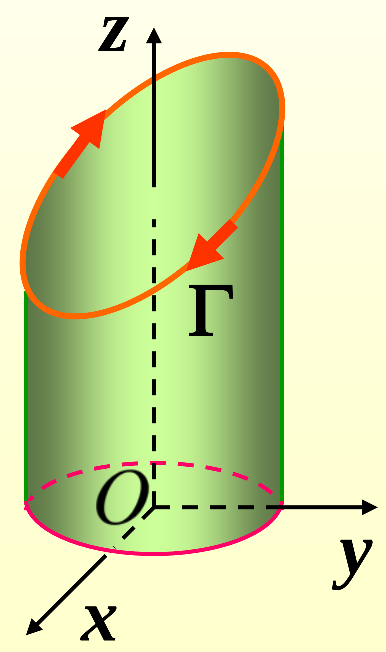
$$\therefore\quad I=-\int_0^{2\pi}[(2-\cos t)(-\sin t)$$

$$+(-2+2\cos t-\sin t)\cos t$$

$$+(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(-2\sin t-2\cos t+1-4\cos^2 t)\,dt$$

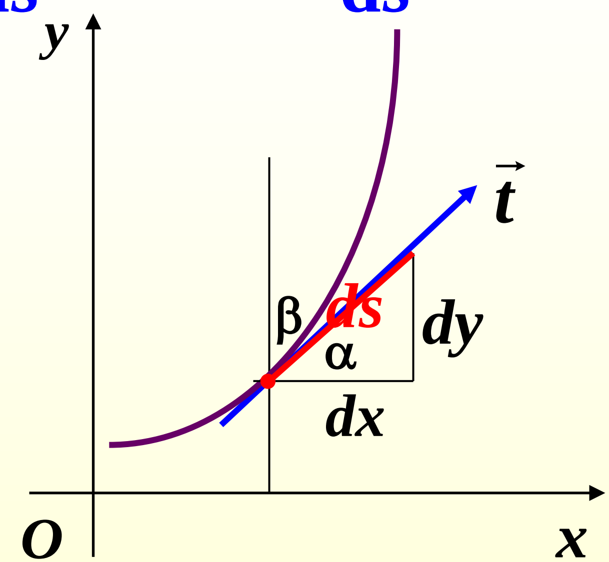
$$=-2\pi$$



三、两类曲线积分之间的联系

已知L切向量的方向余弦为 $\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \cos\beta = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$

则两类曲线积分有如下联系



$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_L \{P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\}\,\mathrm{d}s$$

设有向光滑弧 L 的参数方程为

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$$

则$\vec{t} = \{\varphi'(t), \psi'(t)\}$,

$$\cos\alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}}; \quad \cos\beta = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}}.$$

类似地, 在空间曲线 Γ 上的两类曲线积分的联系是

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_\Gamma \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\mathrm{d}s$$

空间有向光滑曲线 Γ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad (t : \alpha \to \beta)$

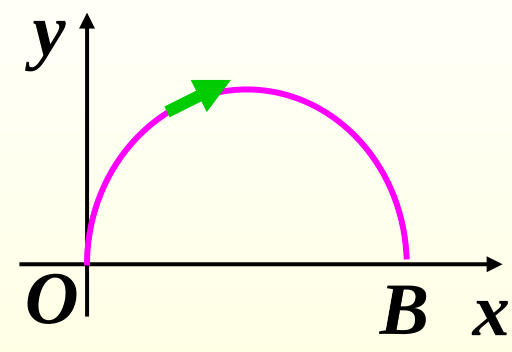
则 $\vec{T} = \{\varphi'(t), \psi'(t), \omega'(t)\}$,

$$\cos\alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}}; \cos\beta = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}};$$

$$\cos\gamma = \frac{\omega'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}}$$

例7 将积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 化为对弧长的积分，其中 L 沿上半圆周 $x^2+y^2-2x=0$ 从 $O(0,0)$ 到 $B(2,0)$.

解 $y=\sqrt{2x-x^2}$, $\mathrm{d}y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$



$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\sqrt{2x-x^2},\quad \cos\beta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=1-x$$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=$$

$$\int_L\left[P(x,y)\sqrt{2x-x^2}+Q(x,y)(1-x)\right]\mathrm{d}s$$

内容小结

1. 定义 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[\,P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

2. 性质

(1) L可分成 k 条有向光滑曲线弧$L_i\ (\,i=1,\cdots,k)$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{k}\int_{L_i} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(2) L^- 表示 L 的反向弧

$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的方向!

3. 计算

- 对有向光滑弧 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},\ t:\alpha\to\beta$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

- 对有向光滑弧 $L: y=\psi(x),\ x:a\to b$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}\mathrm{d}x$$

• 对空间有向光滑弧Γ: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \quad t:\alpha\to\beta \\ z=\omega(t) \end{cases}$

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$

$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

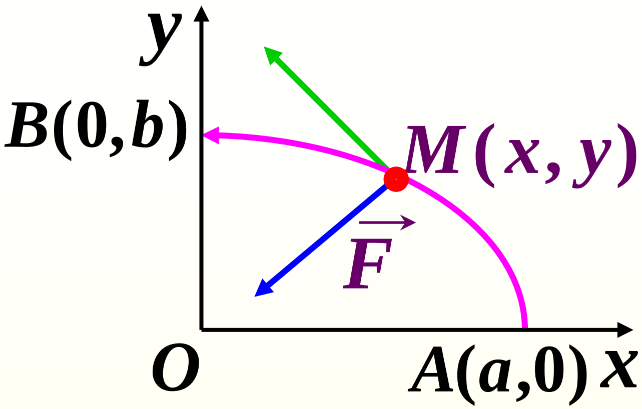
4. 两类曲线积分的联系

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_L\{P\cos\alpha+Q\cos\beta\}\mathrm{d}s$$

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_\Gamma\{P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\}\mathrm{d}s$$

思考与练习



1. 设一个质点在 $M(x,y)$ 处受力 $\vec F$ 的作用, $\vec F$ 的大小与M 到原原点 O 的距离成正比, $\vec F$ 的方向恒指向原点, 此质点由点 $A(a,0)$沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 逆时针移动到 $B(0,b)$, 求力$\vec F$ 所作的功.

提示: $\overrightarrow{OM}=(x,y), \vec F=-k(x,y)$

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}-kx\,\mathrm{d}x-ky\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\frown}{AB}:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}\quad t:0\to\frac{\pi}{2}$$

(解见 P201 例5)

思考: 若题中$\vec F$ 的方向改为与$\overrightarrow{OM}$ 垂直且与 y 轴夹锐角,则

$\vec F=$ $\underline{k(-y,x)}$

2. 已知Γ为折线 $ABCOA$(如图), 计算

$$I=\oint_{\Gamma}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z$$

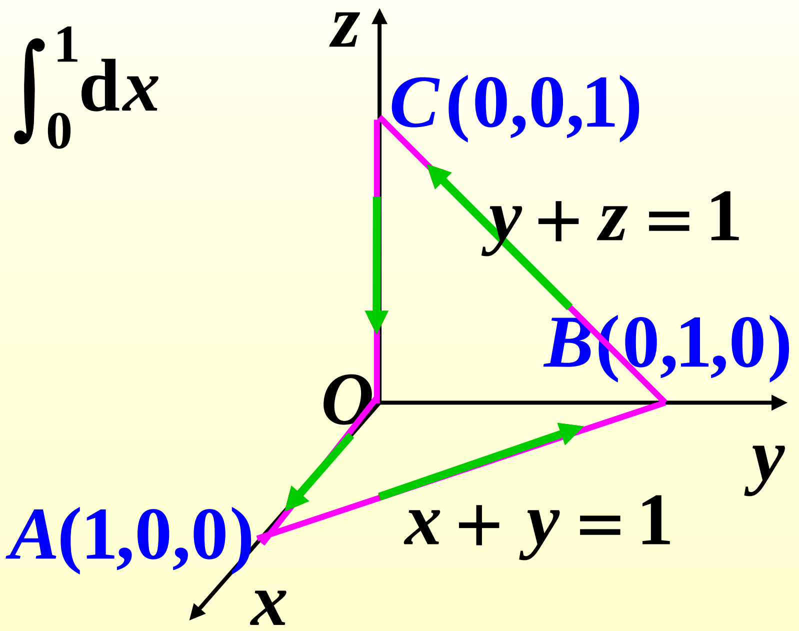
提示:

$$I=\int_{\overrightarrow{AB}}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+\int_{\overrightarrow{BC}}-\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z+0+\int_{\overrightarrow{OA}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^0 2\mathrm{d}x-\int_1^0(1+y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x$$

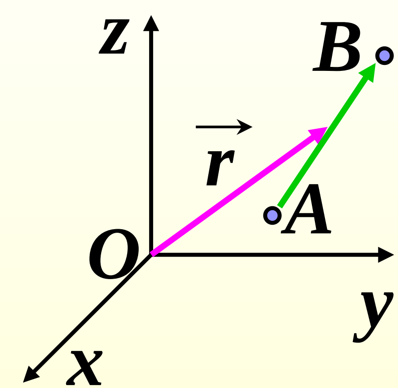
$$=-2+(1+\frac{1}{2})+1$$

$$=\frac{1}{2}$$



备用题 1. 一质点在力场 $\vec{F}$ 作用下由点 $A(2,2,1)$ 沿直线移动到 $B(4,4,2)$, 求 $\vec{F}$ 所作的功 W. 已知 $\vec{F}$ 的方向指向坐标原点, 其大小与作用点到 xOy 面的距离成反比.

解: $\vec{F} = \dfrac{k}{|z|}(-\vec{r}^{\,0}) = -\dfrac{k}{|z|}\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$



$$W = \int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = -k\int_L \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{|z|\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$L:\begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 2t+2 \quad (t:\ 0\to 1) \\ z = t+1 \end{cases}$$

$\overrightarrow{AB} = (2,2,1)$

$$= -k\int_0^1 \frac{3\,\mathrm{d}t}{t+1} = -3k\ln 2$$

2. 设曲线C为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与曲面 $x^2+y^2=ax$

$(z\geq 0, a>0)$的交线，**从 Ox 轴正向看去为逆时针方向,**

(1) 写出曲线 C 的参数方程；

(2) 计算曲线积分 $\int_C y^2\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}y+x^2\,\mathrm{d}z$.

解: (1) $\begin{cases}(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2\\ z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases}x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\\ y=\frac{a}{2}\sin t \qquad\qquad t:0\to 2\pi\\ z=a\sin\frac{t}{2}\end{cases}$$

(2) 原式 $= \int_0^{2\pi}\Big[-\frac{a^3}{8}\sin^3 t + \frac{a^3}{2}\sin^2\frac{t}{2}\cos t$

$+\frac{a^3}{8}(1+\cos t)^2\cos\frac{t}{2}\Big]\mathrm{d}\,t$

令 $u = \pi - t$

$= \int_{-\pi}^{\pi}\Big[-\frac{a^3}{8}\cancel{\sin^3 u} - \frac{a^3}{2}\cos^2\frac{u}{2}\cos u$

$+\frac{a^3}{8}(1-\cos u)^2\cancel{\sin\frac{u}{2}}\Big]\mathrm{d}\,u$

$= -2\cdot\frac{a^3}{2}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos u}{2}\cos u\,\mathrm{d}\,u$ $\boxed{\text{利用“偶倍奇零”}}$

$= -\frac{\pi}{4}a^3$

第三节 格林公式及其应用

一、格林公式

二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

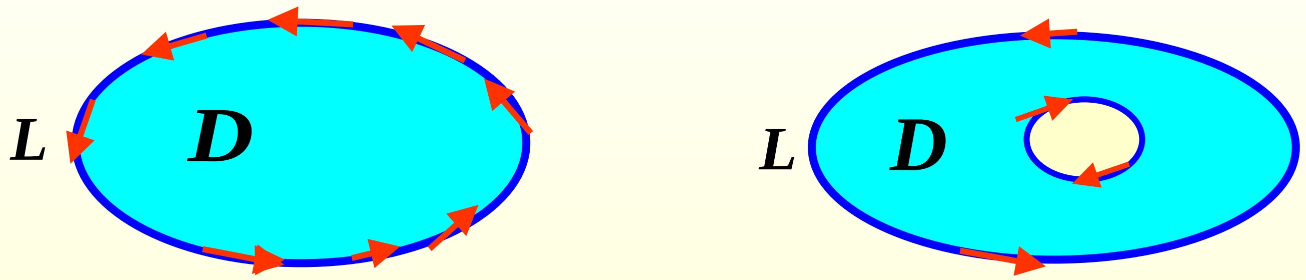
*三、全微分方程

一、格林公式

区域 D 分类: 平面单连通与复连通区域的概念:

若平面区域 D 内任一闭曲线所围区域都属于 D,

则称 D 为单连通区域. 否则称为复连通区域.



单连通（无洞）　　　　复连通（有洞）

平面区域 D 的边界曲线 L 的正向规定为:

当你沿这个方向行走时, D 内靠近你的那一部分区域

总在你的左侧.

格林公式:

定理1. 设闭区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成，函数 $P(x,y), Q(x,y)$在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \quad \text{（格林公式）}$$

注: 1.D是闭区域,可以是单连通,也可以是复连通域.

2.L是D的所有边界.

3. 连续性、封闭性、方向性

分析: 因 $\oint_L Pdx+Qdy=\oint_L Pdx+\oint_L Qdy$

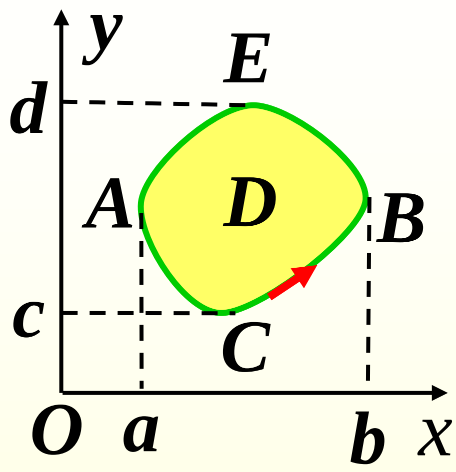
$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}d\sigma-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}d\sigma$$

只须证: $\oint_L Pdx=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}d\sigma$, $\oint_L Qdy=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}d\sigma$

证明: 1) 若D既是 X - 型区域, 又是 Y - 型区域, 且

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

$$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$



则 $$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_c^d Q(\psi_2(y),y)\mathrm{d}y-\int_c^d Q(\psi_1(y),y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\overset{\frown}{CAE}}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{EAC}}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

即 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y \qquad ①$$

同理可证

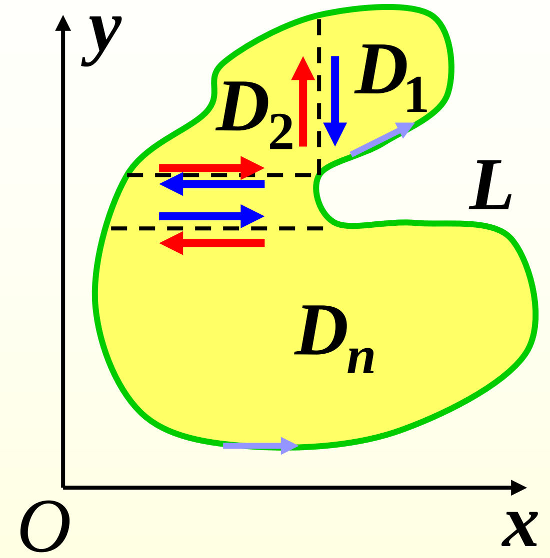
$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x \qquad ②$$

①、②两式相加得:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

定理1 上页 下页

2) **若D不满足以上条件，则可通过加辅助线将其分割为有限个上述形式的区域，如图**



$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\iint_{D_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{\partial D_k} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$ (∂D_k表示D_k的正向边界)

$$=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$ **证毕**

格林公式 $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

推论: 正向闭曲线 L 所围区域 D 的面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

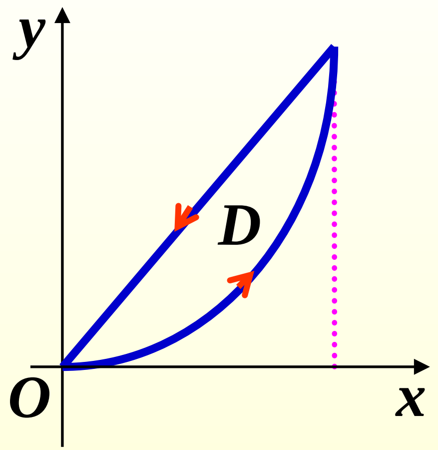
例如, 椭圆 $L: \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ **所围面积**

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta \quad = \pi ab$$

注：使用格林公式时必须满足连续性、封闭性、方向性

例1 计算 $\oint_L x^2 y dx + y^3 dy$，其中 L 是由曲线 $y = x^2$ 及 $y = x$ 所围区域 D 的正向边界曲线.



解 $P = x^2 y,\ \ Q = y^3.$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$$

由格林公式得

$$\oint_L x^2 y dx + y^3 dy = \iint_D \left(-x^2\right) d\sigma \qquad D: \begin{cases} x^2 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \int_0^1 \left(-x^2\right) dx \int_{x^2}^{x} dy = \int_0^1 \left(x^4 - x^3\right) dx = -\frac{1}{20}$$

例2 设 L 是一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

证 令 $P = 2xy,\ Q = x^2$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

设 L 所围区域为D, 如果 L 的方向为正方向,

利用格林公式 , 得 $\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$

如果 L 的方向为负方向,

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = -\iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

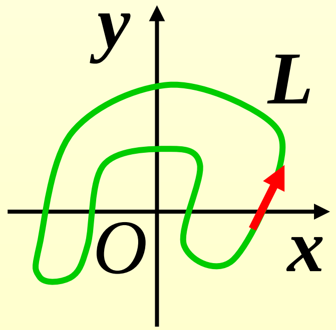
例3 计算 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$,其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

解 令 $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$

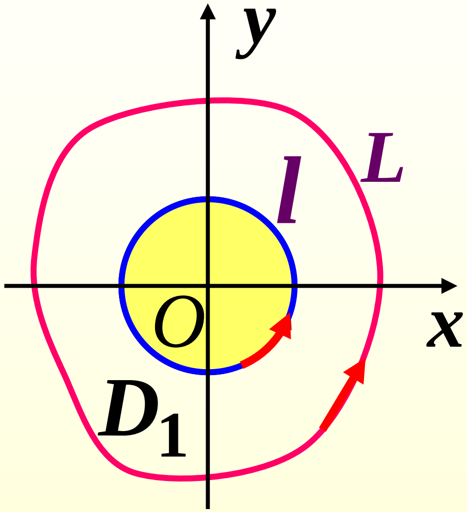
则当$x^2+y^2 \neq 0$时, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$

设 L 所围区域为D, 当$(0,0) \notin D$时,由格林公式知

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0$$



当$(0,0)\in D$时，在D内作圆周 $l: x^2+y^2=r^2$，取逆时针方向，记 L 和 l^- 所围的区域为 D_1，对区域 D_1 应用格林公式，得



$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\oint_{L\cup l^-} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D_1} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\therefore \oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi$$

注：不满足连续性时，添加辅助封闭曲线，去掉间断点，在新区域上应用格林公式

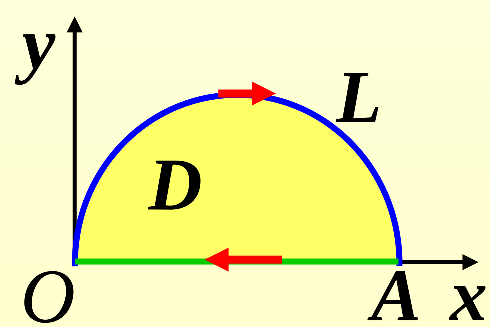
例4 计算 $\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$ 为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 $O\,(0,0)$ 到 $A\,(4,0)$.

解 为了使用格林公式, 添加辅助线段 $\overline{AO}$, 它与L 所围区域为D, 则

原式$=\oint_{L\cup\overline{AO}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$

$$+\int_{\overline{OA}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x=8\pi+\frac{64}{3}$$



注：不满足封闭时，添加辅助线段，构成封闭曲线，再用格林公式

二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

定理2. 设D是单连通域，函数$P(x,y),Q(x,y)$在D内具有一阶连续偏导数，则以下四个条件等价：

(1) 沿D中任意分段光滑闭曲线L，有$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$

(2) 对D中任一分段光滑曲线L，曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

与路径无关，只与起止点有关.

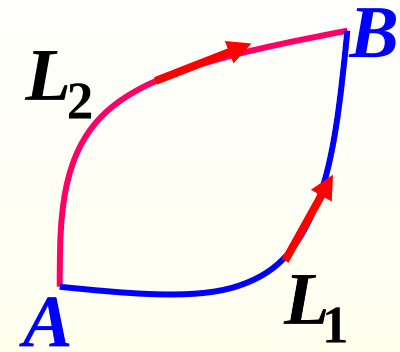
(3) $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$在$D$内是某一函数$u(x,y)$的全微分，

即 $\mathrm{d}u(x,y)=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

(4) 在D内每一点都有$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

证明 (1) $\Rightarrow$ (2)

设 L_1, L_2 为 D 内任意两条由 A 到 B 的有向分段光滑曲线, 则



$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L_1 \cup L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$$ (根据条件(1))

$$\therefore \quad \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

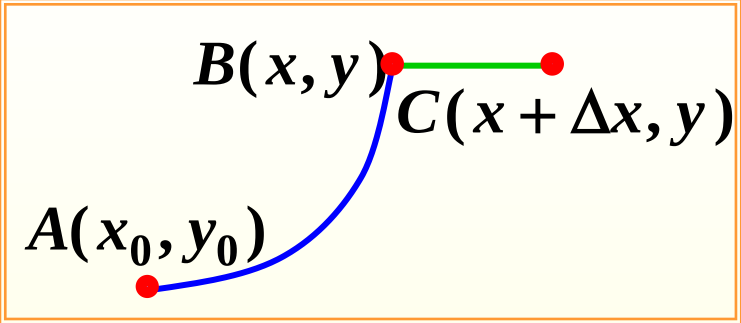
说明: 积分与路径无关时, 曲线积分可记为

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

证明 (2) $\Rightarrow$ (3)

在D内取定点$A(x_0, y_0)$和任一点$B(x, y)$, 因曲线积分与路径无关, 有函数

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$



则 $\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x,y)$

$$=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,\,y)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,\,y)} P\,\mathrm{d}x$$

$$= P(x+\theta\Delta x,\ y)\Delta x$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\Delta x, y)=P(x, y)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y)$, 因此有 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

证明 (3) $\Rightarrow$ (4)

设存在函数 $u(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

则 $$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

P, Q 在 D 内具有连续的偏导数, 所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

从而在D内每一点都有 $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

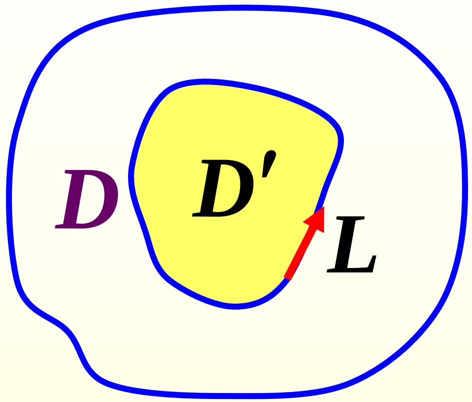
定理2 上页 下页

证明 (4) $\Rightarrow$ (1)

设L为D中任一分段光滑闭曲线,所围区域为 $D' \subset D$

(如图), 因此在 D' 上

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$



利用格林公式,得

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

证毕

---

(4) **在 D 内每一点都有** $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

(1) **沿D 中任意分段光滑闭曲线 L,有** $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$.

说明: 根据定理2，若在某区域D内 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 则

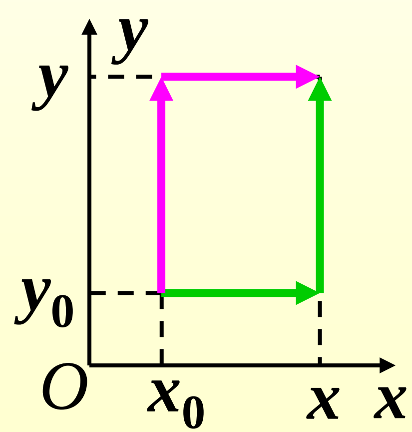
1) 计算曲线积分时, 可选择方便的积分路径;

2) 可用积分法在 D 内求$u(x,y)$ 使得$\mathrm{d}\,u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$:

取定点$(x_0, y_0)\in D$ 及动点 $(x,y)\in D$, 则$u(x,y)$为

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$$



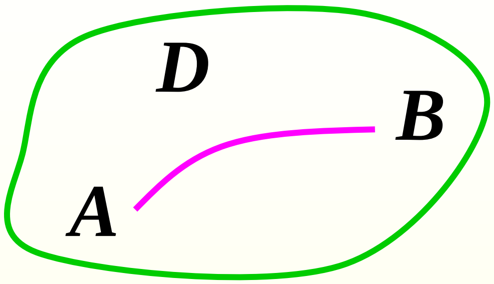
或 $$u(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x$$

3) 若已知 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$，则对$D$内任一分段光滑曲线 $\overset{\frown}{AB}$，有

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_A^B P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_A^B \mathrm{d}u = u\Big|_A^B = u(B) - u(A)$$



注: 此式称为曲线积分的基本公式(P216定理4).

它类似于微积分基本公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}F(x) \qquad (\text{其中 } F'(x) = f(x))$$

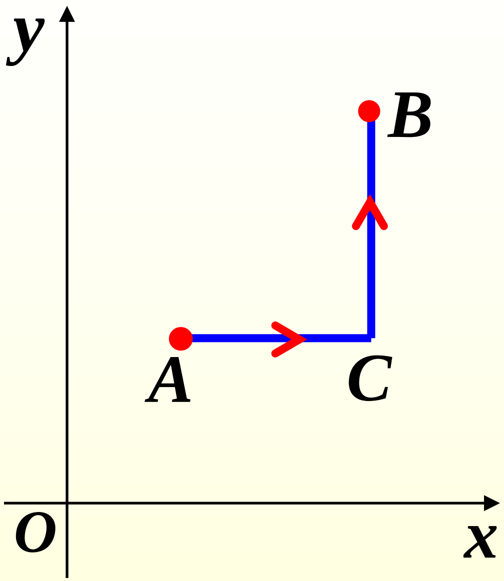
$$= F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

定理2 上页 下页

例5 计算 $I=\int_{(1,2)}^{(3,4)}\left(6xy^2-y^3\right)dx+\left(6x^2y-3xy^2\right)dy$ $P_{217}6(2)$

解 $\because P=6xy^2-y^3,\quad Q=6x^2y-3xy^2$

$\therefore \dfrac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在整个xoy面内成立. 所以曲线积分与路径无关.



取积分路径为折线ACB,

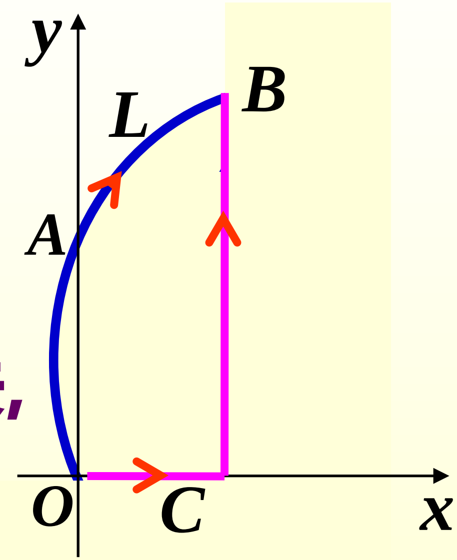
$\overline{AC}: y=2,\ x:1\to 3.\qquad \overline{CB}: x=3,\quad y:2\to 4.$

$$\therefore I=\int_{\overline{AC}}+\int_{\overline{CB}}=\int_1^3(24x-8)dx+\int_2^4\left(54y-9y^2\right)dy$$

$$=\left[12x^2-8x\right]_1^3+\left[27y^2-3y^3\right]_2^4=236$$

上页 下页

例6 计算 $\int_L (e^y + x)dx + (xe^y - 2y)dy$,其中 L 为过点 $O(0,0)$、$A(0,1)$、$B(1,2)$ 三点所决定的圆周上的一段弧,O 为起点,B 为终点.



解 $\because P = e^y + x, \quad Q = xe^y - 2y$

$$\because \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y = \frac{\partial P}{\partial y}$$

所以在整个平面区域内曲线积分与路径无关,

因此可取折线 OCB 作为积分路径,

$$\int_L = \int_{\overline{OC}} + \int_{\overline{CB}} = \int_0^1 (1 + x)dx + \int_0^2 (e^y - 2y)dy$$

$$= \frac{3}{2} + \left[e^y - y^2\right]_0^2 = e^2 - \frac{7}{2}$$

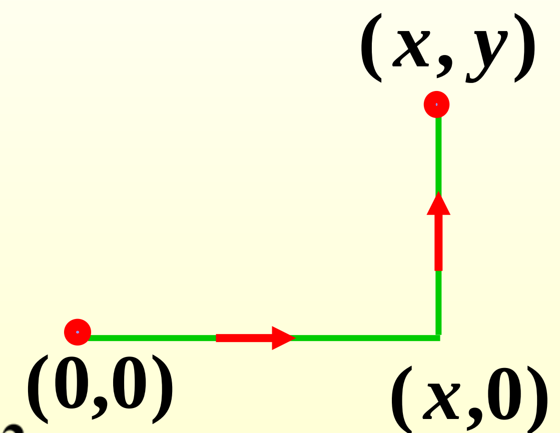
上页 下页

例7 验证$xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$是某个函数的全微分, 并求出一个这样的函数.

证 设 $P = xy^2,\ Q = x^2y$,则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

由定理2 可知, 存在函数 $u(x, y)$ 使

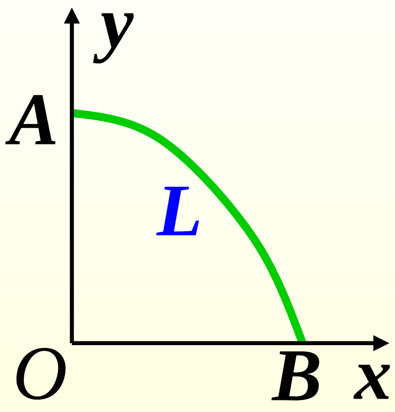
$$\mathrm{d}u = xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$$



$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$$

$$= 0 + \int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y = \int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}x^2y^2$$

例8 设质点在力场 $\vec{F}=\dfrac{k}{r^2}(y,-x)$ 作用下沿曲线 L：$y=\dfrac{\pi}{2}\cos x$ 由 $A(0,\dfrac{\pi}{2})$ 移动到 $B(\dfrac{\pi}{2},0)$，求力场所作的功 W (其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$).



解 $W=\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_L \dfrac{k}{r^2}(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)$

令 $P=\dfrac{ky}{r^2}$, $Q=-\dfrac{kx}{r^2}$, 则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{k(x^2-y^2)}{r^4}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x^2+y^2\neq 0)$$

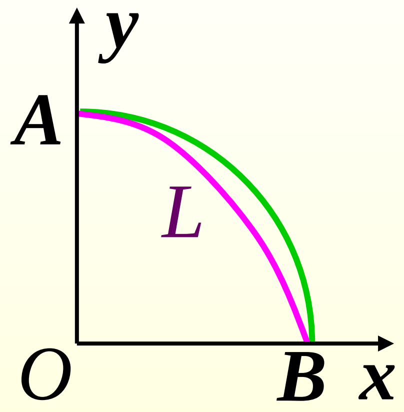
可见, 在不含原点的单连通区域内积分与路径无关.

取圆弧 $\overset{\frown}{AB}$： $x = \dfrac{\pi}{2}\cos\theta,\ y = \dfrac{\pi}{2}\sin\theta \ \left(\theta: \dfrac{\pi}{2} \to 0\right)$

$$W = \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{k}{r^2}(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$$

$$= k\int_{\pi/2}^{0} -(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}k$$



思考: 积分路径是否可以取 $\overline{AO}\cup\overline{OB}$? 为什么?

注意, 本题只在不含原点的单连通区域内积分与路径无关！ 转内容小结

*三、全微分方程

若存在 $u(x,y)$ 使 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

则称 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ ③ 为**全微分方程.**

判别: P, Q 在某单连通域 D 内有一阶连续偏导数, 则

③为全微分方程 $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\ (x,y)\in D$

求解步骤:

1. 求原函数 $u(x,y)$

- 方法1 利用积分与路径无关的条件.
- 方法2 利用 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=p, \dfrac{\partial u}{\partial y}=Q$,求积分.
- 方法3 凑微分法.

2. 由 $\mathrm{d}u=0$ 知通解为 $u(x,y)=C$.

例9 求解

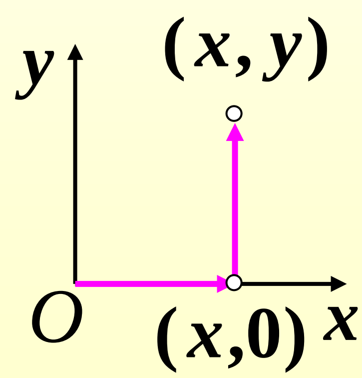
$$(5x^4+3xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\mathrm{d}y=0$$

解 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 故这是全微分方程.

法1 取 $x_0=0,\ y_0=0$, 则有

$$u(x,y)=\int_0^x 5x^4\,\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3$$



因此方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$

法2　此全微分方程的通解为 $u(x,y)=C$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=5x^4+3xy^2-y^3 \qquad ④$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y-3xy^2+y^2 \qquad ⑤$$

由④得 $u(x,y)=\int(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+\varphi(y)$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\varphi(y),\quad \varphi(y)\text{待定}$$

两边对 y 求导得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=3x^2y-3xy^2+\varphi'(y)$

与⑤比较得 $\varphi'(y)=y^2$，取 $\varphi(y)=\dfrac{1}{3}y^3$

因此方程的通解为 $x^5+\dfrac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\dfrac{1}{3}y^3=C$

例10 求解 $(x+\frac{y}{x^2})\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\mathrm{d}y=0$

解 $\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\therefore$ 这是一个全微分方程 .

用凑微分法求通解. 将方程改写为

$$x\,\mathrm{d}x-\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=0$$

即 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)-\mathrm{d}(\frac{y}{x})=0$, 或 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x})=0$

故原方程的通解为 $\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x}=C$

思考: 如何解方程 $(x^3+y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$?

这不是一个全微分方程，但若在方程两边同乘 $\dfrac{1}{x^2}$，就化成例10 的方程 .

注: 若存在连续可微函数 $\mu = \mu(x, y) \neq 0$, 使

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

为全微分方程, 则称 $\mu(x,y)$ 为原方程的**积分因子**.

在简单情况下, 可凭观察和经验得到积分因子.

如 求 $xdy - ydx = 0$ 易知 $\dfrac{1}{x^2}$ 是一个积分因子.

于是 $\dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0$ 即 $d\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$ $\therefore$ 方程通解为 $\dfrac{y}{x} = C$.

还是 求 $xdy - ydx = 0$ 积分因子也可取作 $\dfrac{1}{xy}$,

$$\frac{1}{y}dy - \frac{1}{x}dx = 0 \Longrightarrow d(\ln y) - d(\ln x) = 0$$

$$\Longrightarrow \ln y - \ln x = \ln C \Longrightarrow \frac{y}{x} = C.$$

注 ①一般来说，积分因子并不是唯一的.

② 一般来说，积分因子肯定存在，但不易求出.

1、观察法

2、可以分成几组

分组是解全微分方程、求积分因子很重要的思路.

为此，应熟记一些简单二元函数的全微分，如

$$y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(xy)$$

$$\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2} = \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{xy} = \mathrm{d}\left(\ln\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\frac{x - y}{x + y}\right)$$

例11 求 $(1+xy)ydx+(1-xy)xdy=0$

解 $$(ydx+xdy)+xy(ydx-xdy)=0$$

$$d(xy)+x^2y^2\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)=0$$

$$d\left(-\frac{1}{xy}\right)+d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)=0$$

于是原方程的通解为：$-\dfrac{1}{xy}+\ln\left|\dfrac{x}{y}\right|=C$

例12 求 $y^2(x-3y)dx+(1-3y^2x)dy=0$

解 $$y^2xdx+dy-3y^2(ydx+xdy)=0$$

$\dfrac{1}{y^2}$ 是一个积分因子

上页 下页

内容小结

1. 格林公式 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2. 等价条件

设 P, Q 在 D 内具有一阶连续偏导数, 则有

$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

$\Longleftrightarrow$ 对 D 内任意闭曲线 L 有 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

$\Longleftrightarrow$ $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$ 为全微分方程

思考与练习

1. $\oint_L \frac{2xy-3y}{x^2+y^2}dx+\frac{x^2-5x}{x^2+y^2}dy$, 其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$按逆时针方向绕行.

此时不能用格林公式

解 $\oint_L \frac{2xy-3y}{x^2+y^2}dx+\frac{x^2-5x}{x^2+y^2}dy$

$$=\frac{1}{a^2}\oint_L (2xy-3y)dx+(x^2-5x)dy$$

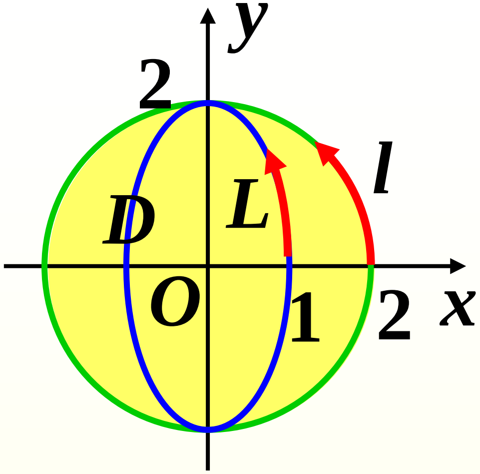
可以用格林公式

$$=\frac{1}{a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left[(2x-5)-(2x-3)\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(-2)dxdy=\frac{1}{a^2}\times(-2)\times\pi a^2=-2\pi$$

结束 目录 上页 下页

2. 设 $L: x^2+\frac{1}{4}y^2=1,\ l: x^2+y^2=4,$



且都取正向, 问下列计算是否正确 ?

$$(1)\ \oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \neq \oint_l \frac{x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{4}\oint_l x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\iint_D 5\,\mathrm{d}\sigma=5\pi$$

$$(2)\ \oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \oint_l \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{4}\oint_l x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\iint_D 2\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\pi$$

提示: $x^2+y^2\neq 0$时

$$(1)\ \frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$(2)\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

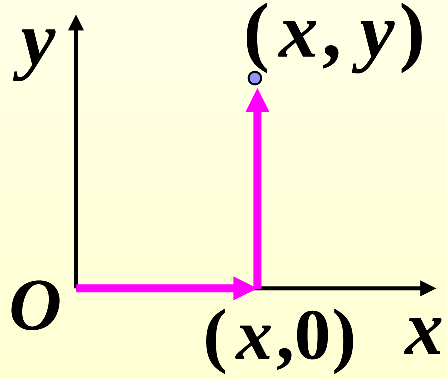
3. 设 $\text{grad}\, u(x,y) = (x^4 + 4xy^3, 6x^2y^2 - 5y^4)$, 求 $u(x,y)$.

提示 $\mathrm{d}u(x,y) = (x^4 + 4xy^3)\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\mathrm{d}y$

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^4 + 4xy^3)\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\mathrm{d}y + C$$

$$= \int_0^x x^4\,\mathrm{d}x + \int_0^y (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y + C$$

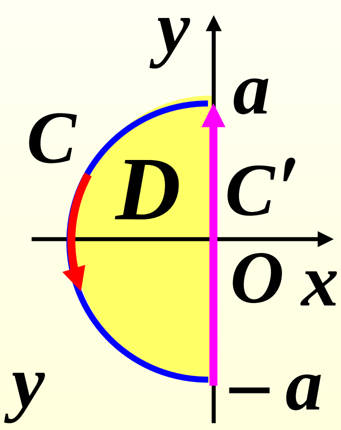
$$= \frac{1}{5}x^5 + 2x^2y^3 - y^5 + C$$



备用题 1. 设 C 为沿 $x^2+y^2=a^2$ 从点 $(0,a)$ 依逆时针到点 $(0,-a)$ 的半圆, 计算

$$\int_C \underline{\frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}\mathrm{d}x+\left[ax+\underline{2y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})}\right]\mathrm{d}y$$

解 添加辅助线如图 , 利用格林公式 .



原式 $=\displaystyle\int_{C\cup C'}-\int_{C'}$

$$=\iint_D\left[a+\cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}}-\cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$-\int_{-a}^{a}\cancel{(2y\ln a)\,\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^3$$

2. 质点M沿着以AB为直径的半圆，从$A(1,2)$运动到点$B(3,4)$，在此过程中受力$\vec{F}$作用，$\vec{F}$的大小等于点M到原点的距离，其方向垂直于OM，且与y轴正向夹角为锐角，求变力$\vec{F}$对质点M所作的功. (1990 考研)

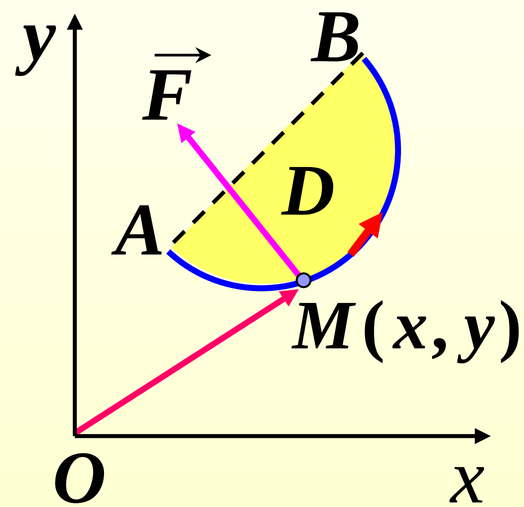
解 由图知 $\vec{F}=(-y,\,x)$，故所求功为

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{d}s}=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$$

$$=\Big(\int_{\overset{\frown}{AB}\cup\overline{BA}}+\int_{\overline{AB}}\Big)(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)$$

$$=2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^3\big[-(x+1)+x\big]\mathrm{d}x$$

$$=2\pi-2$$



$\overline{AB}$的方程
$$y=2+\tfrac{4-2}{3-1}(x-1)$$

3. 已知曲线积分 $\int_L F(x,y)[y\sin x\,dx - \cos x\,dy]$ 与路径无关, 其中 $F \in C^1$, $F(0,1)=0$, 求由 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$.

解 因积分与路径无关, 故有

$$\frac{\partial}{\partial x}[-F(x,y)\cos x] = \frac{\partial}{\partial y}[F(x,y)y\sin x]$$

即 $-F_x\cos x + \cancel{F\sin x} = F_y\,y\sin x + \cancel{F\sin x}$

$$\boxed{y'} \Longrightarrow \boxed{-\frac{F_x}{F_y}} = y\tan x$$

因此有 $\begin{cases} y' = y\tan x \\ y\big|_{x=0} = 1 \end{cases} \Longrightarrow y = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$