第五节

可降阶高阶微分方程

高阶微分方程：二阶及二阶以上的微分方程.

一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

一、$y^{(n)} = f(x)$型的微分方程

解法： 逐次积分，降阶求解. (连续积分n次).

例 1 求微分方程 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 对所给方程积分三次，得

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C$$

$$y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + Cx + C_2$$

所求通解为 $y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$

二、$y''=f(x,y')$型的微分方程

不明显含有y

解法：令 $y'=p(x)$， 则 $y''=p'$，原微分方程变为 $p'=f(x,p)$

设其通解为$p=\phi(x,C_1)$， 则 $y'=\phi(x,C_1)$

两端积分便得原方程的通解 $y=\int\phi(x,C_1)dx+C_2$

例2 求初值问题 $(1+x^2)y''=2xy'$ $\quad y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=3$

解 令$y'=p$，有 $(1+x^2)\dfrac{dp}{dx}=2xp \longrightarrow \dfrac{dp}{p}=\dfrac{2x}{1+x^2}dx$

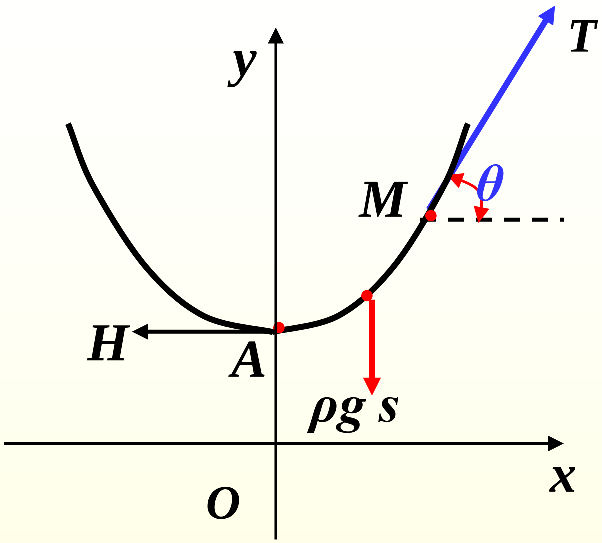
得 $\ln|P|=\ln(1+x^2)+C$ 即 $p=y'=C_1(1+x^2)(C_1=\pm e^C)$

由 $y'|_{x=0}=3$ 得 $C_1=3$ 所以 $y'=3(1+x^2)$

两端积分，得 $y=x^3+3x+C_2$

由 $y|_{x=0}=1$ 得$C_2=1$ 于是所求的特解为：$y=x^3+3x+1$.

例 3 悬链线的方程（将一均匀、柔软的绳索两端固定，绳索仅受重力作用而下垂，达平衡状态时即为悬链线）.



解 设绳索的最低点为 A，取 y 轴通过点 A、x 轴水平向右，且 $|OA|=$ 某个定值 。

设绳索曲线的方程为 $y=y(x)$,

在曲线上任取一点$M\ (x,\ y)$， 设A 到M 弧段长为s，

绳索的线密度为ρ， 则该段绳索的重量为ρgs。

绳索在点A 处的张力沿水平方向向左，其大小设为H;

在点M 处的张力沿绳索斜向上, 并在M 点与绳索相切,

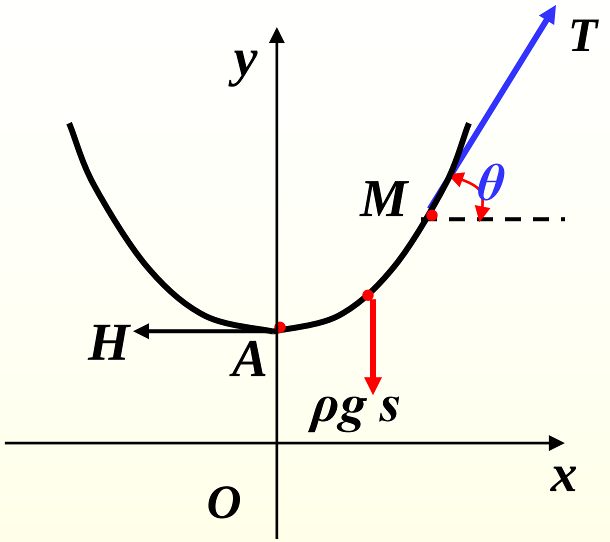
设其倾角为θ、大小为T .

因作用于AM弧段上的外力相互平衡，

把作用于此弧段上的外力沿铅直及

水平两方向分解，得

$$T\sin\theta = \rho g s\ ,\quad T\cos\theta = H$$



将两式相除得

$$\tan\theta = \frac{1}{a}s,\quad \left(a = \frac{H}{\rho g}\right).$$

$$\because \tan\theta = y',\quad \text{又由弧长公式}\quad s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$\therefore\ y' = \frac{1}{a}\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

于是，$y=y(x)$ 应满足的微分方程为: $y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$ （*）

取$|AO|=a$，　　初始条件为 $y\big|_{x=0} = a,\ y'\big|_{x=0} = 0.$

令 $y' = p$，代入方程（*）并分离变量得

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a}$$

$$\boxed{arshp = \ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = \ln\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right)}$$

积分得 $arshp = \dfrac{x}{a} + C_1$ （**）

代入初值条件 $y'\big|_{x=0} = 0$，得 $C_1 = 0$, $arshp = \dfrac{x}{a}$

于是（**）式成为 $p = sh\dfrac{x}{a}$， 即 $y' = sh\dfrac{x}{a}$ ⟹ $y = ach\dfrac{x}{a} + C_2$

代入初始条件 $y\big|_{x=0} = a$， 得 $C_2 = 0.$

所以，悬链线方程为 $y = ach\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$

$$\boxed{shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2};chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

目录 上页 下页

三、$y''=f(y,y')$ 型的微分方程

不明显含有x

解法：令 $y'=p(y)$,则 $y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$

于是$y''=f(y,y')$就成为 $p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$

这是一个关于y、p的一阶微分方程.

设其通解为 $y'=p=\phi(y,C_1)$, 分离变量并积分,

便得原方程的通解: $\displaystyle\int\frac{dy}{\phi(y,C_1)}=x+C_2$

例4 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 令 $y' = p$, 则 $y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$

代入原方程，得 $yp\dfrac{dp}{dy} - p^2 = 0$

当 $y \neq 0$、$p \neq 0$ 时，约去 p，有 $y\dfrac{dp}{dy} = p$

分离变量，得 $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{dy}{y}$,

两端积分，得 $\ln|P| = \ln|y| + C$ 即 $p = C_1 y$，$(C_1 = \pm e^C)$

所以 $y' = C_1 y$ 于是得原方程通解为 $\ln|y| = C_1 x + C_3$

即 $y = C_2 e^{C_1 x}$ $(C_2 = \pm e^{C_3})$

上页 下页

例5 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解 令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, 代入方程得 $p\,dp = e^{2y}dy$

积分得 $$\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1$$

利用初始条件, 得 $C_1 = 0$, 根据 $p\big|_{y=0} = y'\big|_{x=0} = 1 > 0$, 得

$$\frac{dy}{dx} = p = e^y$$

积分得 $-e^{-y} = x + C_2$, 再由 $y\big|_{x=0} = 0$, 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $1 - e^{-y} = x$

例6 求 $y''+(y')^2=1$， $y\big|_{x=0}=0,\ y'\big|_{x=0}=0$

解 令 $y'=p$， 则 $y''=\dfrac{dp}{dx}$ 代入原方程得 $\dfrac{dP}{dx}+P^2=1$

分离变量,得 $\dfrac{dP}{1-P^2}=dx$ 两端积分得 $\ln\left|\dfrac{1+P}{1-P}\right|=2x+C$

于是 $\dfrac{1+P}{1-P}=C_1e^{2x}$ $(C_1=\pm e^C)$ 由 $y'\big|_{x=0}=0$ 得 $C_1=1$

$\therefore P=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ $\therefore dy=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$

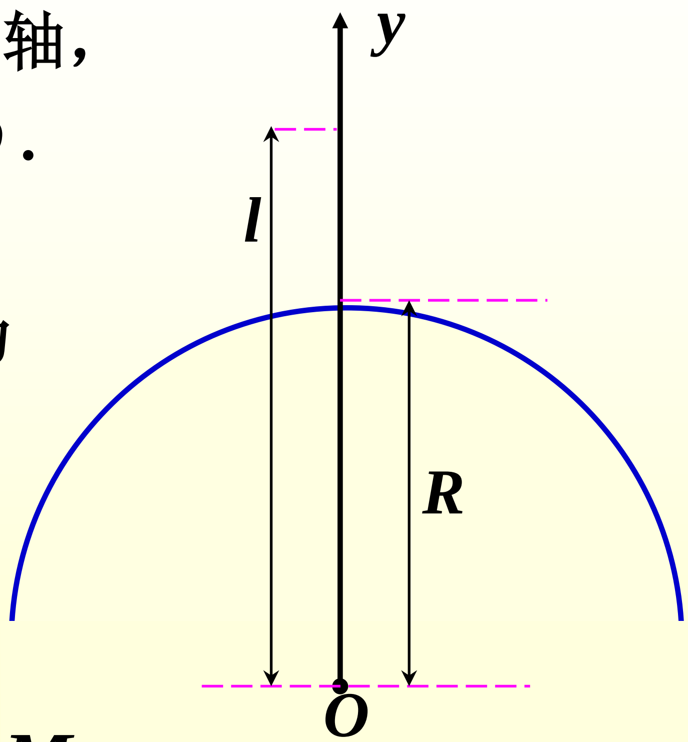
于是得原方程的通解为 $y=x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)+C_2$

又 $y\big|_{x=0}=0$ 得 $C_2=-\ln 2$

于是原方程特解为 $y=x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)-\ln 2$

例7 离地面很高的物体，受地球引力作用由静止开始落向地面.求它落到地面时的速度和所需的时间(不计空气阻力).

解 取连结地球中心与该物体的直线为 y 轴，方向铅直向上,取地球的中心为原点 O .



设地球的半径为 R,物体的质量为 m ,物体开始下落时与地球中心的距离为 l($l > R$),在时刻 t 物体所在位置为

$$y = y(t)$$

物体的速度为 $v(t) = \dfrac{dy}{dt}$

由万有引力定律得 $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{kmM}{y^2}$

（其中M为地球的质量，k为引力常数）

所以 $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{kM}{y^2}$ 当 $y=R$ 时，$\frac{dv}{dt}=-g$ 所以 $k=\frac{gR^2}{M}$

所以对应微分方程化为 $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{gR^2}{y^2}$ (1)

初始条件是 $y\big|_{t=0}=l$，$y'\big|_{t=0}=v\big|_{t=0}=0$

先求物体到达地面时的速度 v. 由 $\frac{dy}{dt}=v$ 得

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=v\frac{dv}{dy}$$

代入方程(1),分离变量得 $vdv=-\frac{gR^2}{y^2}dy$

15页 上页 下页

两端积分得 $$v^2 = \frac{2gR^2}{y} + C_1$$

由 $y\big|_{t=0} = l$，$y'\big|_{t=0} = v\big|_{t=0} = 0$ 得 $C_1 = -\dfrac{2gR^2}{l}$

所以 $$v^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{l}\right) \qquad (2)$$

令 $y=R$，就得到物体到达地面时的速度为 $v = -\sqrt{\dfrac{2gR(l-R)}{l}}$.

再求物体落到地面时所需的时间.

由(2)式,得 $$\frac{dy}{dt} = v = -R\sqrt{2g\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{l}\right)}$$

分离变量，得 $$dt = -\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\sqrt{\frac{y}{l-y}}\,dy$$

两端积分得 $t=-\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(\sqrt{ly-y^2}+l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\right)+C_2$

由 $y\big|_{t=0}=l$， 得 $C_2=0$.

$$\therefore t=-\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(\sqrt{ly-y^2}+l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\right).$$

令$y=R$，便得到物体到达地面所需的时间为

$$t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(\sqrt{lR-R^2}+l\arccos\sqrt{\frac{R}{l}}\right).$$

思考与练习

1. 方程 $y'' = f(y')$ 如何代换求解 ?

答: 令 $y' = p(x)$ 或 $y' = p(y)$ 均可.

一般说, 用前者方便些.

有时用后者方便 . 例如, $y'' = \mathrm{e}^{-(y')^2}$

2. 解二阶可降阶微分方程初值问题需注意哪些问题 ?

答: (1) 一般情况 , 边解边定常数计算简便.

(2) 遇到开平方时, 要根据题意确定正负号.

第六节

高阶线性微分方程

一、二阶线性微分方程概念

二、齐次线性方程解的结构

三、非齐次线性方程解的结构

*四、常数变易法

一、二阶线性微分方程概念

称形如 $$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x) \qquad (1)$$

的方程为二阶线性微分方程.

在(1)中,若 $f(x)\equiv 0$, 即 $$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \qquad (2)$$

称（2）为二阶齐次线性微分方程.

若 $f(x)\neq 0$, 则称(1)为二阶非齐次线性微分方程.

n阶线性微分方程:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

以下讨论的二阶线性微分方程的性质也适用于n阶线性微分方程

二、齐次线性微分方程的解的结构

先讨论二阶齐次线性微分方程：$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ (2)

定理 1 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程（2）的两个解，则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad （3）$$

也是（2）的解，其中 C_1、C_2 是任意常数.

注 ① 只要把(3)代入(2)即得证.

② 齐次方程的这个性质表明它的解符合叠加原理.

③ (3)是方程(2)的解，但不一定是通解. 只有当 C_1 与 C_2 相互独立，即 C_1 与 C_2 无法合并时，(3)才是(2)的通解.

例如 $y = e^x$、$y = 3e^x$ 都是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解，

但 $y = C_1 e^x + C_2 \cdot 3e^x$ 显然不是它的通解.

函数的线性相关与线性无关：

所谓$y_1(x)$与$y_2(x)$线性无关是指：$\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$常数.

例如：$\because \dfrac{e^{2x}}{e^{3x}} = e^{-x} \neq$常数，$\therefore e^{2x}$、$e^{3x}$ 线性无关.

$\because \dfrac{\sin 2x}{\sin x \cos x} = 2 =$ 常数，$\therefore \sin 2x$、$\sin x \cos x$ 线性相关.

一般的，设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$是定义在区间 I 上的 n 个函数，

如果存在 n 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得当 $x \in I$ 时，

有等式 $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) \equiv 0$ 恒成立，

则称这n个函数在区间I上线性相关；否则称线性无关.

例如，$1, \cos^2 x, \sin^2 x$，在 $(-\infty, +\infty)$ 上都有

$$1-\cos^2 x-\sin^2 x\equiv 0$$

故它们在任何区间 I 上都线性相关;

又如，$1, x, x^2$，若在某区间 I 上 $k_1+k_2x+k_3x^2\equiv 0$，

则根据二次多项式至多只有两个零点，可见 k_1, k_2, k_3

必需全为 0，故 $1, x, x^2$ 在任何区间 I 上都 线性无关.

思考：若 $y_1(x), y_2(x)$ 中有一个恒为 0，则 $y_1(x), y_2(x)$

必线性 相关

定理 2 若$y_1(x)$与$y_2(x)$是二阶齐次线性方程(2)的两个线性无关的特解，则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 就是方程(2)的通解.

例如： 容易验证$y_1 = \cos x$、$y_2 = \sin x$ 是方程 $y'' + y = 0$ 的两个特解，且 $\dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x \neq$常数，所以$y_1$、$y_2$线性无关，所以方程的通解为：$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$。

注 以上结论可推广到n阶线性齐次微分方程：

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0$$

例如，若 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$是上方程的$n$个线性无关的特解，则$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$ 就是上方程的通解.

上页 下页

对于一阶线性微分方程：$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$，其通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

即 $$y=e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+Ce^{-\int P(x)dx}$$

不难验证：$y^*=e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$是方程的一个特解；

而$Y=Ce^{-\int P(x)dx}$ 是对应齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$的通解.

即一阶非齐次线性微分方程的通解由该方程的一个特解加对应齐次方程的通解构成.

一阶非齐次线性微分方程通解的这个结构原理，同样适用于高阶非齐次线性微分方程.

三、非齐次线性微分方程的解的结构

定理 3 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x) \quad (1)$$ 的一个特解，

$Y(x)$ 是 (1) 对应的齐次方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$ 的通解，

那么 $y=Y(x)+y^*(x)$ 就是 (1) 的通解.

例 如：容易验证 $y^*=x^2-2$ 是方程 $y''+y=x^2$ 的一个特解；

由前例知 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 是对应齐次方程

$$y''+y=0$$ 的通解，

所以原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$。

定理 4 设非齐次线性微分方程(1)右端是几个函数之和，例如

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

而 $y_1^*(x)$、$y_2^*(x)$ 分别为

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

及 $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$ 的特解，

则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 就是原方程的特解.

本定理也称为非齐次线性微分方程的解的**叠加原理**.

定理 5 给定 n 阶非齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是对应齐次方程的 n 个线性无关特解, $y^*(x)$ 是非齐次方程的特解, 则非齐次方程的通解为

$$y = \underline{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)} + y^*(x)$$

$$= Y(x) + y^*(x)$$

齐次方程通解 非齐次方程特解

上页 下页

例1 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解，C_1, C_2 是任意常数，则该方程的通解是（ D ）.

$\cancel{(A)}$ $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$; $\cancel{(B)}$ $C_1y_1 + C_2y_2 + (C_1 + C_2)y_3$;

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 + C_1 + C_2)y_3$;

(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$.

提示 (C) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) - y_3$

(D) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$

$y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 都是对应齐次方程的解，二者线性无关．（反证法可证）

上页 下页

例2 已知微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 有三个解 $y_1 = x,\ y_2 = \mathrm{e}^{x},\ y_3 = \mathrm{e}^{2x}$，求此方程满足初始条件 $y(0)=1,\ y'(0)=3$ 的特解 .

解 $y_2 - y_1$ 与 $y_3 - y_1$ 是对应齐次方程的解，且

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{\mathrm{e}^{x} - x}{\mathrm{e}^{2x} - x} \neq \text{常数}$$

因而线性无关， 故原方程通解为

$$y = C_1(\mathrm{e}^{x} - x) + C_2(\mathrm{e}^{2x} - x) + x$$

代入初始条件 $y(0)=1,\ y'(0)=3$， 得 $C_1 = -1,\ C_2 = 2$，

故所求特解为 $y = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}$.

结束 目录 上页 下页

*四、常数变易法

复习： $y' + p(x)y = f(x)$

$$\boxed{y_1(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}}$$

对应齐次方程的通解： $y = C\,y_1(x)$

常数变易法： 设非齐次方程的解为 $y = y_1(x)\,u(x)$

代入原方程确定 $u(x)$.

对二阶非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ ③

情形1. 已知对应齐次方程通解： $y = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$

设③的解为 $y = y_1(x)v_1(x) + y_2(x)\,v_2(x)$ ④

$(v_1(x), v_2(x)$待定$)$

由于有两个待定函数，所以要建立两个方程：

$$y' = y_1' v_1 + y_2' v_2 + y_1 v_1' + y_2 v_2'$$

为使 y'' 中不含 v_1'', v_2''， 令 $y_1 v_1' + y_2 v_2' = 0$ ⑤

于是 $y'' = y_1' v_1' + y_2' v_2' + y_1'' v_1 + y_2'' v_2$

y_1, y_2 是对应齐次方程的解

将以上结果代入方程 ③ ：

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' + \underline{(y_1'' + P y_1' + Q y_1)} v_1$$

$$+ \underline{(y_2'' + P y_2' + Q y_2)} v_2 = f(x)$$

得 $y_1' v_1' + y_2' v_2' = f(x)$ ⑥

结束 上页 下页

定理 可微函数 y_1, y_2 **线性无关**

$$\rightleftarrows \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

由以上定理得：

因 y_1, y_2 线性无关， 故⑤，⑥的系数行列式

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

于是得 $v_1' = -\frac{1}{w} y_2 f, \quad v_2' = \frac{1}{w} y_1 f$

积分得: $v_1 = C_1 + g_1(x),\quad v_2 = C_2 + g_2(x)$

代入③ 即得非齐次方程的通解:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1 g_1(x) + y_2 g_2(x)$$

说明: 将③的解设为

$$y = y_1(x) v_1(x) + y_2(x)\, v_2(x)$$

只有一个必须满足的条件即 方程③, 因此必需再附加一个条件, 方程⑤的引入是为了简化计算.

情形2. 仅知③的齐次方程的一个非零特解 $y_1(x)$.

令 $y = u(x)y_1(x)$, 代入 ③ 化简得

$$y_1 u'' + (2y_1' + P y_1)u' + \underbrace{(y_1'' + P y_1' + Q y_1)}_{=0}u = f$$

令 $z = u'$

$$y_1 z' + (2y_1' + P y_1)z = f \qquad \text{(一阶线性方程)}$$

设其通解为 $\quad z = C_2 Z(x) + z^*(x)$

积分得 $\quad u = C_1 + C_2 U(x) + u^*(x)$

由此得原方程③的通解:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 U(x) y_1(x) + u^*(x) y_1(x)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad ③$$

结束 方程3 上页 下页

例3 已知齐次方程 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 的通解为 $Y=C_1x+C_2\mathrm{e}^x$，求 $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2$ 的通解.

解 将所给方程化为: $y''-\dfrac{x}{x-1}y'+\dfrac{1}{x-1}y=x-1$

令 $y=xv_1(x)+\mathrm{e}^x v_2(x)$, 利用⑤, ⑥建立方程组:

$$\begin{cases} xv_1'+\mathrm{e}^x v_2'=0 \\ v_1'+\mathrm{e}^x v_2'=x-1 \end{cases}$$

解得 $v_1'=-1,\ v_2'=x\mathrm{e}^{-x}$，积分得

$$v_1=C_1'-x,\quad v_2=C_2'-(x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

故所求通解为 $y=C_1'x+C_2'\mathrm{e}^x-(x^2+x+1)$

$$=C_1x+C_2\mathrm{e}^x-(x^2+1)$$

例4 求方程 $x^2y'' - (x+2)(xy' - y) = x^4$ 的通解.

解 对应齐次方程为 $x^2y'' - (x+2)(xy' - y) = 0$

由观察可知它有特解: $y_1 = x$,

令 $y = x\,u(x)$, 代入非齐次方程后化简得

$$u'' - u' = x$$

解上述可降阶微分方程, 可得通解:

$$u = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x - \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$$

故原方程通解为

$$y = x\,u = C_1 x + C_2 x\,\mathrm{e}^x - \left(\tfrac{1}{2}x^3 + x^2\right)$$