

## 习题 4.5

1. 求下列曲线在指定点处的曲率和曲率半径：
  - (1) 曲线  $y = \sin x$  在点  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  处；
  - (2) 曲线  $y = \cosh x$  在点  $(0, 1)$  处；
  - (3) 曲线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  ( $a > 0$ ) 在  $t$  处.
2. 设有对数曲线  $\Gamma: y = \ln x$ .
  - (1) 在  $\Gamma$  上求一点  $P$ , 使得在该点曲率半径最小, 并求出该最小曲率半径.
  - (2) 求  $\Gamma$  与  $x$  轴交点处的曲率圆方程.
3. 设  $y = f(x)$  为过原点的一条已知曲线, 已知  $f'(0) = 2, f''(0) = 1$ . 又  $g(x)$  是二次函数, 它的图像与曲线  $f(x)$  在原点相切且有相同的曲率, 并在原点的邻域内有相同的凹向, 求  $g(x)$ .
4. 应选用直径多大的圆铣刀, 才能使加工后的工件近似于长半轴为 50 单位长, 短半轴为 40 单位长的椭圆上短轴一端附近的一段弧.
5. 一飞机沿抛物线路径  $y = \frac{x^2}{10^4}$  ( $y$  轴垂直向上, 单位: m) 作俯冲飞行, 在坐标原点处飞机的速度为  $v = 200 \text{ m/s}$ , 飞行员体重  $G = 70 \text{ kg}$ , 求飞机俯冲至最底点即原点处时座椅对飞行员的反力.
6. 设  $R$  为抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  上一点的曲率半径,  $s$  为曲线弧长. 证明:

$$3R \frac{d^2 R}{ds^2} - \left( \frac{dR}{ds} \right)^2 - 9 = 0.$$