

本章提要

1. 刚体运动学

(1) 刚体: 内部质点没有相对运动 \rightarrow 形状和大小不变

(2) 刚体定轴转动的描述

刚体上所有质元都绕同一直线作圆周运动;

刚体上各质元的角量(角位移、角速度、角加速度)相同, 而各质元的线量(线位移、线速度、线加速度)大小与质元到转轴的距离成正比.

2. 刚体定轴转动的转动定律

(1) 力矩

对点的力矩: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

对轴的力矩: 力矩 \boldsymbol{M} 在坐标轴上的分量

力矩为零的情况:

- 有心力对力心的力矩一定为零;
- 若力的作用线与某轴平行或与轴相交, 则对该轴的力矩一定为零.

(2) 转动惯量

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{或} \quad J = \int_m r^2 dm$$

(3) 转动定律

$$M = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt}$$

3. 刚体定轴转动的动能定理

(1) 转动动能 $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

(2) 力矩的功 $W = \int M d\theta$

(3) 刚体定轴转动的动能定理

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \Delta \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right)$$

4. 角动量 角动量定理 角动量守恒定律

(1) 角动量的定义

对点的角动量: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$

对轴的角动量: 角动量 \boldsymbol{L} 在坐标轴上的分量.

(2) 刚体对轴的角动量

$$L_z = J\omega$$

(3) 角动量定理

微分形式: $\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$

积分形式: $\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M} dt = \Delta \boldsymbol{L}$

刚体定轴转动的角动量定理:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M} dt = \Delta(J\omega)$$

式中 \boldsymbol{M} 为外力矩之和, 且 \boldsymbol{M} 和 \boldsymbol{L} 是对同一点或同一轴.

(4) 角动量守恒定律

• 对点: 质点所受外力对某定点的力矩之和为零, 则对该点的角动量守恒.

• 对轴: 虽 $\sum M_i \neq 0$, 但如果 $\sum M_i$ 在某一轴的分量为零, 则系统对该轴的角动量守恒, 即

$$\sum J\omega + \sum rmv \sin \varphi' = \text{常数}$$