

## 习题 8.6

1. 计算下列函数在指定点  $M_0$  处沿指定方向  $l$  的方向导数:

(1)  $z = x^2 + y^2$ ,  $M_0(1, 2)$ ,  $l = i + \sqrt{3}j$ ;

(2)  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $M_0(1, 0, 1)$ ,  $l = i + 2j + 2k$ ;

(3)  $u = x \arctan \frac{y}{z}$ ,  $M_0(1, 2, -2)$ ,  $l = (1, 1, -1)$ ;

(4)  $u = xy + yz + zx$ ,  $M_0(2, 1, 3)$ ,  $l$  为从点  $M_0$  到点  $(5, 5, 15)$  的方向.

2. 计算下列函数的梯度:

(1)  $u = x^2 y^3 z^4$ ;

(2)  $u = 3x^2 - 2y^2 + 3z^2$ ;

(3)  $u = z^2 \sqrt{x^2 + 2y^2}$ , 在点  $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ .

3. 数量场  $u = x^2 - 2yz + y^2$  在点  $M(-1, 2, 1)$  处

(1) 沿哪个方向的方向导数最大? 最大值为多少?

(2) 沿哪个方向的方向导数最小? 最小值为多少?

4. 证明:  $\text{grad } u$  为常向量的充要条件是  $u$  为线性函数, 即  $u = ax + by + cz + d$  ( $a, b, c, d$  为常数).