

习题 8.9

1. 求下列函数在指定条件下的极值:

(1) $z = xy$ 在条件 $x + y = 1$ 之下;

(2) $z = x^2 + y^2$ 在条件 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 之下;

(3) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 之下.

2. 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截得一椭圆, 求原点到此椭圆的最长距离和最短距离.

3. 求满足所给条件的点的坐标:

(1) 在平面 $3x - 2z = 0$ 上, 且与点 $A(1, 1, 1)$ 和 $B(2, 3, 4)$ 的距离平方和最小;

(2) 在曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 位于第一卦限部分上, 且该点的切平面与三个坐标平面围成的四面体体积最小;

(3) 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5R^2$ 位于第一卦限部分上, 且使函数 $u = xyz^3$ 取极大值.

4. 求下列曲线或曲面之间的最短距离:

(1) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y - 2 = 0$ 之间;

(2) 曲面 $4z = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ 与平面 $x + y - 4z = 1$ 之间.

5. 要制造一个容积为 $V \text{ m}^3$ 的无盖长方形水箱, 问该水箱的长、宽、高为多少米时, 用料最省?

6. 设生产某种产品必须投入两种要素, x_1 与 x_2 分别为两要素的投入量, Q 为产出量. 若

生产函数为 $Q = 2x_1^\alpha x_2^\beta$, 其中 α, β 为正常数, 且 $\alpha + \beta = 1$. 假定两种要素的价格分别为 p_1 与 p_2 . 试问当产出量为 12 时两要素各投入多少可使得投入的总费用最少?