一、单项选择题 (本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分)

1. 设$f(x)=\cos x(x+|\sin x|)$,则在$x=0$处有(　　　　).

（A）$f'(0)=2$　（B）$f'(0)=1$　（C）$f'(0)=0$　（D）$f(x)$不可导.

2. 设$\alpha(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$\beta(x)=3-3\sqrt[3]{x}$，则当$x\to 1$时（　　　　）.

（A）$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小，但不是等价无穷小；　（B）$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小；

（C）$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小；　（D）$\beta(x)$是比$\alpha(x)$高阶的无穷小.

3. 若 $F(x)=\int_0^x(2t-x)f(t)dt$，其中 $f(x)$ 在区间上 $(-1,1)$ 二阶可导且 $f'(x)>0$，则（　　　）.

（A）函数$F(x)$必在$x=0$处取得极大值；

（B）函数$F(x)$必在$x=0$处取得极小值；

（C）函数$F(x)$在$x=0$处没有极值，但点$(0,F(0))$为曲线$y=F(x)$的拐点；

（D）函数$F(x)$在$x=0$处没有极值，点$(0,F(0))$也不是曲线$y=F(x)$的拐点。

4. 设$f(x)$是连续函数，且$f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$，则$f(x)=$(　　　　　　)

（A）$\dfrac{x^2}{2}$　（B）$\dfrac{x^2}{2}+2$　（C）$x-1$　（D）$x+2$.

二、填空题（本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ____________ .

6. 已知$\dfrac{\cos x}{x}$是$f(x)$的一个原函数,　则$\int f(x)\cdot\dfrac{\cos x}{x}dx=$ ____.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}\left(\cos^2\dfrac{\pi}{n}+\cos^2\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\cos^2\dfrac{n-1}{n}\pi\right)=$ ____________.

8. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2\arcsin x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$ ____________.

三、解答题（本大题有 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

9. 设函数$y=y(x)$由方程$e^{x+y}+\sin(xy)=1$确定，求$y'(x)$以及$y'(0)$.

10. 求$\displaystyle\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx.$

11. 设$f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x\le 0\\ \sqrt{2x-x^2}, & 0<x\le 1\end{cases}$　求$\int_{-3}^{1}f(x)dx.$

12. 设函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，$A$ 为常数. 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

13. 求微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解.

四、 解答题（本大题 10 分）

14. 已知上半平面内一曲线 $y=y(x)\quad(x\geq 0)$，过点 $(0,1)$，且曲线上任一点 $M(x_0,y_0)$ 处切线斜率数值上等于此曲线与 x 轴、y 轴、直线 $x=x_0$ 所围成面积的 2 倍与该点纵坐标之和，求此曲线方程.

五、解答题（本大题 10 分）

15. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A；(2) 求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

六、证明题（本大题有 2 小题，每小题 4 分，共 8 分）

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减，证明对任意的 $q\in[0,1]$，$\int_0^q f(x)\,dx\geq q\int_0^1 f(x)dx$.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\,dx=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx=0$. 证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.（提示：设 $F(x)=\int_0^x f(x)dx$）

一、单项选择题(本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分)

1、D 2、A 3、C 4、C

二、填空题（本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

5. e^6 . 6. $\frac{1}{2}(\frac{\cos x}{x})^2+c$ .7. $\frac{\pi}{2}$. 8. $\frac{\pi}{3}$.

三、解答题（本大题有 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

9. 解：方程两边求导

$$e^{x+y}(1+y')+\cos(xy)(xy'+y)=0$$

$$y'(x)=-\frac{e^{x+y}+y\cos(xy)}{e^{x+y}+x\cos(xy)}$$

$x=0,y=0$，$y'(0)=-1$

10. 解：$u=x^7 \quad 7x^6dx=du$

原式$=\frac{1}{7}\int\frac{(1-u)}{u(1+u)}du=\frac{1}{7}\int(\frac{1}{u}-\frac{2}{u+1})du$

$=\frac{1}{7}(\ln|u|-2\ln|u+1|)+c$

$=\frac{1}{7}\ln|x^7|-\frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C$

11. 解：$\int_{-3}^{1}f(x)dx=\int_{-3}^{0}xe^{-x}dx+\int_{0}^{1}\sqrt{2x-x^2}dx$

$=\int_{-3}^{0}xd(-e^{-x})+\int_{0}^{1}\sqrt{1-(x-1)^2}dx$

$=\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_{-3}^{0}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\theta d\theta$(令$x-1=\sin\theta$)

$=\frac{\pi}{4}-2e^3-1$

12. 解：由 $f(0)=0$，知 $g(0)=0$。

$$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt\overset{xt=u}{=}\frac{\int_0^x f(u)du}{x}\qquad(x\neq0)$$

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}\qquad(x\neq0)$$

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

$\lim\limits_{x\to0}g'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}$，$g'(x)$在$x=0$处连续。

13. 解：$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\ln x$

$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}(\int e^{\int\frac{2}{x}dx}\ln xdx+C)$

$=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+Cx^{-2}$

$y(1)=-\frac{1}{9},C=0$，$y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$

四、 解答题（本大题 10 分）

14. 解：由已知且$y'=2\int_0^x y\,\mathrm{d}x+y$，

将此方程关于x求导得$y''=2y+y'$

特征方程：$r^2-r-2=0$　　解出特征根：$r_1=-1,\quad r_2=2.$

其通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

代入初始条件 $y(0)=y'(0)=1$，得 $C_1=\frac{2}{3}$，$C_2=\frac{1}{3}$

故所求曲线方程为：$y=\frac{2}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}$

五、解答题（本大题 10 分）

15. 解：(1) 根据题意，先设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，切线方程：$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$

由于切线过原点，解出 $x_0=e$，从而切线方程为：$y=\frac{1}{e}x$

则平面图形面积 $A=\int_0^1(e^y-ey)dy=\frac{1}{2}e-1$

（2）三角形绕直线 $x=e$ 一周所得圆锥体体积记为 V_1，则 $V_1=\frac{1}{3}\pi e^2$

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 所围成的图形绕直线 $x=e$ 一周所得旋转体体积为 V_2

$$V_2=\int_0^1\pi(e-e^y)^2dy$$

D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 $V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$

六、证明题（本大题有 2 小题，每小题 4 分，共 12 分）

16. 证明：$\int_0^q f(x)\,dx-q\int_0^1 f(x)dx=\int_0^q f(x)\,dx-q(\int_0^q f(x)\,dx+\int_q^1 f(x)dx)$

$=(1-q)\int_0^q f(x)\,dx-q\int_q^1 f(x)dx$

$$\overset{\xi_1\in[0,q]\,\xi_2\in[q,1]}{=}\quad q(1-q)f(\xi_1)-q(1-q)f(\xi_2)\quad\overset{f(\xi_1)\ge f(\xi_2)}{\ge}\quad 0$$

故有：

$\int_0^q f(x)\,dx\ge q\int_0^1 f(x)dx$ 证毕。

17.

证：构造辅助函数：$F(x)=\int_0^x f(t)dt\quad ,0\le x\le\pi$。其满足在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 上可导。$F'(x)=f(x)$，且 $F(0)=F(\pi)=0$

由题设，有 $0=\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi\cos xdF(x)=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\sin x\cdot F(x)dx$，

有 $\int_0^{\pi} F(x)\sin x dx = 0$，由积分中值定理，存在 $\xi \in (0,\pi)$，使 $F(\xi)\sin\xi = 0$ 即 $F(\xi) = 0$

综上可知 $F(0) = F(\xi) = F(\pi) = 0,\quad \xi \in (0,\pi)$.在区间 $[0,\xi],[\xi,\pi]$ 上分别应用罗尔定理，知存在

$\xi_1 \in (0,\xi)$ 和 $\xi_2 \in (\xi,\pi)$，使 $F'(\xi_1) = 0$ 及 $F'(\xi_2) = 0$，即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

高等数学 I 解答

一、单项选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中）

（本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

1. 当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x),\beta(x)$ 都是无穷小，则当 $x \to x_0$ 时（ D ）不一定是无穷小.

(A) $|\alpha(x)| + |\beta(x)|$　　(B) $\alpha^2(x) + \beta^2(x)$

(C) $\ln[1 + \alpha(x)\cdot\beta(x)]$　　(D) $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$

2. 极限 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ 的值是（ C ）.

（A） 1　　（B） e　　（C） $e^{\cot a}$　　（D） $e^{\tan a}$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x + e^{2ax} - 1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，则 a =（ D ）.

（A） 1　　（B） 0　　（C） e　　（D） -1

4. 设 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处可导，那么 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h) - f(a-2h)}{h} =$（ A ）.

（A） $3f'(a)$　　（B） $2f'(a)$

(C) $f'(a)$　　（D） $\dfrac{1}{3}f'(a)$

二、填空题（本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

5. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+a) - \ln a}{x}\ (a > 0)$ 的值是 $\dfrac{1}{a}$.

6. 由 $e^{xy}+y\ln x=\cos 2x$ 确定函数 $y(x)$，则导函数 $y'=$ $-\dfrac{2\sin 2x+\dfrac{y}{x}+ye^{xy}}{xe^{xy}+\ln x}$.

7. 直线 l 过点 $M(1,2,3)$ 且与两平面 $x+2y-z=0, 2x-3y+5z=6$ 都平行，则直线 l 的方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$.

8. 求函数 $y=2x-\ln(4x)^2$ 的单调递增区间为 （$-\infty$，0）和（1，$+\infty$ ）.

三、**解答题**（本大题有 4 小题，每小题 8 分，共 32 分）

9. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{e}{2}$

10. 已知：$|\vec a|=3$，$|\vec b|=26$，$\vec a\cdot\vec b=30$，求 $|\vec a\times\vec b|$。

解：$\cos\theta=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}=\dfrac{5}{13}$ ，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{12}{13}$ ，$\left|\vec a\times\vec b\right|=72$

11. 设 $f(x)$ 在[a，b]上连续，且 $F(x)=\int_a^x (x-t)f(t)dt \quad x\in[a,b]$ ，试求出 $F''(x)$。

解：$F(x)=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$

$F'(x)=\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_a^x f(t)dt$

$F''(x)=f(x)$

12. 求 $\int x\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}dx.$

解：$\int x\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}dx=-\dfrac{1}{2}\int xd\sin^{-2}x$

$=-\dfrac{1}{2}x\sin^{-2}x+\dfrac{1}{2}\int\sin^{-2}xdx=-\dfrac{1}{2}x\sin^{-2}x-\dfrac{1}{2}\cot x+C$

四、**解答题**（本大题有 4 小题，每小题 8 分，共 32 分）

13. 求 $\int_{\frac{2}{\sqrt 3}}^{2}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

令 $\dfrac{1}{x}=t$

$$原式=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}(-\frac{1}{t^2})dt$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\pi}{6}$$

14. 求函数 $y=\frac{2x}{1+x^2}$ 的极值与拐点.

解：函数的定义域（—∞，+∞）

$$y'=\frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}\qquad y''=\frac{-4x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

令 $y'=0$ 得 $x_1=1$，$x_2=-1$

$y''(1)<0$ $x_1=1$ 是极大值点，$y''(-1)>0$ $x_2=-1$ 是极小值点

极大值 $y(1)=1$，极小值 $y(-1)=-1$

令 $y''=0$ 得 $x_3=0$，$x_4=\sqrt{3}$，$x_5=-\sqrt{3}$

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y''	—	+	—	+

故拐点（$-\sqrt{3}$，$-\frac{\sqrt{3}}{2}$），（0，0）（$\sqrt{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）

15. 求由曲线 $y=\frac{x^3}{4}$ 与 $y=3x-x^2$ 所围成的平面图形的面积.

解: $\frac{x^3}{4}=3x-x^2$，$x^3-12x+4x^2=0$,

$x(x+6)(x-2)=0$, $x_1=-6$, $x_2=0$, $x_3=2$.

$$S=\int_{-6}^{0}(\frac{x^3}{4}-3x+x^2)dx+\int_0^2(3x-x^2-\frac{x^3}{4})dx$$

$$=(\frac{x^4}{16}-\frac{3}{2}x^2+\frac{x^3}{3})\Big|_{-6}^{0}+(\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{16})\Big|_0^2$$

$$=45+2\frac{1}{3}=47\frac{1}{3}$$

16. 设抛物线 $y=4-x^2$ 上有两点 $A(-1,3)$，$B(3,-5)$，在弧 AB 上，求一点 $P(x,y)$ 使 ΔABP 的面积最大.

解：

AB连线方程：$y+2x-1=0$ $\quad |AB|=4\sqrt{5}$

点P到AB的距离 $\frac{|2x+y-1|}{\sqrt{5}}=\frac{-x^2+2x+3}{\sqrt{5}}\quad(-1\le x\le 3)$

ΔABP的面积

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot\frac{-x^2+2x+3}{\sqrt{5}}=2(-x^2+2x+3)$$

$$S'(x)=-4x+4 \quad 当x=1 \quad S'(x)=0$$

$$S''(x)=-4<0$$

当$x=1$时$S(x)$取得极大值也是最大值

此时$y=3$　　所求点为$(1，3)$

另解：由于ΔABC的底AB一定,故只要高最大而过C点的抛物线的切线与AB平行时,高可达到最大值,问题转为求$C(x_0，4-x_0^2)$,使$f'(x_0)=-2x_0=\frac{-5-3}{3+1}=-2$，解得$x_0=1$,所求$C$点为$(1,3)$

六、证明题（本大题 4 分）

17. 设 $x>0$，试证 $e^{2x}(1-x)<1+x$.

证明：设 $f(x)=e^{2x}(1-x)-(1+x),\ x>0$

$f'(x)=e^{2x}(1-2x)-1$，$f''(x)=-4xe^{2x}$，

$x>0,\quad f''(x)\le0$，因此 $f'(x)$ 在（0，+∞）内递减。

在（0，+∞）内，$f'(x)<f'(0)=0,\ f(x)$ 在（0，+∞）内递减，

在（0，+∞）内，$f(x)<f(0)$, 即 $e^{2x}(1-x)-(1+x)<0$

亦即当 x>0 时，$e^{2x}(1-x)<1+x$　　。

高等数学 I A

一、单项选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中）
(本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分)

18. 函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x+1)}{x-1}, & x>1\\ \tan\dfrac{\pi}{2}x, & 0\le x<1\\ x+\sin x, & x<0\end{cases}$$

的全体连续点的集合是（　　　　）

(A)　(-∞,+∞)　　　　(B)　(-∞,1) ∪ (1,+ ∞)

(C)　(-∞,0) ∪ (0,　+∞)　　　　(D)　(-∞,0) ∪ (0,1) ∪ (1,+ ∞)

19. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$，则常数 a,b 的值所组成的数组（a,b）为（　　　　）

（A）（1，0）（B）（0，1）（C）（1，1）（D）（1，-1）

20. 设在[0，1]上 $f(x)$ 二阶可导且 $f''(x)>0$，则（　　　　）

（A）$f'(0)<f'(1)<f(1)-f(0)$　　　　(B) $f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$

(C) $f'(1)<f'(0)<f(1)-f(0)$　　　　（D） $f(1)-f(0)<f'(1)<f'(0)$

21. $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos^4 x}{1+x^2}dx,\ N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx\ \ P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$

则（　　）

（A） $M<N<P$　　　　（B） $P<N<M$

（C） $P<M<N$　　　　（D） $N<M<P$

二　填空题（本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

1. 设 $x>1$　$d(x^2\arctan\sqrt{x-1})=$ （　　　　　　　　　　　　　　）

2. 设 $\int f(x)dx=\sin x+c$, 则 $\int f^{(n)}(x)dx=$ （　　　　　　　　　　　　　　）

3. 直线方程 $\frac{x-4}{2-m}=\frac{y}{n}=\frac{z-5}{6+p}$，与 xoy 平面，yoz 平面都平行，

   那么 m,n,p 的值各为（　　　　　　　　　　　　）

4. $\lim_{x\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}e^{\left(\frac{i}{n}\right)^2}=$ （　　　　　　　　）

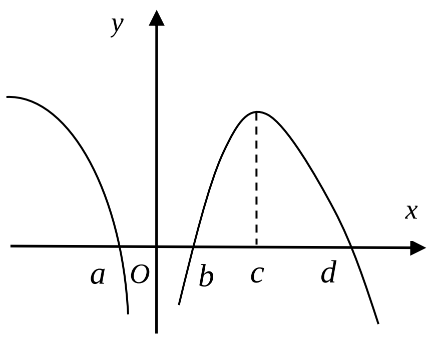
三　解答题（本大题有 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

1. 计算 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, & x>0\\ x & x\le 0\end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 的可导性，并在可导处求出 $f'(x)$

3. 设函数 $y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 连续，在 x≠0 时二阶可导，且其导函数 $f'(x)$ 的图形如图所示，给出

$f(x)$ 的极大值点、极小值点以及曲线 $y=f(x)$ 的拐点。



四　解答题（本大题有 4 小题，每小题 9 分，共 36 分）

1. 求不定积分 $\int(\frac{x+2}{x-1})^2\frac{dx}{x}$

2. 计算定积分 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$

3. 已知直线 $l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ $l_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-3}{4}$，求过直线 l_1 且平行于直线 l_2 的平面方程。

4. 过原点的抛物线 $y=ax^2$ 及 $y=0,x=1$ 所围成的平面图形绕 x 轴一周的体积为 $\dfrac{81}{5}\pi$，确定抛物线方程中的 a，并求该抛物线绕 y 轴一周所成的旋转体体积。

五、综合题（本大题有 2 小题，每小题 4 分，共 8 分）

1. 设 $F(x)=(x-1)^2 f(x)$，其中 $f(x)$ 在区间[1,2]上二阶可导且有 $f(2)=0$，试证明存在 ξ（$1<\xi<2$）使得 $F''(\xi)=0$。

2. $f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t dt \quad (x\geq 0)$

（1） 求 $f(x)$ 的最大值点；

（2） 证明：$f(x)\leq \dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}$

一、单项选择题 B D B C.

二、填空题（本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

5. $dy=\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+4\arctan\sqrt{x-1}\right)dx$.

6. $\int f^{(n)}(x)dx=\int \cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)dx=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+c$.

7. $m=2, p=-6, n\neq 0$.

8. $\dfrac{1}{2}(e-1)$.

三、解答题（本大题有 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

9. **(8 分)**计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\dfrac{x+\sin x}{x}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

10. **(8 分)**设 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ x & x\leq 0 \end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 的可导性，并在可导处求出 $f'(x)$.

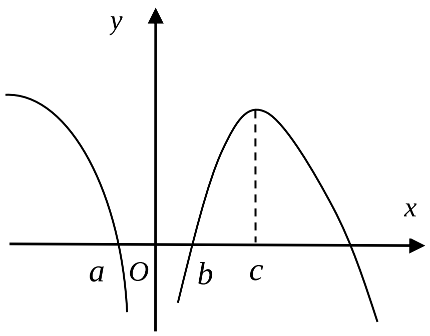
解：当 $x>0,\ f'(x)=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$；当 $x<0,\ f'(x)=1$

$x=0$ $\quad f_+'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta x^2\cos\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=0\quad f_-'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{\Delta x-0}{\Delta x}=1$

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x} & x>0\\ 1 & x<0\end{cases}$$

故 $f(x)$在 x=0 处不可导。

11. (8 分)设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，在 $x\neq 0$ 时二阶可导，且其导函数 $f'(x)$ 的图形如图.给出 $f(x)$ 的极大值点、极小值点以及曲线 $y=f(x)$ 的拐点.



解：极大值点：$x=a\ x=d$ 极小值点：$x=b$

拐点 $(0,f(0)),(c,f(c))$

四 解答题（本大题有 4 小题，每小题 9 分，共 36 分）

12. (9 分)求不定积分 $\displaystyle\int\frac{(x-2)^2}{x(x-1)^2}dx$.

解：原式= $\displaystyle\int\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{-3}{x-1}\right)dx$

$=4\ln|x|-\dfrac{1}{x-1}-3\ln|x-1|+c$

13. (9 分)计算定积分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$.

解：原式= $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\ln x)dx+\int_1^e\ln x dx$

$=\left[-(x\ln x-x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[x\ln x-x\right]_1^e$

$=2-\dfrac{2}{e}$

14. (9 分)已知直线 $l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{3}$，$l_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-3}{4}$,求过直线 l_1 且平行于直线 l_2 的平面方程.

解：$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=(1,2,3)\times(2,5,4)=(-7,2,1)$

取直线 l_1 上一点 $M_1(0,0,1)$ 于是所求平面方程为

$-7x+2y+(z-1)=0$

15. (9 分)过原点的抛物线 $y=ax^2\quad(a>0)$ 及 y=0, x=1 所围成的平面图形绕 x 轴一周的体积为 $\frac{81}{5}\pi$．求 a，并求该抛物线绕 y 轴一周所成的旋转体体积.

解：$$V=\int_0^1\pi(ax^2)^2dx=\pi a^2\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{\pi a^2}{5}$$

由已知得 $\frac{\pi a^2}{5}=\frac{81\pi}{5}$ 故 $a=9$ 抛物线为：$y=9x^2$

绕 y 轴一周所成的旋转体体积：$$V=\int_0^1 2\pi x\cdot 9x^2dx=18\pi\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{9}{2}\pi$$

五　综合题（每小题 4 分，共 8 分）

16. (4 分)设 $F(x)=(x-1)^2f(x)$，其中 $f(x)$ 在区间[1,2]上二阶可导且有 $f(2)=0$.

证明：存在 ξ（$1<\xi<2$）使得 $F''(\xi)=0$。

证明：由 $f(x)$ 在[1，2]上二阶可导，故 $F(x)$在[1，2]二阶可导，因 $f(2)$=0,故 $F(1)=F(2)=0$

在[1，2]上用罗尔定理，至少有一点 $x_0,(1<x_0<2)$ 使 $F'(x_0)=0$

$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$ 得 $F'(1)=0$

在[1，x_0]上对 $F'(x)$ 用罗尔定理，至少有点 $\xi\ (1<\xi<x_0<2)$ $F''(\xi)=0$

17. (4 分).

解：（1） $x=1$ 为 $f(x)$ 的最大值点。

$f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x$，当 $0<x<1$，$f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x>0$；当 $x>1$，$f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x\le 0$。$f(1)$ 为极大值，也为最大值。

（2） $f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\,dt\le f(1)$

$$f(1)=\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}t\,dt\le\int_0^1(t-t^2)t^{2n}dt=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$

高等数学上 B（07）解答

一、填空题：（共 24 分，每小题 4 分）

1. $y=\sin[\sin(x^2)]$，则 $\frac{dy}{dx}=$ $2x\cos[\sin(x^2)]\cos x^2$。

2. 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{1+x^2}dx=\pi$，$a$=__1______。

3. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx=2-\frac{2}{e}$。

4. $y=e^x$ 过原点的切线方程为 $y=ex$。

5．已知 $f(x)=e^x$，则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx = x+c$。

6．$a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$

时，点 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点。

二、计算下列各题：（共 36 分，每小题 6 分）

1．求 $y=(\sin x)^{\cos x}$ 的导数。

解：$y'=(e^{\cos x\ln\sin x})'=e^{\cos x\ln\sin x}(-\sin x\ln\sin x+\cot x\cos x)$

2．求 $\int \sin\ln x dx$。

解：$\int \sin\ln x dx = x\sin\ln x-\int \cos\ln x dx$

$= x\sin\ln x - x\cos\ln x-\int \sin\ln x dx$

$=\frac{1}{2}(x\sin\ln x - x\cos\ln x)+C$

3．求 $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2-1}}dx$。

解：$\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}dx+\int \frac{5}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$=\sqrt{x^2-1}+5\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$

4．设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\ge 0 \\ x^k+1, & x<0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，则 k 为何值？

解：$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{x^k}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}x^{k-1}$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=1$

$k=1$

5．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$。

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}}\frac{1}{n}$$

$=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ =

$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$

6．求过点 $(2,2,0)$ 且与两直线 $\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}2x-y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}$ 平行的平面方程。

解：两直线的方向向量分别为 $s_1=(1,2,-1)\times(1,-1,1)=(1,-2,-3),\ s_2=(2,-1,1)\times(1,-1,1)=(0,-1,-1)$，平面的法向量 $n=(1,-2,-3)\times(0,-1,-1)=(-1,1,-1)$。

平面方程为 $x-y+z=0$。

三、解答下列各题：（共 28 分，每小题 7 分）

1．设 $\begin{cases}x=R\cos t\\y=R\sin t\end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

解：$\frac{dy}{dx}=-\cot t$

$\frac{d^2y}{dx^2}=(-\cot t)'_t\frac{1}{-R\sin t}=-\frac{1}{R\sin^3 t}$

2．求 $F(x)=\int_0^x t(t-1)dt$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值和最小值。

解：$F'(x)=x(x-1)=0, x=0, x=1$

$F(0)=0, F(1)=\int_0^1 t(t-1)dt=-\frac{1}{6},$

$F(-1)=\int_0^{-1} t(t-1)dt=-\frac{5}{6}, F(2)=\int_0^2 t(t-1)dt=\frac{2}{3}$

最大值为 $\frac{2}{3}$，最小值为 $-\frac{5}{6}$。

3．设 $y=y(x)$ 由方程 $x(1+y^2)-\ln(x^2+2y)=0$ 确定，求 $y'(0)$。

解：方程 $x(1+y^2)-\ln(x^2+2y)=0$ 两边同时对 x 求导

$(1+y^2)+2xyy'-\frac{2x+2y'}{x^2+2y}=0$

将 $x=0, y=\frac{1}{2}$ 代入上式

$y'(0)=\frac{5}{8}$

4．求由 $y=x^2$ 与 $y^2=x$ 围成的图形绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积。

解：$V=\int_0^1 \pi(y-y^4)dy$

$=\frac{3}{10}\pi$

四、证明题：(共 12 分，每小题 6 分)

1．证明过双曲线 $xy=1$ 任何一点之切线与 OX, OY 二个坐标轴所围成的三角形的面积为常数。

证明：双曲线 $xy=1$ 上任何一点 (x,y) 的切线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{x^2}(X-x)$$

切线与 x 轴、y 轴的交点为 $(0,y+\frac{1}{x}),(2x,0)$

故切线与 OX, OY 二个坐标轴所围成的三角形的面积为 $s=x(y+\frac{1}{x})=2$

2．设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，证明：至少存在一点 ξ 使得

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx=g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx$$

证明：令 $F(x)=\int_x^b g(x)dx\int_a^x f(x)dx$

$F(a)=F(b)=0$，由 Rolle 定理，存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx=g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx$$

高等数学上解答（07）

一、单项选择题（每小题 4 分，共 16 分）

1．$f(x)=x\cos xe^{-|\sin x|}\ (-\infty<x<+\infty)$ 是__A____。

（A）奇函数；（B）周期函数；（C）有界函数；（D）单调函数

2．当 $x\to 0$ 时，$f(x)=(1-\cos x)\ln(1+2x^2)$ 与__B__是同阶无穷小量。

（A）x^3；（B）x^4；（C）x^5；（D）x^2

3．直线 $\begin{cases}x-2y+z=0\\x+y-2z=0\end{cases}$ 与平面 $x+y+z=1$ 的位置关系是__C__。

（A）直线在平面内；（B）平行；（C）垂直；（D）相交但不垂直。

4．设有三非零向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$。若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ \vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$，则 $\vec{b}\cdot\vec{c}=$__A____。

（A）0；（B）-1；（C）1；（D）3

二、 填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1．曲线 $y=\ln x$ 上一点 P 的切线经过原点 $(0,0)$，点 P 的坐标为 $(e,1)$。

2．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2(e^x-1)}=\frac{1}{3}$。

3．方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$，则 $y'(0)=$__0____。

4．曲线 $y=x^2$、$x=1$ 与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $\frac{\pi}{5}$。

三、解下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1．已知 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}(\frac{t-\sin^2 x}{t})^t$，求 $f'(x)$。

解：$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}(\frac{t-\sin^2 x}{t})^t=e^{-\sin^2 x}$

$f'(x)=-e^{-\sin^2 x}\sin 2x$

2．求不定积分 $\int[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}]dx$。

解：$\int[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}]dx=\int\ln(\ln x)dx+\int\frac{1}{\ln x}dx$

$=x\ln(\ln x)-\int\frac{1}{\ln x}dx+\int\frac{1}{\ln x}dx$

$=x\ln(\ln x)+C$

3．计算定积分 $\int_{-1}^{1}x^2(\frac{\sin x}{1+x^4}+\sqrt{1-x^2})dx$。

解：$\int_{-1}^{1}x^2(\frac{\sin x}{1+x^4}+\sqrt{1-x^2})dx=\int_{-1}^{1}(x^2\sqrt{1-x^2})dx+\int_{-1}^{1}x^2\frac{\sin x}{1+x^4}dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^2\sqrt{1-x^2})dx+0$

$\overset{x=\sin t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t dt$

$=\frac{\pi}{8}$

4．求不定积分 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$。

解：$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{1}{1+\cos x}dx+\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$=\frac{1}{2}\int\sec^2\frac{x}{2}dx-\int\frac{d\cos x}{1+\cos x}$

$=\tan\frac{x}{2}-\ln|1+\cos x|+C$

5．已知 $f'(\ln x)=x$，且 $f(1)=e+1$，求 $f(x)$。

解：令 $\ln x=t$，$f'(t)=e^t$

$f(x)=e^x+C$

$f(1)=e+1$，$f(x)=e^x+1$

四、（8 分）设 $f(x)$ 对任意 x 有 $f(x+1)=2f(x)$，且 $f'(0)=-\frac{1}{2}$。求 $f'(1)$。

解：由 $f(x+1)=2f(x)$，$f(1)=2f(0)$

$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\overset{x=t+1}{=}\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t+1)-f(1)}{t}$

密封装订线

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2f(t)-2f(0)}{t}$$
$$=2f'(0)=-1$$

五、（8 分）证明：当 $x>1$ 时，$(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$。

证明：只需证明 $(x+1)\ln x>x-1$。

令 $f(x)=(x+1)\ln x-x+1$

$f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}>0$，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增。

$f(1)=0$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$。即 $(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$。

六、（8 分）

已知 $F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f''(t)dt$，$f''(x)$ 连续，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^2 为等价无穷小量。求 $f''(0)$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F'(x)}{x^2}=1$

$$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f''(t)dt=x^2\int_0^x f''(t)dt-\int_0^x t^2f''(t)dt$$

$$F'(x)=2x\int_0^x f''(t)dt+x^2f''(x)-x^2f''(x)=2x\int_0^x f''(t)dt$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f''(t)dt}{x^2}=2f''(0)$$

$$f''(0)=\frac{1}{2}$$

七、（8 分）

设有曲线 $y=4x^2\ \ (0\le x\le 1)$ 和直线 $y=c\ \ (0<c<4)$。记它们与 y 轴所围图形的面积为 A_1，它们与直线 $x=1$ 所围图形的面积为 A_2。问 c 为何值时，可使 $A=A_1+A_2$ 最小？并求出 A 的最小值。

解：$A=A_1+A_2=\int_0^c \dfrac{\sqrt{y}}{2}dy+\int_c^4 (1-\dfrac{\sqrt{y}}{2})dy$

$A'(c)=\sqrt{c}-1$

令 $A'(c)=\sqrt{c}-1=0$，得 $c=1$。

$A''(1)=\dfrac{1}{2}>0$，$c=1$ 为最小值点。

$$\min A=\int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{2}dy+\int_1^4 (1-\frac{\sqrt{y}}{2})dy=1$$

八、设 $f(x)$ 在 (a,b) 内的点 x_0 处取得最大值，且 $|f''(x)|\le K\ \ (a\le x\le b)$。

证明：$|f'(a)|+|f'(b)|\le K(b-a)$

证明：$f'(x_0)=0$

在$[a,x_0]$对$f'(x)$应用拉格朗日定理

$$f'(x_0)-f'(a)=f''(\xi_1)(x_0-a)\quad (a<\xi_1<x_0)$$

$$f'(a)=f''(\xi_1)(a-x_0),\ |f'(a)|\le K(x_0-a)$$

在$[x_0,b]$对$f'(x)$应用拉格朗日定理

$$f'(b)-f'(x_0)=f''(\xi_2)(b-x_0)\ \ (x_0<\xi_2<b)$$

$$f'(b)=f''(\xi_2)(b-x_0),\ |f'(b)|\le K(b-x_0)$$

一、单项选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中）
(本大题分 5 小题，每小题 2 分，共 10 分)

1、

设$I=\int\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\,\mathrm{d}\,x$, 则$I=$

$(A)\ \ln(e^x-1)+c\quad (B)\ \ln(e^x+1)+c;$

$(C)\ 2\ln(e^x+1)-x+c;$

$(D)\quad x-2\ln(e^x+1)+c.$

答(　　)

2、

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{e^{\frac{1}{n}}\cdot e^{\frac{2}{n}}\cdots e^{\frac{n-1}{n}}\cdot e}=$$

$(A)1\quad (B)\sqrt{e}\quad (C)e\quad (D)e^2$

答（　　）

3、

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$的n阶麦克劳林展开式的拉格朗日型余项$R_n(x)=(\quad)$(式中$0<\theta<1$)

$(A)\ \dfrac{1}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}}x^{n+1}\qquad (B)\ \dfrac{(-1)^n}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$

$(C)\ \dfrac{1}{(1-\theta x)^{n+2}}x^{n+1}\qquad (D)\ \dfrac{(-1)^n}{(1-\theta x)^{n+2}}x^{n+1}$

答(　)

4、

设$f(x)$在$x=0$的某邻域内连续, 且$f(0)=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则点$x=0$

(A)　是$f(x)$的极大值点　　(B)　是$f(x)$的极小值点

(C)　不是$f(x)$的驻点　　(D)　是$f(x)$的驻点但不是极值点

答(　)

5、

曲线$y=x^2-2x+4$上点$M_0(0,4)$处的切线M_0T与曲线$y^2=2(x-1)$所围成的平面图形的面积$A=$

$(A)\ \dfrac{21}{4}\qquad (B)\ \dfrac{4}{9}\quad (C)\ \dfrac{9}{4}\quad (D)\ \dfrac{13}{12}$

答(　　)

二、填空题（将正确答案填在横线上）
(本大题分 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1、设 $y=\ln\sqrt{1+\tan(x+\frac{1}{x})}$，则 $y'=$ ________

2、用切线法求方程 $x^3-2x^2-5x-1=0$ 在 $(-1,0)$ 内的近似根时，选 x_0 并相应求得下一个近似值 x_1。则 x_0，x_1 分别为 ________________。

3、设空间两直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ 与 $x+1=y-1=z$ 相交于一点，则 $\lambda=$ ____。

4、$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x+e^{2ax}-1}{x}, & 当x\neq 0\\ a, & 当x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ __________.

5、$\int_0^b |x|dx=$ ________________，其中 b 是实数.

三、解答下列各题
(本 大 题 4 分)

设平面 π 与两个向量 $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}$ 和 $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ 平行，证明：向量 $\vec{c}=2\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$ 与平面 π 垂直。

四、解答下列各题
(本 大 题 8 分)

讨论积分 $\int_0^1\frac{dx}{x^p}$ 的敛散性.

五、解答下列各题
(本 大 题 11 分)

导出计算积分 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{x^2+1}}$ 的递推公式，其中 n 为自然数。

六、解答下列各题
(本 大 题 4 分)

求过 $P_0(4,2,-3)$ 与平面 $\pi: x+y+z-10=0$ 平行且与直线 $l_1:\begin{cases}x+2y-z-5=0\\ z-10=0\end{cases}$ 垂直的直线方程。

七、解答下列各题
(本 大 题 6 分)

计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos 2x}{x\tan x}$

八、解答下列各题
(本 大 题 7 分)

试求 $I_n=\int_1^e(\ln x)^n dx$ 的递推公式（n 为自然数），并计算积分 $\int_1^e(\ln x)^3 dx$.

九、解答下列各题
(本 大 题 8 分)

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微，但无界，试证明 $f'(x)$ 在 (a,b) 内无界。

十、解答下列各题
(本 大 题 5 分)

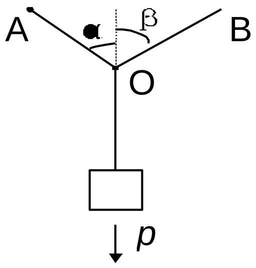
设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0,\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(u_0)$。

十一、解答下列各题
(本 大 题 4 分)

在半径为R的球内,求体积最大的内接圆柱 体的高

十二、解答下列各题
(本 大 题 5 分)

重量为 p 的重物用绳索挂在 A,B 两个钉子上，如图。设 $\cos\alpha=\dfrac{12}{13},\cos\beta=\dfrac{4}{5}$，求 A,B 所受的拉力 f_1,f_2。



十三、解答下列各题
(本 大 题 6 分)

一质点,沿抛物线$y=x(10-x)$运动,其横坐标随着时间t的变化规律为$x=t\sqrt{t}$(t的单位是秒,x的单位是米),求该质点的纵坐标在点$M(8，6)$处的变化速率.

十四、解答下列各题
(本 大 题 7 分)

设曲线$x=\sqrt{y}$,$x=\sqrt{2-y^2}$ 及$y=0$,围成一平面图形.(1)求这个平面图形的面积；(2)求此平面图形绕x轴旋转而成的立体的体 积.

、单项选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中）
(本大题分 5 小题，每小题 2 分，共 10 分)

1、C
2、答：B
3、 C 10 分
4、(B)
5、C

二、填空题（将正确答案填在横线上）
(本大题分 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1、 $\dfrac{(1-\frac{1}{x^2})\sec^2(x+\frac{1}{x})}{2(1+\tan(x+\frac{1}{x}))}$ 10 分

2、 $x_0=0$ 5 分

$x_1=-\dfrac{1}{5}$ 10 分

3、$\frac{5}{4}$

4、-1

5、$\begin{cases} -\frac{b^2}{2}, & b<0 \\ 0, & b=0 \\ \frac{b^2}{2}, & b>0 \end{cases}$ 10 分

三、解答下列各题

(本 大 题 4 分)

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}=\{-4,12,2\}$$

平面法向量 4 分

$\vec{n}=-2\vec{c}$

$\vec{n}$ 与 $\vec{c}$ 平行 8 分

从而平面与 $\vec{c}$ 垂直。 10 分

四、解答下列各题

(本 大 题 8 分)

当$p\neq 1$时，

$$\int_0^1\frac{dx}{x^p}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^p}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{x^{p-1}}\right)\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-p}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\right)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{1-p}, & p<1 \\ +\infty, & p>1\end{cases}$$ 5 分

当$p=1$时，

$$\int_0^1\frac{dx}{x^p}=\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln x\Big|_\varepsilon^1=+\infty$$ 7 分

$\int_0^1\frac{dx}{x^p}$当$p<1$时收敛，当$p\geq 1$时发散. 10 分

五、解答下列各题

(本 大 题 11 分)

解:〈法一〉

$$I_n=\int\frac{1}{x^{n+1}}d\sqrt{x^2+1}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}}+(n+1)\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+2}}dx$$ 3 分

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}}+(n+1)\int\frac{1+x^2}{x^{n+2}\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}}+(n+1)\int\frac{1}{x^{n+2}\sqrt{x^2+1}}dx+(n+1)\int\frac{dx}{x^n\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n-1}}+(n+1)I_{n+2}+(n+1)I_n$$

故$I_{n+2}=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{(n+1)x^{n+1}}-\frac{n}{n+1}I_n$ 7 分

$$I_1=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x}\right|+c$$

$\therefore I_n=\frac{-\sqrt{x^2+1}}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{2-n}{n-1}I_{n-2}(n\geq 2)$ $I_0=\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+c$

〈法二〉令$x=\tan t$ $dx=\sec^2 tdt$ 10 分

$\therefore I_n=\int\frac{\sec^2 tdt}{\tan^n t\sec t}=\int\frac{\sec t}{\tan^n t}dt$ 3 分

$$=\int\frac{d\sec t}{\tan^{n+1} t}$$

$$=\frac{\sec t}{\tan^{n+1} t}+\int(n+1)\frac{\sec^3 t}{\tan^{n+2} t}dt$$

$=\frac{\sec t}{\tan^{n+1} t}+\int(n+1)\frac{\sec^3 t}{\tan^{n+2} t}dt+(n+1)\int\frac{\sec t}{\tan^n t}dt$ 5 分

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}}+(n+1)(I_{n+2}+I_n)$$

$$\therefore I_{n+2}=-\frac{n}{n+1}I_n-\frac{\sqrt{x^2+1}}{(n+1)x^{n+1}}$$

$$\therefore I_n=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{2-n}{n-1}I_{n-2}(n\geq 2)$$

7 分

$$I_1=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x}\right|+c$$

$$I_0=\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+c.$$

10 分

六、解答下列各题

（ 本 大 题 4 分 ）

π 的法向量为$\vec{n}=\{1,1,1\}$

l_1的方向向量为
$$\vec{S_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\{2,-1,0\}$$
3 分

所求直线方向向量为
$$\vec{S}=\vec{n}\times\vec{S_1}=\{1,2,-3\}$$
7 分

从而所求直线方程为
$$\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-3}$$
10 分

七、解答下列各题

(本 大 题 6 分)

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos^2 2x}{x\tan x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos 2x)}$$
3 分
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(\frac{x\sin x}{x\tan x}+\frac{\sin^2 2x}{x\tan x})$$
7 分
$$=\frac{1}{2}(1+4)=\frac{5}{2}$$
10 分

八、解答下列各题

(本 大 题 7 分)

$$I_n=\int_1^e(\ln x)^n dx$$
$$=x\ln^n x\Big|_1^e-n\int_1^e(\ln x)^{n-1}dx$$
$$=e-nI_{n-1}$$
4 分

$$于是\quad I_n=e-ne+n(n-1)e-\cdots+(-1)^n n!\int_1^e dx$$

$$=e-ne+n(n-1)e-\cdots+(-1)^{n-1}n(n-1)\cdots 2e+(-1)^n n!(e-1)$$
7 分

$$所以\quad \int_1^e(\ln x)^3 dx=e-3e+6e-6(e-1)$$
$$=6-2e$$
10 分

九、解答下列各题

(本 大 题 8 分)

证明:反证设$f'(x)$在(a,b)内有界,即$\exists M>0$则$\forall x\in(a,b)$

有$|f'(x)|\le M$

2 分

取$x_0\in(a,b)$则对$\forall x\in(a,b),x\ne x_0$在以$x_0$与$x$为端点的区间上$f(x)$

满足拉格朗日中值定理的条件,则至少存在ξ介于x_0与x之间,使

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$$
5 分

即$|f(x)|\le|f(x_0)|+|f'(\xi)|(b-a)$

$=|f(x_0)|+M(b-a)$记为K

8 分

即$f(x)$在(a,b)内有界与题意矛盾，故假设不正确，即$f'(x)$在(a,b)内无界.

10 分

十、解答下列各题

(本 大 题 5 分)

由$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$

任给$\varepsilon>0$，存在$\eta>0$

使当$|u-u_0|<\eta$时，恒有$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$ 　　4 分

又$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，取$\varepsilon_1=\eta$，存在$\delta>0$

使当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|\varphi(x)-u_0|<\eta$ 　　8 分

故当$0<|x-x_0|<\delta$时，就有

$|f[\varphi(x)]-f(u_0)|<\varepsilon$成立

因此$\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(u_0)$

10 分

十一、解答下列各题

(本 大 题 4 分)

设内接圆柱体的高为h，则圆柱体的底面半径$r=\sqrt{R^2-(\frac{h}{2})^2}$

其体积为 　　$V=\pi h(R^2-\frac{h^2}{4})\quad 0<h<2R$ 　　4 分

$$V'=\pi(R^2-\frac{3}{4}h^2)$$

唯一驻点 　$h=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$

$$V''=-\frac{3}{2}\pi h<0$$

8 分

故$h=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$时，圆柱体体积最大

10 分

十二、解答下列各题

(本 大 题 5 分)

按点O受力平衡，应有

$\begin{cases} f_1\cos\alpha+f_2\cos\beta=p \\ f_1\sin\alpha-f_2\sin\beta=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} \frac{12}{13}f_1+\frac{4}{5}f_2=p & (4分) \\ \frac{5}{13}f_1-\frac{3}{5}f_2=0 & (8分) \end{cases}$

解得 $f_1=\frac{39}{56}p,\qquad f_2=\frac{25}{56}p$ 　　(10 分)

十三、解答下列各题

(本 大 题 6 分)

当 　$x=8$时，$t=4$ 　　2 分

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=4}=\left.\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\right|_{t=4}=3(米/秒)$$ 4 分

$$\frac{dy}{dt}=(10-2x)\cdot\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8,\ x(t)=3}=-18(米/秒)$$

答：质点的纵坐标在$M(8，16)$处的变化率为$-18(米/秒)$ 10 分

十四、解答下列各题
(本 大 题 7 分)

解:(1) $x=\sqrt{y}\quad x=\sqrt{2-y^2}$ 交点(1,1).

$$S=\int_0^1 x^2dx+\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}+\left.\left(\frac{x}{2}\sqrt{2-x^2}+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right|_1^{\sqrt{2}}$$ 3 分

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$$

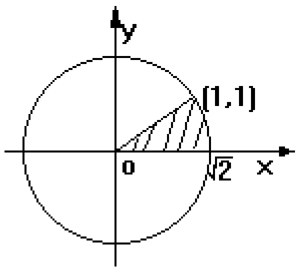
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6},$$ 5 分

(2) $V_x=\pi\int_0^1 x^4dx+\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)dx$ 8 分

$$=\frac{\pi}{5}+2(\sqrt{2}-1)\pi-\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

$$=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{22}{15}\right)\pi.$$

10 分



一、单项选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中）
(本大题分 4 小题，每小题 3 分，共 12 分)

1、

$\lim\limits_{x\to\pi}(1-\cos x)^{2\sec x}=($ $)$

$A.\ e^{-2}$ $B.\ e^{2}$ $C.\ 4$ $D.\ \frac{1}{4}$

答（ ）

2、

设$f(x),g(x)$在x_0的某去心邻域内可导,$g'(x)\neq 0$且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$,

则$(I)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$与$(\mathrm{II})\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$关系是:

(A)(I)是(II)的充分但非必要条件

(B)(I)是(II)的必要但非充分条件

(C)(I)是(II)的充要条件

(D)(I)不是(II)的充分条件，也不是必要条件

答（ ）

3、

设$f(x)$在$[a，b]$连续，$F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}t(a\le x\le b)$，则$F(x)$是$f(x)$的

(A). 原函数一般表示式　　(B). 一个原函数

(C). 在$[a，b]$上的积分与一个常数之差　　(D). 在$[a，b]$上的定积分

答（ ）

4、

若已知$x\to 0$时，$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f''(t)\,\mathrm{d}t$的导数与$x^2$是等价无穷小，则$f''(0)=$

$(A)1$　　$(B)\ \dfrac{1}{2}$

$(C)\ -1$　　$(D)\ -\dfrac{1}{2}$

答（ ）

二、填空题（将正确答案填在横线上）

(本大题分 4 小题，每小题 3 分，共 12 分)

1、$y=xe^{\frac{1}{x^2}}$的铅直渐近线是__________________

2、$\int\tan^2 x\,\mathrm{d}\,x=$__________.

3、

设$f(x)$为以T为周期的连续周期函数，则$f(x)$在$[a，a+T](a\neq 0)$上的定积分与$f(x)$在$[0，T]$上的定积分的大小关系 是_______________

4、直线$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+7}{5}$与平面$3x+y-9z+17=0$的交点为__________________。

三、解答下列各题

(本大题共 2 小题，总计 12 分)

1、(本小题 6 分)

写出$f(x)=\ln(1-x)(|x|<1)$带拉格朗日型余项的n阶麦克劳林展开式.

2、(本小题 6 分)

指出锥面$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=z^2$被平行于$zox$平面的平面所截得的曲线的名称。

四、解答下列各题

(本大题共 5 小题，总计 24 分)

1、(本小题 1 分)

求$\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$

2、(本小题 2 分)

计算$\int_0^4(x+\sqrt{x})dx.$

3、(本小题 5 分)

求$\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x.$

4、(本小题 5 分)

求$\int_1^4\frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}.$

5、(本小题 11 分)

设 $y(x)=(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$，$(\frac{1}{2}<x<1)$求$dy$.

五、解答下列各题

(本大题共 2 小题，总计 14 分)

1、(本小题 7 分)

试证：$F(t)=\int_0^{\pi}\ln(t^2+2t\cos x+1)dx$为偶函数.

2、(本小题 7 分)

试证：对角线向量是$\vec{A}=\{3,-4,-1\},\vec{B}=\{2,3,-6\}$的平行四边形是菱形，并计算其边长。

六、解答下列各题

(本大题共 3 小题，总计 20 分)

1、(本小题 6 分)

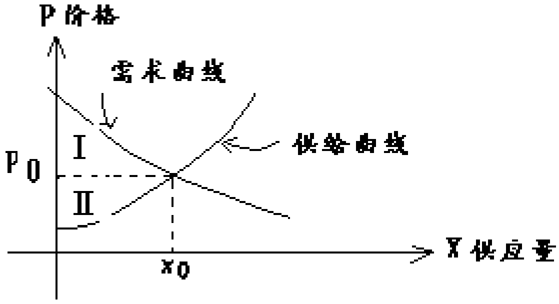
在抛物线$y=x^2$找出到直线$3xk-4y=2$的距离为最短的点

2、(本小题 6 分)

设曲线的方程为$y=f(x)$.已知在曲线的任意点(x,y)处满足$y''=6x$,且在曲线上的$(0,-2)$点处的曲线的切线的方程为$2x-3y=6$,求此曲线的方程.

3、(本小题 8 分)

经济学上,均衡价格p_0定义为供给曲线与需求曲线相交时的价格,消费者剩余定义为需求曲线与直线$p=p_0$间的面积(右图区域I),生产者剩余定义为供曲线与直线$p=p_0$间的面积(右图区域II).已知需求曲线方程$p(x)=1000-0.4x^2$,供给曲线方程为$p(x)=42x$.求均衡点及消费者剩余和生产者剩余.



七、解答下列各题
(本大题共 2 小题，总计 6 分)
1、(本小题 1 分)

设$f(x)$在$x=x_0$处连续，$g(x)$在x_0处不连续，

试判定$F(x)=f(x)+g(x)$在x_0处的连续性.

2、(本小题 5 分)

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，试判定$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$是否为无穷大?

一、单项选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中）
(本大题分 4 小题，每小题 3 分，共 12 分)

1、D 10 分

2、答 (B) 10 分

3、B 10 分

4、B 10 分

二、填空题（将正确答案填在横线上）
(本大题分 4 小题，每小题 3 分，共 12 分)

1、$x=0$

2、$=\tan x-x+c.$

3、= 10 分

4、$(2,4,3)$

三、解答下列各题
(本大题共 2 小题，总计 12 分)
1、(本小题 6 分)

$$f(x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$ 7 分

$$R_n(x)=-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(1-\xi)^{n+1}}x^{n+1},\xi\text{介于}0\text{与}x\text{之间}$$ 10 分

2、(本小题 6 分)

用$y=y_0$所截得的曲线为$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-z^2=-\dfrac{y_0^2}{16}\\ y=y_0\end{cases}$ 4 分

故$y_0=0$时为一对相交直线

$y_0\neq 0$时为双曲线 10 分

四、解答下列各题
(本大题共 5 小题，总计 24 分)
1、(本小题 1 分)

$$\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c.$$ 10 分

2、(本小题 2 分)

$$\text{原式}=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^4$$ 7 分

$$=\frac{40}{3}$$ 10 分

3、(本小题 5 分)

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}(\ln x)$$ 3 分

$$=\int \sqrt{1+\ln x}\,\mathrm{d}(1+\ln x)-\int \frac{\mathrm{d}(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}}$$ 7 分

$$=\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{1+\ln x}+c.$$ 10 分

4、(本小题 5 分)

令 $\sqrt{x}=t$

原式 $=\int_1^2 \frac{2t}{t^2(1+t)}dt$ 4 分

$$=2\int_1^2 \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$ 6 分

$$=2\left[\ln t-\ln(t+1)\right]_1^2$$ 8 分

$$=2\ln\frac{4}{3}$$ 10 分

5、(本小题 11 分)

$dy=y'(x)dx$ 2 分

$$=(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}\left[\frac{\pi}{2}\sec^2\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)-\frac{1}{2-x}\tan\frac{\pi x}{2}\right]dx$$ 10 分

五、解答下列各题
(本大题共 2 小题，总计 14 分)
1、(本小题 7 分)

$$F(-t)=\int_0^{\pi}\ln(t^2-2t\cos x+1)dx$$ 2 分

令 $x=\pi-u$

$$F(-t)=-\int_{\pi}^{0}\ln(t^2+2t\cos u+1)du$$ 6 分

$$=\int_0^{\pi}\ln(t^2+2t\cos x+1)dx$$ 8 分

$$=F(t)$$ 10 分

2、(本小题 7 分)

因为 $\vec{A}\cdot\vec{B}=3\times 2+(-4)\times 3+(-1)\times(-6)=0$，故 $\vec{A}\perp\vec{B}$
因此这个平行四边形的对角线是垂直的，于是它是菱形。 （6 分）

边长= $\sqrt{\left(0.5\times|\vec{A}|\right)^2+\left(0.5\times|\vec{B}|\right)^2}$

$$=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left[3^2+(-4)^2+(-1)^2\right]^{1/2}\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}\left[2^2+3^2+(-6)^2\right]^{1/2}\right\}^2}$$

$=\frac{5}{2}\sqrt{3}$ （10 分）

六、解答下列各题

(本大题共 3 小题，总计 20 分)

1、(本小题 6 分)

设抛物线上任点(x,x^2),到直线的距离为

$$d=\frac{|3x-4x^2-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{1}{5}(4x^2-3x+2)$$ 4 分

$$d'=\frac{1}{5}(8x-3)$$

唯一驻点 $x=\frac{3}{8}$

$$d''=\frac{8}{5}>0$$

故当$x=\frac{3}{8}$时,d最小 8 分

即点$\left(\frac{3}{8},\ \frac{9}{64}\right)$到直线$3x-4y-2=0$的距离最短 10 分

(注如用切线平行于已知直线解也可以)

2、(本小题 6 分)

$\because y'=\int y''\mathrm{d}x=3x^2+c$ (1) 3 分

又由$2x-3y=6$得$y=\frac{2}{3}x-2$

$\therefore y'|_{(0,-2)}=\frac{2}{3}$ 代入(1)得

$$y'=3x^2+\frac{2}{3}$$ 5 分

$$\therefore y=\int(3x^2+\frac{2}{3})\mathrm{d}x=x^3+\frac{2}{3}x+c$$

再将$(0,-2)$代入得$c=-2,\therefore y=x^3+\frac{2}{3}x-2.$ 10 分

3、(本小题 8 分)

$$\begin{cases}p=1000-0.4x^2\\ p=42x,\end{cases}$$

解出$x=20.$

均衡点$p=840.$ 3 分

消费者剩余$\int_0^{20}\left[(1000-0.4x^2)-840\right]dx$

$=2133.33$

生产者剩余$\int_0^{20}\left[840-42x\right]dx$ 6 分

$=8400$ 10 分

七、解答下列各题
(本大题共 2 小题，总计 6 分)
1、(本小题 1 分)

$F(x)=f(x)+g(x)$在x_0处必不连续 4 分

若$F(x)$在x_0处连续，则

$g(x)=F(x)-f(x)$在x_0处也连续，矛盾！ 10 分

2、(本小题 5 分)

答：不一定.

若$A\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\infty$ 4 分

但若$A=0$则等式可能不成立 6 分

例如$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_1}(x-1)^2=0$

但$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)^2=0\neq\infty$ 10 分

1、极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{x}{a})^{\frac{b}{x}}$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$的值为

$(A)1.$ $(B)\ln\frac{b}{a}$ $(C)e^{\frac{b}{a}}$. $(D)\frac{be}{a}$

答（ ）

2、

$\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}=$

$A.\ e^3$ $B.\ 8$ $C.\ 1$ $D.\ \infty$

答（ ）

3、

设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导记(Ⅰ)$f(a)=f(b)$

(Ⅱ)在(a,b)内$f'(x)\equiv 0$则：

(A)(Ⅰ)是(Ⅱ)的充分但非必要条件

(B)(Ⅰ)是(Ⅱ)的必要,但非充分条件

(C)(Ⅰ)是(Ⅱ)的充要条件

(D)(Ⅰ)与(Ⅱ)既非充分也非必要条件

答 ( )

4、

若$(x_0, f(x_0))$为连续曲线,$y=f(x)$上的凹弧与凸弧分界点,则(　)

$(A)(x_0, f(x_0))$必为曲线的拐点

$(B)(x_0, f(x_0))$必定为曲线的驻点

(C)　x_0为$f(x)$的极值点

(D)　x_0必定不是$f(x)$的极值点

答(　)

5、

一长为Lcm的杆OA绕O点在水平面上作圆周运动.杆的线密度$\rho=\dfrac{1}{r}$,

r为杆上一点到O点的距离,角速度为ω,则总动能E =

(A)　$\dfrac{1}{2}\omega^2L^2$　　(B)　$\dfrac{1}{3}\omega^2L^2$　　(C)　$\dfrac{1}{4}\omega^2L^2$　　(D)　$\dfrac{1}{5}\omega^2L^2$

答(　　)

二、填空题（将正确答案填在横线上）

(本大题分 3 小题，每小题 3 分，共 9 分)

1、$\int(3-x^2)^3\,\mathrm{d}\,x=$______________.

2、设$f(x)=\int_0^x t(t-1)dt$，则$f(x)$的单调减少的区间是__________

3、对于β的值，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{n^\beta}-1)$

（1）当______时，级数收敛

（2）当______时，级数发散

三、解答下列各题

(本大题共 3 小题，总计 13 分)

1、(本小题 4 分)

验证$f(x)=x^2$在[2,4]上拉格朗日中值定理的 正确性

2、(本小题 4 分)

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{10}}{10^n}$$

是否收敛，是否绝对收敛？

3、(本小题 5 分)

设$f(x)$是以2π为周期的函数，当$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$时，$f(x)=|x|$。又设$S(x)$是$f(x)$的以$2\pi$为周期的 Fourier 级数之和函数。试写出$S(x)$在$[-\pi,\pi]$内的表达式。

四、解答下列各题

(本大题共 5 小题，总计 23 分)

1、(本小题 2 分)

求极限　$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-12x+16}{2x^3-9x^2+12x-4}$

2、(本小题 2 分)

求$\int(e^x+1)^3e^x\,\mathrm{d}x.$

3、(本小题 4 分)

求$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

4、(本小题 7 分)

求$\int |x| \,\mathrm{d}\,x$.

5、(本小题 8 分)

试将函数$y=\frac{1}{x^2}$在点$x_0 \neq 0$处展开成泰勒级数。

五、解答下列各题

(本 大 题 5 分)

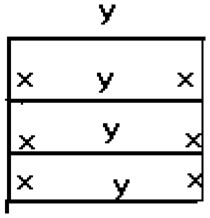
如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=-2$处条件收敛，那么该级数的收敛半径是多少？试证之.

六、解答下列各题

(本大题共 2 小题，总计 16 分)

1、(本小题 7 分)

如图要围成三间长都为y，宽都为x的长方形屋围，其墙的总长度为a，问x, y各等于多少时，所围成的总面积最大?(墙的厚度不计)



2、(本小题 9 分)

求由曲线$y=e^{2x}$，x轴及该曲线过原点的切 线所围成的平面图形的 面积.

七、解答下列各题

(本 大 题 6 分)

设 $f(x)=\begin{cases} chx, & x \geq 0, \\ \ln(1-x), & x<0 \end{cases}$，试讨论$f(x)$的可导性并在可导处求出$f'(x)$

八、解答下列各题

(本 大 题 6 分)

计算$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x (a^t-b^t)dt}{\int_0^{2x} \ln(1+t)dt}$，$(a>0, \ b.>0)$.

九、解答下列各题

(本 大 题 12 分)

设函数$f(x)$在$[a, \ b]$上有连续导数$(a>0)$，又设$x=r\cos\theta$，$f(x)=r\sin\theta$.

试证明:$2\int_a^b f(x)dx+\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta = bf(b)-af(a)$，

其中$\alpha=\arctan\frac{f(a)}{a}$，$\beta=\arctan\frac{f(b)}{b}$.

一、单项选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中）

(本大题分 5 小题，每小题 2 分，共 10 分)

1、 答:C

2、 B　　10 分

3、 答　(B)　　10 分

4、 (A)　　10 分

5、

C

$$\text{因} dE=\frac{1}{2}(dm)v^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r}dr\cdot(\omega r)^2$$

$$=\frac{1}{2}\omega^2 rdr$$

$$E=\int_0^L\frac{1}{2}\omega^2 rdr$$

$$=\frac{1}{4}\omega^2L^2$$

二、填空题（将正确答案填在横线上）

(本大题分 3 小题，每小题 3 分，共 9 分)

1、 $=27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{x^7}{7}+c.$　　10 分

2、 $(0，1)$　(答$[0，1]$不扣分)　　10 分

3、 $\beta<-1$时收敛

$\beta\geq-1$时发散

三、解答下列各题

(本大题共 3 小题，总计 13 分)

1、(本小题 4 分)

证明：$f(x)=x^2$在$[2,3]$上连续，在$(2,3)$可导

即$f(x)$在$[2,3]$上满足拉格朗日中值定理的条件　　4 分

又$f'(x)=2x$

令$f'(\xi)=2\xi=\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=6$

得到$(2,3)$内有解$\xi=3$　　8 分

即存在$\xi=3$，使$f'(\xi)=\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}$

这就验证了拉格朗日中值定理对函数$f(x)=x^2$在$[2,3]$上的正确性

10 分

2、(本小题 4 分)

记 $u_n=\left|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n^{10}}{10^n}\right|=\dfrac{n^{10}}{10^n}$

由于 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \dfrac{1}{10} \quad (n \to \infty)$ ……6 分

故原级数绝对收敛，从而收敛 ……10 分

3、(本小题 5 分)

对 $f(x)=|x|,\quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{3\pi}{2}$ 作周期为 2π 的延拓，$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x+2\pi, & -\pi\le x\le-\dfrac{\pi}{2}, \\ -x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0, \\ x, & 0<x\le\pi, \end{cases}$$

(3 分)

$f(x)$ 满足 Fourier 级数收敛的充分条件。 (5 分)

故

$$S(x)=\begin{cases} x+2\pi, & -\pi\le x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ \pi, & x=-\dfrac{\pi}{2}, \\ -x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0, \\ x, & 0<x\le\pi, \end{cases}$$

(10 分)

注：只要写出 $S(x)$ 的表达式即可得 10 分。

四、解答下列各题

(本大题共 5 小题，总计 23 分)

1、(本小题 2 分)

$$\text{解:原式}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{6x^2-18x+12}$$ 5 分

$$=\lim_{x\to 2}\frac{6x}{12x-18}$$ 8 分

$$=2$$ 10 分

2、(本小题 2 分)

$$\int (e^x+1)^3 e^x \mathrm{d}x$$

$$=\int (e^x+1)^3 \mathrm{d}(e^x+1)$$ 5 分

$$=\frac{1}{4}(e^x+1)^4+c.$$ 10 分

3、(本小题 4 分)

令 $x=\sec t$

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 t\,dt$$ 4 分

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 t-1)dt$$ 6 分

$$=(\tan t-t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$ 8 分

$$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$ 10 分

4、(本小题 7 分)

$$\int|x|\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+c_1 & x\ge 0,\\ -\dfrac{x^2}{2}+c_2 & x<0.\end{cases}$$ 5 分

由原函数的连续性,得

$$\lim_{x\to o^+}\left(\frac{x^2}{2}+c_1\right)=\lim_{x\to o^-}\left(-\frac{x^2}{2}+c_2\right)$$

$$\therefore c_1=c_2 \qquad 令 c_1=c_2=c$$

$$\therefore \int|x|\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+c, & x\ge 0,\\ -\dfrac{x^2}{2}+c, & x<0\end{cases}=\frac{|x|\cdot x}{2}+c.$$ 10 分

5、(本小题 8 分)

因为

$$\frac{1}{x^2}=-\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-x_0}{x_0}}$$

……3 分

而 $$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad x\in(-1,1)$$ ……5 分

所以 $$\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-x_0)^n}{x_0{}^n} \qquad x\in(0,2x_0)$$

$$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(x-x_0)^{n-1}}{x_0{}^{n+1}} \qquad x\in(0,2x_0)$$ ……10 分

五、解答下列各题

(本 大 题 5 分)

由题意,知:

当 $|x|<2$ 时，级数绝对收敛； ……4 分

当 $|x|>2$ 时，级数不可能收敛. ……8 分

故收敛半径是 2. ……10 分

六、解答下列各题

(本大题共 2 小题，总计 16 分)

1、(本小题 7 分)

如图 $4y+6x=a \qquad y=\frac{a}{4}-\frac{3}{2}x$

总面积为$A=3xy=3x(\frac{a}{4}-\frac{3}{2}x)$ 3 分

$\frac{dA}{dx}=\frac{3a}{4}-9x \qquad$ 当$x=\frac{a}{12}$时,$\frac{dA}{dx}=0 \qquad \frac{d^2A}{dx^2}=-9<0$ 6 分

故当$x=\frac{a}{12}$时,A取得唯一极大值也是最大值 8 分

此时 $y=\frac{a}{4}-\frac{3}{2}\times\frac{a}{12}=\frac{a}{8}$

故当$x=\frac{a}{12}$，$y=\frac{a}{8}$时,所求总面积最大 10 分

2、(本小题 9 分)

解:$y'=2e^{2x}$. 设切点(t_0,e^{2t_0}),

$\therefore$ 切线$y=2e^{2t_0}x$,

$\begin{cases} y=e^{2t_0}, \\ y=2e^{2t_0}t_0 \end{cases} \qquad t_0=\frac{1}{2}$ 3 分

切线$y=2ex$, 切点$(\frac{1}{2},e)$ 6 分

$\therefore s=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}e^{2x}dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e$ 8 分

$=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{-\infty}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}e=\frac{1}{4}e.$ 10 分

七、解答下列各题

(本 大 题 6 分)

$f(0)=1$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0-0}\ln(1-x)=0$

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0+0}\cosh x=1$ 3 分

$f(x)$在$x=0$处不连续,故不可导 5 分

$f'(x)=\begin{cases} \sinh x, & x>0, \\ \frac{-1}{1-x}, & x<0, \end{cases}$ 10 分

八、解答下列各题

(本 大 题 6 分)

原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{2\ln(1+2x)}$ 5 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{\frac{4}{1+2x}}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{a}{b}$$ 10 分

九、解答下列各题
(本 大 题 12 分)

因为$r^2=x^2+f^2(x)$，$\theta=\arctan\dfrac{f(x)}{x}$，$d\theta=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2+f^2(x)}dx$ 4 分

于是 $\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta=\int_a^b[xf'(x)-f(x)]dx$ 6 分

$$=\int_a^b xf'(x)dx-\int_a^b f(x)dx$$

$$=xf(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(x)dx$$ 8 分

$$=bf(b)-af(a)-2\int_a^b f(x)dx$$

所以 $2\int_a^b f(x)dx+\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta=bf(b)-af(a)$ 10 分

一、 一、 填空

1. 1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\ge 0\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0\end{cases}\quad(a>0)$ 当 $a=$ ______ 时，$x=0$ 是 $f(x)$的连续点。

解：

$$f(0)=\frac{1}{2}\quad \lim_{x\to 0+}\frac{\cos x}{x+2}=\frac{1}{2}\quad \lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

故$a=1$时$x=0$是连续点，$a\neq 1$时$x=0$是间断点。

2. 设方程 $x-y+\arctan y=0$ 确定了$y=y(x)$,求$\dfrac{dy}{dx}=$ ________ 。

解：$1-y'+\dfrac{y'}{1+y^2}=0\quad y'=\dfrac{1+y^2}{y^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$ ＝A，则 $a=$ ____，b= ____， $A=$ ____。

解：要使极限存在，分子与分母应是极限过程中的同阶无穷小或高阶无穷小，于是有 1＋a+b=0，用一次罗必达法则分子仍为无穷小，有 a+4b=0

解出：a=-4/3 b=1/3 代入求得极限 A＝8/3

4．函数 $y=x2^x$ 的极小值点为 ________ 。

解：$y'=2^x(1+x\ln 2)$驻点 $x=-\dfrac{1}{\ln 2}$，$y''=2^x(2\ln 2+x(\ln 2)^2)$在驻点处 $y''>0$,故驻点为极小值点。

5．设 $f(x)=x\ln x$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=2$,则 $f(x_0)=$ ______________。

解：$f'(x)=\ln x+1$,由$f'(x_0)=2$知$x_0=e$,于是有$f(x_0)=e$.

6.设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x^2}=-1$, 则 $f(x)$在 $x=0$ 取得 ___________（填极大值或极小值）。

解：

$\because \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x^2}=-1$,由极限的保号性有$\dfrac{f(x)-f(0)}{x^2}<0$,有 $f(x)-f(0)<0$

即在 $x=0$的某邻域内有$f(x)<f(0)$,由极值定义知$x=0$是极大值点。

二、

函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} & x>0\\ 0, & x\le0\end{cases}$ 是否连续？是否可导？并求 $f(x)$的导函数。

解：当 x>0 及 x<0 时，，f(x)为初等函数，连续。

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1}=0$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)=0=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)\therefore f(x)在(-\infty,\infty)连续。$$

$$当x>0时，f'(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2x^{3/2}\sqrt{1+x}}，\quad 当x<0时，f'(x)=0$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}-0}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}+1)}\to\infty$$

$$\therefore f(x)在x=0不可导，\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{2x^{3/2}\sqrt{1+x}} & x>0,\\ 0 & x<0\end{cases}$$

三、　　三、　　解下列各题

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)^{2x}-1}{x^2}$

解：原式＝$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)^{2x}\left(2\ln(1+2x)+\dfrac{4x}{1+2x}\right)}{2x}=2+2=4$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}}-2)$;

解：原式＝

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}}-2}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln3}{2}\cdot\frac{3^{\frac{1}{x}}-3^{-\frac{1}{x}}}{\dfrac{1}{x}}=\frac{\ln3}{2}\lim_{x\to\infty}\ln3(3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}})=(\ln3)^2$$

3. 设曲线方程为$\begin{cases}x=t+2+\sin t\\ y=t+\cos t\end{cases}$,求此曲线在 $x=2$ 的点处的切线方程,及

$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=2}$ 。

$$x=2时\ y=1,t=0\quad y'=\frac{1-\sin t}{1+\cos t}\quad y'\big|_{t=0}=\frac{1}{2}\quad 切线方程：y-1=\frac{1}{2}(x-2)$$

$$y''=\frac{\sin t-\cos t-1}{(1+\cos t)^3}\quad y''\big|_{x=2}=\frac{\sin 0-\cos 0-1}{(1+\cos 0)^3}=-\frac{1}{4}$$

解：

四、　四、　试确定 *a*,*b*,*c* 的值，使 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 在点(1,-1)处有拐点，且在 $x=0$ 处有极大值为 1，并求此函数的极小值。

解：

$$y'=3x^2+2ax+b,y'(0)=0\Rightarrow b=0,y(0)=1,c=1.$$

$$y''=6x+2a,y''(1)=6+2a=0,a=-3.$$

$$y=x^3-3x^2+1,y'=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$y'=0时，驻点：\quad x_1=0,x_2=2,y''(0)=6>0.\therefore 极小值y(2)=-3。$$

五、　五、　若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数，求有最大面积的直角三角形。

解：设所给直角边为 *x*,斜边与其之和为 *L*，则

$$s=\frac{1}{2}x\sqrt{(L-x)^2-x^2}=\frac{x}{2}\sqrt{L^2-2Lx}$$

$$s'=\frac{1}{2}\left[\sqrt{L^2-2Lx}-\frac{x}{\sqrt{L^2-2Lx}}\right]=\frac{L}{2}\frac{L-3x}{\sqrt{L^2-2Lx}}$$

$$令s'=0\Rightarrow x=\frac{L}{3}这是唯一驻点，且最大值存在，故$$

$$s\left(\frac{L}{3}\right)=\frac{L^2}{6\sqrt{3}}为最大面积，此时x边与斜边夹角为\frac{\pi}{3}$$

六、　六、　证明不等式：$\alpha^\beta>\beta^\alpha,(e<\alpha<\beta).$

$$证：令f(x)=\frac{\ln x}{x}则f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0\quad (x>e)$$

$$\therefore f(x)在(a,+\infty)上单减，f(\alpha)>f(\beta),\qquad 即\frac{\ln(\alpha)}{\alpha}>\frac{\ln(\beta)}{\beta}$$

$$\beta\ln(\alpha)>\alpha\ln(\beta)\Rightarrow\ln\alpha^\beta>\ln\beta^\alpha\Rightarrow\alpha^\beta>\beta^\alpha.$$

七、　七、　$y=f(x)$与 $y=\sin(x)$在原点相切，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt{f\left(\frac{2}{n}\right)}.$

$$解：f(0)=\sin(0)=0.f'(0)=(\sin x)'_{x=0}=\cos 0=1,$$

$$\therefore 当x\to 0时f(x)与x是等价无穷小，$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt{f\left(\frac{2}{n}\right)}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2f(2/n)}{2/n}}=\sqrt{2}$$

八、　八、　设 $f(x)$在[0,1]上连续且在 (0,1) 内可导，且 $f(0)=f(1)=0,f(1/2)=1.$

证明：(1)至少有一点 $\xi\in(1/2,1)$，使得 $f(\xi)=\xi$；

(2) $\forall\lambda\in R$ ，存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得 $f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$

证：(1) 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 f 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，

$F(1/2)=f(1/2)-1/2>0$

$F(1)=f(1)-1=0-1<0$, ∴在 $(1/2,1)$ 内至少有一点 ξ，使 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\xi$。

(2) 证：

令 $G(x)=e^{-\lambda x}F(x), G(\xi)=0, G(0)=0$

$\exists\eta\in(0,\xi)$ 使得 $G'(\eta)=0.$

$-\lambda e^{-\lambda\eta}F(\eta)+e^{-\lambda\eta}F'(\eta)=0$ 得出 $F'(\eta)=\lambda F(\eta)$

即 $f'(\eta)-1=\lambda(f(\eta)-\eta)$

于是 $f'(\eta)-\lambda(f(\eta)-\eta)=1$

一、 一、 选择题（每题 4 分，共 16 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=$ （ D ）。

A、e； B、e^{-1}； C、$e+1$； D、$e^{-1}+1$

2. 设 $f(x)=x\ln x$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=2$，则 $f(x_0)=$ （ B ）。

A、0； B、e； C、1； D、e^2。

3. 若 $\sin 2x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)dx=$ （ D ）。

A、$x\sin 2x+\cos 2x+C$； B、$x\sin 2x-\cos 2x+C$；

C、$x\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$； D、$x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$。

4. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处取得极值 -2，则（ B ）。

A、$a=-3,b=0$ 且 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点；

B、$a=0,b=-3$ 且 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点；

C、$a=-3,b=0$ 且 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点；

D、$a=0,b=-3$ 且 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点。

二、填空题（每题 5 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-e^{-x}}=\frac{1}{2}$。

2. $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx=\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}+C$。

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin x}{1+x^2}+\cos^3 x)dx=\frac{4}{3}$。

4. 设 $\alpha,\beta,\delta,\gamma$ 为向量，k 为实数。若 $\|\alpha\|=1,\|\beta\|=1$，$\alpha\perp\beta$，$\gamma=2\alpha+\beta,\delta=k\alpha+\beta$，$\gamma\perp\delta$，则 $k=-\frac{1}{2}$。

三、计算下列各题（每题 9 分，共 45 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}x^x$。

解：$\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}} = 1$

2．函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^x - e^y - xy = 0$ 确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$。

解：$e^x - e^y - xy = 0 \Rightarrow e^x - e^y y' - y - xy' = 0$

$\Rightarrow e^x - e^y y'' - e^y y'^2 - y' - y' - xy'' = 0$

又 $x=0, y=0$，$y'=1$，得 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0} = -2$。

3．求定积分 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$。

解：

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx \overset{x=\sin t}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2 t - 1)dt = 1 - \frac{\pi}{4}$$

4．求过点 $(3,1,2)$ 且与平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程。

解：$\vec{s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2,3,1)$，$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{3} = z-2$。

5．设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt$。

解：$x \le 0$，$\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt = 0$

$0 \le x \le \pi$，$\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^x \sin t dt = \frac{1}{2}(1-\cos x)$

$x > \pi$，$\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^{x} 0 dt = 1$

四、（7 分） 长为 l 的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆形，问这两段铁丝各为多长时，正方形的面积与圆的面积之和最小？

解：设正方形的边长为 x，则正方形的面积与圆的面积之和为 $S(x) = x^2 + \frac{(l-4x)^2}{4\pi}$。

$S'(x) = 2x - 2\frac{l-4x}{\pi} = 0$，$x = \frac{l}{4+\pi}$。所以两段铁丝分别为 $\frac{4l}{4+\pi}, l - \frac{4l}{4+\pi}$ 时，正方形的面积与圆的面积之和最小。

五、解答下列各题（每小题 4 分，共 12 分）

1．设曲线 $y = 1-x^2$ $(0 \le x \le 1)$，x 轴以及 y 轴所围区域被曲线 $y = ax^2 (a>0)$ 分成

面积相等的两部分，求a。

解：由 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}(1-x^2-ax^2)dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}ax^2dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}^1(1-x^2)dx$，$a=3$

2．设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$0<f(x)<1$。判断方程$2x-\int_0^x f(t)dt=1$在$(0,1)$内有几个实根？并证明你的结论。

解：$F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$，$F(x)$在$[0,1]$上连续，$F(0)=-1,F(1)=1-\int_0^1 f(x)dx>0$，所以$F(x)$在$(0,1)$内有一个零点。又$F'(x)=2-f(x)>2-1=1>0$，$F(x)$在$[0,1]$上是单调递增的，所以$F(x)$在$(0,1)$内有唯一零点，即$2x-\int_0^x f(t)dt=1$在$(0,1)$内有唯一实根。

3、设函数$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=0$，求证在$(0,1)$内至少存在一点$\xi$，使得$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

解：$F(x)=xf(x)$，$F(x)$在$[0,1]$上可导。由$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=0$，存在$c\in[0,\frac{1}{2}]$，使得$f(1)-2cf(c)\dfrac{1}{2}=0$，即$f(1)=cf(c)$。由 Roll 定理，存在$\xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

高等数学第一学期半期试题解答（05）

一．　一．　（共 20 分）试解下列各题：

1．设$y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}},(x>1)$ 求 dy。

解：$y=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2$　　$dy=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)dx$

2．设方程 $x-y+\arctan y=0$ 确定了$y=y(x)$,求$\dfrac{dy}{dx}$。

解：$1-y'+\dfrac{y'}{1+y^2}=0$　$y'=\dfrac{1+y^2}{y^2}$

3．设$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x-1}=A.$。则 a=___4___，　A=___-6____

4．函数$y=x2^x$的极小值点$-\dfrac{1}{\ln 2}$。

5．设$f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{x+2}, & x\ge0\\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0\end{cases}$　$(a>0)$

解：$f(0)=\frac{1}{2}\quad \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\cos x}{x+2}=\frac{1}{2}\quad \lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$

故$a=1$时$x=0$是连续点，$a\neq 1$时$x=0$是间断点。

二． 二． （10 分）若 $y=f(x)$ 是奇函数且 x=0 在可导，$F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 x=0 是什么类型的间断点？说明理由。

解：由$f(x)$是奇函数，且在$x=0$可导，知$f(x)$在$x=0$点连续，$f(0)=-f(0)$故$f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$存在，故为第一类间断点（可去）。

三． 三． （共 20 分）求下列极限

1．$\lim\limits_{x\to\infty}x^2(3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}}-2)$；解：原式＝

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}}-2}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln 3}{2}\cdot\frac{3^{\frac{1}{x}}-3^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\frac{\ln 3}{2}\lim_{x\to\infty}\ln 3(3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}})=(\ln 3)^2$$

2．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{2x}-1}{x^2}$；解：原式＝$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{2x}\left(2\ln(1+2x)+\frac{4x}{1+2x}\right)}{2x}=2+2=4$

3．设曲线方程为$\begin{cases}x=t+2+\sin t\\ y=t+\cos t\end{cases}$，求此曲线在 x=2 的点处的切线方程，及$\frac{d^2y}{dx^2}$。

解：$x=2$时 $y=1, t=0\quad y'=\frac{1-\sin t}{1+\cos t}\quad y'|_{t=0}=\frac{1}{2}$ 切线方程：$y-1=\frac{1}{2}(x-2)$

$$y''=\frac{\sin t-\cos t-1}{(1+\cos t)^3}$$

四． 四． （10 分）证明：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geq (x-1)^2$。

证明：当$x>1$时，令$f(x)=\ln x$在$[1,x]$上用拉氏中值定理有$\ln x=\frac{1}{\xi}(x-1)>\frac{1}{x+1}(x-1)$

其中$1<\xi<x$即$\ln x>\frac{1}{x+1}(x-1)$同乘以(x^2-1)有$(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$

当$0<x<1$时，令$f(x)=\ln x$在$[x,1]$上用拉氏中值定理有$-\ln x=\frac{1}{\xi}(1-x)>\frac{1}{x+1}(1-x)$

其中$x<\xi<1$即$\ln x<\frac{1}{x+1}(x-1)$同乘以(x^2-1)有$(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$

当$x=1$时等式成立。

五． 五． （10 分）求内接于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，且底边与 x 轴平行的等腰三角形之面积的最大值。

解：

设底边方程为：$y=t \quad -b<t\le 0$，

三角形面积$A=(b-t)\cdot 2a\sqrt{1-\dfrac{t^2}{b^2}}=\dfrac{2a}{b}\sqrt{(b-t)^2(b^2-t^2)}$

设$z=(b-t)^2(b^2-t^2)$ z的最大值点也是A的最大值点。

$z'=-2(b-t)(b^2-t^2)-2t(b-t)^2=-2(b-t)^2(b+2t)$

令$z'=0$得$t=b$（舍去）$t=-\dfrac{b}{2}$ $z''\left(-\dfrac{b}{2}\right)=-b^2<0$即$t=-\dfrac{b}{2}$为唯一极大值点，

亦即为所求面积之最大值点。最大值为$A=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$

六. 六. （10 分）证明：方程$x^n+x^{n-1}+\cdots x^2+x=1$在（0，1）上必有唯一的实根$x_n$(n>2)，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

证：

设$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x-1$ 其在[0,1]上连续。

$f(0)=-1, f(1)=n-1$由$n>2$知函数在端点异号。

由闭区间上连续函数零点定理知至少有一点$\xi\in(0,1)$使$f(\xi)=0$.

又$f'=nx^{n-1}+\cdots+2x+1>0$知函数$f(x)$单调增加，故在(0,1)上有唯一实根。

由 $x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n{}^2+x_n=1$

$x_{n+1}{}^{n+1}+x_{n+1}{}^n+\cdots+x_{n+1}{}^2+x_{n+1}=1$

知$\{x_n\}$是单调下降数列，而$x_2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$因此$0<x_n<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<1$故由极限存在准则知其有极限，设极

由方程有$\dfrac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n}=1$两边$n\to\infty$取极限$\dfrac{x_0}{1-x_0}=1$解出$x_0=\dfrac{1}{2}$

七. 七. （10 分）确定常数 a、b,使极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$存在，并求出其值。

解：要使极限存在，分子与分母应是极限过程中的同阶无穷小或高阶无穷小，于是有 1＋a+b=0，用一次罗必达法则分子仍为无穷小，有 a+4b=0

解出：a=-4/3 b=1/3 代入求得极限为 8/3

八. 八. （10 分）设 $f(x)$在[a,b]上连续，在(a,b)内可微，且 $f(a)=f(b)$=0, 证明：对$\forall\lambda\in R,\exists c\in(a,b)$，使得$f'(c)=\lambda f(c)$。

证明：构造函数 $F(x)=e^{-\lambda x}f(x)$ 则 $F(x)$在[a,b]上连续，在(a,b)内可微 $F(a)=F(b)$=0 由罗尔定理$\forall\lambda\in R,\exists c\in(a,b)$，使得$F'(c)=0$，而$F'(x)=e^{-\lambda x}f'(x)-\lambda e^{-\lambda x}f(x)$

即有$\forall\lambda\in R,\exists c\in(a,b)$，使得$f'(c)=\lambda f(c)$ 证毕。