（无向图）关联矩阵及其性质

定义1 无向图$G=<V,E>$，$|V|=n$，$|E|=m$，令 m_{ij}为 v_i 与 e_j的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为G 的关联矩阵，记为$M(G)$.

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2 \quad ,j = 1,2,\ldots,m$ 每列元素之和为2

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad ,i = 1,2,\ldots,n$ 第 i 行元素之和为的v_i度数

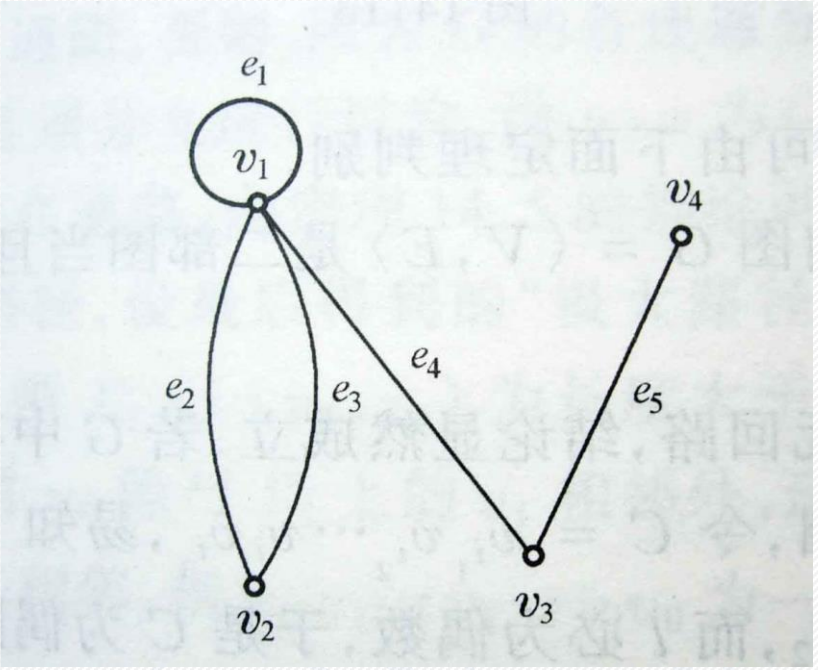
(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$ 握手定理

(4) 平行边的列相同

(5) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0 \Leftrightarrow v_i$是孤立点

例

$$M(G)=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



（有向图）关联矩阵及其性质

定义2 设有向图$D=<V,E>$中无环，令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$为D的**关联矩阵**，记为$M(D)$.

（1）每列恰好有一个+1和一个−1.

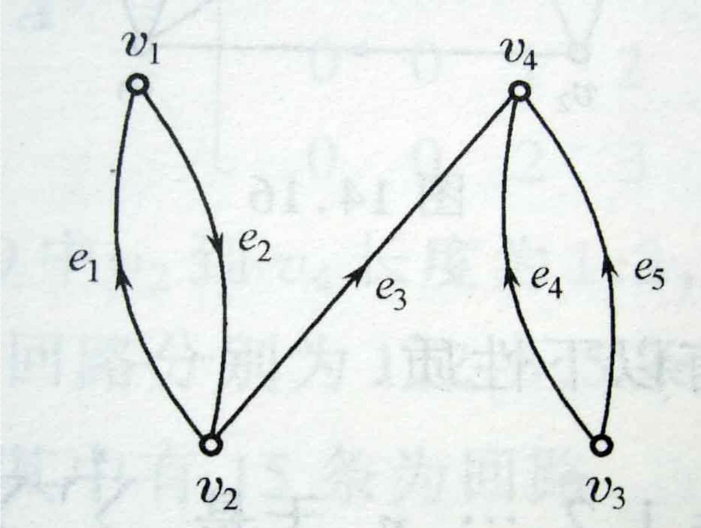
（2） −1的个数等于+1的个数，都等于边数m.

（3）第i行中，+1的个数等于$d^+(v_i)$，−1的个数等于$d^-(v_i)$.

（4）平行边对应的列相同

例

$$M(D)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$



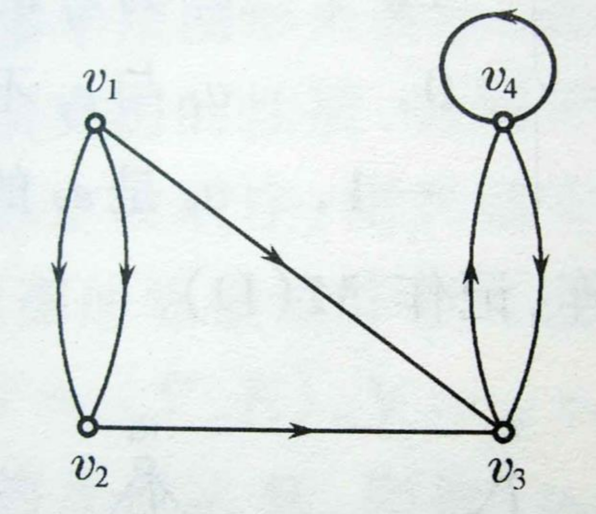
邻接矩阵

定义3 设有向图G = ⟨V, E⟩，其中V = {v_1, v_2, …, v_n}，并假定结点已经有了从v_1到v_n的次序，则n阶方阵A（G）=（$a_{ij}^{(1)}$）$_{n\times n}$称为G的邻接矩阵(Adjacency Matrix)，其中a_{ij}为顶点v_i邻接到v_n的边的条数。

例(图与邻接矩阵)

试写出下图所示图G的邻接矩阵。

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



邻接矩阵的性质

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i), \quad i = 1,2,\ldots,n$ 每行之和为v_i的出度

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j), \quad j = 1,2,\ldots,n$ 每列之和为v_j的入度

(3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ ---D中长度为1 的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ ---D中长度为1 的回路数

定理(通路与回路数目计算)

定理1 设 A为有向图 D 的邻接矩阵，顶点集$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，则 A 的 l 次幂 A^l（$l\geq1$）中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为v_i到v_j长度为 l 的通路数，

$a_{ii}^{(l)}$ 为v_i到自身长度为 l 的回路数，

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为长度为 l 的通路总数，

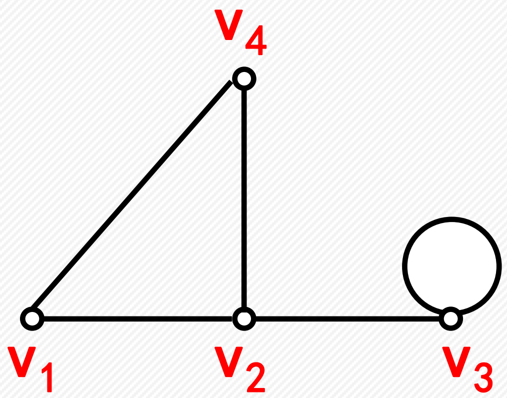
$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 为长度为 l 的回路总数.

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l$ ($l\geq1$)，则B_l中

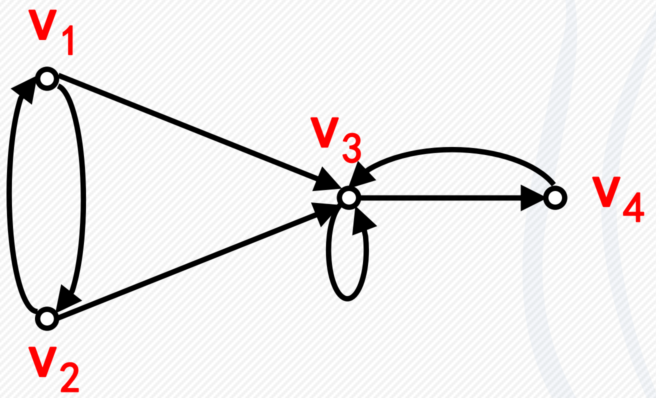
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(l)}$ 为长度小于或等于 l 的通路数,

$\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$ 为长度小于或等于 l 的回路数.

求下图中图G_1和G_2的从结点v_1到结点v_3长度为2和3的通路数目及所有长度为2和3的通路数目。



G_1



G_2

分析　利用**定理1**，求图中长度为m的通路数目，只需要先写出图的**邻接矩阵**，然后计算邻接矩阵的**m次方**即可。

例

解：在图中，G_1是无向线图，G_2是有向线图，它们的邻接矩阵分别为：

$$A(G_1)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A(G_2)=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

例

下面计算邻接矩阵的幂，

$$(A(G_1))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_{13}^{(2)} = 1 \qquad \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} a_{ij}^{(2)} = 21 \qquad \sum_{i=1}^{4} a_{ii}^{(2)} = 9$$

因而G_1中从结点v_1到结点v_3长度为2通路数目为1，

长度为2的通路（含回路）总数为21，其中9条为回路。

例

$$(A(G_2))^2=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&2&1\\0&0&2&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$a_{13}^{(2)}=2 \qquad \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}^{(2)}=13 \qquad \sum_{i=1}^{4}a_{ii}^{(2)}=4$$

G_2中从结点v_1到结点v_3长度为2通路数目为2，长度为2的通路（含回路）总数为13，其中5条为回路。

例

$$(A(G_1))^3 = A(G_1)\cdot(A(G_1))^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_{13}^{(3)} = 2 \qquad \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} a_{ij}^{(3)} = 48 \qquad \sum_{i=1}^{4} a_{ii}^{(3)} = 10$$

因而G_1中从结点v_1到结点v_3长度为3的通路数目为2，长度为3的通路（含回路）总数为48，其中10条为回路。

例

$$(A(G_2))^3 = A(G_2)\cdot(A(G_2))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{13}^{(3)} = 4 \qquad \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} a_{ij}^{(3)} = 22 \qquad \sum_{i=1}^{4} a_{ii}^{(3)} = 4$$

G_2中从结点v_1到结点v_3长度为3的通路数目为4，长度为3的通路（含回路）总数为22，其中4条为回路。

方法：邻接矩阵计算法

设矩阵 $B_n = A+A^2+A^3+\cdots+A^n$

则B_n中的元素

$$b_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} a_{ij}^{(m)}$$

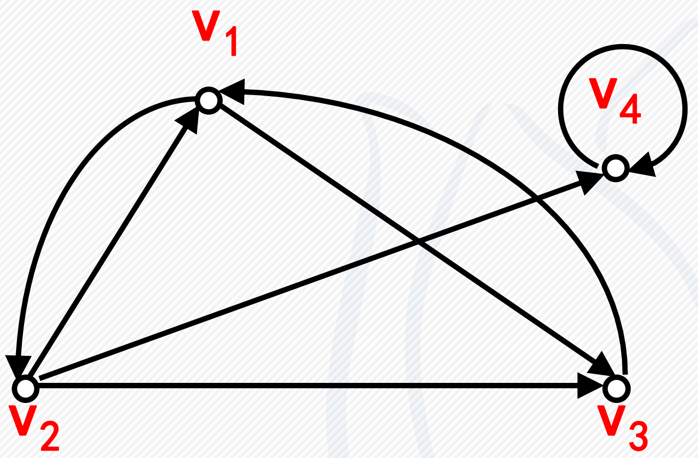
表示图G中从结点v_i到结点v_j的长度小于等于n的通路总数，若 $i = j$，$b_{ii}^{(n)}$为G中结点v_i到自身的长度小于等于n的回路总数。

定理2

设G = <V, E>为线图，V = $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，A = $(a_{ij})_{n\times n}$为G的邻接矩阵，$A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n\times n}$，m=1, 2, …, n；$B_n = (b_{ij}^{(n)})_{n\times n} = A+A^2+A^3+\cdots+A^n$。则有：如果$b_{ij}^{(n)}>0$，那么从$v_i$到$v_j$可达，否则不可达；并且

$$d(v_i,v_j)=\begin{cases}\infty, & \text{如果所有}a_{ij}^{(1)},a_{ij}^{(2)},\cdots,a_{ij}^{(n)}\text{均为}0\\ k, & \text{否则，}k=\min\{m\mid a_{ij}^{(m)}\neq 0, m=1,2,\cdots,n\}\end{cases}$$

判断右图中图G中结点之间的可达关系，并求任两结点间的距离。



分析　利用定理2，先写出图的邻接矩阵A，然后计算A的幂即可。

解

在图中，G的邻接矩阵及其2、3、4次幂分别为：

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad A^2=\begin{pmatrix}2&0&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&2&2\\2&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad A^4=\begin{pmatrix}4&1&3&3\\3&2&3&3\\1&2&2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

例

从而有 $$B_4 = A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

故从 v_1 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的；从 v_2 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的；从 v_3 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的；从 v_4 到 v_4 都是可达的，从 v_4 到 v_1, v_2, v_3 都是不可达的。并且有

$d(v_1, v_2)=d(v_1, v_3)=d(v_2, v_1)=d(v_2, v_3)=d(v_2, v_4)$
$=d(v_3, v_1)=1$, $d(v_1, v_4)=d(v_3, v_2)=2$，$d(v_3, v_4)=3$，
$d(v_4, v_1)=d(v_4, v_2)=d(v_4, v_3)=\infty$。

定义3 设G = <V, E>是一个线图，其中V = {v_1, v_2, ..., v_n}，并假定结点已经有了从v_1到v_n的次序，称n阶方阵P = $(p_{ij})_{n\times n}$为图G的可达性矩阵(Accessibility Matrix)，其中

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当}v_i\text{到}v_j\text{至少存在一条非零长度的通路}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

$i,j=1,2,3,\cdots,n$

定理3(可达性矩阵计算方法)

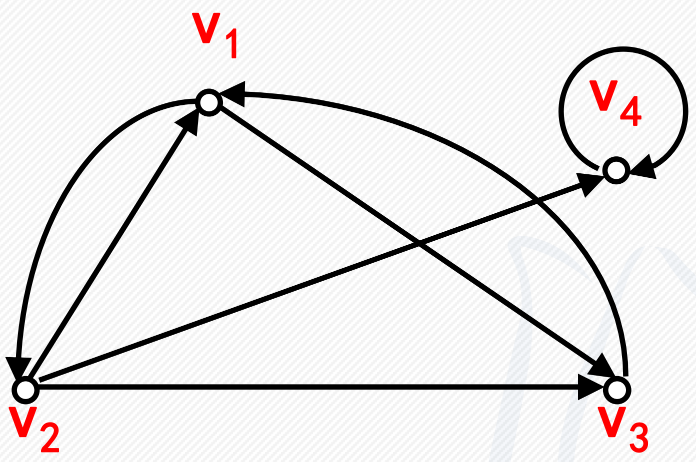
设G = <V, E>为线图，A、P分别是G的邻接矩阵和可达性矩阵，则有

$$P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee \cdots \vee A^{(n)} = \bigvee_{i=1}^{n} A^{(i)}$$

这里，$A^{(i)}$表示做矩阵布尔乘法的i次幂。

例4(可达性矩阵计算)

求右图中图G中的可达性矩阵。



分析　直接利用定理3，先计算图的邻接矩阵A布尔乘法的2、3、4次幂，然后做布尔加即可。

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad A^{(2)}=A\odot A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

例

$$A^{(3)} = A^{(2)} \odot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(4)} = A^{(3)} \odot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

于是该图的可达性矩阵为：

$$\mathbf{P}=\mathbf{A}^{(1)}\vee\mathbf{A}^{(2)}\vee\mathbf{A}^{(3)}\vee\mathbf{A}^{(4)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

这与我们利用B_4求得的结果完全一致。