

习题 6.2

1. 求下列微分方程的解:

$$(1) \quad x^2 y' + y = 0;$$

$$(2) \quad x \sec y \, dx + (x+1)dy = 0;$$

$$(3) \quad (x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = xy;$$

$$(4) \quad yy' + e^{y^2+3x} = 0;$$

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t\sqrt{1+t^2}}{xe^x}.$$

2. 求下列齐次微分方程的解:

$$(1) \quad x \frac{dy}{dx} = y + x \sec \frac{y}{x};$$

$$(2) \quad (x+y)dx + (y-x)dy = 0;$$

$$(3) \quad xy' - y - xe^{y/x} = 0;$$

$$(4) \quad xy' \sin \frac{y}{x} - y \sin \frac{y}{x} + x = 0.$$

3. 求下列微分方程的解:

$$(1) \quad y' = \left(\frac{2}{x+y} \right)^2;$$

$$(2) \quad y' = \cos(x-2)\cos y - \sin(x-2)\sin y;$$

$$(3) \quad y' = \frac{2x+4y+3}{x+2y+1};$$

$$(4) \quad y' = \frac{1}{(4x+y+1)(4x+y)};$$

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y+x+5};$$

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y+2y+1}{2x-3}.$$

4. 求解下列初值问题:

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = y^2 + 1, \quad y(1) = 0;$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy+3x}{x^2+1}, \quad y|_{x=2} = 2;$$

$$(3) \quad y' = \frac{1}{x-y} + 1, \quad y(0) = 1;$$

$$(4) \quad y' = y - 2x - \frac{3}{y-2x}, \quad y(0) = 4;$$

$$(5) \quad y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 2;$$

$$(6) \quad (y^2 - 3x^2)dy + 3xydx = 0, \quad y(0) = 1.$$

5. 求下列线性微分方程的解:

$$(1) \quad y' - 3y = e^x;$$

$$(2) \quad y' + 4y = x;$$

$$(3) \quad y' - 2xy = x;$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{-\sin x};$$

$$(5) \quad y' \cos x = y \sin x + \sin 2x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right);$$

$$(6) \quad \cos^2 t \frac{dy}{dt} - y - \tan t = 0;$$

$$(7) \quad dx + (x+y^2)dy = 0;$$

$$(8) \quad y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}.$$

6. 求解下列初值问题:

$$(1) \quad y' + y = x + e^x, \quad y(0) = 0;$$

$$(2) \quad xy' - 3y = x^2, \quad x > 0, \quad y(1) = 0;$$

$$(3) \quad t \frac{dx}{dt} = -x + \sin t, \quad x(\pi) = 1; \quad (4) \quad y' + y \cot x = 5e^{\cos x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4.$$

7. 求解下列 Bernoulli 方程:

$$(1) \quad y' - 3xy = xy^2;$$

$$(2) \quad x \frac{dy}{dx} + 2y = \frac{y^3}{x};$$

$$(3) \quad y' + \frac{1}{x}y = 2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}};$$

$$(4) \quad xdy - [y + xy^3(1 + \ln x)]dx = 0.$$

8. 设连续函数 $f(x)$ 满足: $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt + \ln 2$, 求 $f(x)$.

9. 设连续函数 $f(x)$ 满足: $\int_0^1 f(ux)du = \frac{1}{2}f(x) + 1$, 试求 $f(x)$.

10. 函数 $y(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 定义且有连续导数, 满足

$$2 \int_0^x y(t) \sqrt{1 + y'^2(t)} dt = 2x + y^2(x)$$

试求 $y(x)$.

11. 已知镭的衰变速度与它的现存量 R 成正比, 假设镭经过 1600 年后, 只剩下原始量 R_0 的一半. 试求镭的量 R 与时间 t 的函数关系, 且求再经过多少年镭的量只剩下原始量 R_0 的十分之一.

12. 一曲线过点 $(2, 3)$, 它在两坐标轴之间的任何切线段都被切点所平分, 求此曲线.

13. 冷却或加热物体, 其温度的变化率与其自身温度及外界温度的差成正比, 这就是 *Newton* 的加热及冷却定律. 如果一瓶牛奶从 5°C 的冰箱中取出, 放在恒温 20°C 的房间中, 假定经过半小时牛奶温度为 15°C , 求经过多少时间牛奶温度为 17°C ?

14. 在一次谋杀后, 被害者尸体的温度从原来的 37°C 开始变冷. 假定周围空气温度一直保持为 20°C 不变, 而尸体温度从 37°C 降为 35°C 需要 2 小时. 试用牛顿冷却定律求:

(1) 尸体温度 H 作为时间 t (以小时为单位) 的函数的变化规律;

(2) 如果尸体被发现时的温度为 32°C , 时间是下午 4 点整, 那么谋杀是何时发生的?

15. 质量为 m 千克的物体从静止开始作自由下落. 假设在下落过程中, 空气对物体的阻力与物体的速度成正比 (比例系数为 k), 求物体下落的速度 v 随时间 t 变化的规律, 并求出物体下落的极限速度.

16. 有一个电阻 $R = 10$ 欧, 电感 $L = 2$ 亨和电源电压 $E(t) = 20\sin 5t$ 伏的串联电路, 已知电感两端的电压为电流变化率与电感的乘积, 求开关闭合后电路中的电流 $I(t)$ 与时间 t 的关系.

17. 会议室有 500 立方米的空气, 开始时不含一氧化碳, 因抽烟缘故含一氧化碳量 6% 的烟雾以 0.05 立方米/分的速率弥散到空气中, 假定一氧化碳立刻均匀分布在室内空气中, 同时排风系统以 0.06 立方米/分的速率将室内空气排出, 求经过多久室内一氧化碳含量达到 0.1%?