习题 8.3

1. 求下列函数在指定点的偏导数：

(1) $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f_x(3,4)$；

(2) $z=\ln(x+\dfrac{y}{2x})$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$；

(3) $z=(1+xy)^y$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}$ 和 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}$；

(4) $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

2. 求下列函数对每个自变量的偏导数

(1) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(2) $z=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}$；

(3) $z=\dfrac{x+y}{x-y}\sin\dfrac{x}{y}$；

(4) $z=\dfrac{\mathrm{e}^{xy}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}$；

(5) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$；

(6) $z=\arcsin(3-2xy)+\sin\left(3-\dfrac{2x}{y}\right)$；

(7) $z=\arctan\sqrt{x^y}$；

(8) $z=(1+xy)^{x+y}$；

(9) $u=x^{\frac{y}{z}}$；

(10) $u=\mathrm{e}^{x(x^2+y^2+z^2)}$；

3. 利用偏导数的几何意义求解下列各题：

(1) 求曲线$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$，在点$(2,4,5)$处的切线与$x$轴的夹角；

(2) 求曲线$\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2}, \\ x=1 \end{cases}$ 在点$(1,1,\sqrt{3})$的切线及法平面方程；

(3) 求曲面$z=x^2+\dfrac{y^2}{6}$和$z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$被平面$y=2$截得的两条平面曲线的夹角.

4. 求下列函数的二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$：

(1) $z=\sin^2(ax+by)$ （a,b为常数）；

(2) $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$；

(3) $z=x^y$；

(4) $z=y^{\ln x}$.

5. 计算下列函数的指定的偏导数：

(1) $z=x\ln(xy)$，求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$；

(2) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

(3) $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$，求$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$及$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

6. 验证下列所给函数满足指定的方程：

(1) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，Laplace 方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$；

(2) $u=\arctan\dfrac{y}{x}+\arctan\dfrac{z}{x}$，Laplace 方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$；

(3) $z=\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y)$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$；

(4) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\dfrac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2}=\dfrac{1}{r^2}$.