习题 5.6

1. 求下列曲线所围成的图形的面积：

(1) $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$；

(2) $x=2y-y^2$ 与直线 $y=2+x$；

(3) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 与两坐标轴；

(4) $x^2+3y^2=6y$ 与直线 $y=x$（两部分都要计算）；

(5) $y=\ln x$ 与直线 $y=\ln a$，$y=\ln b$（$b>a>0$）及 y 轴；

(6) $y=|\ln x|$ 与直线 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$x=\mathrm{e}$ 及 x 轴.

2. 求下列图形的面积：

(1) 抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）及其在点 $\left(\dfrac{p}{2},p\right)$ 处的法线所围成的图形；

(2) 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 与通过坐标原点的切线及 y 轴所围成的图形.

3. 求抛物线 $y=-x^2+1$ 在 $(0,1)$ 内的一条切线，使得它与两坐标轴及该抛物线所围成的图形的面积最小.

4. 求下列曲线所围成的图形的面积：

(1) 星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t; \end{cases}$

(2) 心脏线 $\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t), \\ y=a(2\sin t-\sin 2t). \end{cases}$

5. 设 P 为曲线 $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=2\sin^2 t \end{cases} \left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的一点，O 为坐标原点，记曲线与直线 OP 及 x 轴所围成的图形的面积为 S.

(1) 把 y 表示成 x 的函数，并求面积 $S=S(x)$ 的表达式；

(2) 把 S 表示成 t 的函数 $S(t)$，并求 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ 取得最大值时点 P 的坐标.

6. 求下列曲线所围成的图形的面积：

(1) 心脏线 $r=2a(1-\cos\theta)$（$a>0$）；

(2) 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$.

7. 求下列曲线所围成的图形的公共部分的面积：

(1) $r=3\cos\theta$ 及 $r=1+\cos\theta$；

(2) $r=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $r^2=\cos 2\theta$；

(3) $r^2=2\cos 2\theta$， $r=2\cos\theta$ 及 $r=1$.

8. 在双纽线 $r^2=4\cos 2\theta$ 位于第一象限部分上求一点 M，使得坐标原点 O 与点 M 的连线 OM 将双纽线所围成的位于第一象限部分的图形分为面积相等的两部分.

9. 求下列各立体的体积：

(1) 以椭圆域 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$ （$a>b>0$）为底面，且垂直于长轴的截面都是等边三角形的立体；

(2) 由曲面 $y^2+z^2=\mathrm{e}^{-2x}$ 与平面 $x=0$， $x=1$ 所围成的立体.

10. 求下列各旋转体的体积：

(1) 抛物线 $y=x^2$ 与 $y^2=8x$ 所围成的图形分别绕 x 轴、 y 轴旋转所得的旋转体；

(2) 曲线 $y=\sin x$， $y=\cos x$ $\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$， $x=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体；

(3) 摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(a>0)$ 的第一拱 $(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴所围成的图形绕直线 $y=2a$ 旋转所得的旋转体.

11. 用“薄壳法”求下列各旋转体的体积：

(1) 由曲线 $y=x(x-1)^2$ 与 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得的旋转体；

(2) 由抛物线 $y=2x-x^2$ 与直线 $y=x$ 及 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得的旋转体.

12. 求下列各旋转体的体积：

(1) 抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 与通过点 $(1,0)$ 的切线及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体；

(2) 抛物线 $y=\sqrt{8x}$ 与它在点 $(2,4)$ 处的法线及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体.

13. 设抛物线 $y=ax^2$ （$a>0, x\ge 0$）与 $y=1-x^2$ 的交点为 A，过坐标原点 O 与点 A 的直线与抛物线 $y=ax^2$ 围成一平面图形. 问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转所得的旋转体体积最大？并求此最大体积.

14. 求下列各旋转面的面积：

(1) 立方抛物线 $y=x^3$ 介于 $x=0$ 与 $x=1$ 之间的一段弧绕 x 轴旋转所得的旋转面；

(2) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 绕 x 轴旋转所得的旋转面.

15. 求抛物线 $y=\sqrt{x-1}$ 与它的通过坐标原点的切线及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的表面积.

16. 计算下列各弧长：

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2}$ 相应于 $1\le x\le \mathrm{e}$ 的一段弧；

(2) 曲线 $y=\ln(\cos x)$ 上从 $x=0$ 到 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 的一段弧；

(3) 曲线 $y=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,\mathrm{d}t$ 的全长；

(4) 曲线 $x=\arctan t$，$y=\dfrac{\ln(1+t^2)}{2}$ 相应于 $0\le t\le 1$ 的一段弧；

(5) 对数螺线 $r=\mathrm{e}^{2\theta}$ 上从 $\theta=0$ 到 $\theta=2\pi$ 的一段弧；

(6) 曲线 $\theta=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)$ 相应于 $1\le\theta\le 3$ 的一段弧.

17. 在摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$ 上求分其第一拱成 $1:3$ 的点的坐标.

18. 若 $1\mathrm{kg}$ 的力能使弹簧伸长 1cm，现在要使这弹簧伸长 10cm，问需要做多少功？

19. 用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比. 在击第一次时，将铁钉击入木板 1cm. 如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等，问铁锤击第二次时，铁钉又被击入多少？

20. 一蒸汽锅是旋转抛物面形状，开口朝上，口半径为 R，高为 H，其中盛满了密度为 ρ 的液体，问从锅中将液体全部抽出需做多少功？

21. 有一水槽，其横截面为等腰梯形，两底的长分别为 $0.8\,\mathrm{m}$ 和 $0.4\,\mathrm{m}$，高为 $0.2\,\mathrm{m}$，较长的底在上. 当盛满水时，求横截面上一侧所受的压力.

22. 边长为 a 和 b 的矩形薄板($a>b$)，与液面成 α 角斜沉于密度为 ρ 的液体内，长边平行于液面而位于深 h 处. 试求薄板每面所受的压力.

23. 一根长为 l，质量为 M 的均匀细直棒，在棒的延长线上距棒右端点 a 单位处有一质量为 m 的质点，若将该质点沿棒的延长线从 a 处移至 b 处($b>a$)，试求克服引力所做的功.

24. 求一质量为 M，半径为 R 的均匀半圆弧对位于其中心的质量为 m 的质点的引力.