习题 2.3

1. 利用夹逼定理求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\dfrac{3}{n^2+n+3}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right]$.

2. 设 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$， $(a_i>0, i=1,2,\cdots,m)$，证明： $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$.

3. 直三棱锥 $PABC$ 如图 2-13 所示，底为三角形 ABC，高为 $\overline{PA}$，试用柱体体积公式：$V=$底面积×高，构造两个数列 $\{V_n\}$，$\{\bar{V}_n\}$，使得三棱锥的体积 V_{PABC} 满足：$V_n<V_{PABC}<\bar{V}_n$，并用夹逼定理得到直三棱锥 $PABC$ 的体积公式

$$V_{PABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{PA}.$$

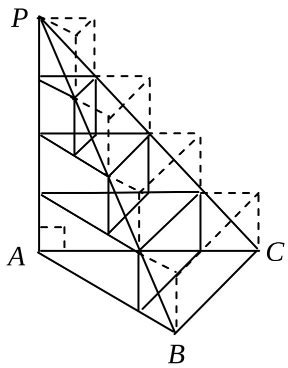

图 2-13

4. 利用单调有界数列极限存在定理，证明下列数列极限存在：

(1) $a_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\dfrac{1}{3^3+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$;

(2) $a_n=\dfrac{3}{1^2\cdot2^2}+\dfrac{5}{2^2\cdot3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

(3) $a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\dfrac{1}{n^2}$;

(4) $a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{n^n}$.

5. 证明下列递归数列收敛，并求其极限：

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=1+\dfrac{a_n}{1+a_n}, n=1, 2, \cdots$；

(2) $a_1>0, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\ (n=1, 2, \cdots)$；

(3) $a_1>10, a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}\ \ (n=1, 2, \cdots)$；

(4) $a_1=\sqrt{2}$， $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}\ \ (n=1, 2, \cdots)$.