

习题一

1. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相等:

- (1) $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2 \ln x$;
(2) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$, $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$;
(3) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;
(4) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$.

2. 试确定下列函数的定义域:

- (1) $y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$; (2) $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$;
(3) $y = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\lg(1-x)}$; (4) $y = \log_2(\log_2 x)$;
(5) $y = \frac{x}{\tan x}$; (6) $y = \lg \sin x$;
(7) $y = \lg(1 - 2\cos x)$; (8) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$.

3. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求下列函数的定义域:

- (1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$;
(3) $f(x+a)$, $(a > 0)$; (4) $f(x+a) + f(x-a)$, $(a > 0)$.

4. 用分段函数表示下列函数:

- (1) $y = |3x - 2|$; (2) $y = |3 - x| - |2x - 4|$.

5. 指出下列函数中哪些是奇函数? 哪些是偶函数? 哪些是非奇非偶函数?

- (1) $y = x^2(1 - \cos x)$; (2) $y = \lg \frac{1-x}{1+x}$;
(3) $y = x - x^2$; (4) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;
(5) $y = (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x$; (6) $y = \frac{x}{a^x + 1}$ ($a > 0$)

6. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数指出最小正周期:

- (1) $y = \sin^2 x$; (2) $y = 1 + \tan x$;
(3) $y = x \cos x$; (4) $y = \cos(\omega t + \theta)$ ($\omega > 0, \omega, \theta$ 为常数);
(5) $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$.

7. 证明:

- (1) 两个偶函数的和, 差, 积, 商为偶函数;
(2) 两个奇函数的和为奇函数;
(3) 两个奇函数的积为偶函数;
(4) 奇函数与偶函数的积为奇函数;

8. 求下列函数的表达式:

- (1) 设 $f(x) - 3f(2-x) = 2x+1$, 求 $f(x)$;

- (2) 设 $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$;
- (3) 设 $f(\sin \frac{x}{2}) = 1 + \cos x$, 求 $f(\cos \frac{x}{2})$
- (4) 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f(\varphi(x)) = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$.
9. 求下列指定函数的复合函数:
- (1) 设 $f(x) = x + 1$, $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 求 $f(\varphi(x) + 1)$;
- (2) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$, $\varphi(x) = x^2 - 1$, 求 $f(\varphi(x))$;
- (3) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, $g(x) = \ln x$, 求 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$;
- (4) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = e^x$, 求 $f(\varphi(x))$ 和 $\varphi(f(x))$;
- (5) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$, 求 $g(f(x))$, $f(f(2))$, $g(g(-1))$.
10. 设 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 试确定下列函数的奇偶性:
- (1) $f(g(x))$; (2) $g(f(x))$;
 (3) $f(f(x))$; (4) $g(g(x))$.
11. 设 $\varphi(x), \psi(x), f(x)$ 为 \mathbb{R} 上单调增加函数, 证明: 若 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, 则
- $$\varphi(\varphi(x)) \leq f(f(x)) \leq \psi(\psi(x)).$$
12. 求下列函数的严格单调区间, 在严格单调区间上求出反函数, 并指出其定义域:
- (1) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; (2) $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 1}$.
 (3) $g(x) = x^2 - 2x$; (4) $g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$;
 (5) $h(x) = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$; (6) $h(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4, \\ 2^x, & x > 4. \end{cases}$
13. 把某种溶液倒进一个圆柱形容器内, 该容器的底半径为 r , 高为 H . 设倒进溶液后液面的高度为 h 时, 溶液的体积为 V , 试把 h 表示为 V 的函数, 并指出其定义区间.
14. 一重为 W 的物体在水平路面上, 它与路面间的摩擦系数为 μ . 现用力 \vec{F} 拉物体, 且刚好拉动, 若力 \vec{F} 的方向与路面成 θ 角度, 试将力 \vec{F} 的大小 F 表示为 θ 的函数.
15. 设 M 为密度不均匀细杆 OB 上的一点, 若 OM 的质量与 OM 的长度平方成正比, 又已知 OM 长度为 4 单位时其质量为 8 单位, 试求 OM 的质量与其长度间的函数关系.
16. 将下列隐函数方程曲线转化为参数方程曲线, 并指出参数的变化范围:
- (1) $x^2 - 2x + y^2 = 3$; (2) $4x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$;

(3) $2x^2 - y = 0$;

(4) $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$;

(5) $ax + by + c = 0, a, b \neq 0$;

(6) $e^y + y^3 + 2x = 1$.

17. 设大圆的半径为 a , 圆心在 $(0,0)$, 小圆的半径为 $\frac{a}{4}$, 圆心在 $\left(\frac{3a}{4}, 0\right)$. 当小圆在大圆内作无滑动的滚动并保持与大圆相切时, 小圆上定点 $P(a,0)$ 的轨迹称为星形线, 试用参数方程表示星形线.

18. 将下列曲线方程转化为极坐标曲线方程, 并指出 θ 的变化范围:

(1) $x + y = 3$;

(2) $x^2 - 4x + y^2 = 0$;

(3) $x^2 - y^2 = 1$;

(4) $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = x^2 - y^2$.

19. 画出下列极坐标方程表示的曲线的图形:

(1) $r = 3\sin\theta$;

(2) $r = a\theta, a > 0$;

(3) $r = a\cos 4\theta$;

(4) $r = \tan\theta \sec\theta$.

20. 根据标准函数曲线图形并应用合适的图形变换画出下列函数的图形:

(1) $y = -\frac{1}{x}$;

(2) $y = 2 - \sqrt{x+1}$;

(3) $y = \cos \frac{x}{2}$;

(4) $y = \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y = |x^2 - 2x|$;

(6) $y = ||x| - 1|$.