习题 3.3

1. 求下列各函数的导数(其中 x 、 y 、 t 均为变量， a 为常数)：

(1) $y = a^x x^a$；

(2) $y = x\sin x\ln x$；

(3) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{a}{\sin a}$；

(4) $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{t}} - \dfrac{1}{1-\sqrt{t}}$；

(5) $y = (x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$；

(6) $y = 2^x(x\sin x + \cos x)$；

(7) $y = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}$；

(8) $y = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$；

(9) $y = \dfrac{x^3+2x}{\mathrm{e}^x}$；

(10) $y = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

2. 求下列函数在指定点处的导数：

(1) $y = \sec x - 2\cos x$，求 $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}$；

(2) $y = x^2\mathrm{e}^{-x}$，求 $y'\big|_{x=1}$

(3) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$，求 $f'(9)$；

(4) $f(x) = \mathrm{e}^x(x^2-x+1)$，求 $f'(1)$；

(5) $y = \dfrac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\cos\theta + \theta\sin\theta}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$.

3. 求下列各函数的反函数的导数：

(1) $y = x + \ln x$；

(2) $y = \sinh x$；

(3) $y = \mathrm{e}^{\arcsin x}$；

(4) $y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(5) $\theta = r\arctan r$.

4. 求下列各函数的导数：

(1) $y = (x^3-x)^6$；

(2) $y = \sqrt[3]{(x^2+x+2)^2}$；

(3) $y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$；

(4) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$；

(5) $y = \dfrac{1-\sqrt[3]{2x-1}}{1+\sqrt[3]{2x-1}}$;

(6) $y = \sin 2x + \cos x^2$;

(7) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$;

(8) $y = \sin^n x \cdot \cos nx$;

(9) $y = \sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$;

(10) $y = \cos^2 \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

(11) $y = \sin\left[\sin(\sin 2x)\right]$;

(12) $y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$;

(13) $y = 2^{\tan\frac{1}{x^2}}$;

(14) $y = \sin \mathrm{e}^{x^2+2x-2}$;

(15) $y = \mathrm{e}^{\cosh 2x+\sqrt{1-x}}$;

(16) $y = \ln^3 x^2$;

(17) $y = \ln\left[\ln(\ln x)\right]$;

(18) $y = \log_5\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$;

(19) $y = \ln\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(20) $y = \ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$;

(21) $y = \sec^3(\ln x)$;

(22) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$;

(23) $y = \arccos\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$;

(24) $y = \arctan\dfrac{x^2}{2}$;

(25) $y = \dfrac{\arccos x}{x}$;

(26) $y = \sqrt{x} - \arctan\sqrt{x}$;

(27) $y = x + \sqrt{1-x^2}\arcsin x$;

(28) $y = \arccos(\ln x)$;

(29) $y = \ln(\arccos 2x)$;

(30) $y = \arcsin(2\sqrt{\sin x})$;

(31) $y = \mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}$;

(32) $y=\cos\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$；

(33) $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\quad(a>0)$；

(34) $y=\sin^2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$；

(35) $y=x\arcsin(\ln x)$；

(36) $y=10^{x\tan 2x}$；

(37) $y=\mathrm{e}^x\cos^3 x\ln x$；

(38) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$；

(39) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(40) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

5. 用对数求导法求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{(x+1)^2\cdot\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$；　　(2) $y=\sqrt{x\cdot\sin x\cdot\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$；

(3) $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$；　(4) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

6. 求下列函数的导数：

(1) $y=x|x|$；

(2) $y=\left|(x-1)^2(x+1)^3\right|$；

(3) $y=\left|\sin^3 x\right|$；

(4) $y=\arccos\dfrac{1}{|x|}$.

7. 设 $f(x),\varphi(x),\phi(x)$ 可导，求下列函数的导数：

(1) $y=f(x^2)$；

(2) $y=f(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^{f(x)}$；

(3) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$；

(4) $y=f\{f[f(x)]\}$；

(5) $y=\arctan\dfrac{\varphi(x)}{\phi(x)}$；

(6) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\phi^2(x)}$.