

习题 7.5

- 过定点 $(-R, 0, 0)$ 作球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的弦, 求动弦中点的轨迹方程.
- 说出下列曲面方程的名称, 并作出草图:
 - $x^2 + y^2 = 2az (a > 0)$;
 - $x^2 - y^2 = 2az (a > 0)$;
 - $z = 2 + x^2 + y^2$;
 - $y - x^2 + z^2 = 0$;
 - $x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 1 = 0$;
 - $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$.
- 说出下列曲面方程的名称, 并作出草图:
 - $x^2 + y^2 = 1$;
 - $x^2 = 1$;
 - $x^2 - y^2 = 0$;
 - $y - 3z = 0$;
 - $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$;
 - $x^2 = 2az$;
 - $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;
 - $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1$;
 - $x^2 - y^2 = z^2$;
 - $z^2 = 3x^2 + 4y^2$.
- 写出适合下列条件的旋转曲面的方程:
 - 曲线 $\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周;
 - 曲线 $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周;
 - 曲线 $\begin{cases} y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周;
 - 曲线 $\begin{cases} z^2 = 5x \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周.
- 说明下列旋转曲面是如何形成的并写出它的名称:
 - $x^2 + z^2 - \frac{y^2}{4} = 1$;
 - $x^2 + y^2 = 4z$;
 - $\frac{z^2}{16} - \frac{x^2 + y^2}{9} = 1$;
 - $x^2 + y^2 = 4z^2$.
- 指出下列方程表示的曲线:
 - $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x = 3 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25 \\ y+1 = 0 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1 \\ x-2 = 0 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} x^2 = 4y \\ z = 1 \end{cases}$;
- 将曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z = 2 \end{cases}$ 表示为参数方程, 并求其沿 z 轴方向的投影柱面及在 xOy 面上的投影曲线;
 - 将曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y + z = 1$ 的交线 C 表示为参数方程, 并求其沿 z 轴方向的投影柱面及在 xOy 面上的投影曲线;
 - 将曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 和 $z = x^2 + y^2$ 的交线 C 表示为参数方程, 并求其沿 x 轴方向的投影柱面及在 yOz 面上的投影曲线;
 - 将旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $y + z = 1$ 的交线 C 表示为参数方程, 并求其在各坐标面上的投影曲线;

(5) 分别求母线平行于 x 轴和 y 轴, 且通过曲线 $C: \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 的柱面方程;

(6) 求柱面 $z^2 = 2x$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围立体在三坐标面上的投影区域.

8. 把下列曲线 C 的参数方程化为一般式方程:

$$(1) \ C: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2\cos t - 1, \\ z = 3\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]; \quad (2) \ C: \begin{cases} x = t + a, \\ y = \sqrt{a^2 - t^2}, \\ z = \sqrt{2a(a - t)} \end{cases}, \quad t \in [-a, a].$$

9. 试建立下列曲面的参数方程:

(1) 椭圆柱面: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1;$

(2) 双曲柱面: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1;$

(3) 双叶双曲面: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$

(4) 椭圆抛物面: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = z - z_0;$

(5) 双曲抛物面: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z;$

(6) 二次锥面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$