

习题一

1. 设集合 $A=\{a, b, c\}$, $B=\{b, e, f\}$, $C=\{a, c\}$, 求 $A \cup B$, $B \cap C$, $A \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $(B \cap C) \cup (A \cap C)$.
2. 设 $A=\{x \mid x^2 \leq 1\}$, $B=\{x \mid |x-1| < 1\}$ 是实数域的两个子集, 写出 $A \cup B$, $A \cap B$, $A-B$, $B-A$ 的表达式.
3. 解下列绝对值不等式:
 - (1) $|x+1| < |2x-3|$;
 - (2) $|x+3| > |x-5|+7$;
 - (3) $|x^2-3x-4| < 6$
4. 求下列数集的上确界和下确界:
 - (1) $E=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$;
 - (2) $E=\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 9\}$;
 - (3) $E=\{-n(3+(-3)^n) \mid n \in \mathbf{N}_+\}$;
 - (4) $E=\{e^{-\frac{1}{x^2}} \mid x \neq 0\}$.
5. 用数学归纳法证明下列各题:
 - (1) $1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $n \in \mathbf{N}_+$;
 - (2) $|\sin nx| \leq n|\sin x|$, $n \in \mathbf{N}$;
 - (3) $(1+x)^n > 1+nx$, 其中 $x > -1$, $x \neq 0$, $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}_+$.
6. 利用 $A-G$ 不等式证明下列不等式:
 - (1) $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}_+$;
 - (2) $\sqrt[n]{n}-1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbf{N}_+$.