本次课内容

一、图论简介

二、图的基本概念

三、图的表示

四、图的分类

五、子图与补图

六、顶点度数与握手定理

七、图的同构及其判定

图论简介

图是一类具有广泛实际问题背景的数学模型，有着极其丰富的内容，是数据结构等课程的先修内容。学习时应掌握好图论的基本概念、基本方法和基本算法，善于把实际问题抽象为图论的问题，然后用图论的方法去解决。

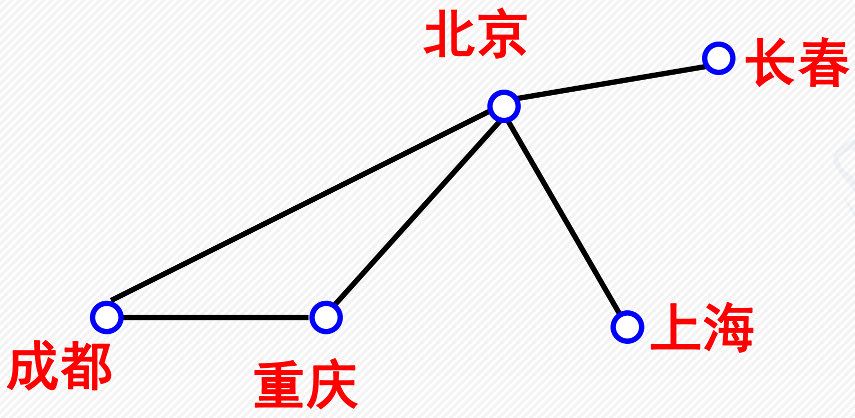
图论作为一个数学分支，有一套完整的体系和广泛的内容，本篇仅介绍图论的初步知识，其目的在于今后对计算机有关学科的学习和研究时，可以以图论的基本知识作为工具。

我们所讨论的图(Graph)与人们通常所熟悉的图，例如圆、椭圆、函数图表等是很不相同的。图论中所谓的图是指某类具体离散事物集合和该集合中的每对事物间以某种方式相联系的数学模型。

如果我们用点表示具体事物，用连线表示一对具体事物之间的联系。那么，一个图就是由一个表示具体事物的点的集合和表示事物之间联系的一些线的集合所构成，至于点的位置和连线的长短曲直是无关紧要的。

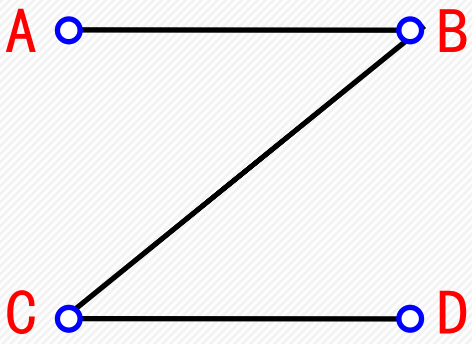
图模型举例：

例1（1）考虑一张航线地图，图中用点表示城市，当两个城市间有直达航班时，就用一条线将相应的点连接起来。这种航线地图的一部分如下图所示：



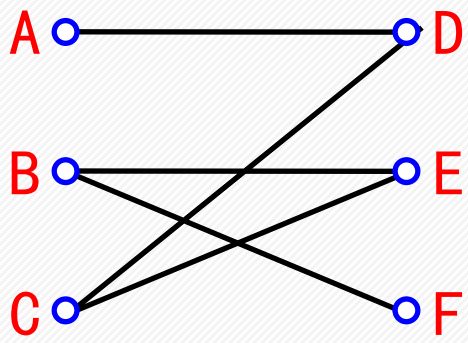
例1（2）

假设有4台计算机，分别标记为A、B、C和D，在计算机A和B、C和D以及B和C之间有信息流。这种情形可用下图表示，通常称这种图为**通信网络**；



例1（3）

假设有一群人和一组工作，这群人中的某些人能够做这组工作中的某些工作。例如，有3个人A、B和C，3件工作D、E和F，假设A只能做工作D，B能做工作E和F，C能做工作D和E。则这种情形可用下图表示，其中，在人和这个人能够做的工作之间画有线。



定义1(图的定义)

一个图(Graph)是一个序偶<V, E>，记为G = <V, E>，

其中：

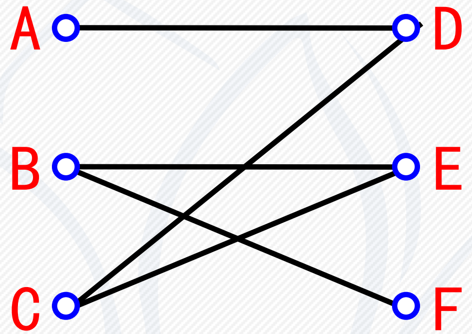
（1）$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$是有限非空集合，$v_i$称为顶点\结点(Nodal Point)，简称点(Point)，V称为顶点集(Nodal Set)。

（2）E是有限集合，称为边集(Frontier Set)。E中的每个元素都有V中的结点对与之对应，称之为边(Edge)。

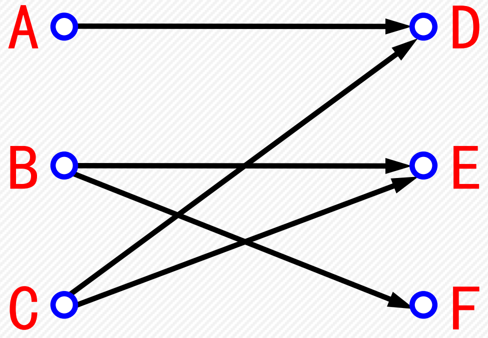
顶点集V为空集的图，称为空图，记为∅。含有n个结点的图称为n阶图。

图中的其它几个基本概念

若边e与无序结点对(u,v)相对应，则称e为无向边(Undirected Edge)，记为e = (u, v) = (v, u)，这时称u、v是边e的两个端点(End point)。



若边e与有序结点对<u, v>相对应，则称e为有向边(Directed Point)(或弧)，记为e = <u, v>，这时称u为e的始点(Initial Point)(或弧尾)，v为e的终点(terminal Point)(或弧头)， u、v统称为e的端点。



邻接点与邻接边

定义2　在图G = <V, E>中，若两个结点v_i和v_j是边e的端点，则称v_i与v_j互为邻接点(Adjacent Point)，否则v_i与v_j称为不邻接的，图中不与任何结点相邻接的结点称为孤立结点。

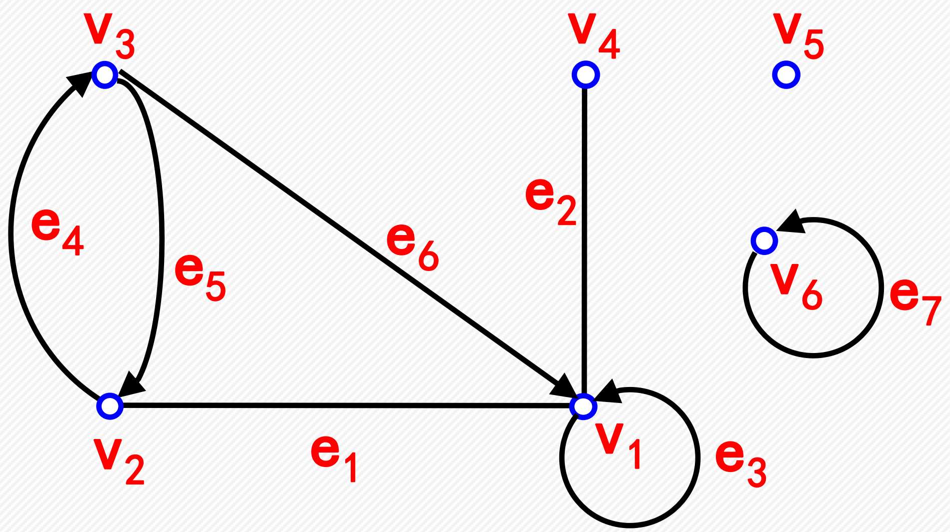
仅由孤立结点组成的图称为零图，仅含一个结点的零图称为平凡图(Trivial Graph)，记为N_1；N阶零图记为N_n;含有n个结点，m条边的图，称为(n, m)图。

若G为无向图，G中具有公共结点的两条边称为邻接边(Adjacent Edge)；若G为有向图，两条边中一条边的终点是另一条边的始点，则称这两条边为邻接边。端点相同的边称为环(Ring)或自回路。

注意：有的教材定义-具有公共结点的两条边称为邻接边

例

试写出下图所示图G的所有结点的邻接点、所有边的邻接边，并指出所有的孤立结点和环。



图G既不是平凡图，也不是零图，而是一个(6，7)图。

结点	邻接点	是否孤立结点		边	邻接边	是否环
v_1	V_1, v_2, v_3, v_4	否		e_1	$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$	否
v_2	v_1, v_3	否		e_2	e_1, e_2, e_3, e_6	否
v_3	v_1, v_2	否		e_3	e_1, e_2, e_3, e_6	是
v_4	v_1	否		e_4	e_1, e_4, e_5, e_6	否
v_5		是		e_5	e_1, e_4, e_5, e_6	否
v_6	v_6	否		e_6	$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$	否
				e_7	e_7	是

需要注意的是，只要当一一个结点处有环时，它才是自己的邻接点;由于一条边有两个端点，在计算邻接边时要把这两个端点都算_上，例如e_2和e_4都是e_1的邻接边。所有边都是自己的邻接边。

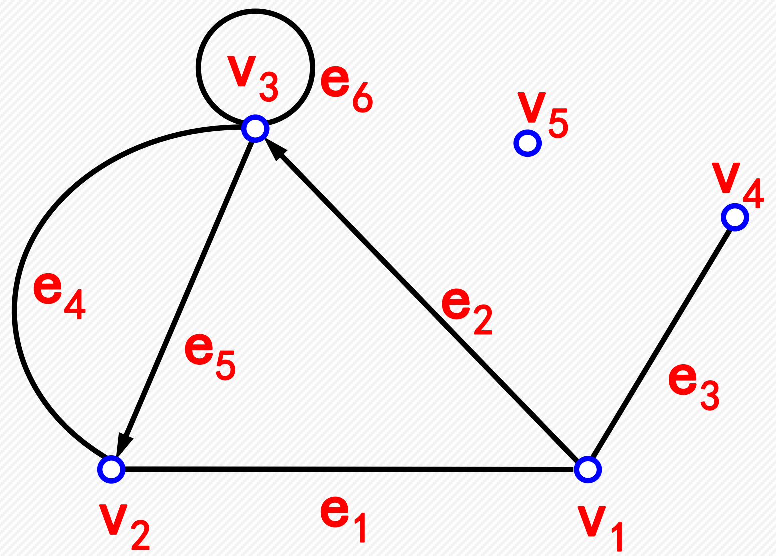
对于一个图G，如果将其记为G = <V, E>，并写出V和E的集合表示，这称为图的集合表示。

而为了描述简便起见，在一般情况下，往往只画出它的图形：用小圆圈表示V中的结点，用由u指向v的有向线段或曲线表示有向边<u, v>，无向线段或曲线表示无向边(u, v)，这称为图的图形表示。

设图$G=\langle V, E\rangle$，这里$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$，其中$e_1=(v_1, v_2)$，$e_2=\langle v_1, v_3\rangle$，$e_3=(v_1, v_4)$，$e_4=(v_2, v_3)$，$e_5=\langle v_3, v_2\rangle$，$e_6=(v_3, v_3)$。试画出图G的图形，并指出哪些是有向边，哪些是无向边？

解

G的图形如下图所示。



G中的e_1、e_3、e_4、e_6是无向边，e_2、e_5是有向边。

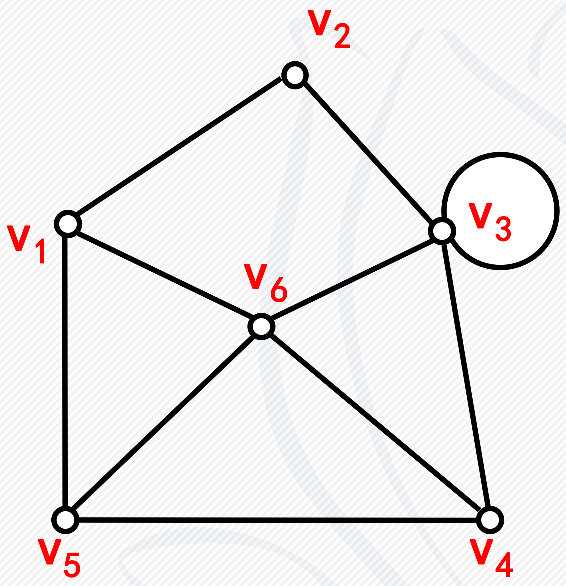
定义3 设图$G = \langle V, E\rangle$，其中$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，并假定结点已经有了从$v_1$到$v_n$的次序，则n阶方阵$A_G = (a_{ij})_{n\times n}$称为G的邻接矩阵(Adjacency Matrix)，其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & 若(v_i,v_j)\in E或<v_i,v_j>\in E \\ 0, & 否则 \end{cases} \qquad i,j=1,2,3,\cdots,n$$

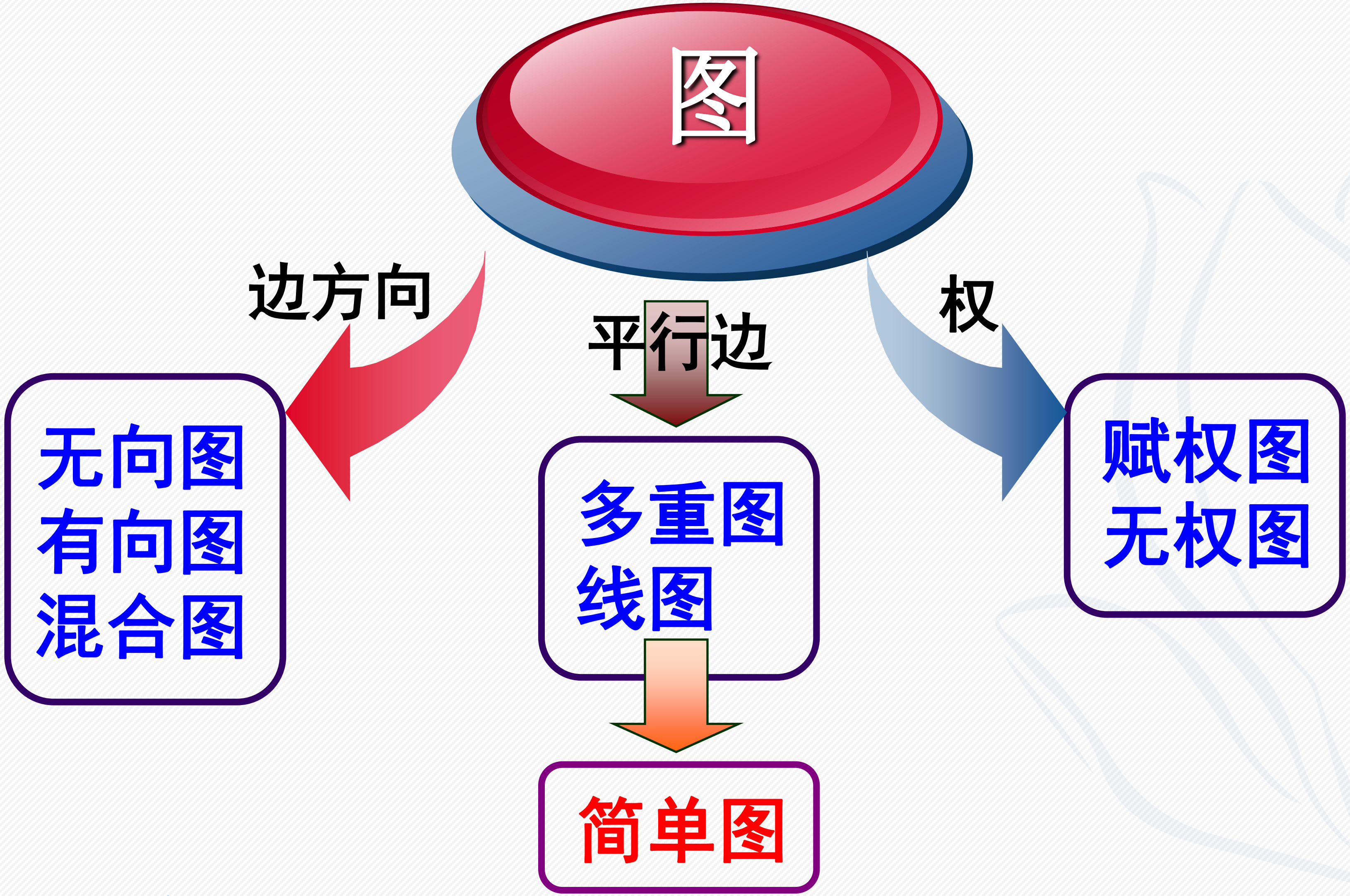
例3（图与邻接矩阵）

试写出下图所示图G的邻接矩阵。

$$
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



图的分类

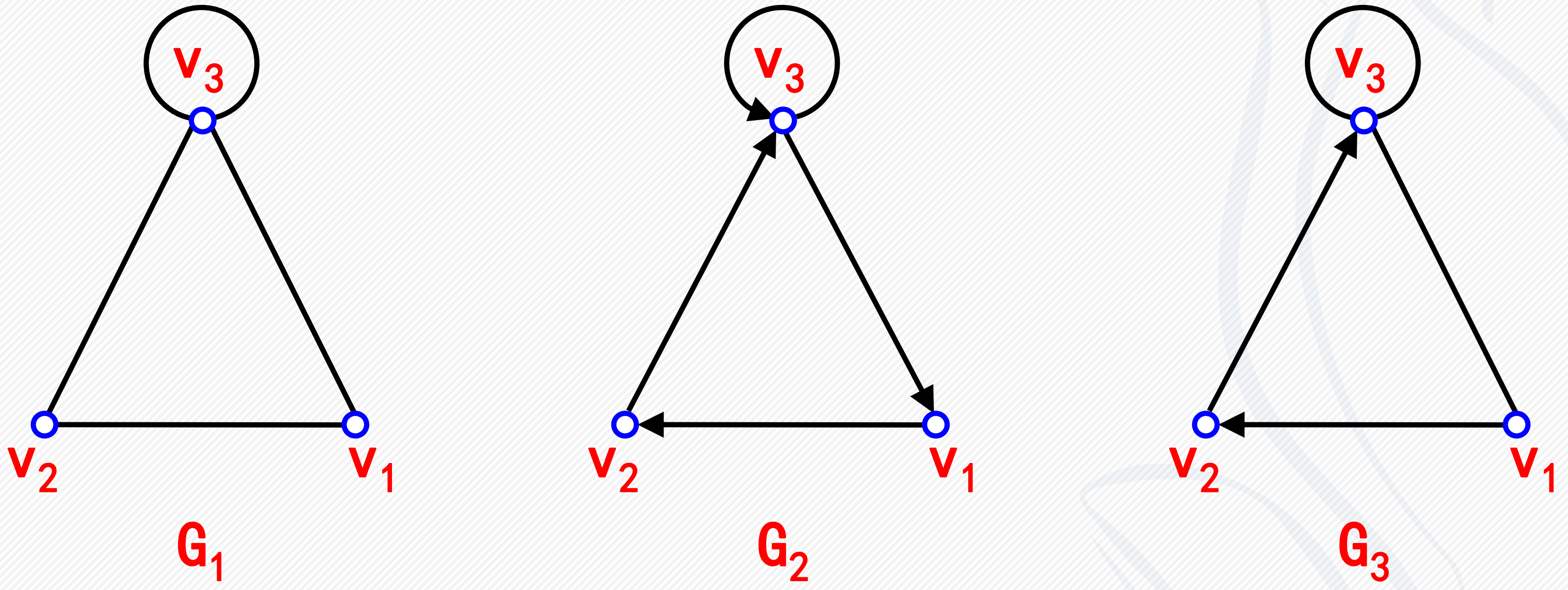


按边有无方向分类

定义4 每条边都是无向边的图称为无向图(Undirected Graph)；每条边都是有向边的图称为有向图(Directed Graph)；有些边是无向边，而另一些边是有向边的图称为混合图(Mixed Graph)。

例4(认识图的类型)

试判断下图所示的三个图是无向图、有向图，还是混合图？



分析　判断无向图、有向图和混合图，仅仅看边有无方向就行了。

解　G_1为无向图，G_2为有向图，G_3为混合图。

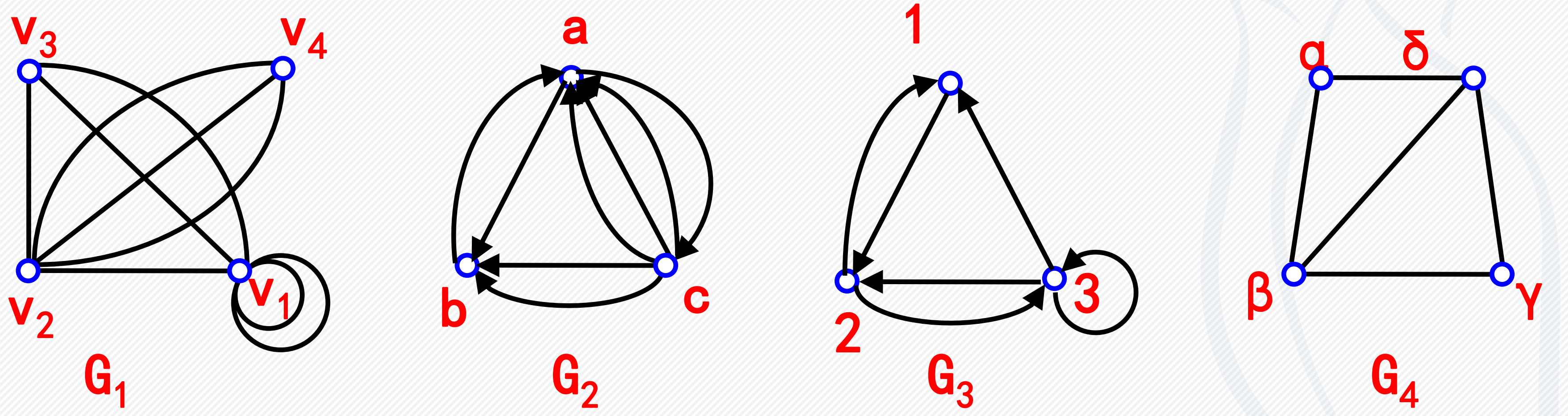
按有无平行边分类

定义5　在有向图中，两结点间(包括结点自身间)若有同始点和同终点的几条边，则这几条边称为平行边(Parallel Edge)；　　在无向图中，两结点间(包括结点自身间)若有几条边，则这几条边称为平行边。两结点a、b间相互平行的边的条数称为边(a, b)或<a, b>的重数(Repeated Number)。

含有平行边的图称为多重图(Multigraph)；非多重图称为线图(Line Graph)；无环的线图称为简单图(Simple Graph)。

例5（认识图的类型）

试判断下图所示的4个图是多重图、线图，还是简单图？并指出多重图中所有平行边的重数。



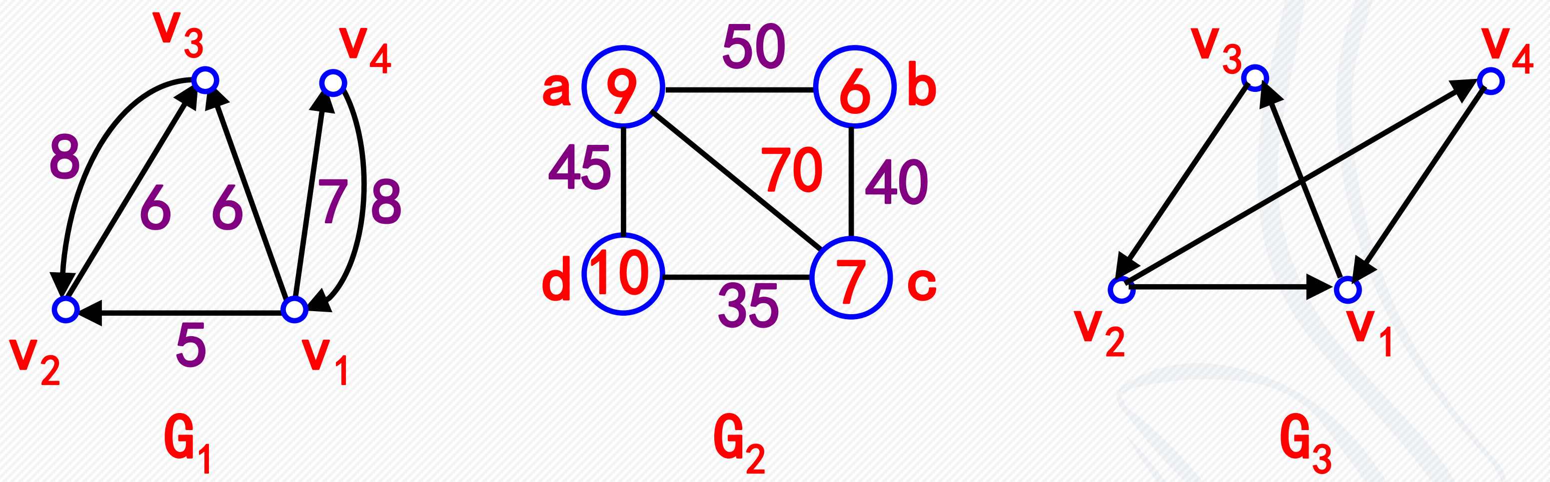
分析　多重图和线图，仅仅看有无平行边；简单图是一种特殊的线图，仅仅无环而已。两个端点都相同的无向边是平行边，但两个端点都相同的同向边是平行边，例如G_2中<a, c>和<c, a>就不是平行边，因此<c, a>的重数是3，而不是4。

解　G_1、G_2是多重图，G_3是线图，G_4是简单图。G_1中平行边(v_1, v_1)的重数为2，(v_1, v_3)的重数为2，(v_2, v_4)的重数为3；G_2中平行边<c, a>的重数为3，<c, b>的重数为2.

定义5　赋权图(Weight Graph)G是一个三重组<V, E, g>或四重组<V, E, f, g>，其中V是结点集合，E是边的集合，f是从V到非负实数集合的函数，g是从E到非负实数集合的函数。

例6(认识图的类型)

下图所示的图哪个是赋权图，哪个是无权图？是赋权图的请写出相应的函数。



解

分析： 对每条边都赋予非负实数值，或者对每条边和每个结点都赋予非负实数值的图就是赋权图。图G_1的每条边都赋予了非负实数值，因此图G_1是赋权图。图G_2的每条边和每个结点都赋予了非负实数值，因此图G_2是赋权图。而图G_3的边没有赋予非负实数值，因此图G_3不是赋权图。

在图中，G_1、G_2是赋权图，G_3不是赋权图。记图$G_1=\langle V_1, E_1, g_1\rangle$和$G_2=\langle V_2, E_2, f_2, g_2\rangle$，其中：

$g_1(\langle v_1, v_2\rangle)=5$，$g_1(\langle v_1, v_3\rangle)=6$，

$g_1(\langle v_1, v_4\rangle)=7$，$g_1(\langle v_2, v_3\rangle)=6$，

$g_1(\langle v_3, v_2\rangle)=8$，$g_1(\langle v_4, v_1\rangle)=8$。

$f_2(a)=9$，$f_2(b)=6$，$f_2(c)=7$，$f_2(d)=10$；

$g_2((a, b))=50$，$g_2((a, c))=70$，

$g_2((a, d))=45$，$g_2((b, d))=40$，

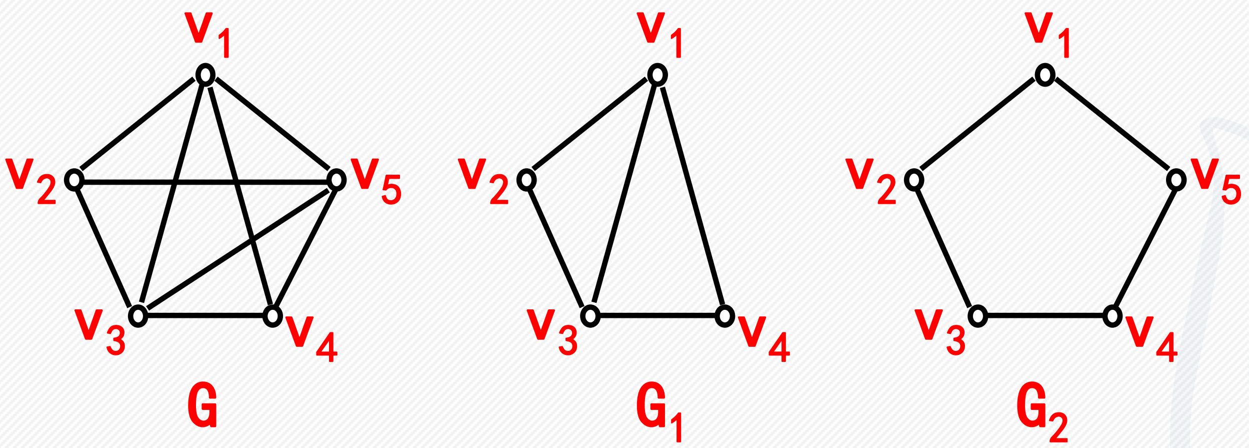
$g_2((c, d))=35$，

子图与补图

定义6 设有图$G = \langle V, E\rangle$和图$G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$。

1. 若$V_1 \subseteq V$，$E_1 \subseteq E$，则称G为G_1的母图，G_1是G的子图(Subgraph)，记为$G_1 \subseteq G$。
2. 若$G_1 \subseteq G$，且$G_1 \neq G$(即$V_1 \subset V$或$E_1 \subset E$)，则称G_1是G的真子图(Proper Subgraph)，记为$G_1 \subset G$。
3. 若$V_1 = V$，$E_1 \subseteq E$，（ $G' \subseteq G$且$V \doteq V$ ）则称G_1是G的生成子图(Spanning Subgraph)。
4. 设$V_2 \subseteq V$且$V_2 \neq \Phi$，以V_2为结点集，以两个端点均在V_2中的边的全体为边集的G的子图，称为V_2导出的G的子图，简称V_2的导出子图(Induced Subgraph)。

例7(点导出子图与生成子图识别)



$G_1 = G[\{v_1, v_2, v_3, v_4\}]$

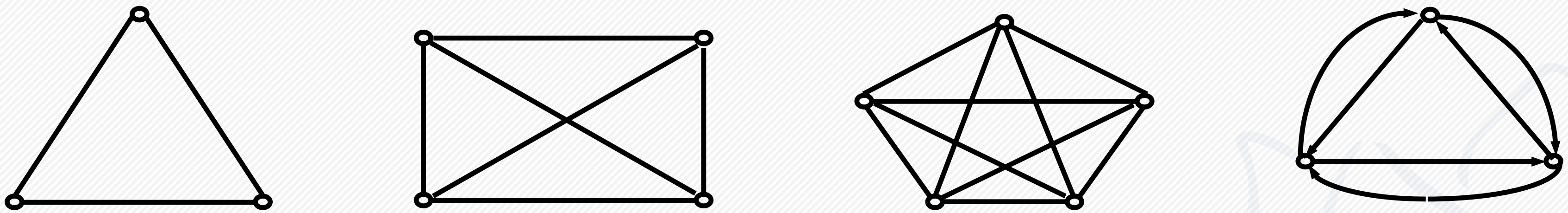
G_1是图G的导出子图，G_2是G的一个生成子图

定义7(完全图与有向完全图)

设G = <V, E>为一个具有n个结点的无向简单图，如果G中任意两个结点间都有边相连，则称G为无向完全图(Undirected Complete Graph)，简称G为完全图(Complete Graph)，记为K_n。

设G = <V, E>为一个具有n个结点的有向简单图，如果G中任意两个结点间都有两条方向相反的有向边相连，则称G为有向完全图(directed Complete Graph)，在不发生误解的情况下，也记为K_n。基图为n阶无向完全图K_n的有向简单图称为n（n≥1）阶竞赛图。

例8（完全图与有向完全图的边数）



K_3 K_4 K_5 K_3

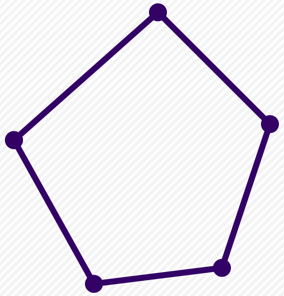
无向完全图K_n的边数为 $C(n, 2) = \frac{1}{2}n(n-1)$

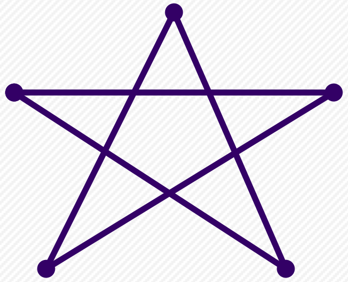
有向完全图K_n的边数为 $P(n, 2) = n(n-1)$

n （n≥1） 阶竞赛图的边数为$m=n(n-1)/2$

定义8(简单图的补图)

设$G = \langle V, E\rangle$为简单图，$G' = \langle V, E_1\rangle$为完全图，则称$G_1 = \langle V, E_1-E\rangle$为G的补图(Complement of Graph)，记为$\overline{G}$。





分析　互为补图的两个图的结点集相同，边集是相对于完全图的边集为全集的补集。具体做的时候，可先补充一些边使其变为完全图，然后再删除原来图中的边得到。

结点的度数

定义8（1）无向图G = <V, E>中以结点$v\in V$为端点的边数(有环时计算两次)称为结点v的度数(Degree)，简称度，记为$deg(v)$或$d_G(v)$或$d(v)$。顶点v上的环作两次端点。

（2）有向图G = <V, E>中以结点v为始点的边数称为v的出度(Out-Degree)，记为$deg^+(v)$或$d_G{}^+(v)$或$d^+(v)$；以结点v为终点的边数称为v的入度(In-Degree)，记为$deg^-(v)$或$d_G{}^-(v)$或$d^-(v)$。显然，$deg(v) = deg^+(v)+deg^-(v)$。顶点v上的环作一次始点和一次终点。

（3）对于图G = <V, E>，度数为1的结点称为悬挂结（顶）点(Hanging Point)，以悬挂结点为端点的边称为悬挂边。度为偶数（奇数）的顶点称为偶度（奇度）顶点。

结点的度数

设$G=\langle V,E\rangle$为无向图，

G的**最大度**$\Delta(G)=\max\{d(v) \mid v\in V\}$

G的**最小度** $\delta(G)=\min\{d(v) \mid v\in V\}$

设$D=\langle V,E\rangle$为有向图，

D的**最大度**$\Delta(D)=\max\{d(v) \mid v\in V\}$

D的**最小度** $\delta(D)=\min\{d(v) \mid v\in V\}$

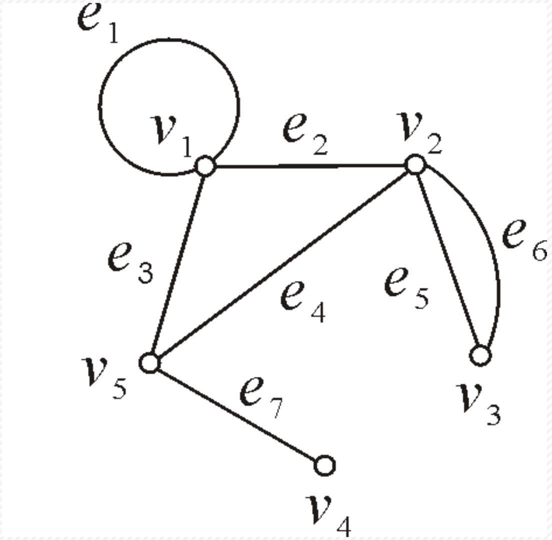
D的**最大出度**$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v) \mid v\in V\}$

D的**最小出度** $\delta^+(D)=\min\{d^+(v) \mid v\in V\}$

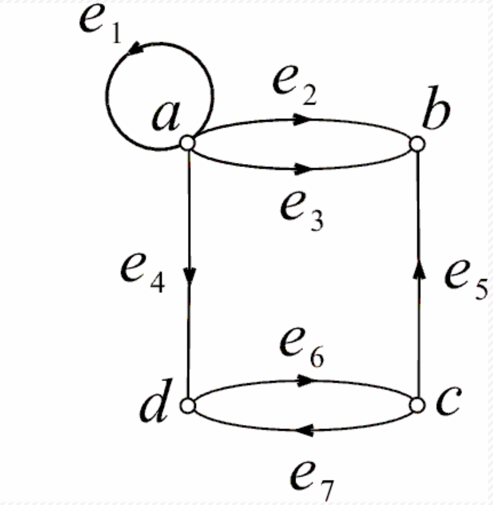
D的**最大入度**$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v) \mid v\in V\}$

D的**最小入度** $\delta^-(D)=\min\{d^-(v) \mid v\in V\}$

例



$d(v_1)=4$, $d(v_2)=4$, $d(v_3)=2$, $d(v_4)=1$,
$d(v_5)=3$.
$\Delta=4$, $\delta=1$.
v_4是悬挂点, e_7是悬挂边.



$d^+(a)=4$, $d^-(a)=1$, $d(a)=5$,
$d^+(b)=0$, $d^-(b)=3$, $d(b)=3$,
$d^+(c)=2$, $d^-(c)=1$, $d(c)=3$,
$d^+(d)=1$, $d^-(d)=2$, $d(d)=3$,
$\Delta^+=4$, $\delta^+=0$, $\Delta^-=3$, $\delta^-=1$, $\Delta=5$, $\delta=3$.

定理1(握手定理或欧拉定理)

图中结点度数的总和等于边数的二倍，即设图G = <V, E>，则有

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

证明　因为每条边都有两个端点(环的两个端点相同)，所以加上一条边就使得各结点的度数之和增加2，因此结论成立。

推论1(图论中的一个重要推论)

图中度数为奇数的结点个数为偶数。

证明 设图$G = \langle V, E\rangle$，$V_1 = \{v \mid v \in V$且$\deg(v)$为奇数$\}$，$V_2 = \{v \mid v \in V$且$\deg(v)$为偶数$\}$。

显然，$V_1 \cap V_2 = \phi$，且$V_1 \cup V_2 = V$，于是

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v) = 2|E|$$

定理2(有向图中的握手定理)

有向图中各结点的出度之和等于各结点的入度之和，等于边数，即设有向图G = <V, E>，则有

$$\sum_{v \in V} \deg^{+}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = |E|$$

例　　无向图G有16条边，3个4度顶点，4个3度顶点，其余均为2度顶点度，问G的阶数n为几？

解　　本题的关键是应用握手定理.
设除3度与4度顶点外，还有x个顶点，由握手定理，

$$16\times 2=32 = 3\times 4+4\times 3+2x$$

解得 $x = 4$，阶数 $n = 4+4+3=11$.

定义 设G=<V, E>为无向图.

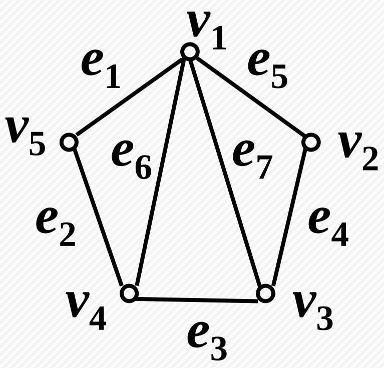
(1) 设$e\in E$，用$G-e$表示从G中去掉边e，称为**删除边e**. 又设$E'\subset E$，用 $G-E'$ 表示从G中删除E' 中的所有边，称为**删除E'**.

(2) 设$v\in V$，用$G-v$表示从G中去掉v及所关联的所有边，称为**删除顶点v**. 又设$V'\subset V$，用$G-V'$ 表示从G中删除V' 中所有的顶点，称为**删除V'**.

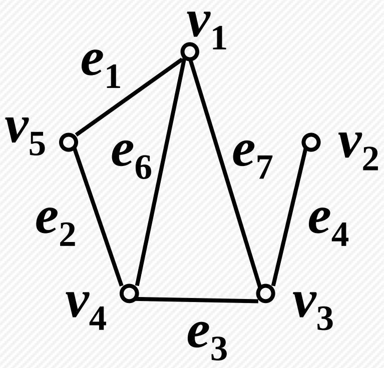
(3) 设$e=(u,v)\in E$，用$G\setminus e$表示从G中删除e后，将e的两个端点u, v用一个新的顶点w（可以用u或v充当w）代替，并使w关联除e以外u, v关联的所有边，称为**收缩边e** .

(4) 设$u,v\in V$（u, v可能相邻，也可能不相邻），用$G\cup(u,v)$（或$G+(u,v)$）表示在u, v之间加一条边(u, v)，称为**加新边**.

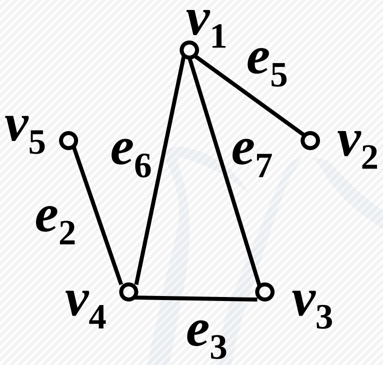
在收缩边和加新边过程中可能产生环和平行边.



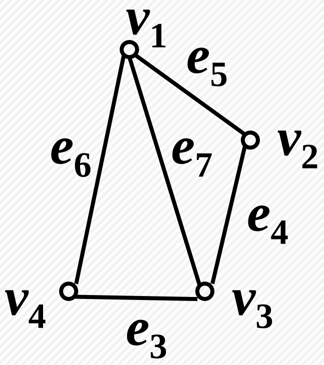
G



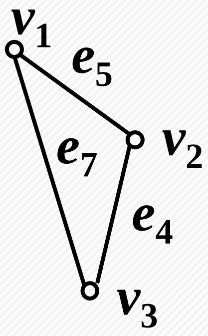
$G-e_5$



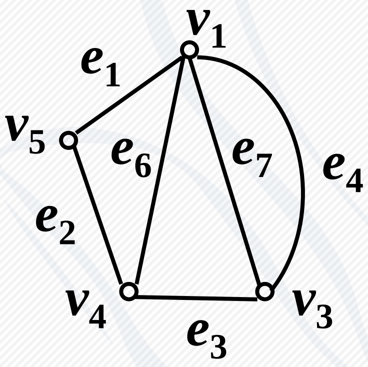
$G-\{e_1,e_4\}$



$G-v_5$



$G-\{v_4,v_5\}$

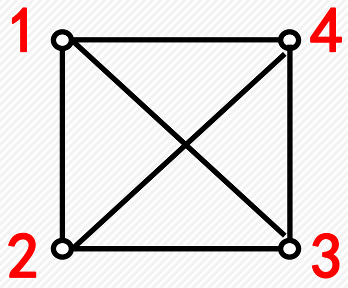


$G \setminus e_5$

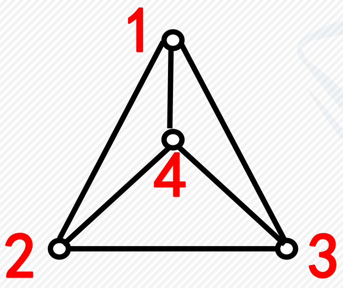
图的同构

图是表达事物之间关系的工具，因此，图的最本质的内容是结点和边的关联关系。而在实际画图时，由于结点的位置不同，边的长短曲直不同，同一事物间的关系可能画出不同形状的图来。

例如下图中的两个图G_1和G_2实际上是同一个图K_4。



G_1



G_2

定义9(图同构定义)

设两个图G = <V, E>和G' = <V', E'>，如果存在双射函数g：V→V'，使得对于任意的e = (v_i, v_j)(或者<v_i, v_j>)∈E当且仅当e' = (g(v_i), g(v_j))(或者<g(v_i), g(v_j)>)∈E'，并且e与e'的重数相同，则称G与G'同构(Isomorphism)，记为G≌G'。

对于同构，形象地说，若图的结点可以任意挪动位置，而边是完全弹性的，只要在不拉断的条件下，一个图可以变形为另一个图，那么这两个图是同构的。

两个图同构的必要条件

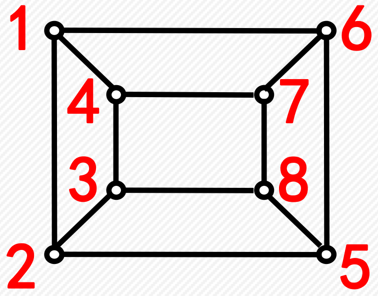
（1）结点数目相同；

（2）边数相同；

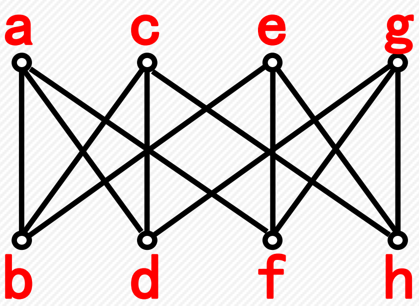
（3）度数相同的结点数相同。

例9（图同构证明）

试证明下图中，G≌G’。



G



G’

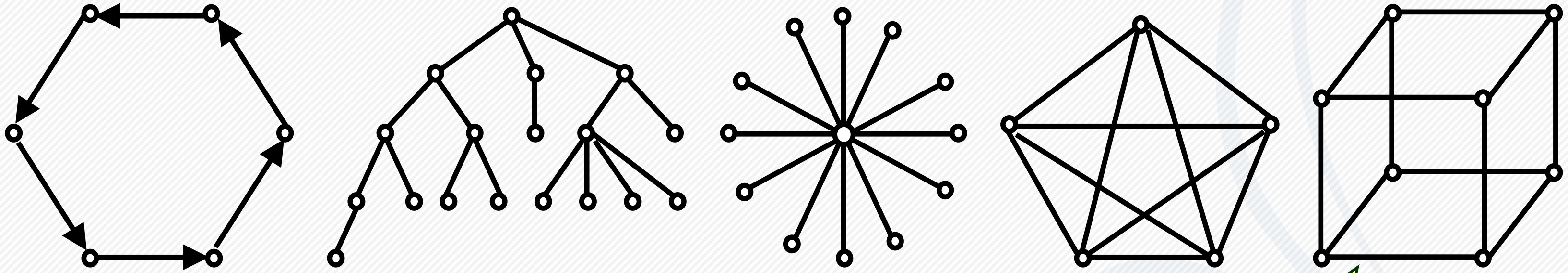
分析　证明两个图同构，关键是找到满足要求的结点集之间的双射函数，现在还没有好的办法，只有凭经验去试。

证明　在两个图之间作双射f：f(1)=a，f(2)=b，f(3)=c，f(4)=d，f(5)=e，f(6)=f，f(7)=g，f(8)=h

容易验证，f满足定义，所以G≌G’。

典型通信网络结构简介

通信网络中最重要的整体问题之一是网络的结构形式。通信网络是一个强连通的有向图，根据用途和各种性能指标有着不同的结构形式，下图给出了一些典型的结构。



(a) (b) (c) (d) (e)

环（Ring）型网络

树（Tree）型网络

星

分布式（Dist

网络

立方体（Cube）型网络