襄樊职业技术学院学报
第 9 卷　第 2 期
双月刊　2010 年 3 月

含有 n! 的数列极限问题的解题方法

刘俊先

（邢台学院，河北 邢台 054001）

摘　要：本文通过实例介绍了数列通项中含有 n! 的一类极限问题的几种处理方法。

关键词：数列；极限问题；解题方法

中图分类号：G623.5　　文献标识码：A　　文章编号：1671-914X（2010）02-0026-02

极限理论是数学分析的理论基础，数列极限是极限理论的重要组成部分，正确处理数列极限问题尤其重要。在数列极限问题中，对于数列通项中含有 n!这一类极限问题，下面通过实例给出几种解题方法。

一、利用泰勒公式证明极限存在

例 1　证明$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi\, en!)=2\pi$.

证：由泰勒公式得：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{3e\theta x}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1,x\in(-\infty,+\infty).$$

$$e=2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!},$$

$$e=2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{e^{\theta n+1}}{(n+2)!},0<\theta_n,\theta_{n+1}<1,$$于是有：

$$\frac{e\theta n}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{e^{\theta n+1}}{(n+2)!}\ ,e^{\theta x}=1+\frac{1}{n+2}e^{\theta n+1},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} e^{\theta n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+2}e^{\theta n+1})=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=0$.

又 $2\pi\, en!=2\pi\,(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta n})n!$

$=2\pi\,(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})n!+\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta n})$

$=2\pi\, k+\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta n}$[其中 $k=(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})n!$]

$$n\sin(2\pi\, en!)=n\sin(2\pi\, k+\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta n})=n\sin\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta n}$$

$$=n\cdot\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta n}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta n}}{\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta n}}$$

因此 $$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi\, en!)=\lim_{n\to\infty}2\pi\ \frac{n}{n+1}e^{\theta n}\frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta n}}{\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta n}}$$

$$=2\pi\ .$$

一般来说，数列通项中有 en!时，可用泰勒公式在所得 e 的展开式中部分化解掉 n!.

二、利用定积分求极限

例 2 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln x dx=-1,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}$.

例 3 求$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}$

$=\int_0^1\ln(1+x)dx=x\ln(1+x)x\mid_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx$

$=\ln2-\int_0^1\frac{1+x}{1+x}dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

$=\ln2-x\mid_0^1+\ln(1+x)\mid_0^1$

$=2\ln2-1=\ln\frac{4}{e}$.

一般来说，对含有$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$的数列，可考虑利用对数性质将乘积化为求和，用定积分定义求极限。

收稿日期：2009-11-25
作者简介：刘俊先（1964-），女，河北临城县人。副教授，研究方向：数学教育教学.

三、利用级数收敛性求极限

例 4　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$（a 为某实常数且 $|a|\neq e$）.

解：当 $|a|<e$,对正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{|a|^n n!}{n^n}$，由达朗贝尔判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{|a|^n n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}|a|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{|a|}{e}<1$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a|^n n!}{n^n}$ 收敛，由绝对收敛必收敛及级数收敛的必要条件知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n n!}{n^n}=0$.

当 $|a|>e$ 时，可考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{|a|^n n!}$，同理有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{a^n n!}=0$，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n n!}{n^n}=+\infty$.

例 5　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}(a>1)$.

解：对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}$，因为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{[2(n+1)]!}{a^{(n+1)!}}\cdot\frac{a^{n!}}{(2n)!}=\frac{(2n+1)(2n+2)}{a^{(n+1)!-n!}}$$

$$=\frac{(2n+1)(2n+2)}{a^{n!\cdot n}}\le\frac{(2n+1)(2n+2)}{a^n}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{a^n}=0$，再由 $\frac{u_{n+1}}{u_n}>0$ 及迫敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$.

由达朗贝尔判别法有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$，所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}$ 收敛，

由级数收敛的必要条件得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0$.

一般来说，诸如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ 等都可考虑用级数收敛性求极限。

四、利用迫敛性求极限

例 5　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sum\limits_{p=1}^{n}p!$.

解：因为 $1<\frac{1}{n!}\sum\limits_{p=1}^{n}P!<\frac{(n-2)(n-2)}{n!}+\frac{1}{n}+1<1+\frac{2}{n}$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)=1$ 及迫敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sum\limits_{p=1}^{n}P!=1$.

五、利用单调有界证明极限存在

例 6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{e^n n!}$ 存在.

证明：记 $a_n=\frac{n^n}{e^n n!}$，

有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{e^n n!}{n^n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}$.

由于数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调递增以 e 为极限，则有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，得数列 $\{a_n\}$ 单调递减，又 $a_n>0$ 即数列有下界，由单调有界定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{e^n n!}$ 存在。

对数列通项中含有 n!部分的极限问题，处理方法灵活多样，但解题思路的关键是：首先依据数列通的项特点，设法化解掉 n!；再寻求处理极限问题的简单方法。

参考文献：

[1] 华东师范大学数学系.数学分析(第 3 版)[M].北京：高等教育出版社，2001.

[2] 纪乐刚.数学分析[M].上海：华东师范大学出版社，1993.

[3] 武忠祥.历届数学考研试题研究[M].西安：西安交通大学出版社，2003.

[4] 李世金，赵洁.数学分析解题方法 600 例[M].上海：华东师范大学出版社，1992.

（责任编辑：汪家军）

Solution to Sequence Limit including

LIU Jun- xian

(Xingtai College, Xingtai Hebei 054001, China)

Abstract: The paper introduces several solutions to sequence limit including .

Key words: sequence; limit; solution