习题 9.1

1. 利用二重积分的几何意义，求下列积分的值.

(1) $\iint\limits_D h\mathrm{d}\sigma$，其中 h 为常数，D 为圆形闭区域 $x^2+y^2\le 1$;

(2) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为圆形闭区域 $x^2+y^2\le 1$;

(3) $\iint\limits_D \sqrt{9-y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=[0,4]\times[0,3]$.

2. 用重积分表示下列物理量.

(1) 位于 xOy 平面上，占有闭区域 D，电荷连续分布(面密度为 $\mu(x,y)$)的带电薄板上的全部电荷 Q;

(2) 铅直浸没于水中，占有 xOy 平面上闭区域 D (其中 x 轴铅直向下，y 轴位于水平面上)的薄板一侧所受到的水压力 F;

(3) 半径为 R 的非均匀球体(其上任一点的密度与球心到该点的距离成正比)的质量 m.

3. 利用二重积分性质，比较下列各组二重积分的大小.

(1) $I_1=\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$.

(a) D 是由 x 轴，y 轴及直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域;

(b) D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成的闭区域.

(2) $I_1=\iint\limits_D \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D \mathrm{e}^{2xy}\mathrm{d}\sigma$.

(a) D 是矩形区域 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$;

(b) D 是矩形区域 $-1\le x\le 0$，$0\le y\le 1$.

(3) $I_1=\iint\limits_D \sin^2(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是任一平面有界闭区域.

4. 利用二重积分性质，估计下列积分的值.

(1) $I=\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$;

(2) $I=\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\mid \frac{\pi}{4}\le x^2+y^2\le \frac{3\pi}{4}\right\}$;

(3) $I=\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{\ln(4+x+y)}$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 4, 0\le y\le 8\}$;

(4) $I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le \frac{1}{4}\right\}$.

5. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续，又 $D_r=\left\{(x,y)\middle|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2\right\}$，其中 (x_0,y_0) 是 D 的一个内点. 试求极限

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D_r} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

6. 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续且非负. 证明

(1) 若 $f(x,y)$ 不恒为零，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma>0$;

(2) 若$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$，则 $f(x,y) \equiv 0$.