第五节 对坐标的曲面积分

一、有向曲面及曲面元素的投影

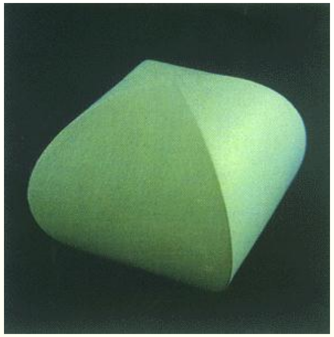
二、 对坐标的曲面积分的概念与性质

三、对坐标的曲面积分的计算法

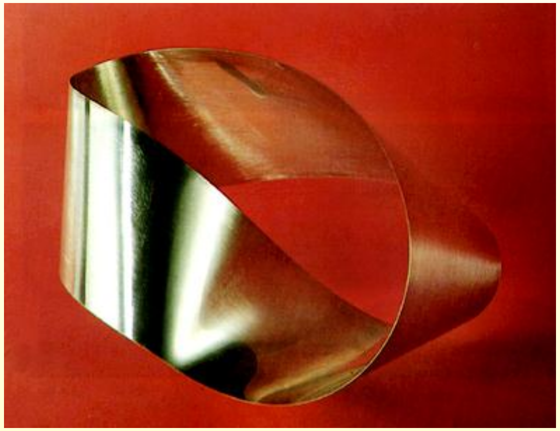
四、两类曲面积分的联系

一、有向曲面及曲面元素的投影

- 曲面分类 $\begin{cases}\text{双侧曲面}\\\text{单侧曲面}\end{cases}$

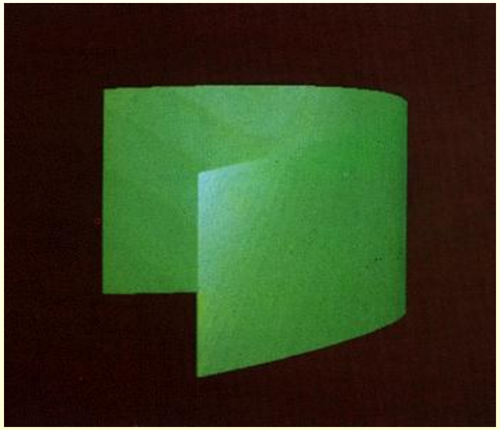


曲面分内侧和外侧

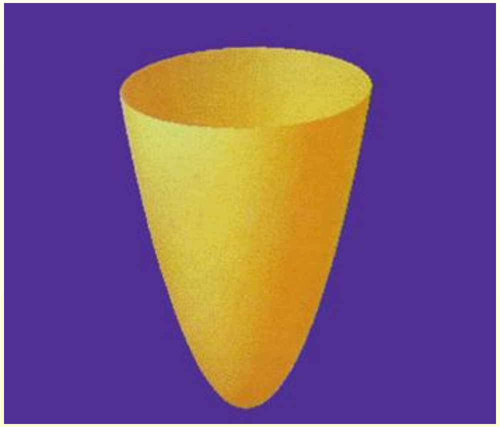


莫比乌斯带

(单侧曲面的典型)



曲面分左侧和右侧



曲面分上侧和下侧

• 指定了侧的曲面叫**有向曲面**, 其方向用**法向量指向**表示：

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧 <0 为后侧	>0 为右侧 <0 为左侧	>0 为上侧 <0 为下侧	外侧 内侧

• 设 Σ 为有向曲面, 其面元 ΔS 在 xOy 面上的投影记为 $(\Delta S)_{xy}$, $(\Delta S)_{xy}$ 的面积为 $(\Delta\sigma)_{xy}\ge 0$, 则规定

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma>0\text{时}\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma<0\text{时}\\ 0, & \text{当}\cos\gamma\equiv 0\text{时}\end{cases}$$

类似可规定 $(\Delta S)_{yz}$, $(\Delta S)_{zx}$

二、 对坐标的曲面积分的概念与性质

1. 引例 设稳定流动的不可压缩流体的速度场为

$$\vec{v} = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

求单位时间流过有向曲面Σ的流量Φ.

分析: 若Σ是面积为S 的平面,

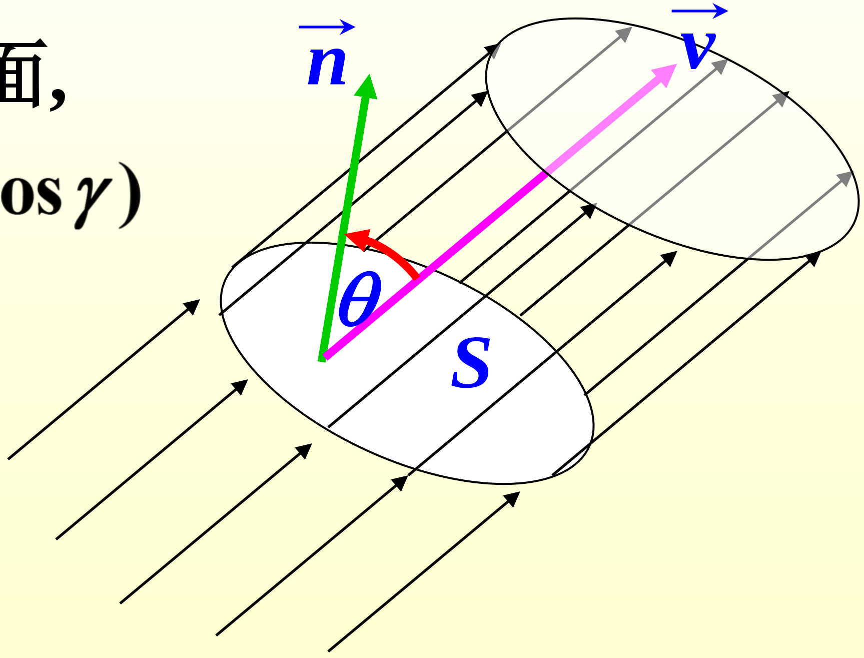
法向量: $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

流速为常向量: $\vec{v}$

则流量

$$\Phi = S \cdot |\vec{v}| \cos\theta$$

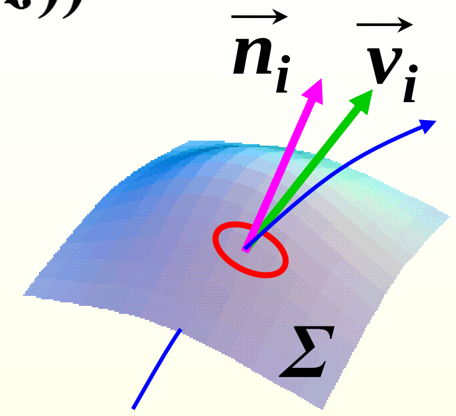
$$= S\,\vec{v} \cdot \vec{n}$$



对一般的有向曲面Σ,对稳定流动的不可压缩流体的速度场 $\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

用“分割, 近似, 求和, 取极限”

进行分析可得 $\Phi=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{v}_i\cdot\vec{n}_i\,\Delta S_i$



设 $\vec{n}_i=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$, 则

$$\Phi=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\big]\Delta S_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\big]$$

2. 定义: 设Σ为光滑的有向曲面, 在Σ上定义了一个向量场$\vec{A}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, 若对$\Sigma$的任意分割和在局部面元上任意取点, 下列极限都存在

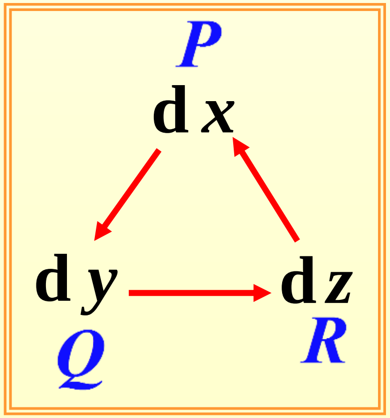
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\Big]$$

则称此极限为向量场$\vec{A}$在有向曲面上对坐标的曲面积分, 或第二类曲面积分. 记作

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

P, Q, R 叫做被积函数; Σ 叫做积分曲面.



$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 称为P 在有向曲面Σ上对 y, z 的曲面积分;

$\iint_{\Sigma} Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 称为Q 在有向曲面Σ上对 z, x 的曲面积分;

$\iint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 称为R 在有向曲面Σ上对 x, y 的曲面积分.

引例中, 流过有向曲面 Σ 的流体的流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若记 Σ 正侧的单位法向量为 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

令 $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$

$\vec{A} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

则对坐标的曲面积分也常写成如下向量形式

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

3. 性质

(1) 若 $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{k} \Sigma_i$, 且 Σ_i 之间无公共内点, 则

$$\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \sum_{i=1}^{k} \iint_{\Sigma_i} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

(2) 用Σ^-表示 Σ的反向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

三、对坐标的曲面积分的计算法

定理: 设光滑曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 取上侧，$R(x, y, z)$ 是 Σ 上的连续函数，则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

基本思路：投影法变成二重积分

证:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$\because \Sigma$ 取上侧，$\therefore (\Delta S_i)_{xy} = (\Delta \sigma_i)_{xy}$

$\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))\,(\Delta \sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

说明: 如果积分曲面 Σ 取下侧, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- 若 $\Sigma: x = x(y,z),\ (y,z) \in D_{yz}$, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

(前正后负)

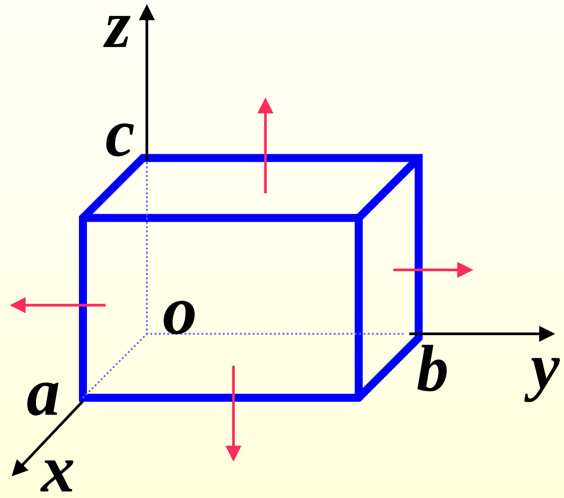
- 若 $\Sigma: y = y(z,x),\ (z,x) \in D_{zx}$, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

(右正左负)

例1 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, Σ 是长方体 Ω 的整个表面的外侧, $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}$.

解 将有向曲面 Σ 分成六部分:



$\Sigma_1: z = c \quad (0 \le x \le a, 0 \le y \le b)$ 取上侧;

$\Sigma_2: z = 0 \quad (0 \le x \le a, 0 \le y \le b)$ 取下侧;

$\Sigma_3: x = a \quad (0 \le z \le c, 0 \le y \le b)$ 取前侧;

$\Sigma_4: x = 0 \quad (0 \le z \le c, 0 \le y \le b)$ 取后侧;

$\Sigma_5: y = b \quad (0 \le x \le a, 0 \le z \le c)$ 取右侧;

$\Sigma_6: y = 0 \quad (0 \le x \le a, 0 \le z \le c)$ 取左侧.

$$\therefore \iint_{\Sigma} z^2 dxdy = \sum_{i=1}^{6} \iint_{\Sigma_i} z^2 dxdy = \iint_{\Sigma_1} z^2 dxdy + \iint_{\Sigma_2} z^2 dxdy$$

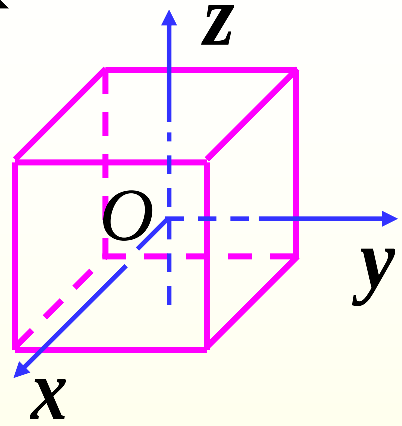
$$= \iint_{D_{xy}} c^2 dxdy - \iint_{D_{xy}} 0 dxdy = abc^2$$

同理, $\iint_{\Sigma} x^2 dydz = a^2bc, \quad \iint_{\Sigma} y^2 dzdx = ab^2c,$

$\therefore$ 原式$= (a+b+c)abc$

练习 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中Σ是以原点为中心, 边长为 a 的正立方体的整个表面的外侧.



解 利用对称性.

$$\text{原式}=3\iint\limits_{\Sigma}(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Σ 的顶部 $\Sigma_1: z=\frac{a}{2}\ (|x|\le\frac{a}{2}, |y|\le\frac{a}{2})$ 取上侧

Σ 的底部 $\Sigma_2: z=-\frac{a}{2}\ (|x|\le\frac{a}{2}, |y|\le\frac{a}{2})$ 取下侧

$$=3\Big[\iint\limits_{\Sigma_1}(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2}(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]$$

$$=3\Big[\iint\limits_{D_{xy}}\Big(\frac{a}{2}+x\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}}\Big(-\frac{a}{2}+x\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]$$

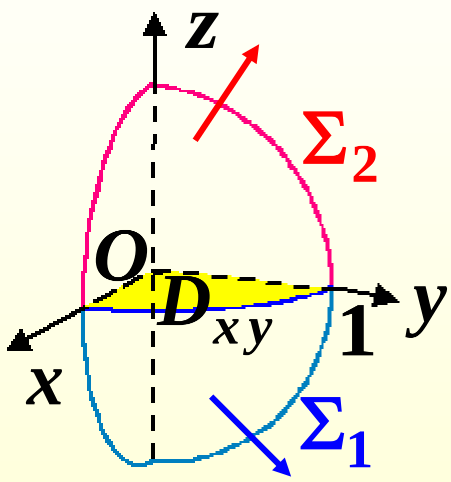
$$=3a\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3a^3$$

例2 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,dxdy$, 其中$\Sigma$为球面

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$外侧在第一和第五卦限部分.

思考: 下述解法是否正确:

$$\boxed{\text{根据对称性} \quad \iint\limits_{\Sigma} xyz\,dxdy \cancel{=} 0}$$



解 把Σ分为上下两部分

$$\begin{cases} \Sigma_1 : z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ \Sigma_2 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

$$(x, y) \in D_{xy} : \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\therefore \iint_{\Sigma} xyz\,dxdy = \iint_{\Sigma_1} xyz\,dxdy + \iint_{\Sigma_2} xyz\,dxdy$$

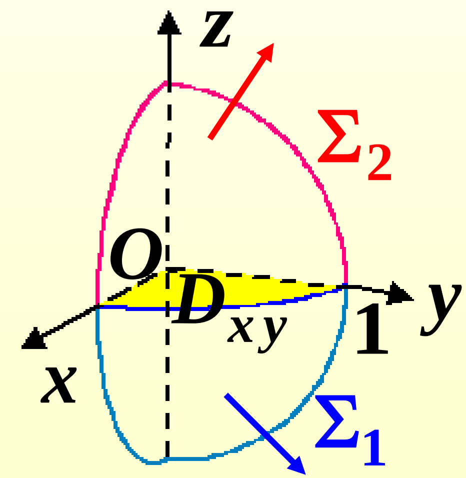
$$= -\iint_{D_{xy}} xy\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy + \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,d\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$= 2/15$$

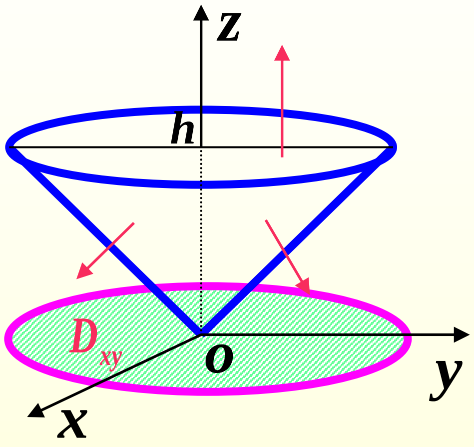


例3计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$, 其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=h(h>0)$所围区域的边界曲面的外侧.

解 $\Sigma=\Sigma_1\bigcup\Sigma_2$,

$\Sigma_1: z=h\quad (x^2+y^2\le h^2)$ 取上侧;

$\Sigma_2: z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le h)$ 取外侧.



$$\iint\limits_{\Sigma_1}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

$$=0+0+\iint\limits_{D_{xy}}(x-y)dxdy=0$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}(y-z)dydz=\iint\limits_{\Sigma_{2前}}(y-z)dydz+\iint\limits_{\Sigma_{2后}}(y-z)dydz$$

上页 下页

$$\iint_{\Sigma_2}(y-z)dydz=\iint_{\Sigma_{2前}}(y-z)dydz+\iint_{\Sigma_{2后}}(y-z)dydz$$

$$=\iint_{D_{yz}}(y-z)dydz-\iint_{D_{yz}}(y-z)dydz=0$$

$$\iint_{\Sigma_2}(z-x)dzdx=\iint_{\Sigma_{2右}}(z-x)dzdx+\iint_{\Sigma_{2左}}(z-x)dzdx=0$$

$$\iint_{\Sigma_2}(x-y)dxdy=-\iint_{D_{xy}}(x-y)dxdy=0.$$

$$\therefore I=0$$

小结 上页 下页

小结 第二类曲面积分的计算方法：

- $$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(上正下负)

- $$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

(前正后负)

- $$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

(右正左负)

知识回顾　第一类曲面积分的计算方法:

$$\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^{\,2}(x, y) + z_y^{\,2}(x, y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\Sigma:\ x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{D_{yz}} f[x(y, z), y, z]\sqrt{1 + x_y^{\,2} + x_z^{\,2}}dydz$$

$$\Sigma:\ y = y(x, z), (x, z) \in D_{xz}$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{D_{xz}} f[x, y(x, z), z]\sqrt{1 + y_x^{\,2} + y_z^{\,2}}dxdz$$

四、两类曲面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} \right]$$

曲面的方向用法向量的方向余弦刻画

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i \right]\Delta S_i$$

$$= \iint_{\Sigma}\left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right)\mathrm{d}S$$

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right)\mathrm{d}S$$

向量形式

$$\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

$$= \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

即 $dydz = \cos\alpha\, dS,\ dzdx = \cos\beta\, dS,\ dxdy = \cos\gamma\, dS,$

$$dydz = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy, \quad dzdx = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy,$$

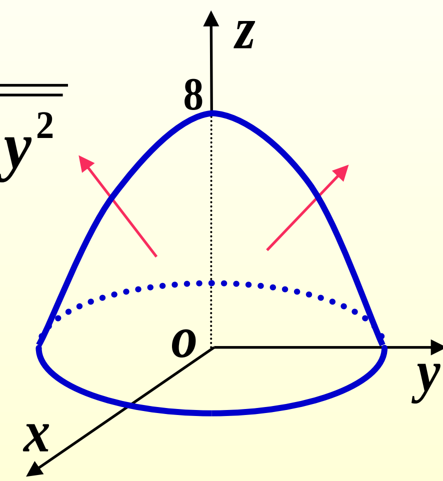
$$\boxed{\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma}\left(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + R \right)dxdy}$$

例4 把对坐标的曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

化成对面积的曲面积分. Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方部分的上侧. P$_{232}$4(2)

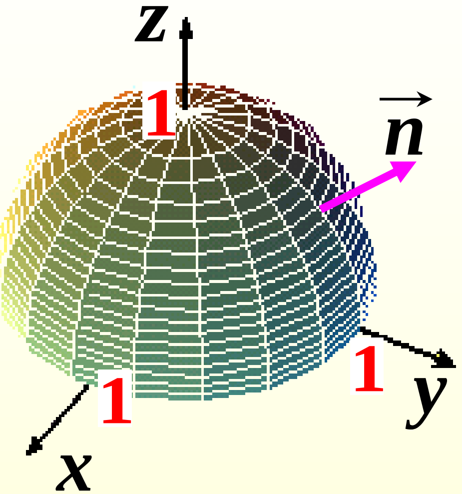
解 $\vec{n}=(2x,2y,1)$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$



$$\cos\alpha=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\cos\beta=\frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

$$\therefore I=\iint_{\Sigma}[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]dS=\iint_{\Sigma}\frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS$$

例5 设 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, γ 是其外法线与 z 轴正向夹成的锐角, 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$.



解

$$I=\iint\limits_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

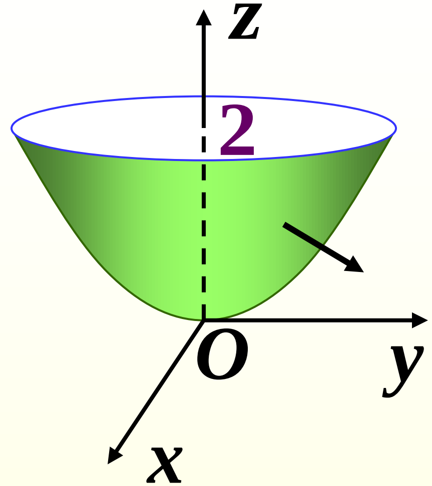
$$=\iint\limits_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

例6 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$ 是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.



解 利用两类曲面积分的联系, 有

$$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

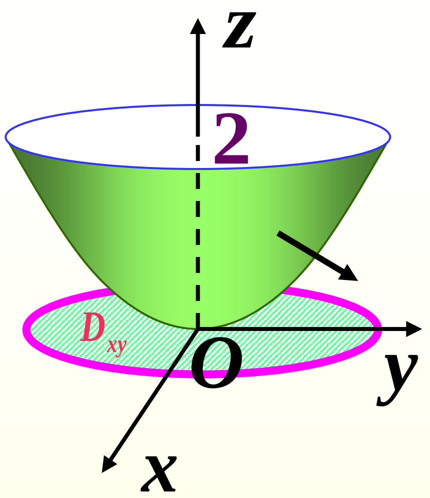
$$=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\,\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$\therefore\ \text{原式}=\iint\limits_{\Sigma}\left[\,(z^2+x)(-x)-z\,\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

将 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 代入, 得



$$\text{原式}=-\iint_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right](-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2)r\,\mathrm{d}r$$

$$=8\pi$$

上页 下页

内容小结

1. 两类曲面积分及其联系

定义:

- $$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

- $$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\Big]$$

性质:

$$\iint_{\Sigma^-} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

联系:

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

思考:

两类曲面积分的定义一个与 Σ 的方向无关, 一个与 Σ 的方向有关, 上述联系公式是否矛盾 ?

上页 下页

2. 常用计算公式及方法

面积分 第一类 (对面积)、第二类 (对坐标) —转化→ 二重积分

(1) 统一积分变量 —— 代入曲面方程

(方程不同时分片积分)

(2) 积分元素投影
- 第一类： 面积投影
- 第二类： 有向投影

(4) 确定积分域 —— 把曲面积分域投影到相关坐标面

注： 二重积分是第一类曲面积分的特殊情况.

当 $\Sigma : z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 时，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

（上侧取“+”，下侧取“−”）

类似可考虑在 yOz 面及 zOx 面上的二重积分转化公式 .

备用题 求 $I=\oiint_{\Sigma}\left(\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}\right)$, 其中

$$\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ 取外侧.

解:

$$\oiint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}=\frac{2}{c}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意±号

$$D_{xy}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$

$$x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta,\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{c}ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r=\frac{1}{c^2}\cdot 4\pi abc$$

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z} = \frac{1}{c^2} \cdot 4\pi abc$$

利用轮换对称性

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x} = \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi abc$$

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y} = \frac{1}{b^2} \cdot 4\pi abc$$

$$\therefore \quad I = 4\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$