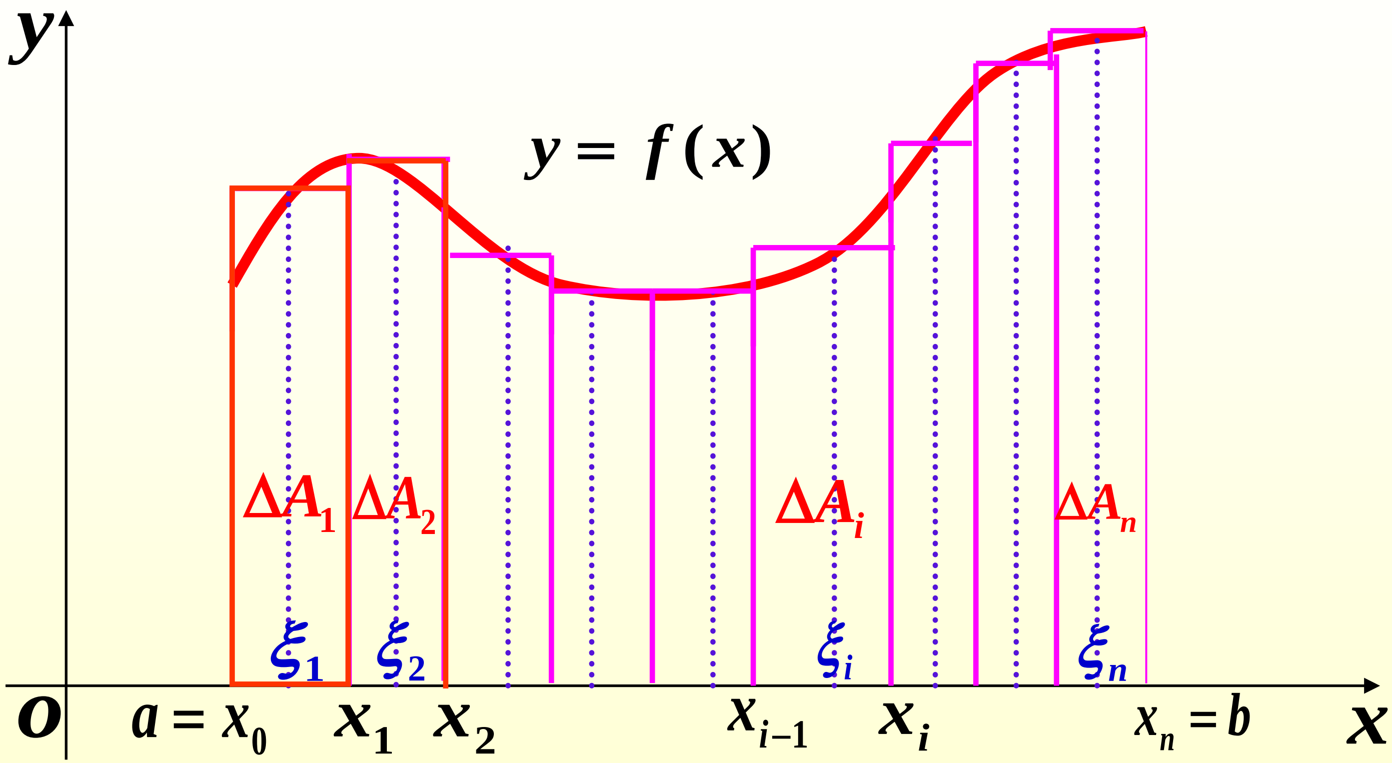
一元函数积分学

$\downarrow$

多元函数积分学 $\begin{cases} \text{重积分} \\ \text{曲线积分} \\ \text{曲面积分} \end{cases}$

知识再现——定积分



分割　　近似 $\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$

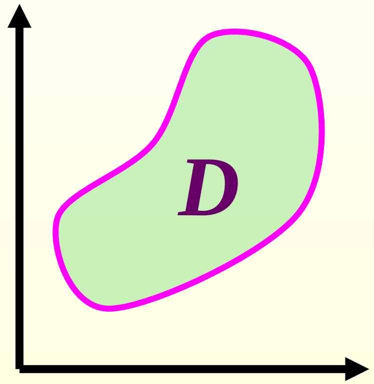
求和 $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 取极限

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

第十章 重积分

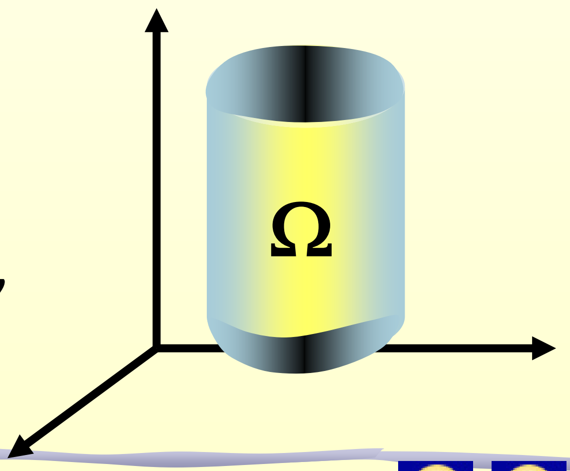
定积分 $\int_a^b f(x)dx$

推 广



二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

推 广



三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$

第十章 重积分

第一节 二重积分的概念与性质

一、引例

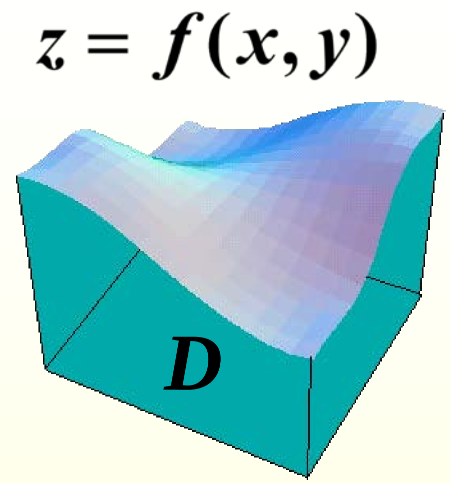
二、二重积分的定义与可积性

三、二重积分的几何意义

四、二重积分的性质

一、引例

1.曲顶柱体的体积



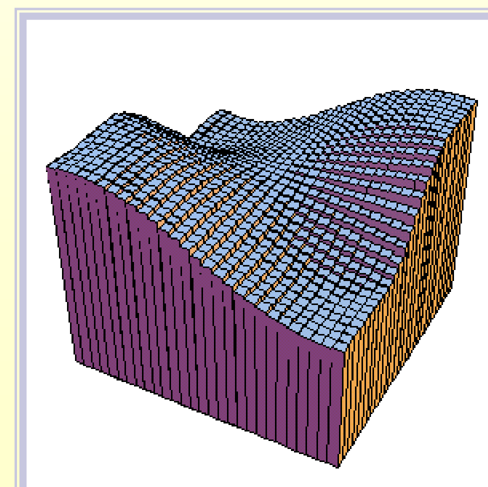
给定曲顶柱体:

底: xOy 面上的闭区域 D

顶: 连续曲面 $z = f(x, y) \geq 0$

侧面: 以 D 的边界为准线 , 母线平行于 z 轴的柱面

求其体积.



解法: 类似定积分解决问题的思想:

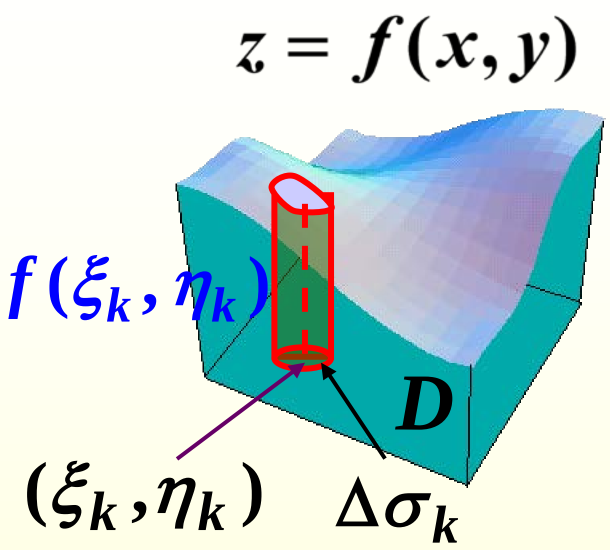
"分割, 近似, 求和, 取极限"

1) 分割

用**任意**曲线网分D为 n 个区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$$

以它们为底把曲顶柱体分为 n 个小曲顶柱体



2) 近似

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中**任取**一点(ξ_k, η_k)，则

$$\Delta V_k \approx f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

3) 求和

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

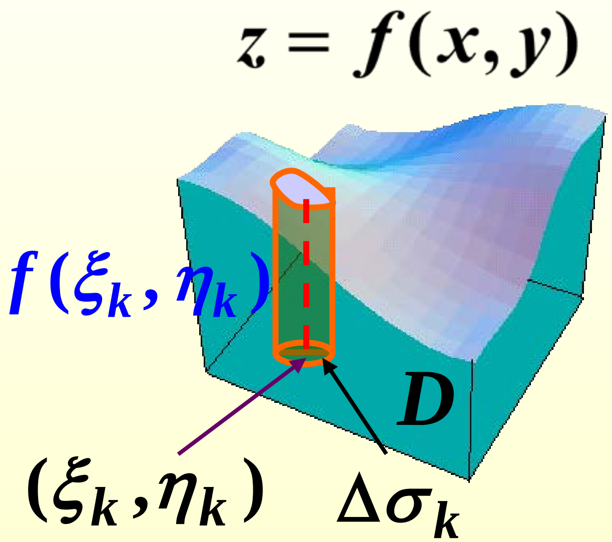
4) 取极限

定义$\Delta\sigma_k$的直径为

$$\lambda(\Delta\sigma_k) = \max\left\{ \left| P_1P_2 \right| \, \middle| \, P_1, P_2 \in \Delta\sigma_k \right\}$$

令 $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\{\ \lambda(\Delta\sigma_k)\ \}$

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

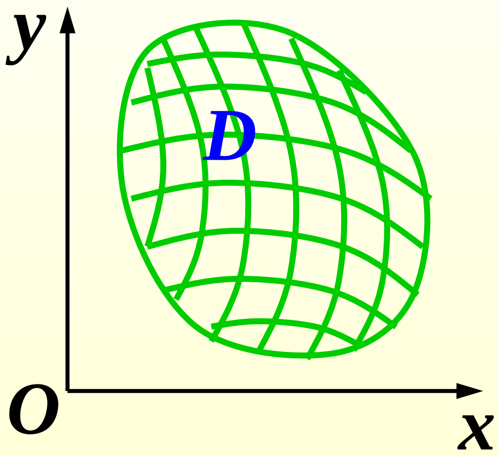


2. 平面薄片的质量

有一个平面薄片, 在 xOy 平面上占有区域 D , 其面密度为 $\mu(x,y)\in C$,计算该薄片的质量 M .

若 $\mu(x,y)\equiv\mu$ (常数), 设D 的面积为σ, 则

$$M=\mu\cdot\sigma$$



若 $\mu(x,y)$非常数 , 仍可用

"分割, 近似, 求和, 取极限"

解决.

1) 分割

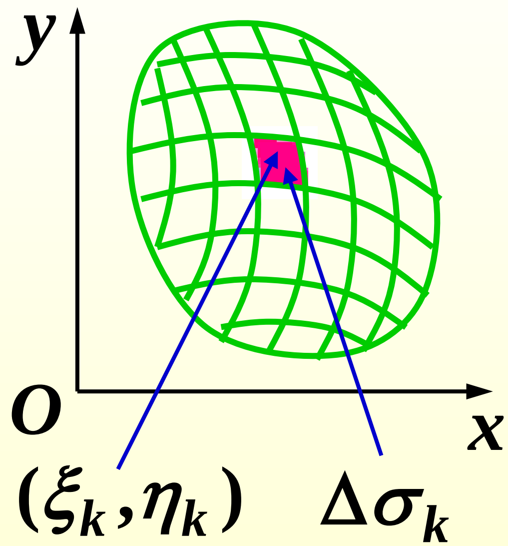
用**任意**曲线网分D 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$,

相应把薄片也分为小块 .

2) 近似

在每个$\Delta\sigma_k$ 中**任取**一点(ξ_k,η_k),则第 k 小块的质量

$$\Delta M_k \approx \mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$



3) 求和

$$M=\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

4) 取极限

令 $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\{\lambda(\Delta\sigma_k)\}$

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

两个问题的共性:

(1) 解决问题的步骤相同

"分割, 近似, 求和, 取极限"

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

平面薄片的质量:

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

二、二重积分的定义及可积性

定义: 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_k\ (k=1,2,\cdots,n)$，任取一点 $(\xi_k,\eta_k)\in\Delta\sigma_k$，若存在一个常数 I，使

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k}_{\text{积分和}}\ \underset{\text{记作}}{=\!=}\ \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

则称 $f(x,y)$ 可积，称 I 为 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分.

积分和

$$\iint_D \boxed{\underbrace{f(x,y)}_{\text{被积函数}}\,\underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{\text{面积元素}}}$$

被积表达式

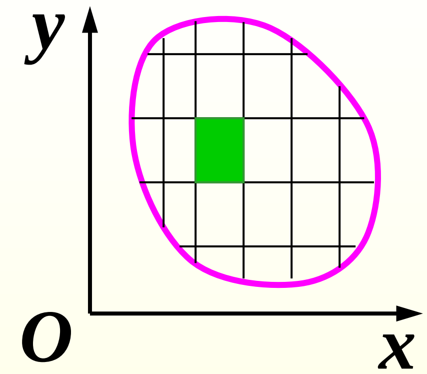
x,y 称为积分变量

积分区域

被积函数

面积元素

如果 $f(x,y)$ 在 D 上可积，可用平行坐标轴的直线来划分区域 D，这时 $\Delta\sigma_k = \Delta x_k \Delta y_k$，因此面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 也常记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，二重积分记作



$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在极坐标系中 $\quad d\sigma = r dr d\theta$

引例1中曲顶柱体体积:

$$V = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

引例2中平面薄板的质量:

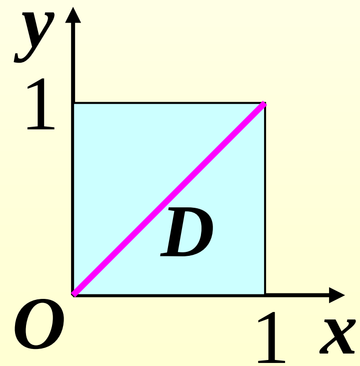
$$M = \iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

二重积分存在定理: (证明略)

定理1. 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

定理2. 若有界函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上除去有限个点或有限条光滑曲线外都连续, 则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

例如, $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ 在 $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$



上二重积分存在; 但 $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$ 在 D 上二重积分不存在.

三、二重积分的几何意义

① 若 $f(x,y)\geq 0$, $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示**曲顶柱体的体积**.

② 若 $f(x,y)\leq 0$, $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示曲顶柱体**体积的负值**.

③ $f(x,y)$ 在 D 的部分区域上大于0,在部分区域上小于0,

$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示**体积的代数和**,上方取正,下方取负.

例1 根据二重积分的几何意义，指出下列积分值:

1) $\iint\limits_{D_1}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$, 2) $\iint\limits_{D_2}(1-x-y)d\sigma$, 3) $\iint\limits_{D_3}2-\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$

其中 $D_1: x^2+y^2\leq R^2$, $D_2: x+y\leq 1, x\geq 0, y\geq 0$;

$D_3: x^2+y^2\leq 4$

上页 下页

解 1) $\iint\limits_{D_1}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma=$ 上半球体体积 $=\dfrac{2}{3}\pi R^3$

2) $\iint\limits_{D_2}(1-x-y)d\sigma=$ 四面体体积 $=\dfrac{1}{6}$

3) $\iint\limits_{D_3}2-\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$ 等于以曲面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 为顶，

以 $D_3: x^2+y^2\le 4$ 为底的曲顶柱体的体积，

即等于底半径为2，高为2的圆锥体的体积.

$$\therefore \iint\limits_{D_3}2-\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\frac{1}{3}\cdot(\pi\cdot 2^2)\cdot 2=\frac{8}{3}\pi$$

四、二重积分的性质

1. $\iint\limits_D k\,f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ （ k 为常数)

2. $\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

3. $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

($D = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2无公共内点)

4. 若在D上 $f(x,y)\equiv 1$， σ为D 的面积, 则

$$\sigma = \iint\limits_D 1\cdot \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$$

5. 若在D上 $f(x,y) \le \varphi(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

特别，由于 $-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)|$

$$\therefore \left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$$

6. 设$M = \max\limits_D f(x,y),\ m = \min\limits_D f(x,y)$，$D$的面积为$\sigma$，

则有 $$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\sigma$$

7.(二重积分的中值定理) 设函数 $f(x,y)$ 在**有界**闭区域 D 上连续, σ 为 D 的面积,则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$, 使

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

证 由性质6 可知,

$$\min_D f(x,y) \le \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \max_D f(x,y)$$

由连续函数介值定理, 至少有一点 $(\xi,\eta)\in D$ 使

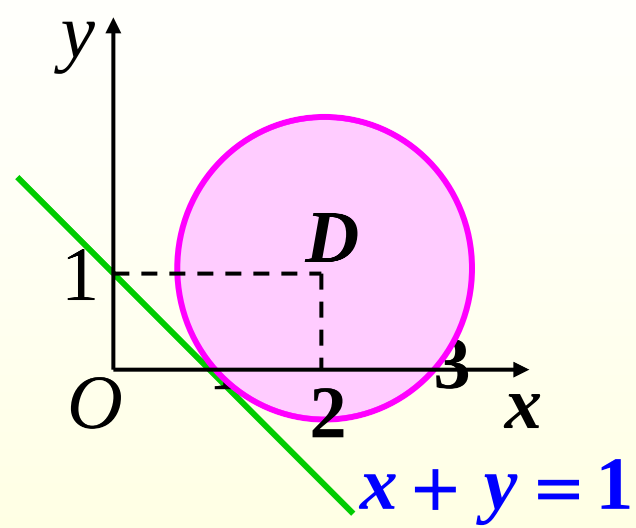
$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

因此 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\,\sigma$$

例2 **比较下列积分的大小:** P$_{140}$ 5(2)

$$\iint_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma, \quad \iint_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma$$

其中 $D: (x-2)^2 + (y-1)^2 \le 2$



解 **积分区域** D **的边界为圆周**

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$$

它在与 x **轴的交点** $(1,0)$ **处与直线** $x+y=1$ 相切.

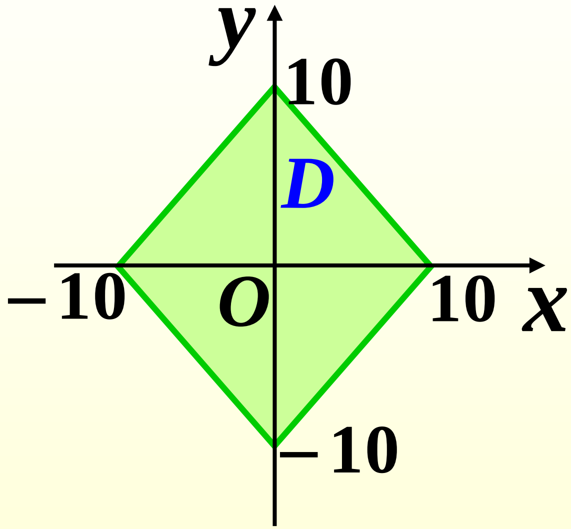
而区域 D **位于直线的上方, 故在** D **上** $x+y \ge 1$, **从而**

$$(x+y)^2 \le (x+y)^3$$

$$\therefore \iint_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma \le \iint_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma$$

例4 **估计下列积分之值**

$$I = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \qquad D: |x| + |y| \le 10$$



解 D **的面积为** $\sigma = (10\sqrt{2})^2 = 200$

由于

$$\frac{1}{102} \le \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \le \frac{1}{100}$$

积分性质6

$$\frac{200}{102} \le I \le \frac{200}{100}$$

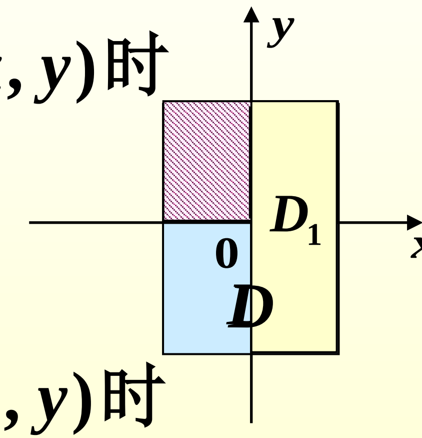
即: $1.96 \le I \le 2$

上页 下页

补充：二重积分的对称性

若积分区域D关于x轴对称, D_1 为上半区域, 则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & \text{当 } f(x,-y) = f(x,y)\text{时} \\ 0, & \text{当 } f(x,-y) = -f(x,y)\text{时} \end{cases}$$



若积分区域D关于y轴对称, D_1为右半区域,则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & \text{当 } f(-x,y) = f(x,y)\text{时} \\ 0, & \text{当 } f(-x,y) = -f(x,y)\text{时} \end{cases}$$

二重积分的对称性，必须同时考虑积分区域的对称性和被积函数的奇偶性(对某个变量).

思考：

如果积分区域关于原点对称或者关于直线 $y=x$ 对称时，函数$f(x,y)$满足什么条件，积分具有类似上面的性质？

设 D 关于 原点 对称：

（1）若对于 $\forall(x,y)\in D$，都有$f(-x,-y)=-f(x,y)$，则 $I=0$.

（2）若对于 $\forall(x,y)\in D$，都有 $f(-x,-y)=f(x,y)$，则

$$I=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma=2\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

其中 $D_1=\{(x,y)|(x,y)\in D, x\geq 0\}$,

$D_2=\{(x,y)|(x,y)\in D, y\geq 0\}$.

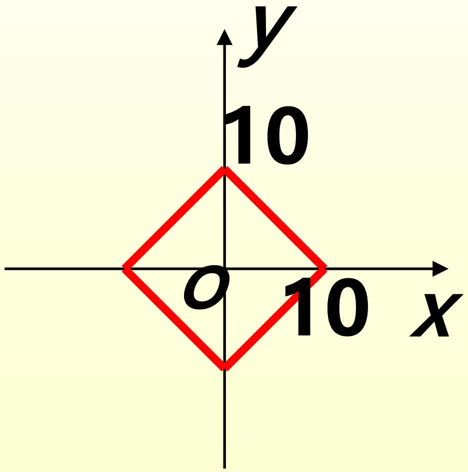
上页 下页

例9 **指出下列积分值：**

$$1)\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma,\quad 2)\iint_D (3-x^2\sin xy)\,d\sigma$$

其中$D: |x|+|y|\le 10$

解 $$1)\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma \xlongequal{\text{根据对称性}} 0$$



$$2)\iint_D (3-x^2\sin xy)\,d\sigma$$

$$=3\iint_D d\sigma-\iint_D x^2\sin xy\,d\sigma$$

$$\xlongequal{\text{根据对称性}} 3\iint_D d\sigma = 3(10\sqrt{2})^2=600$$

练习 计算 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(x+y)dxdy$

显然 D 关于 原点 对称，

$$f(-x,-y)=-x-y=-f(x,y),$$

$$\therefore \iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(x+y)dxdy=0$$

内容小结

1. 二重积分的定义

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

2. 二重积分的几何意义

3. 二重积分的性质 (与定积分性质相似)

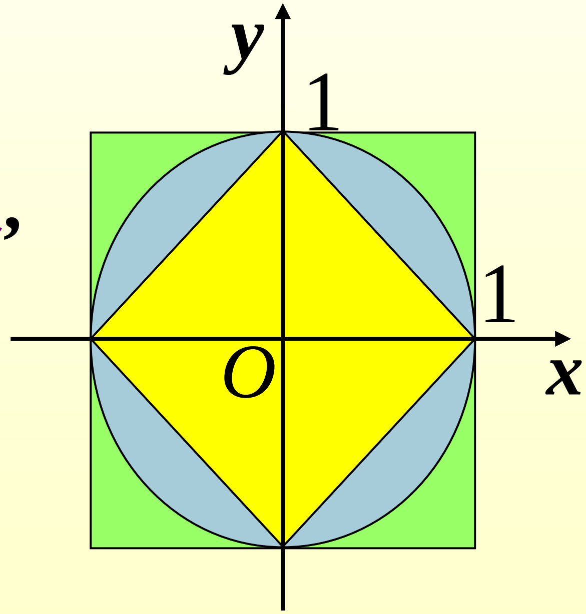
4. 二重积分的对称性

思考与练习

1. 比较下列积分值的大小关系:

$$I_1 = \iint_{x^2+y^2\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad I_2 = \iint_{|x|+|y|\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



解 I_1, I_2, I_3 被积函数相同, 且非负,

由它们的积分域范围可知

$$I_2 < I_1 < I_3$$

2. 设D是第二象限的一个有界闭区域，且 $0 < y < 1$, 则

$$I_1 = \iint_D y x^3 \,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2 = \iint_D y^2 x^3 \,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3 = \iint_D y^{1/2} x^3 \,\mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为 (D)

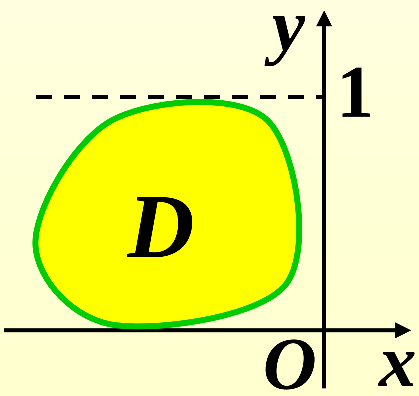
(A) $I_1 \le I_2 \le I_3$; (B) $I_2 \le I_1 \le I_3$;

(C) $I_3 \le I_2 \le I_1$; (D) $I_3 \le I_1 \le I_2$.

提示 因 $0 < y < 1$, 故 $y^2 \le y \le y^{1/2}$;

又因 $x^3 < 0$, 故在D上有

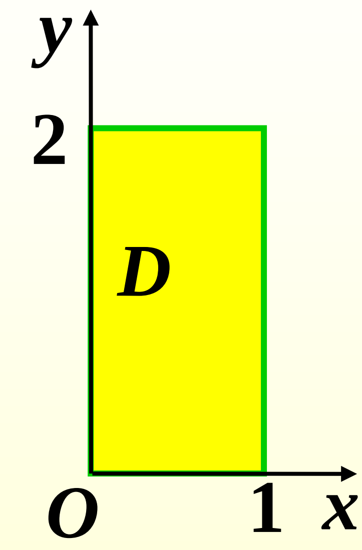
$$y^{1/2} x^3 \le y x^3 \le y^2 x^3$$



备用题

1. 估计 $I=\iint\limits_{D}\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$ 的值, 其中 D 为

$0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2.$



解 被积函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$

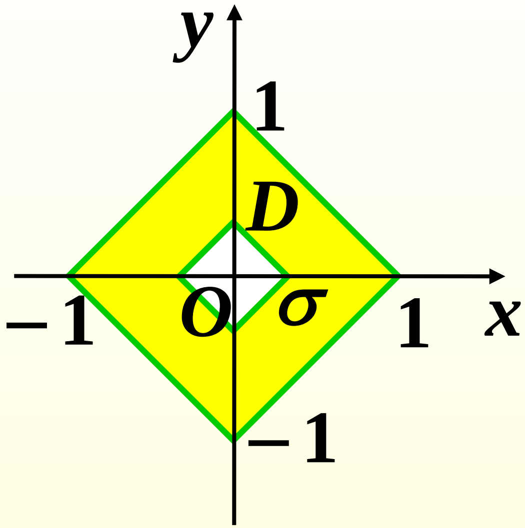
D 的面积 $\sigma=2$

在D上 $f(x,y)$ 的最大值 $M=f(0,0)=\dfrac{1}{4}$

$f(x,y)$ 的最小值 $m=f(1,2)=\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{1}{5}$

故 $\dfrac{2}{5}\le I\le\dfrac{2}{4}$, 即 $0.4\le I\le 0.5$

2. 判断 $\iint\limits_{\sigma\le|x|+|y|\le 1} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (0<\sigma<1)$的正负.



解 当 $\sigma\le|x|+|y|\le 1$时,

$$0<x^2+y^2\le (|x|+|y|)^2\le 1$$

故 $\quad \ln(x^2+y^2)\le 0$

又当 $|x|+|y|<1$时, $\ln(x^2+y^2)<0$

于是 $$\iint\limits_{\sigma\le|x|+|y|\le 1} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<0$$

结束 上页 下页

第二节 二重积分的计算法

一、利用直角坐标计算二重积分

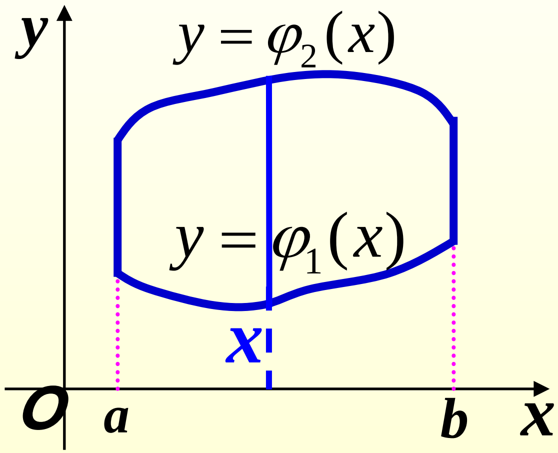
二、利用极坐标计算二重积分

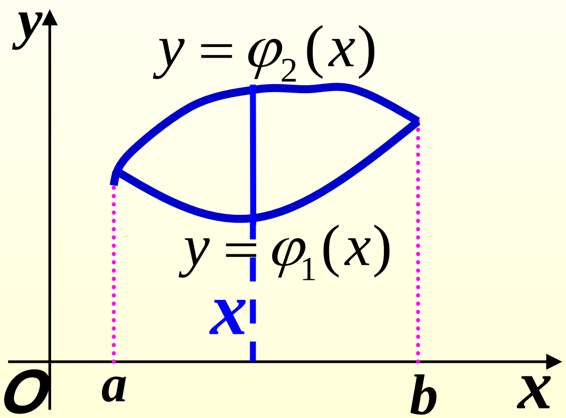
*三、二重积分的换元法

一、利用直角坐标计算二重积分

1. 若积分区域 D 用 $\begin{cases} \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ **来表示.**

D 称为 X —型区域.





$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x}$$

称为先 y 后 x 的二次积分.

也记作 $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y}$

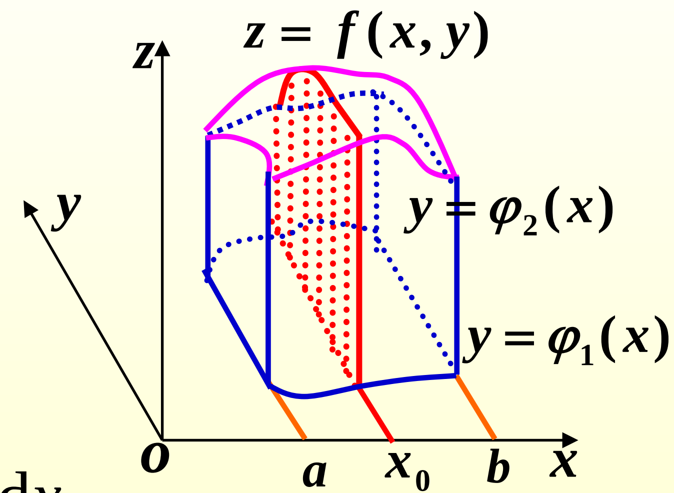
证 **不妨设** $f(x,y)\ge 0$ **由几何意义知:** $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = v$

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$$

$$\therefore \forall x\in(a,b)$$

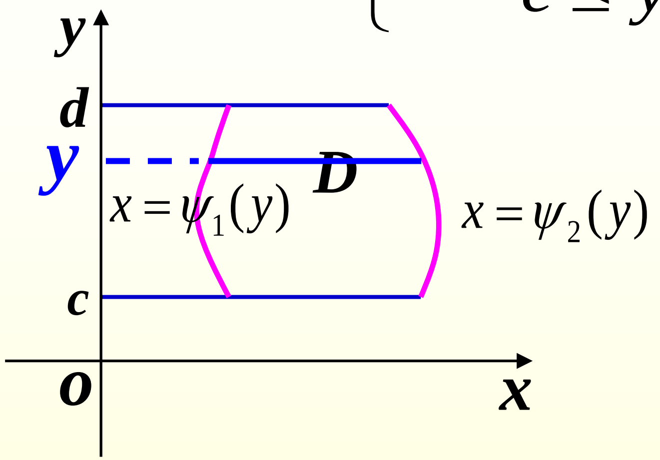
$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

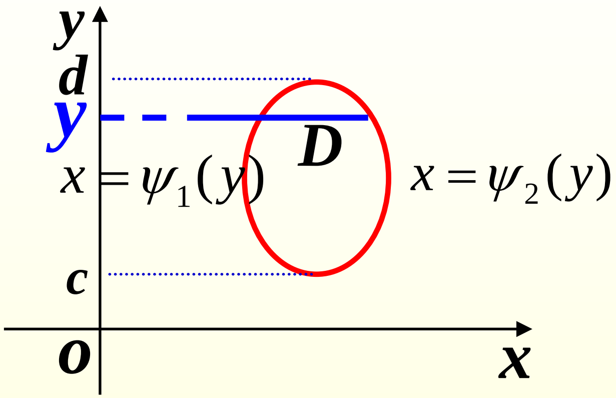
$$\therefore v=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$



即 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

2.若积分区域为 $\begin{cases} \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \\ c \le y \le d \end{cases}$ ——→ Y—型区域





$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy}$$

或 $$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx}$$

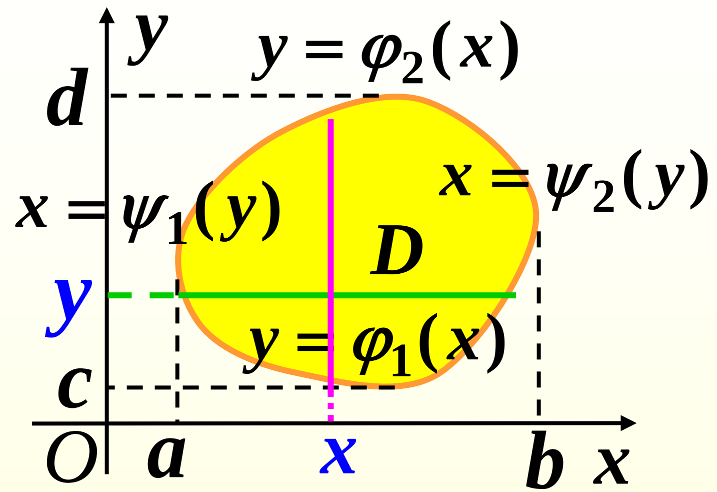
——→ 称为先 x 后 y 的二次积分.

说明: (1) 若积分区域既是 X -型区域又是 Y - 型区域

则有 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

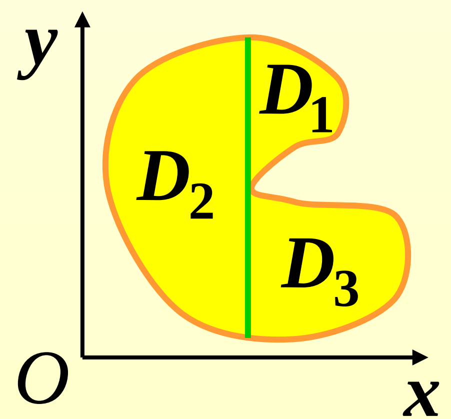
$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$



为计算方便,可**选择积分序**, 必要时还可以**交换积分序**.

(2) 若积分域较复杂,可将它分成若干 X - 型区域或 Y - 型区域 , 则

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$$

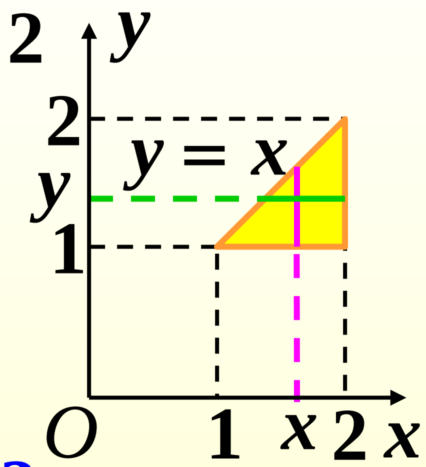


例1 计算 $I=\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$ 是直线 $y=1,\ x=2,$ 及 $y=x$ 所围的闭区域.

解法1 将D看作X - 型区域, 则$D:\begin{cases}1\le y\le x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$

$$I=\int_1^2\left[\int_1^x xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}xy^2\right]_1^x\mathrm{d}x$$

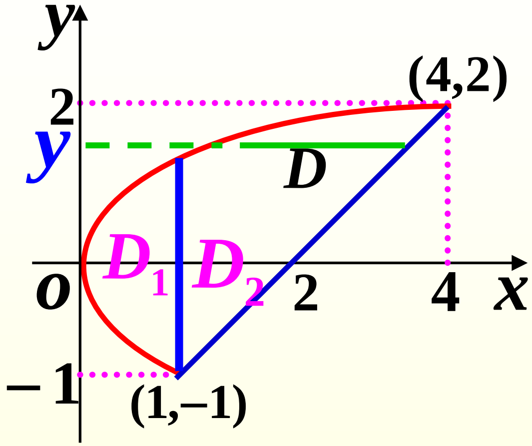
$$=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{1}{2}x\right]\mathrm{d}x=\frac{9}{8}$$



解法2 将D看作Y - 型区域, 则$D:\begin{cases}y\le x\le 2\\ 1\le y\le 2\end{cases}$

$$I=\int_1^2\left[\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_y^2\mathrm{d}y=\int_1^2\left[2y-\tfrac{1}{2}y^3\right]\mathrm{d}y=\frac{9}{8}$$

例2 计算 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$ 其中 D 由 $y^2 = x,\ y = x - 2$ 所围.



解 如图, $D:\begin{cases} y^2 \le x \le y + 2 \\ -1 \le y \le 2 \end{cases}$

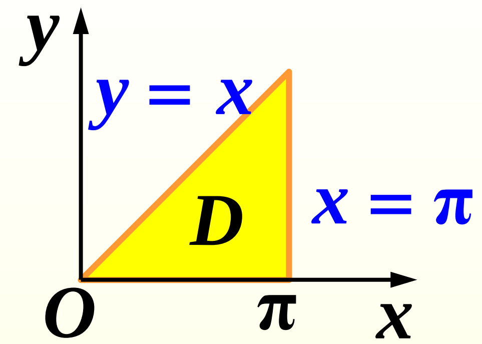
$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{2} y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} y[(y+2)^2 - y^4]\mathrm{d}y = 5\frac{5}{8}$$

另解 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} xy\,\mathrm{d}\sigma$

$$= \int_0^1\left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x + \int_1^4\left[\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = 5\frac{5}{8}$$

例3 计算 $\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是直线$y=x,\ y=0,$ $x=\pi$所围成的闭区域.



解 由被积函数可知, 先对 x 积分不行, 因此取D 为X - 型区域 :

$$D:\begin{cases} 0\le y\le x \\ 0\le x\le \pi \end{cases}$$

$$\therefore \quad \iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\left[\int_0^{x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2$$

说明: 有些二次积分为了积分方便, 还需交换积分顺序.

例4　改换积分次序：

$$1)\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3 \mathrm{d}y\int_0^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x \qquad \mathrm{P}_{186}4(2)$$

$$2)\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x \qquad \mathrm{P}_{157}6(2)$$

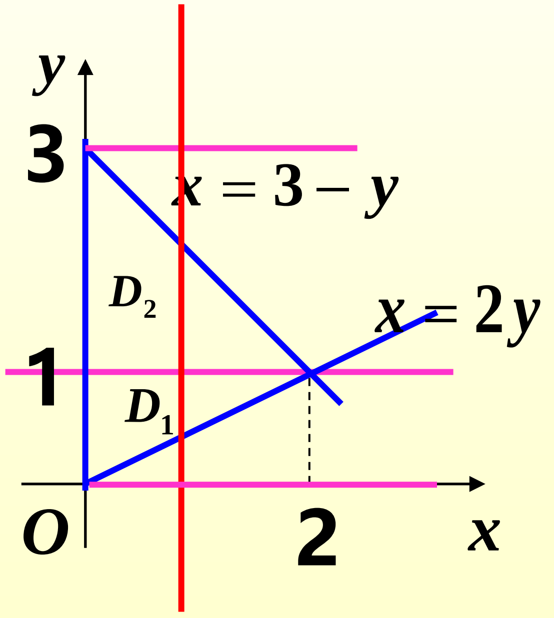
解 1) $D=D_1\cup D_2$

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2y,0\le y\le 1\}$$

$$D_2=\{(x,y)\mid 0\le x\le 3-y,1\le y\le 3\}$$

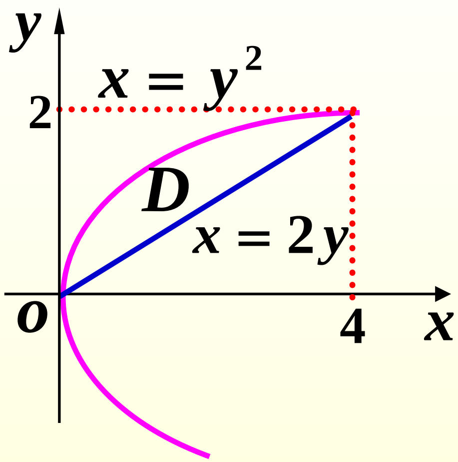
$$\therefore D=\left\{(x,y)\left|\frac{x}{2}\le y\le 3-x,0\le x\le 2\right.\right\}$$

上式$=\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)\mathrm{d}y$



$$2)\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

如图所示:



解 $D=\left\{(x,y)\mid y^2\le x\le 2y, 0\le y\le 2\right\}$

***D*又可以表示为**

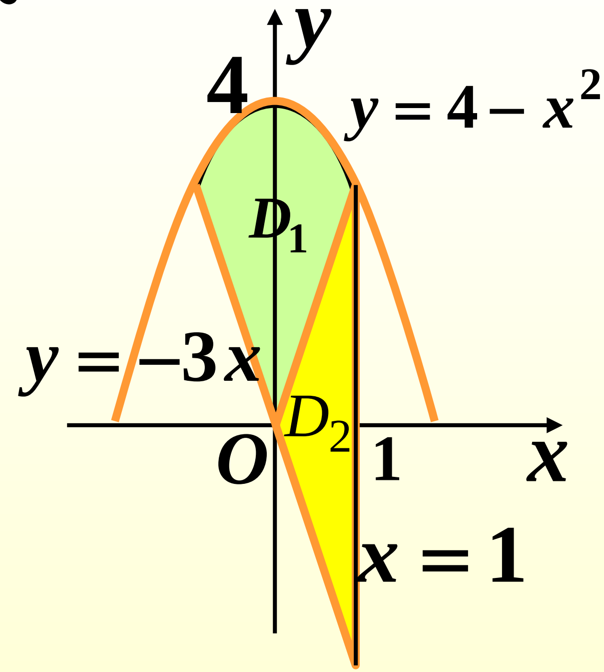
$$\left\{(x,y)\left|\frac{x}{2}\le y\le\sqrt{x}, 0\le x\le 4\right.\right\}$$

$$\therefore \int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^4 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

上页 下页

例5 计算 $I=\iint\limits_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由

$y=4-x^2, y=-3x, x=1$所围成.



解 令 $f(x,y)=x\ln(y+\sqrt{1+y^2})$

$D=D_1\cup D_2$ (如图所示)

显然，在D_1上，$f(-x,y)=-f(x,y)$

在D_2上，$f(x,-y)=-f(x,y)$

$$\therefore I=\iint\limits_{D_1} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

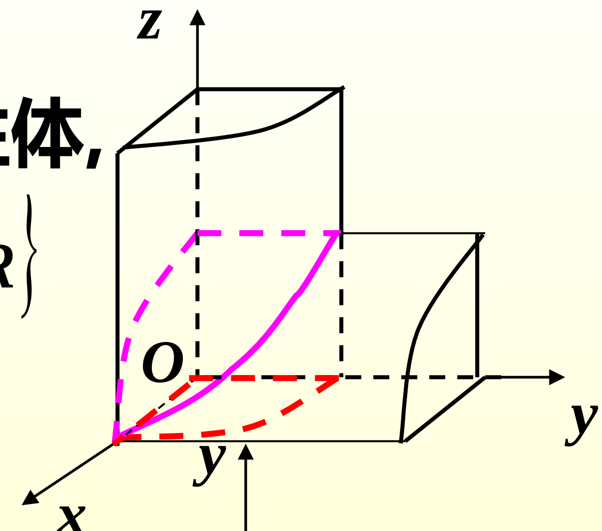
上页 下页

例6 求两个底圆半径都等于R的直交圆柱面所围成的立体的体积.

P_{146}例4

解 设两个圆柱面的方程分别为

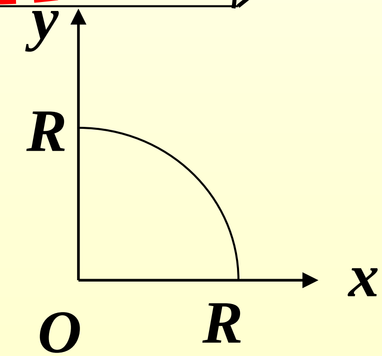
$$x^2+y^2=R^2 \text{ 及 } x^2+z^2=R^2$$



所求立体在第一卦限的部分为一曲顶柱体,

它的底为 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le\sqrt{R^2-x^2},0\le x\le R\right\}$

其顶为柱面 $z=\sqrt{R^2-x^2}$



$$V_1=\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$$

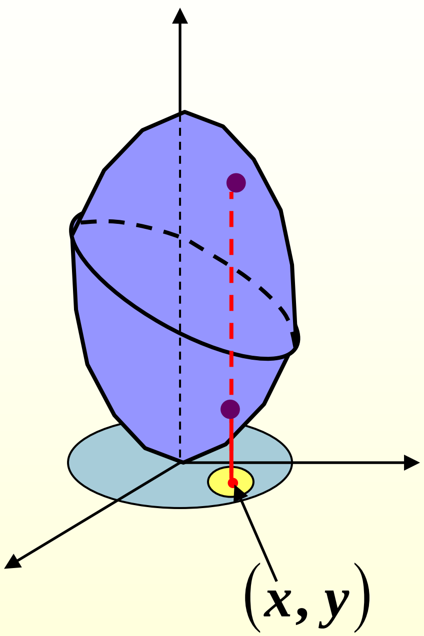
$$=\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^R\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}R^3$$

由图形的对称性，所求立体体积为 $V=8V_1=\dfrac{16}{3}R^3$

例7求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

P$_{158}$10

解 两曲面的交线为: $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$



在 xOy 面的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=0 \end{cases}$

该立体在xOy面的投影区域即**积分区域**为:

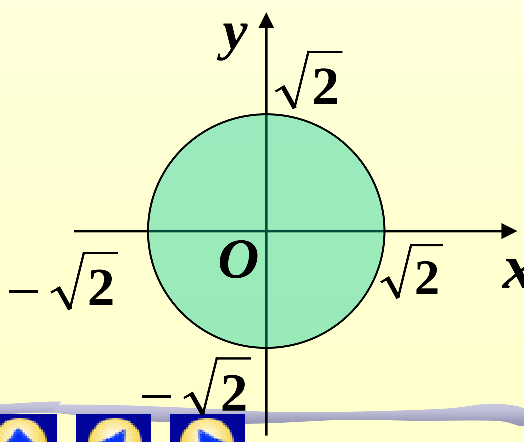
$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2\}$$

$$V=\iint_D\left[\left(6-2x^2-y^2\right)-\left(x^2+2y^2\right)\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_D\left(6-3x^2-3y^2\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\left(6-3x^2-3y^2\right)\mathrm{d}y=6\pi$$

P27

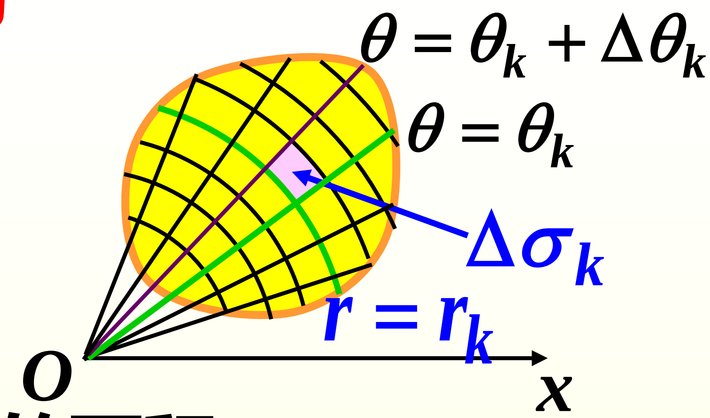


二、利用极坐标计算二重积分

在极坐标系下, 用同心圆 r =常数

及射线 θ =常数, 分划区域D 为

$$\Delta\sigma_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

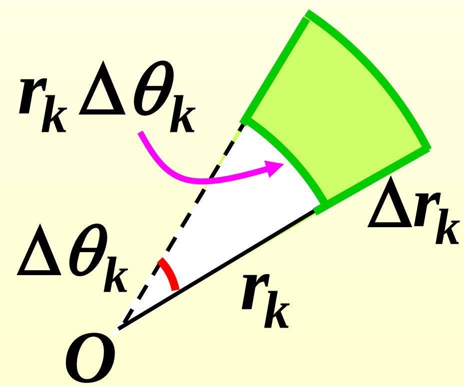


则除包含边界点的小区域外,小区域的面积

$$\Delta\sigma_k = \frac{1}{2}(r_k+\Delta r_k)^2\cdot\Delta\theta_k - \frac{1}{2}r_k^{\,2}\cdot\Delta\theta_k$$

$$= \frac{1}{2}[r_k+(r_k+\Delta r_k)]\Delta r_k\cdot\Delta\theta_k$$

$$= \overline{r_k}\,\Delta r_k\cdot\Delta\theta_k$$



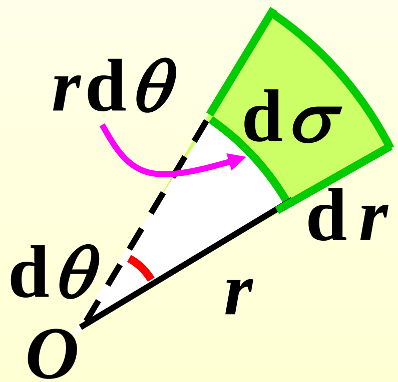
在$\Delta\sigma_k$内取点$(\overline{r_k},\overline{\theta_k})$, 对应有

$$\xi_k=\overline{r_k}\cos\overline{\theta_k},\quad \eta_k=\overline{r_k}\sin\overline{\theta_k}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k$$

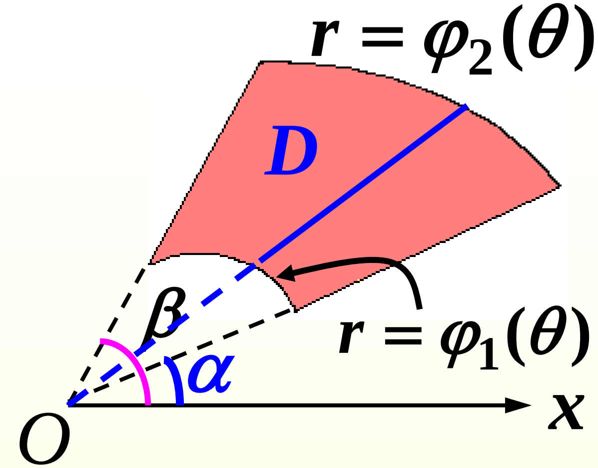
$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{r_k} \cos \overline{\theta_k}, \overline{r_k} \sin \overline{\theta_k}) \overline{r_k} \Delta r_k \Delta \theta_k$$

即 $$\iint_D f(x, y) \,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$



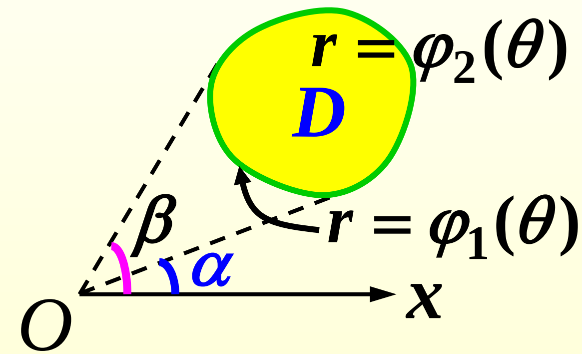
一般地, 积分区域为圆形、扇形或环形时，或者是其一部分时，用极坐标计算较简单.

设 $D:\begin{cases}\varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{cases}$，则

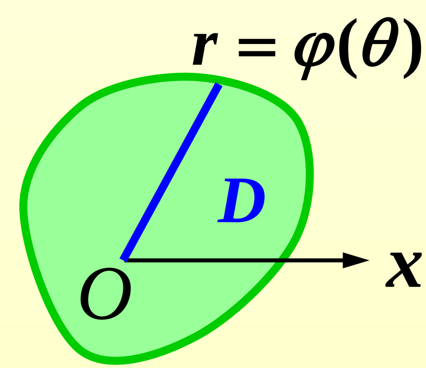


$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$



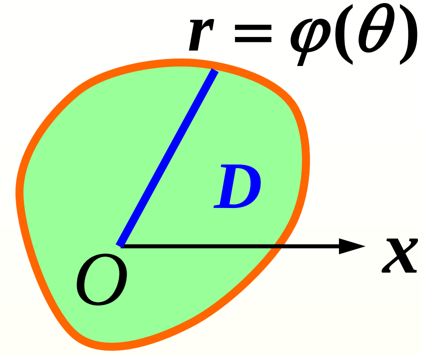
特别，对 $D:\begin{cases}0\le r\le\varphi(\theta)\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$



$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$

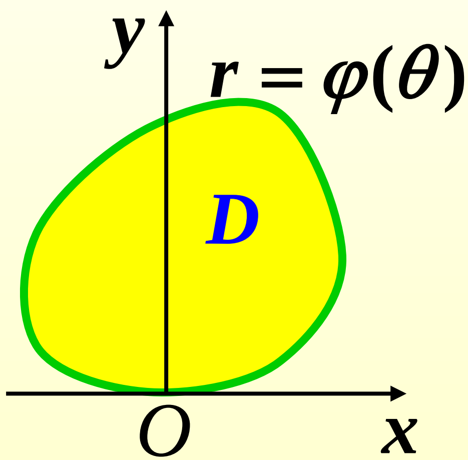
此时若 $f\equiv 1$ 则可求得 D 的面积



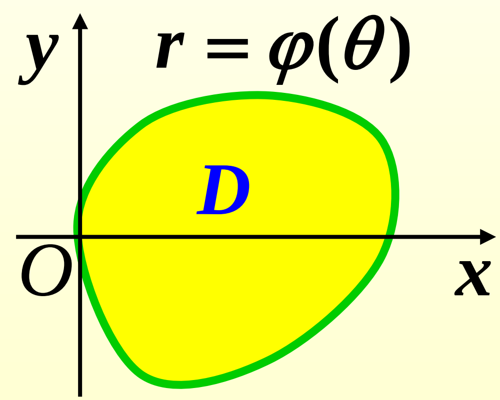
$$\sigma=\iint_D \mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

思考: 下列各图中区域 D 分别与 x , y 轴相切于原点,试问 θ 的变化范围是什么?

(1)



(2)



答: (1) $0\le\theta\le\pi$; (2) $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

例8 计算 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$， 其中 $D: x^2+y^2\le a^2$.

解 在极坐标系下, D可表示为 $0\le r\le a,\ 0\le\theta\le 2\pi$

原式 $=\iint\limits_D e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r e^{-r^2}\,dr$

$$= 2\pi\left[\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \pi(1-e^{-a^2})$$

由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数，故本题无法用直角坐标计算.

注: 利用上题可得一个在概率论与数理统计及工程上非常有用的反常积分公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad ①$$

事实上，

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$$

$$= 4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

又

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{a\to+\infty} \iint_{x^2+y^2\le a^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \pi(1-e^{-a^2}) = \pi$$

故①式成立 .

例9 化下列积分为极坐标系下的二次积分:

(补充)

1) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$为:

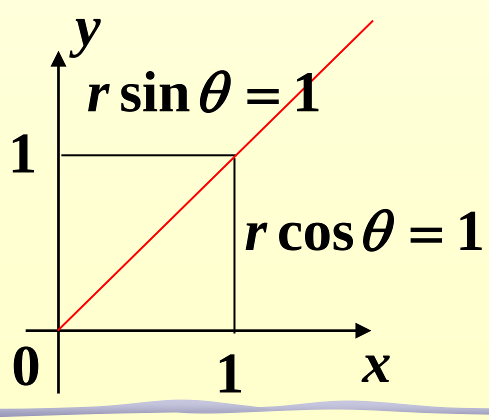
$(x-a)^2+y^2=a^2$ 位于 $y=x$和$x=0$ 之间的部分.

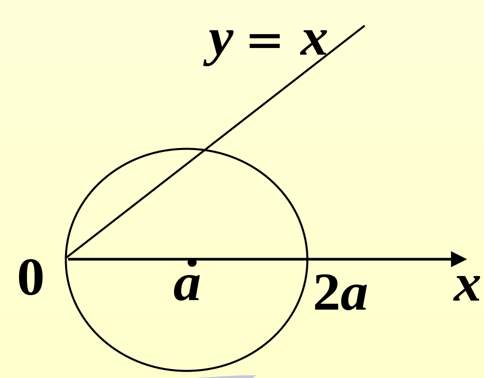
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

2) $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$ $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

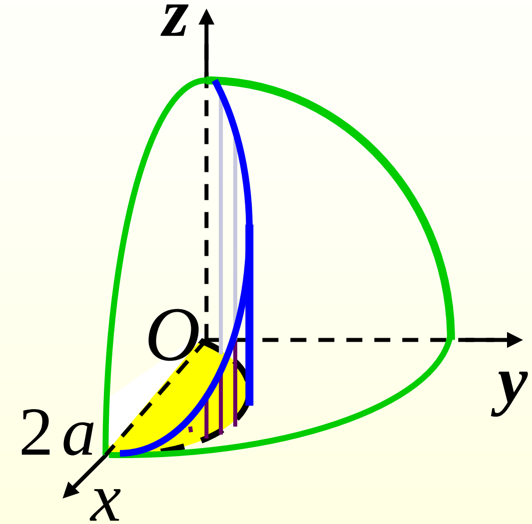
$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

$P_{158}12(1)$





例10 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 所截得的(含在柱面内的)立体的体积.



解 设 $D: 0 \le r \le 2a\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

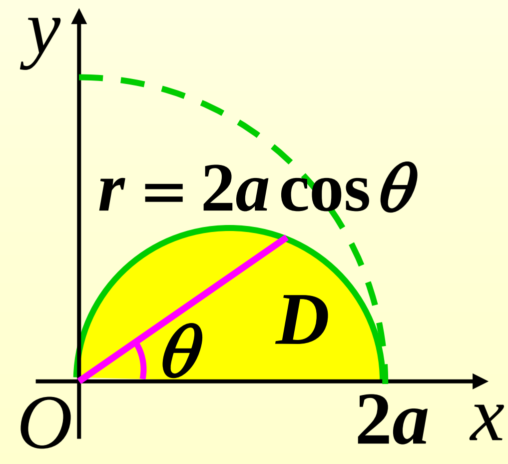
由对称性可知

$$V = 4\iint_D \sqrt{4a^2 - r^2}\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2 - r^2}\, r\, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{32}{3}a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3\theta)\, \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{32}{3}a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$$



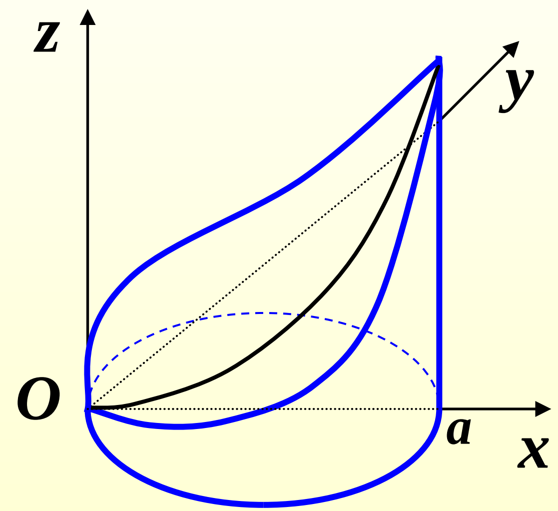
例11 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底，以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积. P$_{159}$18

解 $V=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta} r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{a\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

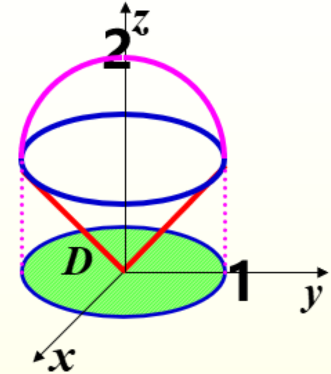
$$=\frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{32}a^4$$



例13 求曲面 $z=2-x^2-y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的体积.

(补充)

解 如图. 联立 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$



P15

得投影区域 $D:\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ z=0 \end{cases}$

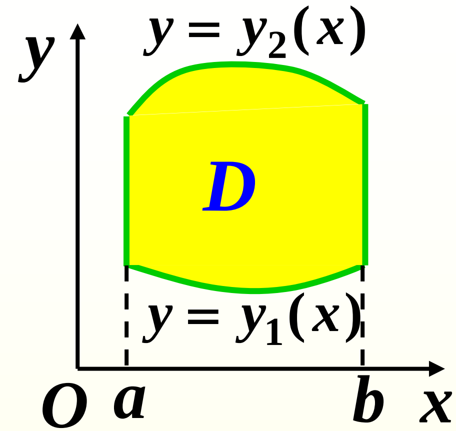
极坐标表示为 $D:\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$

$$v=\iint\limits_D\left(2-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(2-r^2-r)r\mathrm{d}r=\frac{5}{6}\pi$$

内容小结

(1) 二重积分化为二次积分的方法

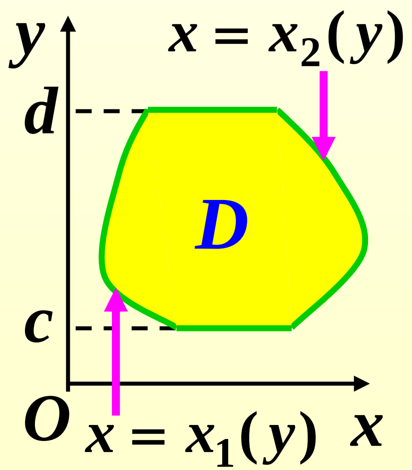


直角坐标系情形：

- **若积分区域为**

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$



- **若积分区域为**

$$D=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$$

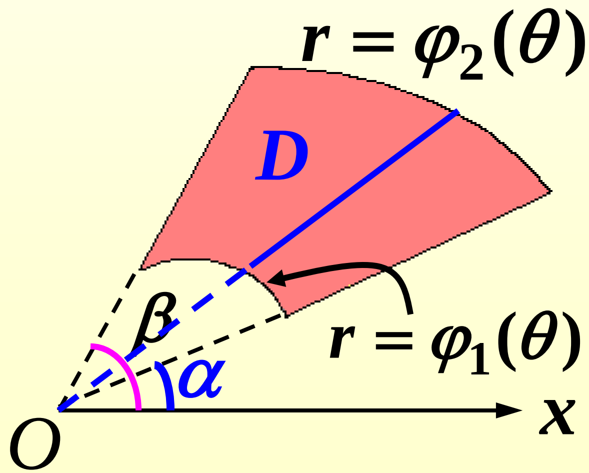
则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

极坐标系情形：若积分区域为

$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\alpha\le\theta\le\beta\,,\varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\right\}$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r$$



(2) 计算步骤及注意事项

- **画出积分域**
- **选择坐标系**
  - 域边界应尽量多为坐标线
  - 被积函数关于坐标变量易分离
- **确定积分序**
  - 积分域分块要少
  - 累次积分好算为妙
- **写出积分限**
  - 图示法
  - 不等式

（先积一条线, 后扫积分域）

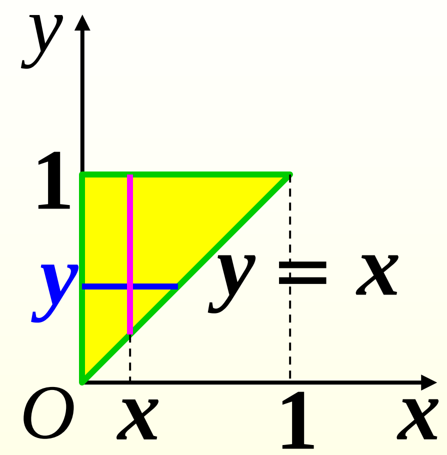
- **计算要简便**
  - 充分利用对称性
  - 应用换元公式

结束 目录 上页 下页

思考与练习

1. 设 $f(x) \in C[0,1]$，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$，

求 $I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x) f(y) \mathrm{d}y$.



提示： 交换积分顺序后，x，y 互换

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x) f(y) \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x) f(y) \mathrm{d}y$$

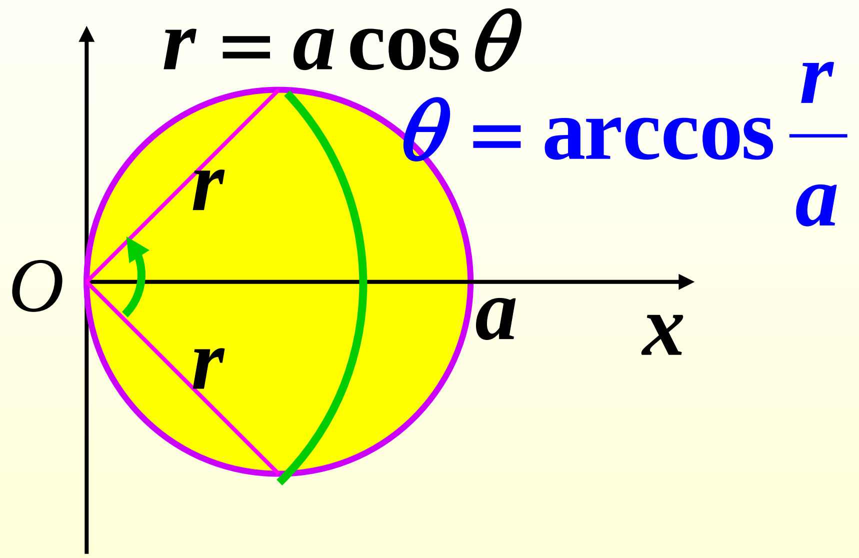
$$\therefore \ 2I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x) f(y) \mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x) f(y) \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x) f(y) \mathrm{d}y = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x \int_0^1 f(y) \mathrm{d}y = A^2$$

结束 上页 下页

2. 交换积分顺序 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r,\theta)\mathrm{d}r \quad (a>0)$

提示: 积分域如图



$$I=\int_0^a \mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(r,\theta)\mathrm{d}\theta$$

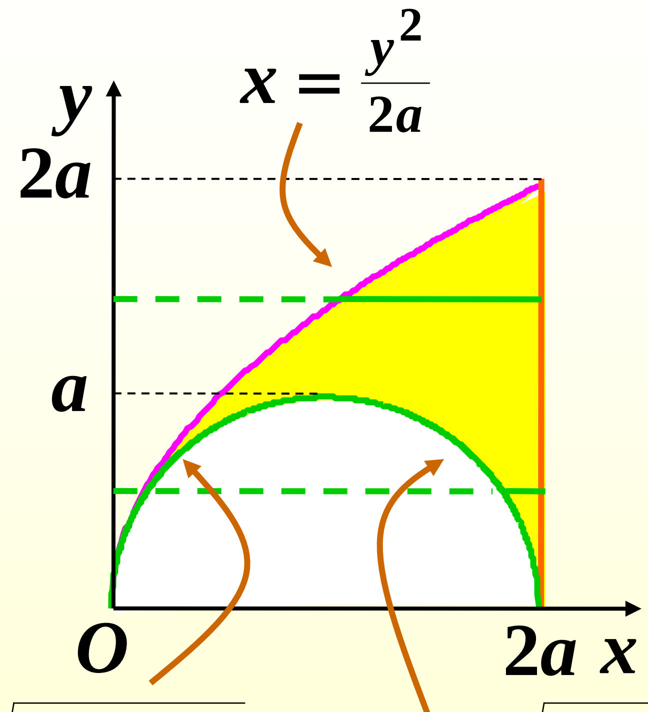
备用题 1. 给定 $I=\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\ \ (a>0)$

改变积分的次序.

解: $y=\sqrt{2ax} \Rightarrow x=\dfrac{y^2}{2a}$

$y=\sqrt{2ax-x^2}$

$\Rightarrow x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$



$x=a-\sqrt{a^2-y^2}$ $\quad x=a+\sqrt{a^2-y^2}$

$$\text{原式}=\int_0^a\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^a\mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

2. 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$为由圆 $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$, $y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.

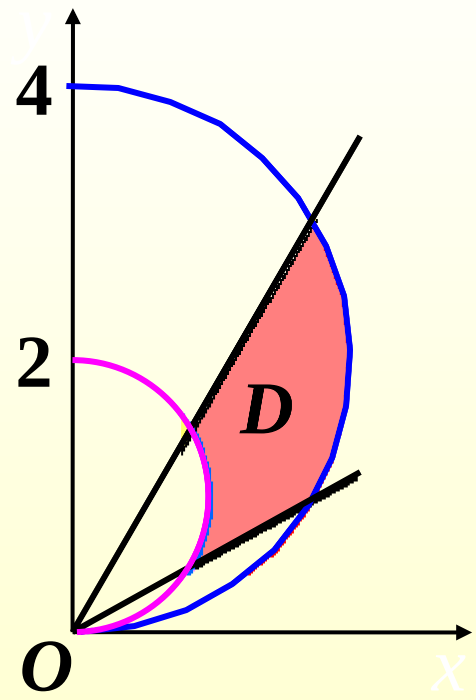
解:

$$x^2+y^2=2y \Rightarrow r=2\sin\theta$$

$$x^2+y^2=4y \Rightarrow r=4\sin\theta$$

$$y-\sqrt{3}x=0 \;\Rightarrow \theta_2=\frac{\pi}{3}$$

$$x-\sqrt{3}y=0 \;\Rightarrow \theta_1=\frac{\pi}{6}$$



$$\therefore \iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=15\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

第三节 三重积分

一、三重积分的概念

二、利用直角坐标计算三重积分

三、利用柱面坐标计算三重积分

四、利用球面坐标计算三重积分

一、三重积分的概念

引例 空间物体的质量

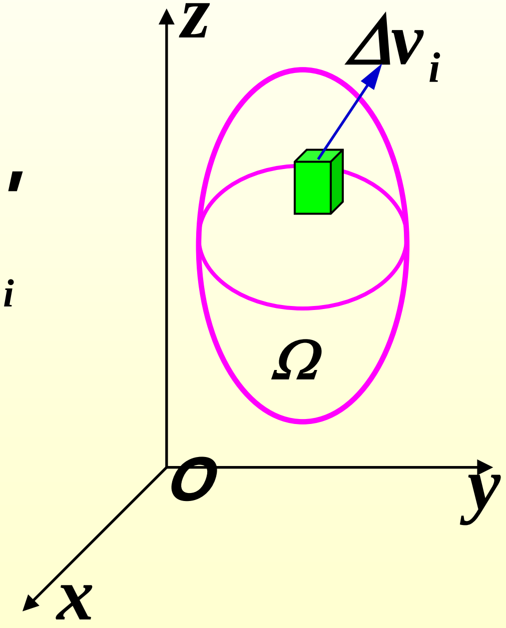
设在空间有界闭区域 Ω 内分布着某种不均匀的物质，密度函数为 $\mu(x,y,z)\in C$，求分布在 Ω 内的物质的质量 M.

把 Ω 任意分割成 n 块小区域:

$\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$ (Δv_i 也表示其体积),

任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta v_i$, $\Delta M_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$

$$M=\sum_{i=1}^{n}\Delta M_i \approx \sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$



取 λ 为 n 小块区域的最大直径,则

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i=\iiint_{\Omega}\mu(x,y,z)\mathrm{d}v$$

定义. 设 $f(x,y,z),(x,y,z)\in\Omega$，若对 Ω 作**任意分割**: $\Delta v_k\ (k=1,2,\cdots,n)$，**任意取点** $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta v_k$，下列“乘积和式” 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k \overset{\text{记作}}{=\!=} \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的**三重积分**.

$\mathrm{d}v$ 称为**体积元素**，在直角坐标系下常写作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

注 ① 特别地，若在 Ω 上恒有 $f(x,y,z)\equiv 1$，则

$$\boxed{\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v = v}$$

② 存在定理

当函数 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 Ω 上连续时，

$f(x,y,z)$ 在 Ω 上必定可积.

③性质: 具有与二重积分类似的性质.

如:线性性质;关于积分区域的可加性；不等性;

三重积分中值定理等.

三重积分的求法:

将其化为累次积分，即三次积分.

二、利用直角坐标计算三重积分

方法1. 投影法 (“先一后二”)

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

先计算定积分,再计算二重积分.

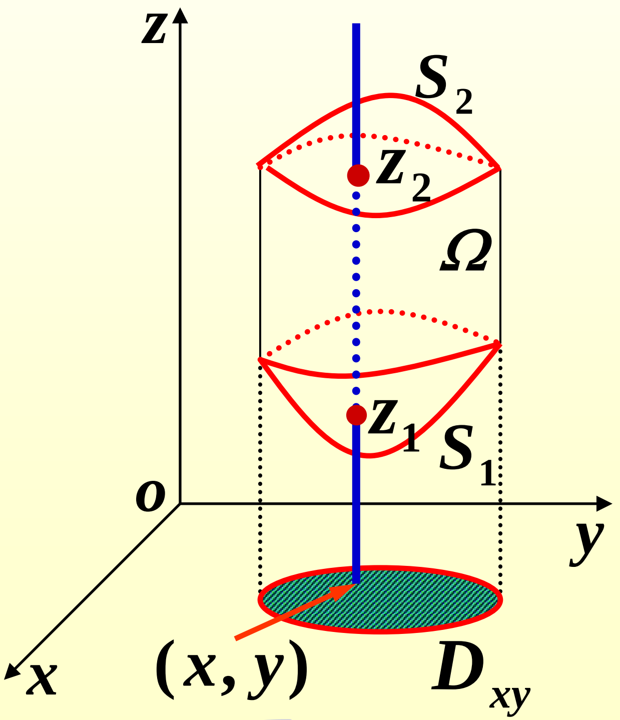
$$S_1 : z = z_1(x,y)$$

$$S_2 : z = z_2(x,y)$$

先求出Ω在xoy面上的投影D_{xy}

在D_{xy}上任意取点(x,y),

“穿线法” 定出z的上下限



若$D_{xy}:\begin{cases} y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ $\longrightarrow$ X型区域，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

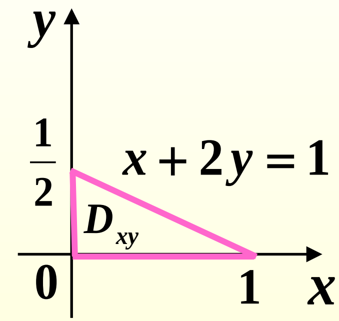
上式称把三重积分化作先z,再y,最后x的三次积分.

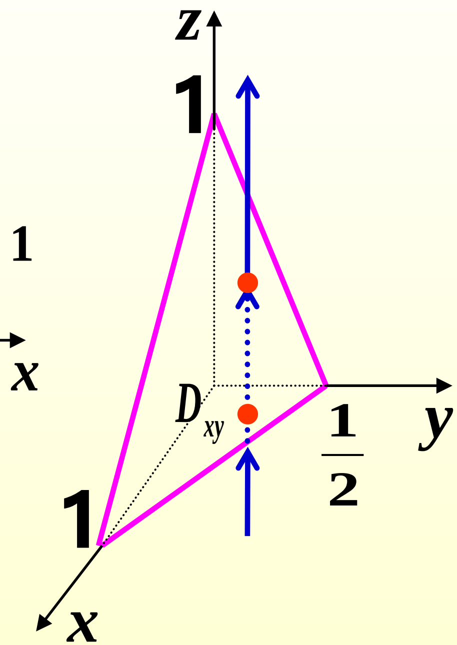
注 若平行于x轴或y轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面相交不多于两点, 可将区域投影到yoz面或xoz面上，把三重积分化作其它顺序的三次积分.

例1 把三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 转化为三次积分:

1) Ω 由三坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围.

解 1)如图 $D_{xy}:\begin{cases} 0\le y\le \dfrac{1-x}{2} \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$





$$0\le z\le 1-x-2y$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

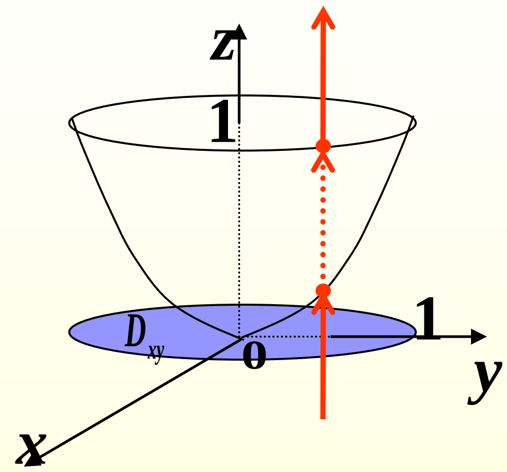
$$=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y} f(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

2) Ω是由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围. P166：1(2)

解 $$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$



注

1.若空间区域 Ω 的草图很易做出, 根据草图首先确定Ω在某个坐标面(如xoy面)上的投影区域D, 再采用 “穿线法” 确定第3个积分变量(z)的上下限;

2.若空间区域Ω 的草图不易做出, 观察曲面方程特点,

首先确定一个合适的投影坐标面,找到投影区域D,

(一般, 消去两个方程中都含有的那个变量)

然后在D内取一个点,比较两个曲面在该点取值的大小,

$$\begin{cases}\text{对应值大的曲面作为积分上限}\\ \text{对应值小的曲面作为积分下限}\end{cases}$$

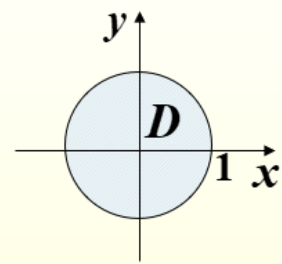
3) Ω由曲面$z=x^2+2y^2,\ z=2-x^2$所围区域 P166：1(3)

解 消去z,得 Ω 在xoy面上的投影区域D： $x^2+y^2\le 1$

在(0,0)点处, $z_1=x^2+2y^2=0,\ z_2=2-x^2=2>0$

上式积分 $=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$



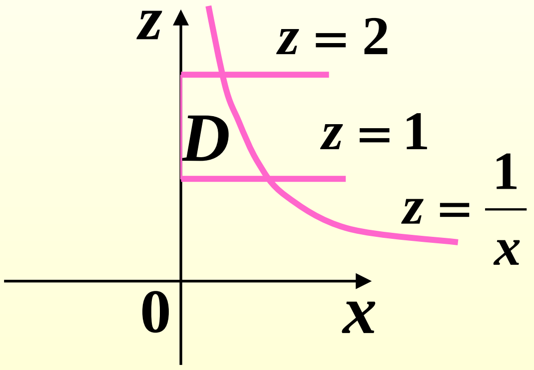
4) Ω由曲面$x=0,\ z=\dfrac{1}{x},\ z=1,\ z=2,\ y=0,\ y=z^2$ 所围.**补充**

向xoy面投影不好

解 Ω 在zox面上的投影区域D如右

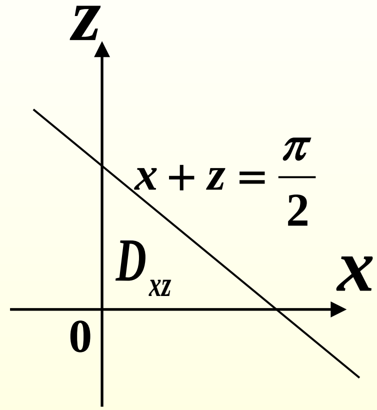
上式积分 $$=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_0^{z^2} f(x,y,z)\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2 \mathrm{d}z\int_0^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}x\int_0^{z^2} f(x,y,z)\mathrm{d}y$$



例2计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} y\sin(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω由$y=0$, $z=0, x+z=\dfrac{\pi}{2}, y=\sqrt{x}$ 所围. **向*xoy*面投影也可以**

解 Ω 在*xoz*面的投影区域如图:

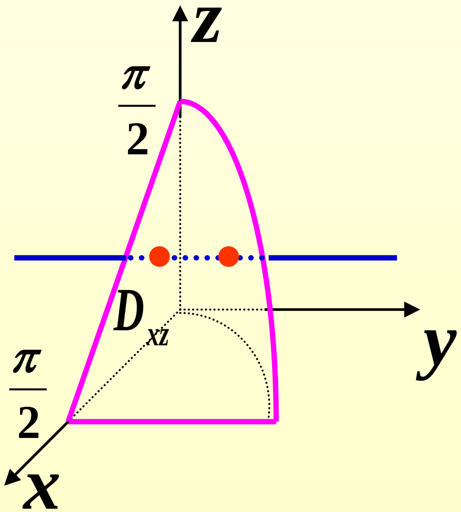


$$D_{xz}:\begin{cases} 0\le z\le \dfrac{\pi}{2}-x \\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$ 而 $0\le y\le\sqrt{x}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\sin(x+z)\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{x}}y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\sin(x+z)\mathrm{d}z$$

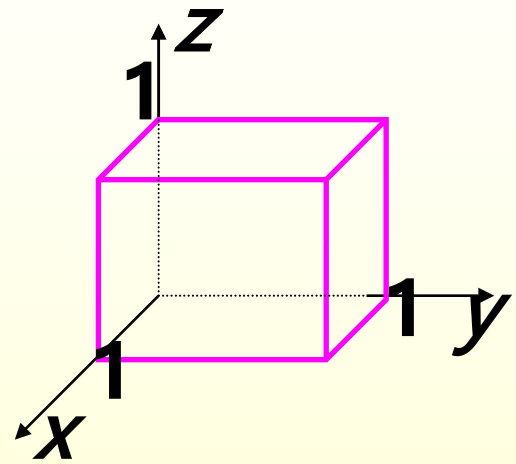
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x=\frac{\pi-2}{4}$$



例3设有一物体,占有空间闭区域 $\Omega: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$

点(x, y, z)处的体密度为 $\mu(x, y, z) = x + y + z,$

计算该物体的质量. P166:2



解

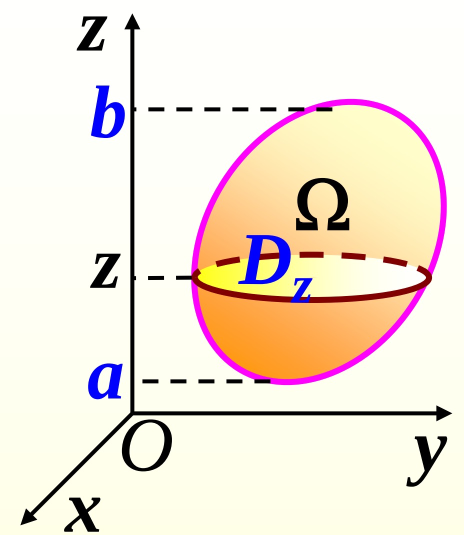
$$M = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z)\mathrm{d}v$$

$$= \iiint_{\Omega} (x + y + z)\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 (x + y + z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (x + y + \frac{1}{2})\mathrm{d}y = \int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$$

方法2. 截面法 (“先二后一”)



$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z\\ a\le z\le b\end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

$$=\int_a^b\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

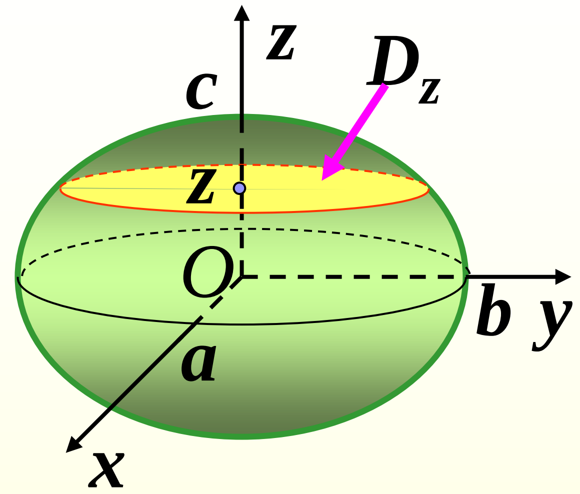
记作 $\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

一般情况下: D_z **的面积可以表示为** z **的函数,而**

$f(x,y,z)=f(z)$, 则 $\boxed{\iiint_{\Omega} f(z)\mathrm{d}v=\int_{c_1}^{c_2} f(z)\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$

例4 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

其中$\Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1.$



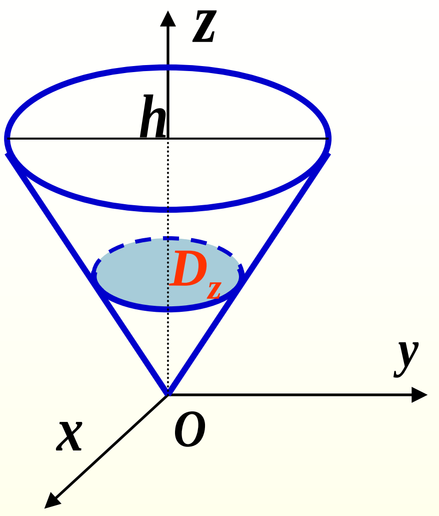
解 $\Omega: \begin{cases} -c \le z \le c \\ D_z: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2} \end{cases}$

用"先二后一"

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-c}^{c} z^2\,\mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-c}^{c} z^2 \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{4}{15}\pi abc^3$$

例5 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，$\Omega$ 由锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h\,(R>0, h>0)$ 所围成的闭区域. P167:8



解 画草图

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2\le\frac{R^2}{h^2}\cdot z^2, 0\le z\le h\right\}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^h z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

截面圆的面积为：πr^2，

此处圆半径 r 为：$\frac{R}{h}z$

$$=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^3\mathrm{d}z=\frac{\pi R^2h^2}{4}$$

两种方法各有特点，具体计算时应根据被积函数及积分域的特点灵活选择.

上页 下页

利用被积函数的奇偶性与积分区域的对称性化简三重积分　补充

例6 计算$I_1=\iiint\limits_{\Omega} ye^{|x|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 及$I_2=\iiint\limits_{\Omega} e^{|x|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.其中

$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$

解 对于 I_1 ,显然积分区域关于zOx面对称, 且被积函数

$f(x,-y,z)=-ye^{|x|}=-f(x,y,z)$, 所以 $I_1=0$

对于 I_2 ,积分区域Ω关于三个坐标面都对称,不妨设其在第一卦限的部分为 $\Omega_1=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$

由于被积函数 $f(x,y,z)=e^{|x|}$ 关于x、y、z都是偶函数, 所以

$$I_2=\iiint\limits_{\Omega} e^{|x|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\iiint\limits_{\Omega_1} e^{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\int_0^1 e^x\mathrm{d}x\iint\limits_{D_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

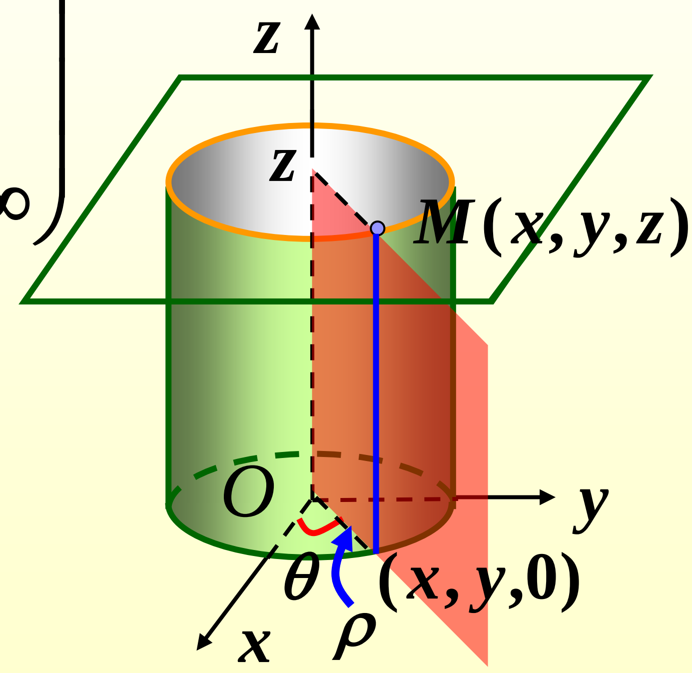
$$=8\int_0^1\frac{\pi}{4}\left(1-x^2\right)e^x\mathrm{d}x=2\pi$$

三、利用柱面坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in \mathbf{R}^3$, 将 x,y 用极坐标 ρ,θ 代替, 则 (ρ,θ,z)

就称为点 M 的柱面坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{pmatrix}$$



坐标面分别为

$\rho=$ 常数 ⟹ **圆柱面**

$\theta=$ 常数 ⟹ **半平面**

$z=$ 常数 ⟹ **平面**

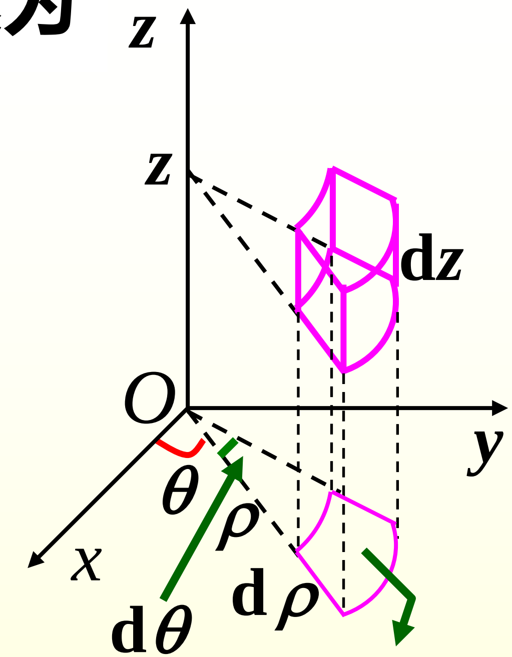
如图所示, 在柱面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

因此 $\displaystyle\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$$=\iiint_{\Omega} F(\rho,\theta,z)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

其中 $F(\rho,\theta,z)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)$

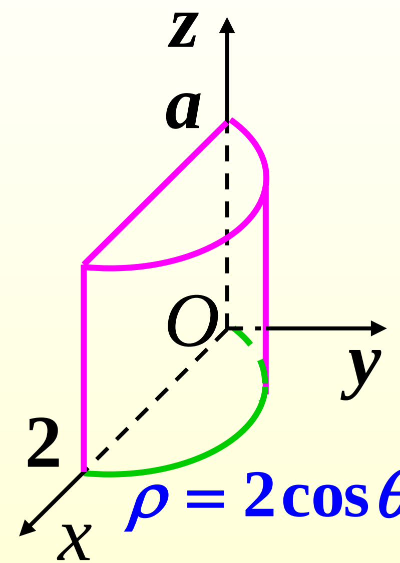


$$\boxed{\mathrm{d}\sigma=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}$$

注: 当积分区域在坐标面的投影为圆形、环形、扇形（或其一部分），而被积函数为 $f\left(x^2+y^2,z\right)$, $f\left(x^2+z^2,y\right)$或$f\left(z^2+y^2,x\right)$ 等形式时, 一般均宜采用柱面坐标来计算, 特别当积分区域为圆柱、环柱、扇形柱等形状的区域时, 用柱面坐标简单.

例7 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 其中Ω为由柱面 $x^2+y^2=2x$ 及平面 $z=0, z=a\ (a>0), y=0$ 所围成半圆柱体.

解 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases} 0\le\rho\le 2\cos\theta \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le z\le a \end{cases}$



$$\text{原式}=\iiint\limits_{\Omega} z\rho^2\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

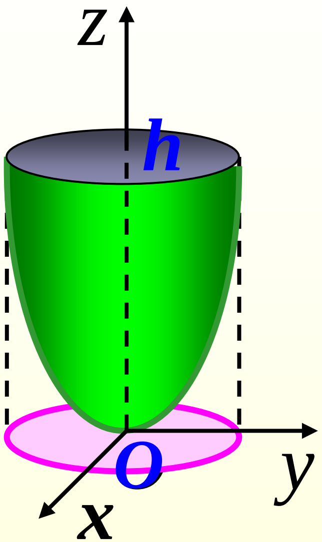
$$=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\int_0^a z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}a^2$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

化为三次积分计算,积分次序是: 先对z ,再对ρ,最后对 θ

例8 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$， 其中$\Omega$ 由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\,(h>0)$ 所围成 .



解 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}\frac{\rho^2}{4}\le z\le h\\ 0\le\rho\le 2\sqrt{h}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

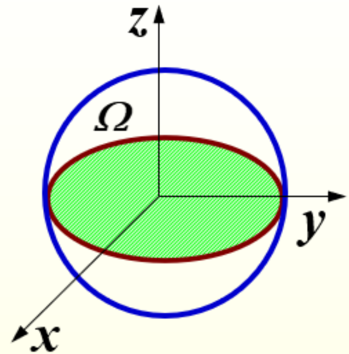
$$原式=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{h}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\left(h-\frac{\rho^2}{4}\right)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h)-4h]$$

练习2 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0$

解 画草图 $\quad \Omega:\begin{cases} 0\le z\le\sqrt{1-r^2} \\ 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$



$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{1-r^2}} zr\,\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^1 r\frac{1}{2}(1-r^2)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}$$

另解 $\quad \Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 1, x^2+y^2\le 1-z^2\}$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 z\pi(1-z^2)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}$$