代数系统简介

- 主要内容
- 二元运算及其性质

一元和二元运算定义及其实例

- 代数系统

代数系统定义及其实例

子代数

积代数

- 代数系统的同态与同构

代数系统的基本概念

定义1 设S为集合，函数f：$S\times S\to S$ 称为S上的二元运算，简称为二元运算．函数 f:$S\to S$ 称为S上的一元运算，简称一元运算.

- S 中任何元素都可以进行运算，且运算的结果惟一.
- S 中任何元素的运算结果都属于 S，即 S 对该运算封闭.

例1 （1） 自然数集合N上的加法和乘法是N上的二元运算，但减法和除法不是.

(2) 整数集合Z上的加法、减法和乘法都是Z上的二元运算，而除法不是．求一个数的相反数是Z上的一元运算.

(3) 非零实数集R*上的乘法和除法都是R*上的二元运算，而加法和减法不是．求倒数是R*上的一元运算.

(4) 设M_n(R)表示所有n 阶(n≥2)实矩阵的集合，即

$$M_n(R)=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| \; a_{ij}\in R,\ i,j=1,2,\ldots,n\right\}$$

矩阵加法、乘法是M_n(R)上的二元运算. 转置是一元运算.

(5) S为任意集合，则∪、∩、−、⊕ 为P(S)上二元运算. ~运算为一元运算.

(6) S^S为S上的所有函数的集合，则合成运算∘为S^S上二元运算. 求反函数不一定是一元运算.

1．算符

可以用∘, ∗, •，⊕, ⊗, Δ等符号表示二元或一元运算，称为算符.

对二元运算∘，如果x与y运算得到 z，记做 $x \circ y = z$

对一元运算Δ，x的运算结果记作Δx.

2．表示二元或一元运算的方法: 解析公式和运算表公式表示

例 设R为实数集合，如下定义R上的二元运算∗:

$$\forall x, y \in R,\ x * y = x.$$

那么 $3*4 = 3$，$0.5*(-3) = 0.5$

运算表

运算表：表示有穷集上的一元和二元运算

$\circ$	a_1	a_2	$\dots$	a_n
a_1	$a_1\circ a_1$	$a_1\circ a_2$	$\dots$	$a_1\circ a_n$
a_2	$a_2\circ a_1$	$a_2\circ a_2$	$\dots$	$a_2\circ a_n$
.		$\dots$		
.		$\dots$		
.		$\dots$		
a_n	$a_n\circ a_1$	$a_n\circ a_2$	$\dots$	$a_n\circ a_n$

二元运算的运算表

	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
.	.
.	.
.	.
a_n	$\circ a_n$

一元运算的运算表

运算表的实例

例2 设 $S=P(\{a,b\})$，S上的⊕和 ~运算的运算表如下，全集E={a,b}

$\oplus$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a.b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\varnothing$

x	$\sim x$
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$

定义2 设∘为S上的二元运算,

(1) 若对任意$x, y \in S$ 有 $x \circ y = y \circ x$, 则称运算在S上满足**交换律**.

(2) 若对任意$x, y, z \in S$有 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, 则称运算在S上满足**结合律**.

(3) 若对任意$x \in S$ 有 $x \circ x = x$, 则称运算在S上满足**幂等律**.

定义3 设∘和*为S上两个不同的二元运算,

(1) 若对任意$x, y, z \in S$有 $(x*y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$,

$z \circ (x*y) = (z \circ x) * (z \circ y)$, 则称∘运算对*运算满足**分配律**.

(2) 若∘和*都可交换, 且对任意$x, y \in S$有$x \circ (x*y) = x$, $x * (x \circ y) = x$, 则称∘和*运算满足**吸收律**.

例3

Z，Q，R分别为整数、有理数、实数集；$M_n(R)$ 为n阶实矩阵集合，$n\geq 2$；$P(B)$ 为幂集；A^A为从A到A的函数集，$|A|\geq 2$。

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
Z,Q,R	普通加法+ 普通乘法×	有 有	有 有	无 无
$M_n(R)$	矩阵加法+ 矩阵乘法×	有 无	有 有	无 无
$P(B)$	并∪ 交∩ 相对补− 对称差⊕	有 有 无 有	有 有 无 有	有 有 无 无
A^A	函数复合∘	无	有	无

例3

Z，Q，R分别为整数、有理数、实数集；$M_n(R)$为n阶实矩阵集合，n≥2；P(B)为幂集；A^A为从A到A的函数集，|A|≥2

集合	运算	分配律	吸收律
Z, Q, R	普通加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$M_n(R)$	矩阵加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
P(B)	并∪与交∩	∪对∩可分配 ∩对∪可分配	有
	交∩与对称差⊕	∩对⊕可分配	无

单位元、零元

定义4 设∘为S上的二元运算，

(1) 如果存在e_l（或e_r）$\in S$，使得对任意 $x\in S$ 都有

$$e_l \circ x = x \quad (\text{或 } x \circ e_r = x),$$

则称e_l（或e_r）是S中关于∘运算的左（或右）单位元.

若$e\in S$关于∘运算既是左单位元又是右单位元，则称e为S上关于∘运算的单位元. 单位元也叫做幺元.

(2) 如果存在θ_l（或θ_r）$\in S$，使得对任意 $x\in S$ 都有

$$\theta_l \circ x = \theta_l \quad (\text{或 } x \circ \theta_r = \theta_r),$$

则称θ_l（或θ_r）是S中关于∘运算的左（或右）零元.

若$\theta\in S$ 关于∘运算既是左零元又是右零元，则称θ为S上关于运算∘的零元.

可逆元素和逆元

(3) 设$\circ$为S上的二元运算，令e为S中关于运算$\circ$的单位元。对于$x\in S$，如果存在y_l(或y_r)$\in S$使得

$$y_l\circ x=e\ (\text{或}\ x\circ y_r=e)$$

则称y_l(或y_r)是x的左逆元（或右逆元）。

关于$\circ$运算，若$y\in S$既是x的左逆元又是x的右逆元，则称y为x的逆元。如果x的逆元存在，就称x是可逆的。

可以证明：

对于给定二元运算，单位元或零元如果存在，则是唯一的。对于可结合的二元运算，给定元素若存在逆元，则是唯一的逆元。

例4

集合	运算	单位元	零元	逆元
Z,Q,R	普通加法+ 普通乘法×	0 1	无 0	x逆元$-x$ x逆元x^{-1} ($x^{-1}\in$给定集合)
$M_n(R)$	矩阵加法+ 矩阵乘法×	n阶全0矩阵 n阶单位矩阵	无 n阶全0矩阵	X逆元$-X$ X的逆元X^{-1} （X可逆）
$P(B)$	并∪ 交∩ 对称差⊕	$\varnothing$ B $\varnothing$	B $\varnothing$ 无	只有$\varnothing$的逆元为$\varnothing$ 只有B的逆元为B X的逆元为X

例：P257-14.3（1）-14.4（1）

消去律

定义5　设∘为S上的二元运算，如果对于任意的 x，y，$z\in S$满足以下条件：

(1) 若$x\circ y=x\circ z$且$x\neq\theta$（θ：运算的零元），则$y=z$；

(2) 若$y\circ x=z\circ x$且$x\neq\theta$ （θ：运算的零元），则$y=z$；

称∘运算满足消去律，其中(1)为左消去律，(2)为右消去律.

整数集合上的加法和乘法满足消去律.

$P(S)$上的并和交一般不满足消去律.　对称差运算⊕满足消去律，　$\forall A,B,C\in P(S)$，都有

$$A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$$

$$B\oplus A=C\oplus A\Rightarrow B=C$$

定义6 非空集合S和S上k个一元或二元运算$f_1, f_2, \cdots, f_k$组成的系统称为代数系统，简称代数，记$\langle S, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$.

实例：

(1) $\langle N, + \rangle$, $\langle Z, +, \cdot \rangle$, $\langle R, +, \cdot \rangle$是代数系统，+和·分别表示普通加法和乘法.

(2) $\langle M_n(R), +, \cdot \rangle$是代数系统，+和·分别表示 n 阶$(n \geq 2)$实矩阵的加法和乘法.

(3) $\langle Z_n, \oplus, \otimes \rangle$是代数系统，$Z_n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$，$\oplus$和$\otimes$分别表示模n的加法和乘法，对于$x, y \in Z_n$，$x \oplus y = (x+y) \bmod n$，$x \otimes y = (xy) \bmod n$

(4) $\langle P(S), \cup, \cap, \sim \rangle$是代数系统，$\cup$和$\cap$为并和交，$\sim$为绝对补.

代数系统的成分与表示

构成代数系统的成分：

集合（也叫载体，规定了参与运算的元素）

运算（这里只讨论有限个二元和一元运算）

代数常数（通常是对一元或二元运算起着重要作用的一些特定元素：如单位元等）

研究代数系统时，如果把运算具有它的特异元素也作为系统的性质之一，那么这些特异元素可以作为系统的成分，叫做代数常数.

例如：代数系统<Z, +, 0>：集合Z，运算+，代数常数0

代数系统<P(S), ∪, ∩>：集合P(S)，运算∪和∩，无代数常数

代数系统的成分与表示

代数系统的表示

(1) 列出所有的成分：**集合、运算、代数常数**（**如果存在**）

如$\langle Z,+,0\rangle$，$\langle P(S),\cup,\cap\rangle$

(2) **列出集合和运算**，在规定系统性质时不涉及具有单位元的性质（**无代数常数**）

如$\langle Z,+\rangle$，$\langle P(S),\cup,\cap\rangle$

(3) 用**集合名称**简单标记代数系统

在前面已经对代数系统作了说明的前提下使用

如代数系统Z，$P(B)$

定义7

(1) 如果两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数相同，且代数常数的个数也相同，则称它们是同类型的代数系统.

(2) 如果两个同类型的代数系统规定的运算性质也相同，则称为同种的代数系统.

例如 $V_1=<R, +, \cdot, 0, 1>$, $V_2=<M_n(R), +, \cdot, \theta, E>$, θ为$n$阶全0矩阵，$E$为$n$阶单位矩阵，$V_3=<P(B), \cup, \cap, \varnothing, B>$

- V_1，V_2，V_3是同类型的代数系统，它们都含有2个二元运算，2个代数常数.
- V_1，V_2是同种的代数系统，V_1，V_2与V_3不是同种的代数系统

运算性质比较

V_1	V_2	V_3
+ 可交换、可结合	+ 可交换、可结合	∪可交换、可结合
·可交换、可结合	·不可交换、可结合	∩可交换、可结合
+ 满足消去律	+ 满足消去律	∪不满足消去律
·满足消去律	· 不满足消去律	∩不满足消去律
·对 + 可分配	· 对 + 可分配	∩对∪可分配
+ 对·不可分配	+ 对·不可分配	∪对∩可分配
+ 与·没有吸收律	+ 与·没有吸收律	∪与∩满足吸收律

几个典型的代数系统

主要内容

- 半群、独异点与群
- 环与域
- 格与布尔代数

半群、独异点与群的定义

定义1

(1) 设$V=\langle S,\circ\rangle$是代数系统，$\circ$为二元运算，如果$\circ$运算是可结合的，则称V为半群.

(2) 设$V=\langle S,\circ\rangle$是半群，若$e\in S$是关于$\circ$运算的单位元，则称V是含幺半群，也叫做独异点. 有时也将独异点V 记作$V=\langle S,\circ,e\rangle$.

(3) 设$V=\langle S,\circ\rangle$是独异点，$e\in S$关于$\circ$运算的单位元，若$\forall a\in S$，$a^{-1}\in S$，则称V是群. 通常将群记作G.

例1

(1) $\langle Z^+, +\rangle$, $\langle N, +\rangle$, $\langle Z, +\rangle$, $\langle Q, +\rangle$, $\langle R, +\rangle$都是半群，+是普通加法. 这些半群中除$\langle Z^+, +\rangle$外都是独异点。 $\langle Z, +\rangle$, $\langle Q, +\rangle$, $\langle R, +\rangle$都是群，分别称作整数加群、有理数加群、实数加群和复数加群

(2) 设n是大于1的正整数，$\langle M_n(R), +\rangle$和$\langle M_n(R), \cdot\rangle$都是半群，也都是独异点，其中+和·分别表示矩阵加法和矩阵乘法

(3) $\langle P(B), \oplus\rangle$为半群，也是独异点，其中⊕为集合对称差运算

(4) $\langle Z_n, \oplus\rangle$为半群，也是独异点，其中$Z_n=\{0, 1, \cdots, n-1\}$，⊕为模n加法

(5) $\langle A^A, \circ\rangle$为半群，也是独异点，其中∘为函数的复合运算

(6) $\langle R^*, \circ\rangle$为半群，其中R*为非零实数集合，∘运算定义如下：$\forall x, y \in R^*$, $x \circ y = y$

例2　设Σ是有穷字母表，$\forall k \in N$，定义下述集合：

$$\Sigma_k = \{a_1 a_2 \cdots a_k \mid a_i \in \Sigma\}$$

是Σ上所有长度为k的串的集合．当k=0时，$\Sigma_0=\{\lambda\}$，λ表示空串．令$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma_i$ 表示Σ上所有有限长度的串的集合．$\Sigma^+=\Sigma^*-\{\lambda\}$则表示Σ上所有长度至少为1的有限串的集合．在$\Sigma^*$上可以定义串的连接运算，$\forall \omega_1, \omega_2 \in \Sigma^*$，$\omega_1=a_1 a_2 \cdots a_m$，$\omega_2=b_1 b_2 \cdots b_n$有$\omega_1\omega_2= a_1 a_2 \cdots a_m b_1 b_2 \cdots b_n$

显然Σ^*关于连接运算构成一个独异点，称为Σ上的字代数．Σ上的语言L就是Σ^*的一个子集．

例3 某二进制码的码字$x=x_1x_2\cdots x_7$由7位构成，其中x_1，x_2，x_3和x_4为数据位，x_5，x_6和x_7为校验位，且满足：

$$x_5=x_1\oplus x_2\oplus x_3$$

$$x_6=x_1\oplus x_2\oplus x_4$$

$$x_7=x_1\oplus x_3\oplus x_4$$

这里的$\oplus$是模2加法.

设G为所有码字构成的集合，在G上定义二元运算如下：

$\forall x, y\in G, x\circ y= z_1z_2...z_7, z_i=x_i\oplus y_i, i=1, 2, \cdots, 7.$

那么$\langle G, \circ\rangle$构成群. 这样的码称为群码

有限群：若群G是有穷集，则称G是有限群，否则称为无限群。

群G的阶：群G含有的元素数，有限群G的阶记作$|G|$。

交换群或阿贝尔(Abel)群：群中运算可交换

实例：$\langle Z,+\rangle$和$\langle R,+\rangle$是无限群，$\langle Z_n,\oplus\rangle$是$n$阶群.

上述所有的群都是交换群，但n阶（$n\geq2$）实可逆矩阵的集合（是$M_n(R)$的真子集）关于矩阵乘法构成的群是非交换群

子群：群G的非空子集H关于群的运算构成群，称为G的子群.

实例： $H=nZ=\{nk \mid k\in Z\}$，n为给定自然数，是$\langle Z,+\rangle$的子群.

当n=0和1时， 子群分别是$\{0\}$和Z，称为平凡子群；2Z由能被2整除的全体整数构成，也是子群.

定义2 设$G_1=\langle A, \circ\rangle$和$G_2=\langle B, *\rangle$是群，$\circ$和$*$分别为它们的二元运算，在集合$A\times B$上定义新的二元运算$\blacksquare$，$\forall\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle\in A\times B$，有

$$\langle a_1, b_1\rangle\blacksquare\langle a_2, b_2\rangle=\langle a_1\circ a_2, b_1*b_2\rangle$$

称$G=\langle A\times B, \blacksquare\rangle$为$G_1$与$G_2$的**直积**，记作$G_1\times G_2$.

例4 G_1, G_2分别为模3加和模2加群，它们的直积运算

⊕	<0,0>	<0,1>	<1,0>	<1,1>	<2,0>	<2,1>
<0,0>	<0,0>	<0,1>	<1,0>	<1,1>	<2,0>	<2,1>
<0,1>	<0,1>	<0,0>	<1,1>	<1,0>	<2,1>	<2,0>
<1,0>	<1,0>	<1,1>	<2,0>	<2,1>	<0,0>	<0,1>
<1,1>	<1,1>	<1,0>	<2,1>	<2,0>	<0,1>	<0,0>
<2,0>	<2,0>	<2,1>	<0,0>	<0,1>	<1,0>	<1,1>
<2,1>	<2,1>	<2,0>	<0,1>	<0,0>	<1,1>	<1,0>

定义3 设$<R, +, \cdot>$是代数系统，+和·是二元运算. 如果满足以下条件:

(1) $<R, +>$构成交换群 （+运算可交换的）

(2) $<R, \cdot>$构成半群 （·运算可结合）

(3) · 运算关于+运算适合分配律

则称$<R, +, \cdot>$是一个环.

通常称+运算为环中的加法，·运算为环中的乘法.

定义4 设$<R, +, \cdot>$是环，若

(1) 环中乘法可交换;

(2) R中至少含有两个元素. 且$\forall a \in R-\{0\}$，都有$a^{-1} \in R$;

则称R是域.

- 0指加法单位元，a^{-1}指a的乘法逆元

例5

(1) 整数集、有理数集、实数集和复数集关于普通的加法和乘法构成环，分别称为整数环Z，有理数环Q，实数环R和复数环C. Q、R 和 C 也称为有理数域、实数域、复数域.

(2) $n(n\geqslant 2)$阶实矩阵的集合$M_n(R)$关于矩阵的加法和乘法构成环，称为 n 阶实矩阵环.

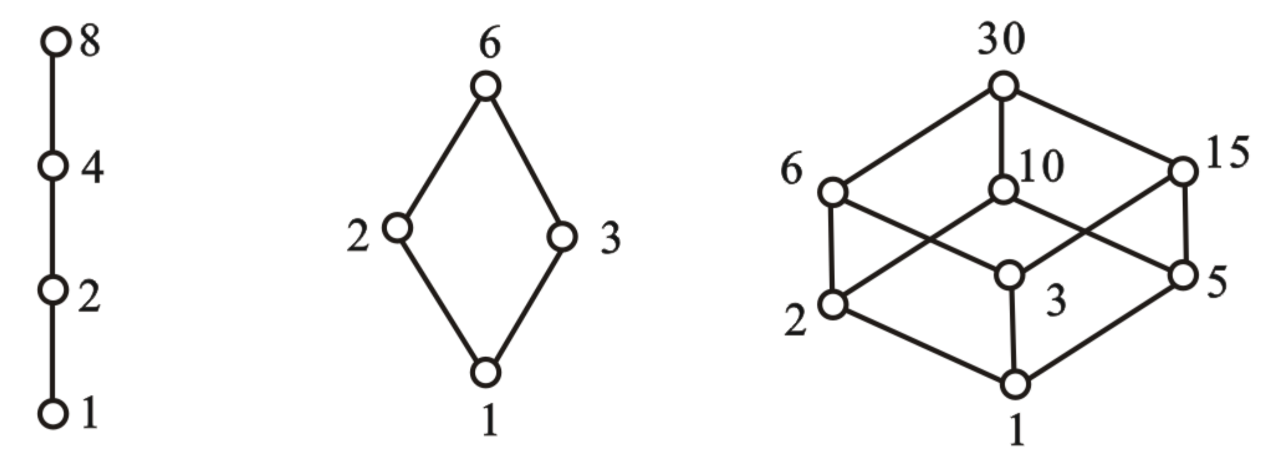
(3) 集合的幂集$P(B)$关于集合的对称差运算和交运算构成环

(4) 设$Z_n=\{0, 1, \ldots, n-1\}$，$\oplus$和$\otimes$分别表示模$n$的加法和乘法，则$\langle Z_n, \oplus, \otimes\rangle$构成环，称为模 n的整数环. 当n为素数时Z_n构成域.

定义5 设$\langle S, \preccurlyeq\rangle$是偏序集，如果$\forall x, y\in S$，$\{x, y\}$都有最小上界和最大下界，则称$S$关于偏序$\preccurlyeq$作成一个**格**.

求$\{x, y\}$ 最小上界和最大下界看成 x 与 y 的二元运算$\vee$和$\wedge$

例6 设n是正整数，S_n是n的正因子的集合. D为整除关系，则偏序集$\langle S_n, D\rangle$构成格. $\forall x, y\in S_n$，$x\vee y$是lcm(x, y)，即x与y的最小公倍数. $x\wedge y$是gcd(x, y)，即x与y的最大公约数.



(S_8,D)　　(S_6,D)　　(S_{30},D)

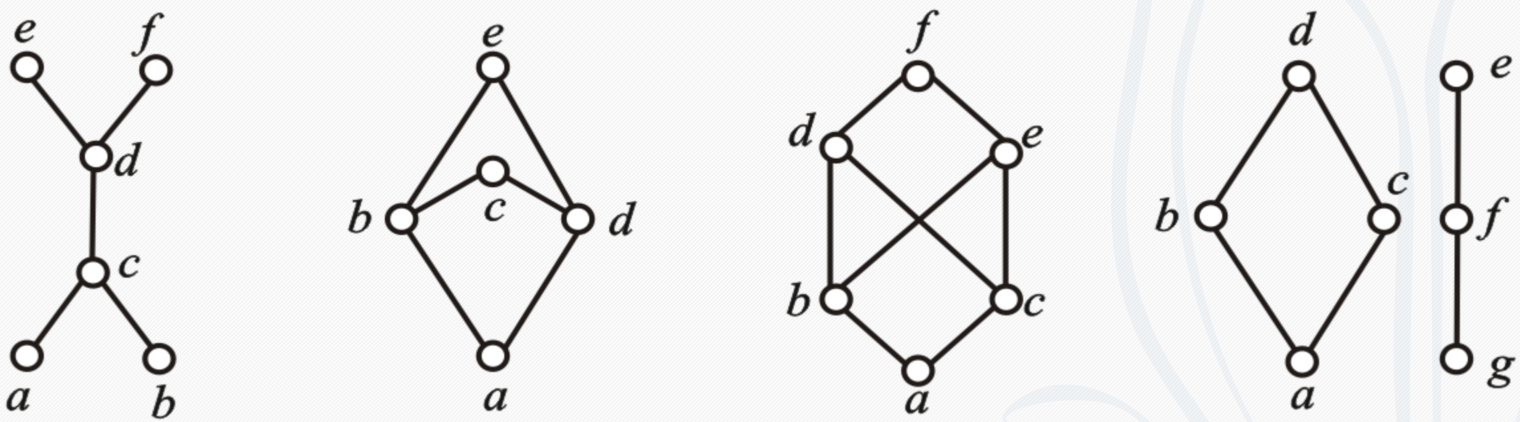
实例

例7 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

(1) $<P(B), \subseteq>$，其中$P(B)$是集合B的幂集.

(2) $<Z, \leq>$，其中Z是整数集，$\leq$为小于或等于关系.

(3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.



(a)　(b)　(c)　(d)

(1) 幂集格. $\forall x,y \in P(B)$，$x \vee y$就是$x \cup y$，$x \wedge y$就是$x \cap y$.

(2) 是格. $\forall x,y \in Z$，$x \vee y = \max(x,y)$，$x \wedge y = \min(x,y)$，

(3) 都不是格. 可以找到两个结点缺少最大下界或最小上界

格的性质：算律

设$\langle L,\preccurlyeq\rangle$是格，则运算$\vee$和$\wedge$适合交换律、结合律、幂等律和吸收律，即

(1) $\forall a,b\in L$ 有

$$a\vee b = b\vee a,\quad a\wedge b = b\wedge a$$

(2) $\forall a,b,c\in L$ 有

$$(a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c),\quad (a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$$

(3) $\forall a\in L$ 有 $a\vee a = a,\quad a\wedge a = a$

(4) $\forall a,b\in L$ 有 $a\vee(a\wedge b) = a,\quad a\wedge(a\vee b) = a$

格作为代数系统的定义

设<S, *, ◦>是具有两个二元运算的代数系统，若对于*和◦运算适合交换律、结合律、吸收律，则可以适当定义S中的偏序≤，使得 <S, ≤> 构成格，且∀a, b∈S 有

$$a \wedge b = a * b,\quad a \vee b = a \circ b.$$

格的等价定义：设<S，*，◦>是代数系统，*和◦是二元运算，

如果*和◦满足交换律、结合律和吸收律，则<S，*, ◦>构成格.

分配格、有补格与布尔代数

定义6 设<L, ∧, ∨>是**格**，若∀a, b, c∈L, 有

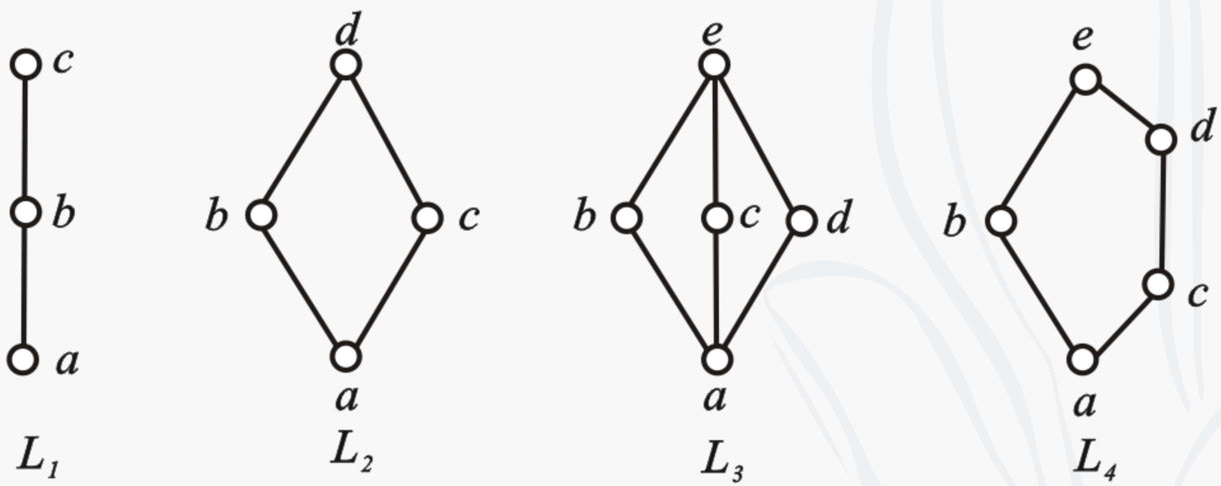
$$a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

$$a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

则称L为**分配格**.

- 注意：可以证明以上两个条件互为充分必要条件

实例



L_1 和 L_2 是分配格，L_3 和 L_4不是分配格.

称 L_3为**钻石格**，L_4为**五角格**.

分配格的判别

分配格的判别（充分必要条件）：设 L 是格， 则 L 是分配格**当且仅当** L 不含有与钻石格或五角格**同构**的子格. 设S是格L的非空子集，如果S关于格L中的运算∧,∨是封闭的，就称S为L的**子格**.

- 小于五个元素的格都是分配格.
- 任何一条链都是分配格.

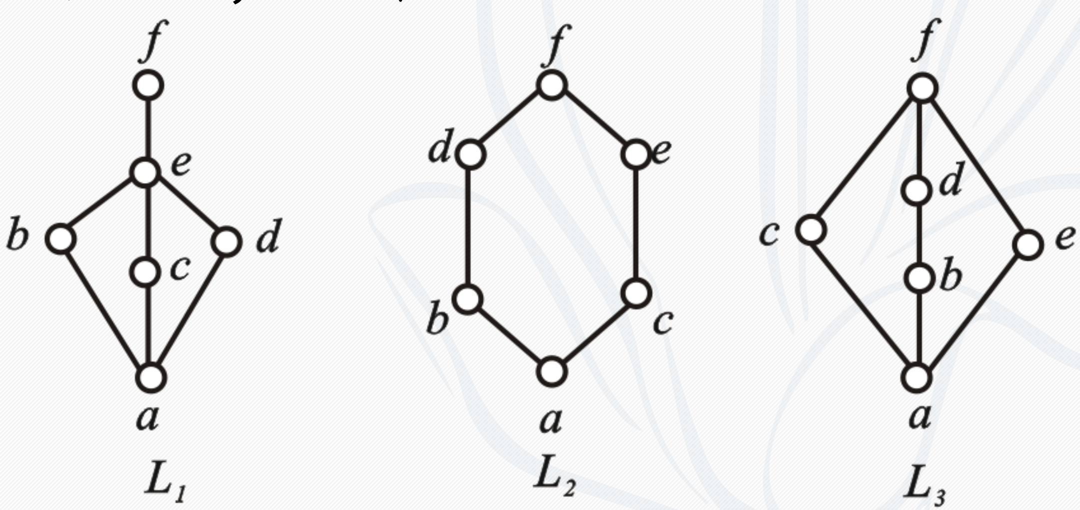
例6 说明图中的格是否为分配格，为什么？

解 都不是分配格.

$\{a,b,c,d,e\}$是L_1的子格，同构于钻石格

$\{a,b,c,e,f\}$是L_2的子格，同构于五角格；

$\{a,c,b,e,f\}$ 是L_3的子格同构于钻石格.



有补格的定义

定义7 设L是格，

(1) 若存在$a\in L$使得$\forall x\in L$有 $a \leqslant x$，则称a为L的全下界，记为0；若存在$b\in L$使得$\forall x\in L$有 $x \leqslant b$，则称b为L的全上界，记为1.

(2) 若L存在全下界和全上界，则称L 为有界格，一般将有界格L记为$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$.

定义8 设$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$是有界格，$a\in L$， 若存在$b\in L$ 使得$a\wedge b = 0$ 和 $a\vee b = 1$ 成立，则称b是a的补元.

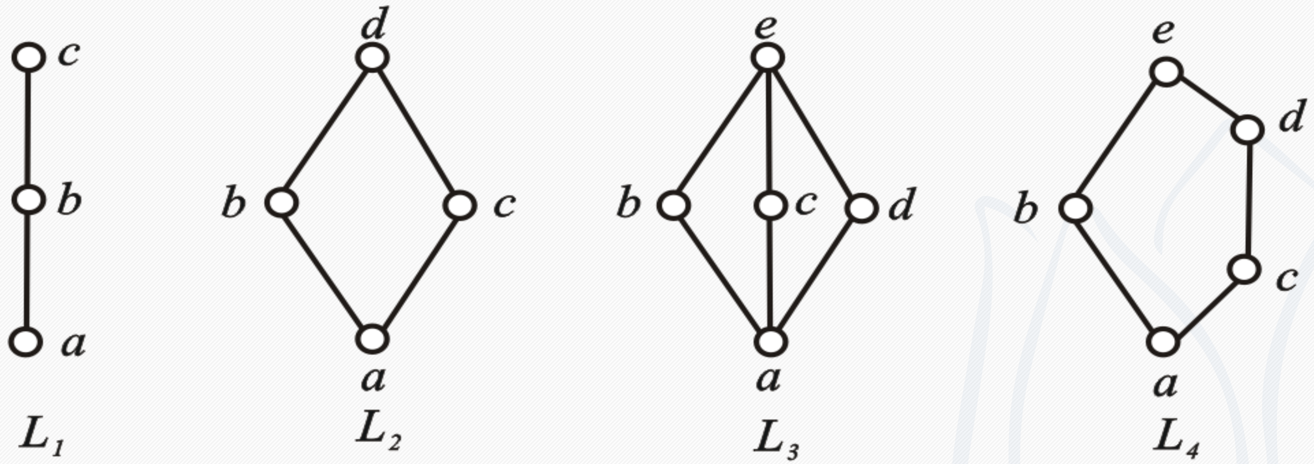
定义9 设$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$是有界格， 若$L$中所有元素都有补元存在，则称$L$为有补格.

注意：

- 在任何有界格中，全下界0与全上界1互补.
- 对于一般元素，可能存在补元，也可能不存在补元.
- 如果存在补元，可能是惟一的，也可能是多个补元.
- 对于有界分配格，如果元素存在补元，一定是惟一的.

有界格中的补元及实例

例7



L_1: a 与 c 互补, a 为全下界, c为全上界, b 没有补元.

L_2: a 与 d 互补, a 为全下界, d 为全上界, b与 c互补.

L_3: a 与 e 互补, a 为全下界, e 为全上界, b 的补元是 c 和 d ; c 的补元是 b 和 d ; d 的补元是 b 和 c .

L_4: a 与 e 互补, a 为全下界, e 为全上界, b 的补元是 c 和 d ; c 的补元是 b ; d 的补元是 b .

L_2, L_3和L_4是有补格, L_1不是有补格.

定义8 如果一个格是有**补分配格**，则称它为布尔格或布尔代数．布尔代数标记为<B, ∧, ∨, ′, 0, 1>，**′为求补运算**．

例8 设 S_{110} = {1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110}是110的正因子集合，gcd表示求最大公约数的运算，lcm表示求最小公倍数的运算，问<S110, gcd, lcm>是否构成布尔代数？为什么？

解 (1)不难验证S_{110}关于gcd 和 lcm 运算构成格．（略）

(2)验证分配律 ∀x, y, z∈S_{110} 有

gcd(x, lcm(y, z)) = lcm(gcd(x, y), gcd(x, z))

(3)验证它是有补格， 1作为S110中的全下界， 110为全上界，1和110互为补元，2和55互为补元，5和22互为补元，10和11互为补元，从而证明了<S110, gcd, lcm>为布尔代数．

实例

例9 设B为任意集合，证明B的幂集格$\langle P(B), \cap, \cup, \sim, \varnothing, B\rangle$构成布尔代数，称为集合代数.

证 (1) $P(B)$关于$\cap$和$\cup$构成格，因为$\cap$和$\cup$运算满足交换律，结合律和吸收律.

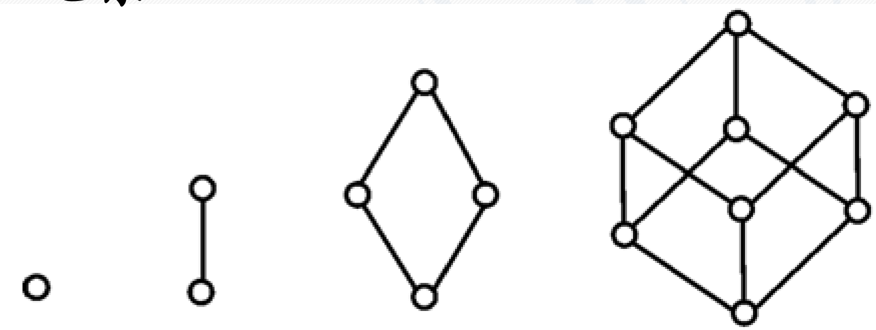
(2) 由于$\cap$和$\cup$互相可分配，因此$P(B)$是分配格.

(3) 全下界是空集$\varnothing$，全上界是B.

(4) 根据绝对补的定义，取全集为B，$\forall x\in P(B)$，$\sim x$是x的补元.

从而证明$P(B)$是有补分配格，即布尔代数.

- 有限布尔代数含有2^n个元素.



代数系统的同构与同态

定义9 设$V_1=\langle A,\circ\rangle$和$V_2=\langle B,*\rangle$是同类型的代数系统，f：$A\to B$，且$\forall x,y\in A$有 $f(x\circ y) = f(x)*f(y)$，则称f是V_1到V_2的**同态映射**，简称同态.

f若是单射，称为**单同态**；若是满射，称为**满同态**(V_2是V_1的同态像，记作$V_1\sim V_2$）；若是双射，称为**同构**，记作$V_1\cong V_2$.

V到V的同态f 称为自同态. 类似地可以定义单自同态、满自同态和自同构.

同态性质：设 f 是$V_1=\langle A,\circ\rangle$到$V_2\langle B,*\rangle$的同态映射，

(1) 若$\circ$运算具有交换律、结合律、幂等律等，那么在$f(V_1)$中$*$运算也具有相同的算律（注意，消去律可能有例外）.

(2) $f(e_1)=e_2$，$f(\theta_1)= \theta_2$，$f(x^{-1})=f(x)^{-1}$

实例

例10　(1) $V_1=\langle Z,+\rangle$，$V_2=\langle Z_n,\oplus\rangle$．Z为整数集合，+为普通加法；$Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$，$\oplus$为模n加．令

$$f: Z\to Z_n,\ f(x)=(x)\bmod n$$

f 是V_1到V_2的满同态．

(2) 设$V_1=\langle R,+\rangle$，$V_2=\langle R^*,\cdot\rangle$，R和R*分别为实数集与非零实数集，+和·分别表示普通加法与乘法．令

$$f: R\to R^*,\ f(x)=e^x$$

f 是V_1到V_2的单同态．

(3) 设$V=\langle Z,+\rangle$，Z为整数集，+为普通加法．　$\forall a\in Z$，令

$$f_a: Z\to Z,\ f_a(x)=ax,$$

f_a是V的自同态．　f_0为零同态；当$a=\pm1$时，称f_a为自同构；除此之外其他的f_a都是单自同态．