

习题 4.2

1. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + x^3}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \quad (m, n \in \mathbb{N}_+, a \neq 0);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{\tan x - x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x}{x+1}}{\operatorname{arccot} x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{\sec x - \cos x};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{2x-1};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \cdot \ln(1-x);$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right);$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right);$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x};$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\sin x};$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x;$$

$$(20) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

2. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ e^{-\frac{1}{2}}, & x \leq 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处的连续性.

3. 设函数 $f(x)$ 在点 a 的邻域内二阶可导, 求

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

4. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0$, 且 $f'(0)$ 存在, 证明

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = 1.$$

5. 过半径为 R 的圆上一点 A 取切线 $AB = AC$, 连 BC 交 AO 于 E (如图 4.16 所示), 求 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} AE$.

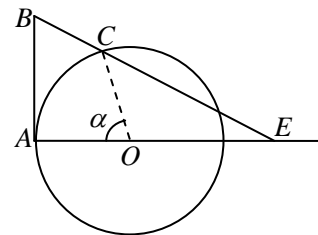


图 4-16