习题 11.2

1. 用比较判别法或比较判别法的极限形式判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}\right)$,

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$ ($a>0$).

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$.

2. 用比值法或根值法判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}$;

(3) $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\ln(n+1)}$ ($a>0$);

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{3}-1)^n$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n\arcsin\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b}\right)^{n}$，其中 $\lim_{n\to\infty}a_n=a\,(a,b>0)$且 $a\neq b$.

3. 用积分判别法判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-n^2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$;

(4) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln(\ln n)}{n\ln n}$.

4. 利用级数收敛的必要条件，证明下列极限：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

5. 用适当的方法判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{1+3^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(n+1)n^2}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^{n}(a>0)$.

6. 证明:

(1) 若 $a_n \ge 0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛;

(2) 若 $a_n \ge 0$，且数列 $\{na_n\}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛;

(3) 若 $a_n \ge 0, b_n \ge 0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛;

(4) 若 $a_n \ge 0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 也收敛;

(5) 若数列 $\{na_n\}$ 收敛，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛($a_0 = 0$)，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

7. 利用不等式 $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{(2n)!!}$ 发散而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$ 收敛.