算法设计与分析 (4.1 作业)

智科三班　严中圣　222020335220177

2022 年 3 月 30 日

1. 采用递归树方式求解下列递推方程的解：

$$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n, \quad T(1) = 1 \tag{1}$$

$$T(n) = T(\frac{9n}{10}) + T(\frac{n}{10}) + n, \quad T(1) = 0, n = 10^x \tag{2}$$

解.

(1) 令 $n = 2^k$，作出递归树如下所示

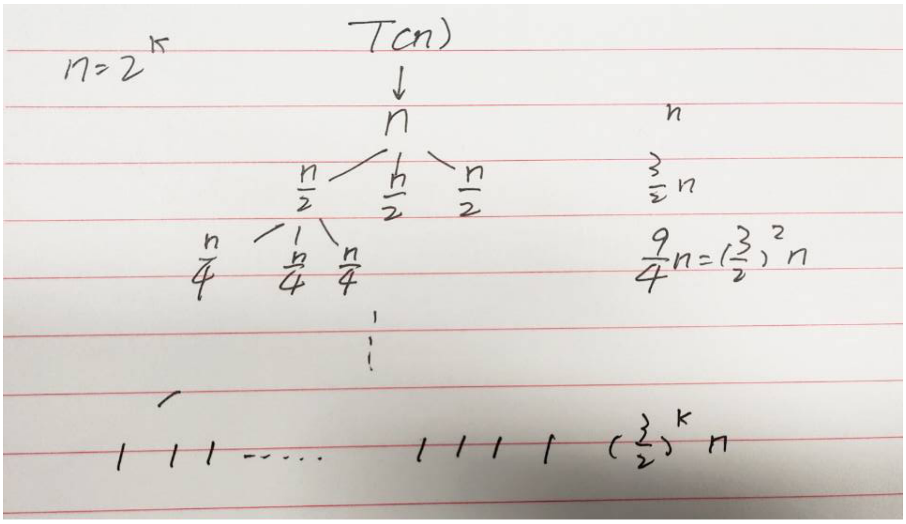

图 1: 递归树示意图

由递归树得：

$$\begin{aligned} T(n) &= n + \frac{3n}{2} + \frac{9}{4n} + ... + (\frac{3}{2})^k n \\ &= n(1 + \frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2 + ... + (\frac{3}{2})^k) \\ &= n(\frac{3^{k+1}}{2^k} - 2) \\ &= 3^{log_2 n+1} - 2n \end{aligned} \tag{3}$$

(2) 作出递归树如下所示：

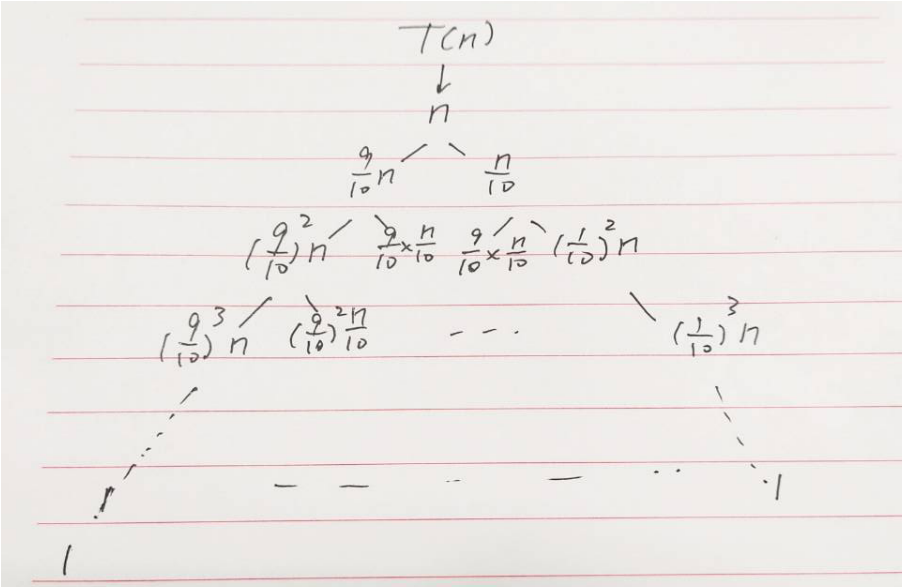

图 2: 递归树示意图

由递归树可得，从根节点至叶子节点的最短路径为 lgn，最长路径为 $log_{\frac{10}{9}}n$。由此可得：

$$
\begin{aligned}
T(n) \geq nlgn &\Rightarrow T(n) = \Omega(nlogn) \\
T(n) \leq nlog_{\frac{10}{9}}n &\Rightarrow T(n) = O(nlogn) \\
&\Rightarrow T(n) = \Theta(nlogn)
\end{aligned} \tag{4}
$$

2. 证明定理：对 ∀b>1,∀a>0，有 $log_b n = o(n^a)$

解.

证明：

$$
\because \lim_{n\to\infty}\frac{log_b n}{n^a} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{nlnb}}{an^{a-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{alnb}\frac{1}{n^a} = 0
$$
$$
\therefore log_b n = o(n^a)
$$

3. 考虑下面每对函数 $f(n)$ 和 $g(n)$，若阶相等则使用 Θ 记号，否则使用 O 记号表示它们的关系。

$(4) f(n) = 2log^2n, g(n) = logn + 1$

$(5) f(n) = log(n!), g(n) = n^{1.05}$

解.

(4)

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{2log^2n}{logn+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4logn\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \infty$$

$$\therefore f(n) = \omega(g(n))$$

(5) $\because \lim_{n\to\infty} \frac{nlogn}{n} = \infty$，而 $log(n!)$ 的阶小于 $nlogn$，$n^{1.05}$ 的阶高于 n，故 $f(n) = O(g(n))$。