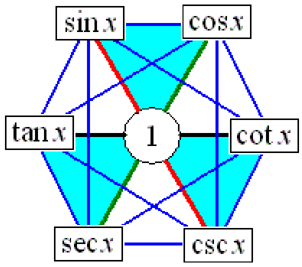
高等数学宝典（上篇）——公式大全
（含微分方程、复变函数）

一. 初等数学

1. 三角函数

(1) 相互联系



$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad \tan^2 x+1=\sec^2 x,\quad \cot^2 x+1=\csc^2 x.$

$\sin x\cdot\csc x=1,\quad \cos x\cdot\sec x=1,\quad \tan x\cdot\cot x=1.$

$\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x,\quad \dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x.$

奇变偶不变，符号看象限：

$f(\frac{n}{2}\pi+\alpha)=\begin{cases}\pm f(\alpha) & n=0,\pm2,\pm4,\cdots\\ \pm cof(\alpha) & n=0,\pm1,\pm3,\cdots\end{cases}$ 其中“±”号由角 $(\frac{n}{2}\pi+\alpha)$ 所处的象限确定.

(2) 和角公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$

(3) 积化和差

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\quad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$

(4) 和差化积

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

(5) 降幂公式

$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}.$

(6) 半角公式

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}},$

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\quad \cot\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$

2. 复数

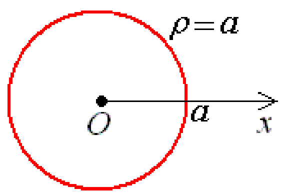
(1) 代数表示 $z=a+bi$

(2) 三角表示 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，$a=r\cos\theta,\ b=r\sin\theta.$

(3) 指数表示 $a+bi=re^{\mathrm{i}\theta}$ （欧拉公式：$e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$）.

3. 一些常见的曲线

(1) 圆 $x^2+y^2=a^2$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\end{cases}$

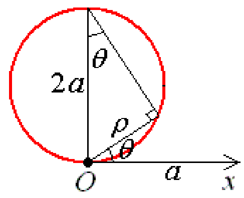


极坐标方程为 $\rho=a\ (\theta\in[0,2\pi))$;

(2)　圆 $x^2+(y-a)^2=a^2$ 的参数方程为

$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a+a\sin t, \end{cases}$ $(t\in[0,2\pi))$

极坐标方程为 $\rho=2a\sin\theta\,(\theta\in[0,\pi))$；



$\rho=2a\sin\theta$

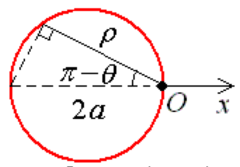
(3)　圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 的参数方程为

$\begin{cases} x=a+a\cos t, \\ y=a\sin t, \end{cases}$ $(t\in[0,2\pi))$ 极坐标方程为 $\rho=2a\cos\theta$　$(\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$；

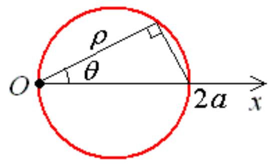
(4)　圆 $(x+a)^2+y^2=a^2$ 的参数方程为

$\begin{cases} x=-a+a\cos t, \\ y=a\sin t, \end{cases}$ $(t\in[0,2\pi))$

极坐标方程为 $\rho=-2a\cos\theta$　$(\theta\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}))$；



$\rho=2a\cos(\pi-\theta)$
$=-2a\cos\theta$

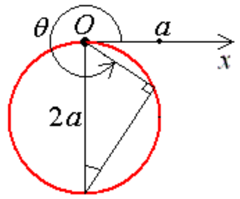


$\rho=2a\cos\theta$

(5)　圆 $x^2+(y+a)^2=a^2$ 的参数方程为

$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=-a+a\sin t, \end{cases}$ $(t\in[0,2\pi))$

极坐标方程为 $\rho=-2a\sin\theta$　$(\theta\in[\pi,2\pi))$;

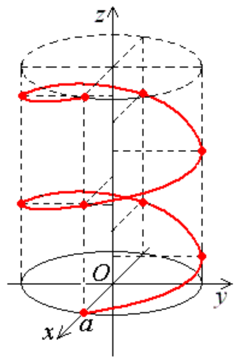


$\rho=2a\sin(2\pi-\theta)$
$=-2a\sin\theta$

(6)　椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为

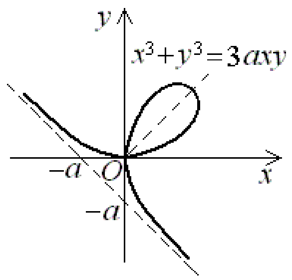
$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ $(t\in[0,2\pi))$;

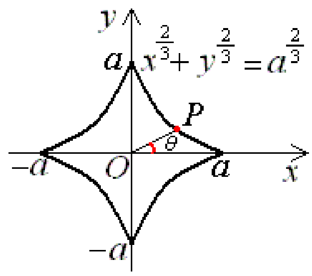
(7)　空间螺线 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt, \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$;



(8)　笛卡儿叶线 $x^3+y^3=3axy$

的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$；



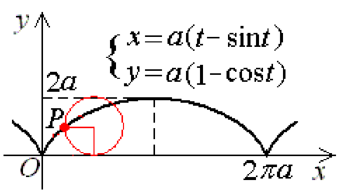


(9) 星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 的参数方程为

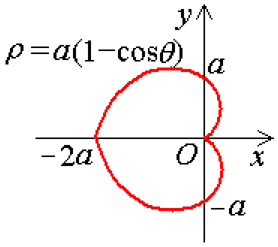
$\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$；

(10)　摆线(圆滚线)　$x=a\arcsin(1-\frac{y}{a})-\sqrt{2ay-y^2}$

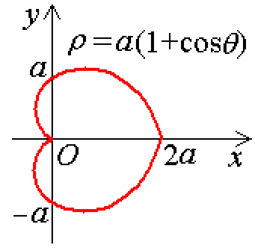
的参数方程为 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$；



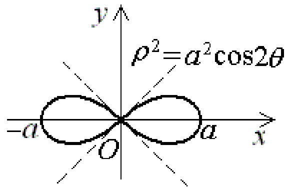
(11) 心形线 $x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}-x)$
的极坐标方程为 $\rho=a(1-\cos\theta)$;



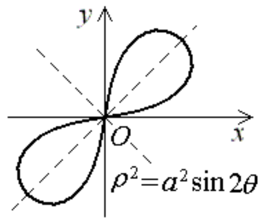
(12) 心形线 $x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$
的极坐标方程为 $\rho=a(1+\cos\theta)$;



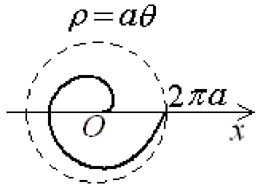
(13) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$
的极坐标方程为 $\rho^2=a^2\cos2\theta$;



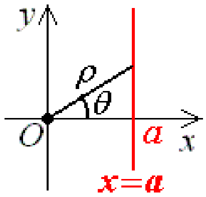
(14) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$
的极坐标方程为 $\rho^2=a^2\sin2\theta$;

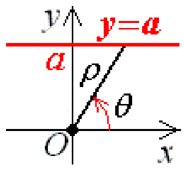


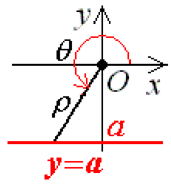
(15) 阿基米德螺线 $\sqrt{x^2+y^2}=a\arctan\dfrac{y}{x}$
的极坐标方程为 $\rho=a\theta$



(16) 不经过原点的直线 $ax+by+c=0\ (a^2+b^2\neq0)$
$\Rightarrow a\rho\cos\theta+b\rho\sin\theta+c=0$
$\Rightarrow \rho=\dfrac{c}{a\cos\theta+b\sin\theta}$.
例如: $x=a\ (a>0)$
$$\Rightarrow \rho=\frac{a}{\cos\theta}\quad \theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});$$

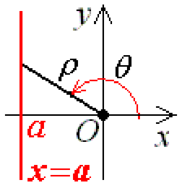






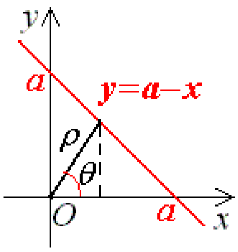
$x=a\ (a<0)\Rightarrow\rho=\dfrac{a}{\cos\theta}\quad\theta\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$;

$y=a\ (a>0)\Rightarrow\rho=\dfrac{a}{\sin\theta}\quad\theta\in(0,\pi)$;



$y=a\ (a<0)\Rightarrow\rho=\dfrac{a}{\sin\theta}\quad\theta\in(\pi,2\pi)$;

$y=x-a\ (a>0)\Rightarrow\rho=\dfrac{a}{\cos\theta+\sin\theta}\quad\theta\in(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4})$.



二. 极限

1. $|q|<1,\ \lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

3. 设数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n=a\pm b;\qquad \lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=(\lim_{n\to\infty}a_n)(\lim_{n\to\infty}b_n)=ab;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\Big/\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{a}{b}\quad(b\neq0).$$

4. 设 $x_n=\dfrac{a_0+a_1n+\cdots+a_ln^l}{b_0+b_1n+\cdots+b_mn^m}$, 其中 $a_l\neq0,\ b_m\neq0,\ l\leqslant m$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}a_l/b_m & l=m\\ 0 & l<m\end{cases}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{p}+\dfrac{2}{p^2}+\cdots+\dfrac{n}{p^n})=\dfrac{p}{(p-1)^2}$, 其中 $p>1$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

7. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$. 则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$;

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=[\lim\limits_{n\to\infty}f(x)][\lim\limits_{n\to\infty}g(x)]=AB$; $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\Big/\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

8. 设 $y=f(u)$与 $u=g(x)$的复合函数 $f[g(x)]$在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{N}(x_0)$ 内有定义.

 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$, 且$\forall x\in\mathring{N}(x_0)$，有 $g(x)\neq u_0$，其中 x_0, u_0 为有限值.

 则复合函数 $f[g(x)]$当 $x\to x_0$ 时也有极限，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

10. 常用的等价无穷小:

 $\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim x\ (x\to 0)$; $(1-\cos x)\sim\dfrac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$

 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$ $(\mathrm{e}^x-1)\sim x\ (x\to 0)$

 $(\sqrt[n]{1+x}-1)\sim\dfrac{x}{n}\ (x\to 0)$; $[(1+x)^\alpha-1]\sim\alpha x\ (x\to 0)$.

三. 导数与微分

1. 导数定义: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

2. 函数四则运算的求导法则

 $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$. $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

 $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

3. 反函数的求导法则

 设定义在区间 I 上的严格单调连续函数 $x=f(y)$在点 y 处可导，且 $f'(y)\neq 0$，则其反函数 $y=f^{-1}(x)$在对应的点 x 处可导，且 $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$.

4. 复合函数的求导法则

 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，函数 $y=f(u)$在对应的点 $u=\varphi(x)$ 处可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 处可导，且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\varphi'(x)$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

5. 设函数 $y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$确定. $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上可导，函数 $x=\varphi(t)$ 具有连续的严格单调的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, 且 $\varphi'(t)\neq 0$, 则 $y=\psi(t)=\psi(\varphi^{-1}(x))$. 函数 $y=f(x)$的导函数由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y'=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\end{cases}$确定.

6. 基本求导公式

 (1) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$. (2) $(a^x)'=a^x\ln a$. (3) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$. (4) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$. (5) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

 (6) $(\sin x)'=\cos x$. (7) $(\cos x)'=-\sin x$. (8) $(\tan x)'=\sec^2 x$. (9) $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

 (10) $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$. (11) $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$.

 (12) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (13) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(14) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.　(15) $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

7. 一些简单函数的高阶导数(n, k 为正整数)

(1) $(x^n)^{(k)}=\begin{cases} n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} & k<n, \\ n! & k=n, \\ 0 & k>n, \end{cases}$

(2) $(x^{-n})^{(k)}=(-1)^k n\cdot(n+1)\cdots(n+k-1)x^{-n-k}$,　(3) $[(1+x)^\alpha]^{(k)}=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$,

(4) $(a^x)^{(k)}=a^x(\ln^k a)$，特别的，$(e^x)^{(k)}=e^x$，

(5) $(\ln x)^{(k)}=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{x^k}$,　(6) $[\ln(1+x)]^{(k)}=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$,

(7) $(\sin x)^{(k)}=\sin(x+\dfrac{k\pi}{2})$,　(8) $(\cos x)^{(k)}=\cos(x+\dfrac{k\pi}{2})$.

(9) $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

$$=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

8. 微分四则运算法则: $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm \mathrm{d}v$，$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$，$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}(v\neq 0)$.

9. 微分复合运算法则(**一阶微分形式不变性**)

设函数 $y=f[g(x)]$由可微函数 $y=f(u)$与 $u=g(x)$复合而成，则有 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$，$\mathrm{d}u=g'(x)\mathrm{d}x$，

另一方面, $\mathrm{d}y=\big(f[g(x)]\big)'\mathrm{d}x=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x=f'(u)\mathrm{d}u$.

10. 拉格朗日中值定理:

设函数 $f(x)$满足下列条件: (1) $f(x)\in C_{[a,b]}$, (2) $f(x)$在(a, b)内可导.

则至少存在一点$\xi\in(a, b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

11. 柯西中值定理:

设函数 $f(x)$, $g(x)$满足下列条件:

(1) $f, g\in C_{[a,b]}$, (2) f, g 在(a, b)内可导, (3) $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a, b)$.

则至少存在一点$\xi\in(a, b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

12. 用中值定理证明的关键在于构造辅助函数.

① 使用罗尔中值定理或拉格朗日中值定理		
中值等式 $G(\xi)=0$	凑成导数等式 $F'(\xi)=0$	辅助函数 $F(x)$
$f'(\xi)+A\xi^k+B=0$	$[f(x)+\dfrac{Ax^{k+1}}{k+1}+Bx]'=0$	$f(x)+\dfrac{Ax^{k+1}}{k+1}+Bx$
$f(a)g'(\xi)-f'(\xi)g(a)-k=0$	$[f(a)g(x)-f(x)g(a)-kx]'=0$	$f(a)g(x)$ $-f(x)g(a)-kx$
$\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i(n-i)\xi^{n-1-i}=0$	$[\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i\xi^{n-i}]'=0$	$\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i x^{n-i}$
$f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$	$[f(x)g(x)]'=0$	$f(x)g(x)$
$f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$	$[f(x)g'(x)-f'(x)g(x)]'=0$	$f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$
$\xi f'(\xi)+kf(\xi)=0$	$[x^k f(x)]'=0$	$x^k f(x)$
$(\xi-1)f'(\xi)+kf(\xi)=0$	$[(x-1)^k f(x)]'=0$	$(x-1)^k f(x)$
$f'(\xi)g(1-\xi)-$ $kf(\xi)g'(1-\xi)=0$	$[g^k(1-x)f(x)]'=0$	$g^k(1-x)f(x)$

$f'(\xi)+Af(\xi)=0$	$[e^{Ax}f(x)]'=0$	$e^{Ax}f(x)$
$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$	$[e^{g(x)}f(x)]'=0$	$e^{g(x)}f(x)$
$\xi f'(\xi)-kf(\xi)=0$	$[f(x)/x^k]'=0$	$f(x)/x^k$
$f'(\xi)-kf(\xi)=0$	$[f(x)/e^{kx}]'=0$	$f(x)/e^{kx}$
$f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$	$[f(x)/g(x)]'=0$	$f(x)/g(x)$
$(1-\xi^2)/(1+\xi^2)^2=0$	$[x/(1+x^2)]'=0$	$x/(1+x^2)$
② 使用柯西中值定理		
中值等式 $G(\xi)=0$	凑成导数等式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$	辅助函数 $f(x), g(x)$
$(b-a)\varphi(\xi)-\xi\varphi(\xi)$ $-[b\varphi(a)-a\varphi(b)]=0$	$\dfrac{\varphi(b)/b-\varphi(a)/a}{1/b-1/a}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$	$f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x}, g(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(b)-f(a)-\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}=0$	$\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\dfrac{f'(\xi)}{1/\xi}$	$g(x)=\ln x$
根据 $G(\xi)$的特点选取适当的初等函数作为 $f(x)$, $g(x)$, 如指数函数, 对数函数, 三角函数等.(从略)		

13. 洛必达法则

设函数 $f(x)$在区间$(x_0, x_0+\delta)(\delta>0)$内满足下列条件:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=0$, (2) f, g 在$(x_0, x_0+\delta)$内可导, 且 $g'(x)\neq 0$,

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 为有限数或∞). 则 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A.$

设函数 $f(x)$在区间$(x_0, x_0+\delta)(\delta>0)$内满足下列条件:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=\infty$, (2) f, g 在$(x_0, x_0+\delta)$内可导, 且 $g'(x)\neq 0$,

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 为有限数或∞). 则 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A.$

不可用洛必达法则的情形.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+2}$, (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$, (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

事实上, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{2}{3}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$

14. 带皮亚诺余项的泰勒公式

设函数 $f(x)$在 x_0 处 n 阶可导, 则 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$.

15. 几个初等函数的麦克劳林公式

(1) $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$.

(2) $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$.

(3) $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$.

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$.

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

(6) $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{(2x)^2}{2!}+\dfrac{(2x)^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+o\left((2x)^{2n}\right)\right]$

$$=x^2-\frac{x^4}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{2^{n-1}}{n!(2n-1)!!}x^{2n}+o(x^{2n}).$$

(7) $\cos^2x=1-\sin^2x=1-x^2+\frac{x^4}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{2^{n-1}}{n!(2n-1)!!}x^{2n}+o(x^{2n})$.

16. 带拉格朗日余项的泰勒公式

设函数 $f(x)\in C^{(n)}_{[a,b]}$，且 $f(x)\in C^{(n+1)}_{(a,b)}$，则 $\forall x,x_0\in[a,b]$，有

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间.

17. 几个初等函数的带拉格朗日余项的麦克劳林公式

(1) $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ $(x\in\mathbf{R},\ 0<\theta<1)$.

(2) $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ $(x\in\mathbf{R},\ 0<\theta<1)$.

(3) $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+(-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$ $(x\in\mathbf{R},\ 0<\theta<1)$.

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{(n+1)}}$ $(x\in\mathbf{R},\ 0<\theta<1)$.

(5) $$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}\quad(x\in\mathbf{R},\ 0<\theta<1).$$

18. 曲率

(1) 设曲线 C 在直角坐标系中的方程为 $y=y(x)$ 且 $y(x)$ 具有二阶导数. 则 $K=\left|\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}\right|$.

(2) 设曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$，则 $K=\frac{|x_t'y_t''-x_t''y_t'|}{[(x_t')^2+(y_t')^2]^{3/2}}$.

四. 一元积分

1. 定积分的性质

(1) 若 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, $k_1, k_2\in\mathbf{R}$，则 $\int_a^b[k_1f(x)+k_2g(x)]\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(2) 若 f 在某区间 I 上可积，则 f 在 I 的任一子区间上可积，且 $\forall\, a, b, c\in I$,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 若 f, g 在 $[a, b]$ 上可积，且 $\forall\, x\in[a, b]$, $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(4) 若 f 在 $[a, b]$ 上可积，且 $\forall\, x\in[a, b]$, $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

(5) 若 f 在 $[a, b]$ 上可积，则 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

(6) 若 f 在 $[a, b]$ 上可积，且 $\forall\, x\in[a, b]$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$，则 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$.

(7) 若 $f\in C\,[a, b]$，则至少存在一点 $\xi\in[a, b]$ 使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

2. 变上限积分所定义的函数的性质

设 $f(x)\in C[a, b]$，则函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在区间 $[a, x]$ 上可导，且 $\Phi'(x)=f(x)$.

3. 微积分学基本公式

若 $f(x)\in C[a, b]$, $F(x)$为 $f(x)$在区间$[a, b]$上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$.

4. 不定积分的性质

(1) $[\int f(x)\mathrm{d}x]' = f(x)$, $\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]= f(x)\mathrm{d}x$, $\int f'(x)\mathrm{d}x= f(x)+C$, $\int \mathrm{d} f(x)= f(x)+C$.

(2) 设 $f(x)$, $g(x)$有原函数, $k_1, k_2\in \mathbf{R}$, 则 $\int[k_1 f(x)+k_2 g(x)]\mathrm{d}x=k_1\int f(x)\mathrm{d}x+k_2\int g(x)\mathrm{d}x$.

5. 基本积分表

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ (k 是常数).

(2) $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha\neq-1)$

(3) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

(4) $\int \dfrac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \arctan x + C$.

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$.

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$.

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

(8) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$.

(9) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$.

(10) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$.

(11) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$.

(12) $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$.

(13) $\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

(14) $\int \mathrm{sh}x\mathrm{d}x = \mathrm{ch}x + C$.

(15) $\int \mathrm{ch}x\mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C$.

(16) $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$.

(17) $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

(18) $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$.

(19) $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(20) $\int \dfrac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$.

(21) $\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$.

(22) $\int \dfrac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a-x}{a-x}\right| + C$.

(23) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$.

(24) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2}) + C$.

(25) $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C$.

(26) $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + C$.

(27) $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\mathrm{d}x = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$.

6. 换元积分法

(1) 第一类换元积分法：设函数 $u=\varphi(x)$可微, $F(u)$为 $f(u)$的一个原函数. 则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C = F[\varphi(x)]+C.$$

(2) 常见的凑微分法

① $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$ (a, b 为常数且 $a\neq0$)

② $x^n\mathrm{d}x=\dfrac{1}{(n+1)a}\mathrm{d}(ax^{n+1}+b)$ (a, b 为常数且 $a\neq0, n\neq-1$)

③ $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln x)$, ④ $e^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(e^x)$,

⑤ $\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x)$, ⑥ $\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$, ⑦ $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arctan x)$,

⑧ $\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{(x+\sqrt{a^2+x^2})\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}(x+\sqrt{a^2+x^2})$,

⑨ $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{(x+\sqrt{x^2-a^2})\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}(x+\sqrt{x^2-a^2})$,

⑩ $\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)$.

(3) 第二类换元积分法：设函数 $f(x)$ 连续，函数 $x=\varphi(u)$有连续的导数，$\varphi'(u)\neq0$，且

$\int f[\varphi(u)]\varphi'(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$. 则 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(u)]\varphi'(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F[\varphi^{-1}(x)]+C.$

(4) 常见的第二类换元法

①令 $\sqrt[n]{ax+b}=u$ (a, b 为常数且 $a\neq0$)

②令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$ (其中 $ac\neq0$, b, d 不同时为零)

③令 $x=\frac{1}{u}$,

④令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

⑤令 $x=a\sin t$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos x$, $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，其中 $a>0$, $t\in[0,\pi/2]$.

⑥令 $x=a\sec t$，则 $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan x$, $\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\mathrm{d}t$，其中 $a>0$, $t\in(0,\pi/2)$.

⑦令 $x=a\tan t$，则 $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec x$, $\mathrm{d}x=a\sec^2 x\mathrm{d}t$，其中 $a>0$, $t\in(0,\pi/2)$.

7. 分部积分法

(1) 不定积分的分部积分法

$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$

(2) 分部积分法中 $u(x)$, $v(x)$的常见选取方法

① $P(x)\sin x\mathrm{d}x=-P(x)\mathrm{d}(\cos x)$, $P(x)\cos x\mathrm{d}x=P(x)\mathrm{d}(\sin x)$.

② $P(x)e^x\mathrm{d}x=P(x)\mathrm{d}(e^x)$.

③ $P(x)\ln x\mathrm{d}x=\ln x\mathrm{d}(\int P(x)\mathrm{d}x)$.

④ $e^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cos(bx)\mathrm{d}(e^{ax})=\frac{1}{b}e^{ax}\mathrm{d}(\sin(bx))$,

$e^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sin(bx)\mathrm{d}(e^{ax})=-\frac{1}{b}e^{ax}\mathrm{d}(\cos(bx))$.

(3) 定积分的分部积分法

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x).$$

8. 平面曲线的弧长

(1) 在直角坐标系中: $y=f(x)$, $x\in[a,b]$，其中 $f(x)\in C^{(1)}_{[a,b]}$，取 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$,

则$\Delta s-\mathrm{d}s=o(\Delta x)$ $(\Delta x\to0)$，于是 $s=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$.

(2) 参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$，其中 $\varphi(t),\psi(t)\in C^{(1)}_{[\alpha,\beta]}$,

$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$, 于是 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$.

(3) 极坐标系中: $\rho=\rho(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$, 则 $\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta\\ y=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}$, $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$.

9. 空间曲线的弧长

设空间曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$, 其中 $x(t),y(t),z(t)\in C^{(1)}_{[\alpha,\beta]}$, 则

$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$,

于是 L 的长度为 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$.

10. 平面图形的面积

(1) 直角坐标系中

① $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$以及 $x=a, x=b$ 所围成的图形的面积(其中 $f(x)\geq g(x)$)

$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

② $x=\varphi(y)$ 与 $x=\psi(y)$以及 $y=c, y=d$ 所围成的图形的面积(其中 $\psi(y)\geq\varphi(y)$)

$A=\int_c^d[\psi(y)-\varphi(y)]\mathrm{d}y$.

(2) 极坐标系中

$\rho=a\theta$, $\theta\in[\alpha,\beta]$, $\mathrm{d}A=\frac{1}{2}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$, $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$.

11. 空间立体的体积

(1) 平行截面面积 $A(x)$已知的立体($a\leq x\leq b$): $\mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x$, $V=\int_a^bA(x)\mathrm{d}x$.

(2) 旋转体的体积

① $y=f(x)$ ($x\in[a,b]$)绕 x 轴旋转一周(其中 $f(x)\geq0$), $A(x)=\pi f^2(x)$, 故 $V=\pi\int_a^bf^2(x)\mathrm{d}x$.

② $x=g(y)$ ($y\in[c,d]$)绕 y 轴旋转一周(其中 $g(y)\geq0$), $A(y)=\pi g^2(y)$, 故 $V=\pi\int_c^dg^2(y)\mathrm{d}y$.

五. 微分方程

1. 一阶可分离变量的微分方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$, 其中 $f(x), g(y)$连续.

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow G(y)=F(x)+C$.

(其中 $g(y)\neq0$, $G'(y)=\frac{1}{g(y)}$, $F'(x)=f(x)$, C 为任意常数)

2. 一阶线性微分方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$, 其中 $p(x), q(x)$连续.

(1) 对于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0$, 分离变量得: $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\mathrm{d}x$, $y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ (C 为任意常数).

(2) 对于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$, $y=C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 得 $y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}[\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$.

3. 可经变量代换化为已知类型的几类一阶微分方程

(1) 齐次方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$, 其中 $f(tx,ty)=f(x,y)$, $\forall t\neq0$.

①将原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\dfrac{y}{x})$,

②令 $u=\dfrac{y}{x}$ 得 $y=ux$, 从而 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 代入原方程并整理得 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u$,

③分离变量, 得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$,

④两边积分,

⑤以 $\dfrac{y}{x}$ 代替 u.

(2) 伯努里方程: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$, 其中 $\alpha\neq 0, 1$.

①两边同除以 y^{α} 得 $y^{-\alpha}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y^{1-\alpha}=q(x)$,

②令 $z=y^{1-\alpha}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-\alpha)y^{-\alpha}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x)$,

③解上述关于 z 的一阶线性非齐次微分方程,

④ 以 $y^{1-\alpha}$ 代替 z.

4. 可降阶的高阶微分方程

(1) $y^{(n)}=f(x)$ 型

(2) 不显含未知函数 y 的方程: $y''=f(x,y')$.

令 $y'=z$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f(x,z)$. 若解之得 $z=\varphi(x,C_1)$, 则 $y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2$.

(3) 不显含自变量 x 的方程: $y''=f(y,y')$.

改取 y 为自变量, 令 $z=y'=z(y)$, 则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$.

于是原方程化为 $z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=f(y,z)$. 这是关于 $z(y)$的一阶微分方程, 若解之得:

$z=\varphi(y,C_1)$, 即 $\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)}$, 则 $x=\int\dfrac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}+C_2$.

5. 设 $a_1(x), a_2(x)\ f(x)\in C_I$, 则$\forall x\in I$ 及任给的初始条件 $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1$, 初值问题

$$\begin{cases} y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x), \\ y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1, \end{cases}$$

存在定义于区间 I 上的唯一解 $y=y(x)$.

6. 设 $y_1(x), y_2(x)$是线性齐次方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ 的两个解, $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$, 则

(1) $y_1(x), y_2(x)$在区间 I 上线性相关 $\Leftrightarrow \exists x_0\in I$ 使它们的 Wronski 行列式 $W(x_0)=0$.

(2) $y_1(x), y_2(x)$在区间 I 上线性无关$\Leftrightarrow\forall x\in I$, 它们的 Wronski 行列式 $W(x)\neq 0$.

7. 线性齐次方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ 必存在两个线性无关的解.

8. 设 $y_1(x), y_2(x)$是线性齐次方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ 的两个线性无关的解,
则该线性齐次方程的解集 S 是 $y_1(x), y_2(x)$生成的一个二维线性空间

$$\{\bar{y}=c_1y_1+c_2y_2 \mid c_1,c_2\text{为任意常数}\}.$$

9. 设 $y^*(x)$是二阶线性非齐次方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ ①

的一个特解, $y_1(x)$, $y_2(x)$是对应的齐次方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ ②
的两个线性无关的解，则 $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y^*(x)$为非齐次方程①的通解.

10. 设 $y_i^*(x)$ 是方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_i(x)$ $(i=1, 2, \dots, n)$的特解,
则 $y_1^*(x)+\cdots+y_n^*(x)$ 是方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_1(x)+\dots+f_n(x)$的特解.

11. 二阶线性常系数齐次方程的解法

(1) 特征方程 $ar^2+br+c=0$ 有两个相异实根 r_1, r_2，则通解 $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$.

(2) 特征方程有两个相等实根 $r_1=r_2=r$，则通解 $y=(c_1+c_2x)e^{rx}$.

(3) 特征方程有一对共轭复根 $r=\alpha\pm \mathrm{i}\beta$，则通解 $y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$.

12. 二阶线性常系数非齐次方程的解法

(1) 待定系数法求 $ay''+by'+cy=f(x)$ $(a\neq0, b, c$ 为常数)的特解.

① $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$.

若α不是 $ar^2+br+c=0$ 的根，则令 $y^*=(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_{n-1}x+b_n)e^{\alpha x}$.
若α是 $ar^2+br+c=0$ 的单根，则令 $y^*=x(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_{n-1}x+b_n)e^{\alpha x}$.
若α是 $ar^2+br+c=0$ 的重根，则令 $y^*=x^2(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_{n-1}x+b_n)e^{\alpha x}$.
再代入原方程，通过比较系数确定 $b_0, b_1, \dots, b_n$.

② $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

先求 $ay''+by'+cy=P_n(x)e^{\alpha x}[\cos\beta x+\mathrm{i}\sin\beta x]=P_n(x)e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}$ 的特解 Y^*.

则原方程的特解互取为 $y^*=\begin{cases}\mathrm{Re}Y^*, & f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x\\ \mathrm{Im}Y^*, & f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\end{cases}$

(2) 常数变易法

13. n 阶 Euler 方程: $a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$ (其中 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 为常数).

14. 二阶 Euler 方程的解法.

令 $x=e^t$，则 $ax^2y''+bxy'+cy=f(x)$化为 $a\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(b-a)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=f(e^t)$.

这是一个线性常系数微分方程，求出其通解后将 t 换为 $\ln x$ 即得原方程的解.

六. 多元函数微分学

1. 偏导数定义

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=z_x(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=z_y(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y),$$

2. 可微的必要条件:
若函数 $f(x, y)$在点 $M_0(x_0, y_0)$处可微，则
① $f(x, y)$在点 $M_0(x_0, y_0)$处连续;
② $f(x, y)$在点 $M_0(x_0, y_0)$处存在偏导数，且 $\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$.

3. 全微分的运算法则

$d[f(x, y) \pm g(x, y)] = df(x, y) \pm dg(x, y)$;

$d[f(x, y)g(x, y)] = g(x, y)df(x, y) + f(x, y)dg(x, y)$;

$$d\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{g(x,y)df(x,y)-f(x,y)dg(x,y)}{g^2(x,y)} \quad (g(x, y) \neq 0).$$

4. 方向导数

(1) $z = f(x, y)$在点 $M_0(x_0, y_0)$处沿着向量 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \mathbf{l}}\right|_{(x_0,y_0)} \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t},$$

其中向量 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$, $\cos\beta$.

(2) 若函数 $f(x, y)$在点 $M_0(x_0, y_0)$处可微，则 $f(x, y)$在点 $M_0(x_0, y_0)$处沿任一方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在，且有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

5. 梯度 $\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0) = f_x(x_0,y_0)\mathrm{i}+f_y(x_0,y_0)\mathrm{j}$.

6. 复合函数微分法

(1) 设函数 $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$在点 x 处可导，而 $z = f(u, v)$在对应的点(u, v)处可微，

则复合函数 $z = f(\varphi(x), \psi(x))$在点处可导，且 $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} = \mathrm{grad}z\cdot\{\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\}$.

(2) 设函数 $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$在点(x, y)处可偏导，而 $z = f(u, v)$在对应的点(u, v)处可微，

则复合函数 $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$在点$(x, y)$处存在偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{grad}z\cdot\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}\},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{grad}z\cdot\{\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}\},$$

7. 隐函数微分法

(1) 设二元函数 $F(x, y)$满足下列条件:

①$F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内连续.

②$F(x_0, y_0) = 0$,

③$F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

则存在点 x_0 的一个邻域 $N(x_0, \delta)$以及在 $N(x_0, \delta)$内定义的唯一的函数 $y = y(x)$满足:

(i) $y_0 = y(x_0)$, $F(x, y(x)) \equiv 0$, $\forall x\in N(x_0, \delta)$.

(ii) 在 $N(x_0, \delta)$中，函数 $y = y(x)$有连续的导数，且 $y'=-\frac{F_x}{F_y}$.

(2) 设 n +1 元函数 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$满足下列条件:

① $F_{x_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $F_y(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$在点 M_0 的某邻域内连续.

②$F(M_0, y_0) = 0$,

③$F_y(M_0, y_0) \neq 0$.

则存在点 M_0 的一个邻域 $N(M_0, \delta)$以及在 $N(M_0, \delta)$内定义的唯一的一个 n 元函数 $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$满足:

(i) $y_0 = y(M_0)$,

且 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \equiv 0$, $\forall(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in N(M_0, \delta)$.

(ii) $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$在 $N(M_0, \delta)$中有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}}{F_y}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

(3) 设三元函数 $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$满足下列条件:

①F_x, F_y, F_z, G_x, G_y, G_z 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$的某邻域内连续.

②$F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $G(x_0, y_0, z_0) = 0$,

③$\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_{M_0} \neq 0$.

则存在点 x_0 的一个邻域 $N(x_0, \delta)$以及在 $N(x_0, \delta)$内定义的唯一的一组函数$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$满足:

(i) $y_0 = y(x_0)$, $z_0 = z(x_0)$, 且$\begin{cases} F(x,y(x),z(x))\equiv 0 \\ F(x,y(x),z(x))\equiv 0 \end{cases}$ $\forall x\in N(x_0, \delta)$.

(ii) $y = y(x)$, $z = z(x)$在 $N(x_0, \delta)$中均有连续的导数,

且$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$,

其中$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}$, $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}$, $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}$.

8. 切线方程与法平面方程

(1) 设曲线Γ的参数方程为$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ M_0, M 的坐标分别为$(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, 则切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

故切向量为 $\boldsymbol{a} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$, 法平面的方程为

$$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0.$$

(2) 设曲线Γ的方程为$\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x), \end{cases}$ 则点 $M_0(x_0,y(x_0),z(x_0))$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y(x_0)}{y'(x_0)}=\frac{z-z(x_0)}{z'(x_0)}$$

法平面方程为:

$$(x-x_0) + y'(x_0)(y-y(x_0)) + z'(t_0)(z-z(x_0)) = 0.$$

(3) 设曲线Γ的方程为$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$它确定$\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x), \end{cases}$ 则点 M_0 处的切线方程为:

$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}}$$

法平面方程为:

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}(z-z_0)=0.$$

9. 切平面方程与法线方程

(1) Σ: $F(x, y, z) = 0$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$处的切平面方程为

$$F_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(M_0)}.$$

(2) Σ: $z = f(x, y)$在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$处的切平面方程为

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

10. 多元函数的 Taylor 公式

设二元函数 $f(x, y)$在点 $M_0(x_0, y_0)$的某邻域 $N(M_0)$内有 $n+1$ 阶连续偏导数. 则 $\forall M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in N(M_0)$, 有

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+(\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}(\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$$

其中 $0<\theta<1$.

上式称为二元函数 $f(x, y)$在点 M_0 处带有 Lagrange 型余项的 n 阶 Taylor 公式.

特殊情形

(1) 中值公式

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x+f_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y$$

其中 $0<\theta<1$.

(2) 一阶 Taylor 公式

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+(\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2}(\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$$

$$=f(x_0,y_0)+[\Delta x,\Delta y]\begin{bmatrix}f_x\\ f_y\end{bmatrix}\Bigg|_{M_0}+\frac{1}{2}[\Delta x,\Delta y]H_f(M^*)\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}$$

其中 $M^*(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$, $0<\theta<1$, $H_f(M)$为 f 在点 $M(x, y)$处的 Hessian 矩阵$\begin{bmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{bmatrix}$.

(3) Maclaurin 公式

$$f(x,y)=f(0,0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\cdot(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^k f(0,0)+\frac{1}{(n+1)!}(x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(\theta\Delta x,\theta\Delta y),$$

其中 $0<\theta<1$.

七. 数量函数积分

1. 数量函数积分的定义 $\int_\Omega f(M)\mathrm{d}\Omega=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\Omega_k$.

2. 数量函数积分的性质

(1) $\int_\Omega[af(M)+bg(M)]\mathrm{d}\Omega=a\int_\Omega f(M)\mathrm{d}\Omega+b\int_\Omega g(M)\mathrm{d}\Omega$, 其中 a, b 为常数.

(2) $\int_\Omega f(M)\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega 1} f(M)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega 2} f(M)\mathrm{d}\Omega$, 其中$\Omega=\Omega 1\cup\Omega 2$, 且$\Omega 1$ 与$\Omega 2$ 无公共内点.

(3) $f(M)\le g(M)\ (\forall M\in\Omega)\Rightarrow\int_\Omega f(M)\mathrm{d}\Omega\le\int_\Omega g(M)\mathrm{d}\Omega$.

(4) $\left|\int_\Omega f(M)\,\mathrm{d}\Omega\right|\le\int_\Omega|f(M)|\mathrm{d}\Omega$.

(5) $a\le f(M)\le b\ (\forall M\in\Omega)\Rightarrow aV\le\int_\Omega f(M)\mathrm{d}\Omega\le bV$, 其中 V 为Ω的度量.

(6) $f(M)\in C_\Omega\Rightarrow\exists M^*\in\Omega$ s.t. $\int_\Omega f(M)\mathrm{d}\Omega=f(M^*)V$, 其中 V 为Ω的度量.

3. 直角坐标系下的二重积分的计算

(1) $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$, 则$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(2) $D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$，则$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}x$.

4. 二重积分换元法

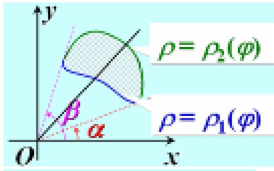
设函数 $f(x, y)$在有界闭区域 D 上连续, $x = \varphi(u, v)$ 和 $y = \psi(u, v)$有一阶连续偏导数，且 Jacobi 行列式

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \ne 0,$$

则 $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v))|J(u, v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

5. 极坐标系下二重积分的计算

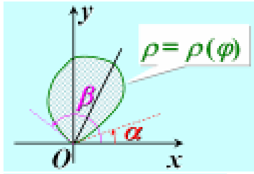
令 $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$，则$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$.



(1) 极点 O 在 D 的外部

$D = \{(\varphi, \rho) \mid \alpha \le \varphi \le \beta,\ \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)\}$，则

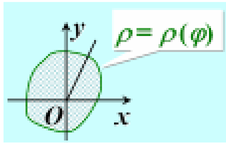
$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$.



(2) 极点 O 在 D 的边界曲线上

$D = \{(\varphi, \rho) \mid \alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le \rho \le \rho(\varphi)\}$，则

$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$.



(3) 极点 O 在 D 的内部

$D = \{(\varphi, \rho) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le \rho(\varphi)\}$，则

$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$.

6. 广义极坐标变换

令 $x = a\rho\cos\varphi, y = b\rho\sin\varphi$，则$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$.

7. 直角坐标系下三重积分的计算

(1) $\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy},\ z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\}$，则$\iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}v = \iint\limits_{D_{xy}} [\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) $\Omega = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D_{yz},\ x_1(y, z) \le x \le x_2(y, z)\}$，则$\iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}v = \iint\limits_{D_{yz}} [\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)\mathrm{d}x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(3) $\Omega = \{(x, y, z) \mid (z, x) \in D_{zx},\ y_1(z, x) \le y \le y_2(z, x)\}$，则$\iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}v = \iint\limits_{D_{zx}} [\int_{y_1(z,x)}^{y_2(z,x)} f(x, y, z)\mathrm{d}y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

(4) $\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D(z),\ p \le z \le q\}$，则$\iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}v = \int_p^q [\iint\limits_{D(z)} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}z$.

(5) $\Omega = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D(x),\ a \le x \le b\}$，则$\iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}v = \int_a^b [\iint\limits_{D(x)} f(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z]\mathrm{d}x$.

(6) $\Omega = \{(x, y, z) \mid (z, x) \in D(y),\ c \le y \le d\}$，则$\iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}v = \int_c^d [\iint\limits_{D(y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$.

8. 柱面坐标系下三重积分的计算

令 $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z$，则$\iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}v = \iiint_\Omega f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$.

9. 球面坐标系下三重积分的计算

令 $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$,

则$\iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}v = \iiint_\Omega f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

10. 广义球坐标系下三重积分的计算

令 $x = ar\sin\theta\cos\varphi, y = br\sin\theta\sin\varphi, z = cr\cos\theta$,

则$\iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}v = \iiint_\Omega f(ar\sin\theta\cos\varphi, br\sin\theta\sin\varphi, cr\cos\theta)abcr^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

11. 第一型曲线积分的计算

(1) $L: y=y(x)\in C^{(1)}_{[a,b]}$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x$.

(2) $L: x=x(y)\in C^{(1)}_{[c,d]}$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+[x'(y)]^2}\mathrm{d}y$.

(3) $L: x=x(t), y=y(t)\in C^{(1)}_{[\alpha,\beta]}$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$.

(4) $L: \rho=\rho(\varphi)\in C^{(1)}_{[\alpha,\beta]}$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\sin\varphi,\rho(\varphi)\cos\varphi)\sqrt{\rho^2+[\rho'(\varphi)]^2}\mathrm{d}\varphi$.

(5) $L: x=x(t), y=y(t), z=z(t)\in C^{(1)}_{[\alpha,\beta]}$，则

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

12. 第一型曲面积分的计算

(1) 设$\Sigma: z=z(x,y)$分片光滑, f在Σ上连续, Σ在 xOy 平面上的投影区域为 D_{xy},

则$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}A=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) 设$\Sigma: y=y(z,x)$分片光滑, f在Σ上连续, Σ在 zOx 平面上的投影区域为 D_{zx},

则$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}A=\iint_{D_{zx}} f(x,y(z,x),z)\sqrt{1+y_z^2+y_x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

(3) 设$\Sigma: x=x(y,z)$分片光滑, f在Σ上连续, Σ在 yOz 平面上的投影区域为 D_{yz},

则$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}A=\iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

13. 线密度为$\mu(x,y)$的平面曲线段 L 的质心坐标$(\bar{x},\bar{y})$

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\mu(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s},\ \bar{y}=\frac{\int_L y\mu(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s}.$$

14. 面密度为$\mu(x,y)$的平面薄片 D 的质心坐标$(\bar{x},\bar{y})$

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y},\ \bar{y}=\frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

15. 密度为$\mu(x,y,z)$的空间立体Ω的质心坐标$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$

$$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\mu(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},\ \bar{y}=\frac{\iiint_\Omega y\mu(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},\ \bar{z}=\frac{\iiint_\Omega z\mu(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}.$$

16. 线密度为$\mu(x,y)$的平面曲线段 L 对 x 轴的转动惯量 $I_x=\int_L y^2\mu\mathrm{d}s$, 对 y 轴的转动惯量 $I_y=\int_L x^2\mu\mathrm{d}s$.

17. 面密度为$\mu(x,y)$的平面薄片 D 对 x 轴的转动惯量 $I_x=\iint_D y^2\mu\mathrm{d}\sigma$, 对 y 轴的转动惯量 $I_y=\iint_D x^2\mu\mathrm{d}\sigma$.

18. 密度为$\mu(x,y,z)$的空间立体Ω关于 x 轴, y 轴, z 轴的转动惯量 I_x, I_y, I_z.

$I_x=\iiint_\Omega(y^2+z^2)\mu\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $I_y=\iiint_\Omega(z^2+x^2)\mu\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $I_z=\iiint_\Omega(x^2+y^2)\mu\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

19. 线密度为$\mu(x,y)$的平面曲线段 L 对位于 L 外的点 $M_0(x_0,y_0)$处的单位质点的引力 $\boldsymbol{F}$ 的两个分量

$$F_x=\int_L\frac{k(x-x_0)\mu(x,y)}{r^3}\mathrm{d}s,\ F_y=\int_L\frac{k(y-y_0)\mu(x,y)}{r^3}\mathrm{d}s,$$

其中 k 为引力常数, $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

20. 面密度为$\mu(x,y,z)$的曲面块Σ对Σ外的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处单位质点的引力 $\boldsymbol{F}$ 的三个分量

$$F_x=\iint_\Sigma\frac{k(x-x_0)\mu}{r^3}\mathrm{d}A,\ F_y=\iint_\Sigma\frac{k(y-y_0)\mu}{r^3}\mathrm{d}A,\ F_z=\iint_\Sigma\frac{k(z-z_0)\mu}{r^3}\mathrm{d}A,$$

其中 k 为引力常数, $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

21. 密度为$\mu(x, y, z)$的空间立体Ω对Ω外的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$处单位质点的引力 $\boldsymbol{F}$ 的三个分量

$$F_x=\iiint_{\Omega}\frac{k(x-x_0)\mu}{r^3}\mathrm{d}v\,,\ F_y=\iiint_{\Omega}\frac{k(y-y_0)\mu}{r^3}\mathrm{d}v\,,\ F_z=\iiint_{\Omega}\frac{k(z-z_0)\mu}{r^3}\mathrm{d}v\,,$$

其中 k 为引力常数, $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

八. 向量函数积分

1. 第二型曲线积分的定义 $\int_L \boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L \boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(M_i)\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{T}(M_i)\Delta s_i$,

   其中 $\boldsymbol{T}(M)$为 L 在点 M 处沿 L 的正方向的单位切向量.

2. 第二型曲线积分的坐标形式

   (1) L 为 xOy 平面上的有向光滑曲线: $\int_L \boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L \boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s=\int_L P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y$.

   (2) L 为空间有向光滑曲线: $\int_L \boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L \boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s=\int_L P(x, y, z)\mathrm{d}x+Q(x, y, z)\mathrm{d}y+R(x, y, z)\mathrm{d}z$.

3. 第二型曲线积分的性质

   (1) $\int_L [k_1\boldsymbol{F}_1(M)+k_2\boldsymbol{F}_2(M)]\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}=k_1\int_L \boldsymbol{F}_1(M)\mathrm{d}\boldsymbol{s}+k_2\int_L \boldsymbol{F}_2(M)\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

   (2) $\int_L \boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\int_{L^-}\boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, 其中 L^-表示与 L 的方向相反的有向曲线段.

   (3) $\int_{L(AB)}\boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_{L(AC)}\boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{s}+\int_{L(CB)}\boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, 其中 A, B, C 为 L 上的任意三个点.

4. 第二型曲线积分的计算

   (1) 设 L: $x=x(t), y=y(t)$为 xOy 平面上的有向光滑曲线, 当参数 t 单调地由α变到β时, 点 $M(x, y)$由 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B, 向量函数 $\boldsymbol{F}(M)=\{P(x, y), Q(x, y)\}$在 L 上连续, 则

   $$\int_L \boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{\beta}[P(x(t), y(t))x'(t)+Q(x(t), y(t))y'(t)]\mathrm{d}t\,.$$

   (2) 设 L: $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$为空间内有向光滑曲线, 当参数 t 单调地由α变到β时, 点 $M(x, y, z)$ 由 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B, 向量函数 $\boldsymbol{F}(M)=\{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$在 L 上连续, 则

   $$\begin{aligned}\int_L \boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{s}&=\int_L P(x, y, z)\mathrm{d}x+Q(x, y, z)\mathrm{d}y+R(x, y, z)\mathrm{d}z\\&=\int_{\alpha}^{\beta}[P(x(t), y(t))x'(t)+Q(x(t), y(t))y'(t)+R(x(t), y(t))z'(t)]\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

5. 第二型曲面积分的定义 $\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{n}(M)\mathrm{d}A=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(M_i)\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{n}(M_i)\Delta A_i$.

   其中 $\boldsymbol{n}(M)$为Σ在点 M 处沿Σ的正方向的单位法向量.

6. 第二型曲面积分的坐标形式 $\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\iint_\Sigma P(x, y, z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x, y, z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x, y, z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

7. 第二型曲面积分的性质

   (1) $\iint_\Sigma[k_1\boldsymbol{F}_1(M)+k_2\boldsymbol{F}_2(M)]\mathrm{d}\boldsymbol{A}=k_1\iint_\Sigma \boldsymbol{F}_1(M)\mathrm{d}\boldsymbol{A}+k_2\iint_\Sigma \boldsymbol{F}_2(M)\mathrm{d}\boldsymbol{A}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

   (2) $\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{A}=-\iint_{\Sigma^-}\boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{A}$, 其中$\Sigma^-$表示与Σ的方向相反的有向曲面块.

   (3) $\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\iint_{\Sigma 1}\boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{A}+\iint_{\Sigma 2}\boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{A}$, 其中$\Sigma=\Sigma 1\cup\Sigma 2$, 且Σ1 与Σ2 无公共内点.

8. 第二型曲面积分的计算

   (1) 设Σ: $z=z(x, y)$为光滑的有向曲面, Σ在 xOy 平面上的投影区域为 D_{xy}, $R(x, y, z)$在Σ上连续,

   $$\text{则}\iint_\Sigma R(x, y, z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\begin{cases}\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \Sigma\text{取上侧}\\ -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \Sigma\text{取下侧}\end{cases}.$$

   (2) 设Σ: $x=x(y, z)$为光滑的有向曲面, Σ在 yOz 平面上的投影区域为 D_{yz}, $P(x, y, z)$在Σ上连续,

   $$\text{则}\iint_\Sigma P(x, y, z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\begin{cases}\iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z, & \Sigma\text{取前侧}\\ -\iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z, & \Sigma\text{取后侧}\end{cases}.$$

(3) 设$\Sigma: y = y(z, x)$为光滑的有向曲面, Σ在 zOx 平面上的投影区域为 D_{zx}, $Q(x, y, z)$在Σ上连续,

则$$\iint_\Sigma Q(x, y, z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = \begin{cases} \iint_{D_{zx}} Q(x, y(z,x), z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x, & \Sigma\text{取右侧} \\ -\iint_{D_{zx}} Q(x, y(z,x), z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x, & \Sigma\text{取左侧} \end{cases}.$$

9. 两类曲线积分之间的关系

(1) 当 L 为 xOy 平面上的光滑曲线时, 设 $\boldsymbol{F}(M) = \{P(M), Q(M)\}$, $\boldsymbol{T}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$, 则

$$\int_L \boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L \boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s.$$

(2) 当 L 为空间曲线时, 设 $\boldsymbol{F}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$, $\boldsymbol{T}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, 则

$$\int_L \boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L \boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s.$$

10. 两类曲面积分之间的关系

设 $\boldsymbol{F}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$, $\boldsymbol{n}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, 则

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(M)\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \iint_\Sigma \boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{n}(M)\mathrm{d}A = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}A.$$

11. Green 公式

设 D 为平面有界闭区域, 其边界∂D 为分段光滑曲线, 函数 P, Q 在 D 上有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D (Q_x - P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

12. 平面曲线积分与路径无关的条件

设 $P(x, y)$, $Q(x, y)$在平面单连通域 G 内有连续的一阶偏导数, 则下列条件等价:

(1) $P_y = Q_x$ 在 G 内处处成立.

(2) 对 G 内任一条分段光滑的闭曲线 L, 有 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$.

(3) 曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关.

(4) 表达式 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 G 内是某个二元函数 $u(x, y)$的全微分, 即 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$.

13. 若 $P(x, y)$, $Q(x, y)$在单连通区域 G 内有一阶连续偏导数, 则 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 G 内存在原函数的充要条件是: $\forall(x, y)\in G$, $P_y = Q_x$. 此时有

(1) $u(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + C$, 其中$(x_0, y_0)$, $(x, y)\in G$.

(2) $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) = u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$, 其中$(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)\in G$.

14. Gauss 公式

设Ω是以分片光滑曲面Σ为边界的空间有界闭区域, 函数 P, Q, R 在Ω上具有一阶连续偏导数, 则

$$\oiint_\Sigma P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iiint_\Omega (P_x + Q_y + R_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$ 其中Σ取外侧.

15. Stokes 公式

设Σ是以分段光滑闭曲线 L 为边界曲线的分片光滑曲面, 函数 P, Q, R 在包含Σ的空间区域 G 内具有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

其中曲线 L 的方向与曲面Σ的侧符合右手螺旋法则, $\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot Q$ 即 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

16. $\boldsymbol{F}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$的散度: $\mathrm{div}\boldsymbol{F} = P_x + Q_y + R_z$.

17. $\boldsymbol{F}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$的旋度: $\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \{ R_y-Q_z , P_z-R_x , Q_x-P_y \}$.

九. 复变函数

1. 设复变函数 $w=f(z)$ 在 z_0 处的**导数** $f'(z_0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$.

2. 复变函数求导法则

(1) $C'=0$ (C 为复常数);

(2) $(z^n)'=nz^{n-1}$;

(3) $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$;

(4) $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$;

(5) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, $g(z)\neq 0$;

(6) $[f(g(z))]'=f'(g(z))g'(z)$;

(7) $f'(z)=\dfrac{1}{\varphi'(z)}$, 其中 $w=f(z)$与 $z=\varphi(w)$为两个互为反函数的单值函数, 且$\varphi'(w)\neq 0$.

3. 复变函数可导的必要条件

设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域 D 内有定义, $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0\in D$,若 $f(z)$在 z_0 处可导,

则二元函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$在点(x_0,y_0)处存在偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$, 且满足 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

4. 若 $f(z)$在 z 处可导, 则 $f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y=u_x-\mathrm{i}u_y$.

5. 初等函数的简单性质

(1) 指数函数 $f(z)=e^z=e^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$

① $|e^z|=e^x$,

② $\mathrm{Arg}\,e^z=y+2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$,

③ $f(z)=e^z$ 处处解析, 且$(e^z)'=e^z$,

④ $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$, $e^{z_1}/e^{z_2}=e^{z_1-z_2}$,

⑤ $e^{z+2\pi\mathrm{i}}=e^z$, 即 e^z 是以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期的函数.

⑥ 极限 $\lim\limits_{z\to\infty}e^z$ 不存在, 当 z 沿实数轴趋向于$+\infty$时, $e^z\to\infty$; 当 z 沿实数轴趋向于$-\infty$时, $e^z\to 0$.

(2) 对数函数 $w=\mathrm{Ln}z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)=\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z$.

Lnz 是无穷多值函数, 对于每个固定的 k, $\mathrm{Ln}z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)$成为一个单值函数, 称为 Lnz 的一个分支. 特别地, 取 $k=0$, 称 $\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$ 为 Lnz 的主值.

① $\mathrm{Ln}z=\ln z+\mathrm{i}\,2k\pi$ ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$).

② $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2$, $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2$, (等号的意义为集合相等).

③ lnz 在复平面内除原点与负实轴外, 处处连续.

事实上, ln|z|除原点外处处连续, 而 $\lim\limits_{y\to 0^-}\arg z=-\pi$, $\lim\limits_{y\to 0^+}\arg z=\pi$,

故 argz 在原点及负实轴上不连续.

④ Lnz 的各个单值分支在除原点与负实轴外的其他点处解析, 其导数为$\dfrac{1}{z}$.

事实上, 对于 Lnz 的主值 lnz, 令 $z=e^w$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln z=\left(\dfrac{\mathrm{d}e^w}{\mathrm{d}w}\right)^{-1}=\dfrac{1}{e^w}=\dfrac{1}{z}$.

(3) 幂函数 $z^\alpha=e^{\alpha\mathrm{Ln}z}=e^{\alpha(\ln z+2k\pi\mathrm{i})}$ ($z\neq 0$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$), 其主值为 $e^{\alpha\ln z}$.

① 当α为整数时, $z^\alpha=e^{\alpha\ln z}$ 为单值函数.

② 特别地, 当α为正整数时, z^α即 z 的α次幂.

③ 当α为有理数$\dfrac{m}{n}$(m, n 互质 $n>1$)时，$z^\alpha=e^{\frac{m}{n}\ln z+2k\frac{m}{n}\pi i}$ 取 $k=0, 1, 2, .., n-1$ 时的 n 个值.

④ 特别地当$\alpha=\dfrac{1}{n}$时, z^α即为 z 的 n 次方根.

⑤ 对应于 Lnz 的各个单值分支, z^α的各个分支在除原点及负实轴外的其他点处解析, 且其导数为$\alpha z^{\alpha-1}$.

(4) 三角函数: $\sin z=\dfrac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$, $\cos z=\dfrac{1}{2}(e^{iz}-e^{-iz})$是以 2π为周期的解析函数, $(\sin z)'=\cos z$, $(\cos z)'=-\sin z$.

(5) 其他的初等函数.

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z},\quad \sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z},\quad \mathrm{ch}z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad \mathrm{sh}z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}.$$

6. 复变函数积分的定义

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}(u_k+\mathrm{i}v_k)(\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k)$$

$$=\lim_{d\to 0}[\sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k-v_k\Delta y_k)+\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k+u_k\Delta y_k)]=\int_L u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_L v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y.$$

7. 复变函数积分的计算

(1) 设 L 的参数方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t|_{起点}=\alpha$, $t|_{终点}=\beta$, 则

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta[u\cdot x'(t)-v\cdot y'(t)]\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_\alpha^\beta[v\cdot x'(t)+u\cdot y'(t)]\mathrm{d}t.$$

(2) 设 L 的参数方程为 $z=z(t)$, $t|_{起点}=\alpha$, $t|_{终点}=\beta$, 则

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t.$$

(3) 设 $f(z)$在区域 D 内解析且$\Phi(z)$为 $f(z)$ 的一个原函数, 则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\Phi(z_1)-\Phi(z_0)=\Phi(z_0)\Big|_{z_0}^{z_1},\ (\text{其中 } z_0, z_1\in D).$$

8. Cauchy 积分定理:

设 $f(z)$在单连通域 D 内解析, L 为 D 内任一条分段光滑的闭曲线则$\oint_L f(z)\mathrm{d}z=0$, 从而积分$\int_L f(z)\mathrm{d}z$ 与路径无关, 只与起点和终点有关.

9. 复合闭路定理

设 L, L_k ($k=1, 2, \ldots, n$)为 $n+1$ 条取逆时针方向的简单闭曲线, L_k ($k=1, 2, \ldots, n$)完全在 L 内且互不相交, 也互不包含, D 为由 L, L_k ($k=1, 2, \ldots, n$)围成的复连通域. 如果 $f(z)$在 $\overline{D}=D\cup\partial D$ 上解析, 则

$$\oint_L f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\oint_{L_k} f(z)\mathrm{d}z.$$

10. 闭路变形原理

当 $n=1$ 时, 上述复合闭路定理即$\oint_L f(z)\mathrm{d}z=\int_{L_1} f(z)\mathrm{d}z$, 它表明: 区域 D 内的一个解析函数沿闭曲线积分, 不因闭曲线在区域内连续变形而改变它的值积分, 只要在变形过程中曲线不经过被积函数的奇点.

11. Cauchy 积分公式

设 $f(z)$在区域 D(单连通或复连通)及 D 的边界 L 上解析, 则对任意 $z\in D$, 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,\ \text{其中 } L \text{ 取正向}.$$

12. 高阶导数公式

设函数 $f(z)$在区域 D(单连通或复连通)及 D 的边界 L 上解析，则 $f(z)$在区域 D 内存在任意阶导数，且对任意 $z\in D$, $n = 1, 2, \ldots$，有

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\text{其中 } L \text{ 取正向}.$$

13. 孤立奇点及其分类

若 $f(z)$在 z_0 不解析，但在 z_0 的某一去心邻域 $0 < |z-z_0|< \delta$内解析，则称 z_0 为 $f(z)$的孤立奇点.

设 z_0 为 $f(z)$的孤立奇点, $f(z)$在 z_0 的去心邻域 $0 < |z-z_0|< \delta$内的 Laurent 展式为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$.

若 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 中无负幂项，则称 z_0 为 $f(z)$的可去奇点,

若 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 中负幂项只有有限项，则称 z_0 为 $f(z)$的极点,

若 $c_{-m}\neq 0$, 而 $c_{-k} = 0$ $(k = m+1, m+2, \ldots)$，则称 z_0 为 $f(z)$的 m 级极点,

若 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 中负幂项有无穷多项，则称 z_0 为 $f(z)$的本性奇点.

14. 孤立奇点类型的判定

设 z_0 为 $f(z)$的奇点, $f(z)$在 $\overset{\circ}{N}(z_0,\delta)$ 内解析，则

(1) z_0 为 $f(z)$的可去奇点 $\Leftrightarrow$ $F(z)=\begin{cases} f(z), & z\neq z_0 \\ c_0, & z=z_0\end{cases}$ 在 $N(z_0, \delta)$内解析，其中 c_0 为有限复常数

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)= c_0$，其中 c_0 为有限复常数

$\Leftrightarrow$ $f(z)$在 $\overset{\circ}{N}(z_0,\delta)$ 内有界.

(2) z_0 为 $f(z)$的 m 级极点 $\Leftrightarrow$ $f(z) = (z - z_0)^{-m}\varphi(z)$，其中 $\varphi(z_0)\neq 0$，且 $\varphi(z)$在 $N(z_0, \delta)$内解析.

z_0 为 $f(z)$的极点 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

(3) z_0 为 $f(z)$的本性奇点 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在且 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\neq\infty$.

15. 零点

若解析函数 $f(z)$能表示成 $f(z) = (z-z_0)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z_0)\neq 0$，且 $\varphi(z)$在 z_0 处解析, m 为某一正整数，则称 z_0 为 $f(z)$的 m 级零点.

若 $f(z)$在 z_0 处解析，则 z_0 为 $f(z)$的 m 级零点 $\Leftrightarrow$ z_0 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级极点

$\Leftrightarrow$ $f^{(n)}(z_0) = 0$ $(n = 0, \ldots, m-1)$, $f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

16. 若 $f(z)$在 $z = \infty$的去心邻域$\{z\in \mathbf{C} \mid R < |z| < +\infty\}$内解析，则称$\infty$为 $f(z)$的孤立奇点.

令 $t = 1/z$，则 $t = 0$ 是 $f(1/t)$的孤立奇点.

若 $t = 0$ 是 $f(1/t)$的可去奇点(m 级极点，本性奇点)，则称 $z = \infty$ 是 $f(z)$的可去奇点(m 级极点，本性奇点).

设 $f(z)$在$\{z\in \mathbf{C} \mid R < |z| < +\infty\}$内解析，则在此圆环内有

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n, \qquad (*)$$

因此 $z = \infty$ 是 $f(z)$的

(1) 可去奇点 $\Leftrightarrow$ (*)中无正幂项;

(2) m 级极点 $\Leftrightarrow$ $c_m\neq 0$，而 $c_k = 0$ $(k = m+1, m+2, \ldots)$;

(3) 本性奇点 $\Leftrightarrow$ (*)中有无穷多个正幂项.

17. 设 $f(z)$以 z_0 为有限孤立奇点，即 $f(z)$在 z_0 的某个去心邻域 $0 < |z-z_0| < R$ 内解析，L 为该邻域内包含 z_0 的任意一条逆时针方向的简单闭曲线，则 $f(z)$在 z_0 点处的留数 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_L f(z)\mathrm{d}z$.

(1) 设 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = c_{-1}$.

(2) 如果 z_0 为 $f(z)$的一级极点，则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

记 $\varphi(z)=(z-z_0)f(z)$，则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \varphi(z_0)$.

(3) 如果 z_0 为 $f(z)$的 m 级极点，则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$.

若 z_0 为 $f(z)$的 m 级极点，则$\forall$大于或等于 m 的正整数 k，有

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)].$$

(4) 若 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$及 $Q(z)$在 z_0 处解析，且 $P(z_0)\neq 0$, $Q(z_0) = 0$, $Q'(z_0)\neq 0$,

则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

18. 设∞为 $f(z)$的一个孤立奇点，即 $f(z)$在∞的某去心邻域 $R<|z|<+\infty$内解析．设 L 为圆环域 $R<|z|<+\infty$内绕原点的任何一条逆时针方向简单闭曲线，则 $f(z)$在∞的留数 $\mathrm{Res}[f(z), \infty] = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{L^-} f(z)\mathrm{d}z$.

19. $\mathrm{Res}[f(z), \infty] = -c_{-1}$，其中 c_{-1} 为 $f(z)$在 $R<|z|<+\infty$内的 Laurent 展式中 $\dfrac{1}{z}$ 的系数.

20. $\mathrm{Res}[f(z), \infty] = -\mathrm{Res}[f(\dfrac{1}{z})\dfrac{1}{z^2}, 0]$.

21. 设函数 $f(z)$在区域 D 内除去有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 外处处解析，L 是 D 内包围诸奇点的任意一条逆时针简单闭曲线，则 $\oint_L f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k]$.

22. 如果函数 $f(z)$在扩充复平面内除去有限个孤立奇点外处处解析，那么 $f(z)$ 在所有奇点(包括∞点)的留数的总和等于零，即 $\mathrm{Res}[f(z), \infty] + \sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k] = 0$.

23. 形如 $\int_0^{2\pi}R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$ 的积分，其中 $R(\cos x, \sin x)$为 $\cos x$, $\sin x$ 的有理函数.

令 $z = e^{\mathrm{i}x}$, $x: 0\to 2\pi$ (对应于$|z| = 1$ 逆时针方向一周)，则 $\mathrm{d}z = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$,

$\cos x = \dfrac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}) = \dfrac{1}{2}(z+z^{-1}) = \dfrac{z^2+1}{2z}$, $\sin x = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}) = \dfrac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}$.

所以 $\int_0^{2\pi}R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x = \oint_{|z|=1}R\left(\dfrac{z^2+1}{2z}, \dfrac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$.

令 $f(z) = \dfrac{1}{\mathrm{i}z}\cdot R\left(\dfrac{z^2+1}{2z}, \dfrac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)$，则 $\int_0^{2\pi}R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x = \oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k]$,

其中 z_k ($k = 1, 2, \ldots, n$)为 $f(z)$在$|z| < 1$ 内的孤立奇点.

若 $R(\cos x, \sin x)$为 x 的偶函数，则 $\int_0^{\pi}R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$，仍然可令 $z = e^{\mathrm{i}x}$，将

$\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$ 化为单位圆周上的积分.

24. 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 的积分，其中 $R(x)$为 x 的有理函数，而分母的次数至少比分子的次数高二次，并且 $R(z)$在实轴上无孤立奇点. 则该反常积分是收敛的，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x=2\pi \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),z_k]$,

其中 z_k 为 $R(z)$在上半平面内的所有有限远孤立奇点.

若 $R(x)$为偶函数，则有 $\int_{0}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x = \pi \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z), z_k]$.

25. 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x \quad (a>0)$的积分，其中 $R(x)$是 x 的有理函数，而分母的次数至少比分子的次数高一次，并且在实轴上无孤立奇点. 则该积分收敛，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k]$,

其中 z_k 为 $R(z)$在上半平面内的所有有限远孤立奇点.

十. 级数

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=S$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n'=T$, α,β为任意常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha c_n+\beta c_n')=\alpha S+\beta T$.

2. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\rho$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{|c_n|}=\rho$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径 $R=\begin{cases}1/\rho, & 0<\rho<+\infty;\\ +\infty, & \rho=0;\\ 0, & \rho=+\infty.\end{cases}$

3. 设 $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ ($|z|<R_1$), $T(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n' z^n$ ($|z|<R_2$). c_n, c_n' ($n=1, 2, \ldots$)为复常数, $R=\min(R_1,R_2)$,

则当$|z|<R$ 时有:

(1) $S(z) \pm T(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty}c_n' z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(c_n\pm c_n')z^n$.

(2) $S(z)\cdot T(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}c_n' z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(c_0c_n'+c_1c_{n-1}'+\cdots+c_nc_0')z^n$.

4. 设复幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径为 $R\neq 0$，和函数为 $S(z)$，则

(1) $S(z)$ 在收敛圆内(即$|z|<R$)内解析;

(2) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 在收敛圆内可以逐项求导，即当 $|z|<R$ 时，有 $S'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(c_n z^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n z^{n-1}$.

(3) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 在收敛圆内可以逐项积分，即当 $|z|<R$ 时，有

$$\int_L S(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_L z^n\mathrm{d}z \qquad (L \text{ 为圆域 } |z|<R \text{ 内的简单曲线}).$$

并且逐项求导或逐项积分后所得的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径，但在收敛圆周上的敛散性有可能改变.

5. 设实幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径 $R\neq 0$，其和函数为 $S(x)$，则

(1) $S(x)$ 在收敛域 $\widetilde{D}$ 上连续.

(2) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内可以逐项求导，即$\forall x\in(-R, R)$，有

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

(3) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内可以逐项积分，即$\forall x\in(-R, R)$，有

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

并且逐项求导和逐项积分后所得的幂级数收敛半径仍为 R，但在收敛区间端点的敛散性可能改变.

6. 设复函数 $f(z)$在区域 D 内解析，$z_0\in D$，R 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离，则当$|z-z_0|<R$ 时，$f(z)$能展开成幂级数，即

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$ ——$f(z)$在点 z_0 处的 Talor 展式.

其中系数 $c_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$，且展开式是唯一的.

$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ 称为 $f(z)$在点 z_0 处的 Talor 级数.

特别地，当 $z_0 = 0$ 时，它们相应的称为 Maclaurin 展式与 Maclaurin 级数.

7. 设实函数 $f\in C^{\infty}(x_0-R, x_0+R)$,则 $f(x)$在(x_0-R, x_0+R)内能展成幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 的充分必要条件是：$\forall x\in(x_0-R, x_0+R)$，其泰勒公式的余项 $R_n(x)\to 0$ $(n\to\infty)$. 满足此条件时，展开式是唯一的.

8. 几个常用的展开式

(1) $e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots+\dfrac{z^n}{n!}+\cdots$ $(|z|<+\infty)$.

(2) $\cos z=\dfrac{1}{2}(e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z})=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\mathrm{i}z)^n}{n!}+\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-\mathrm{i}z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ $(|z|<+\infty)$.

(3) $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(|z|<+\infty)$.

(4) $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ $(|z|<1)$.

(5) $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^{n-1}z^{n-1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ $(|z|<1)$.

(6) $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$, $x\in(-1, 1]$.

(7) $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$ (∗)

当$\alpha\le -1$ 时，(∗)的收敛域为$(-1, 1)$；
当$-1<\alpha<0$ 时，(∗)的收敛域为$(-1, 1]$；
当$\alpha>0$ 时，(∗)的收敛域为$[-1, 1]$.

9. 设 $f(z)$在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，则在此圆环域内，$f(z)$能展成双边无穷级数，即有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$ ——$f(z)$在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内的 Laurent 展式

其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_L\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$，$n=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ L 为圆环内绕 z_0 的任何一条逆时针方向的简单闭曲线，并且展开式是唯一的. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 称为 $f(z)$在该圆环内的 Laurent 级数.

10. 三角函数系 1, cos$x$, sin$x$, cos2x, sin2x, …, cosnx, sinnx, …的正交性

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\mathrm{d}x=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\mathrm{d}x=0,\quad (n=1, 2, \ldots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nx\mathrm{d}x=0,\quad (m, n=1, 2, \ldots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos m\cdot\cos nx\mathrm{d}x=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\mathrm{d}x=0,\quad (m, n=1, 2, \ldots \text{ 且 } m\neq n,)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot1\mathrm{d}x=2\pi,\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x=\pi,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\mathrm{d}x=\pi, (n=1, 2, \ldots)$$

11. 以 2π为周期的函数 $f(x)$可展开为三角级数的必要条件:

若 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 在$[-\pi, \pi]$上可逐项积分，则有

$$\text{(Euler-Fourier 公式)}\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x & n=0,1,2,\cdots\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x & n=1,2,\cdots\end{cases}$$

上述公式中的 a_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, b_n $(n=1, 2, \ldots)$称为函数 $f(x)$的 Fourier 系数. 由这些系数作出的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

称为 $f(x)$的 Fourier 级数. 记为 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

12. (Dirichlet 收敛定理)设 $f(x)$是以 2π为周期的函数，在区间$[-\pi, \pi]$上满足 Dirichlet 条件

(1) 连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 只有有限个极值点.

则 $f(x)$的 Fourier 级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在$[-\pi, \pi]$上收敛，并且其和函数为:

$$S(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点}\\ [f(x+0)+f(x-0)]/2, & x\text{为}f(x)\text{的间断点}\\ [f(-\pi+0)+f(\pi-0)]/2, & x=\pm\pi\end{cases}$$

13. 设以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$在$[-l, l]$上满足狄氏条件，则在连续点处它的 Fourier 展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}),$$

其中 $a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$; $b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$ $(n=1, 2, \ldots)$.

若以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$在$[-l, l]$上满足狄氏条件，则其 Fourier 级数的和函数

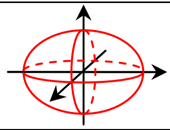
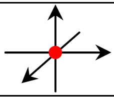
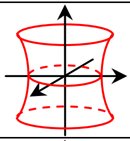
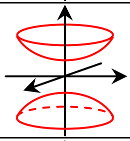
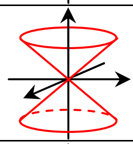
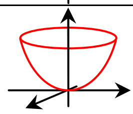
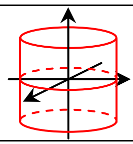
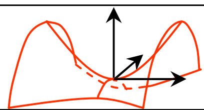
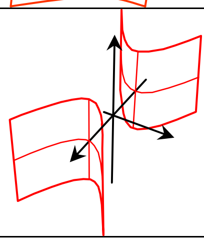
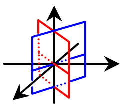
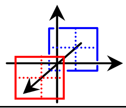
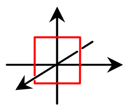
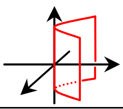
$$S(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点}\\ [f(x+0)+f(x-0)]/2, & x\text{为}f(x)\text{的间断点}\\ [f(-l+0)+f(l-0)]/2, & x=\pm l\end{cases}$$

若 $f(x)$在$(-l, l)$上为奇函数，则 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$, 其中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$.

若 $f(x)$在$(-l, l)$上为偶函数，则 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$, 其中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$.

十一. 空间解析几何和向量代数

1. 平面方程
   (1) 点法式方程: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.
   (2) 一般方程: $Ax+By+Cz+D=0$.
   (3) 三点式方程: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.
   (4) 截距式方程: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.
2. 直线方程
   (1) 参数方程: $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \quad (-\infty<t<\infty). \\ z=z_0+nt \end{cases}$
   (2) 对称方程或标准方程: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$.
   (3) 一般方程: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$.
   (4) 截距式方程: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.
3. 夹角
   (1) 直线 L_1 和 L_2 的夹角 $\phi=\arccos\frac{|\boldsymbol{s}_1\bullet\boldsymbol{s}_2|}{\|\boldsymbol{s}_1\|\bullet\|\boldsymbol{s}_2\|}$，其中 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$ 分别为直线 L_1 和 L_2 的方向向量.
   (2) 直线与平面的夹角 $\phi=\arcsin\frac{|\boldsymbol{s}\bullet\boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{s}\|\bullet\|\boldsymbol{n}\|}$，其中 $\boldsymbol{s}$ 为直线的方向向量, $\boldsymbol{n}$ 为平面的法向量.
   (3) 两平面之间的夹角 $\phi=\arccos\frac{|\boldsymbol{n}_1\bullet\boldsymbol{n}_2|}{\|\boldsymbol{n}_1\|\bullet\|\boldsymbol{n}_2\|}$，其中 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 分别两平面的法向量.
4. 距离
   (1) 点 P 到直线 L 的距离 $d=\frac{\|\overrightarrow{P_0P}\times\boldsymbol{s}\|}{\|\boldsymbol{s}\|}$，其中 P_0 在直线 L 上, $\boldsymbol{s}$ 为直线 L 的方向向量.
   (2) 点 P 到平面π的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{P_0P}\bullet\boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|}$，其中 P_0 在平面π上, $\boldsymbol{n}$ 为平面π的法向量.
   (3) 异面直线 L_1 和 L_2 之间的距离 $d=\frac{|(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{P_1P_2})|}{\|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\|}$，其中 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$ 分别为直线 L_1 和 L_2 的方向向量, P_1 和 P_2 分别在直线 L_1 和 L_2 上.
5. 二次曲面.

一般方程 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+c=0$ 中 $\boldsymbol{A}$ 的秩与正惯指数	标准方程	示意图	类型
$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$; $p=0$ 或 3 需要根据标准方程 进一步判断类型	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		椭球面
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$		点
$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$; $p=1$ 或 2 需要根据标准方程 进一步判断类型	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		单叶双曲面
	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		双叶双曲面
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$		二次锥面
$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$; $p=0$ 或 2 需要根据标准方程 进一步判断类型	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$		椭圆抛物面
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		椭圆柱面
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	(z 轴)	直线
$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$; $p=1$ 需要根据标准方程 进一步判断类型	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$		双曲抛物面
	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		双曲柱面
	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$		一对 相交平面
$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$; $p=0$ 或 1 需要根据标准方程 进一步判断类型	$\frac{x^2}{a^2}=1$		一对 平行平面
	$x^2=0$		一对 重合平面
	$x^2=2py$		抛物柱面