第九章 多元函数微分法及其应用

一元函数微分学

$\downarrow$ 推广

多元函数微分学

注意: 善于类比, 区别异同

第九章 多元函数微分法及其应用

第九章

第一节 多元函数的基本概念

一、区域

二、多元函数的概念

三、多元函数的极限

四、多元函数的连续性

一、区域

1. 邻域

点集 $U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$，称为点 P_0 的 δ 邻域.

例如，在平面上，

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$ (圆邻域)

在空间中，

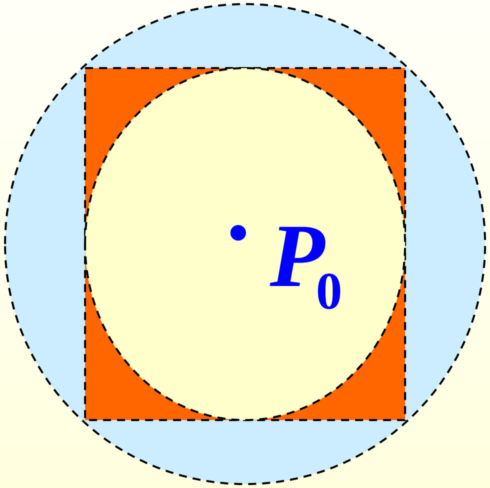
$$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

(球邻域)

说明：若不需要强调邻域半径 δ，也可写成 $U(P_0)$.

点 P_0 的去心 δ 邻域记为 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}$

在讨论实际问题中也常使用方邻域，因为方邻域与圆邻域可以互相包含.

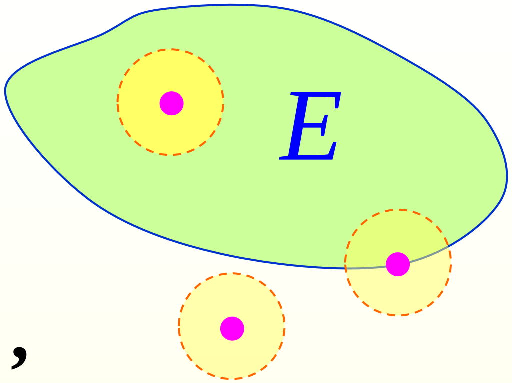


平面上的方邻域为

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\,\big|\,|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\}$$

2. 区域

(1) 内点、外点、边界点



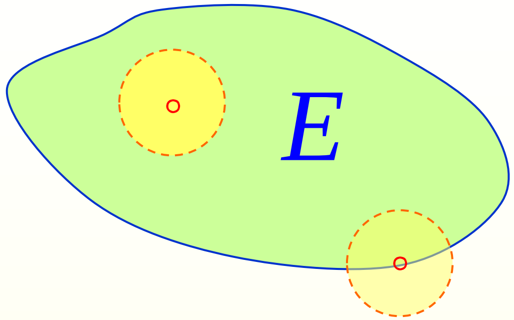
设有点集 E 及一点 P：

- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\subset E$，
  则称 P 为 E 的**内点**；
- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\cap E=\varnothing$，
  则称 P 为 E 的**外点**；
- 若对点 P 的任一邻域 $U(P)$ 既含有属于 E 的点，又含有不属于E 的点，则称 P 为 E 的**边界点**．

显然，E 的内点必属于 E，E 的外点必不属于 E，E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E．

上页 下页

(2) 聚点



若对任意给定的$\delta > 0$, 点P 的去心邻域 $\overset{\circ}{U}(P,\delta)$内总有$E$ 中的点 , 则称 P 是 E 的**聚点.**

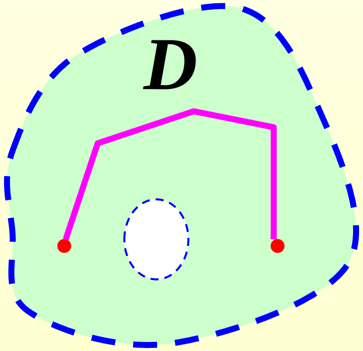
聚点可以属于 E , 也可以不属于 E (因为聚点可以为 E 的边界点)

所有聚点所成的点集称为 E 的**导集** .

上页 下页

(3) 开区域及闭区域

- 若点集 E 的点都是**内点**，则称 E 为**开集**；
- E 的边界点的全体称为 E 的**边界**, 记作 ∂E ；
- 若点集 $E \supset \partial E$, 则称 E 为**闭集**；
- 若点集 E 内任意两点都可用一完全属于 E 的折线相连，则称 E 是**连通的**；
- 连通的开集称为**开区域**, 简称**区域**；
- 开区域连同它的边界一起称为**闭区域**.

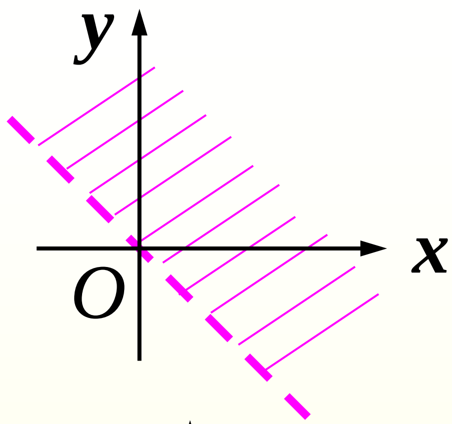


例如，在平面上

♣ $\{(x,y) \mid x+y>0\}$

♣ $\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$

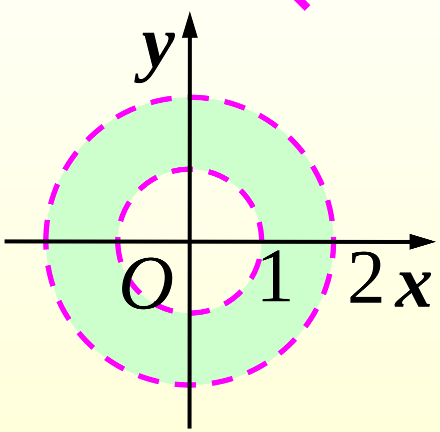
开区域

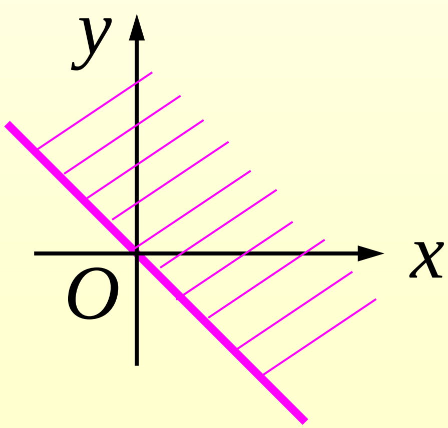


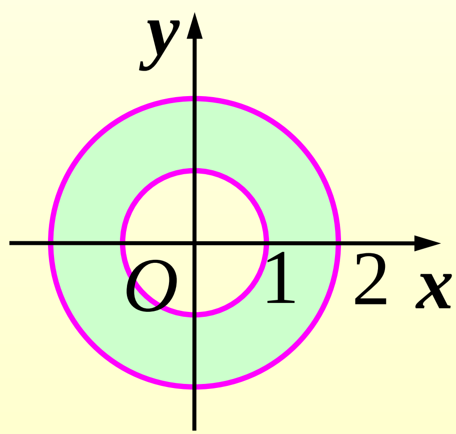
♣ $\{(x,y) \mid x+y\geq 0\}$

♣ $\{(x,y) \mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

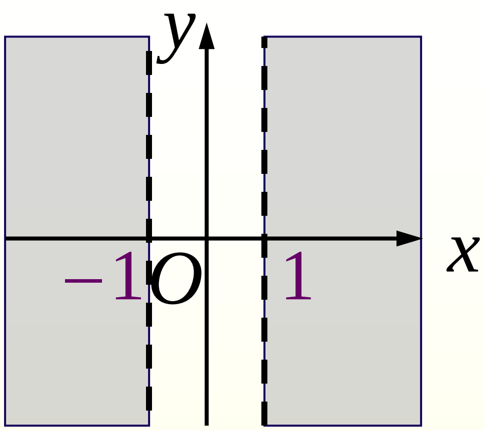
闭区域







- ♣ 整个平面 是最大的开区域，也是最大的闭区域；



- ♣ 点集 $\{(x,y)\,|\,|x|>1\}$ 是开集，但非区域 .

- 对点集E, 若存在正数 r，使一切点 $E\subset U(O,r)$,其中 O 为坐标原点，则称 E 为**有界集**，否则称为**无界集** .

*3. n 维空间

n 元有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体所构成的集合记作 $\mathbf{R}^n$, 即 $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}$

$$= \{\, (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n \,\}$$

R^n 中的每一个元素用单个粗体字母 x 表示, 即

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

任给 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n, \lambda \in \mathbf{R}$

定义:
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) \\ \lambda\,\boldsymbol{x} &= (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \cdots, \lambda\, x_n) \end{aligned}\right\} \text{线性运算}$$

定义了线性运算的R^n称为 n 维空间, 其元素称为点或 n 维向量. x_i 称为 x 的第 i 个坐标 或 第 i 个分量.

零元 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标原点或零向量.

$\mathbf{R}^n$中两点 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)$ 的**距离**定义为

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \xlongequal{\text{记作}} \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \text{ 或 } \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

特别, 点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与零元 0 的距离为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

当$n=1,2,3$时, $\|\boldsymbol{x}\|$通常记作$|\boldsymbol{x}|$.

$\mathbf{R}^n$中的变元 $\boldsymbol{x}$ 与定元 $\boldsymbol{a}$ 满足$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\to 0$,则称 $\boldsymbol{x}$ 趋于$\boldsymbol{a}$，记作 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

显然 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a} \Leftrightarrow x_i\to a_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$

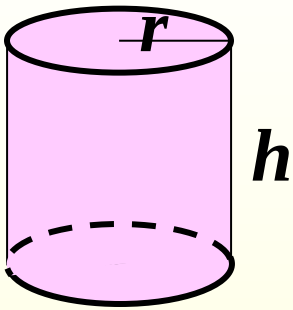
$\mathbf{R}^n$中点 $\boldsymbol{a}$ 的 δ **邻域**为

$$U(\boldsymbol{a},\delta)=\{\,\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n, \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})<\delta\,\}$$

二、多元函数的概念

引例:

- 圆柱体的体积

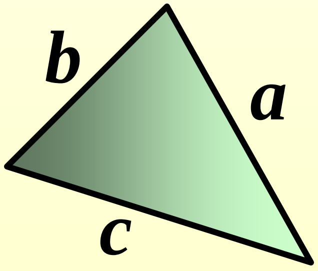


$$V = \pi r^2 h, \quad \{(r,h) \mid r>0, h>0\}$$

- 定量理想气体的压强

$$p = \frac{RT}{V} \;(R\text{为常数}), \quad \{(V,T) \mid V>0, T>T_0\}$$

- 三角形面积的海伦公式 $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\{(a,b,c) \mid a>0, b>0, c>0, a+b>c\}$$

上页 下页

定义1. 设非空点集$D \subset \mathbf{R}^n$，映射 $f: D \mapsto \mathbf{R}$ 称为定义在 D 上的 **n 元函数**，记作

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 或 } u = f(P), P \in D$$

点集 D 称为函数的**定义域**；数集 $\{u \mid u = f(P), P \in D\}$ 称为函数的**值域**.

特别地，当 $n = 2$ 时，有二元函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

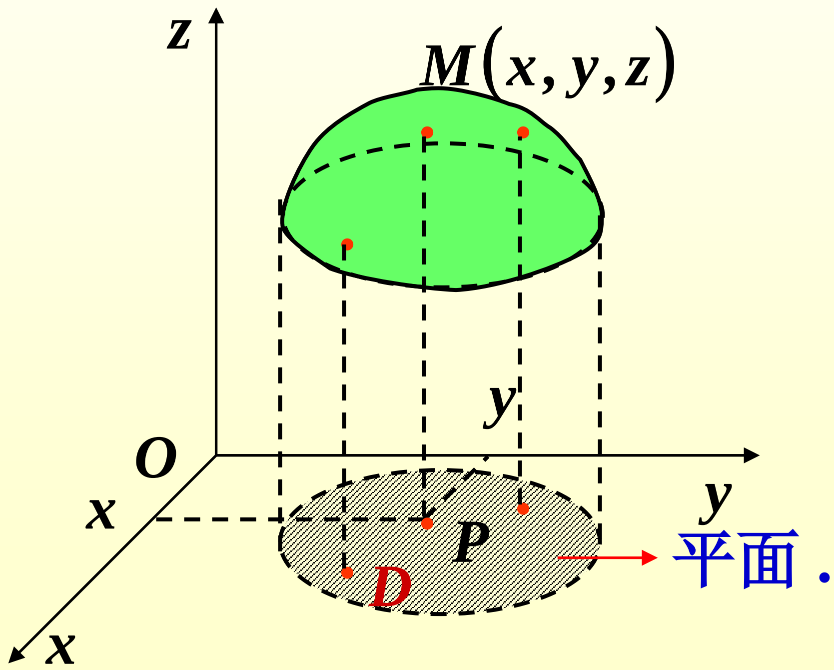
当 $n = 3$ 时，有三元函数

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D \subset \mathbf{R}^3$$

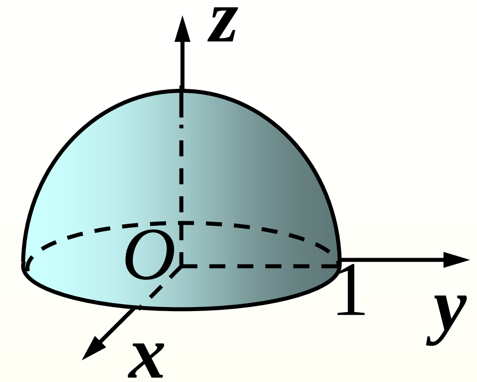
n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad u = f(P), \quad P \in D \subset \mathbf{R}^n$

说明: 二元函数 $z = f(x, y), (x, y) \in D$ 的图形一般为空间曲面 Σ.　（二元函数的几何意义）

$$z = f(x, y)$$



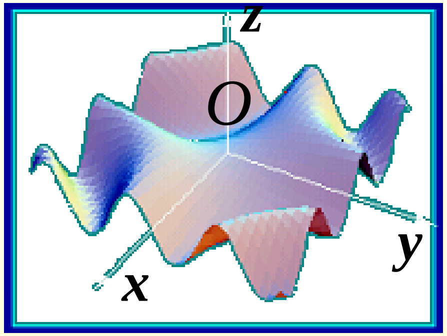
例如，二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$



定义域为圆域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

图形为中心在原点的上半球面.

又如, $z=\sin(xy),(x,y)\in\mathrm{R}^2$



三元函数 $u=\arcsin(x^2+y^2+z^2)$

定义域为单位闭球

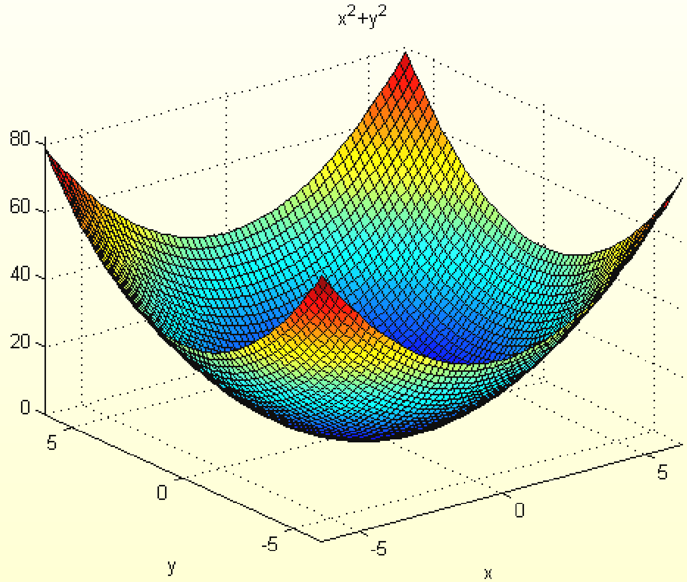
$$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

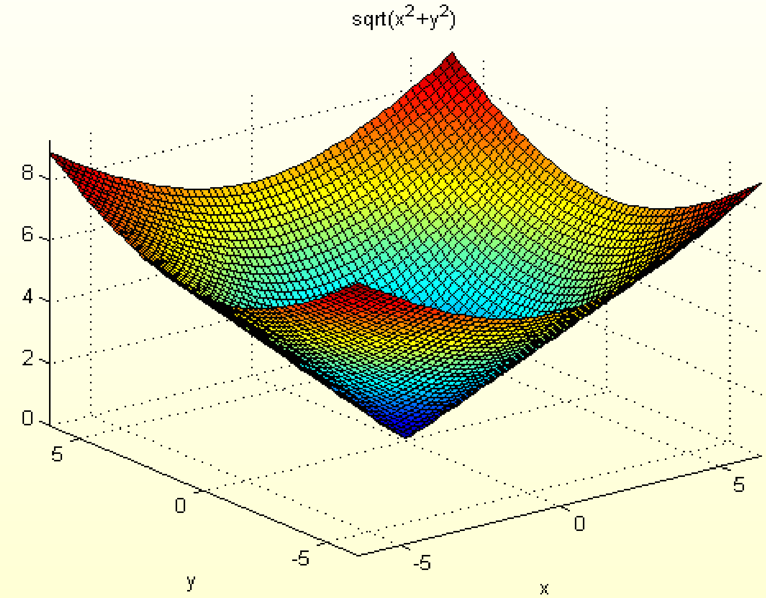
图形为 R^4 **空间中的超曲面.**

练习:

$z = x^2 + y^2$ → **旋转抛物面**

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ → **上半锥面**





三、多元函数的极限

定义2. 设 n 元函数 $f(P), P\in D\subset \mathbb{R}^n$, P_0 是 D 的聚点，若存在常数 A，对任意正数 ε，总存在正数 δ，对一切 $P\in D\cap \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$，都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A$$ （也称为 n 重极限）

当 $n=2$ 时，记 $\rho=|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

二元函数的极限可写作：

$$\lim_{\rho\to 0} f(x,y)=A \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

上页 下页

例1 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2\neq 0)$

求证: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

证 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\le x^2+y^2<\varepsilon$

只要 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, **总有**

$$|f(x,y)-0|\le x^2+y^2<\delta^2=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

注意: 二重极限存在，是指 D 上的点 $p(x,y)$ 以任何方式趋于 $p_0(x_0,y_0)$ 时，函数都无限接近于 A.

例2 设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0 \\ 0\quad\quad\quad\quad\quad, & xy=0 \end{cases}$

求证：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$ (补充)

证 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|f(x,y)-0\right|\le\left|x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right|$

$$\le|x|+|y|\le 2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$$

只要取 $\delta=\varepsilon/2$, 当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 总有

$$|f(x,y)-0|\le 2\sqrt{x^2+y^2}<2\delta=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

- **若当点 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数趋于不同值或有的极限不存在，则可以断定函数极限不存在 .**

例3 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ **在点 (0, 0) 的极限.**

解 **设 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 (0, 0)，则有**

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}+k^2\cancel{x^2}}=\frac{k}{1+k^2}$$

***k* 值不同极限不同！**

但是 **P65:9**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

故 $f(x,y)$ **在 (0,0) 点极限不存在 .**

例4 求 $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}}$

(补充)

此函数定义域不包括 x , y 轴

解 原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}\bullet\dfrac{x^2+y^2}{4x^2y^2}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)$

$=+\infty$

也可利用 $\boxed{1-\cos r^2 \sim \dfrac{r^4}{2}}$

注：多元函数的极限运算法则与一元函数的极限运算法则类似：消去致零因子、等价无穷小的代换、夹逼准则、重要极限、无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小等都可用于多元函数的极限运算。

注. 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

及 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ **不同.**

如果它们都存在, 则三者相等.

仅知其中一个存在, 推不出其他二者存在.

例如, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, 显然

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0, \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$$

但由例3 知它在(0,0)点二重极限不存在 .

四、 多元函数的连续性

定义3. 设 n 元函数 $f(P)$ 定义在 D 上, 聚点 $P_0 \in D$,

如果存在 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$

则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 **连续**, 否则称为**不连续**, 此时 P_0 称为**间断点** .

如果函数在 D 上**各点处**都连续, 则称此函数**在 D 上连续**.

$$
\text{间断点}\begin{cases}
(1)\text{无定义的点} \\
(2)\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\ \text{不}\exists \\
(3)\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)
\end{cases}
$$

例如, 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\qquad, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0 , 0) 极限不存在, 故 (0, 0)为其间断点.

又如, 函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断.

结论: 一切多元初等函数在定义区域内连续.

(能用一个式子表示的函数)

闭区域上多元连续函数有与一元函数类似的如下性质:

定理: 若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则

(1) $\exists K>0$, 使 $|f(P)|\le K$, $P\in D$; **(有界性定理)**

(2) $f(P)$ 在 D 上可取得最大值 M 及最小值 m ;

(最值定理)

(3) 对任意 $\mu\in[m,M]$, $\exists Q\in D$, 使 $f(Q)=\mu$;

(介值定理)

上页 下页

定理 如果 $f(P)$ 是初等函数,且 P_0 是 $f(P)$ 的定义域的**内点**,

则 $\boxed{\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)}$

小结　多元函数求极限的方法

(1) 利用函数的连续性;

(2)多元函数的极限运算法则与一元函数的极限运算法则类似：消去致零因子、等价无穷小的代换、夹逼准则、重要极限、无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小等都可用于多元函数的极限运算.

证明极限不存在　(据定义,选取不同的路径)

例5 **求** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$. $\boxed{\cdot\dfrac{\sqrt{xy+1}+1}{\sqrt{xy+1}+1}}$

解 **原式** $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(\sqrt{xy+1})^2-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \dfrac{1}{2}$

例6 **求** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y$

$= \lim\limits_{xy\to 0} \dfrac{\sin xy}{xy} \lim\limits_{y\to 2} y = 1\cdot 2 = 2$

例7 **求极限** (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+y}{xy}$, (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

课本例7 **课本9-1：6.(3)**

解 (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1+2}{1\cdot 2} = \dfrac{3}{2}$.

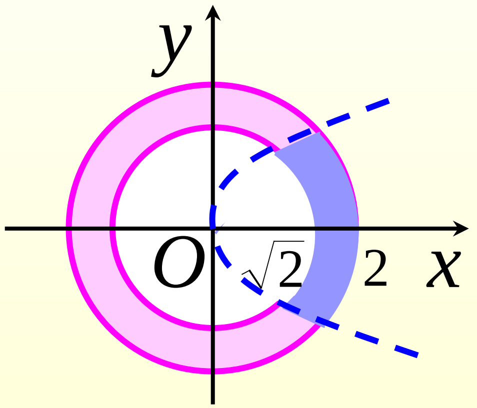
(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-xy}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} = -\dfrac{1}{4}$.

例8 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的连续域.

解 $\begin{cases} |3-x^2-y^2|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$



内容小结

1. 区域

- 邻域：$U(P_0,\delta)$, $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$
- 区域 —— 连通的开集
- R^n空间

2. 多元函数概念

n 元函数 $u=f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$P\in D\subset \mathrm{R}^n$$

常用 $\begin{cases}\text{二元函数 (图形一般为空间曲面)}\\ \text{三元函数}\end{cases}$

3. 多元函数的极限

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|PP_0|<\delta\text{时},$$
$$\text{有}\ |f(P)-A|<\varepsilon$$

4. 多元函数的连续性

1) 函数 $f(P)$在P_0连续 $\Longleftrightarrow \lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$

2) 闭区域上的多元连续函数的性质:

有界定理； 最值定理； 介值定理

3) 一切多元初等函数在定义区域内连续

备用题 **1.** 设 $\underline{f(xy, \frac{y^2}{x}) = x^2 + y^2}$, 求 $\underline{f(\frac{y^2}{x}, xy)}$.

解法1 令 $\begin{cases} xy = u \\ \dfrac{y^2}{x} = v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \sqrt[3]{uv} \\ x = \dfrac{u}{\sqrt[3]{uv}} \end{cases}$

$$\Longrightarrow f(u, v) = \frac{u^2}{(uv)^{2/3}} + (uv)^{2/3}$$

$$u = \frac{y^2}{x},\ v = xy$$

$$f(\frac{y^2}{x}, xy) = \frac{(\frac{y^2}{x})^2}{y^2} + y^2 = \frac{y^2}{x^2} + y^2$$

1．设 $f(xy, \frac{y^2}{x}) = x^2 + y^2$， 求 $f(\frac{y^2}{x}, xy)$.

$$\boxed{f(\frac{v^2}{u}, uv)}$$

解法2 令 $\begin{cases} xy = \dfrac{v^2}{u} \\ \dfrac{y^2}{x} = uv \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = v \\ x = \dfrac{v}{u} \end{cases}$

$$\Longrightarrow f(\frac{v^2}{u}, uv) = f(xy, \frac{y^2}{x}) = (\frac{v}{u})^2 + v^2$$

即 $f(\frac{y^2}{x}, xy) = \frac{y^2}{x^2} + y^2$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\dfrac{\ln(1+xy)}{x+y}$

解: 利用 $\ln(1+xy)\sim xy$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{\ln(1+xy)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x+y}$$

$$\underline{\underline{\text{取 } y = x^{\alpha}-x}}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha+2}-x^3}{x^{\alpha}}$$

$$= \lim_{x\to 0}(x^2 - x^{3-\alpha}) = \begin{cases} -1, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha < 3 \\ \infty, & \alpha > 3 \end{cases}$$

所以极限不存在.

3. 证明 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在全平面连续.

证: 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处, $f(x,y)$ 为初等函数 , 故连续.

又 $$0\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\boxed{x^2+y^2\ge 2|xy|}$$

由夹逼准则得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$$

故函数在全平面连续 .

第二节

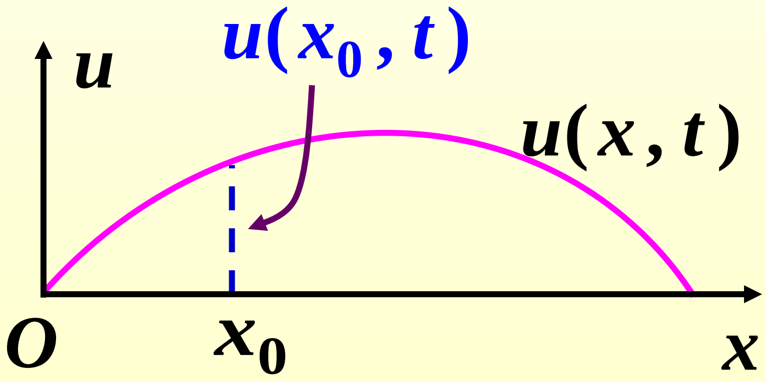
偏 导 数

一、 偏导数概念及其计算

二、高阶偏导数

一、 偏导数定义及其计算法

引例: 研究弦在点 x_0 处的振动速度与加速度 , 就是将振幅 $u(x,t)$中的 x 固定于 x_0 处, 求 $u(x_0,t)$关于 t 的一阶导数与二阶导数.



定义1. 设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0, y_0) 的某邻域内

极限 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0, y_0)对 x

的偏导数，记为 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$; $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$; $\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$;

$f_x(x_0, y_0)$; $f_1'(x_0, y_0)$.

注意: $$f_x(x_0, y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x, y_0)\right|_{x=x_0}$$

上页 下页

同样可定义对 y 的偏导数

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$$

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 或 y 偏导数存在，则该偏导数称为偏导函数，也简称为**偏导数**，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x,\ f_x(x,y),\ f_1'(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y,\ f_y(x,y),\ f_2'(x,y)$$

$f(x, y)$在(x_0, y_0)点的偏导数，就是偏导函数在该点的函数值.

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数 .

例如, 三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y,z) = ?$$

(请自己写出)

$$f_z(x,y,z) = ?$$

例1 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处的偏导数.

解法1 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$ **先求后代**

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 2\cdot 1 + 3\cdot 2 = 8, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7$$

解法2 $z\big|_{y=2} = x^2 + 6x + 4$ **先代后求**

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = (2x+6)\Big|_{x=1} = 8$$

$$z\big|_{x=1} = 1 + 3y + y^2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = (3+2y)\Big|_{y=2} = 7$$

例2 设 $z = x^y\ (x > 0,$ 且 $x \neq 1)$, **求证**

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

证: $\because\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

$$\therefore\ \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = x^y + x^y = 2z$$

例3 **求** $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ **的偏导数 .**

解: $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

例4 已知理想气体的状态方程 $pV = RT$ (R 为常数)，

求证: $\dfrac{\partial p}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial p}=-1$

证 $p=\dfrac{RT}{V}$, $\quad \dfrac{\partial p}{\partial V}=-\dfrac{RT}{V^2}$

$V=\dfrac{RT}{p}$, $\quad \dfrac{\partial V}{\partial T}=\dfrac{R}{p}$

$T=\dfrac{pV}{R}$, $\quad \dfrac{\partial T}{\partial p}=\dfrac{V}{R}$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{pV}=-1$$

说明: 此例表明，偏导数记号是一个整体记号，不能看作分子与分母的商！

二元函数 $z = f(x,y)$ 偏导数的几何意义:

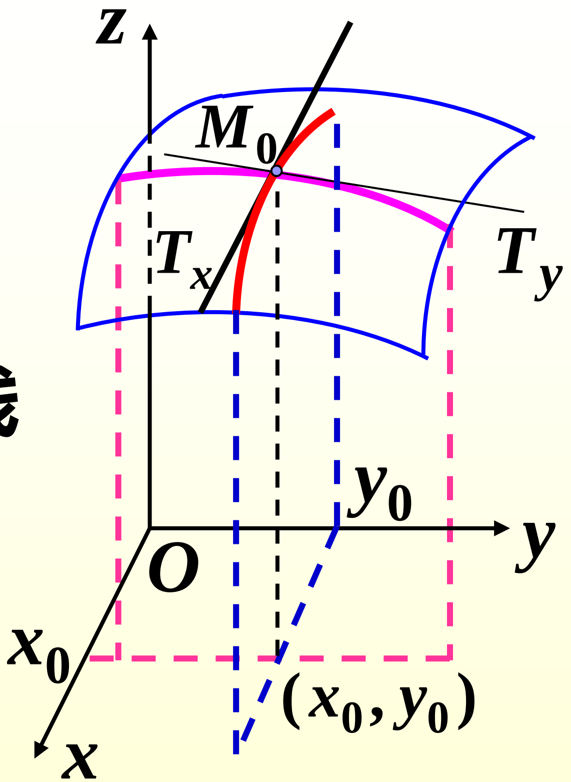
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 M_0 处的切线

M_0T_x 对 x 轴的斜率.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0,y)\right|_{y=y_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = x_0 \end{cases}$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.



例5 求曲线 $\begin{cases} z = \dfrac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ **课本9-2：5**

在点$M_0(2,4,5)$处的切线对 x轴的倾角.

解 $\because \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{2} \quad \therefore \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=4\\z=5}} = 1$

由偏导数的几何意义,切线对x轴的倾角 $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

注意：函数在某点各偏导数都存在，

但在该点**不一定连续**.

例如，

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

显然

$$f_x(0, 0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, 0)\Big|_{x=0} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(0, y)\Big|_{y=0} = 0$$

在上节已证 $f(x, y)$ 在点(0 , 0)并不连续!

二、高阶偏导数

设 $z = f(x, y)$在区域 D 内存在偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,y)$$

若这两个偏导数仍存在偏导数, 则称它们是$z = f(x, y)$ 的二阶偏导数 . 按求导顺序不同, 有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y)$$

类似可以定义更高阶的偏导数.

例如，$z = f(x, y)$ 关于 x 的三阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

$z = f(x, y)$ 关于 x 的 $n-1$ 阶偏导数，再关于 y 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}$$

例6 **求函数** $z=e^{x+2y}$ **的二阶偏导数及** $\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$.

解 $\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+2y}}$ $\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{x+2y}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x+2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2e^{x+2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=2e^{x+2y}$$

注意:此处 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$**,但这一结论并不总成立.**

例如 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ **(补充)**

$$f_x(x,y)=\begin{cases} \boxed{y\boxed{\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases} \boxed{x\boxed{\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy}(0,0)&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\boxed{f_x(0,\Delta y)}-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1 \\ f_{yx}(0,0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{f_y(\Delta x,0)}-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1 \end{aligned}\right\}\text{二者不等}$$

定理. 若 $f_{xy}(x,y)$和 $f_{yx}(x,y)$都在点(x_0,y_0)连续, 则

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

(证明略)

本定理对 n 元函数的高阶混合导数也成立.

例如, 对三元函数 $u=f(x,y,z)$, 当三阶混合偏导数在点 (x,y,z) 连续时, 有

$$f_{xyz}(x,y,z)=f_{yzx}(x,y,z)=f_{zxy}(x,y,z)$$
$$=f_{xzy}(x,y,z)=f_{yxz}(x,y,z)=f_{zyx}(x,y,z)$$

说明: 因为初等函数的偏导数仍为初等函数, 而初等函数在其定义区域内是连续的, 故求初等函数的高阶导数可以选择方便的求导顺序.

定理. 若 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 都在点 $(x_0\,,y_0)$ 连续，**则**

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

证 令 $F(\Delta x,\Delta y) = f(\underline{x_0+\Delta x}, y_0+\Delta y) - f(\underline{x_0+\Delta x}, y_0)$

$$- f(\underline{x_0}, y_0+\Delta y) + f(\underline{x_0}, y_0)$$

又令 $\varphi(x) = f(x, y_0+\Delta y) - f(x, y_0)$

$$\psi(y) = f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0, y)$$

则 $F(\Delta x,\Delta y) = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)$

$$= \varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x \qquad (0<\theta_1<1)$$

$$= [f_x(x_0+\theta_1\Delta x, \underline{y_0+\Delta y}) - f_x(x_0+\theta_1\Delta x, \underline{y_0})]\Delta x$$

$$= f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\,\Delta y \quad (0<\theta_1, \theta_2<1)$$

上页 下页

同样

$$F(\Delta x,\Delta y)=f(x_0+\Delta x,\underline{y_0+\Delta y})-f(x_0+\Delta x,\underline{y_0})$$

$$-f(x_0,\underline{y_0+\Delta y})+f(x_0,\underline{y_0})$$

$$=\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)$$

$$=f_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\theta_4\Delta y)\Delta x\,\Delta y$$

$$(0<\theta_3,\theta_4<1)$$

$$\therefore\quad f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)$$

$$=f_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\theta_4\Delta y)$$

因 $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续, 故令 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ 得 $\quad f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

例7 证明函数 $u=\dfrac{1}{r},\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足拉普拉斯

方程 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

证 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial x}=-\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

利用对称性，有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{3y^2}{r^5},\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{3z^2}{r^5}$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(\underbrace{\boxed{x^2+y^2+z^2}}_{=r^2})}{r^5}=0$$

上页 下页

内容小结

1. 偏导数的概念及有关结论

- 定义; 记号; 几何意义
- 函数在一点偏导数存在 $\not\Longrightarrow$ 函数在此点连续
- 混合偏导数连续 $\Longrightarrow$ 与求导顺序无关

2. 偏导数的计算方法

- 求一点处偏导数的方法 $\begin{cases} \text{先代后求} \\ \text{先求后代} \\ \text{利用定义} \end{cases}$
- 求高阶偏导数的方法 —— 逐次求导法

(与求导顺序无关时, 应选择方便的求导顺序)

补充 设 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$ 确定 u 是 x, y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微，$p(t),\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，求 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x)\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}-p(y)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{p(x)}{1-\varphi'(u)}\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{-p(y)}{1-\varphi'(u)}\end{aligned}\right.$$

$$\therefore\quad p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\left[\,p(y)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x)\frac{\partial u}{\partial y}\,\right]=0$$

第三节 全微分

一元函数 $y=f(x)$ 的微分

$$\Delta y = \underline{A\Delta x} + o(\Delta x)$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x \xrightarrow{\text{应用}} \begin{cases} \text{近似计算} \\ \text{估计误差} \end{cases}$$

本节内容:

一、全微分的定义

***二、全微分在近似计算中的应用**

一、全微分的定义

定义: 如果函数 $z=f(x,y)$ 在定义域 D 的内点 (x,y) 处全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ 可表示成

$$\Delta z = \boxed{A\Delta x + B\Delta y} + o(\rho), \qquad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$，仅与 x, y 有关，则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) **可微分**，$A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的**全微分**，记作

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y$$

注：怎样证明可微分或不可微分

若函数在区域 D 内各点都可微分，则称此函数**在 D 内可微分**.

当函数可微分时：

$$\lim_{\rho\to 0}\Delta z = \lim_{\rho\to 0}\left[(A\Delta x + B\Delta y) + o(\rho)\right] = 0$$

得 $$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)$$

即 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分 $\Longrightarrow$ 函数在该点连续

上页 下页

定理1(必要条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，则该函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在,且有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

证:因函数在点 (x,y) 可微分, 故 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$,

令 $\Delta y=0$, 得到对 x 的偏增量

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$$

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A$$

同样可证 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$, 因此有 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

注：在(0,0)处极限、连续、偏导、可微分情况

注意： 定理1 的**逆定理不成立**．即：

偏导数存在 **函数不一定可微分**!

反例： 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

易知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\Big/\rho=\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\not\longrightarrow 0$$

$\neq o(\rho)$ 因此,函数在点 (0,0) 不可微分．

定理2 **(充分条件)若函数** $z = f(x,y)$ **的偏导数** $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

在点 (x,y) 连续, **则函数在该点可微分**.

证: $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)]$$

$$+ [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$$

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

$$\boxed{(0 < \theta_1, \theta_2 < 1)}$$

$$= [f_x(x,y)+\alpha]\Delta x + [f_y(x,y)+\beta]\Delta y$$

$$\left(\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \alpha = 0, \quad \lim_{\Delta y\to 0} \beta = 0 \right)$$

$$\Delta z = \cdots = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

$$\left(\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \alpha = 0, \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \beta = 0 \right)$$

注意到 $\left| \dfrac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\rho} \right| \le |\alpha| + |\beta|$，故有

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + o(\rho)$$

所以函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分.

上面两个定理给出了可微分与偏导数的关系:

(1) 函数可微分 $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ 偏导数存在

(2) 偏导数连续 $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ 函数可微分

推广: 类似可讨论三元及三元以上函数的可微分问题.

例如, 三元函数 $u = f(x, y, z)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

习惯上把自变量的增量用微分表示,

于是有下述**叠加原理**

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

例1 计算函数 $z = e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y e^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x e^{xy}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}} = e^2, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}} = 2e^2$$

$$\therefore \quad \left. dz \right|_{\substack{x=2\\y=1}} = e^2 dx + 2e^2 dy$$

例2 计算函数 $u = x + \sin\dfrac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解 $du = 1 \cdot dx + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + z e^{yz}\right) dy + y e^{yz} dz$

*二、全微分在近似计算中的应用

1. 近似计算

由全微分定义

$$\Delta z = \underbrace{f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y}_{\mathrm{d}\,z} + o(\rho)$$

可知当 $|\Delta x|$ 及 $|\Delta y|$ 较小时, 有近似等式:

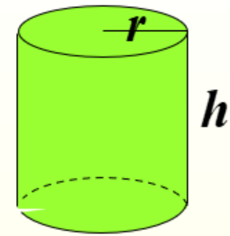
$$\Delta z \approx \mathrm{d}\,z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于误差分析或近似计算)

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算)

例3 有一圆柱体受压后发生形变,半径由 20cm 增大到 20.05cm , 高度由100cm 减少到 99cm , 求此圆柱体体积的近似改变量.



解 已知 $V=\pi r^2 h$, 则

$$\Delta V \approx 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

$$r = 20,\quad h = 100,$$

$$\Delta r = 0.05,\quad \Delta h = -1$$

$$\Delta V \approx 2\pi \times 20 \times 100 \times 0.05 + \pi \times 20^2 \times (-1)$$

$$= -200\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$

即受压后圆柱体体积减少了$200\pi\ \mathrm{cm}^3$.

例4 计算 $1.04^{2.02}$ 的近似值.

解 设 $f(x,y)=x^y$,则

$$f_x(x,y)=yx^{y-1},\quad f_y(x,y)=x^y\ln x$$

取 $x=1,\ y=2,\ \Delta x=0.04,\ \Delta y=0.02$

则 $$1.04^{2.02}=f(1.04,\ 2.02)$$

$$\approx f(1,2)+f_x(1,2)\Delta x+f_y(1,2)\Delta y$$

$$=1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08$$

2. 误差估计

利用 $\Delta z \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

令 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 分别表示 x, y, z 的绝对误差界，则

z 的绝对误差界约为

$$\delta_z = |f_x(x,y)|\delta_x + |f_y(x,y)|\delta_y$$

z 的相对误差界约为

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left|\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_x + \left|\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_y$$

特别注意

(1) $z = xy$ 时，$\dfrac{\delta_z}{|z|} = \dfrac{\delta_x}{|x|} + \dfrac{\delta_y}{|y|}$

(2) $z = \dfrac{y}{x}$ 时，

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left|(-\frac{y}{x^2})\cdot\frac{x}{y}\right|\delta_x + \left|\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{y}\right|\delta_y = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}$$

- **乘除后的结果相对误差变大**
- **很小的数不能做除数**

类似可以推广到三元及三元以上的情形.

例5 利用公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 计算三角形面积.现测得

$$a=12.5\pm0.01,\ b=8.3\pm0.01,\ C=30^\circ\pm0.1^\circ$$

求计算面积时的绝对误差与相对误差.

解

$$\delta_S=\left|\frac{\partial S}{\partial a}\right|\delta_a+\left|\frac{\partial S}{\partial b}\right|\delta_b+\left|\frac{\partial S}{\partial C}\right|\delta_C$$

$$=\frac{1}{2}|b\sin C|\delta_a+\frac{1}{2}|a\sin C|\delta_b+\frac{1}{2}|ab\cos C|\delta_C$$

$$a=12.5,\ b=8.3,\ C=30^\circ,\ \delta_a=\delta_b=0.01,\ \delta_C=\frac{\pi}{1800}$$

故绝对误差约为 $\delta_s=0.13$

又 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times12.5\times8.3\times\sin30^\circ\approx25.94$

所以 S 的相对误差约为 $\dfrac{\delta_s}{|S|}=\dfrac{0.13}{25.94}\approx0.5\,\%$

例6 在直流电路中，测得电压 $U = 24\ \text{V}$，相对误差为 0.3%；测得电流 $I = 6\text{A}$，相对误差为 0.5 %，求用欧姆定律计算电阻为 R 时产生的相对误差和绝对误差 .

解 由欧姆定律可知 $R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{24}{6} = 4(\Omega)$

所以 R 的相对误差约为

$$\frac{\delta_R}{|R|} = \frac{\delta_U}{|U|} + \frac{\delta_I}{|I|} = 0.3\ \% + 0.5\ \% = 0.8\ \%$$

R 的绝对误差约为

$$\delta_R = |R| \times 0.8\ \% = 0.032\ (\Omega)$$

上页 下页

内容小结

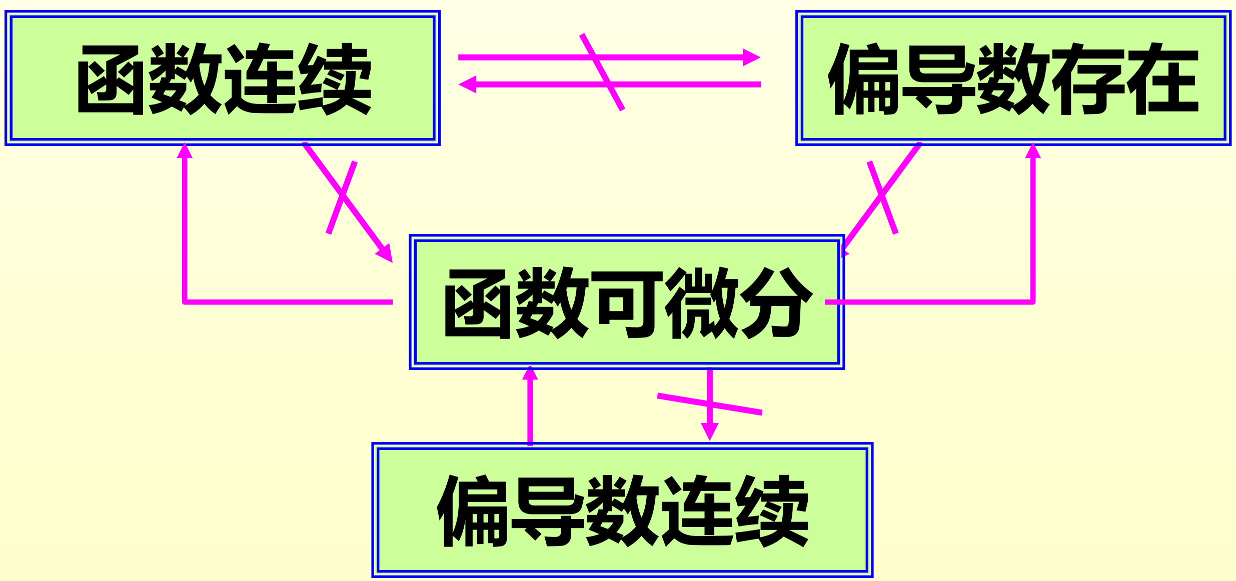
1. 全微分定义: (以 $z = f(x, y)$ 为例) 定义

$$\Delta z = \underline{f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y} + o(\rho)$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\mathrm{d}z = f_x(x, y)\mathrm{d}x + f_y(x, y)\mathrm{d}y$$

2. 重要关系:



3. 微分应用

- **近似计算**

$$\Delta z \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

$$f(x+\Delta x\,,\, y+\Delta y)$$

$$\approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

- **估计误差**

绝对误差 $\delta_z = |f_x(x,y)|\delta_x + |f_y(x,y)|\delta_y$

相对误差 $\dfrac{\delta_z}{|z|} = \left|\dfrac{f_x(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_x + \left|\dfrac{f_y(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_y$

思考与练习 1. P78 题5； P132 题 1

2. 选择题

函数 $z=f(x,y)$在 (x_0,y_0) 可微分的充分条件是(D)

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续;

(B) $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$在 (x_0,y_0)的某邻域内存在；

(C) $\Delta z - f'_x(x,y)\Delta x - f'_y(x,y)\Delta y$

当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$时是无穷小量；

(D) $\dfrac{\Delta z - f'_x(x,y)\Delta x - f'_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$时是无穷小量.

结束 上页 下页

4. 设$f(x,y,z)=\dfrac{x\cos y+y\cos z+z\cos x}{1+\cos x+\cos y+\cos z}$，求$\mathrm{d}f\big|_{(0,0,0)}$.

解 $\because\ f(x,0,0)=\dfrac{x}{3+\cos x}$

注意: x, y, z 具有轮换对称性

$\therefore\ f_x(0,0,0)=\left(\dfrac{x}{3+\cos x}\right)'\Bigg|_{x=0}=\dfrac{1}{4}$

利用轮换对称性，可得

$$f_y(0,0,0)=f_z(0,0,0)=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \mathrm{d}f\big|_{(0,0,0)}=f_y(0,0,0)\mathrm{d}x+f_y(0,0,0)\mathrm{d}y+f_z(0,0,0)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$$

5. **已知** $z=\arctan\frac{x+y}{x-y}$, 求$\mathrm{d}z$.

答案 $$\mathrm{d}z=\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

备用题

证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在点 (0,0) 连续且偏导数存在, 但偏导数在点 (0,0) 不连续, 而 $f(x,y)$ 在点 (0,0) 可微分.

证: 1) 因 $\left| xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le |xy|$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$

故函数在点 (0, 0) 连续 ;

2) $\because\ f(x,0)\equiv 0,\ \therefore\ f_x(0,0)=0;$ $\qquad f_y(0,0)=0.$

3) 当$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$f_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当点$P(x,y)$沿射线 $y=|x|$ 趋于$(0,0)$时,

$$\lim_{(x,|x|)\to(0,0)} f_x(x,y)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(|x|\sin\frac{1}{\sqrt{2}|x|}-\frac{|x|^3}{2\sqrt{2}|x|^3}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|}\right)$$

极限不存在，$\therefore\ f_x(x,y)$在点$(0,0)$不连续；

同理，$f_y(x,y)$在点$(0,0)$也不连续.

结束 题目 上页 下页

4) **下面证明** $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ **可微分:**

令 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, **则**

$$\left|\frac{\Delta f - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\rho}\right|$$

$$=\left|\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\rho}\sin\frac{1}{\rho}\right| \le |\Delta x| \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

$\therefore\ f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微 .

说明: 此题表明, 偏导数连续只是可微分的充分条件.

结束 题目 上页 下页