## 一、泰勒级数

复习

若函数 $f(x)$在 $x_0$某邻域内具有任意阶导数，则

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+\cdots$$

称为函数$f(x)$的泰勒级数.

特别的，在泰勒级数中,若 $x_0=0$, 则

$$\boxed{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots}$$

称为麦克劳林级数.

**定理** 设函数$f(x)$在点$x_0$的某一邻域$U(x_0)$内具有各阶导数,则$f(x)$在该邻域内能展开成泰勒级数的**充要条件**是

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \quad (x\in U(x_0)).$$

**麦克劳林级数的性质:**

函数若能展开成$x$的幂级数,则展开式是唯一的,且一定有

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\cdots}$$

## 二、函数展开成幂级数

若在 $x=0$ 处某阶导数不存在，就停止进行，此即说明函数不能展开成幂级数

**1.直接展开法** 其步骤如下：

(一)依次求出 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x), \cdots$

(二)求出： $f(0), f'(0), f''(0), \cdots, f^{(n)}(0), \cdots$

(三)写出幂级数：$f(0)+f'(0)x+f''(0)\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(0)\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$

并求出收敛半径$R$.

(四)考察当$x\in(-R,R)$时，$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$（$\xi$在0与$x$之间）

若$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，则

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad |x|<R$$

若极限不为零，则函数不能展开成幂级数.

## 2.间接展开法

**常用的幂级数展开式：**

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \qquad |x|<1$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad |x|<+\infty$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5\ldots!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

$$|x|<+\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \qquad |x|<+\infty$$

上页 下页

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots \qquad -1<x\le 1$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$-1<x<1$$

**注** 若$f(x)$在$(-R,R)$**内已得到展式：**$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, x\in(-R,R).$

**而级数** $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=R$(或$x=-R$)**处仍收敛，**

且$f(x)$在$x=R$(或$-R$)**处连续，**

**则展式** $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在$x=R$(或$x=-R$)**处也成立.**

**注意：经过求导或求积后得到的展式，必须考虑端点处的情况.**

# 第七节

# 傅里叶级数

一、三角级数及三角函数系的正交性

二、函数展开成傅里叶级数

三、正弦级数和余弦级数

# 一、三角级数及三角函数系的正交性

简单的周期运动：$y = A\sin(\omega t + \varphi)$ （谐波函数）

（$A$为振幅，$\omega$为角频率，$\varphi$为初相）

复杂的周期运动：$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)}$

（谐波迭加）

$$\underline{A_n \sin\varphi_n} \cos \underline{n\omega t} + \underline{A_n \cos\varphi_n} \sin \overline{n\omega t}$$

令 $\dfrac{a_0}{2} = A_0,\quad a_n = A_n \sin\varphi_n,\quad b_n = A_n \cos\varphi_n,\quad \omega t = x$

得函数项级数 $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

称上述形式的级数为**三角级数**.

**定理 1.** **组成三角级数的函数系**

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上 **正交**， **即其中任意两个不同的函数之积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于 0 .**

**证:** $\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=0 \qquad (n=1,2,\cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$\cos kx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x\right]\mathrm{d}x=0 \quad (k\neq n)$$

**同理可证：** $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (k\neq n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x=0$$

但是在三角函数系中两个相同的函数的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分不等于 0． 且有

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1\,\mathrm{d}x = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \pi \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \pi$$

$$\boxed{\cos^2 nx = \frac{1+\cos 2nx}{2}, \quad \sin^2 nx = \frac{1-\cos 2nx}{2}}$$

目录 上页 下页

# 二、函数展开成傅里叶级数

**定理 2.** 设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad ①$$

右端级数可逐项积分，则有

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

**证:** 由定理条件，对①在 $[-\pi,\pi]$ 逐项积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)$$

$$=a_0\pi$$

上页 下页

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x = a_k\,\pi$$

(利用正交性)

$$\therefore \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

类似地, 用 $\sin kx$ 乘 ① 式两边, 再逐项积分可得

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad ①$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

---

由公式 ② 确定的 $a_n$ , $b_n$称为函数 $f(x)$的**傅里叶系数**； 以$f(x)$的傅里叶系数为系数的三角级数 ① 称为 $f(x)$ 的**傅里叶级数** .

傅里叶，J. -B. -J.

**定理3 (收敛定理, 展开定理)** 设 $f(x)$ 是周期为$2\pi$ 的周期函数, 并满足狄利克雷( Dirichlet )条件:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛 , 且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为连续点}\\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{ 为间断点}\end{cases}$$

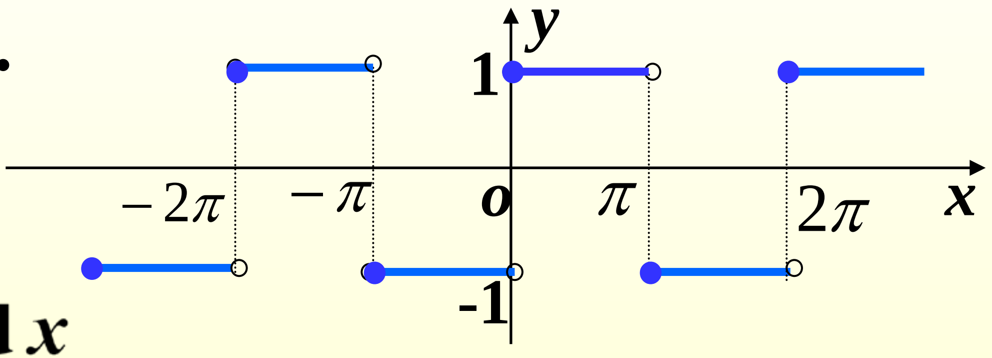
其中 $a_n, b_n$ 为 $f(x)$ 的傅里叶系数 . ( 证明略 )

**注意:** 函数展成傅里叶级数的条件比展成幂级数的条件低得多.

**例1.** 设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.




**解:** 先求傅里叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=0\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

上页 下页

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx \,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nx \,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & \text{当} n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0 & \text{当} n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\ \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots\ \right]$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots)$$

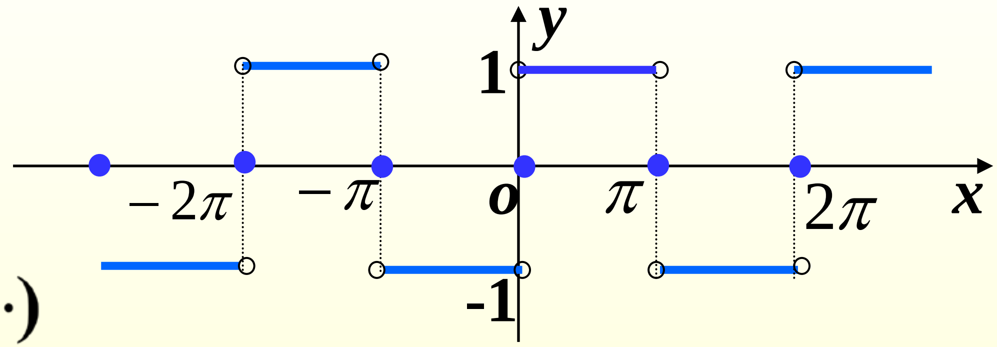
上页 下页

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots)$$

**说明:**

1) 根据收敛定理可知,

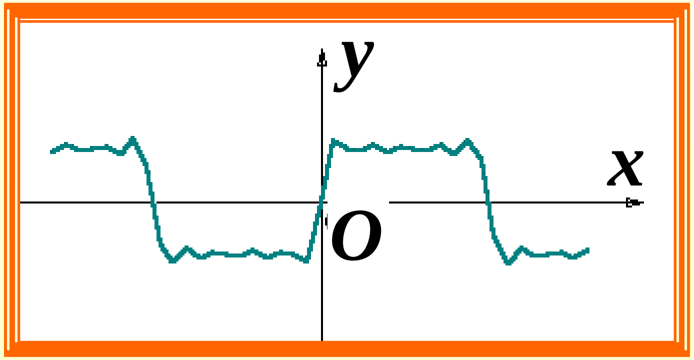



当 $x=k\pi\ \ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

时,级数收敛于 $\dfrac{-1+1}{2}=0$

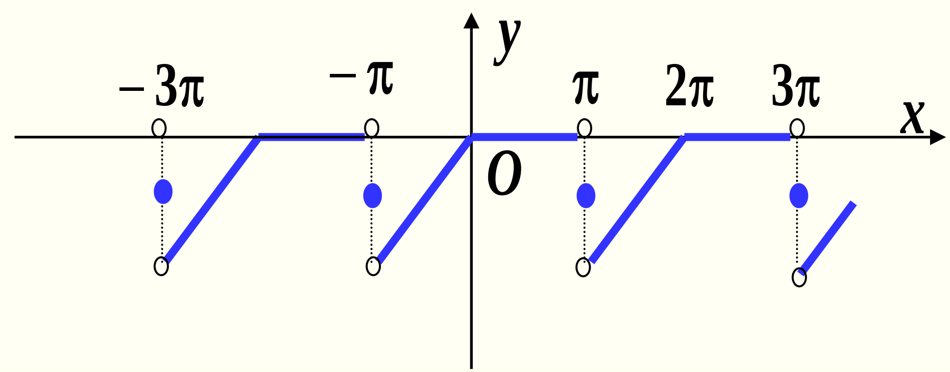
2) 傅里叶级数的部分和逼近

$f(x)$ 的情况见右图.



**例2.** 设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\le x<0 \\ 0, & 0\le x<\pi \end{cases}$$




将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

**解:**

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}$$

上页 下页

$$a_n = \frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi} = \begin{cases} \dfrac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x) = \frac{-\pi}{4} + \left(\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x +$$

$$+\left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}\sin 4x +$$

$$+\left(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x\right) - \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq (2k-1)\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

**说明:** 当 $x = (2k-1)\pi$ 时, 级数收敛于 $\dfrac{0+(-\pi)}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$ 返回上页

# 定义在$[-\pi,\pi)$上的函数 $f(x)$的傅里叶级数展开法

$$f(x),\quad x\in[-\pi,\pi)$$

$\Downarrow$ 周期延拓

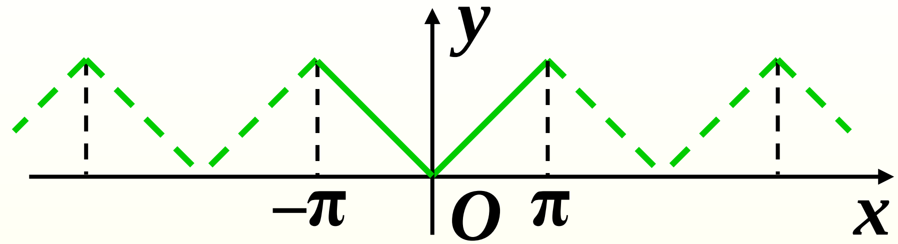
$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[-\pi,\pi) \\ f(x-2k\pi), & \text{其它} \end{cases}$$

$\Downarrow$ 傅里叶展开

$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的傅里叶级数

**例3.** 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展成傅里叶级数.

**解:** 将 $f(x)$ 延拓成以 $2\pi$ 为周期的函数 $F(x)$，则




$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0\quad, & n = 2k \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

$$(-\pi \le x \le \pi)$$

**说明：利用此展式可求出几个特殊的级数的和.**

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$ , 得

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$$

设 $\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots,\quad \sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$

$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots,\qquad \sigma_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$

已知 $\sigma_1 = \frac{\pi^2}{8}$

$$\because\ \sigma_2 = \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4},\qquad \therefore\ \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{3} = \frac{\pi^2}{24}$$

又 $$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$

## 三、正弦级数和余弦级数

### 1. 周期为2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

**定理4．** 对周期为 2π 的奇函数 $f(x)$，其傅里叶级数为正弦级数，它的傅里叶系数为

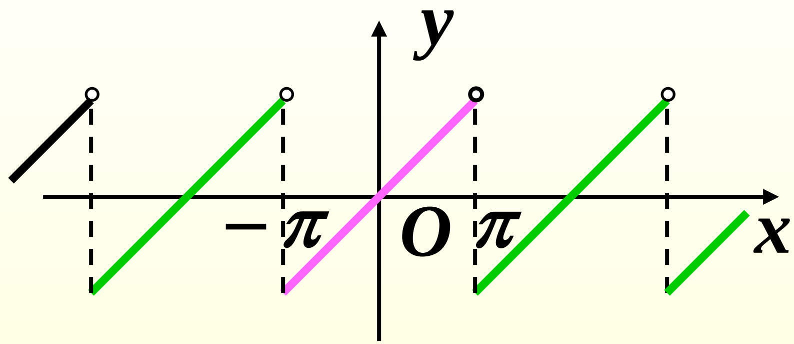
$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

周期为2π的偶函数 $f(x)$，其傅里叶级数为余弦级数，它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, 3, \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

**例4.** 设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数,它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$,将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

**解:** 若不计 $x=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$, 则 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的奇函数, 因此




$$a_n = 0 \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

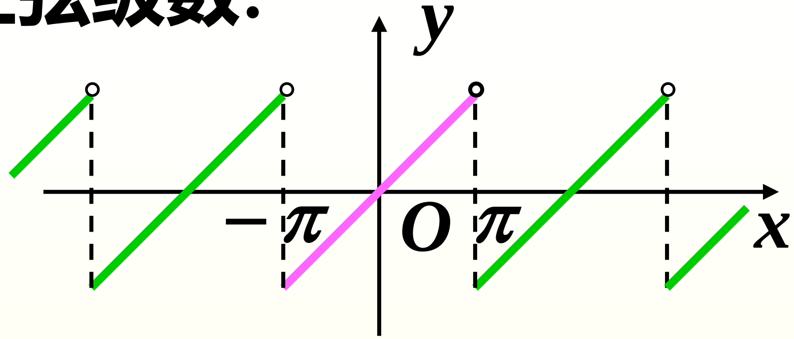
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]\Bigg|_0^\pi$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

上页 下页

根据收敛定理可得 $f(x)$ 的正弦级数:



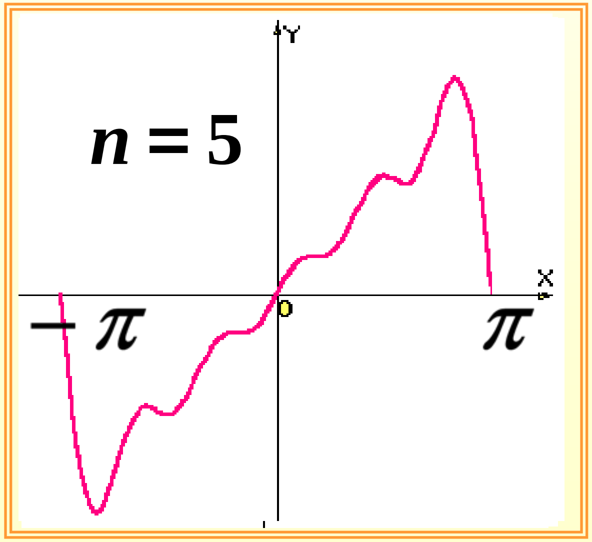

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$=2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots)$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq(2k+1)\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

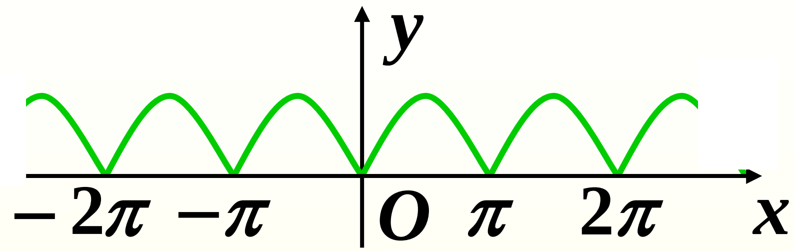
在$[-\pi,\pi)$上级数的部分和

逼近 $f(x)$ 的情况见右图.



**例5.** 将周期函数 $u(t)=|E\sin t|$ 展成傅里叶级数, 其中 $E$ 为正常数 .

**解:** $u(t)$是周期为2π 的周期偶函数 , 因此




为便于计算, 将周期取为2π

$$b_n=0 \quad (n=1,2,\cdots);$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{4E}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\cos nt\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)t-\sin(n-1)t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)t - \sin(n-1)t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4E}{(4k^2-1)\pi} & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$a_1 = \frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t\,\mathrm{d}\,t = 0$$

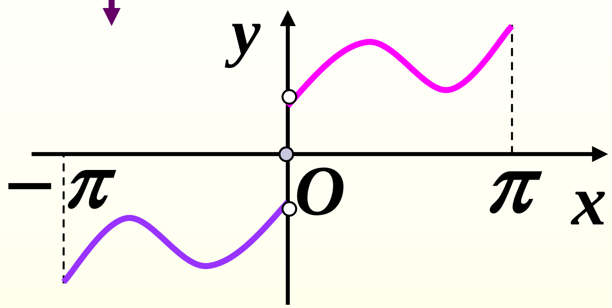
$$\therefore\ u(t) = \frac{2E}{\pi} - \frac{4E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$$

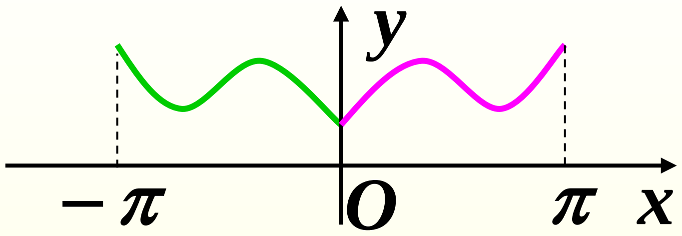
$$= \frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos 2t - \frac{1}{15}\cos 4t - \frac{1}{35}\cos 6t - \cdots\right)$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$

## 2. 在(0,π]上的函数展成正弦级数与余弦级数

奇延拓 $f(x),\ x\in(0,\pi]$ 偶延拓




$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

$\Downarrow$

周期延拓 $F(x)$

$\Downarrow$

$f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上展成正弦级数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

$\Downarrow$

周期延拓 $F(x)$

$\Downarrow$

$f(x)$ 在 $(0,\pi]$上展成余弦级数

上页 下页

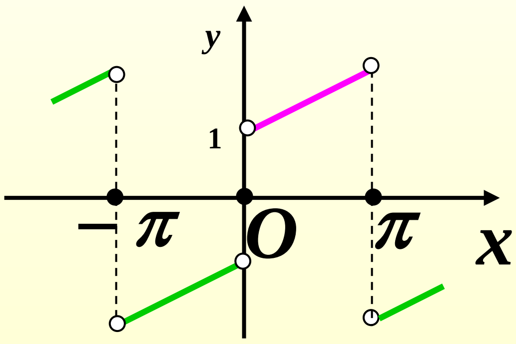
**例6.** 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le \pi)$ 分别展成正弦级数与余弦级数 .

**解:** 先求正弦级数. 去掉端点, 将 $f(x)$ 作奇周期延拓,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

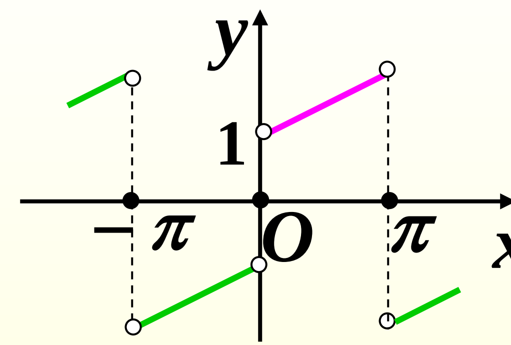
$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi\right)$$




$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\[2ex] -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

上页 下页

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{\pi + 2}{2k - 1}, & n = 2k - 1 \\ -\dfrac{1}{k}, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$



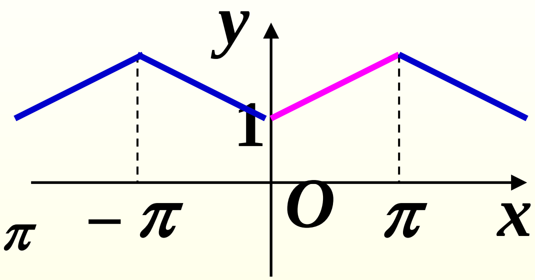

**因此得**

$$x + 1 = \frac{2}{\pi}\left[(\pi + 2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{\pi + 2}{3}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \cdots\right] \quad (0 < x < \pi)$$

**注意: 在端点 $x = 0, \pi$ , 级数的和为0 , 与给定函数 $f(x) = x + 1$ 的值不同 .**

再求余弦级数. 将 $f(x)$ 作偶周期延拓，则有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\pi+2$$




$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

上页 下页

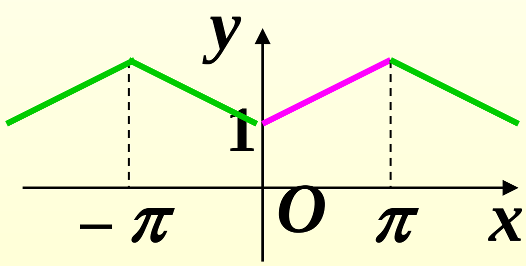
$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]$$

$$(0\le x\le \pi)$$

**说明:** 令 $x=0$ 可得

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$




即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

# 内容小结

## 1. 周期为 2π 的函数的傅里叶级数及收敛定理

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad (x\neq \text{间断点})$$

其中
$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

**注意:** 若 $x_0$ 为间断点, 则级数收敛于 $\dfrac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

## 2. 周期为 $2\pi$ 的奇、偶函数的傅里叶级数

- 奇函数 $\longrightarrow$ 正弦级数
- 偶函数 $\longrightarrow$ 余弦级数

## 3. 在 $[0, \pi]$ 上函数的傅里叶展开法

- 作奇周期延拓，展开为正弦级数
- 作偶周期延拓，展开为余弦级数

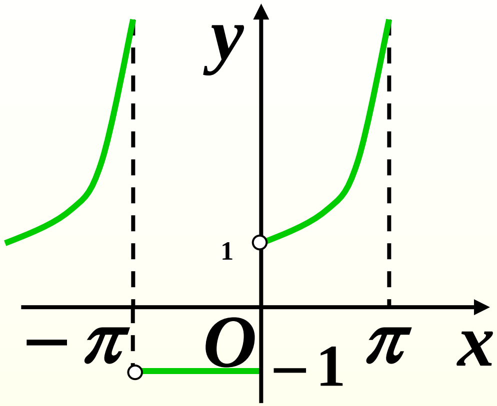
## 思考与练习

1. 在 $[0, \pi]$ 上的函数的傅里叶展开法唯一吗？

答: 不唯一，延拓方式不同级数就不同 .

**2.设周期函数在一个周期内的表达式为**

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$$




**则它的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于** $\underline{\pi^2/2}$，**在 $x=4\pi$ 处收敛于** $\underline{\quad 0\quad}$ .

**提示:**

$$\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{f(4\pi^-)+f(4\pi^+)}{2}=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{-1+1}{2}$$

**3.** 设 $f(x)=\pi x-x^2,\ 0<x<\pi$，又设 $S(x)$ 是 $f(x)$在 $(0,\pi)$内以$2\pi$为周期的正弦级数展开式的和函数，求当 $x\in(\pi,2\pi)$时$S(x)$的表达式 .

**解:** 由题设可知应对$f(x)$作奇延拓:

$$F(x)=\begin{cases}\pi x-x^2, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ \pi x+x^2, & -\pi<x<0\end{cases}$$

在$(-\pi,\pi)$上, $S(x)=F(x)$; 在$(\pi,2\pi)$上, 由周期性:

$$S(x)=S(x-2\pi)$$

$$x-2\pi\in(-\pi,0)$$


定义域

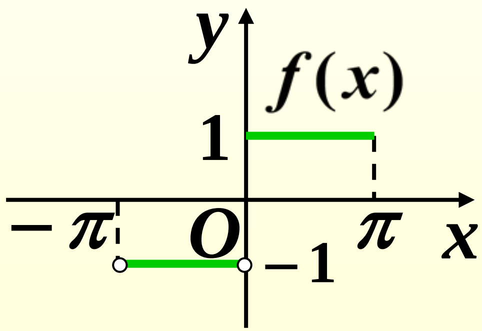
$$=\pi(x-2\pi)+(x-2\pi)^2$$

$$=x^2-3\pi x+2\pi^2$$

**4.** **写出函数** $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上

**傅里叶级数的和函数 .**

**答案:** $S(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ 0, & x=\pm\pi\end{cases}$



**备用题** 1. 函数 $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展式为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则其中系数 $b_3=$ $\underline{\ 2\pi/3\ }$ . (93 考研)

**提示:** $b_3=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,\mathrm{d}\,x$$

利用"偶倍奇零"

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \pi x & + & \pi & - & 0 \\ \sin 3x & & -\frac{1}{3}\cos 3x & & -\frac{1}{9}\sin 3x \end{array} + \int_{-\pi}^{\pi}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi x}{3}\cos 3x+\frac{\pi}{9}\sin 3x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi$$

2. 设 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的函数，其傅里叶系数为 $a_n$，$b_n$，则 $f(x+h)$ ($h$为常数) 的傅里叶系数

$a'_n =$ $\underline{a_n\cos nh + b_n\sin nh}$，$b'_n =$ $\underline{b_n\cos nh - a_n\sin nh}$ .

**提示:** $a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx\,\mathrm{d}x$ $\boxed{令\ t = x+h}$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos n(t-h)\,\mathrm{d}t$$

利用周期函数性质 $\int_{-\pi+h}^{\pi+h} = \int_{-\pi}^{\pi}$

$$= \cos nh\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t + \sin nh\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$$

$$= a_n\cos nh + b_n\sin nh$$

类似可得 $b'_n$

# 第八节 一般周期函数的傅里叶级数

## 一、周期为 $2\,l$ 的周期函数的傅里叶级数

## *二、傅里叶级数的复数形式

# 一、周期为2 $l$ 的周期函数的傅里叶级数

周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$

⇓ 变量代换 $z=\dfrac{\pi x}{l}$

周期为 $2\pi$ 的函数 $F(z)$

⇓ 将$F(z)$ 作傅里叶展开

$f(x)$ 的傅里叶展开式

**定理.** 设周期为$2l$的周期函数 $f(x)$满足收敛定理条件, 则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(在 $f(x)$ 的连续点处)

其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

**证明:** 令 $z=\dfrac{\pi x}{l}$, 则 $x\in[-l,l]$ 变成 $z\in[-\pi,\pi]$,

令 $F(z)=f(x)=f(\dfrac{lz}{\pi})$, 则

$$F(z+2\pi)=f(\frac{l(z+2\pi)}{\pi})=f(\frac{lz}{\pi}+2l)$$

$$=f(\frac{lz}{\pi})=F(z)$$

所以 $F(z)$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数, 且它满足收敛定理条件, 将它展成傅里叶级数:

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nz+b_n\sin nz\right)$$

( 在 $F(z)$ 的连续点处 )

其中 $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\cos nz\,\mathrm{d}z & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\sin nz\,\mathrm{d}z & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$

令 $z = \dfrac{\pi x}{l}$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left( a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

( 在 $f(x)$ 的 连续点处 )　**证毕**

上页 下页

**说明:** 如果 $f(x)$ 为**奇函数**, 则有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$ (在 $f(x)$ 的连续点处)

其中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$

如果 $f(x)$ 为**偶函数**, 则有

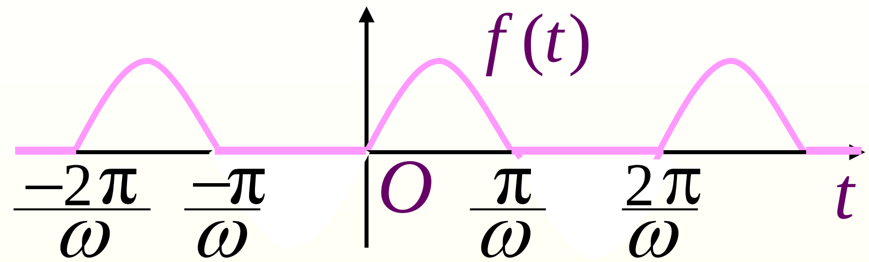
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$ (在 $f(x)$ 的连续点处)

其中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots)$

**注:** 无论哪种情况 , 在 $f(x)$ 的间断点 $x$ 处, 傅里叶级数都收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

上页 下页

**例1.** 交流电压 $E(t)=E\sin\omega t$ 经半波整流后负压消失，试求半波整流函数的傅里叶级数.




**解:** 这个半波整流函数的周期是 $\dfrac{2\pi}{\omega}$，它在 $\left[\dfrac{-\pi}{\omega},\dfrac{\pi}{\omega}\right)$ 上的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}0, & \dfrac{-\pi}{\omega}\le t<0\\ E\sin\omega t, & 0\le t<\dfrac{\pi}{\omega}\end{cases}$$

$$\therefore a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}E\sin\omega t\cos n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\left[\sin(n+1)\omega t-\sin(n-1)\omega t\right]\mathrm{d}t$$

$$a_1=\frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin 2\omega\ t\,\mathrm{d}t=\frac{E\omega}{2\pi}\left[-\frac{1}{2\omega}\cos 2\omega t\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}=0$$

$n\neq 1$时

$$a_n=\frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}[\sin(n+1)\omega\,t-\sin(n-1)\omega\,t]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E\omega}{2\pi}\left[-\frac{1}{(n+1)\omega}\cos(n+1)\omega t+\frac{1}{(n-1)\omega}\cos(n-1)\omega t\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{E}{2\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{n-1}\right]$$

$$=\frac{[(-1)^{n-1}-1]E}{(n^2-1)\pi}=\begin{cases}0, & n=2k+3\\ \dfrac{2E}{(1-4k^2)\pi}, & n=2k\end{cases}\quad(k=0,1,\cdots)$$

上页 下页

$$b_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}E\sin\omega t\cdot\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\left[\cos(n-1)\omega t-\cos(n+1)\omega t\right]\mathrm{d}t$$

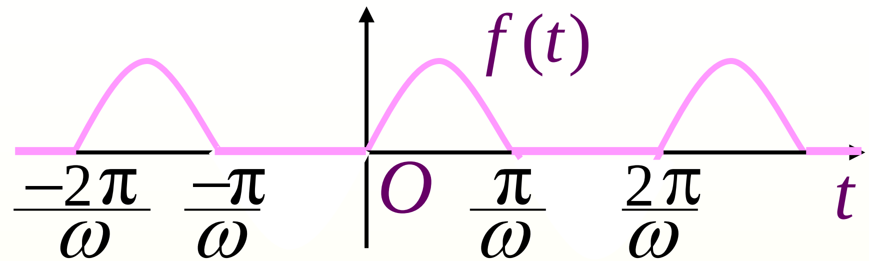
$$b_1=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}E\sin\omega t\cdot\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}(1-\cos 2\omega t)\mathrm{d}t=\frac{E\omega}{2\pi}\left[t-\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}=\frac{E}{2}$$

$n>1$ 时

$$b_n=\frac{E\omega}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)\omega t}{(n-1)\omega}-\frac{\sin(n+1)\omega t}{(n+1)\omega}\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}=0$$

**由于半波整流函数** $f(t)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续, **由收敛定理可得**




$$f(t)=\underbrace{\frac{E}{\pi}}_{\text{直流部分}}+\underbrace{\frac{E}{2}\sin\omega t+\frac{2E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-4k^2}\cos 2k\omega t}_{\text{交流部分}}$$

$$(-\infty<t<+\infty)$$

**直流部分** **交流部分**

**说明: 上述级数可分解为直流部分与交流部分的和.**

$2k$ **次谐波的振幅为** $A_k=\frac{2E}{\pi}\frac{1}{4k^2-1}$, $k$ **越大振幅越小,**

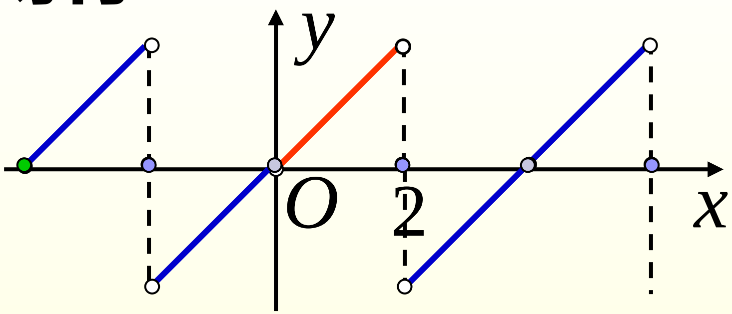
**因此在实际应用中展开式取前几项就足以逼近** $f(t)$**了.**

**例2.** 把 $f(x)=x\ \ (0<x<2)$ 展开成

(1) 正弦级数;　　(2) 余弦级数.

在 $x=2k$ 处级数收敛于何值?

**解:** (1) 将 $f(x)$ 作奇周期延拓, 则有




$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

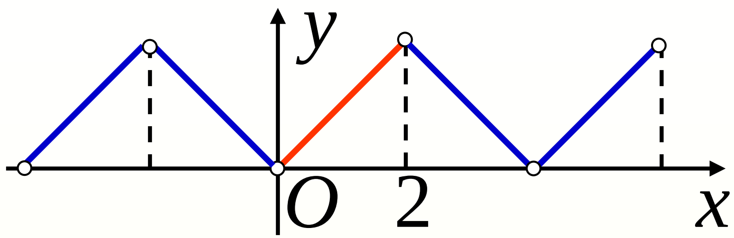
$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\qquad(0<x<2)$$

(2) 将$f(x)$作偶周期延拓, 则有




$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

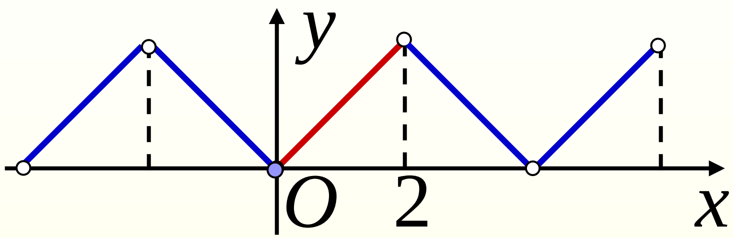
$$= \left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore\ f(x) = x = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2} \quad (0 < x < 2)$$

$$f(x)=x=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}\ (0<x<2)$$

**说明:** 此式对 $x=0$ 也成立,




据此有 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

由此还可导出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

# 二、傅里叶级数的复数形式

设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数，则

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

利用欧拉公式
$$\begin{cases}\cos\dfrac{n\pi x}{l}=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\\[2ex]\sin\dfrac{n\pi x}{l}=\dfrac{-i}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)-\frac{i\,b_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\right]$$

$$=\underbrace{\frac{a_0}{2}}_{c_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{a_n-i\,b_n}{2}}_{c_n}e^{i\frac{n\pi x}{l}}+\underbrace{\frac{a_n+i\,b_n}{2}}_{c_{-n}}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)$$

上页 下页

注意到 $c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x$

$$c_n = \frac{a_n - \mathrm{i}\, b_n}{2} = \frac{1}{2}\Big[\, \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi\, x}{l}\,\mathrm{d}\, x - \frac{\mathrm{i}}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi\, x}{l}\,\mathrm{d}\, x \,\Big]$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\Big(\underline{\cos\frac{n\pi\, x}{l} - \mathrm{i}\,\sin\frac{n\pi\, x}{l}}\Big)\mathrm{d}\, x$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

同理 $c_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{i}\, b_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots)$

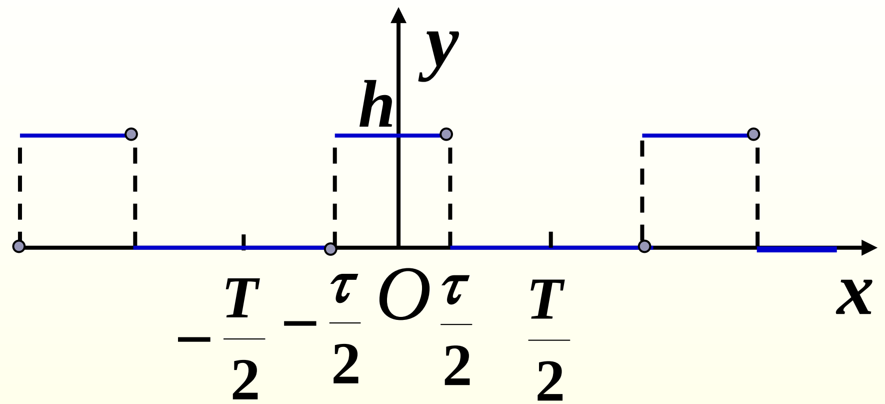
因此得 傅里叶级数的复数形式:

$$\begin{cases} f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} \\ c_n = \dfrac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx \end{cases} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

上页 下页

**例4.** 把宽为 $\tau$ ,高为 $h$ ,周期为 $T$ 的矩形波展成复数形式的傅里叶级数.

**解:** 在一个周期 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 内矩形波的函数表达式为




$$u(t)=\begin{cases} h, & -\frac{\tau}{2}\le t<\frac{\tau}{2} \\ 0, & -\frac{T}{2}\le t<-\frac{\tau}{2},\ \frac{\tau}{2}\le t<\frac{T}{2} \end{cases}$$

它的复数形式的傅里叶系数为

$$c_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}u(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}h\,\mathrm{d}t=\frac{h\tau}{T}$$

上页 下页

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} h\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{h}{T}\left[-\frac{T}{2n\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{h}{n\pi}\cdot\frac{-1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi\tau}{T}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi\tau}{T}}\right]$$

$$= \frac{h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$\therefore\ u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}$$

$$\left(t \neq \pm\frac{\tau}{2} + kT,\ k = 0, \pm 1, \cdots\right)$$

## 内容小结

1. 周期为$2l$ 的函数的傅里叶级数展开公式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

($x\neq$间断点)

$$\text{其中}\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

当$f(x)$为奇(偶) 函数时,为正弦(余弦) 级数.

2. 在任意有限区间上函数的傅里叶展开法 $\begin{cases}\text{变换}\\ \text{延拓}\end{cases}$

3. 傅里叶级数的复数形式 —— 利用欧拉公式导出

## 思考与练习

1. 将函数展开为傅里叶级数时为什么最好先画出其图形?

**答:** 易看出奇偶性及间断点, 从而便于计算系数和写出收敛域 .

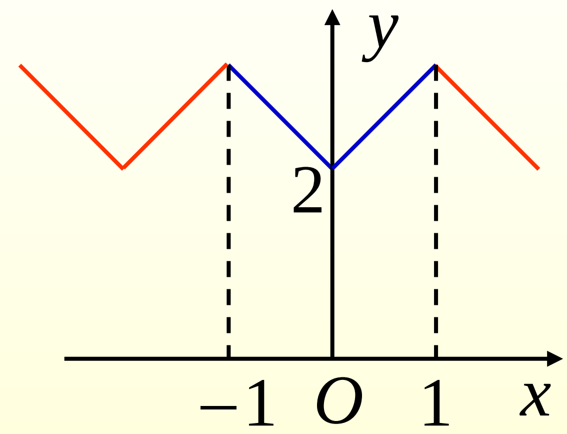
2. 计算傅里叶系数时哪些系数要单独算 ?

**答:** 用系数公式计算 $a_n, b_n$时, 如分母中出现因子 $n-k$ 则$a_k$ 和 $b_k$ 必须单独计算.

**备用题** 将 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 展开成以2为周期的傅里叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和. (1991 考研)

解: $f(x)$为偶函数, $\therefore b_n=0$

$$a_0=2\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}x=5$$




$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

因 $f(x)$ 偶延拓后在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 故得

$$2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x,\quad x\in[-1,1]$$

令 $x = 0$, 得

$$2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

故 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$