多元函数微分法及应用

全微分：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ $\qquad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

全微分的近似计算：$\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：

$z=f[u(t),v(t)]$ $\qquad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$

$z=f[u(x,y),v(x,y)]$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

当$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$时，

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ $\qquad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式：

隐函数$F(x,y)=0$，$\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$，$\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{F_x}{F_y})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{F_x}{F_y})\cdot\frac{dy}{dx}$

隐函数$F(x,y,z)=0$，$\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，$\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ $\qquad J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$

微分法在几何上的应用：

空间曲线$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程：$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

在点M处的法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

若空间曲线方程为$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$,则切向量$\vec{T}=\{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}\}$

曲面$F(x,y,z)=0$上一点$M(x_0,y_0,z_0)$，则：

1、过此点的法向量：$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$

2、过此点的切平面方程 $F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

3、过此点的法线方程：$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

方向导数与梯度：

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$沿任一方向l的方向导数为：$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$

其中φ为x轴到方向l的转角。

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$的梯度：$\mathrm{grad}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

它与方向导数的关系是$\frac{\partial f}{\partial l}=\mathrm{grad}\,f(x,y)\cdot\vec{e}$，其中$\vec{e}=\cos\varphi\cdot\vec{i}+\sin\varphi\cdot\vec{j}$，为$l$方向上的单位向量。

$\therefore\frac{\partial f}{\partial l}$是$\mathrm{grad}f(x,y)$在$l$上的投影。

多元函数的极值及其求法：

设$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，令：$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\quad f_{xy}(x_0,y_0)=B,\quad f_{yy}(x_0,y_0)=C$

$$\text{则：}\begin{cases}AC-B^2>0\text{时},\begin{cases}A<0,(x_0,y_0)\text{为极大值}\\A>0,(x_0,y_0)\text{为极小值}\end{cases}\\AC-B^2<0\text{时}, & \text{无极值}\\AC-B^2=0\text{时}, & \text{不确定}\end{cases}$$

重积分及其应用：

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

曲面$z=f(x,y)$的面积$A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$

平面薄片的重心：$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D\rho(x,y)d\sigma},\qquad \bar{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D\rho(x,y)d\sigma}$

平面薄片的转动惯量：对于x轴$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma,\qquad$对于$y$轴$I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma$

平面薄片（位于xoy平面）对z轴上质点$M(0,0,a),(a>0)$的引力：$F=\{F_x,F_y,F_z\}$，其中：

$$F_x=f\iint_D\frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_y=f\iint_D\frac{\rho(x,y)yd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_z=-fa\iint_D\frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

柱面坐标和球面坐标：

柱面坐标$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \\ z = z \end{cases}$ $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} F(r,\theta,z)rdrd\theta dz,$

其中：$F(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

球面坐标$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ $dv = rd\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot d\theta \cdot dr = r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi,\theta)} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi dr$$

重心：$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} x\rho dv,\quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} y\rho dv,\quad \bar{z} = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} z\rho dv,$ 其中$M = \bar{x} = \iiint\limits_{\Omega} \rho dv$

转动惯量：$I_x = \iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho dv,\quad I_y = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\rho dv,\quad I_z = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho dv$

曲线积分：

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：

设$f(x,y)$在L上连续，L的参数方程为$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，$(\alpha \le t \le \beta)$,则：

$\int\limits_L f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad (\alpha < \beta)$ 特殊情况$\begin{cases} x = t \\ y = \varphi(t) \end{cases}$

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

设L的参数方程为$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，则：

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

两类曲线积分之间的关系：$\int\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$，其中$\alpha$和$\beta$分别为$L$上积分起止点处切向量的方向角。

格林公式：$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy$格林公式：$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy$

当$P = -y, Q = x$，即：$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$时，得到$D$的面积：$A = \iint\limits_D dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$

·平面上曲线积分与路径无关的条件：

1、G是一个单连通区域；

2、$P(x,y)$，$Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数，且$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$。注意奇点，如$(0,0)$，应减去对此奇点的积分，注意方向相反！

·二元函数的全微分求积

在$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$时，$Pdx + Qdy$才是二元函数$u(x,y)$的全微分，其中：

$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$，通常设$x_0 = y_0 = 0$。

曲面积分：

对面积的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$

对坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$，其中：

$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$，取曲面的上侧时取正号；

$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$，取曲面的前侧时取正号；

$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint\limits_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$，取曲面的右侧时取正号。

两类曲面积分之间的关系：$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$

高斯公式：

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = \oiint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \oiint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

高斯公式的物理意义——通量与散度：

散度：$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$，即：单位体积内所产生的流体质量，若 $\operatorname{div}\vec{v} < 0$，则为消失..

通量：$\iint\limits_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}ds = \iint\limits_{\Sigma} A_n ds = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$，

因此，高斯公式又可写成：$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{A}dv = \oiint\limits_{\Sigma} A_n ds$

斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系：

$$\iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

上式左端又可写成：$\iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

空间曲线积分与路径无关的条件：$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$，$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$，$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

旋度：$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

向量场 $\vec{A}$ 沿有向闭曲线 Γ 的环流量：$\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \oint\limits_{\Gamma} \vec{A}\cdot\vec{t}ds$

常数项级数：

等比数列：$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

等差数列：$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$

调和级数：$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 是发散的

级数审敛法：

1、正项级数的审敛法——根植审敛法（柯西判别法）：

设：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$，则$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

2、比值审敛法：

设：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$，则$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

3、定义法：

$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n;\lim\limits_{n\to\infty}s_n$存在，则收敛；否则发散。

交错级数$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$(或$-u_1+u_2-u_3+\cdots,u_n>0$)的审敛法——莱布尼兹定理：

如果交错级数满足$\begin{cases}u_n\geq u_{n+1}\\ \lim\limits_{n\to\infty}u_n=0\end{cases}$，那么级数收敛且其和$s\leq u_1$，其余项$r_n$的绝对值$|r_n|\leq u_{n+1}$。

绝对收敛与条件收敛：

(1)$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，其中$u_n$为任意实数；

(2)$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots$

如果(2)收敛，则(1)肯定收敛，且称为绝对收敛级数；

如果(2)发散，而(1)收敛，则称(1)为条件收敛级数。

调和级数：$\sum\dfrac{1}{n}$发散，而$\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛；

级数：$\sum\dfrac{1}{n^2}$收敛；

p级数：$\sum\dfrac{1}{n^p}$ $\begin{cases}p\leq 1\text{ 时发散}\\ p>1\text{时收敛}\end{cases}$

幂级数：

$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$ $\begin{cases}|x|<1\text{时，收敛于}\dfrac{1}{1-x}\\ |x|\geq 1\text{时，发散}\end{cases}$

对于级数(3)$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，如果它不是仅在原点收敛，也不是在全数轴上都收敛，则必存在R，使$\begin{cases}|x|<R\text{时收敛}\\ |x|>R\text{时发散，其中}R\text{称为收敛半径。}\\ |x|=R\text{时不定}\end{cases}$

求收敛半径的方法：设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中$a_n$，$a_{n+1}$是(3)的系数，则$\begin{cases}\rho\neq 0\text{时，}R=\dfrac{1}{\rho}\\ \rho=0\text{时，}R=+\infty\\ \rho=+\infty\text{时，}R=0\end{cases}$

函数展开成幂级数：

函数展开成泰勒级数：$f(x)=f(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$

余项：$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$f(x)$可以展开成泰勒级数的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$

$x_0=0$时即为麦克劳林公式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

一些函数展开成幂级数：

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

欧拉公式：

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad \text{或}\begin{cases}\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\end{cases}$$

三角级数：

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中，$a_0=aA_0$，$a_n=A_n\sin\varphi_n$，$b_n=A_n\cos\varphi_n$，$\omega t=x$。

正交性：$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x\cdots\sin nx,\cos nx\cdots$任意两个不同项的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分＝0。

傅立叶级数：

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，周期$=2\pi$

$$\text{其中}\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=0,1,2\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,2,3\cdots)\end{cases}$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8} \qquad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\text{（相加）}$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{24} \qquad 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}\text{（相减）}$$

正弦级数：$a_n=0$，$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \qquad n=1,2,3\cdots \qquad f(x)=\sum b_n\sin nx$是奇函数

余弦级数：$b_n=0$，$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad n=0,1,2\cdots \qquad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx$是偶函数

周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}),\quad 周期=2l$$

$$其中\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx & (n=0,1,2\cdots) \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx & (n=1,2,3\cdots) \end{cases}$$

微分方程的相关概念：

一阶微分方程：$y'=f(x,y)$　或　$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

可分离变量的微分方程：一阶微分方程可以化为 $g(y)dy=f(x)dx$ 的形式，解法：

$\int g(y)dy=\int f(x)dx$　　得：$G(y)=F(x)+C$ 称为隐式通解。

齐次方程：一阶微分方程可以写成 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\varphi(x,y)$，即写成 $\frac{y}{x}$ 的函数，解法：

设 $u=\frac{y}{x}$，则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，$u+\frac{du}{dx}=\varphi(u)$，$\therefore\frac{dx}{x}=\frac{du}{\varphi(u)-u}$ 分离变量，积分后将 $\frac{y}{x}$ 代替 u，即得齐次方程通解。

一阶线性微分方程：

1、一阶线性微分方程：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

$$\begin{cases} 当Q(x)=0时，为齐次方程，y=Ce^{-\int P(x)dx} \\ 当Q(x)\neq 0时，为非齐次方程，y=(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)e^{-\int P(x)dx} \end{cases}$$

2、贝努力方程：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n,(n\neq 0,1)$

全微分方程：

如果 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 中左端是某函数的全微分方程，即：

$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，其中：$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$

$\therefore u(x,y)=C$ 应该是该全微分方程的通解。

二阶微分方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x),\begin{cases} f(x)\equiv 0时为齐次 \\ f(x)\neq 0时为非齐次 \end{cases}$$