

习题 3.6

1. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y = 2x^2 + \ln x$;

(2) $y = x \cos x$;

(3) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$;

(4) $y = (1 + x^2) \arctan x$;

(5) $y = f(x^2)$;

(6) $y = f[\varphi(x)]$.

2. 验证下列函数满足对应的关系式:

(1) $y = e^x \sin x$ 满足 $y'' - 2y' + 2y = 0$;

(2) $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ 满足 $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$;

(3) $y = \sin(\arcsin x)$ 满足 $(1 - x^2)y'' - xy' + m^2y = 0$.

3. 令 $x = \cos t$, 试变换方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0.$$

4. 令 $y = \tan z$, 试变换方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 + \frac{2(1+y)}{1+y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

5. 证明函数 $y = f(x)$ 的反函数的二阶导数公式:

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}.$$

6. 求下列方程所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的二阶导数:

(1) $e^{x+y} = xy$; (2) $y = \tan(x+y)$; (3) $\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

7. 已知 $y = 1 + xe^{xy}$ 确定了函数 $y = y(x)$, 试求 $y'|_{x=0}$ 及 $y''|_{x=0}$.

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数:

(1) $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases}$ 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$;

(2) $\begin{cases} x = t - \ln(1+t^2), \\ y = \arctan t, \end{cases}$ 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 及 $\frac{d^2 x}{dy^2}$;

(3) $\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t), \end{cases}$ 其中 $f(t)$ 有不等于 0 的二阶导数. 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

9. 验证 $y = e^t \cos t, x = e^t \sin t$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 满足关系式

$$y''(x+y)^2 = 2(xy' - y).$$

10. 求下列函数的指定阶导数:

(1) 设 $y = e^x \cos x$, 求 $y^{(4)}$; (2) 设 $y = x \sinh x$, 求 $y^{(100)}$.

11. 求下列函数的 $n (n \in \mathbb{N}_+)$ 阶导数:

(1) $y = \frac{1-x}{1+x}$;

(2) $y = x \ln x$;

$$(3) \quad y = \sin^2 x; \quad (4) \quad y = \ln \frac{a+bx}{a-bx};$$

$$(5) \quad y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}; \quad (6) \quad y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}};$$

$$(7) \quad y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$$

12. 设函数 $\varphi(x)$ 在 a 点邻域内有 $(n-1)$ 阶连续导数, 又 $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, 求 $f^{(n)}(a)$.

13. 设 $f(x) = \arctan x$.

(1) 证明: $(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$;

(2) 求 $f^{(n)}(0)$ ($n \in \mathbb{N}$).

14. 设 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x$.

(1) 证明: $(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2y^{(n-1)} = 0$;

(2) 求 $y^{(n)}(0)$ ($n \in \mathbb{N}$).