本次课内容

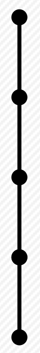
一、树的概念与性质

二、生成树

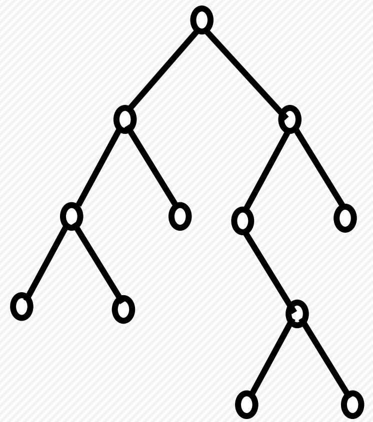
三、最小生成树

定义1 连通无回路的无向图称为无向树，简称树. 每个连通分支都是树的无向图称为森林. 平凡图称为平凡树. 在无向树中，悬挂顶点称为树叶，度数大于或等于2的顶点称为分支点.

例1：下面的图均是树



树T_1

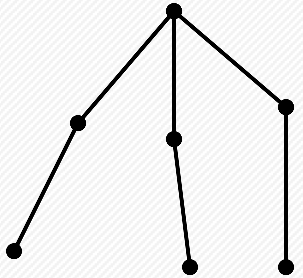


树T_2

树T_3

例 族谱图与树

要把一个家族的繁衍情况简洁直观表达出来，用点表示家族中成员，成员x是成员y的儿女，把点x画在点y的下方，并连线。如此得到的图，是一颗树，称为根树。示意如下：



根树

实际上，根树是许多问题的模型，如**社会结构，计算机数据结构，数学中的公式结构，分类枚举表示**等。

例 电网络中独立回路与图的生成树

早在19世纪，图论还没有引起人们关注的时候，物理学家克希荷夫就已经注意到电路中的独立回路与该电路中的所谓生成树的关系。即：如果电路是(n，m)图，则独立回路的个数为m-n+1. 并且，生成树添上生成树外的G的一条边就可以得到一独立回路。

总之，树在图论研究和图论应用上都是十分典型的特殊图。

定理

定理1 设G=<V,E>是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树

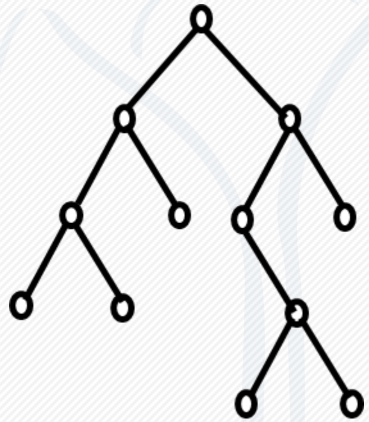
(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 m=n-1.

(4) G 是连通的且 m=n-1.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边后所得图中有惟一的一个含新边的圈.



证 (1)⇒(2). 若路径不惟一，必有回路.

(2)⇒(3). 若G中有回路，则回路上任意两点之间的路径不惟一.

对n用归纳法证明$m=n-1$.

当$n=1$时成立. 设$n\le k$时成立，证$n=k+1$时也成立：任取一条边e，G−e有且仅有两个连通分支G_1, G_2. 设m_i，n_i 分别为G_i中的边数和顶点数，则$n_i\le k$，由归纳假设得$m_i=n_i-1$，$i=1,2$. 于是，

$$m=m_1+m_2+1=n_1+n_2-2+1=n-1.$$

(3)⇒(4). 只需证明G连通. 用反证法. 假设G有$s(s\ge2)$个连通分支，它们都是树. 于是，有$m_i=n_i-1$，这与$m=n-1$矛盾.

(4)$\Rightarrow$(5). 只需证明G 中每条边都是桥. 下述命题显然成立:

G是 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m \geq n-1$.

$\forall e \in E$，$G-e$只有$n-2$条边，由命题可知$G-e$不连通，故e为桥.

(5)$\Rightarrow$(6). 由(5)易知G为树.　　由(1)$\Rightarrow$(2)知，$\forall u, v \in V$（$u \neq v$），

u到v有惟一路径，加新边(u, v)得惟一的一个圈.

(6)$\Rightarrow$(1). 只需证明G连通，这是显然的.

定理2 设T是n阶非平凡的无向树，则T中至少有两片树叶.

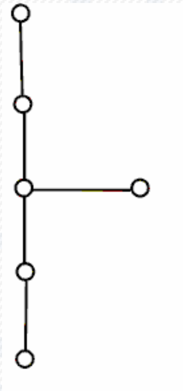
例 已知无向树T中有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.

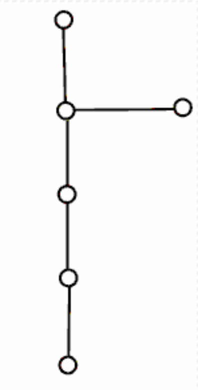
解 设有x片树叶，n = 3+x.

$$2m = 2(n-1) = 2\times(2+x)$$

$$= 1\times3+2\times2+x$$

解出x = 3，故T有3片树叶.





例

设T为12条边的树，其顶点度为1,2,5。如果T恰有3个度为2的顶点，那么T有多少片树叶？

解：设T有x片树叶。

由m=n-1得n=13. 于是由握手定理得：

$$1\times x+2\times 3+5\times(10-x)=2\times 12$$

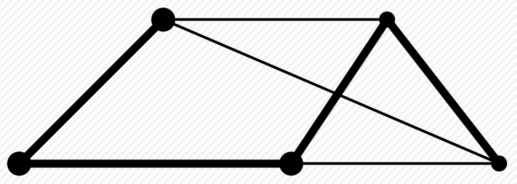
得x=8

生成树的概念

定义2 图G的一个生成子图T如果是树，则称T为G的一棵生成树；若T为森林，则称T为G的一个生成森林。

设T是G的生成树，G在T中的边称为T的树枝，不在T中的边为T的弦. 称T的所有弦的导出子图为T的余树，记作 $\overline{T}$.

例如：



图G

粗边构成的子图为G的生成树。

生成树存在条件

定理3 无向图G有生成树当且仅当G连通.

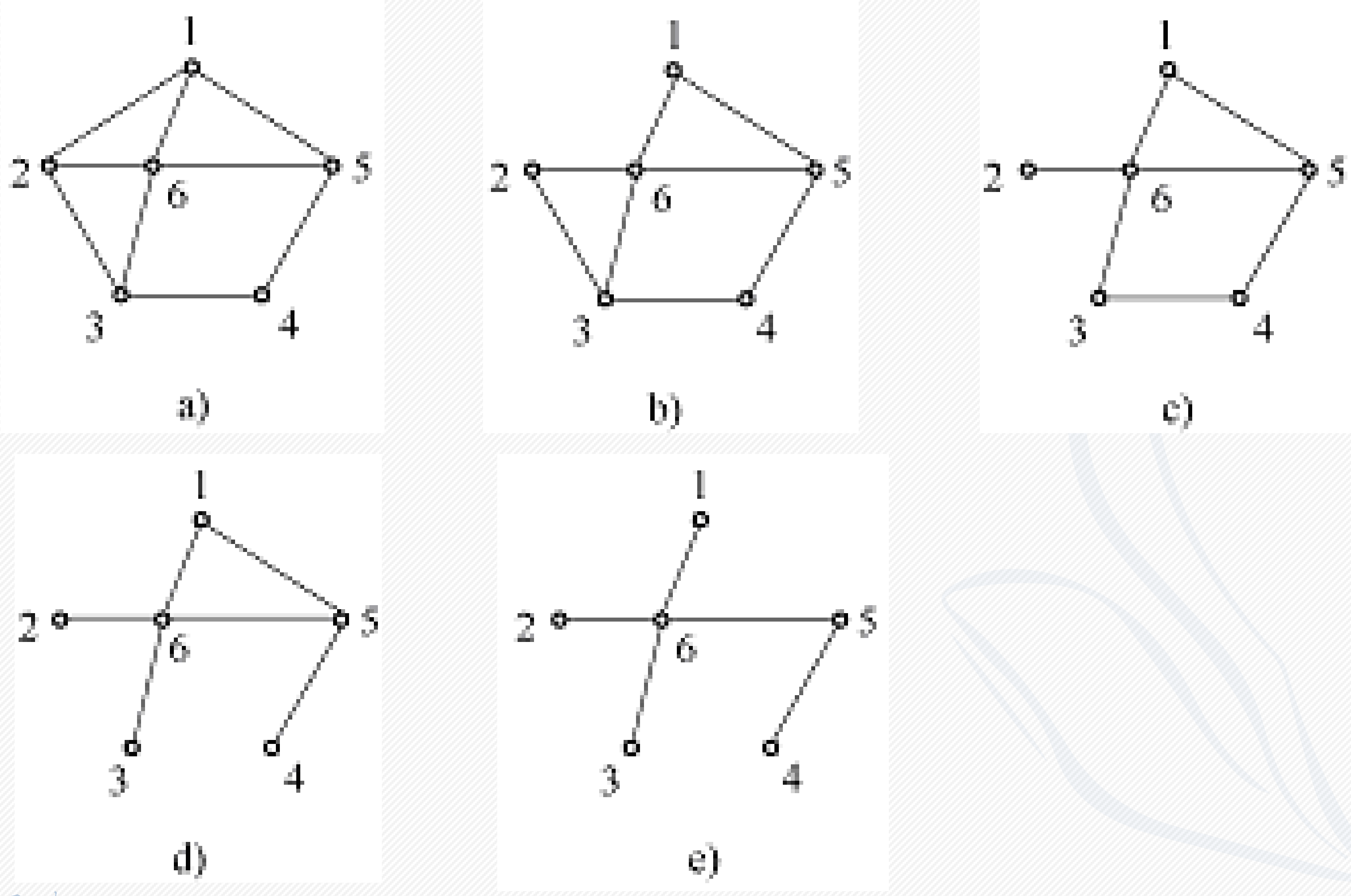
证 必要性显然. 证充分性. 若G中无回路, 则G为自己的生成树. 若G中含圈, 任取一圈, 随意地删除圈上的一条边; 若仍有圈, 再任取一个圈并删去这个圈上的一条边, 重复进行, 直到最后无圈为止. 最后得到的图无圈(当然无回路)、连通且是G的生成子图, 因而是G的生成树.

这个产生生成树的方法称为破圈法.

利用破圈法, 显然也可以求出任意图的一个生成树。

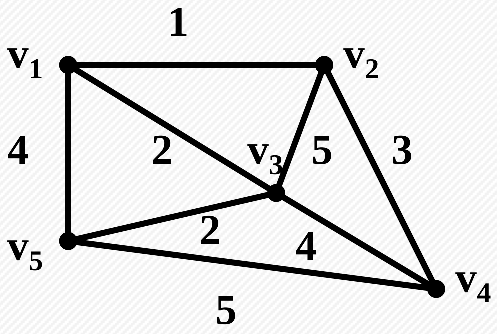
推论 G为n阶m条边的无向连通图, 则$m \geq n-1$.

求下图(a)所示的图的生成子树。



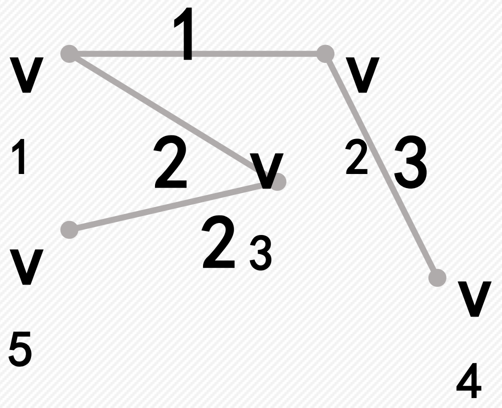
交通网络中，常常关注能把所有站点连接起来的生成树，使得该生成树各边权值之和为最小。例如：

假设要在某地建造5个工厂，拟修筑道路连接这5处。经勘探，其道路可按下图的无向边铺设。现在每条边的长度已经测出并标记在图的对应边上，如果我们要求铺设的道路总长度最短，这样既能节省费用，又能缩短工期，如何铺设？



最小生成树定义

不难发现：最小代价的连接方式为：



最小连接问题的一般提法为：

定义3 设无向连通带权图G=<V,E,W>，T是G的一棵生成树，T的各边权之和称为T的权，记作W(T)．G的所有生成树中**权最小的生成树**称为**G的最小生成树**.

最小生成树的求法（克鲁斯克尔算法）

克鲁斯克尔(Kruskal):1928年生，一家3弟兄都是数学家，1954年在普林斯顿大学获博士学位，导师是ErdÖs,他大部分研究工作是数学和语言学，主要在贝尔实验室工作。1956年发表包含克鲁斯克尔算法论文，使他名声大振。

1、算法思想

从G中的最小边开始，进行避圈式扩张。

2、算法

(1)、选择边e_1,使得其权值最小；

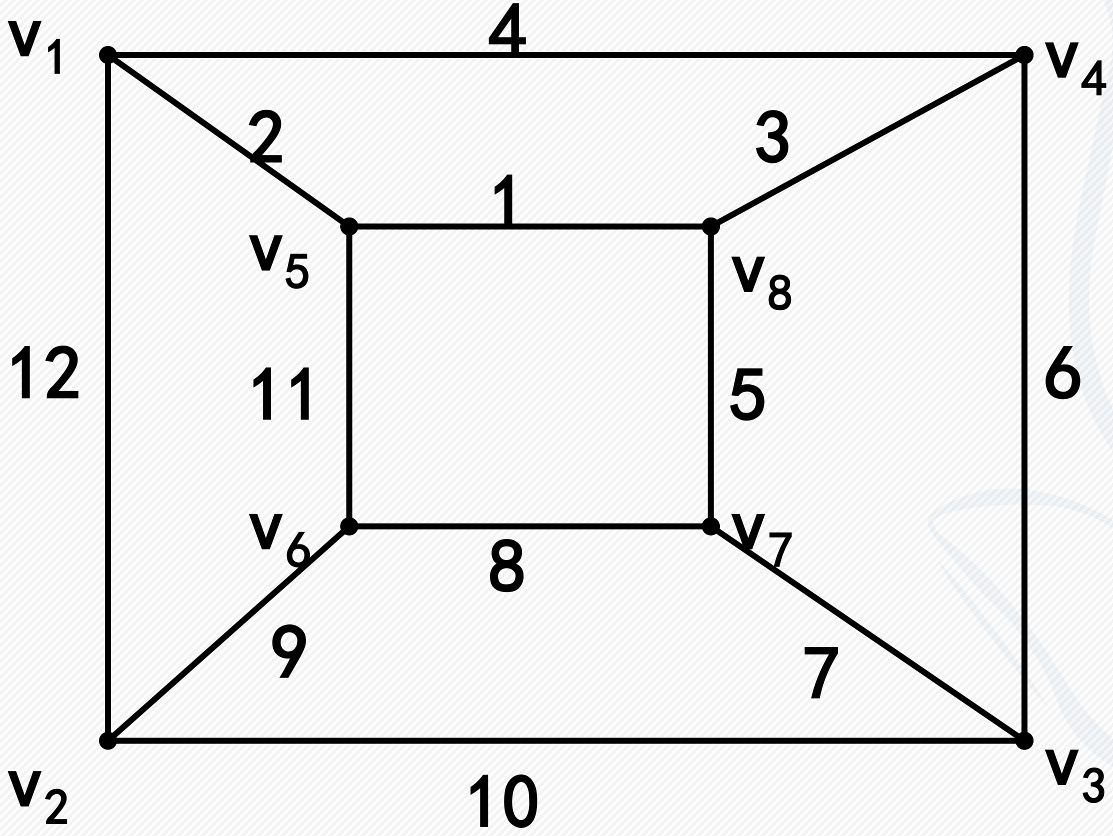
(2)、若已经选定边e_1，e_2,…，e_k，则从E-｛e_1，e_2,…，e_k｝中选择边e_{k+1},使得：

(a)、G[e_1，e_2,…，e_{k+1}]为无回路

(b)、e_{k+1}的权值w(e_{k+1})尽可能小。

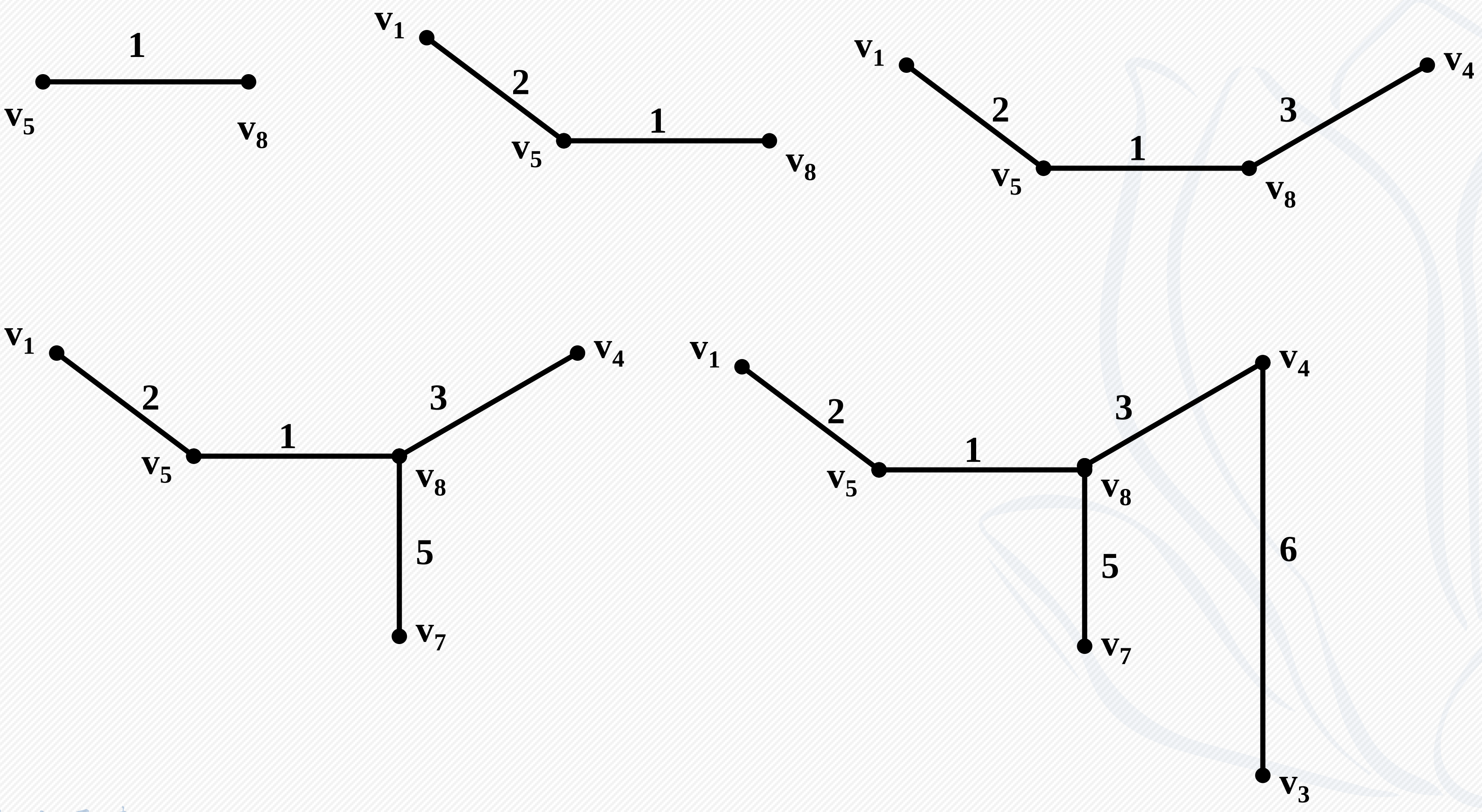
(3)、当(2)不能进行时，停止。

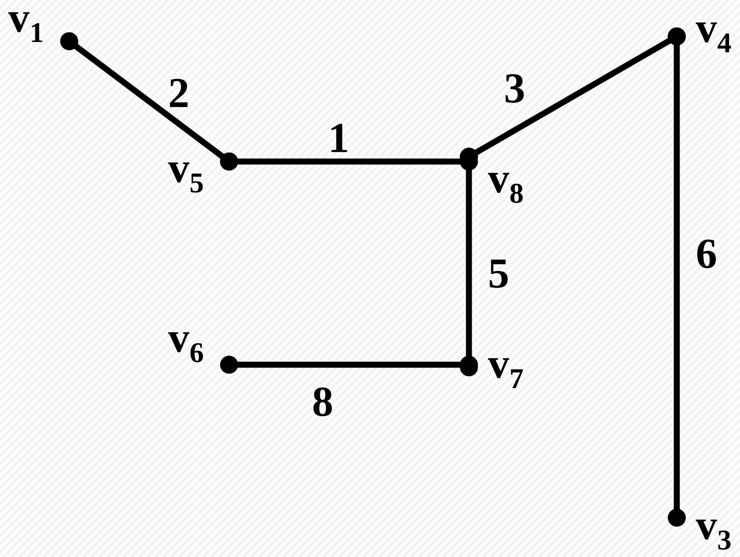
例 用克鲁斯克尔算法求下图的最小生成树。

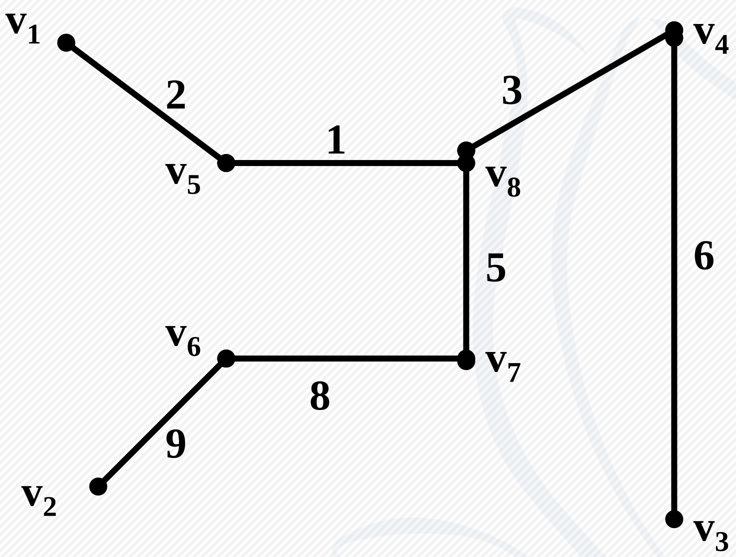


解

过程如下：


v5 1 v8
v1 2 v5 1 v8
v1 2 v5 1 v8 3 v4
v1 2 v5 1 v8 3 v4 5 v7
v1 2 v5 1 v8 3 v4 5 v7 6 v3


v1
2
v5
1
v8
3
v4
5
6
v6
v7
8
v3


v1
2
v5
1
v8
3
v4
5
6
v6
v7
8
9
v2
v3

管梅谷的破圈法

在克鲁斯克尔算法基础上，我国著名数学家管梅谷教授于1975年提出了最小生成树的破圈法。

破圈法求最小生成树的求解过程是：从赋权图G的任意圈开始，去掉该圈中权值最大的一条边，称为破圈。不断破圈，直到G中没有圈为止，最后剩下的G的子图为G的最小生成树。

Prim算法

Prim算法是由Prim在1957年提出的一个著名算法。作者因此而出名。

Prim(1921---) 1949年在普林斯顿大学获博士学位，是Sandia公司副总裁。

Prim算法：

对于连通赋权图G的任意一个顶点u，选择与点u关联的且权值最小的边作为最小生成树的第一条边e_1；

在接下来的边$e_2, e_3, \cdots, e_{n-1}$，在与一条已经选取的边只有一个公共端点的的所有边中，选取权值最小的边。