第十二章

无穷级数

无穷级数 $\begin{cases} \text{数项级数} \\ \text{幂级数} \\ \text{傅里叶级数} \end{cases}$

无穷级数是研究函数的工具 $\begin{cases} \text{表示函数} \\ \text{研究性质} \\ \text{数值计算} \end{cases}$

第十二章 无穷级数

第一节 常数项级数的概念和性质

一、常数项级数的概念

二、无穷级数的基本性质

三、级数收敛的必要条件

*四、柯西审敛原理

一、常数项级数的概念

定义: 给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 将各项依次相加, 简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称上式为无穷级数, 其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项,

级数的前 n 项和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

称为级数的部分和. 由部分和

$$s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 + u_2, \cdots,\ \ s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots$$

构成的数列称作部分和数列，记为 $\{s_n\}$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在, **则称无穷级数收敛**，**并称 S 为级数的和**， **记作**

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，**则称无穷级数发散** .

当级数收敛时, 称差值

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

为级数的余项. 显然

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

例1 讨论等比级数 (又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

(q 称为公比) 的敛散性.

解 1) 若 $q \neq 1$, 则部分和

$$S_n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^{n-1} = \frac{a - a q^n}{1 - q}$$

当 $|q| < 1$ 时，由于 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, 从而 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$

因此级数收敛 , 其和为 $\frac{a}{1-q}$;

当 $|q| > 1$ 时，由于 $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$,

因此级数发散 .

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n,\ (a \neq 0)$$

2). 若 $|q|=1$, 则

当 $q=1$时, $S_n = na \to \infty$, 因此级数发散；

当 $q=-1$时,级数成为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots$$

因此 $S_n = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，因此级数发散.

综合 1)、2)可知, $|q|<1$ 时, 等比级数收敛；

$|q| \geq 1$ 时, 等比级数发散 .

例如

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}2\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2}{1-\frac{2}{3}}=6$ 收敛

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n$ 发散

例2 证明下面级数： $1+2+3+\cdots+n+\cdots$ 发散.

证 部分和为 $s_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$\because \lim_{n\to\infty}s_n=\infty$, $\therefore$ 级数发散.

上页 下页

例3 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

解 (1) $S_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n}$

$$= (\cancel{\ln 2} - \ln 1) + (\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}) + \cdots + (\ln(n+1) - \cancel{\ln n})$$

$$= \ln(n+1) \to \infty \quad (n \to \infty)$$

所以级数 (1) 发散.

技巧:

利用 "拆项相消" 求和

上页 下页

$$(2)\quad S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1 .

技巧:

利用 **“拆项相消”** 求和

二、无穷级数的基本性质

性质1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，即 $S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，则各项乘以常数 c 所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c\,u_n$ 也收敛，其和为 $c\,S$.

证 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$，则 $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n} c\,u_k=c\,S_n$，

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n=c\lim_{n\to\infty}S_n=c\,S$$

这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} c\,u_n$ 收敛，其和为 $c\,S$.

说明: 级数各项乘以非零常数后其敛散性不变.

性质2 设有两个收敛级数

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\qquad \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

证 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k,\ \sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}v_k,$ 则

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k\pm v_k)=S_n\pm\sigma_n\to S\pm\sigma\quad(n\to\infty)$$

这说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

说明:

(1) 性质2 表明收敛级数可逐项相加或相减 .

(2) 若两级数中一个收敛一个发散 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散 . (用反证法可证)

但若二级数都发散 , $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

例如, 取 $u_n = (-1)^{2n}, v_n = (-1)^{2n+1},$

而 $u_n + v_n = 0$

上页 下页

性质3 在级数前面加上或去掉**有限项**, 不会影响级数的敛散性. **级数的敛散性与它的有限项无关.**

证 将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$ 的部分和为 $\sigma_n = \sum\limits_{l=1}^{n} u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$

由于 $n \to \infty$时, σ_n 与 S_{k+n} 极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为 $\sigma = S - S_k$.

类似可证前面加上有限项的情况 .

例如, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 具有相同的敛散性, **均收敛, 但和不同.**

上页 下页

性质4 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和.

证 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 若按某一规律加括弧, 例如

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

则新级数的部分和序列 $\sigma_m\ (m=1,2,\cdots)$ 为原级数部分和序列 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$ 的一个子序列, 因此必有

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

用反证法可证

推论: 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如, $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, 但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散.

例4 判断级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$$

$\therefore\quad \sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ 发散，从而原级数发散.

三、级数收敛的必要条件

设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，则必有 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

证 $u_n=S_n-S_{n-1}$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

可见： 若级数的一般项不趋于0，则级数必发散.

例如， $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$，其一般项为

$$u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$$

当 $n\to\infty$ 时，u_n 不趋于0，因此这个级数发散.

注意: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 并非级数收敛的充分条件.

例如, 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$ 但此级数发散 .

事实上, 假设调和级数收敛于 S, 则

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$$

但 $S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

矛盾! 所以假设不真 .

例5 **判别级数的敛散性:** (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{n}\right)$.

解 (1) $\because \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$

不是几何级数!

级数发散.

(2) $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是调和级数，发散．所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$也发散.

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$为公比为$\frac{1}{2}$的几何级数,收敛.

原级数发散.

可用反证法证明.

反证法：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{n}\right)$ 收敛.

则：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{2^n}\right]$ 收敛,

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ 发散. 矛盾！

思考： 1、若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$ (k为常数) 发散? 收敛?

2、若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 发散? 收敛?

3、若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 中一个发散，一个收敛，则

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 发散? 收敛?

练习：判别下列级数的敛散性

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\cdots;$

(2) $-\dfrac{8}{9}+\dfrac{8^2}{9^2}-\dfrac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{8^n}{9^n}+\cdots;$

(3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3n}+\cdots;$

(4) $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots+\sqrt[n]{0.001}+\cdots$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{3^n}\right)$

解 (1) $s_n = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),\quad \lim_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{2}$$

所以级数收敛.

(2) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\frac{8^n}{9^n}+\cdots,\quad |q|=\left|-\frac{8}{9}\right|<1,$

所以级数收敛.

(3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}$ 所以级数发散.

(4) $\because \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{0.001} = 1 \neq 0$ **所以级数发散.**

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$都是公比小于1的几何级数，都收敛，

$\therefore$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$ **收敛.**

结束 目录 上页 下页

小结

1. 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$　　部分和: $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$

级数收敛: $\lim_{n\to\infty} s_n = s$,　收敛和: $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

级数发散: $\lim_{n\to\infty} s_n$不存在,

2. 性质(5个)　(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} k u_n = ks$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$,　$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$;

(3)去掉、加上或改变有限项,保持敛散性不变;

(4)增加括号,保持收敛性不变(去掉括号,保持 发散性不变).

$$(5)\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0;$$

3. 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n \ (a \neq 0)$

当 $|q|<1$ 时，**级数收敛，** $s=\frac{a}{1-q}$

当 $|q|\geq 1$ 时， **级数发散.**

结束 目录 上页 下页

复习

1. 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 部分和: $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$

级数收敛: $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, 收敛和: $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

级数发散: $\lim_{n\to\infty} s_n$不存在

2. 性质(5个) (1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ku_n = ks$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$;

(3)去掉、加上或改变有限项,保持敛散性不变;

(4)增加括号,保持收敛性不变(去掉括号,保持发散性不变).

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$; **逆命题、逆否命题**

3. 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n \; (a \neq 0)$

当 $|q| < 1$ 时, **级数收敛,** $s = \frac{a}{1-q}$

当 $|q| \geq 1$ 时, **级数发散.**

4. 判定级数敛散性的方法: 定义、等比级数、性质

第二节
常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

二、交错级数及其审敛法

三、绝对收敛与条件收敛

*四、绝对收敛级数的性质

一、正项级数及其审敛法

若 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**正项级数**.

定理 1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和序列 S_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 有界.

证 "$\Longrightarrow$" 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 ,则 $\{S_n\}$ 收敛 , 故有界.

"$\Longleftarrow$" $\because u_n \geq 0$, $\therefore$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增,

又已知 $\{S_n\}$ 有界, 故 $\{S_n\}$ 收敛 , 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

上页 下页

定理2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $0 \le u_n \le v_n (n=1,2,\cdots)$

1)若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

2)若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

大敛则小敛,

小散则大散.

提示 $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$, $s_n \le \sigma_n$

例如,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$, $u_n = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 故原级数发散.

上页 下页

推论1 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，若存在自然数N，使得当 $n \geq N$ 时，

(1) $0 \leq u_n \leq k v_n \left(k > 0\right)$ 成立，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) $u_n \geq k v_n \left(k > 0\right)$ 成立，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例1 讨论 p 级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ (常数 $p>0$) 的敛散性.

解 1) 若 $p\le 1$, 因为对一切 $n\in N^+$,

$$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 由比较审敛法可知 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散 .

2) 若 $p>1$,因为当$n-1\le x\le n$时, $\dfrac{1}{n^p}\le\dfrac{1}{x^p}$, 故

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\left[1-\frac{1}{2^{p-1}}\right]+\left[\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right]}$$

考虑级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$ 的部分和

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^{p-1}}-\frac{1}{(k+1)^{p-1}}\right]=1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

故级数$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$收敛 , 由比较审敛法的推论知

p 级数收敛 .

上页 下页

例如, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

调和级数与 p 级数是两个常用的比较级数.

若存在 $N\in\mathbf{N}^{+}$, 对一切 $n\geq N$,

(1) $u_n \geq \frac{1}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散;

(2) $u_n \leq \frac{1}{n^p}\ (p>1)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

上页 下页

例2 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

证 因为 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散

根据比较审敛法可知, 所给级数发散.

练习 讨论级数 $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ 的敛散性.

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+4)} < \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2}$$

上页 下页

注: 用比较审敛法判断正项级数的敛散性:

1)若要判断该级数收敛,需要找一个比该级数大的收敛的级数与它进行比较;

2)若要判断该级数发散,需要找一个比该级数小的发散的级数与它进行比较.

定理3 (比较审敛法的极限形式) 设两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则有

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, 两个级数同时收敛或发散;

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证 据极限定义, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbf{N}^+$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \quad (\, l \neq +\infty \,)$$

上页 下页

$$(l-\varepsilon)v_n < u_n < (l+\varepsilon)v_n \quad (n > N)$$

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, 取 $\varepsilon < l$, 由定理 2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $l = 0$ 时, 利用 $u_n < (l+\varepsilon)v_n \ (n > N)$, 由定理2 知

若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 时, 存在 $N \in \mathbf{N}^+$, 当 $n > N$ 时, $\dfrac{u_n}{v_n} > 1$, 即

$$u_n > v_n$$

由定理2可知, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

$\sum u_n$, $\sum v_n$ 是两个**正项级数**, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$,

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时, 两个级数同时收敛或发散 ;

(2) 当 $l=0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时, $\sum u_n$ 也收敛 ;

(3) 当 $l=+\infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时, $\sum u_n$ 也发散 .

注:

1) u_n, v_n 均为无穷小时, l 的值反映了它们不同阶的比较.

2)用比较审敛法的极限形式判断正项级数的敛散性:

判断级数**收敛**,找一个**收敛的级数**与它比较;

判断级数**发散**,找一个**发散的级数**与它比较.

例3 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 $\because \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n}=1$

$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

练习 判别级数 $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3^2}+\sin\frac{\pi}{3^3}+\cdots+\sin\frac{\pi}{3^n}+\cdots$ 的敛散性.

例4 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 的敛散性.

$\ln(1+\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}$

解 $\because \lim_{n\to\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]\Big/\frac{1}{n^2}=1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 收敛.

习题P271. 1（5）

用比较审敛法判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$ **的敛散性.**

解 $a>1$时，$\because \frac{1}{1+a^n}\le\frac{1}{a^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$收敛.

$a\le1$时，$\because \frac{1}{1+a^n}\ge\frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$发散，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$发散.

思考：判别级数的敛散性.

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n} \qquad (2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{10} n}$$

提示 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n-n}\Big/\dfrac{1}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-\dfrac{n}{3^n}}=1,$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln^{10} n}\Big/\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln^{10} x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{10\cdot\ln^{9} x}=\cdots$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{10!}$ $\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$**发散，故原级数发散.**

为简便，下面介绍两种由级数自身就可判断敛散性的方法

上页 下页

定理4 比值审敛法 (D'alembert 判别法)

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .

证明自己看

说明: 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 时,级数可能收敛也可能发散.

例如, p – 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}=1$

但 $\begin{cases} p>1, & \text{级数收敛 ;} \\ p\le 1, & \text{级数发散 .} \end{cases}$

上页 下页

注：比值审敛法一般适用于u_n中含有 $n!$ 或关于n的若干连乘积的级数.

例5 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ $(x>0)$的敛散性.

解 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)x^n}{n x^{n-1}}=x$

根据定理4可知: 当$0<x<1$时，级数收敛；

当$x>1$时, 级数发散；

当$x=1$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} n$发散.

上页 下页

例6判别级数敛散性: $(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$; $(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$; $(3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

解 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$, **级数收敛.**

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty$, **级数发散.**

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=2\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-1}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$$

$=\frac{2}{e}<1$ **级数收敛.**

上页 下页

例7判别级数敛散性： (1) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$；(3) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{5^n}$

解 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1,$ **级数收敛.**

(2) $u_n=\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}\le\frac{n}{2^n}=v_n,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}<1,$

$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$**收敛，故原级数收敛.**

(3) $u_n=2^n\sin\frac{\pi}{5^n}\le 2^n\cdot\frac{\pi}{5^n}=\pi\left(\frac{2}{5}\right)^n=v_n$，**而** $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$**收敛，**

故原级数收敛. **也可以直接用比值审敛法判断**

例8 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$ 的敛散性.

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n+1)\cdot 2(n+1)}}{\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot n}{(2n+1)\cdot(n+1)}=1$

比值审敛法失效. 但

$\because 2n>2n-1\geq n \quad \therefore \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}<\frac{1}{n^2}.$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较审敛法，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$ 收敛.

也可用比较审敛法的极限形式或者级数收敛的定义判断