习题 10.3

1. 利用第二类曲线积分, 计算下列曲线所围成的图形的面积：

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$；.

(2) 曲线 $x=\cos^3 t,\ y=\sin t$；

(3) 摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 的第一拱($0\le t\le 2\pi$)与 x 轴.

2. 利用 Green 公式, 计算下列第二类曲线积分：

(1) $\oint_C (2x\sin y-4y)\mathrm{d}x+(x^2\cos y+x)\mathrm{d}y$，其中 C 为圆周 $x^2+y^2=3$, 并取逆时针方向；

(2) $\oint_C (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y$，其中 C 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，并取顺时针方向；

(3) $\oint_C (x^2y-2y)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{x^3}{3}-x\right)\mathrm{d}y$，其中 C 是直线 $x=1, y=x, y=2x$ 所围三角形区域的正向边界.

(4) $\int_C (\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$，其中 C 为由点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$；

(5) $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}y$，其中 C 是由点 $(\pi+1,\ 0$ 沿曲线 $y=\sin(x-1)$ 到点 $(1,0)$ 的一段弧；

(6) $\oint_C \dfrac{1}{x}\arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x+\dfrac{2}{y}\arctan\dfrac{x}{y}\mathrm{d}y$，其中 C 为圆周 $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 在第一象限所围区域的正向边界；

(7) $\int_C \dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 C 为星形线 $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t\ \left(t:0\to\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的一段；

(8) $\oint_C \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 C 是以点 $(1,0)$ 为圆心 $R\ (R>1)$ 为半径的圆周，并取逆时针方向；

3. 验证下列曲线积分在整个 xOy 平面上与路径无关, 并计算积分值：

(1) $\int_{(1,0)}^{(2,2)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$；

(2) $\int_{(0,0)}^{(\pi,2)}(x^2y+3x\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{1}{3}x^3-y\sin y\right)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_{(0,0)}^{\left(1,\frac{\pi}{2}\right)}\left(y+\mathrm{e}^{-x}\sin y\right)\mathrm{d}x+\left(x+\mathrm{e}^{-x}\cos y\right)\mathrm{d}y$；

(4) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}\dfrac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{1+(xy)^2}$.

4. 验证下列 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在右半平面内存在原函数 $u(x,y)$，并求其中之一：

(1) $yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln x\mathrm{d}y$；

(2) $\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$；

(3) $\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(4) $\dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

5. 设函数 $f(x)$ 具有连续导数, 试根据下列条件分别确定 $f(x)$：

(1) $f(0)=0$, 且曲线积分 $\int_C xy^2\mathrm{d}x+yf(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关;

(2) $f(1)=1$, 且曲线积分 $\int_C f(x)(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$ 与路径无关;

(3) $f(1)=\dfrac{1}{2}$, 且 $\oint_C\left[y\mathrm{e}^x f(x)-\dfrac{y}{x}\right]\mathrm{d}x-\ln f(x)\mathrm{d}y=0$, 其中 C 为平面区域 $x>1$ 内的任一封闭曲线.

6. 设函数 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_C 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，并且对任意 $t\in\mathbb{R}$ 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

求 $Q(x,y)$.

7. 确定常数 p, 使得在任何不含 $y=0$ 的点的区域上, 曲线积分

$$\int_C\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^p\left(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y\right)$$

与路径无关，并求当 C 从点 $(1,1)$ 到点 $(0,2)$ 时的积分值.

8. 求下列微分方程的通解：

(1) $[y+\ln(1+x)]\mathrm{d}x+(x+1-\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$；

(2) $(1+y\cos xy)\mathrm{d}x+x\cos xy\mathrm{d}y=0$；

(3) $y(2xy+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x-\mathrm{e}^x\mathrm{d}y=0$；

(4) $(y+2xy^2)\mathrm{d}x+(x-2x^2y)\mathrm{d}y=0$.

9. 设函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在闭区域 D 上具有一阶连续偏导数. 试证：

$$\iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D^+}uv\mathrm{d}y-\iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

10. 设 $f(t)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的正值连续函数, C 是逆时针方向的圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=1$. 试证：

$$\oint_C xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x\geq 2\pi.$$