习题 7.4

1. 判断下列四点是否共面:

(1) $A(1,0,1), B(2,4,6), C(3,-1,2), D(6,2,8)$;

(2) $A(1,2,1), B(2,2,3), C(-1,-1,2), D(4,5,6)$.

2. 设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$,

(1) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 则是否必有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$?

(2) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, 则是否必有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$?

(3) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, 则是否必有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$?

3. 指出下列平面对于坐标轴或坐标面的相对位置:

(1) $3x-2y+1=0$; (2) $2x+5=0$; (3) $x-y=0$; (4) $Ax+Cz=0$.

4. 求满足下列条件的平面方程:

(1) 过点 $M_0(1,-2,3)$, 法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1,-5)$;

(2) 在 x 轴, y 轴和 z 轴上的截距分别为 $2,-3,1$;

(3) 过点 $(5,-7,4)$ 且在 x、y、z 轴上截距相等;

(4) 过点 $P(3,-6,2)$, 且垂直于 OP (O 为原点);

(5) 过点 $M_1(2,1,-3)$, $M_2(5,-1,4)$ 和 $M_3(2,-2,4)$;

(6) 过 Ox 轴和点 $(4,-3,-1)$;

(7) 平行于 Oy 轴, 且通过点 $(1,-5,1)$ 和 $(3,2,-2)$;

(8) 平行于 xOz 平面, 且通过点 $(3,2,-7)$;

(9) 过点 $(1,-3,2)$, 且平行于平面 $x+5y-z-2=0$;

(10)过两点 $(8,-3,1),(4,7,2)$, 且垂直于平面 $3x+5y-z-21=0$;

(11)平行于平面 $2x+y+2z+5=0$ 而与三坐标面所构成的四面体的体积为 1

5. 指出下列直线的位置性态:

(1) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z+3}{-2}$

(2) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+3}{0}$;

(3) $x=-6t, y=5t, z=-3t$;

(4) $x=1-2t, y=-2+3t, z=0$.

6. 求满足下列条件的直线的对称式方程, 并将其中(1)~(4)化为参数方程和一般式方程:

(1) 过点 $M_0(1,2,3)$, 方向向量为 $\boldsymbol{s}=(2,-1,1)$;

(2) 过点 $M_0(-1,2,0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k}$;

(3) 过点 $(2,-3,8)$, 且平行于 y 轴;

(4) 过点 $(2,-3,8)$, 且平行于直线 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+3}{5}$;

(5) 过点 $(1,-3,2)$, 且垂直于平面 $x+5y-z-2=0$;

(6) 过点 $M_1(1,2,3)$, $M_2(2,-2,7)$;

(7) 过点 $(1,-3,2)$, 且与 z 轴垂直相交;

(8) 过点 $(-1,2,1)$, 且平行于直线 $\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$

(9) 垂直于三点 $M_1(1,2,3)$, $M_2(2,-2,7)$ 和 $M_3(0,1,5)$ 所在平面, 且过点 M_1;

(10) 过点 $(3,4,-4)$, 且与坐标轴夹角分别为 $\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}$ 的直线方程.

7. 求平面 $4x-y+2z-1=0$ 与三个坐标面的交线方程.

8. 将下列直线方程化为标准式方程：

(1) $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z+9=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=3z-5, \\ y=2z-8. \end{cases}$

9. (1) 求点 $(1,-3,2)$ 到平面 $3x+2y-6z-1=0$ 的距离；

(2) 求两平行平面 $3x+2y-6z-35=0, 3x+2y-6z-56=0$ 间的距离;

(3) 求平行于平面 $x+2y-2z=1$ 且与其距离为 2 的平面；

(4) 证明：两平行平面 $Ax+By+Cz+D_1=0, Ax+By+Cz+D_2=0$ 之间的距离是

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

10. 求下面各组平面的夹角，并判断它们是否平行或垂直？

(1) $x+z=1, y-z=1$；

(2) $-8x-6y+2z-1=0$, $4x+3y-z=0$；

(3) $2x-6y+3z-1=0$, $3x-y-4z+5=0$；

(4) $2x-3y+6z-12=0$, $x+2y+2z-7=0$.

11. 求下面各组直线的夹角，并判断它们是否平行？相交？或异面？在相交情况下求出它们的交点：

(1) $L_1: \frac{x-4}{2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{-3}$， $L_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$；

(2) $L_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{4}$， $L_2: \frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{3}$；

(3) $L_1: x=-6t, y=1+9t, z=-3t$， $L_2: x=1+2s, y=4-3s, z=s$；

(4) $L_1: x=1+t, y=2-t, z=3t$， $L_2: x=2-s, y=1+2s, z=4+s$.

12. 求下面各组直线与平面的夹角，并判断它们是否平行？垂直？相交？在相交情况下求出它们的交点：

(1) $L: \frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$, $\Pi: 4x-2y-2z-3=0$;

(2) $L: \frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$, $\Pi: 3x-2y+7z=31$;

(3) $L: \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$, $\Pi: x+y+z=3$;

(4) $L: \frac{x+2}{3}=\frac{2-y}{1}=\frac{z+1}{2}, \Pi: 2x+3y+3z-8=0$.

13. (1) 求过点 $(3,-2,-1)$ 且垂直于直线 $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}$ 的平面;

(2) 求点 $(1,0,-1)$ 到直线 $\frac{x-5}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{2}$ 的距离；

(3) 求点 $(2,3,1)$ 在直线 $\frac{x+7}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{3}$ 上的投影.

(4) 求点 $(3,-1,-1)$ 在平面 $x+2y+3z-30=0$ 上的投影.

14. 证明两直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ 和 $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$ 是异面直线，并求它们之间的距离, 公垂线方程, 及公垂线与两直线的交点.

15. 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程.

16. 求过两平面 $x+y-z=0, x+2y+z=0$ 的交线 l 的两个互相垂直的平面，其中一个平面过点 $A(0,1,-1)$.

17. 求满足下列条件的平面方程：

(1) 过点 $(3,-2,-1)$ 和直线 $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$.

(2) 过点 $(-1,-2,3)$，且和两直线 $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-5}{6}$ 及 $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{2}$ 平行;

(3) 过两平行直线 $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$， $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$;

(4) 包含直线 $\begin{cases} x-z-1=0 \\ y+2z-3=0 \end{cases}$ 且与平面 $x+y-2z=1$ 垂直;

(5) 过 Ox 轴，且与平面 $y=x$ 成 $\frac{\pi}{3}$ 的角度;

(6) 过两平面 $x+5y+z=0, x-z+4=0$ 的交线，且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

18. 求满足下列条件的直线方程：

(1) 在平面 $x+y+z=1$ 上, 且与直线 $y=1, z=-1$ 垂直相交;

(2) 过点 $(-1,0,4)$,且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交;

(3) 过点 $(1,2,1)$，且与直线 $\frac{x}{2}=y=-z$ 相交，又垂直于直线 $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$；

19. 一动点与两定点 $(2,2,1)$， $(1,3,4)$ 等距离，求此动点轨迹的方程.