

习题 6.7

1. 一个半球体状的雪堆, 其体积溶化的速率与半球体面积 S 成正比, 比例常数 $K > 0$. 假设在溶化过程中雪堆始终保持半球体状, 已知半径为 r_0 的雪堆在开始溶化的 3 小时内, 溶化了其体积的 $\frac{7}{8}$, 问雪堆全部溶化需要多少小时?
2. 某湖泊的水量为 V , 每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$, 流入湖泊内的清水量为 $\frac{V}{6}$, 流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$. 已知现在湖泊中污染物 A 的含量为 $5Q_0$, 要求以后排入湖泊中含 A 污水的浓度不得超过 $\frac{Q_0}{V}$, 问至多需经过多少年, 湖泊中污染物 A 的含量 $Q(t)$ 降至 Q_0 以内? (假设湖水中 A 的浓度是均匀的)
3. 某银行帐户, 以连续复利方式计息, 年利息为 5%. 储户希望连续 20 年以每年 12000 元的连续速率用这一帐户支付职工的工资.
 - (1) 写出帐户余额 $B(t)$ 所满足的微分方程, t 以年为单位;
 - (2) 若初始存入帐户中的数额为 B_0 , 试求上述微分方程的解;
 - (3) 问初始存入的数额为多少, 才能使 20 年后帐户中的余额恰好减至 0?
4. 质量均匀, 长为 16 米的链条自桌面上无摩擦地滑下. 设链条从静止开始滑下时, 它自桌面垂下部分的长为 2 米, 求链条从桌面上全部滑离所需要的时间.
5. 质量均匀的链条悬挂在钉子上, 开始运动时链条一端离开钉子 8 米, 另一端离开钉子 12 米, 若不计钉子对链条产生的摩擦力, 求链条自然滑落钉子所需的时间.
6. 一单摆长为 l , 质量为 m , 作简谐运动. 假设其来往摆动之偏角 θ 很小 (此时 $\sin \theta \approx \theta$), 试求单摆的运动方程, 并求单摆摆动的周期.