

## 习题 5.7

1. 讨论下列广义积分的敛散性, 如果收敛求出它的值:

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx \quad (a > 0);$$

$$(2) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x};$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx;$$

$$(4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2};$$

$$(5) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx;$$

$$(6) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}};$$

$$(7) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x+1}};$$

$$(8) \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx;$$

$$(9) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2};$$

$$(10) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(4+x)}.$$

2. 讨论下列广义积分的敛散性, 如果收敛求出它的值:

$$(1) \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(2) \int_{-1}^0 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}};$$

$$(3) \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2};$$

$$(4) \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3};$$

$$(5) \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}};$$

$$(6) \int_0^1 \ln(1-x) dx;$$

$$(7) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}};$$

$$(8) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x^2-x|}}.$$

3. 设  $k \in \mathbb{R}$ , 试讨论广义积分  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$  的敛散性.

4. 求由 Descartes 叶形线  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  ( $a > 0$ ) 所围图形的面积.

5. \*用  $\Gamma$  函数表示下列积分, 并指出这些积分的收敛范围:

$$(1) \int_0^1 \left( \ln \frac{1}{x} \right)^p dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx \quad (n > 0).$$