第三节

齐次方程

一、齐次方程

*二、可化为齐次的方程

一、 齐次方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\dfrac{y}{x})$ 的方程叫做齐次方程 .

解法: ①令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$,

代入齐次方程，得 $u+x\dfrac{du}{dx}=\varphi(u)$,

这是一个可分离变量的方程，

②分离变量，得 $\dfrac{du}{\varphi(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$,

③ 两边积分后，再用 $\dfrac{y}{x}$ 代替 u, 便得原方程的通解.

例1 解方程：$y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$

解 原方程可写成：$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}$

令 $\frac{y}{x} = u$，则 $y = ux$，$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

原方程变为：$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u-1}$，即：$x\frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1}$.

分离变量，得 $\left(1 - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}$

两端积分，得 $u - \ln|u| + C_1 = \ln|x| \Longrightarrow \ln|xu| = u + C_1$

所给方程的通解为：$\ln|y| = \frac{y}{x} + C_1$ 即：$y = Ce^{\frac{y}{x}}$

上页 下页

例2 $\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(y^2+2xy-x^2\right)dy=0 \quad y\big|_{x=1}=1$

解 由 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2+2xy-y^2}{y^2+2xy-x^2}$ 得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1+2\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+2\dfrac{y}{x}-1}$

令 $\dfrac{y}{x}=u$, 则 $y=ux$, $\quad \dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$

$$\therefore u+x\frac{du}{dx}=-\frac{1+2u-u^2}{u^2+2u-1}$$

分离变量，得 $-\dfrac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}du=\dfrac{1}{x}dx$

上页 下页

$$\therefore -\left(\frac{-1}{u+1}+\frac{2u}{u^2+1}\right)du=\frac{1}{x}dx$$

两端积分，得 $\ln|u+1|-\ln(u^2+1)=\ln|x|+\ln C_1$

$$\therefore \frac{u+1}{u^2+1}=Cx \quad (C=\pm C_1)$$

把 $\frac{y}{x}=u$代入上式，得方程的通解为：$\frac{y+x}{y^2+x^2}=C$

把$y|_{x=1}=1$代入上式，得 $C=1$

所以得方程得特解为：$x^2+y^2=x+y$

例3 $$\left(1+2e^{\frac{x}{y}}\right)dx+2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

解 原方程变为: $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)}{1+2e^{\frac{x}{y}}}$ 令 $\dfrac{x}{y}=u$,

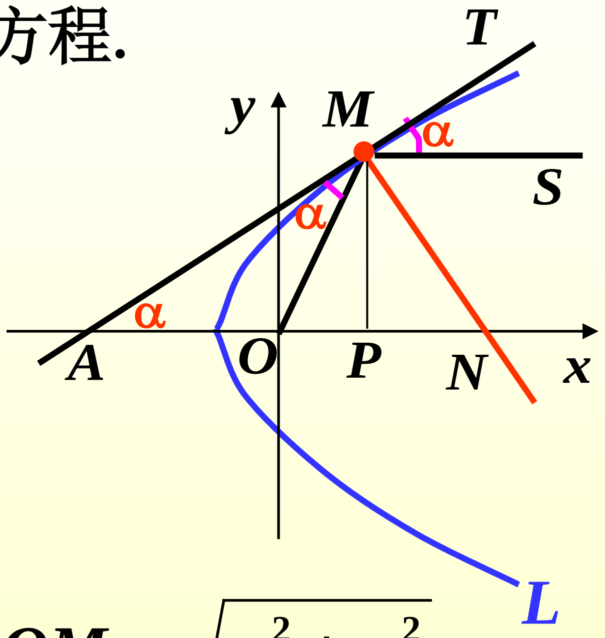
则 $x=uy$, $\dfrac{dx}{dy}=u+y\dfrac{du}{dy}$ 于是 $u+y\dfrac{du}{dy}=-\dfrac{2e^u(1-u)}{1+2e^u}$

$$\Longrightarrow \frac{2e^u+1}{2e^u+u}du=-\frac{dy}{y} \Longrightarrow \ln\left|2e^u+u\right|=-\ln|y|+\ln C_1$$

$$\Longrightarrow 2e^u+u=\frac{C}{y} \quad (C=\pm C_1) \Longrightarrow 2e^{\frac{x}{y}}+\frac{x}{y}=\frac{C}{y}$$

上页 下页

例4 探照灯的聚光镜面是一张旋转曲面，它的形状由*xOy*坐标面上的一条曲线 L 绕 x 轴旋转而成，按聚光性能的要求，在其旋转轴（x 轴）上一点*O*处发出的一切光线，经它反射后都与旋转轴平行. 求曲线 L 的方程.



解 取光源所在之处做原点*O*.

设$M(x, y)$为 L 的任一点，$y' = \tan\alpha$

∵入射角=反射角，∴$\angle OMA = \angle SMT = \alpha$

$\therefore AO = OM$

$$AO = AP - OP = PM\cot\alpha - OP = \frac{y}{y'} - x,\quad OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

于是得微分方程 $\dfrac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}$

即 $$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}$$

令 $\dfrac{x}{y}=v$, 则 $x=yv$, 并且 $\dfrac{dx}{dy}=v+y\dfrac{dv}{dy}$

代入上式得 $v+y\dfrac{dv}{dy}=v+\sqrt{v^2+1}$ $\Longrightarrow$ $y\dfrac{dv}{dy}=\sqrt{v^2+1}$

亦即 $\dfrac{dv}{\sqrt{v^2+1}}=\dfrac{dy}{y}$, 积分得: $\ln\left|v+\sqrt{v^2+1}\right|=\ln|y|-\ln C_1$

$\Longrightarrow v+\sqrt{v^2+1}=\dfrac{y}{C}$ $(C=\pm C_1)$ $\Longrightarrow \left(\dfrac{y}{C}-v\right)^2=v^2+1$

$\Longrightarrow \dfrac{y^2}{C^2}-\dfrac{2yv}{C}=1$ $\xrightarrow{yv=x}$ $y^2=2C\left(x+\dfrac{C}{2}\right)$

*二、可化为齐次的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\qquad (c^2+c_1^2\neq 0)$$

1. 当 $\frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}$ 时，作变换 $x=X+h,\ y=Y+k$（ h, k 为待定常数），

则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X,\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$， 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}$$

令 $\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$， 解出 h ， k

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}$$ (齐次方程)

求出其解后, 将 $X = x - h, Y = y - k$ 代入, 即得原方程的解.

2. 当 $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ 时, 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}$$

令 $v = ax + by$, 则 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a + b\,\frac{v + c}{\lambda v + c_1}$$

(可分离变量方程)

注: 上述方法可适用于下述更一般的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \quad (c^2 + c_1^2 \neq 0)$$

例6　求解 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y+4}{x-y-6} \\ y\big|_{x=2} = -5 \end{cases}$

解　令 $\begin{cases} h+k+4=0 \\ h-k-6=0 \end{cases}$ 得 $h=1, k=-5$

令 $x = X+1,\ y = Y-5$，得 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \dfrac{X+Y}{X-Y}$

再令 $Y = X\,u$，得 $\dfrac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}X}{X}$

积分得 $\arctan u - \dfrac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|C\,X|$

代回原变量，得原方程的通解：

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right]=\ln\left|C(x-1)\right|$$

利用 $y\big|_{x=2}=-5$ 得 $C=1$，故所求特解为

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}=\frac{1}{2}\ln\left[(x-1)^2+(y+5)^2\right]$$

思考: 若方程改为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y+4}{x+y-6}$，如何求解?

提示: 令 $v=x+y$.

第四节
一阶线性微分方程

一、一阶线性微分方程

*二、伯努利方程

一、一阶线性微分方程

1 定义 形如 $$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)} \qquad (1)$$

的一阶微分方程称为一阶线性微分方程.

特别的，若 $Q(x)=0$, 即 $$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=0} \qquad (2)$$

称为对应于（1）的一阶齐次线性微分方程.

若 $Q(x)\neq 0$, 即（1）称为一阶非齐次线性微分方程.

2 解法

① $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$ （2）的解法

（这是可分离变量的微分方程）

方程（2）分离变量， 得 $\dfrac{dy}{y}=-P(x)dx$

两边积分： $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx$ 得：

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln C_1$$

所以（2）的通解为： $\boxed{y=Ce^{-\int P(x)dx}}$ $(C=\pm e^{C_1})$

② $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$（1）的解法　（常数变易法）

第一步，先解（1）对应的齐次方程，得其通解：$y=Ce^{-\int P(x)dx}$

第二步，把上式中的C换成 $u(x)$ $\longrightarrow$（常数变易）

将 $y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$代入（1），得：

即　$u'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$　　$\therefore u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$

求得（1）的通解为：$\boxed{y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)}$

即　$y=\underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{\text{非齐次方程特解}}$

例1 求方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解 .

解 法1 常数变易法. 先求对应齐次方程 的通解.

对应的齐次方程为: $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=0$

分离变量，得 $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{2dx}{x+1}$ 得其通解为: $y=C(x+1)^2$.

令 $y=u(x)(x+1)^2$，代入原方程，得 $u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}$

两端积分，得 $u=\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$

所以原方程通解为 $y=(x+1)^2\left[\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$.

法2　公式法　　直接利用以下公式求解：

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

$$\because P(x)=-\frac{2}{x+1},\quad Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

$$\therefore\ y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

$$=e^{\int\frac{2}{1+x}dx}\left(\int(1+x)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{1+x}dx}dx+C\right)$$

$$=(1+x)^{2}\left(\int(1+x)^{\frac{5}{2}}(1+x)^{-2}dx+C\right)$$

$$=(x+1)^{2}\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$$

练习 求解 $\dfrac{dy}{dx} - y\tan x = \sec x,\quad y\big|_{x=0} = 0$

答案 原方程的通解为 $y = \dfrac{C+x}{\cos x},$

代入初始条件,得 $C = 0$

所以原方程的解为 $y = \dfrac{x}{\cos x}$

说明 利用变量替换把一个较复杂的微分方程化为较简单的微分方程，是解微分方程的一种常用方法.

例2 解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}$.

解 法1 把方程变为 $\dfrac{dx}{dy}-x=y$，一阶线性微分方程（解略）.

法2 令 $x+y=u$， 则 $y=u-x$，代入原方程得

$$\frac{du}{dx}-1=\frac{1}{u} \Longrightarrow \frac{du}{dx}=\frac{u+1}{u}$$

分离变量，得 $\dfrac{u}{u+1}du=dx$

两端积分，得 $u-\ln|u+1|=x+C$

以 $u=x+y$ 代入即得原方程通解为 $y-\ln|x+y+1|=C$

例3 解方程 $y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1$

$$= (y + \sin x - 1)^2 - \cos x$$

解 令$y + \sin x - 1 = u$ 则$y' = u' - \cos x$

原方程可化为 $u' = u^2$

分离变量得 $\dfrac{du}{u^2} = dx$

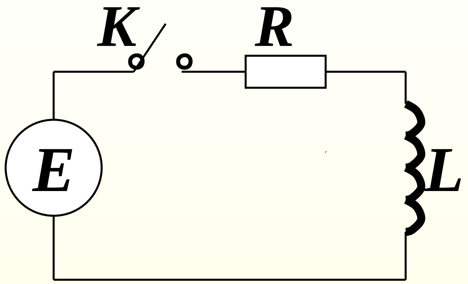
两端积分得 $-\dfrac{1}{u} = x + C$

通解为 $u = -\dfrac{1}{x + C}$

原方程的通解为 $y = 1 - \sin x - \dfrac{1}{x + C}$

28页 上页 下页

例4 求如图所示电路的电流 $i(t)$. 其中：电阻R 、电感L均为常数，电动势 $E = E_m \sin\omega t$.



解 1）列方程：由电学知，当电流变化时，

L 上有感应电动势 $-L\dfrac{di}{dt}$， 则

$$E - L\frac{di}{dt} - Ri = 0 \longrightarrow \text{回路电压定律}$$

即 $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$，初始条件为 $i\big|_{t=0} = 0$.

2）解方程

$$\because P(t) = \frac{R}{L}, \quad Q(t) = \frac{E}{L} = \frac{E_m}{L}\sin\omega t$$

代入公式，得 $i(t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int \frac{E_m}{L} e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt + C\right)$

即 $i(t)=\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)+Ce^{-\frac{R}{L}t}$

将 $i\big|_{t=0}=0$ 代入上式，得 $C=\frac{\omega L E_m}{R^2+\omega^2L^2}$

因此，所求函数为：

$$i(t)=\frac{\omega L E_m}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)$$

*二、伯努利方程


雅各布第一・伯努利

定义 形如
$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (n\neq 0,\ 1)}$$
的微分方程称为伯努利（Bernoulli）方程.

显然，当 $n=0,1$ 时，上方程即为线性微分方程.

解法 把方程化为 $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$

令 $z=y^{1-n}$， 则 $\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$，

所以 $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$

求出此方程的通解后，以 y^{1-n} 代 z，便得原方程的通解.

上页 下页

例5 求方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解 .

解 用 y^2 除方程的两端，得 $y^{-2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y^{-1}=a(\ln x)$

令 $z=y^{-1}$， 得 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{d(y^{-1})}{dx}=-y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$

于是 $\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{1}{x}z=-a(\ln x)$

该方程通解为 $z=x\left[C-\dfrac{a}{2}(\ln x)^2\right]$

以 y^{-1} 代 z，得所求方程通解为：$yx\left[C-\dfrac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$

例6 求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}$ 的通解.

解 用$\sqrt{y}$除方程的两端，得 $\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}\sqrt{y}=x$

令$z=\sqrt{y}$ 则 $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}$

于是 $\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=\frac{1}{2}x$ 得 $z=x^2(C+\frac{1}{2}\ln|x|)$

原方程通解为 $y=x^4(C+\frac{1}{2}\ln|x|)^2$

内容小结

1. 一阶线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

方法1　先解齐次方程，再用常数变易法.

方法2　用通解公式 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

2. 伯努利方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n\quad(n\neq 0,1)$

令 $u=y^{1-n}$，化为线性方程求解.

3. 注意用变量代换将方程化为已知类型的方程

思考与练习

1.判别下列方程类型: 提示:

(1) $x\frac{dy}{dx}+y=xy\frac{dy}{dx}$ $\longrightarrow$ $\frac{y-1}{y}dy=\frac{dx}{x}$ 可分离变量方程

(2) $x\frac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x)$ $\longrightarrow$ $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$ 齐次方程

(3) $(y-x^3)dx-2x\,dy=0$ $\longrightarrow$ $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=-\frac{x^2}{2}$ 线性方程

(4) $2y\,dx+(y^3-x)dy=0$ $\longrightarrow$ $\frac{dx}{dy}-\frac{1}{2y}x=-\frac{y^2}{2}$ 线性方程

(5) $(y\ln x-2)y\,dx=x\,dy$ $\longrightarrow$ $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{\ln x}{x}y^2$ 伯努利方程

2. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{xy}}+\left[\dfrac{2}{y}-\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}\right]\mathrm{d}y=0$ 的通解 .

解: 注意 x, y 同号, 不妨设 $x, y>0$, 此时 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\mathrm{d}\sqrt{x}$,

故方程可变形为 $2\dfrac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}y}-\dfrac{\sqrt{x}}{y}=-\dfrac{2}{\sqrt{y}}$

这是以 $\sqrt{x}$ 为因变量 y 为自变量的一阶线性方程

由一阶线性方程通解公式 , 得

$$\sqrt{x}=\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}y}{2y}}\left[\int\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}y}{2y}}\right)\mathrm{d}y+\ln C\right]\qquad (C>0)$$

$$=\sqrt{y}\left[-\int\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y+\ln C\right]=\sqrt{y}\ln\frac{C}{y}$$

所求通解为 $y\mathrm{e}^{\sqrt{x/y}}=C\ \ (C>0)$

备用题

1. 求一连续可导函数 $f(x)$ 使其满足下列方程:

$$f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

令 $u=x-t$

提示: $f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$

则有 $\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$ 线性方程

利用公式可求出 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x-\mathrm{e}^{-x})$

2. 设有微分方程 $y' + y = f(x)$，其中

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

试求此方程满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 0$ 的连续解.

解: 1) 先解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 2, & 0 \le x \le 1 \\ y\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$

利用通解公式, 得

$$y = e^{-\int dx}\left(\int 2 e^{\int dx} dx + C_1\right) = e^{-x}(2e^x + C_1) = 2 + C_1 e^{-x}$$

利用 $y\big|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = -2$

故有 $y = 2 - 2e^{-x} \quad (0 \le x \le 1)$

结束 上页 下页

2) **再解定解问题** $\begin{cases} y' + y = 0\,, \quad x > 1 \\ y\big|_{x=1} = y(1) = 2 - 2e^{-1} \end{cases}$

此齐次线性方程的通解为 $y = C_2 e^{-x} \quad (x \geq 1)$

利用衔接条件得 $C_2 = 2(e-1)$

因此有 $y = 2(e-1)e^{-x} \quad (x \geq 1)$

3) **原问题的解为**

$$y = \begin{cases} 2(1 - e^{-x}), & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(e-1)e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$y = 2 - 2e^{-x} \quad (0 \leq x \leq 1)$$