知识回顾

积分学	定积分	二重积分	三重积分	曲线积分	曲面积分
积分域	区 间	平面域	空间域	曲线弧	曲面域

定义？

分类？

计算？

计算:

$$\text{重积分} \xrightarrow{\text{转化为}} \text{定积分}$$

曲线积分（两类）

- 利用积分弧的方程化为定积分
- 利用格林公式
- 利用积分与路径无关的条件（四个）

第四节 对面积的曲面积分

一、对面积的曲面积分的概念与性质

二、对面积的曲面积分的计算法

一、对面积的曲面积分的概念与性质

引例: 设曲面形构件具有连续面密度 $\rho(x,y,z)$, 求质量 M.

（1）将曲面 Σ 任意分割成 n 小块:

$\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_i, \cdots, \Delta S_n$.（$\Delta S_i$ 也表其面积）

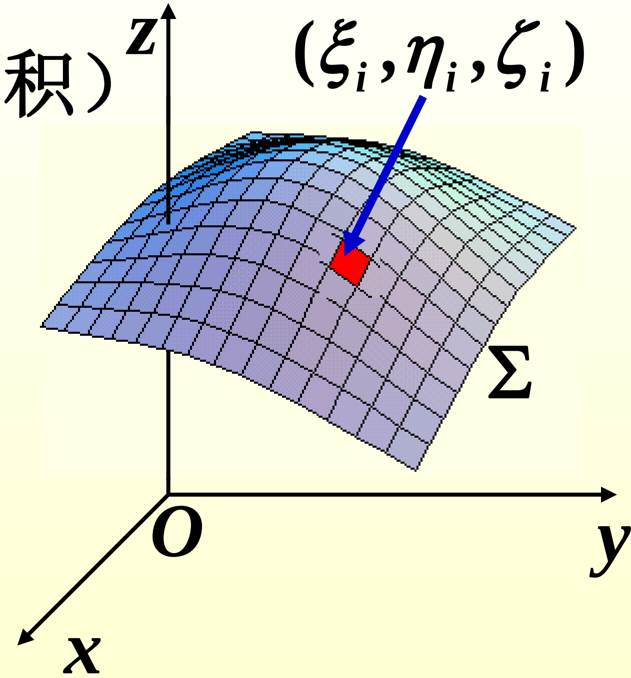
（2）任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta S_i$,

$$\Delta M_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i, \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

（3）求和 $M = \sum_{i=1}^{n} \Delta M_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$

（4）取极限　令 $\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta S_i \text{的直径}\}$

$$M = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$



定义: 设 Σ 为光滑曲面, $f(x, y, z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数, 若对Σ 做任意分割和局部区域任意取点, "乘积和式极限"

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

都存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一类曲面积分.其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

物理意义

据此定义, 曲面形构件的质量为 $M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$

曲面面积为 $S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$

几何意义

注: 给出了求曲面面积的另一方法.

对面积的曲面积分与对弧长的曲线积分性质类似.

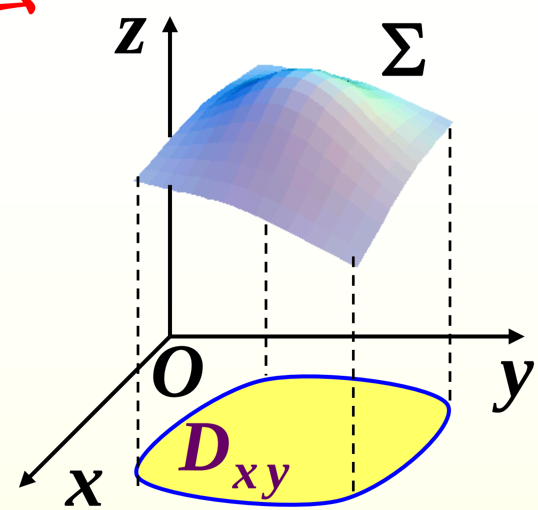
- 积分的存在性. 若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面Σ上连续,
  则对面积的曲面积分存在.
- 对积分域的可加性. 若Σ是分片光滑的, 例如分成两片光滑曲面 Σ_1,Σ_2, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

- 线性性质. 设 k_1,k_2为常数,则

$$\iint_{\Sigma}\left[k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)\right]\mathrm{d}S = k_1\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S \pm k_2\iint_{\Sigma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

二、对面积的曲面积分的计算法



定理: 设有光滑曲面$\Sigma: z = z(x, y)$, Σ在xoy面上的投影为D_{xy}, $z = z(x, y)$在D_{xy}上具有连续偏导数, $f(x, y, z)$ 在Σ 上连续, 则曲面积分$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S$存在, 且有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, \underline{z})\underline{\mathrm{d}S}$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

基本思路:投影法变成二重积分

注　确定曲面方程、将曲面投影是关键

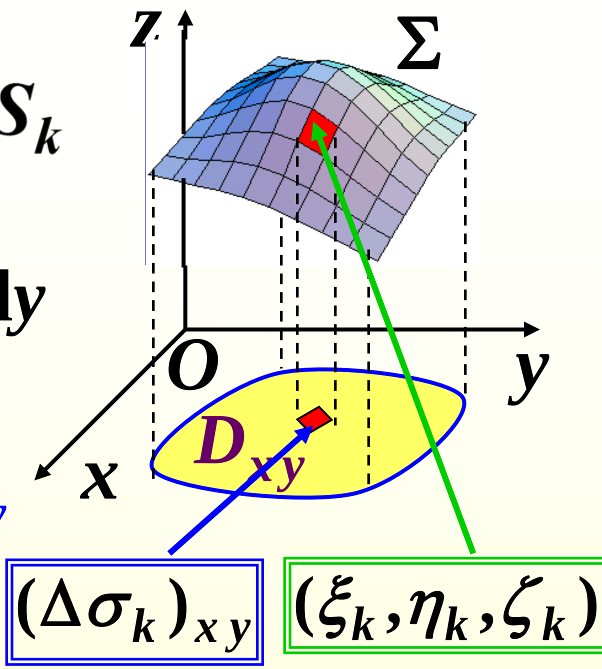
证明: 由定义知

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

而 $\Delta S_k = \iint_{(\Delta\sigma_k)_{xy}} \sqrt{1+z_x^{\ 2}(x,y)+z_y^{\ 2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \sqrt{1+z_x^{\ 2}(\xi_k',\eta_k')+z_y^{\ 2}(\xi_k',\eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

二重积分的中值定理



$$\therefore \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\underline{\xi_k,\eta_k}))\cdot \sqrt{1+z_x^{\ 2}(\underline{\xi_k',\eta_k'})+z_y^{\ 2}(\underline{\xi_k',\eta_k'})}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

(Σ 光滑)

9页 上页 下页

$$\therefore \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot \sqrt{1+z_x^{\ 2}(\xi_k',\eta_k')+z_y^{\ 2}(\xi_k',\eta_k')}(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot \sqrt{1+z_x^{\ 2}(\xi_k,\eta_k)+z_y^{\ 2}(\xi_k,\eta_k)}(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,\ z(x,y))\sqrt{1+z_x^{\ 2}(x,y)+z_y^{\ 2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

说明: 如果曲面方程为 $\Sigma: x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$

则有 $\boxed{\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y{}^2+x_z{}^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$

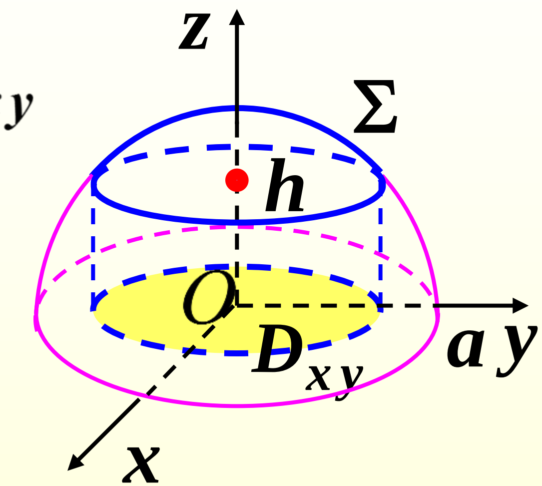
若为 $\Sigma: y = y(x,z), (x,z) \in D_{xz}$

则有 $\boxed{\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x{}^2+y_z{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z}$

$\Sigma: z = z(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{z}$，其中$\Sigma$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.



解 $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ ,(x,y)\in D_{xy}$

$$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\therefore \iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r\,\mathrm{d}r}{a^2-r^2}$$

$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)\right]_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

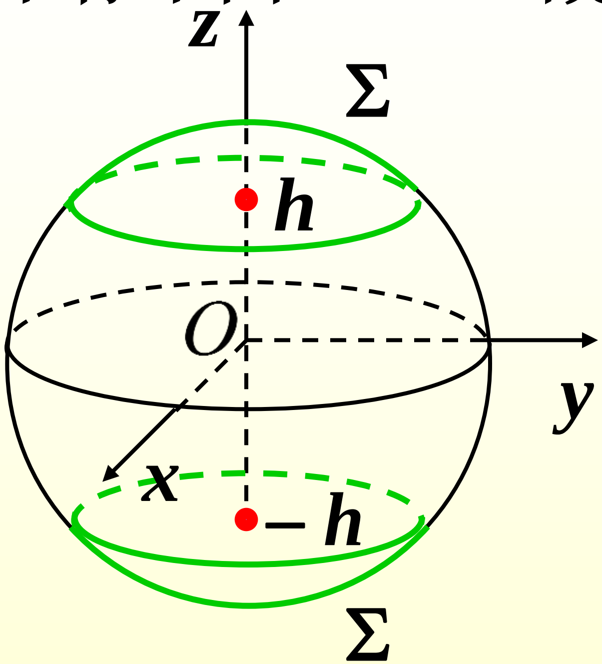
上页 下页

思考:

若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分，则

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=(\quad 0 \quad)$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{|z|}=(\quad 4\pi a\ln\frac{a}{h}\quad)$$



练习：设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，试计算：

$$(1) I_1=\oiint_{\Sigma}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dS;\qquad (2) I_2=\oiint_{\Sigma}(x+y+z)dS.$$

（1）由于积分曲面关于xOy面对称，被积函数

$$f(x,y,-z)=\frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2}}=-f(x,y,z)$$

（关于z的奇函数）

$$\therefore I_1=\oiint_\Sigma \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dS=0.$$

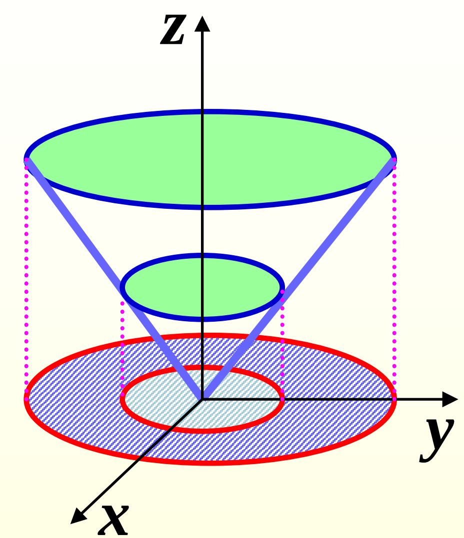
（2）由于积分曲面关于原点对称，且

$$f(-x,-y,-z)=-x-y-z=-f(x,y,z),$$

$$\therefore \oiint_\Sigma (x+y+z)dS=0$$

自己总结用对称性计算曲面积分的方法！！

练习计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$界于平面$z=1$及$z=2$之间的部分.



解 $D_{xy}: 1 \le x^2+y^2 \le 4$

$$\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$$

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint\limits_{\Sigma}zdS$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\left[r\cos\theta+r\sin\theta+r\right]rdr$$

$$=\frac{14\sqrt{2}}{3}\pi$$

可以用曲面积分的对称吗？

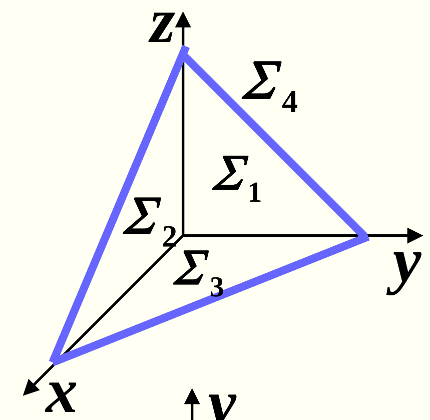
由于积分区域 D_{xy} 关于原点对称，且

$$f(-x,-y)=-(x+y)=-f(x,y)$$

$$\therefore \iint\limits_{D_{xy}}(x+y)dxdy=0$$

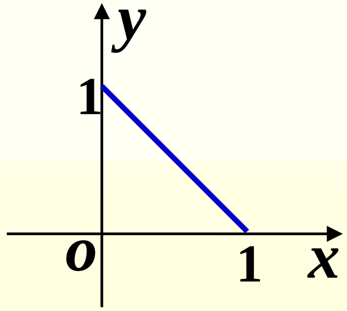
上页 下页

例3 计算 $\displaystyle\oiint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.



解 设 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4$ 分别表示Σ在平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 上的部分，则

$$\text{原式}=\left(\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_3}+\iint_{\Sigma_4}\right)xyz\,\mathrm{d}S$$



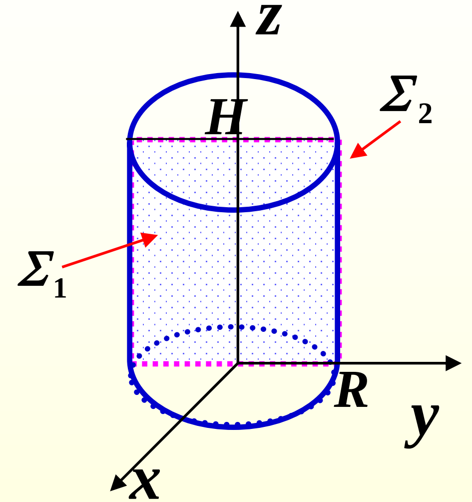
$$=\iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma_4: z=1-x-y,\ (x,y)\in D_{xy}:\begin{cases}0\le y\le 1-x\\ 0\le x\le 1\end{cases}$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}\big/120$$

例4 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ是介于平面 $z=0, z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

P_{250}4(1)



解1 $\Sigma_1: x=\sqrt{R^2-y^2}$, $\Sigma_2: x=-\sqrt{R^2-y^2}$

$$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2,$$

$$D_{yz}: -R\le y\le R,\quad 0\le z\le h$$

$$I=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{1}{R^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz=2R\int_{-R}^{R}\frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}}\int_0^H\frac{dz}{R^2+z^2}$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$

例4 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$， 其中 Σ 是介于平面 $z=0, z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

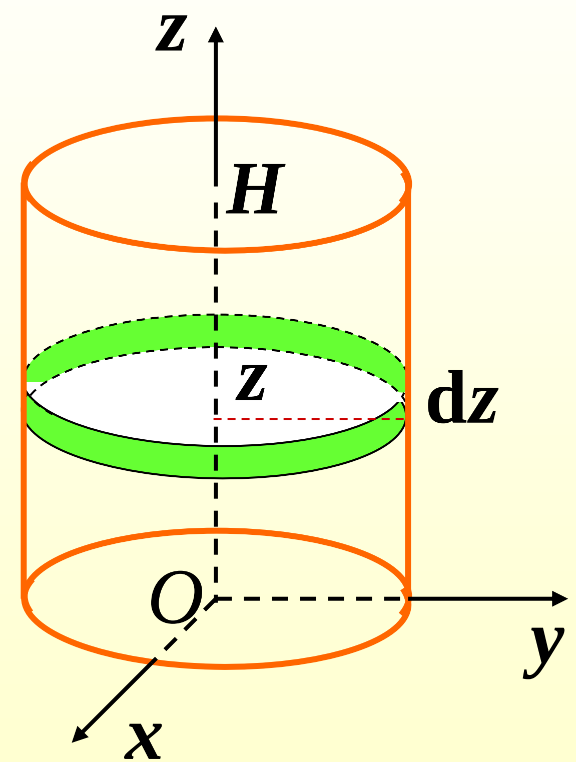
解2 取曲面面积元素

$$\mathrm{d}S=2\pi R\mathrm{d}z$$

则

$$I=\int_0^H\frac{2\pi R\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$



思考 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2 dS$，其中$\Sigma$是介于平面 $z=0, z=H$之间的圆柱面$x^2+y^2=R^2$.

解 由积分曲面Σ的方程知，x与y对于积分曲面的地位相同，

即 $\iint\limits_{\Sigma} x^2 dS=\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS.$ 轮换对称性

所以 $I=\frac{1}{2}\left(\iint\limits_{\Sigma} x^2 dS+\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS\right)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma} R^2 dS=\frac{1}{2}R^2\iint\limits_{\Sigma} dS=\frac{1}{2}R^2\cdot 2\pi RH=\pi R^3 H$$

曲面方程代入被积函数

内容小结

1. 定义: $$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

2. 计算: 设$\Sigma: z = z(x,y), (x,y)\in D_{xy}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^{\,2}+z_y^{\,2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(曲面的其他两种情况类似)

备用题 1 已知曲面壳 $z = 3-(x^2+y^2)$ 的面密度 $\mu = x^2+y^2+z$, 求此曲面壳在平面 z =1以上部分Σ的质量 M.

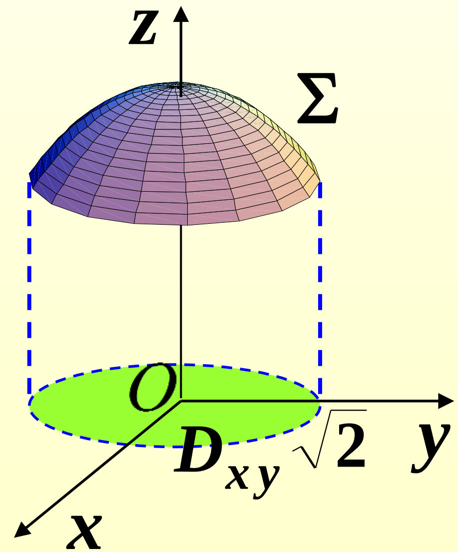
解 Σ在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2 \le 2$, 故

$$M = \iint_{\Sigma} \mu \,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} 3\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

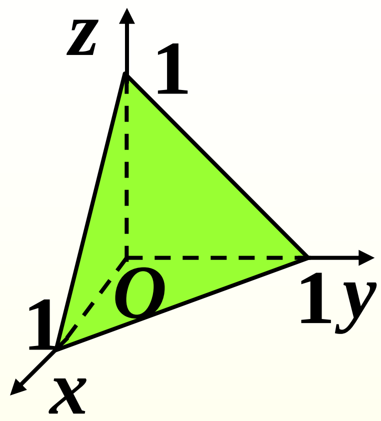
$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= 6\pi\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(1+4r^2)$$

$$= 13\pi$$



2 设 Σ 是四面体 $x+y+z\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ 的表面，计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S.$



解 在四面体的四个面上

平面方程	$\mathrm{d}S$	投影域
$z=1-x-y$	$\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$D_{xy}:0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$
$z=0$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	同上
$y=0$	$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$	$D_{zx}:0\le z\le 1,\ 0\le x\le 1-z$
$x=0$	$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$D_{yz}:0\le z\le 1,\ 0\le y\le 1-z$

结束 目录 上页 下页

$$\therefore \quad I = \oiint_{\Sigma} \frac{1}{(1+x+y)^2} \mathrm{d}S$$

$$= (\sqrt{3}+1)\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}\,y +$$

$$+\int_0^1 \mathrm{d}\,z\int_0^{1-z} \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}\,z\int_0^{1-z} \frac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-1)\ln 2$$

平面方程	$\mathrm{d}S$	投影域
$z = 1 - x - y$	$\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$D_{xy}: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x$
$z = 0$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	同上
$y = 0$	$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$	$D_{zx}: 0 \le z \le 1, 0 \le x \le 1 - z$
$x = 0$	$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$D_{yz}: 0 \le z \le 1, 0 \le y \le 1 - z$