第六节 多元函数微分学的几何应用

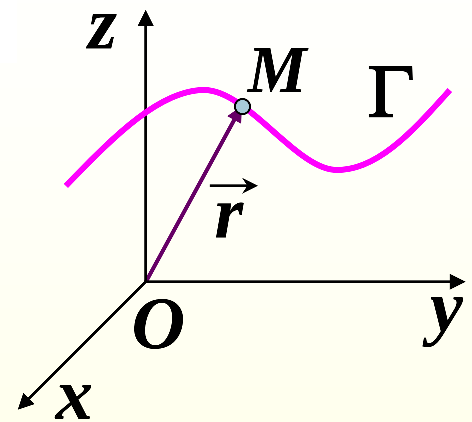
一、一元向量值函数及其导数

二、空间曲线的切线与法平面

三、曲面的切平面与法线

一、一元向量值函数及其导数

引例: 已知空间曲线 Γ 的参数方程:



$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \quad t\in[\alpha,\beta] \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

记 $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{f}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$

Γ 的向量方程 $\vec{r}=\vec{f}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$

此方程确定映射 $\vec{f}:[\alpha,\beta]\to \mathrm{R}^3$,称此映射为一元向量值函数.

对 Γ 上的动点 M ,显然 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, 即 Γ 是 $\vec{r}$ 的终点 M 的轨迹，此轨迹称为向量值函数的终端曲线 .

要用向量值函数研究曲线的**连续性**和**光滑性**，

就需要引进向量值函数的极限、连续和导数的概念.

定义: 给定数集 $D \subset \mathrm{R}$,称映射 $\vec{f}: D \to \mathrm{R}^n$ 为**一元向量值函数**（简称向量值函数），记为

$$\vec{r} = \vec{f}(t), \quad t \in D$$

定义域

因变量

自变量

向量值函数的极限、连续和导数都与各分量的极限、连续和导数密切相关,因此下面仅以 $n = 3$ 的情形为代表进行讨论.

严格定义见P93-94

设 $\vec{f}(t)=(f_1(t), f_2(t), f_3(t)),\ t\in D$, 则

极限: $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=(\lim\limits_{t\to t_0}f_1(t), \lim\limits_{t\to t_0}f_2(t), \lim\limits_{t\to t_0}f_3(t))$

连续: $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{f}(t_0)$

导数: $\vec{f}'(t)=(f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$

$$\boxed{\vec{f}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}}$$

上页 下页

向量值函数的导数运算法则: (P94-95)

设 $\vec{u}, \vec{v}$ 是可导向量值函数, $\vec{C}$ 是常向量, c 是任一常数, $\varphi(t)$ 是可导函数, 则

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{C} = \vec{O}$

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[c\,\vec{u}(t)] = c\,\vec{u}'(t)$

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t) \pm \vec{v}(t)] = \vec{u}'(t) \pm \vec{v}'(t)$

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi(t)\vec{u}(t)] = \varphi'(t)\vec{u}(t) + \varphi(t)\vec{u}'(t)$

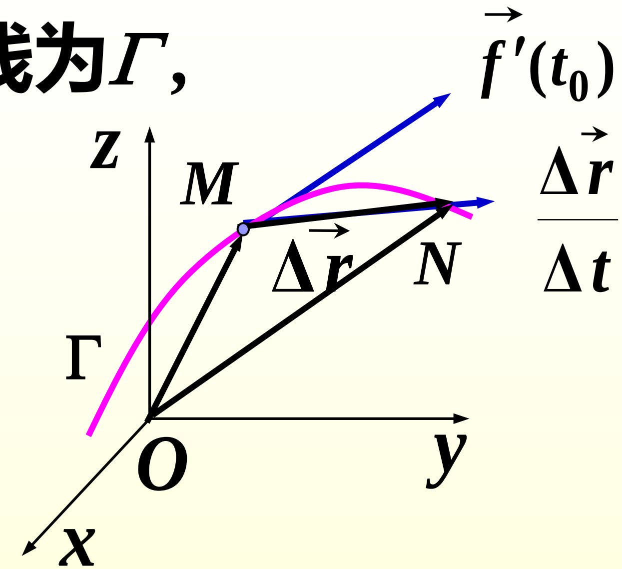
(5) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)] = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$

(6) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)] = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$

(7) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{u}[\varphi(t)] = \varphi'(t)\vec{u}'[\varphi(t)]$

向量值函数导数的几何意义:

在 $\mathbf{R}^3$中, 设$\vec{r} = \vec{f}(t), t \in D$的终端曲线为$\Gamma$,



$$\overrightarrow{OM} = \vec{f}(t_0), \quad \overrightarrow{ON} = \vec{f}(t_0 + \Delta t)$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{f}(t_0 + \Delta t) - \vec{f}(t_0)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{f}'(t_0)$$

设 $\vec{f}'(t_0) \neq \vec{0}$, 则 $\vec{f}'(t_0)$ 表示终端曲线在t_0处的 切向量,

其指向与t 的增长方向一致.

向量值函数导数的物理意义:

设 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 表示质点沿光滑曲线运动的位置向量, 则有

速度向量: $\vec{v}(t)=\vec{f}\,'(t)$

加速度向量: $\vec{a}=\vec{v}\,'(t)=\vec{f}\,''(t)$

例1 设 $\vec{f}(t)=(\cos t)\,\vec{i}+(\sin t)\,\vec{j}+t\,\vec{k}$, 求 $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\vec{f}(t)$.

解 $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\vec{f}(t)=(\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\cos t)\,\vec{i}+(\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\sin t)\,\vec{j}+\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}t\,\vec{k}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+\frac{\pi}{4}\vec{k}\quad\left(=\vec{f}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$

上页 下页

例2 设空间曲线Γ的向量方程为

$$\vec{r}=\vec{f}(t)=(t^2+1,4t-3,2t^2-6t),\quad t\in\mathbf{R}$$

求曲线Γ上对应于$t_0=2$的点处的单位切向量.

解

$$\vec{f}'(t)=(2t,4,4t-6),\quad t\in\mathbf{R}$$

$$\vec{f}'(2)=(4,4,2)$$

$$\left|\vec{f}'(2)\right|=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$$

故一个单位切向量为 $\dfrac{\vec{f}'(2)}{\left|\vec{f}'(2)\right|}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

其方向与 t 的增长方向一致

另一与 t 的增长方向相反的单位切向量为$\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$

例3 一人悬挂在滑翔机上，受快速上升气流影响作螺旋式上升，其位置向量为 $\vec{r}=(3\cos t, 3\sin t, t^2)$，求

(1) 滑翔机在任意时刻 t 的速度向量与加速度向量;

(2) 滑翔机在任意时刻 t 的速率;

(3) 滑翔机的加速度与速度正交的时刻.

解 (1) $\vec{v}=\vec{r}'(t)=(-3\sin t, 3\cos t, 2t)$

$\vec{a}=\vec{v}'=(-3\cos t, -3\sin t, 2)$

(2) $\left|\vec{r}'(t)\right|=\sqrt{(-3\sin t)^2+(-3\cos t)^2+(2t)^2}=\sqrt{9+4t^2}$

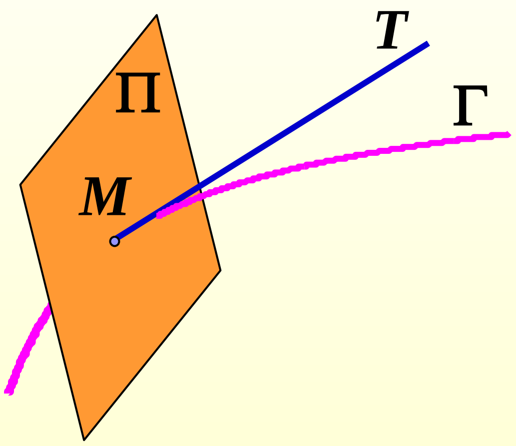
(3) 由 $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$ 即 $9\sin t\cos t-9\cos t\sin t+4t=0$,

得 $t=0$，即仅在开始时刻滑翔机的加速度与速度正交.

目录 上页 下页

二、空间曲线的切线与法平面

空间光滑曲线在点 M 处的**切线**为此点处割线的极限位置. 过点 M 与切线垂直的平面称为曲线在该点的**法平面**.



给定光滑曲线

$$\Gamma:\ \vec{f}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$$

则当φ',ψ',ω'不同时为 0时，Γ在点$M(x, y, z)$处的切向量及法平面的法向量均为

$$\vec{f}'(t)=(\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t))$$

利用 $\begin{cases}\text{点向式可建立曲线的切线方程}\\ \text{点法式可建立曲线的法平面方程}\end{cases}$

1. 曲线方程为参数方程的情况

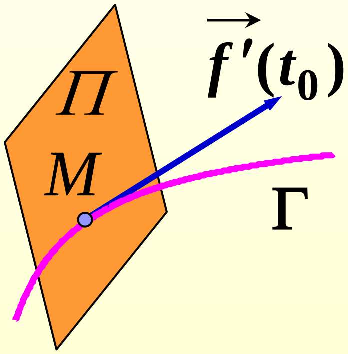
给定光滑曲线 $\Gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),z=\omega(t),t\in[\alpha,\beta]$

设Γ上的点 $M(x_0,y_0,z_0)$对应 $t=t_0,\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$不全

为0,则Γ在点M 的导向量为

$$\overrightarrow{f'}(t_0)=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

因此曲线 Γ在点 M 处的



切线方程

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

例4 求曲线$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$在点 $M\ (1,\ 1,\ 1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解 $x' = 1,\ y' = 2t,\ z' = 3t^2,$ 点$(1,\ 1,\ 1)$ 对应于 $t_0 = 1,$

故点M 处的切向量为 $\vec{T} = (1,\ 2,\ 3)$

因此所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

法平面方程为

$$(x-1) + 2\,(y-1) + 3(z-1) = 0$$

即 $$x + 2y + 3z = 6$$

思考: 光滑曲线

$$\Gamma:\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$$

的切向量有何特点?

答: $$\Gamma:\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$$

切向量 $\vec{T} = (1,\ \varphi',\ \psi')$

2. 曲线为一般式的情况

光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$ 时，Γ 可表示为 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] & \\ y \arrow[rr] & & z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

曲线上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\vec{T}=\left(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\right)$$

$$=\left(1,\left.\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$$

或 $\vec{T}=\left(\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$

则在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 有

切线方程

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

法平面方程

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M (x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M (y-y_0)$$

$$+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M (z-z_0)=0$$

也可表为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(M) & F_y(M) & F_z(M) \\ G_x(M) & G_y(M) & G_z(M) \end{vmatrix}=0$$

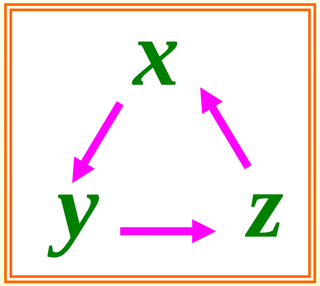
(自己验证)

例5 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解法1 令 $F=x^2+y^2+z^2-6,\ G=x+y+z$，则

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right|_M=\left.2(y-z)\right|_M=-6;$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M=0;\qquad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M=6$$



切向量 $\vec{T}=(-6,\ 0,\ 6)$

切线方程 $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{6}$ 即 $\begin{cases}x+z-2=0\\ y+2=0\end{cases}$

法平面方程 $-6\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+6\cdot(z-1)=0$

即 $x-z=0$

解法2 方程组两边对 x 求导, 得 $\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1 \end{cases}$

解得 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{z-x}{y-z},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{x-y}{y-z}$$

曲线在点 $M(1,-2,1)$ 处有:

切向量 $$\vec{T}=\left(1,\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_M,\ \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_M\right)=(1,0,-1)$$

切线方程 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$$ 即 $\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$

点 $M\,(1,-2,1)$ 处的切向量

$$\vec{T}=(1,0,-1)$$

法平面方程 $1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$

即 $x-z=0$

思考 求曲线 $\Gamma:\begin{cases} y=2x^3 \\ z=x+3 \end{cases}$ 在点 $M(1,2,4)$ 处的切线方程和法平面方程.

$x'=1,\ y'=6x^2,\ z'=1$ 所以切向量 $\vec{T}=\{1,6,1\}$

三、曲面的切平面与法线

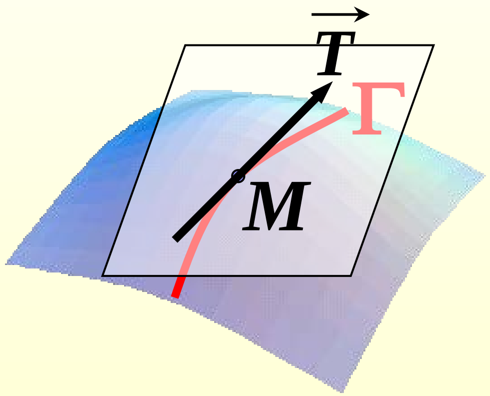
设有光滑曲面 $\Sigma : F(x, y, z) = 0$

通过其上定点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 任意引一条光滑曲线

$\Gamma : x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$，设 $t = t_0$ 对应点 M，且

$\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$ 不全为0．则 Γ 在

点 M 的切向量为



$$\vec{T} = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$$

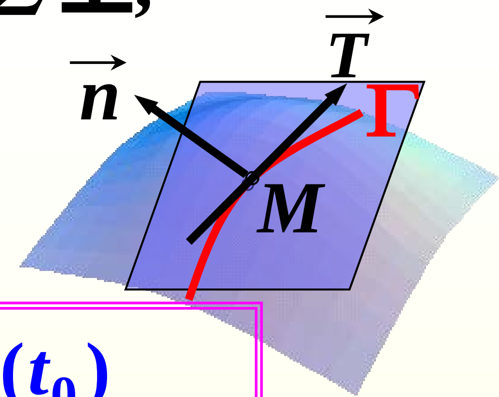
切线方程为
$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$$

下面证明：Σ 上过点 M 的任何曲线在该点的切线都在同一平面上．此平面称为 Σ 在该点的切平面．

上页 下页

证 $\because \Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$ **在 Σ 上,**

$$\therefore \quad F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\equiv 0$$



两边在 $t=t_0$ 处求导,注意 $t=t_0$ 对应点M,

得

$$\boxed{F_x(x_0,y_0,z_0)\,\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\,\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\,\omega'(t_0)=0}$$

令 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

切向量 $\vec{T}\perp\vec{n}$

由于曲线 Γ 的任意性，表明这些切线都在以 $\vec{n}$ 为法向量的平面上，从而切平面存在 .

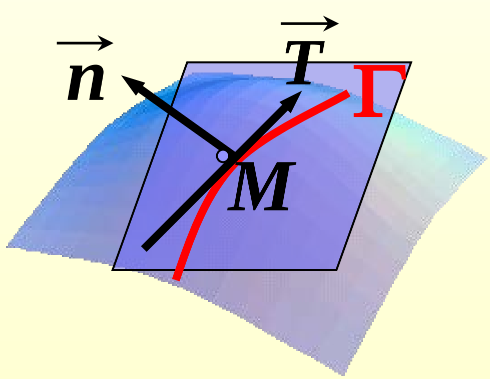
曲面 Σ 在点 M 的**法向量:**

$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

过 M 点且垂直于切平面的直线称为曲面 Σ 在点 M 的**法线.**



法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

特别, 当光滑曲面Σ的方程为显式 $z=f(x,y)$时, 令

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z$$

则在点(x,y,z), $F_x=f_x, F_y=f_y, F_z=-1$

故当函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)有连续偏导数时, 曲面 Σ 在点(x_0,y_0,z_0)有

法向量 $\vec{n}=(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0),-1)$

切平面方程

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程 $$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

用 α, β, γ 表示法向量的方向角，并假定法向量方向向上，则 γ 为锐角.

法向量 $\vec{n} = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$

将 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 分别记为 f_x, f_y，则

法向量的方向余弦：

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

(第二类曲面积分用到)

例6 求球面$x^2+y^2+z^2=14$在点$(1,2,3)$处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$

法向量 $\vec{n}=(2x,2y,2z)$ $\vec{n}\big|_{(1,2,3)}=(2,4,6)$

所以球面在点$(1,2,3)$处有:

切平面方程 $2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$

即 $x+2y+3z-14=0$

法线方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$

即 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ (可见法线经过原点，即球心)

上页 下页

例7 确定正数σ使曲面 $xyz=\sigma$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 相切.

解 二曲面在 M 点的法向量分别为

$$\vec{n}_1=(y_0z_0,\ x_0z_0,\ x_0y_0),\quad \vec{n}_2=(x_0,\ y_0,\ z_0)$$

二曲面在点 M 相切, 故 $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$, 因此有

$$\frac{x_0\,y_0z_0}{x_0^2}=\frac{x_0\,y_0\,z_0}{y_0^2}=\frac{x_0y_0\,z_0}{z_0^2}$$

$$\therefore\qquad x_0^2=y_0^2=z_0^2$$

又点 M 在球面上, 故 $x_0^2=y_0^2=z_0^2=\dfrac{a^2}{3}$

于是有 $\sigma=x_0\,y_0\,z_0=\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$

内容小结

1. 空间曲线的切线与法平面

1) 参数式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

2) 一般式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

切向量

$$\vec{T}=\left(\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$$

切线方程

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)$$
$$+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

2. 曲面的切平面与法线

1) 隐式情况 . 空间光滑曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$

曲面 Σ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的**法向量**

$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),\, F_y(x_0,y_0,z_0),\, F_z(x_0,y_0,z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

2) 显式情况. 空间光滑曲面 $\Sigma : z = f(x, y)$

法向量 $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$

法线的方向余弦

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

切平面方程

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

法线方程 $$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

思考与练习

1. 如果平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切, 求 λ.

提示: 设切点为 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则

$$\begin{cases} \dfrac{6x_0}{3}=\dfrac{2y_0}{\lambda}=\dfrac{2z_0}{-3} & \text{(二法向量平行)} \\ 3x_0+\lambda y_0-3z_0+16=0 & \text{(切点在平面上)} \\ 3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16 & \text{(切点在椭球面上)} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \lambda=\pm 2$

2. 设 $f(u)$ 可微, 证明 曲面 $z = x f(\frac{y}{x})$ 上任一点处的切平面都通过原点.

提示: 在曲面上任意取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则通过此点的切平面为

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M (y - y_0)$$

证明原点坐标满足上述方程 .

结束 上页 下页

备用题

1\. 证明曲面 $F(x-my, z-ny)=0$ 的所有切平面恒与定直线平行, 其中 $F(u,v)$ 可微.

证: 曲面上任一点的法向量

$$\vec{n}=(F_1', F_1'\cdot(-m)+F_2'\cdot(-n), F_2')$$

取定直线的方向向量为 $\vec{l}=(m,1,n)$ (定向量)

则 $\vec{l}\cdot\vec{n}=0$, 故结论成立.

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点(1,1,1) 的切线与法平面.

解: 点 (1,1,1) 处两曲面的法向量为

$$\vec{n}_1=(2x-3,2y,2z)\big|_{(1,1,1)}=(-1,2,2)$$

$$\vec{n}_2=(2,-3,5)$$

因此切线的方向向量为 $\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(16,9,-1)$

由此得切线: $$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$$

法平面: $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$

即 $$16x+9y-z-24=0$$

结束 上页 下页

第七节 方向导数与梯度

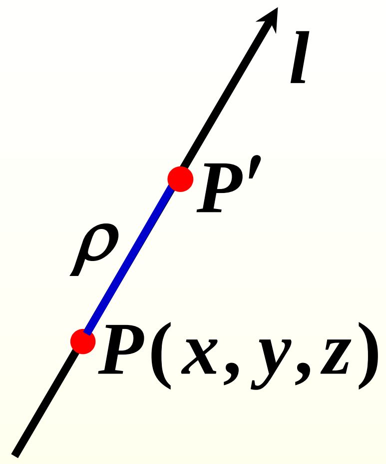
一、方向导数

二、梯度

三、物理意义

一、方向导数

定义: 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处



沿方向 l (方向角为 α,β,γ) 存在下列极限:

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta f}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho}\xlongequal{\text{记作}}\frac{\partial f}{\partial l}$$

$$\left(\begin{array}{l}\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2},\\ \Delta x=\rho\cos\alpha,\ \Delta y=\rho\cos\beta,\ \Delta z=\rho\cos\gamma\end{array}\right)$$

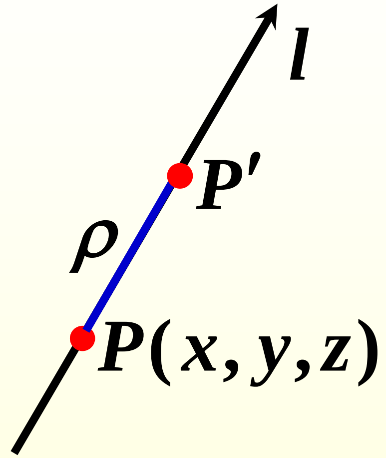
则称 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 为函数在点 P 处沿方向 l 的方向导数.

定理: 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处可微，

则函数在该点沿任意方向 l 的方向导数存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中 α,β,γ 为 l 的方向角.



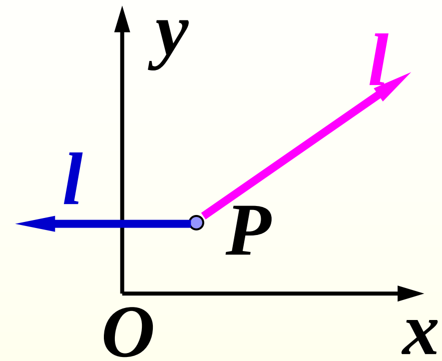
证明 **由函数** $f(x,y,z)$ **在点** P **可微，得**

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+o(\rho)$$

$$=\rho\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)+o(\rho)$$

故 $$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta f}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

对于二元函数 $f(x,y)$, 在点 $P(x,y)$ 处沿方向 l (方向角为 α, β) 的方向导数为



$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\rho}$$

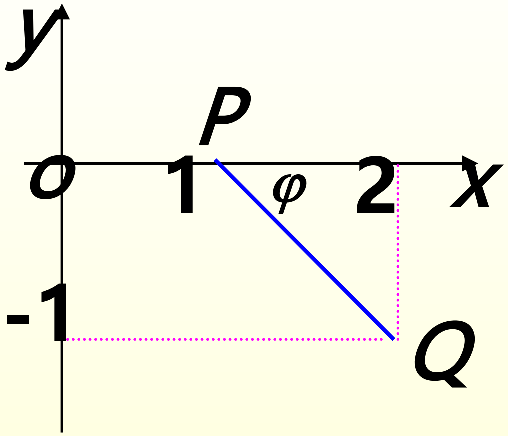
$$= f_x(x,y)\cos\alpha + f_y(x,y)\cos\beta$$

$$\left(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},\ \Delta x = \rho\cos\alpha,\ \Delta y = \rho\cos\beta\right)$$

特别:

- 当 l 与 x 轴同向 $\left(\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 有 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$
- 当 l 与 x 轴反向 $\left(\alpha = \pi, \beta = \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 有 $\frac{\partial f}{\partial l} = -\frac{\partial f}{\partial x}$

例1 求函数$z = xe^{2y}$在点$P(1,0)$处沿从点$P(1,0)$到点$Q(2,-1)$的方向导数.



解 方向l即向量 $\overrightarrow{PQ} = (1,-1)$ $\therefore \varphi = -\dfrac{\pi}{4}$

又 $\because \dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{2y}$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xe^{2y}$

在点$P(1,0)$处, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial l} = 1 \cdot \cos(-\dfrac{\pi}{4}) + 2 \cdot \sin(-\dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

例3 求函数 $u = x^2yz$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 沿向量 $\vec{l} = (2, -1, 3)$ 的方向导数 .

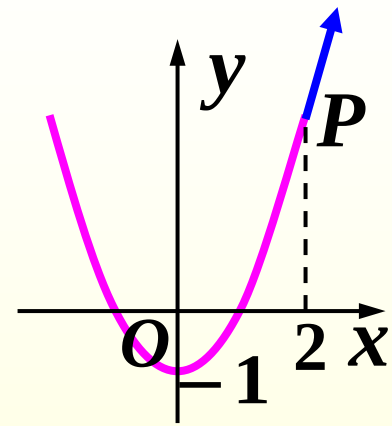
解 向量 $\vec{l}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\therefore\ \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P = \left.\left(2xyz\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} - x^2z\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} + x^2y\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\right|_{(1,1,1)}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{14}}$$

例4 求函数$z=3x^2y-y^2$在点$P(2,3)$沿曲线 $y=x^2-1$ 朝 x 增大方向的方向导数. （补充）



解 将已知曲线用参数方程表示为

$$\begin{cases} x = x \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

它在点 P 的切向量为 $(1,2x)\big|_{x=2} = (1,4)$

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}, \qquad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial l}\bigg|_P = \left[6xy\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + (3x^2-2y)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right]\bigg|_{(2,3)} = \frac{60}{\sqrt{17}}$$

上页 下页

例5 设$\vec{n}$是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$处指向外侧的法向量, 求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数. （补充）

解 $\vec{n}=(4x\,,6y\,,2z)\big|_P=2(2\,,3\,,1)$

方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}}\,,\ \cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}}\,,\ \cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$

而 $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}}$$

同理得 $$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}}\,,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\sqrt{14}$$

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\frac{1}{14}\left(6\times2+8\times3-14\times1\right)=\frac{11}{7}$$

上页 下页

二、梯度

方向导数公式 $$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

令向量 $\vec{G}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\vec{G}\cdot\vec{l}=|\vec{G}|\cos(\widehat{\vec{G},\vec{l}})\qquad(|\vec{l}|=1)$$

当 $\vec{l}$ 与 $\vec{G}$ 方向一致时，**方向导数取最大值：**

$$\max\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)=|\vec{G}|$$

这说明 $\vec{G}$: $\begin{cases}\text{方向：}f\text{ 变化率最大的方向}\\ \text{模：}f\text{ 的最大变化率之值}\end{cases}$

取得最大方向导数的方向

方向导数的最大值

$$\vec{G}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Bigg|_P$$

1. 定义

向量 $\vec{G}$ 称为函数 $f(P)$ 在点 P 处的梯度 (gradient), 记作 grad $f(P)$,或 $\nabla f(P)$, 即

$$\operatorname{grad} f(P)=\nabla f(P)=\left(f_x(P),\ f_y(P),\ f_z(P)\right)$$

其中 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ 称为向量微分算子或 Nabla算子.

同样可定义二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度

$$\operatorname{grad} f=\nabla f(x,y)=\left(f_x(x,y),\ f_y(x,y)\right)$$

说明: 函数的方向导数为梯度在该方向上的投影:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\operatorname{grad} f\cdot\vec{e}_l \qquad (\vec{e}_l\text{为方向}\vec{l}\text{上的单位向量})$$

例6 设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 求 $\mathrm{grad}f(1,-1,2)$

解 $\because \mathrm{grad}f(x,y,z)=\left(f_x, f_y, f_z\right)=\left(2x,2y,2z\right)$

$\therefore \mathrm{grad}f(1,-1,2)=\left(2,-2,4\right)$

例7 函数 $u = xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大? 并求此方向导数的最大值.（P_{111} 第10题）

解 $\because \mathrm{grad}f(x,y,z)=\left(u_x, u_y, u_z\right)=\left(y^2z, 2xyz, xy^2\right)$

$\therefore \mathrm{grad}f(1,-1,2)=\left(2,-4,1\right)$

$\therefore \left|\mathrm{grad}f(1,-1,2)\right|=\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{21}$

所以沿梯度方向 $(2,-4,1)$ 的方向导数最大, 最大值为 $\sqrt{21}$

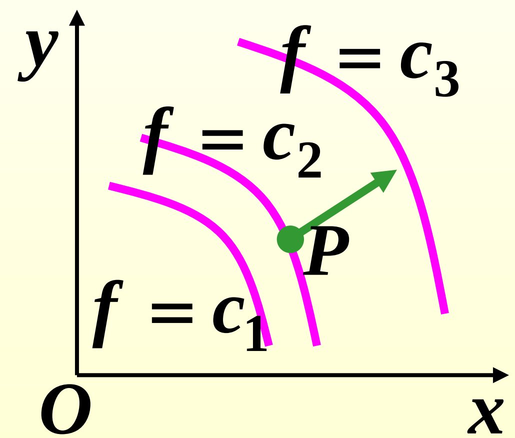
2. 梯度的几何意义

对函数 $z = f(x,y)$,曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = c \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影

$L^*: f(x,y) = c$ **称为函数 f 的等值线或等高线.** 举例

设 f_x, f_y 不同时为零，**则 L^* 上点 P 处的法向量为**

$$(f_x, f_y)\big|_P = \mathrm{grad}\, f\big|_P = \nabla f\big|_P$$



(设 $c_1 < c_2 < c_3$)

函数在一点的梯度垂直于该点等值线,指向函数增大的方向.

同样, $f(x,y,z) = c$ **称为** $u = f(x,y,z)$ **的等值面(等量面). 当其各偏导数不同时为零时, 其上点 P 处的法向量为** $\mathrm{grad}\, f\big|_P = \nabla f\big|_P$.

例9 设函数 $f(x,y,z)=x^2+y^z$

(1) 求等值面 $f(x,y,z)=2$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的切平面方程.

(2) 求函数 f 在点 $P(1,1,1)$ 沿增加最快方向的方向导数.

解 (1) 点P处切平面的法向量为

$$\vec{n}=\nabla f(P)=(2x,\ zy^{z-1},\ y^z\ln y)\big|_P=(2,1,0)$$

故所求切平面方程为 $2(x-1)+(y-1)+0\cdot(z-1)=0$

即 $2x+y-3=0$

(2) 函数 f 在点P处增加最快的方向为

$$\vec{n}=\nabla f(P)=(2,1,0)$$

沿此方向的方向导数为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial n}\right|_P=|\nabla f(P)|=\sqrt{5}$

注意: 对三元函数, 与 $\nabla f(P)$ 垂直的方向有无穷多

思考: f 在点P处沿什么方向变化率为0 ?

上页 下页

3. 梯度的基本运算公式

(1) $\operatorname{grad} c = \vec{0}$ 或 $\nabla c = \vec{0}$ （c为常数）

(2) $\operatorname{grad}(c\,u) = c \operatorname{grad} u$ 或 $\nabla(c\,u) = c\nabla u$

(3) $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v$ 或 $\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$

(4) $\operatorname{grad}(u v) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$

或 $\nabla(u v) = u \nabla v + v \nabla u$

(5) $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$ 或 $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$

(6) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$ 或 $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$

例10 设 $f(r)$ 可导，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为点 $P(x,y,z)$ 处矢径 $\vec{r}$ 的模，试证 $\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\vec{e}_r$.

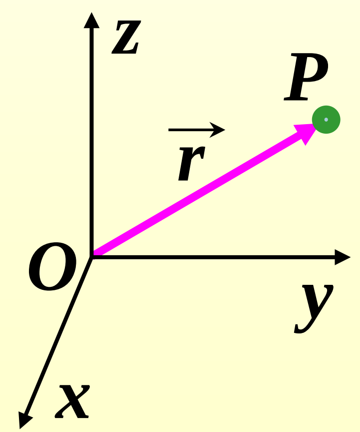
证 $\because \dfrac{\partial f(r)}{\partial x}=f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial y}=f'(r)\frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial f(r)}{\partial z}=f'(r)\frac{z}{r}$$

$$\therefore \operatorname{grad} f(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\vec{k}$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}\vec{r}=f'(r)\vec{e}_r$$



三、物理意义

$$\text{函数}\ (\text{物理量的分布}) \longrightarrow \text{场} \begin{cases} \text{数量场}\ (\text{数性函数}) & \text{如: 温度场, 电势场等} \\ \text{向量场}\ (\text{矢性函数}) & \text{如: 力场,速度场等} \end{cases}$$

可微函数 $f(P)$（势） $\longrightarrow$ 梯度场 $\mathrm{grad}\, f(P)$（势场）

注意: 任意一个向量场不一定是势场.

例11已知位于坐标原点的点电荷 q 在任意点 $P(x,y,z)$ 处所产生的电势为 $u=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$ $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$，试证

$$\operatorname{grad} u=-\vec{E} \qquad (\text{场强 } \vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r)$$

证 利用例10的结果 $\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\vec{e}_r$

$$\operatorname{grad} u=\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r}\right)'\vec{e}_r=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r=-\vec{E}$$

这说明场强：垂直于等势面，

且指向电势减少的方向.

上页 下页

内容小结

1. 方向导数

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 沿方向 l (方向角为 α,β,γ) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 沿方向 l (方向角为 α,β)的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$$

2. 梯度

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = (f_x(x,y),\, f_y(x,y))$$

- 梯度的特点 $\begin{cases} \text{方向：} f \text{ 变化率最大的方向} \\ \text{模：} f \text{ 的最大变化率之值} \end{cases}$

3. 关系

- 可微 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 方向导数存在 $\underset{\not\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow}$ 偏导数存在

- $\dfrac{\partial f}{\partial l} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{e}_l$ —— 梯度在方向 $\vec{l}$ 上的投影.

备用题 **1.** 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad} u\big|_M = \underline{\frac{2}{9}(1,2,-2)}$ (1992 考研)

解 $\operatorname{grad} u\big|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(1,2,-2)}$

令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{r^2}\cdot 2x$

注意 x, y, z 具有轮换对称性

$$=\left(\frac{2x}{r^2}, \frac{2y}{r^2}, \frac{2z}{r^2}\right)\Big|_{(1,2,-2)} = \frac{2}{9}(1,2,-2)$$

2. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点$A(1,0,1)$ 处沿点A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数是 $\underline{\ \frac{1}{2}\ }$.(1996考研)

提示: $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, 其单位向量为

$$\vec{l}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(x+1)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(1+\sqrt{y^2+1})}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{1}{2}$$

第八节 多元函数的极值及其求法

一、多元函数的极值

二、最值应用问题

三、条件极值

一、 多元函数的极值

定义: 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内异于 (x_0, y_0) 的任何点 (x, y)，都有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \quad (\text{或}\ f(x, y) > f(x_0, y_0))$$

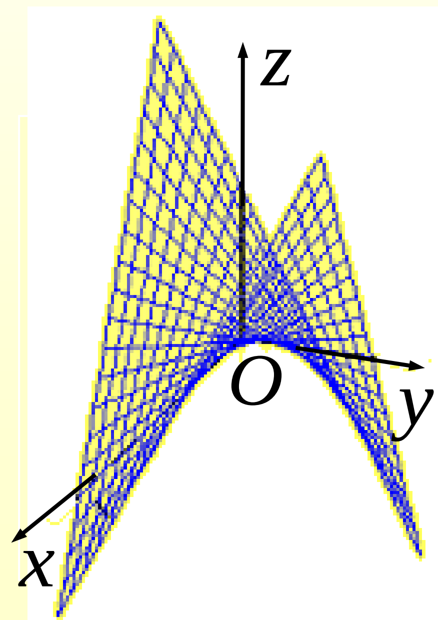
则称函数在该点取得**极大值(极小值)**. 极大值和极小值统称为**极值**, 使函数取得极值的点称为**极值点**.

例如：

$z = 3x^2 + 4y^2$ 在点 (0,0) 有极小值;

$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 (0,0) 有极大值;

$z = xy$ 在点 (0,0) 无极值.



例1. **已知函数** $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ **的某个邻域内连续, 且**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1,$$ **则(A)**

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点 .

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点 .

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点 .

(*D*) 根据条件无法判断点(0, 0)是否为*f* (*x*,*y*) 的极值点.

(2003 考研)

提示 **由题设** $\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1+\alpha$, 其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\alpha=0$

$$\Rightarrow f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2+\alpha\cdot(x^2+y^2)^2$$

$\Rightarrow$ 在(0,0)的邻近 $f(x,y)$ 的正负由 xy 确定

定理1 (必要条件)函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数, 且在该点取得极值 , 则有

$$f_x(x_0,y_0)=0\,,\ \ f_y(x_0,y_0)=0.$$

证 因 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极值 , 故

$$z=f(x,y_0) \text{ 在 } x=x_0 \text{ 取得极值}$$

$$z=f(x_0,y) \text{ 在 } y=y_0 \text{ 取得极值}$$

据一元函数极值的必要条件可知定理结论成立.

说明: 使偏导数都为 0 的点称为**驻点** .

但驻点不一定是极值点.

例如, $z=xy$ 有驻点(0, 0), 但在该点不取极值.

定理2 (充分条件)若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的**的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数，且**

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) = 0$$

令 $A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$

则: 1) **当** $AC - B^2 > 0$ **时, 具有极值** $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) **当** $AC - B^2 < 0$ **时, 没有极值.**

3) **当** $AC - B^2 = 0$ **时, 不能确定 , 需另行讨论.**

证明见 第九节(P125) .

例2. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解　第一步 求驻点.

解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得驻点: (1, 0) , (1, 2) , (–3, 0) , (–3, 2) .

第二步 判别. 求二阶偏导数

$$\underbrace{f_{xx}(x,y)=6x+6}_{A}, \quad \underbrace{f_{xy}(x,y)=0}_{B}, \quad \underbrace{f_{yy}(x,y)=-6y+6}_{C}$$

在点(1,0) 处 $A=12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=12\times 6>0,\ A>0,$$

$\therefore f(1,0)=-5$为极小值;

在点(1,2) 处 $A = 12, B = 0, C = -6$

$$AC - B^2 = 12 \times (-6) < 0, \therefore f(1,2)$$不是极值;

在点(–3,0) 处 $A = -12,\ B = 0,\ C = 6,$

$$AC - B^2 = -12 \times 6 < 0, \therefore f(-3,0)$$不是极值;

在点(–3,2) 处 $A = -12,\ B = 0,\ C = -6$

$$AC - B^2 = -12 \times (-6) > 0,\ A < 0,$$

$\therefore f(-3,2) = 31$为极大值.

$$f_{xx}(x,y) = 6x + 6,\ f_{xy}(x,y) = 0,\ f_{yy}(x,y) = -6y + 6$$

A　　B　　C

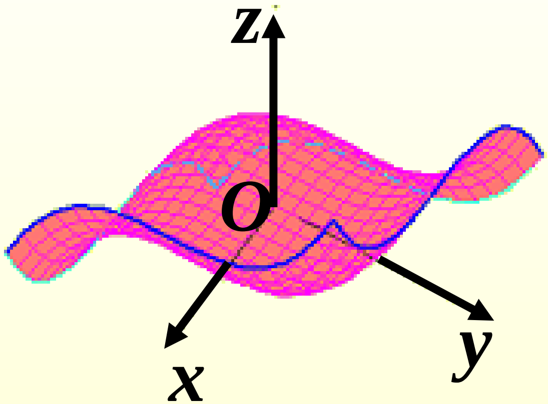
上页　下页

例3. 讨论函数 $z=x^3+y^3$ 及 $z=(x^2+y^2)^2$ 在点(0,0)是否取得极值.

解 显然 (0,0) 都是它们的驻点，并且在 (0,0) 都有

$$AC-B^2=0$$

$z=x^3+y^3$ 在(0,0)点邻域内的取值



可能为 $\begin{cases}\text{正}\\ \text{负}\\ 0\end{cases}$，因此 $z(0,0)$ 不是极值.

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$z=(x^2+y^2)^2>z\big|_{(0,0)}=0$

因此 $z(0,0)=(x^2+y^2)^2\big|_{(0,0)}=0$ 为极小值.

二、最值应用问题

依据

函数 f 在有界闭区域上连续

$\Downarrow$

函数 f 在该有界闭区域上可达到最值

最值可疑点 $\begin{cases}\text{驻点}\\ \text{边界上的最值点}\end{cases}$

特别，当区域内部最值存在，且只有一个极值点 P 时，

$f(P)$ 为极小值 (大) $\longrightarrow$ $f(P)$ 为最小值 (大)

例4. 某厂要用铁板做一个体积为2 m^3的有盖长方体水箱,问当长、宽、高各取怎样的尺寸时, 才能使用料最省?

解 设水箱长,宽分别为 x , y m ,则高为 $\frac{2}{xy}$m,

则水箱所用材料的面积为

$$A = 2\left(xy + y\cdot\frac{2}{xy} + x\cdot\frac{2}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) \quad \begin{pmatrix} x > 0 \\ y > 0 \end{pmatrix}$$

令 $\begin{cases} A_x = 2(y - \frac{2}{x^2}) = 0 \\ A_y = 2(x - \frac{2}{y^2}) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$

根据实际问题可知最小值在定义域内应存在, 因此可断定此唯一驻点就是最小值点. 即当长、宽均为 $\sqrt[3]{2}$

高为 $\frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$ 时, 水箱所用材料最省.

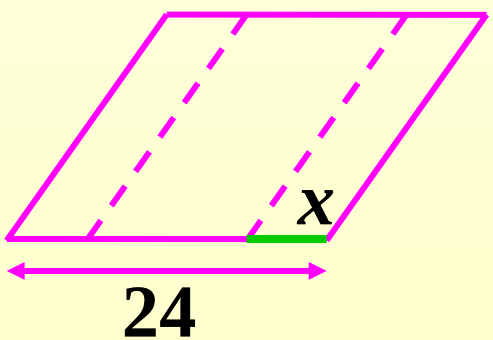
例5. 有一宽为24cm的长方形铁板，把它折起来做成一个断面为等腰梯形的水槽，问怎样折法才能使断面面积最大.

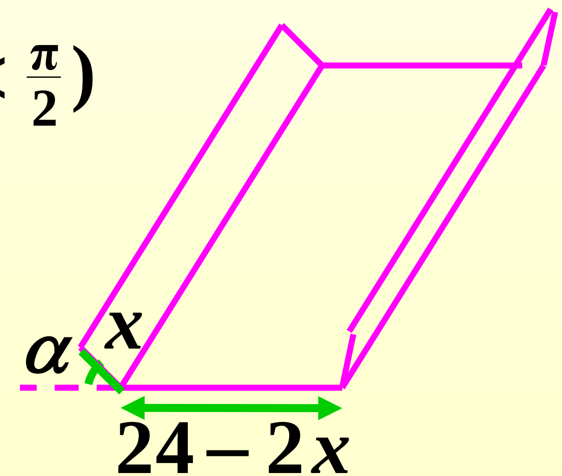
解 设折起来的边长为 x cm, 倾角为 α , 则断面面积为

$$A=\frac{1}{2}(24-2x+2x\cos\alpha+24-2x)\cdot x\sin\alpha$$

$$=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$(D: 0<x<12,\ 0<\alpha<\tfrac{\pi}{2})$$





$$A = 24x\sin\alpha - 2x^2\sin\alpha + x^2\cos\alpha\sin\alpha$$
$$(D:\ 0 < x < 12,\ 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2})$$

令 $\begin{cases} A_x = 24\sin\alpha - 4x\sin\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha = 0 \\ A_\alpha = 24x\cos\alpha - 2x^2\cos\alpha + x^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \end{cases}$

$$\Big\downarrow\ \sin\alpha \neq 0,\ x \neq 0$$

$$\begin{cases} 12 - 2x + x\cos\alpha = 0 \\ 24\cos\alpha - 2x\cos\alpha + x(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \end{cases}$$

解得: $\alpha = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ,\ x = 8\,(\mathrm{cm})$

由题意知,最大值在定义域D 内达到, 而在域D 内只有一个驻点, 故此点即为所求.

三、条件极值

极值问题 $\begin{cases} \text{无条件极值：对自变量只有定义域限制} \\ \text{条件极值：对自变量除定义域限制外，还有其他条件限制} \end{cases}$

条件极值的求法:

方法1　代入法. 例如 ,

在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下, 求函数 $z = f(x, y)$ 的极值

$\Big\Downarrow$ 转化　从条件 $\varphi(x, y) = 0$ 中解出 $y = \psi(x)$

求一元函数 $z = f(x, \psi(x))$ **的无条件极值问题**

上页　下页

方法2　拉格朗日乘数法.例如,

在条件$\varphi(x,y)=0$下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

分析：如方法 1 所述, 设 $\varphi(x,y)=0$ **可确定隐函数** $y=\psi(x)$, **则问题等价于一元函数** $z=f(x,\psi(x))$ **的极值问题, 故极值点必满足**

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$, **故有** $f_x-f_y\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$

记

$$\frac{f_x}{\varphi_x}=\frac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$$

上页　下页

极值点必满足 $\begin{cases} f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$

引入辅助函数 $F = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

则极值点满足: $\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$

辅助函数F 称为**拉格朗日(Lagrange)函数**.利用拉格朗日函数求极值的方法称为**拉格朗日乘数法**.

推广 拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形.

例如, 求函数 $u = f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z) = 0$, $\psi(x,y,z) = 0$ 下的极值.

设 $F = f(x,y,z) + \lambda_1 \varphi(x,y,z) + \lambda_2 \psi(x,y,z)$

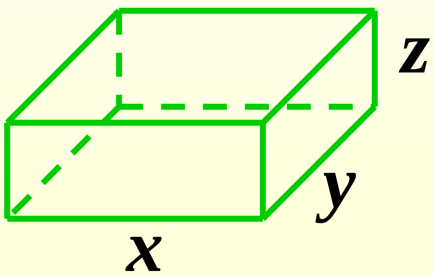
解方程组
$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda_1 \varphi_x + \lambda_2 \psi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda_1 \varphi_y + \lambda_2 \psi_y = 0 \\ F_z = f_z + \lambda_1 \varphi_z + \lambda_2 \psi_z = 0 \\ F_{\lambda_1} = \varphi = 0 \\ F_{\lambda_2} = \psi = 0 \end{cases}$$

可得到条件极值的可疑点 .

例6. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱，试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省?

解 设 x, y, z 分别表示长、宽、高，则问题为求 x, y, z 使在条件 $xyz = V_0$ 下水箱表面积 $S = 2(xz + yz) + xy$ 最小.

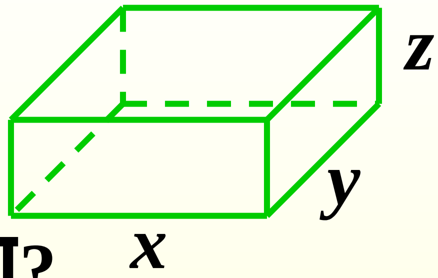
令 $F = 2(xz + yz) + xy + \lambda(xyz - V_0)$



解方程组
$$\begin{cases} F_x = 2z + y + \lambda yz = 0 \\ F_y = 2z + x + \lambda xz = 0 \\ F_z = 2(x + y) + \lambda xy = 0 \\ F_\lambda = xyz - V_0 = 0 \end{cases}$$

得唯一驻点 $x = y = 2z = \sqrt[3]{2V_0}$, $\lambda = \frac{-4}{\sqrt[3]{2V_0}}$

由题意可知合理的设计是存在的, 因此 , 当高为 $\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$, 长、宽为高的 2 倍时，所用材料最省.



思考:

1) 当水箱封闭时, 长、宽、高的尺寸如何?

提示: 利用对称性可知, $x = y = z = \sqrt[3]{V_0}$

2) 当开口水箱底部的造价为侧面的二倍时, 欲使造价最省, 应如何设拉格朗日函数? 长、宽、高尺寸如何?

提示: $F = 2(xz + yz) + 2\,xy + \lambda(xyz - V_0)$

长、宽、高尺寸相等 .

内容小结

1. 函数的极值问题

第一步 利用必要条件在定义域内找驻点.

如对二元函数 $z = f(x, y)$, 即解方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

第二步 利用充分条件 判别驻点是否为极值点 .

2. 函数的条件极值问题

(1) 简单问题用代入法

(2) 一般问题用拉格朗日乘数法

如求二元函数 $z = f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的极值,

设拉格朗日函数 $F = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$

解方程组 $\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$ 求驻点 .

3. 函数的最值问题

第一步 找目标函数, 确定定义域 (及约束条件)

第二步 判别

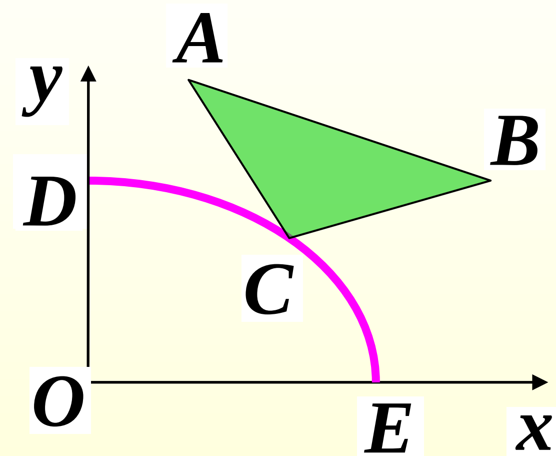
- 比较驻点及边界点上函数值的大小
- 根据问题的实际意义确定最值

结束 目录 上页 下页

思考与练习 已知平面上两定点 $A(1,3)$, $B(4,2)$,

试在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$ 圆周上求一点 C, 使

$\triangle ABC$ 面积 $S_\triangle$ 最大.



解答提示: 设 C 点坐标为 (x, y),

则 $$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\,\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{vmatrix}\,\right|=\frac{1}{2}\left|(0,0,x+3y-10)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x+3y-10\right|$$

设拉格朗日函数 $F=(x+3y-10)^2+\lambda(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4})$

解方程组 $$\begin{cases} 2(x+3y-10)-\dfrac{2\lambda}{9}x=0 \\ 6(x+3y-10)-\dfrac{2\lambda}{4}y=0 \\ 1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=0 \end{cases}$$

得驻点 $x=\frac{3}{\sqrt{5}}$, $y=\frac{4}{\sqrt{5}}$, 对应面积 $S\approx 1.646$

而 $S_D=2$, $S_E=3.5$, 比较可知, 点 C 与 E 重合时, 三角形面积最大.

备用题 1. 求半径为R 的圆的内接三角形中面积最大者.

解 设内接三角形各边所对的圆心角为 x, y, z, 则

$$x+y+z=2\pi, \quad x>0, y>0, z>0$$

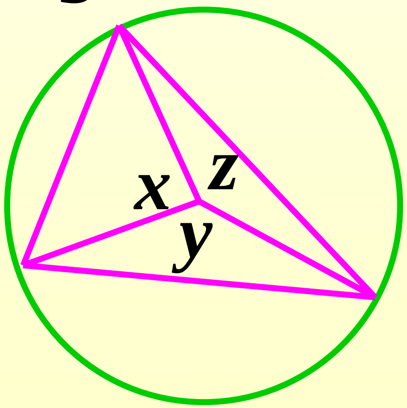
注

它们所对应的三个三角形面积分别为

$$S_1=\frac{1}{2}R^2\sin x, \quad S_2=\frac{1}{2}R^2\sin y, \quad S_3=\frac{1}{2}R^2\sin z$$

拉格朗日函数 $F=\sin x+\sin y+\sin z+\lambda(x+y+z-2\pi)$

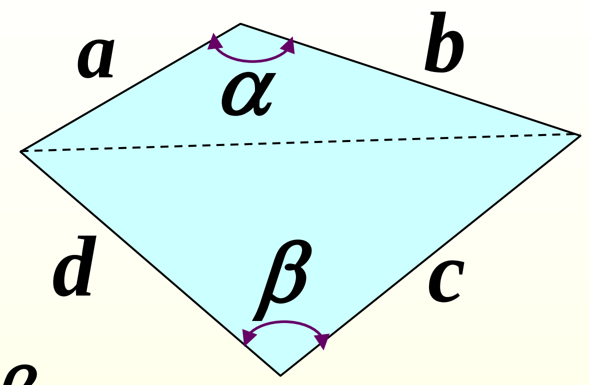
解方程组 $\begin{cases}\cos x+\lambda=0\\ \cos y+\lambda=0\\ \cos z+\lambda=0\\ x+y+z-2\pi=0\end{cases}$, 得 $x=y=z=\dfrac{2\pi}{3}$



故圆内接正三角形面积最大, 最大面积为

$$S_{\max}=\frac{R^2}{2}\cdot 3\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

2. 求平面上以 a, b, c, d 为边的面积最大的四边形，试列出其目标函数和约束条件？



提示:

目标函数： $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin\beta$

$(0<\alpha<\pi, 0<\beta<\pi)$

约束条件： $a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\beta$

答案: $\alpha+\beta=\pi$, 即四边形内接于圆时面积最大 .

3. 设某电视机厂生产一台电视机的成本为c, 每台电视机的销售价格为p, 销售量为x, 假设该厂的生产处于平衡状态, 即生产量等于销售量. 根据市场预测, x 与p 满足关系:

$$x = M\mathrm{e}^{-ap} \quad (M > 0, a > 0) \qquad ①$$

其中M是最大市场需求量, a是价格系数. 又据对生产环节的分析, 预测每台电视机的生产成本满足:

$$c = c_0 - k\ln x \quad (k > 0, x > 1) \qquad ②$$

其中c_0是生产一台电视机的成本, k是规模系数. 问应如何确定每台电视机的售价 p , 才能使该厂获得最大利润?

解 销售x台获得利润 $u = (p - c)x$

问题化为在条件①, ②下求 $u = (p - c)x$的最大值点.

结束 上页 下页

作拉格朗日函数

$$L(x,p,c)=(p-c)x+\lambda(x-Me^{-ap})+\ \mu(c-c_0+k\ln x)$$

令

$$L_x=(p-c)+\lambda+k\frac{\mu}{x}=0 \quad ③$$

$$L_p=x+\lambda aMe^{-ap}=0 \quad ④$$

$$L_c=-x+\mu=0 \quad ⑤$$

将①代入④得$\lambda=-\frac{1}{a}$,由⑤得 $\frac{\mu}{x}=1$

将以上结果及①, ②代入③, 得

$$p-c_0+k(\ln M-ap)-\frac{1}{a}+k=0$$

解得 $$p=p^*=\frac{c_0-k\ln M+\frac{1}{a}-k}{1-ak}$$

因问题本身最优价格必定存在, 故此 p^* 即为所求.