习题 5.2

1. 设 f 、 $g\in C[a,b]$，证明

（1）若 $f(x)\geq 0$（$x\in[a,b]$），且 $f(x)\not\equiv 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

（2）若 $f(x)\geq g(x)$（$x\in[a,b]$），且 $f(x)\not\equiv g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

2. 利用定积分的性质以及第 5 题的结论，比较下列各组中积分的大小.

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x$；（2）$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x$；

（3）$\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x$，$\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{\mathrm{e}}\ln(x^2)\mathrm{d}x$.

3. 证明下列不等式：

（1）$\dfrac{2}{3}<\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x-x^2}}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；（2）$\dfrac{1}{2}<\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

（3）$\dfrac{2\pi}{9}<\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x<\dfrac{4\pi}{9}$.

4. 计算下列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{1/2}\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

5. 设函数 $f\in C[0,1]\cap D(0,1)$，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

6. 设函数 $f\in C[0,1]\cap D(0,$ 且 $3\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x=f($. 证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.