习题 10.2

1. 把下列第二类曲线积分化为第一类曲线积分.

(1) $\int_C x^2 y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$, 其中 C 为曲线 $y=x^3$ 上从点 $(-1,-1)$ 到点 $(1,1)$ 的弧段;

(2) $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$, 其中 L 为曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上相应于参数 t 从 0 变到 1 的弧段.

2. 计算曲线积分 $\int_{OA}(x^2-y^2)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y$，其中 O 为坐标原点，点 A 的坐标为 $(1,1)$：

(1) OA 为直线段 $y=x$；

(2) OA 为抛物线段 $y=x^2$；

(3) OA 为 $y=0$, $x=1$ 的折线段.

3. 计算下列第二类曲线积分：

(1) $\int_C \dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，其中 C 为 $y=1-|x|$ 上从点 $(1,0)$ 经点 $(0,1)$ 到点 $(-1,0)$ 的折线段;

(2) $\int_C y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, 其中 C 为 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t \end{cases}\left(t:0\to\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(3) $\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z$, 其中 L 为 $\begin{cases} x=t, \\ y=t^2, \\ z=t^3 \end{cases}$ $(t:0\to 1)$.

(4) $\oint_L (z-y)\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}y + (y-x)\mathrm{d}z$, 其中 L 为椭圆 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 且从 z 轴正向看去, L 取顺时针方向.

4. 计算下列变力 $\boldsymbol{F}$ 在质点沿指定曲线移动过程中所作的功.

(1) $\boldsymbol{F}=(x^2 y, -xy)$, 沿平面曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(t^3, t^4)$ 从参数 $t=0$ 到 $t=1$ 的点.

(2) $\boldsymbol{F}=(x^2, xy, z^2)$, 沿空间曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(\sin t, \cos t, t^2)$ 从参数 $t=0$ 到 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 的点.

5. 设变力 $\boldsymbol{F}$ 在点 $M(x,y)$ 处的大小 $\|\boldsymbol{F}\|=k\|\boldsymbol{r}\|$，方向与 $\boldsymbol{r}$ 成 $\dfrac{\pi}{2}$ 的角, 其中 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ (图 10-38)，试求当质点沿下列曲线从点 $A(a,0)$ 移到点 $B(0,a)$ 时 $\boldsymbol{F}$ 所作的功：

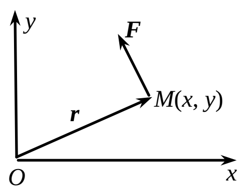

图 10-38

(1) 圆周 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限内的弧段;

(2) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在第一象限内的弧段.

6. 在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x\ (a>0)$ 中，求一条曲线 C，使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_C (1+y^3)\mathrm{d}x + (2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

7. 把第二类曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化为第一类曲面积分：

(1) Σ 为平面 $x+z=a$ 被柱面 $x^2+y^2=a^2$ 所截下的部分, 并取上侧;

(2) Σ 为抛物面 $y=x^2+2z^2$ 被平面 $y=2$ 所截下的部分, 并取左侧.

8. 计算下列第二类曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 位于第一卦限部分, 并取上侧；

(2) $\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分, 并取外侧；

(3) $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{e}^y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{e}^x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 Σ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ （$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$), 并取上侧；

(4) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 位于第二卦限部分, 并取外侧；

(5) $\oiint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围立体的表面, 并取外侧；

(6) $\oiint\limits_{\Sigma} \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$ ，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与平面 $z=R$ 和 $z=-R$ $(R>0)$ 所围立体的表面, 并取外侧；

(7) $\iint\limits_{\Sigma} -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截下的部分, 并取外侧；

(8) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为螺旋面 $x=u\cos v$， $y=u\sin v$， $z=v$， $(0\le u\le 1,\ 0\le v\le \pi)$, 并取上侧.

9. 计算下列流场在单位时间内通过曲面 Σ 流向指定侧的流量：

(1) $\boldsymbol{v}(x,y,z)=(x^2,y^2\ z^2)$, Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 第一卦限部分, 流向上侧；

(2) $\boldsymbol{v}(x,y,z)=(x^2,xy,y^2)$, Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=1$ 所围立体的表面, 流向外侧.